

FAMAF

Facultad de Matemática,  
Astronomía, Física y  
Computación



Universidad  
Nacional  
de Córdoba

# FUNCIONES ESFÉRICAS MATRICIALES EN GRUPOS FINITOS

AUTORA: Carmen Luz Blanco Villacorta.

DIRECTORA: Dra. María Ines Pacharoni.

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación  
como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctora en  
Matemática, de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Diciembre de 2023

©FA.M.A.F. - U.N.C.



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/>.

*En memoria de mi amado padre  
y de mi hija Ámbar,  
que es la luz que acompaña mis días.*

---

# Resumen

---

Este trabajo está dividido en dos partes. En la primera consideramos un par  $(G, K)$  arbitrario, con  $G$  grupo finito y  $K$  un subgrupo de  $G$ . Establecemos caracterizaciones y propiedades de las funciones esféricas matriciales de  $(G, K)$ . Estos resultados fueron presentados originalmente por el Dr. Alfredo Tiraó para grupos localmente compactos arbitrarios.

En la primera caracterización de función esférica la subálgebra  $A[G]^K$  de  $K$ -puntos fijos del álgebra de grupo  $A[G]$ , juega el papel de la subálgebra  $D(G)^K$  de operadores invariantes a derecha por elementos de  $K$  del álgebra de operadores diferenciales invariantes a izquierda  $D(G)$ , que se considera cuando  $G$  es un grupo de Lie conexo y  $K$  es un subgrupo compacto de  $G$ . Otra de las caracterizaciones fundamentales es por medio de representaciones del grupo  $G$ .

En la segunda parte consideramos el grupo simétrico  $G = \mathfrak{S}_n$ , para  $n$  arbitrario. Hacemos una revisión de los conceptos de la teoría de Young, que proporciona herramientas versátiles para representaciones de  $\mathfrak{S}_n$ .

Consideramos generalidades de los subgrupos de la forma  $\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  para  $m \leq n - m$ , nos interesa determinar las funciones esféricas de los pares  $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$ , para los cuales la subálgebra de  $K$ -puntos fijos es conmutativa, demostramos que esto sucede solamente cuando  $m = 1$  o  $m = 2$  y describimos las subálgebras de  $K$ -puntos fijos en estos casos.

Damos la descripción explícita de las funciones esféricas del par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$ , por medio de las dos caracterizaciones de funciones esféricas mencionadas anteriormente. Procedemos de forma similar con el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$ .



---

# Abstract

---

This paper is divided into two parts. In the first part, we consider an arbitrary pair  $(G, K)$ , where  $G$  is a finite group and  $K$  is a subgroup of  $G$ . We establish characterizations and properties of matrix spherical functions for  $(G, K)$ . These results were originally presented by Dr. Alfredo Tirao for arbitrary locally compact groups.

In the first characterization of spherical functions, the subalgebra  $A[G]^K$  of  $K$ -fixed points in the group algebra  $A[G]$  plays the role of the subalgebra  $D(G)^K$  of right-invariant operators by elements of  $K$  in the left-invariant differential operators algebra  $D(G)$ . This is considered when  $G$  is a connected Lie group and  $K$  is a compact subgroup of  $G$ . Another fundamental characterization is through representations of the group  $G$ .

In the second part, we consider the symmetric group  $G = \mathfrak{S}_n$  for arbitrary  $n$ . We review the concepts of Young's theory, which provides versatile tools for representations of  $\mathfrak{S}_n$ .

We explore generalities of subgroups of the form  $\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  for  $m \leq n - m$ . Our interest is in determining the spherical functions of pairs  $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$  for which the subalgebra of  $K$ -fixed points is commutative. We prove that this happens only when  $m = 1$  or  $m = 2$  and describe the subalgebras of  $K$ -fixed points in these cases.

We provide an explicit description of the spherical functions for the pair  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$  using the two aforementioned characterizations of spherical functions. Similarly, we proceed with the pair  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$ .



---

# Índice general

---

<b>Resumen</b>	<b>3</b>
<b>Abstract</b>	<b>5</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>9</b>
<b>2. Análisis armónico en grupos finitos</b>	<b>15</b>
2.1. Teoría básica de representaciones de grupos finitos . . . . .	15
2.2. Representaciones unitarias y operadores de entrelazamiento. . . . .	16
2.3. Coeficientes matriciales y sus relaciones de ortogonalidad . . . . .	18
2.4. El álgebra de grupo de $G$ y algunas subálgebras destacadas. . . . .	19
2.5. Semisimplicidad de representaciones de $G$ . . . . .	21
2.6. Teorema de Peter-Weyl. . . . .	23
2.7. Representaciones irreducibles de $A[G]$ . . . . .	26
<b>3. Funciones Esféricas Matriciales</b>	<b>29</b>
3.1. Definición y propiedades principales . . . . .	29
3.2. Caracterización de funciones esféricas como autofunciones. . . . .	32
3.3. Caracterización por representaciones de álgebras . . . . .	38
3.4. Relaciones entre subálgebras de $A[G]$ . . . . .	40
3.5. Funciones esféricas y representaciones irreducibles de $A_{\pi}^K[G]$ . . . . .	45
3.6. Caracterización por medio de representaciones irreducibles de $G$ . . . . .	47
3.7. Propiedades de funciones esféricas cuando $A_{\pi}^K[G]$ es conmutativa. . . . .	48
3.8. Pares de Gelfand . . . . .	50
<b>4. Bases de Gelfand-Tsetlin</b>	<b>55</b>
4.1. Grafo de Ramificación y Álgebras de Gelfand-Tsetlin. . . . .	55
4.2. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	57
4.2.1. Particiones y clases de conjugación en $\mathfrak{S}_n$ . . . . .	57
4.2.2. Diagramas y tableaux de Young. . . . .	59
4.2.3. El conjunto ordenado de Young . . . . .	61
4.3. Elementos YJM . . . . .	63
4.4. Formas semi normal y ortogonal de Young . . . . .	67
<b>5. Propiedades del par <math>(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)</math>.</b>	<b>69</b>
5.1. El Par $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$ . . . . .	69
5.2. Restricción de $\mathfrak{S}_n$ -módulos. . . . .	70
5.2.1. Regla de Littlewood - Richardson . . . . .	71
5.2.2. Descomposición de $\mathfrak{S}_n$ en $\mathfrak{S}_{n-1}$ -módulos . . . . .	72

5.2.3.	Descomposición de $\mathfrak{S}_n$ -módulos en $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ -módulos. . . . .	73
5.2.4.	Descomposición de representaciones de $K$ como $M \times \mathfrak{S}'_2$ -módulos . . . . .	76
5.2.5.	Bases de las componentes isotípicas de representaciones de $\mathfrak{S}_{n-4}$ . . . . .	78
5.3.	Determinación de $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}$ para $m = 1, 2$ . . . . .	80
<b>6.</b>	<b>Funciones esféricas del par <math>(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})</math></b>	<b>83</b>
6.1.	Determinación de funciones esféricas . . . . .	83
6.2.	Determinación de las funciones esféricas por proyecciones. . . . .	89
6.3.	$A[G]^K$ y sus representaciones para $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$ . . . . .	90
6.3.1.	Ejemplos del álgebra $A[G]^K$ y sus representaciones para el par $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_2)$ . . .	91
6.3.2.	Ejemplos del álgebra $A[G]^K$ y sus representaciones para el par $(\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_3)$ . . .	93
<b>7.</b>	<b>Funciones esféricas del par <math>(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)</math></b>	<b>95</b>
7.1.	Determinación de $\Phi(x_1)$ . . . . .	96
7.2.	Determinación de $\Phi(x_2)$ . . . . .	99
7.3.	Autovalores de las funciones esféricas. . . . .	105
7.3.1.	Autovalor $\eta_1$ . . . . .	108
7.3.2.	Autovalor $\eta_2$ . . . . .	114
7.4.	Ejemplos . . . . .	120
7.4.1.	Ejemplo para el par $(\mathfrak{S}_6, \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2)$ . . . . .	120
7.4.2.	Ejemplo para el par $(\mathfrak{S}_7, \mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{S}_2)$ . . . . .	124



---

## Introducción

---

Históricamente, la teoría de funciones esféricas a valores escalares, o funciones esféricas zonales, data de las publicaciones de E. Cartan y H. Weyl, ellos demostraron que los armónicos esféricos surgen de forma natural del estudio de funciones en  $G/K$ , donde  $G$  es el grupo especial ortogonal actuando en un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $K$  consiste de aquellas transformaciones en  $G$  las cuales dejan un vector invariante. Este estudio está llevado a cabo por métodos de representaciones de grupos. Sin embargo, para aplicar la teoría a clases más grandes de “funciones especiales” es necesario considerar otras familias de pares  $(G, K)$ . El primer resultado general fue obtenido en 1950 por Gelfand [6] quien consideró funciones esféricas zonales sobre un par simétrico Riemanniano  $(G, K)$ .

Siguiendo estos trabajos, Tirao [17] en 1977 encontró interesante trabajar directamente con funciones esféricas asociadas a representaciones irreducibles de un grupo localmente compacto  $G$ . Más aún produjo una definición interesante, a saber: Sea  $G$  un grupo unimodular localmente compacto y  $K$  un subgrupo compacto de  $G$  con medida de Haar normalizada,  $\hat{K}$  el conjunto de representaciones irreducibles de  $K$  y  $\pi \in \hat{K}$ . Una función continua  $\Phi$ , sobre  $G$ , con valores en el anillo de endomorfismos  $\text{End}(V)$  de un espacio vectorial de dimensión finita  $V$ , es una *función esférica (matricial) de tipo  $\pi$*  si  $\Phi(e) = I$  y

$$\Phi(x)\Phi(y) = \int_K \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xky) dk,$$

donde  $\chi_\pi(k) = d(\pi)\text{tr}(\pi(k))$  y  $d(\pi)$  es la dimensión del espacio de la representación  $\pi$ .

Alternativamente diremos que  $\Phi$  es función esférica de  $K$  - tipo  $\pi$ , además para hacer referencia a las funciones esféricas del grupo  $G$  de cualquier  $K$ -tipo diremos las funciones esféricas del par  $(G, K)$ .

En [17] el énfasis fue puesto en considerar que  $G$  es localmente compacto, compacto o grupo de Lie. En 1988, con un enfoque similar, Gangolli y Varadarajan [9] publicaron su libro donde las funciones esféricas son matriciales.

En el 2002 Grünbaum, Pacharoni y Tirao publicaron el artículo [11] sobre funciones esféricas matriciales asociadas al plano proyectivo complejo  $SU(3)/S(U(2) \times U(2))$ , donde fue establecida una rica conexión con polinomios ortogonales matriciales. A partir de este trabajo aparecieron varias publicaciones, las cuales consideraron diferentes grupos de Lie y pares de Gelfand  $(G, K)$ . Por ejemplo, en el 2007 Pablo Román en su tesis doctoral determinó todas las funciones esféricas irreducibles  $\Phi$  de cualquier  $K$ - tipo asociadas a los pares simétricos duales  $(SU(3), U(2))$  y  $(SU(2, 1), U(2))$ .

El desafío de establecer los conceptos y propiedades de las funciones esféricas cuando consideramos grupos finitos fue establecido desde hace algún tiempo por Tirao y Pacharoni y están

desarrollados en el Capítulo 3.

En el presente trabajo consideramos  $\mathfrak{S}_n$ , el grupo simétrico de grado  $n$ , que es, el grupo de todas las transformaciones biyectivas (permutaciones) del conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , determinamos explícitamente las funciones esféricas irreducibles de los pares  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$  y  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$ .

En los Capítulos 2 y 4 incorporamos una revisión de varios conceptos que serán necesarios a lo largo del trabajo. Las generalidades de representaciones de grupos finitos y de su respectiva álgebra de grupo son establecidas en el Capítulo 2, mientras que en el Capítulo 4 se presenta una revisión de las representaciones del grupo simétrico de grado  $n$ , la cual se basa en la Teoría de Young. Como referencia principal de este capítulo consideramos el libro [3].

En el Capítulo 3 consideramos un grupo finito  $G$ ,  $K$  un subgrupo arbitrario,  $\pi \in \hat{K}$  y la siguiente definición de una función esférica en  $G$  de tipo  $\pi$  cuyos valores son endomorfismos de un espacio vectorial  $V$  de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ .

Para  $\pi \in \hat{K}$ , sea  $\chi_\pi = d(\pi)\xi_\pi$ , donde  $d(\pi)$  es el grado de  $\pi$ , es decir, la dimensión de cualquier representación en la clase de  $\pi$  y  $\xi_\pi$  es el carácter de una de ellas.

Una *función esférica*  $\Phi$  en  $G$  de tipo  $\pi$  es una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  que satisface

- i)  $\Phi(e) = I$ .
- ii)  $\Phi(g)\Phi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkh)$  para todo  $g, h \in G$ ,

Estudiamos las propiedades principales de dichas funciones.

En [17] cuando se considera  $G$  un grupo de Lie conexo,  $D(G)$  es el álgebra de todos los operadores diferenciales invariantes a izquierda en  $G$  y  $D(G)^K$  la subálgebra de todos los operadores en  $D(G)$  que son invariantes por traslación a derecha por elementos de  $K$ .

**Teorema.** ([17], [9]) *Dado  $G$  grupo de Lie conexo. Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es función esférica de tipo  $\pi$  si y sólo si*

- $\Phi(e) = I$ ,
- $\Phi$  es analítica,
- $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1)\Phi(g)\Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in G$ ,
- $[D\Phi](g) = \Phi(g)[D\Phi](e)$  para todo  $D \in D(G)^K, g \in G$ .

Para establecer la caracterización análoga en el caso de grupos finitos consideramos  $A[G]$  el álgebra de grupo de  $G$  y la subálgebra  $A[G]^K$  de  $K$ -puntos fijos, es decir,

$$A[G]^K = \{f \in A[G] : \delta_k * f = f * \delta_k, \text{ para todo } k \in K\},$$

donde  $*$  es la convolución de funciones que se menciona en la Definición 2.13 y que hace de  $A[G]$  un álgebra asociativa.

Tenemos que  $A[G]^K$  es el equivalente a  $D(G)^K$  cuando consideramos grupos finitos.

En el Teorema 3.11 se establece la siguiente caracterización de las funciones esféricas como autofunciones de la subálgebra  $A[G]^K$ .

**Teorema. (Primera Caracterización)** *Dado  $G$  un grupo finito. Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  si y solo si*

- (i)  $\Phi(e) = I$ ,

- (ii)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1)\Phi(g)\Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in G$ ,
- (iii)  $(\Phi * \check{f})(g) = \Phi(g) \sum_{y \in G} \Phi(y)f(y)$ , para toda  $f \in A[G]^K, g \in G$ , donde  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$ .
- (iv)  $\Phi|_K$  es una representación de  $K$ , equivalente a una suma directa de copias de  $\pi$ .

Al número de veces que  $\pi$  aparece en la representación  $\Phi|_K$  se le llama *altura* de  $\Phi$  y para toda  $f \in A[G]^K$  tenemos que  $(\Phi * \check{f})(e)$  es un  $K$ - morfismo, por el Lema de Schur existe un  $\eta \in \mathbb{C}$  tal que  $(\Phi * \check{f})(e) = \eta I$ . Dicho escalar  $\eta$  se denomina *autovalor de  $\Phi$  asociado a  $f$* .

Para  $\pi \in \hat{K}$  consideramos la subálgebra

$$A_\pi[G] = \{f \in A[G] : \bar{\chi}_\pi * f = f * \bar{\chi}_\pi = |K|f\}$$

En el Teorema 3.24 se establece esta cercana conexión entre funciones esféricas de  $G$  de tipo  $\pi$  y representaciones de  $A_\pi[G]$ .

**Teorema. (Segunda Caracterización)** Dada una función esférica irreducible  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$ , la extensión de  $\Phi$  en  $A[G]$  dada por

$$f \mapsto \Phi(f) = \sum_{g \in G} f(g)\Phi(g). \quad (1.1)$$

es una representación irreducible del álgebra  $A_\pi[G]$ . Recíprocamente toda representación irreducible de  $A_\pi[G]$  se obtiene de esta manera para alguna función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$ .

Las funciones esféricas también aparecen de manera natural a partir de representaciones irreducibles del grupo  $G$ . Sea  $(\rho, V)$  una representación irreducible de  $G$  en un espacio vectorial  $V$  que contiene el  $K$ -tipo  $\pi$ . Sea  $V_{(\pi)}$  la componente isotípica de  $\pi$  en  $V$  y denotemos por  $P_\pi$  al operador proyección ortogonal de  $V$  sobre  $V_{(\pi)}$ , entonces

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v, \quad g \in G, v \in V_{(\pi)}, \quad (1.2)$$

es una función esférica irreducible de  $G$  de tipo  $\pi$ .

A la función esférica  $\Phi$  así determinada la denominamos *función esférica del par  $(G, K)$  asociada al par  $(\rho, \pi)$  de tipo  $\pi$* . o simplemente *función esférica de  $G$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$* .

En el Teorema 3.41 establecemos la siguiente caracterización del concepto de función esférica.

**Teorema. (Tercera Caracterización)** Sea  $(\rho, V)$  una representación irreducible de dimensión finita de  $G$ , que contiene el  $K$ -tipo  $\pi$  y sea  $P_\pi$  el operador proyección ortogonal de  $V_\rho$  en la componente isotípica de  $\pi$ . Entonces

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v \quad g \in G, v \in V_{(\pi)},$$

es una función esférica irreducible de  $G$  de tipo  $\pi$ . Recíprocamente, cualquier función esférica irreducible del par  $(G, K)$  es de esta forma.

Estudiamos las subálgebras  $A_\pi^K[G] = A_\pi[G] \cap A[G]^K$ , demostramos que  $A_\pi^K[G]$  es un álgebra semisimple con identidad y

$$A[G]^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} A_\pi^K[G].$$

A partir de esta descomposición establecemos la siguiente relación entre las funciones esféricas del par  $(G, K)$  con las representaciones irreducibles del álgebra  $A[G]^K$ .

**Teorema.** Sea  $Q_\pi$  la proyección de  $A[G]^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} A_\pi^K[G]$ , sobre el sumando  $A_\pi^K[G]$ . Entonces, las representaciones irreducibles  $L$  de  $A[G]^K$  son precisamente aquellas de la forma  $L = \Phi \circ Q_\pi$ , donde  $\Phi$  es la extensión de alguna función esférica irreducible  $\Phi$  de  $G$  de tipo  $\pi$ .

Las versiones generales para grupos localmente compactos de los Teoremas de segunda y tercera caracterización y del Teorema anterior se las encuentra en [17].

En el Capítulo 4 recordamos las principales propiedades del grupo simétrico  $G = \mathfrak{S}_n$ . Se revisa el concepto de particiones de un número natural  $n$  pues las mismas parametrizan las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_n$ . Para describir estas últimas, se introduce la Teoría de Young, la cual proporciona herramientas combinatorias versátiles en la descripción de propiedades de estas representaciones.

En el Capítulo 5 consideramos el grupo simétrico  $G = \mathfrak{S}_n$  y los subgrupos de la forma  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ , donde  $\mathfrak{S}_{n-m}$  y  $\mathfrak{S}_m$  son, respectivamente, las permutaciones de  $\{1, \dots, n-m\}$  y de  $\{n-m+1, \dots, n\}$ , para  $1 \leq m \leq n-m$ .

Demostramos que el grupo  $G = \mathfrak{S}_n$  posee la siguiente descomposición

$$\mathfrak{S}_n = (\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)A(\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m), \quad (1.3)$$

donde  $A = \{x_0, \dots, x_m\}$  es el subconjunto de  $G$ , definido recursivamente por

$$x_0 = (1) \quad \text{y} \quad x_i = (n-m-i+1, n-m+i)x_{i-1} \quad \text{para } i = 1, \dots, m.$$

Consideramos el subgrupo  $M$  que es el centralizador de  $A$  en  $K$  y demostramos que  $M = \mathfrak{S}_{n-2m}$ .

Por la primera caracterización de funciones esféricas sabemos que quedan determinadas por sus valores en los puntos de  $A$ , es decir, para determinar las funciones esféricas del par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$  es suficiente determinar  $\Phi(x_j)$ , para  $j = 1, \dots, m$ .

Respecto a las subálgebras  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}$ , tenemos

- La subálgebra  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}$  es conmutativa si y solo si  $m = 1$  o  $2$ .
- Para  $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$  tenemos  $A[G]^K = A[K]^K[f_0]$ .
- Para  $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$  tenemos  $A[G]^K = A[K]^K[f_1, f_2]$ .

donde  $A[K]^K$  es el centro del álgebra de grupo  $A[K]$ ,  $f_0$  es la función característica de la  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -órbita del punto  $x_1 = (n, n-1)$  en  $\mathfrak{S}_n$  y  $f_1, f_2$  representan, respectivamente, las funciones características de las  $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ -órbitas de los elementos  $x_1 = (n-1, n-2)$  y  $x_2 = (n, n-3)(n-1, n-2)$  en  $\mathfrak{S}_n$ .

Nos interesa determinar funciones esféricas del grupo  $G = \mathfrak{S}_n$  y  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ , que sean de altura uno. En el Teorema 3.44 demostramos que la conmutatividad de la subálgebra  $A[G]^K$  equivale a que las funciones esféricas de  $G$  de cualquier  $K$ -tipo son de altura uno. Por lo tanto consideramos solamente los casos de  $m = 1$  o  $m = 2$ .

En el Capítulo 6 determinamos explícitamente las funciones esféricas de  $G = \mathfrak{S}_n$  con  $K = \mathfrak{S}_{n-1}$  y en el Capítulo 7 nos concentramos en las funciones esféricas de  $G = \mathfrak{S}_n$  con  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ .

Para determinar las funciones esféricas en los elementos de  $A$  usamos las bases de Gelfand-Tsetlin asociadas a la torre libre de multiplicidad de los subgrupos

$$\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \leq \mathfrak{S}_n,$$

y el hecho que dada una representación  $\rho \in \hat{G}$ , gracias a la forma ortogonal de Young, tenemos una forma explícita de calcular  $\rho(s_i)$  en bases de Gelfand-Tsetlin, para los generadores de Coxeter

$$s_i = (i, i+1) \quad \text{con } i = 1, \dots, n-1.$$

En el Capítulo 6 determinamos las funciones esféricas de  $G = \mathfrak{S}_n$  y  $K = \mathfrak{S}_{n-1}$  de dos formas, por medio de la primera caracterización, Teorema 3.11 y por la tercera caracterización, Teorema 3.41.

Consideramos los elementos de Young-Jucys-Murphy, en el álgebra  $A[G]$ , dados por

$$X_1 = 0, \quad X_k = (1, k) + (2, k) + \cdots + (k-1, k), \quad \text{para } k = 2, \dots, n$$

y en el Teorema 5.16 obtenemos que  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}[X_n]$ . Esto nos permite establecer el autovalor de una función esférica  $\Phi$  asociado a  $X_n = (1, n) + \cdots + (n-1, n)$ . En el Teorema 6.6 demostramos el siguiente resultado

**Teorema.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}$ , una representación que aparece en  $\rho$  y  $\Phi$  la función esférica determinada por  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Si  $T$  un tableau estándar que pasa por  $\rho$  y  $\pi$ ,  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  el contenido de  $T$ , entonces  $(\Phi * X_n)(e) = \eta I$  con  $\eta = c_n(T)$ .

A partir de esto determinamos las funciones esféricas de este par por la primera caracterización.

Para el enfoque por medio de proyecciones, dada  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi$  una representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  que aparece en  $\rho$ , consideramos la siguiente descomposición de  $V_\pi$  en  $M = \mathfrak{S}_{n-2}$ -módulos

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \hat{M}} V_\sigma.$$

Si  $\Phi$  es la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ , el operador  $\Phi(x_1)$  resulta un  $M$ -morfismo y por lo tanto  $\Phi(x_1)$  es un escalar en cada  $M$ -módulo  $V_\sigma$ .

Para calcular dichos escalares explícitamente, usamos que  $x_1 = (n-1, n) = s_{n-1}$  es un generador de Coxeter y tenemos una descripción de  $\rho(x_1)$  en vectores de una base de Gelfand-Tsetlin, en términos del contenido  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  de un tableau estándar  $T$  asociado a un camino que pasa por  $\rho, \pi$  y  $\sigma$ .

En los Teoremas 6.7 y 6.8 determinamos explícitamente las funciones esféricas de este par por medio de la primera y tercera caracterización de función esférica en el siguiente resultado

**Teorema.** Sea  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ , una representación que contiene al  $\mathfrak{S}_{n-1}$ - tipo  $\pi$ , si  $\Phi$  es la función esférica de  $G$  asociada a la representación  $\rho$  de tipo  $\pi$  entonces

$$\Phi(x_1) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{M}} \alpha_\sigma I_\sigma, \quad \text{con } \alpha_\sigma = \frac{1}{c_n(T) - c_{n-1}(T)},$$

donde  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_{n-1}(T), c_n(T))$  es el contenido de cualquier tableau estándar  $T$  cuyo camino asociado pasa por  $\rho, \pi$  y por  $\sigma$ .

En el Capítulo 7 consideramos  $G = \mathfrak{S}_n$  y  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ , toda representación irreducible de  $K$  es de la forma  $\pi = \mu \otimes \delta$ , donde  $\mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}$  y  $\delta \in \hat{\mathfrak{S}}_2$ . El centralizador de  $A$  en  $K$  es  $M = \mathfrak{S}_{n-4}$  y no es libre de multiplicidad como sucedía en el par que consideramos en el Capítulo 6. Sin embargo, toda representación  $\sigma \in \hat{M}$  aparece con multiplicidad a lo más 2 en  $V_\pi$ .

Consideramos el subgrupo  $M \times \mathfrak{S}'_2$  de  $K$ , donde  $M = \mathfrak{S}_{n-4}$  y  $\mathfrak{S}'_2$  es el subgrupo de  $\mathfrak{S}_{n-2}$  de permutaciones de los elementos  $n-2$  y  $n-3$ , el par  $(K, M \times \mathfrak{S}'_2)$  es libre de multiplicidad y las representaciones irreducibles de este subgrupo son de la forma  $\sigma \otimes \varepsilon$ , donde  $\sigma \in \hat{M}$  y  $\varepsilon \in \hat{\mathfrak{S}}'_2$ .

Determinamos las funciones esféricas por medio del Teorema 3.41. Sea  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ , una representación que contiene al  $K$ - tipo  $\pi$ , si  $\Phi$  es la función esférica de  $G$  asociada a la representación  $\rho$  de tipo  $\pi$  y  $x_1 = (n-1, n-2), x_2 = (n, n-3)(n-1, n-2)$ , entonces veremos que  $\Phi(x_1)$  y  $\Phi(x_2)$  son  $M$ -morfismos, por lo cual preservan la componente isotípica de cada  $\sigma$  que aparece en  $\pi$ , más aun  $\Phi(x_2)$  es un  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -morfismo.

Dada  $\pi \in \hat{K}$ , la descomposición de  $V_\pi$  en  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -módulos es

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{J}_1} V_{\sigma \otimes tr} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{J}_1} V_{\sigma \otimes sg} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{J}_2} (V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}), \quad (1.4)$$

donde  $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$  son, respectivamente, las colecciones de representaciones  $\sigma \in \hat{M}$  de multiplicidad 1 y 2 en  $\pi$ . Cuando  $\sigma \in \mathcal{S}_2$  veremos que hay bases distintas de  $V_{(\sigma)}$  que diagonalizan a  $\Phi(x_1)$  o  $\Phi(x_2)$ .

Sean  $\pi \in \hat{K}$  y  $\tau \in \hat{M} \otimes \mathfrak{S}'_2$  consideraremos la siguiente notación

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \mu \otimes tr \\ -1 & \text{si } \pi = \mu \otimes sg \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes tr \\ -1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes sg \end{cases}.$$

Para determinar  $\Phi(x_1)$ , notamos que  $x_1 = (n-1, n-2)$  es el generador de Coxeter  $s_{n-2}$ , por lo tanto podemos determinar  $\Phi(x_1)$  por la forma ortogonal de Young. A partir de la descomposición (1.4) y eligiendo cuidadosamente la base de  $V_\pi$ , obtenemos la siguiente forma matricial de  $\Phi(x_1)$ .

$$\Phi(x_1) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,1}} \zeta_{\pi,\tau}^+ I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,-1}} \zeta_{\pi,\tau}^- I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} \zeta_{\pi,\tau}^+ I & 0 \\ 0 & \zeta_{\pi,\tau}^- I \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

donde

$$\zeta_{\pi,\tau}^\pm = \begin{cases} \zeta_{\pi,\tau}^+ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{\delta(\pi)}{r(r+s)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = 1 \\ \zeta_{\pi,\tau}^- = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} + \frac{\delta(\pi)}{(r+d)(r+s+d)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = -1, \end{cases}$$

y  $s = r_T(n, n-1)$ ,  $r = r_T(n-1, n-2)$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ , para cualquier tableau estándar  $T$  asociado a un camino que pasa por  $\rho, \mu$  y por  $\sigma$ .

Para  $\Phi(x_2)$ , notamos que  $x_2 = (n, n-3)(n-1, n-2)$ , no es un generador de Coxeter, necesitamos multiplicar al menos 6 de ellos para obtener  $x_2$ , tenemos la siguiente expresión como producto de generadores de Coxeter,

$$x_2 = s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2},$$

así que para hallar  $\Phi(x_2)$  por medio de la tercera caracterización hemos necesitado determinar como actúa la representación  $\rho$  en cada uno de estos generadores mediante la forma ortogonal de Young antes de determinar la proyección  $P_\pi$  en  $\rho$ .

A partir de la descomposición (1.4), considerando que  $\Phi(x_2)$  es  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -morfismo, hemos elegido cuidadosamente la base de  $V_\pi$  y determinamos la siguiente forma matricial de  $\Phi(x_2)$ .

$$\Phi(x_2) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,1}} \beta_{\pi,\tau}^+ I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,-1}} \beta_{\pi,\tau}^- I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} \beta_{\pi,\tau}^+ I & 0 \\ 0 & \beta_{\pi,\tau}^- I \end{pmatrix},$$

donde

$$\beta_{\pi,\tau}^\pm = \delta_{\pi,\tau} \frac{2(r+s)(r+d+\varepsilon(\tau)) + (1-\delta(\pi)s)(1+\varepsilon(\tau)d)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)},$$

y

$$\delta_{\pi,\tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta(\pi) = \varepsilon(\tau) \\ 0 & \text{si } \delta(\pi) \neq \varepsilon(\tau), \end{cases}$$

y  $s = r_T(n, n-1)$ ,  $r = r_T(n-1, n-2)$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ , para cualquier tableau estándar  $T$  asociado a un camino que pasa por  $\rho, \mu$  y por  $\sigma$ .

Si bien no hemos logrado determinar  $\Phi$  mediante la primera caracterización, como lo conseguimos en el Capítulo 6 para el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$ , en los Teoremas 7.15 y 7.20 conseguimos determinar los autovalores  $\eta_1, \eta_2$  de  $\Phi$  en términos del contenido de cualquier tableau cuyo camino asociado pase por  $\rho, \mu$  y  $\sigma$ .

---

## Análisis armónico en grupos finitos

---

En este capítulo hacemos una revisión de representaciones de grupos finitos y del álgebra de grupo asociada, también de sus principales propiedades. Omitimos la demostración de la mayoría de los resultados conocidos, pero indicamos en cada caso referencias bibliográficas. La presentación de la teoría está basada en los libros [3], [4] y [8].

### 2.1. Teoría básica de representaciones de grupos finitos

Comenzamos recordando conceptos que serán necesarios a lo largo del trabajo. Los espacios vectoriales que consideraremos serán siempre de dimensión finita y sobre  $\mathbb{C}$ . Denotamos por  $GL(V)$  al grupo de todas las transformaciones lineales inversibles de  $V$  en  $V$ .

**Definición 2.1.** Sea  $G$  un grupo finito

- Decimos que  $(\rho, V)$  es una *representación de  $G$  en  $V$*  si  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  satisface

$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1g_2), \text{ para todo } g_1, g_2 \in G \quad \text{y} \quad \rho(e) = I,$$

donde  $e$  es el neutro de  $G$  e  $I$  es el operador identidad en  $V$ . Es decir  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  es un homomorfismo de grupos.

Si es necesario denotamos por  $V_\rho$  a  $V$ . También decimos que  $V$  es un  $G$ -módulo.

- El *grado* o *dimensión* de la representación  $\rho$  es la dimensión de  $V_\rho$  y se denota por  $d(\rho)$ .
- El carácter de una representación  $\rho$  de  $G$  es la función  $\xi_\rho : G \rightarrow \mathbb{C}$ , dada por  $\xi_\rho(g) = \text{tr}(\rho(g))$ , la traza de  $\rho(g)$  para todo  $g \in G$ . También consideramos la siguiente normalización del carácter  $\chi_\rho(g) = d(\rho)\xi_\rho(g)$ .
- Diremos que  $(\rho, W)$  es una *subrepresentación* de  $G$  en  $(\rho, V_\rho)$  si  $W$  es un subespacio  $\rho(G)$ -invariante de  $V_\rho$ , es decir si  $\rho(g)(W) \subseteq W$  para todo  $g \in G$ .
- Una representación  $(\rho, V_\rho)$  de  $G$  se dice *irreducible* si las únicas subrepresentaciones de  $\rho$  son las triviales,  $\{0\}$  y  $V_\rho$ .
- Sea  $(\rho, V_\rho)$  una representación de  $G$  y sea  $K$  un subgrupo de  $G$ , la *restricción* de  $\rho$  a  $K$ , denotada por  $\text{Res}_K^G(\rho)$ , es la representación de  $K$  en  $V_\rho$  definida por  $\text{Res}_K^G(\rho)(k) = \rho(k)$  para todo  $k \in K$ .

**Ejemplo 2.2.** Sea  $G$  un grupo finito. Denotamos por  $L^2(G)$  al espacio vectorial de funciones definidas en  $G$  a valores complejos dotado con el producto interno.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}, \quad \text{para toda } f_1, f_2 \in L^2(G). \quad (2.1)$$

En el espacio  $L^2(G)$  consideramos las representaciones  $[L(g)f](h) = f(g^{-1}h)$  y  $[R(g)f](h) = f(hg)$  para todo  $g, h \in G$  y  $f \in L^2(G)$ , se las conoce como la representación regular izquierda y representación regular derecha respectivamente.

**Ejemplo 2.3.** Sea  $G = \mathfrak{S}_n$  el grupo simétrico de grado  $n$ , que es, el grupo de permutaciones de  $n$  elementos, equivalentemente, los elementos de  $\mathfrak{S}_n$  son todas las biyecciones  $\theta : I_n \rightarrow I_n$  donde  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  una base ortonormal fija de  $V$ , definimos  $\rho(\theta)e_j = e_{\theta(j)}$  para todo  $\theta \in \mathfrak{S}_n$  y  $j \in I_n$  así definida  $(\rho, V)$  es una representación de  $G$ , se la conoce como la representación permutación, se cumple además que no es irreducible.

Por ejemplo, un  $\mathfrak{S}_n$ -subespacio invariante es  $W = \{w = \sum_{j=1}^n x_j e_j \in V : \sum_{j=1}^n x_j = 0\}$ . Es fácil de probar que  $W$  es  $\mathfrak{S}_n$ -invariante y es irreducible, a la representación  $(\rho, W)$  la llamamos representación estándar de  $\mathfrak{S}_n$ .

Recordaremos ahora formas de construir representaciones de  $G$  a partir de otras dadas

**Definición 2.4.** Sea  $G$  un grupo finito

- Si  $(\rho, V_\rho)$  es una representación de  $G$ , entonces la *representación contragradiente* o *representación dual*  $(\rho', V_{\rho'})$  está definida en  $V_{\rho'} = V_\rho'$ , el espacio vectorial dual de  $V_\rho$ , de la siguiente manera

$$(\rho'(g)(\lambda))(v) = \lambda(\rho(g^{-1})v), \quad \text{para todo } g \in G, \lambda \in V_\rho', v \in V_\rho.$$

- Sean  $(\rho, V), (\sigma, W)$  representaciones de  $G$  entonces  $(\rho \oplus \sigma, V \oplus W)$  es representación de  $G$ , conocida como la *representación suma directa*, donde

$$(\rho \oplus \sigma)(g)(v + w) = \rho(g)v + \sigma(g)w.$$

- Sean  $(\rho, V), (\sigma, W)$  representaciones de  $G$  entonces  $(\rho \otimes \sigma, V \otimes W)$  es representación de  $G$ , conocida como la *representación producto tensorial* de  $V$  y  $W$ , donde

$$(\rho \otimes \sigma)(g)(v \otimes w) = \rho(g)v \otimes \sigma(g)w.$$

**Nota 2.5.** Sean  $(\rho, V), (\sigma, W)$  representaciones de  $G$ , recordemos que  $\text{Hom}(V, W)$  es el espacio de todas las aplicaciones lineales de  $V$  en  $W$ , cuando  $\rho = \sigma$  denotamos simplemente por  $\text{End}(V)$ .

Por las definiciones anteriores sabemos que el dual de una representación y el producto tensorial de representaciones de  $G$  son también representaciones de  $G$ , entonces también  $\text{Hom}(V, W)$  y  $\text{End}(V)$  serán representaciones de  $G$  vía las identificaciones

$$\text{Hom}(V, W) = V' \otimes W \quad \text{y} \quad \text{End}(V) = V' \otimes V. \quad (2.2)$$

## 2.2. Representaciones unitarias y operadores de entrelazamiento.

Sea  $V$  un espacio vectorial complejo de dimensión finita dotado de un producto interno  $\langle -, - \rangle$ , entonces podemos definir la noción de *representación unitaria*.



**Definición 2.6.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales dotados de productos internos  $\langle -, - \rangle_V$  y  $\langle -, - \rangle_W$ , respectivamente.

- Dado  $T : V \rightarrow W$  aplicación lineal, el *adjunto* de  $T$  es la aplicación lineal  $T^* : W \rightarrow V$  tal que  $\langle w, Tv \rangle_W = \langle T^*w, v \rangle_V$  para todo  $v \in V, w \in W$ .
- Una aplicación lineal  $U : V \rightarrow W$  es *unitaria* si  $U^*U = I, UU^* = I$ , es decir,  $\langle Uv_1, Uv_2 \rangle_W = \langle v_1, v_2 \rangle_V$  para todo  $v_1, v_2 \in V$ .
- Decimos que  $(\rho, V)$  es una *representación unitaria* de  $G$  si preserva el producto interno, es decir, si  $\langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle$  para todo  $v_1, v_2 \in V_\rho$  y  $g \in G$ .

**Proposición 2.7.** Sea  $(\rho, V)$  una representación de  $G$ , si  $V$  está dotado de un producto interno  $\langle -, - \rangle$ , definimos

$$(v_1, v_2) = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle \quad \text{para todo } v_1, v_2 \in V,$$

así definido,  $(-, -)$  es un producto interno bajo el cual  $\rho$  es unitaria.

*Demostración.* Ver [7], pág. 3-4. □

**Definición 2.8.** Sea  $G$  un grupo finito

- Dadas dos representaciones  $(\rho, V_\rho)$  y  $(\sigma, V_\sigma)$  de  $G$  y un operador  $T \in \text{Hom}(V_\rho, V_\sigma)$ , tal que

$$T\rho(g) = \sigma(g)T \quad \text{para todo } g \in G,$$

decimos que  $T$  *entrelaza*  $\rho$  con  $\sigma$ , que  $T$  es un *operador de entrelazamiento* entre ellas o que  $T$  es un  $G$ -morfismo. Denotaremos por  $\text{Hom}_G(V_\rho, V_\sigma)$  (o por  $\text{Hom}_G(\rho, \sigma)$ ) al espacio vectorial de todos los operadores de entrelazamiento de  $\rho$  con  $\sigma$ .

- Si existe  $T \in \text{Hom}_G(V_\rho, V_\sigma)$  isomorfismo lineal, decimos que  $\rho$  y  $\sigma$  son *equivalentes* y escribimos  $\rho \sim \sigma$  o  $V_\rho \equiv V_\sigma$ . Es fácil ver que  $\sim$  es una relación de equivalencia en el conjunto de representaciones de  $G$ . Denotamos por  $\hat{G}$  al conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones irreducibles de  $G$  y para simplificar la notación denotaremos  $\rho$  y a su clase de equivalencia  $[\rho]$  por el mismo símbolo.
- Sean  $(\rho, V_\rho)$  y  $(\sigma, V_\sigma)$  representaciones unitarias de  $G$ , si existe  $T \in \text{Hom}_G(V_\rho, V_\sigma)$  tal que  $T$  es operador unitario y es un isomorfismo, entonces diremos que  $\rho$  y  $\sigma$  son *unitariamente equivalentes*.
- Si  $(\rho, V)$  es una representación de  $G$ , denotamos por  $\text{Hom}_G(V, V)$  (o por  $\text{End}_G(V)$ ) al *conmutador de  $\rho$* , es decir al conjunto

$$\text{Hom}_G(V, V) = \text{End}_G(V) = \{T \in \text{Hom}(V, V) : T\rho(g) = \rho(g)T \text{ para todo } g \in G\}.$$

**Lema 2.9.** Sean  $(\rho, V)$  y  $(\sigma, W)$  dos representaciones unitarias de  $G$ , si ellas son equivalentes entonces son unitariamente equivalentes.

*Demostración.* Ver [3] pág. 4-5. □

A partir de la Proposición 2.7 y por el lema anterior de aquí en más consideraremos representaciones unitarias y cuando dos representaciones sean equivalentes asumiremos que son unitariamente equivalentes.

El siguiente resultado nos indica que la dimensión de  $\text{Hom}_G(V, W)$  depende de la equivalencia de las representaciones que se consideran.

**Lema 2.10.** (Lema de Schur) Sean  $(\rho, V_\rho)$  y  $(\sigma, V_\sigma)$  dos representaciones irreducibles de dimensión finita de  $G$  y sea  $T : V_\rho \rightarrow V_\sigma$  un operador de entrelazamiento, se cumple que

- i) Si  $\rho$  y  $\sigma$  no son equivalentes, entonces  $T = 0$ .
- ii) Si  $\rho$  y  $\sigma$  son equivalentes, entonces  $T$  es un isomorfismo. En particular si  $\rho = \sigma$ , entonces  $T = \alpha I$ , para algún  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Demostración.* Ver [8] pág. 7. □

### 2.3. Coeficientes matriciales y sus relaciones de ortogonalidad

Así como vimos en el Ejemplo 2.2 denotamos con  $L^2(G)$  al espacio vectorial complejo de todas las funciones a valores complejos sobre  $G$ , con el siguiente producto interno.

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \sum_{g \in G} f_1(g) \overline{f_2(g)}, \quad \text{para todas } f_1, f_2 \in L^2(G). \quad (2.3)$$

**Definición 2.11.** Sea  $(\rho, V_\rho)$  una representación de  $G$ ,  $V_\rho$  espacio vectorial con producto interno  $\langle -, - \rangle$ . Dados  $v, w \in V_\rho$ , la función  $\rho_{v,w}$  dada por  $\rho_{v,w}(g) = \langle \rho(g)w, v \rangle$  para todo  $g \in G$ , se denomina *coeficiente matricial* de la representación  $\rho$ .

Denotamos con  $E_\rho$  el subespacio vectorial de  $L^2(G)$  generado por todos los coeficientes matriciales de  $\rho$ .

La terminología se debe a que si tomamos  $\{v_i\}_i$  una base ortonormal de  $V_\rho$  y denotamos por  $\rho_{i,j} = \rho_{v_i, v_j}$ , entonces  $\rho(g)$ , vista como una matriz de  $n \times n$  coincide con  $(\rho_{i,j}(g))_{i,j}$ , en otras palabras, los  $\rho_{i,j}(g)$ 's son los coeficientes matriciales de  $\rho(g)$  para todo  $g \in G$ . En particular el carácter de la representación  $\rho$  está dado por

$$\xi(g) = \text{tr}(\rho(g)) = \sum_{i=1}^{d(\rho)} \rho_{i,i}(g).$$

**Proposición 2.12.** (Relaciones de ortogonalidad de Schur) Sean  $(\rho, V_\rho)$  y  $(\sigma, V_\sigma)$  representaciones irreducibles de  $G$ .

- i) Si  $\rho$  y  $\sigma$  no son equivalentes entonces,  $E_\rho$  y  $E_\sigma$  son ortogonales.
- ii) Para  $v, w, v', w' \in V_\rho$  tenemos

$$\sum_{x \in G} \langle \rho(x)w, v \rangle \overline{\langle \rho(x)w', v' \rangle} = \frac{|G|}{d(\rho)} \langle v', v \rangle \langle w, w' \rangle \quad \text{es decir} \quad \langle \rho_{v,w}, \rho_{v',w'} \rangle = \frac{|G|}{d(\rho)} \langle v', v \rangle \langle w, w' \rangle.$$

- iii) Si  $\{v_i\}$  es una base ortonormal de  $V_\rho$  y  $\rho_{i,j} = \rho_{v_i, v_j}$ , entonces

$$\left\{ \sqrt{\frac{d(\rho)}{|G|}} \rho_{i,j} : i, j = 1, \dots, d(\rho) \right\}$$

es una base ortonormal de  $E_\rho$ .

*Demostración.* i) Dados  $v \in V_\rho$ ,  $v' \in V_\sigma$ , definimos  $S = S_{v,v'} : V_\rho \rightarrow V_\sigma$  por

$$S(w) = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)w, v \rangle \sigma(g^{-1})(v').$$

$S$  es un morfismo de entrelazamiento entre  $\rho$  y  $\sigma$  pues

$$\begin{aligned} S(\rho(x)w) &= \sum_{g \in G} \langle \rho(g)\rho(x)w, v \rangle \sigma(g^{-1})(v') = \sum_{g \in G} \langle \rho(gx)w, v \rangle \sigma(g^{-1})(v') \\ &= \sum_{u \in G} \langle \rho(u)w, v \rangle \sigma(xu^{-1})(v') = \sigma(x)S(w). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como  $\rho$  y  $\sigma$  no son equivalentes, por el lema de Schur 2.10 resulta  $S = 0$ . Entonces, si  $v, w \in V_\rho$  y  $v', w' \in V_\sigma$

$$0 = \langle S(w), w' \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)w, v \rangle \overline{\langle \sigma(g)w', v' \rangle} = \langle \rho_{v,w}, \sigma_{v',w'} \rangle.$$

Lo que demuestra que coeficientes matriciales de representaciones irreducibles no equivalentes son ortogonales en  $L^2(G)$ .

ii) Consideremos el caso en que  $\sigma = \rho$ , entonces  $S = S_{v,v'}$  es el operador de entrelazamiento en  $V_\rho$  dado por .

$$S(w) = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)w, v \rangle \rho(g^{-1})v'.$$

Por Lema de Schur 2.10, para  $S$ , existe  $\alpha = \alpha(v, v') \in \mathbb{C}$  tal que  $S = \alpha I$ , donde  $I$  es la identidad en  $V_\rho$ . Sea  $\{v_i\}_i$  una base ortonormal de  $V_\rho$ . Tomando traza tenemos

$$\sum_{i=1}^{d(\rho)} \langle S(v_i), v_i \rangle = \text{tr}(S) = \alpha d(\rho). \quad (2.5)$$

Usando que  $v = \sum_{j=1}^{d(\rho)} \langle v, v_j \rangle v_j$  y  $v' = \sum_{r=1}^{d(\rho)} \langle v', v_r \rangle v_r$  obtenemos

$$\text{tr}(S) = \sum_{i=1}^{d(\rho)} \langle S(v_i), v_i \rangle = \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^{d(\rho)} \sum_{r=1}^{d(\rho)} \overline{\langle v, v_j \rangle} \langle v', v_r \rangle \sum_{i=1}^{d(\rho)} \langle \rho(g)v_i, v_j \rangle \langle v_r, \rho(g)v_i \rangle$$

Como  $\rho(g)$  es un operador unitario, las filas de su matriz (respecto una base ortonormal) son vectores ortonormales, es decir  $\sum_{i=1}^{d(\rho)} \langle \rho(g)v_i, v_j \rangle \langle v_r, \rho(g)v_i \rangle = \delta_{j,r}$  y por lo tanto

$$\alpha d(\rho) = \text{tr}(S) = \sum_{g \in G} \sum_{j=1}^{d(\rho)} \overline{\langle v, v_j \rangle} \langle v', v_j \rangle = |G| \langle v', v \rangle.$$

Usando (2.5) resulta que  $S = \alpha I$  con  $\alpha = \frac{|G|}{d(\rho)} \langle v', v \rangle$ . Entonces

$$\frac{|G|}{d(\rho)} \langle v', v \rangle \langle w, w' \rangle = \rho \langle w, w' \rangle = \langle S(w), w' \rangle = \sum_{g \in G} \langle \rho(g)w, v \rangle \overline{\langle \sigma(g)w', v' \rangle},$$

lo que concluye la demostración de ii). Finalmente la parte iii) se deduce fácilmente de ii). □

## 2.4. El álgebra de grupo de $G$ y algunas subálgebras destacadas.

Así como se mencionó en la introducción, la teoría de funciones esféricas definidas en un grupo finito  $G$  está cercanamente relacionada al álgebra de grupo de  $G$  y ciertas subálgebras de esta.

**Definición 2.13.** Consideramos  $G$  un grupo finito

- Sean  $f_1, f_2$  dos funciones a valores complejos definidas en  $G$ . La *convolución* de  $f_1$  con  $f_2$  es la función definida por

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{x \in G} f_1(gx^{-1})f_2(x), \quad (2.6)$$

equivalentemente podemos escribir la convolución de las siguientes formas

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{x \in G} f_1(x)f_2(x^{-1}g) = \sum_{\substack{h, \ell \in G \\ h\ell = g}} f_1(h)f_2(\ell), \quad \text{para todo } g \in G$$

- Para todo  $g \in G$  denotamos por  $\delta_g$  a la *función de Dirac* centrada en  $g$ , que es

$$\delta_g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = g, \\ 0 & \text{si } x \neq g, \end{cases}$$

El espacio vectorial complejo  $A[G]$  con el producto de convolución es un álgebra, la denominamos el *álgebra de grupo* de  $G$  y  $\delta_e$  es su identidad.

**Nota 2.14.** Si  $K$  es un subgrupo de  $G$  entonces  $A[K]$  puede ser visto como una subálgebra de  $A[G]$ , extendiendo una función  $\tilde{f} \in A[K]$  a  $\tilde{f} \in A[G]$  por  $\tilde{f}(x) = 0$ , para  $x \notin K$ . Observamos que con esta identificación tenemos  $\tilde{f} * h = \tilde{f} * \tilde{h}$ .

El grupo  $G$  actúa por conjugación en el álgebra de grupo  $A[G]$

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}xg), \quad \text{para todo } f \in A[G], \text{ y } x, g \in G.$$

Equivalentemente  $g \cdot f = \delta_g * f * \delta_{g^{-1}}$ , para todo  $g \in G$  y  $f \in A[G]$ .

**Definición 2.15.** Dado un grupo finito  $G$ .

- Si  $f \in A[G]$  es tal que  $f * h = h * f$  para todo  $h \in A[G]$  diremos que  $f$  es una *función central* o *función de clases*.
- Denominamos *centro* del álgebra de grupo  $A[G]$  a la subálgebra que consiste de todas las funciones centrales de  $A[G]$ , lo denotaremos por  $A[G]^G$ , es decir

$$A[G]^G = \{f \in A[G] : f * h = h * f, \text{ para toda } h \in A[G]\}.$$

**Lema 2.16.** Una función  $f \in A[G]$  es central si y solo si es constante en cada clase de conjugación, es decir

$$f(g^{-1}xg) = f(x), \quad \text{para todo } x, g \in G.$$

*Demostración.* Ver pág. 99 en [3]. □

Recordemos que si  $(\rho, V)$  es una representación de  $G$  denotamos por  $d(\rho)$  la dimensión de  $V$  y por  $\xi_\rho$  al carácter de  $\rho$ . En la siguiente proposición enunciamos algunas propiedades del carácter de toda representación de  $G$ , entre ellas que son funciones centrales.

**Proposición 2.17.** Sea  $(\rho, V)$  una representación de  $G$ , para todo  $x, g \in G$  se cumple

- $\xi_\rho(e) = d(\rho)$ ,
- $\xi_\rho(gxg^{-1}) = \xi_\rho(x)$ .

*Demostración.* Ver [4] pág. 93. □

Recordemos que dado  $(\rho, V)$  representación de  $G$ , denotamos con  $\chi_\rho$  a  $d(\rho)\xi_\rho$ .

**Proposición 2.18.** Sean  $\sigma, \rho \in \hat{G}$ , se tiene

$$\chi_\rho * \chi_\sigma = \begin{cases} |G|\chi_\rho & \text{si } \rho \sim \sigma, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.7)$$

*Demostración.* Sean  $\{v_i\}_{i=1}^{d(\rho)}$  y  $\{w_j\}_{j=1}^{d(\sigma)}$  bases ortonormales de  $V_\rho$  y  $V_\sigma$  respectivamente. Para  $x \in G$ , tenemos

$$\begin{aligned} (\chi_\rho * \chi_\sigma)(x) &= d(\rho)d(\sigma) \sum_{y \in G} \xi_\rho(y)\xi_\sigma(y^{-1}x) \\ &= d(\rho)d(\sigma) \sum_{i=1}^{d(\rho)} \sum_{j=1}^{d(\sigma)} \sum_{y \in G} \langle \rho(y)v_i, v_i \rangle \overline{\langle \sigma(y)w_j, \sigma(x)w_j \rangle} \\ &= d(\rho)d(\sigma) \sum_{i=1}^{d(\rho)} \sum_{j=1}^{d(\sigma)} \langle \rho_{v_i, v_i}, \sigma_{w_j, \sigma(x)w_j} \rangle. \end{aligned}$$

Por las relaciones de ortogonalidad de Schur de la Proposición 2.12, si  $\rho$  y  $\sigma$  no son equivalentes, los coeficientes matriciales  $\rho_{v_i, v_i} \in E_\rho$  y  $\sigma_{w_j, \sigma(x)w_j} \in E_\sigma$  son funciones ortogonales y por lo tanto  $(\chi_\rho * \chi_\sigma)(x) = 0$ .

Si  $\sigma \sim \rho$  entonces

$$(\chi_\rho * \chi_\rho)(x) = d(\rho)^2 \sum_{i,j=1}^{d(\rho)} \sum_{y \in G} \langle \rho(y)v_i, v_i \rangle \overline{\langle \rho(y)v_j, \rho(x)v_j \rangle}$$

usando las relaciones de ortogonalidad de Schur, obtenemos

$$= d(\rho)^2 \sum_{i,j=1}^{d(\rho)} \frac{|G|}{d(\rho)} \langle v_i, v_j \rangle \langle \rho(x)v_j, v_i \rangle = |G|d(\rho) \sum_{j=1}^{d(\rho)} \langle \rho(x)v_j, v_j \rangle = |G|\chi_\rho(x).$$

□

## 2.5. Semisimplicidad de representaciones de $G$

Como en toda teoría, antes de empezar la clasificación de las representaciones de un grupo finito se presta atención a aquellas que son “las mas simples” y que conforman las demás, este concepto se traduce en representaciones irreducibles del grupo. Debemos ver entonces la relación que hay en una representación arbitraria con respecto a las representaciones irreducibles. La llave de esta relación está contenida en el siguiente resultado.

**Proposición 2.19.** Sea  $(\rho, V)$  una representación de  $G$ . Si  $W$  es una subrepresentación de  $V$ , entonces existe un subespacio  $W'$  complementario de  $W$  y que es también  $G$ -invariante, es decir tal que  $V = W \oplus W'$ .

*Demostración.* Ver [8] pág. 6. □

**Nota 2.20.** Sean  $(\mu, W)$  representación irreducible de  $G$  y  $(\rho, V)$  una representación arbitraria de  $G$ , decimos que  $\rho$  contiene a  $\mu$  o que  $\mu$  aparece en  $\rho$ , si  $(\rho, V)$  contiene alguna subrepresentación isomorfa a  $(\mu, W)$ .

Como consecuencia directa de la Proposición anterior tenemos

**Corolario 2.21.** *Sea  $(\rho, V_\rho)$  una representación de  $G$ . Entonces  $V_\rho$  es una suma directa ortogonal finita de subrepresentaciones irreducibles  $V_{\rho_j}$ .*

$$V_\rho = \bigoplus_{j=1}^r V_{\rho_j}. \quad (2.8)$$

en este caso denotamos por  $\rho = \bigoplus_{j=1}^r \rho_j$ .

Esta propiedad es llamada *completa reducibilidad*, o *semisimplicidad*.

**Proposición 2.22.** *Sean  $\rho, \sigma$  representaciones de  $G$ , si  $\rho = \bigoplus_{j=1}^r \rho_j$  y  $\sigma$  es irreducible. Entonces, denotamos por  $m_\sigma(\rho) = |\{j : \rho_j \sim \sigma\}|$  tenemos*

$$m_\sigma(\rho) = \frac{1}{|G|} \langle \xi_\rho, \xi_\sigma \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \xi_\rho(g) \xi_\sigma(g^{-1}). \quad (2.9)$$

En particular,  $m_\sigma(\rho)$  no depende de la descomposición elegida de  $\rho$ .

*Demostración.* Ver [4] pág. 94. □

**Definición 2.23.** El número  $m_\sigma(\rho)$  en la ecuación (2.9) es llamado la *multiplicidad* de  $\sigma$  como subrepresentación de  $\rho$ . Claramente, si  $\sigma$  no está contenido en  $\rho$ , entonces  $m_\sigma(\rho) = 0$ .

Si bien la descomposición en la ecuación (2.8) no es única, podemos escribir

$$V_\rho = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} m_\sigma(\rho) V_\sigma.$$

esta descomposición de  $V_\rho$  si es única salvo el orden de los factores. El espacio  $m_\sigma(\rho) V_\sigma$  es conocido como la *componente isotópica de  $\sigma$  en  $\rho$*  y lo denotamos por  $V_{(\sigma)}$ .

**Definición 2.24.** Sea  $G$  un grupo finito y  $K$  un subgrupo de  $G$ .

- Una representación  $(\rho, V)$  de un grupo  $G$  se dice *libre de multiplicidad* si todas las subrepresentaciones irreducibles que aparecen en su descomposición son no equivalentes a pares, es decir si  $V_\rho = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} m_\sigma(\rho) V_\sigma$ , entonces  $m_\sigma(\rho) \leq 1$  para todo  $\sigma \in \hat{G}$ .
- Diremos que  $K$  es un *subgrupo libre de multiplicidad* de  $G$  si, para toda  $\sigma \in \hat{G}$  la restricción  $\text{Res}_K^G(\sigma)$  es una representación libre de multiplicidad de  $K$ . Cuando este sea el caso también diremos que *el par  $(G, K)$  es libre de multiplicidad*.

Consideremos ahora un subgrupo  $K$  de  $G$ , por lo anterior tenemos que toda representación de  $K$  se descompone en suma directa de irreducibles, el siguiente resultado hace referencia al operador proyección del espacio en cada componente isotópica.

**Proposición 2.25.** *Sea  $(\rho, V_\rho)$  una representación de  $K$  y sea  $\pi \in \hat{K}$  una representación que aparece en  $\text{Res}_K^G(\rho)$ . El operador lineal de  $V_\rho$  definido por*

$$P_\pi = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \rho(k),$$

es la proyección ortogonal de  $V_\rho$  sobre  $V_{(\pi)}$ .

*Demostración.* Comenzamos probando que  $P_\pi$  es una proyección.

$$\begin{aligned} P_\pi^2 &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{k, k_1 \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \chi_\pi(k_1^{-1}) \rho(kk_1) = \frac{1}{|K|^2} \sum_{k, x \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \chi_\pi(x^{-1}k) \rho(x) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{x \in K} (\chi_\pi * \chi_\pi)(x^{-1}) \rho(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in K} \chi_\pi(x^{-1}) \rho(x) = P_\pi, \end{aligned}$$

por la Proposición 2.18. Mas aún  $P_\pi$  es una proyección ortogonal pues

$$P_\pi^* = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \overline{\chi_\pi(k^{-1})} \rho(k)^* = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k) \rho(k^{-1}) = P_\pi.$$

Vemos ahora que  $P_\pi(v) = 0$  para todo  $v \in V_\mu \leq V_\rho$ , con  $\mu \neq \pi$ .

Sea  $\{e_i\}$  una base ortonormal de  $V_\pi \leq V_\rho$ . Entonces

$$\begin{aligned} \langle P_\pi v, P_\pi v \rangle &= \langle P_\pi v, P_\pi^* v \rangle = \langle P_\pi^2 v, v \rangle = \langle P_\pi v, v \rangle = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \langle \rho(k)v, v \rangle \\ &= \frac{d(\pi)}{|K|} \sum_{k \in K} \sum_{i=1}^{d(\pi)} \langle \pi(k^{-1})e_i, e_i \rangle \langle \mu(k)v, v \rangle \\ &= \frac{d(\pi)}{|K|} \sum_{k \in K} \sum_{i=1}^{d(\pi)} \langle \mu(k)v, v \rangle \overline{\langle \pi(k)e_i, e_i \rangle} = 0. \end{aligned}$$

Cuando  $\mu = \pi$  tenemos

$$\begin{aligned} \langle P_\pi e_j, e_r \rangle &= \frac{d(\pi)}{|K|} \sum_{k \in K} \sum_{i=1}^{d(\pi)} \langle \pi(k)e_j, e_r \rangle \overline{\langle \pi(k)e_i, e_i \rangle} = \sum_{i=1}^{d(\pi)} \frac{d(\pi)}{|K|} \langle \pi_{i,i}, \pi_{j,r} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{d(\pi)} \langle e_j, e_i \rangle \langle e_i, e_r \rangle = \langle e_j, e_r \rangle, \end{aligned}$$

la penúltima igualdad surge por ii) de la Proposición 2.12. Por tanto  $P_\pi e_j = e_j$  y queda demostrado que  $\text{Im}(P_\pi) = V_{(\pi)}$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

## 2.6. Teorema de Peter-Weyl.

El objetivo en esta parte es, en primer lugar, considerar la representación regular izquierda de  $A[G]$  y establecer su descomposición en subrepresentaciones irreducibles vista como  $G$ -módulo. Posteriormente establecer esta descomposición considerando esta vez  $A[G]$  como un  $G \times G$ -módulo.

Como vimos en el Ejemplo (2.2) en  $A[G]$  tenemos la representación regular a izquierda  $L$  dada por

$$L: G \rightarrow GL(A[G]) \quad [L(g)f](x) = f(g^{-1}x) \quad \text{para todo } f \in A[G], g, x \in G.$$

**Teorema 2.26.** *Sea  $G$  un grupo finito, consideramos la representación regular izquierda  $(L, A[G])$ .*

- *Toda representación irreducible  $(\rho, V_\rho)$  de  $G$  aparece en la descomposición de  $L$  con multiplicidad igual a su dimensión  $d(\rho)$ .*

▪

$$|G| = \sum_{\rho \in \hat{G}} d(\rho)^2 \quad \text{y} \quad A[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} d(\rho) V_\rho.$$

*Demostración.* Para la demostración de este resultado ver Teorema 3.7.11 de [4], pag 95.  $\square$

Recordemos las definiciones de las representaciones regulares a izquierda y derecha de  $A[G]$ .

$$\begin{aligned} L, R : G \rightarrow GL(A[G]) \quad \text{están dadas por} \\ (L(g)f)(x) = f(g^{-1}x) \text{ y } (R(g)f)(x) = f(xg) \quad \text{para todo } f \in A[G], g, x \in G. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Tenemos que  $A[G]$  es un  $G \times G$ -módulo, via la representación  $L \otimes R$ , definida de la siguiente forma

$$(L \otimes R)(x, y)(f)(g) = L(x)R(y)f(g) = f(x^{-1}gy) \quad \text{para todo } f \in A[G] \quad g, x, y \in G. \quad (2.11)$$

Si  $(\rho, V_\rho)$  es una representación irreducible de  $G$ , recordemos que la representación contragradiente  $(\rho', V_{\rho'})$  esta definida en  $V_{\rho'} = V_\rho'$ , el espacio vectorial dual de  $V_\rho$ , por

$$(\rho'(g)\lambda)(v) = \lambda(\rho(g^{-1})v), \quad \text{para todo } g \in G, \lambda \in V_\rho', v \in V_\rho.$$

Dado  $\lambda \in V_\rho'$  y  $w \in V_\rho$ , definimos  $\lambda_{\rho, w} \in A[G]$  por  $\lambda_{\rho, w}(g) = \lambda(\rho(g)w)$ .

La aplicación

$$V_\rho' \times V_\rho \longrightarrow A[G] \quad \text{dada por } \lambda \times w \mapsto \lambda_{\rho, w},$$

es bilineal, por tanto se extiende a la aplicación lineal

$$V_\rho' \otimes V_\rho \longrightarrow A[G] \quad \text{dada por } \lambda \otimes w \mapsto \lambda_{\rho, w}. \quad (2.12)$$

es decir  $(\lambda \otimes w)(g) = \lambda(\rho(g)w)$ , para todo  $g \in G$ .

Observemos que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} V_\rho' \otimes V_\rho & \longrightarrow & A[G] \\ \rho'(x) \otimes \rho(y) \downarrow & & \downarrow (L \otimes R)(x, y) \\ V_\rho' \otimes V_\rho & \longrightarrow & A[G] \end{array}$$

Entonces la aplicación definida (2.12) es un  $G \times G$ -morfismo pues

$$\begin{aligned} (L(x)R(y)\lambda_{\rho, w})(g) &= \lambda(\rho(x^{-1}gy)w) = (\rho'(x)\lambda)(\rho(g)\rho(y)w) \\ &= \lambda_{\rho'(x)\lambda, \rho(y)w}(g), \end{aligned}$$

es decir  $L(x)R(y)\lambda_{\rho, w} = \lambda_{\rho'(x)\lambda, \rho(y)w}$ , para todo  $x, y \in G$ . Además  $V_\rho' \otimes V_\rho$  es  $G \times G$ -irreducible, por ser el producto tensorial de dos  $G$ -módulos irreducibles. Por lo tanto el morfismo definido en (2.12) es inyectivo y podemos identificar  $V_\rho' \otimes V_\rho$  con su imagen en  $A[G]$ . Notemos que esta imagen coincide con  $E_\rho \subset A[G]$ , el espacio generado por los coeficientes matriciales de  $\rho$ , pues dado  $\rho \in V_\rho'$  por el Teorema de representación de Riez existe un único  $v \in V_\rho$  tal que  $\rho(w) = \langle w, v \rangle$  para todo  $w \in V_\rho$  y por lo tanto  $\lambda_{\rho, w} = \rho_{v, w}$ .

Estamos listos para enunciar y demostrar el siguiente resultado.

**Teorema 2.27.** (Teorema de Peter-Weyl) Si  $G$  es un grupo finito, entonces

$$A[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} V_\rho' \otimes V_\rho \quad \text{y} \quad L \otimes R = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \rho' \otimes \rho,$$

en la descomposición de  $A[G]$  la suma del lado derecho es una suma directa ortogonal de  $G \times G$ -módulos irreducibles.



*Demostración.* Por lo mencionado antes, dado  $\rho \in \hat{G}$ ,  $V'_\rho \otimes V_\rho$  es un  $G \times G$ -submódulo irreducible de  $A[G]$ , vía la identificación  $(\rho \otimes w)(g) = \lambda(\rho(g)w)$  para  $\lambda \in V'_\rho$ ,  $w \in V_\rho$  y  $g \in G$ , tenemos que  $V'_\rho \otimes V_\rho$  coincide con  $E_\rho$ .

Por la Proposición 2.12 sabemos que  $\bigoplus_{\rho \in \hat{G}} V'_\rho \otimes V_\rho$  es una suma directa ortogonal de  $G \times G$ -submódulos irreducibles de  $A[G]$ .

Calculemos ahora la multiplicidad de una representación  $\rho \in \hat{G}$  en el  $G$ -módulo  $(R, A[G])$  donde  $R$  es la representación regular derecha. Sea  $P : A[G] \rightarrow A[G]$  la proyección ortogonal sobre la  $\rho$ -componente isotípica en  $A[G]$ . Por Proposición 2.25 tenemos que

$$P_\rho = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) R(g). \quad (2.13)$$

Entonces, tomando traza a ambos lados obtenemos que la multiplicidad  $m_R(\rho)$  es

$$m_R(\rho) = \frac{\text{tr}(P_\rho)}{d(\rho)} = \frac{1}{d(\rho)|G|} \sum_{g \in G} \chi_\rho(g^{-1}) \text{tr}(R(g)) = \frac{1}{d(\rho)|G|} \chi_\rho(e) |G| = d(\rho),$$

pues  $\text{tr}(R(g)) = 0$  para todo  $g \neq e$  y  $\text{tr}(R(e)) = |G|$ .

Por lo tanto, la  $\rho$ -componente isotípica en  $A[G]$  contiene  $d(\rho)$  copias de  $V_\rho$  y por otra parte tenemos que  $V'_\rho \otimes V_\rho = \bigoplus_{j=1}^{d(\rho)} V_\rho$ , como  $G$ -módulo. De acá deducimos que  $V'_\rho \otimes V_\rho$  es la componente  $\rho$ -isotípica de  $A[G]$  lo que completa la demostración.  $\square$

**Proposición 2.28.** *La proyección ortogonal  $P$  de  $A[G]$  sobre  $V'_\rho \otimes V_\rho$  está dada por*

$$P(f) = \frac{1}{|G|} \chi_\rho * f = \frac{1}{|G|} f * \chi_\rho. \quad (2.14)$$

Además  $V'_\rho \otimes V_\rho$  es un ideal bilátero de  $A[G]$  con  $\frac{1}{|G|} \chi_\rho$  como una identidad.

*Demostración.* Partiendo de la ecuación (2.13) se verifica que  $P_\rho(f)(x) = \frac{1}{|G|} (f * \chi_\rho)(x)$ , para toda  $f \in A[G]$  y  $x \in G$ .

Si  $f \in V'_\rho \otimes V_\rho$  y  $h \in V'_\sigma \otimes V_\sigma$  con  $\rho, \sigma \in \hat{G}$  representaciones no equivalentes, entonces, por la Proposición 2.18 tenemos

$$f * h = \frac{1}{|G|^2} (f * \chi_\rho) * (\chi_\sigma * h) = \frac{1}{|G|^2} f * (\chi_\rho * \chi_\sigma) * h = 0.$$

Por lo tanto  $V'_\rho \otimes V_\rho$  es un ideal bilátero de  $A[G]$ .

Si  $f \in V'_\rho \otimes V_\rho$ , entonces

$$\frac{1}{|G|} \chi_\rho * f = f = \frac{1}{|G|} f * \chi_\rho$$

la primera igualdad es porque  $P(f) = f$  y la igualdad entre el primer y último término es directa a partir de la definición de la convolución. Así  $\frac{1}{|G|} \chi_\rho$  es la identidad del álgebra  $V'_\rho \otimes V_\rho$ .  $\square$

## 2.7. Representaciones irreducibles de $A[G]$

Estableceremos una relación biunívoca entre las representaciones irreducibles  $\rho$  de  $G$  y las representaciones irreducibles de  $A[G]$ . Obtendremos este resultado en el Teorema 2.31. Finalmente en el Teorema 2.33 establecemos una base de  $A[G]^G$ , que es el centro del álgebra de grupo  $A[G]$ , y se relaciona la dimensión de esta subálgebra con la cantidad de clases de conjugación en  $G$ .

**Definición 2.29.** Sea  $(\rho, V)$  una representación de  $G$ , se define la *extensión de  $\rho$  a  $A[G]$*  como el operador

$$\hat{\rho} : A[G] \rightarrow \text{End}(V_\sigma), \quad f \rightarrow \sum_{g \in G} f(g)\rho(g).$$

Denotamos a  $\hat{\sigma}(f)$  por  $\hat{f}(\sigma)$  y lo denominamos *la transformada de Fourier de  $f$  con respecto a la representación  $\rho$* .

**Proposición 2.30.** (Fórmula de la inversión de Fourier) Para toda  $f \in A[G]$  vale la siguiente fórmula

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \hat{G}} d(\rho) \text{tr}(\rho(g^{-1})\hat{f}(\rho)) \quad \text{para todo } g \in G.$$

*Demostración.* De la Proposición 2.12 y del Teorema 2.27 sabemos que los coeficientes  $\sqrt{\frac{d(\rho)}{|G|}}\rho_{i,j}$  calculados respecto a una base ortonormal  $\{v_i^\rho\}_{i=1}^{d(\rho)}$ , para todo  $\rho \in \hat{G}$  constituyen una base ortonormal de  $L^2(G)$ , entonces también el conjunto

$$\left\{ \sqrt{\frac{d(\rho)}{|G|}}\bar{\rho}_{i,j} : \rho \in \hat{G} \quad i, j = 1, \dots, d(\rho) \right\}$$

es base ortonormal de  $L^2(G)$ , por tanto, para  $f \in A[G]$  tendremos

$$f(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{\rho \in \hat{G}} \sum_{i,j} d(\rho) \langle f, \bar{\rho}_{i,j} \rangle \bar{\rho}_{i,j}(g).$$

En general, si  $S, T \in \text{End}(V_\rho)$  entonces

$$\text{tr}(TS) = \sum_{i,j} \langle T v_j^\rho, v_i^\rho \rangle \langle S v_i^\rho, v_j^\rho \rangle. \quad (2.15)$$

como

$$\langle f, \bar{\rho}_{i,j} \rangle = \sum_{g \in G} f(g)\rho_{i,j}(g) = \sum_{g \in G} f(g) \langle \rho(g)v_j^\rho, v_i^\rho \rangle = \langle \hat{f}(\rho)v_j^\rho, v_i^\rho \rangle.$$

y

$$\sum_{i,j} \langle \hat{f}(\rho)v_j^\rho, v_i^\rho \rangle \bar{\rho}_{i,j} = \sum_{i,j} \langle \hat{f}(\rho)v_j^\rho, v_i^\rho \rangle \langle \rho(g^{-1})v_i^\rho, v_j^\rho \rangle = \text{tr}(\rho(g^{-1})\hat{f}(\rho)).$$

la última igualdad es por la ecuación (2.15).  $\square$

**Teorema 2.31.** Para toda  $(\sigma; V)$  representación de  $G$  se tiene que  $\hat{\sigma}$  es una representación de  $A[G]$ . Recíprocamente, si  $L$  es una representación de  $A[G]$ , entonces  $L$  es la extensión a  $A[G]$  de alguna representación  $\sigma$  de  $G$ ,  $L$  es irreducible si y sólo si  $\sigma$  lo es. Más aún, el conjunto de todas las representaciones irreducibles de  $A[G]$  separa los puntos de  $A[G]$ .

*Demostración.* La demostración de la primera afirmación se sigue de la observación de que  $\hat{\delta}_g(\sigma) = \sigma(g)$ . Además si  $(L, W)$  es una representación irreducible de  $A[G]$  y definimos  $\sigma : G \rightarrow \text{End}(W)$  por  $\sigma(g) = L(\delta_g)$  se cumple que  $\sigma \in \hat{G}$  y  $\hat{\sigma} = L$ . Finalmente si  $\hat{f}(\rho) = 0$  para toda  $\rho \in \hat{G}$  por la Proposición 2.30 tendremos que  $f(g) = 0$  para todo  $g \in G$ , esto significa que las representaciones irreducibles de  $A[G]$  separan los puntos de  $A[G]$ .  $\square$

Recordemos, por el Lema 2.16, una función  $f \in A[G]$  es central si  $f(g^{-1}xg) = f(x)$ , para todo  $x, g \in G$ .

**Proposición 2.32.** *Sea  $f \in A[G]$  una función central y  $(\rho, V)$  representación irreducible de  $G$ . Entonces*

$$\hat{f}(\rho) = \alpha I, \quad \text{donde } \alpha = \frac{1}{d(\rho)} \sum_{g \in G} f(g) \xi_{\rho}(g) = \frac{1}{d(\rho)} \langle f, \bar{\xi}_{\rho} \rangle.$$

*Demostración.* Ver [4] pág. 100. □

**Teorema 2.33.** *El conjunto de caracteres  $\{\xi_{\rho} : \rho \in \hat{G}\}$  de un grupo finito  $G$  es una base del centro del álgebra del grupo  $G$ , que es  $A[G]^G$ . En particular si  $\mathcal{C}(G)$  denota el conjunto de todas las clases de conjugación de  $G$  entonces*

$$|\hat{G}| = |\mathcal{C}(G)|.$$

*Demostración.* Por las Proposiciones 2.17 y 2.18 sabemos que  $\{\chi_{\rho} : \rho \in \hat{G}\}$  es un conjunto ortogonal en  $A[G]^G$ . Sea  $f \in A[G]^G$  tal que  $\langle f, \xi_{\rho} \rangle = 0$  para todo  $\rho \in \hat{G}$ . Por la Proposición anterior tenemos que  $\hat{f}(\rho) = 0$  para todo  $\rho \in \hat{G}$  y por la fórmula de inversión de Fourier, ver Proposición 2.30,  $f = 0$ , con lo cual tenemos que  $\{\chi_{\rho} : \rho \in \hat{G}\}$  es base ortogonal de  $A[G]^G$ . La dimensión coincide con la cantidad de clases de conjugación por el Lema 2.16. □



## Funciones Esféricas Matriciales en Grupos Finitos.

En [17] Tiraó desarrolló el concepto de funciones esféricas matriciales y sus principales propiedades. Consideró grupos  $G$  localmente compactos unimodulares y  $K$  un subgrupo compacto de  $G$ . El propósito de este capítulo es presentar de forma sistemática los conceptos y propiedades de estas funciones considerando  $G$  un grupo finito y  $K$  un subgrupo arbitrario.

### 3.1. Definición y propiedades principales

Sea  $G$  un grupo finito y  $K$  un subgrupo de  $G$ , denotaremos por  $e$  el elemento neutro de  $G$ . Sea  $\hat{K}$  el conjunto de todas las clases de equivalencia de representaciones complejas, finitas e irreducibles de  $K$ . Para  $\pi \in \hat{K}$  escribimos  $\chi_\pi = d(\pi)\xi_\pi$ , donde  $d(\pi)$  es el grado de  $\pi$ , es decir, la dimensión de cualquier representación en la clase de  $\pi$  y  $\xi_\pi$  es el carácter de una de ellas.

Denotaremos por  $V$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$ ,  $\text{End}(V)$  al espacio de todas las transformaciones lineales de  $V$  en  $V$  y por  $I$  al operador identidad en  $\text{End}(V)$ .

Una *función esférica zonal* de  $G$  es una función a valores complejos  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$  que satisface

$$\varphi(e) = 1 \quad \text{y} \quad \varphi(g)\varphi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \varphi(gkh) \quad \text{para todo } g, h \in G. \quad (3.1)$$

Una útil generalización de la anterior definición es

**Definición 3.1.** Sean  $G$  un grupo finito,  $K$  un subgrupo arbitrario de  $G$  y  $\pi \in \hat{K}$ . Una *función esférica*  $\Phi$  en  $G$  de tipo  $\pi$  es una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  que satisface

i)  $\Phi(e) = I$ .

ii)  $\Phi(g)\Phi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkh) \quad \text{para todo } g, h \in G,$

También diremos que  $\Phi$  es función esférica de  $K$ -tipo  $\pi$ , además para hacer referencia a las funciones esféricas del grupo  $G$  de cualquier  $K$ -tipo diremos las funciones esféricas del par  $(G, K)$ .

Notemos que si consideramos  $\pi$  la representación trivial de  $K$  y  $V = \mathbb{C}$  esta definición coincide con la de función esférica zonal.

**Proposición 3.2.** Si  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  entonces:

- i)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1) \Phi(g) \Phi(k_2)$ , para todo  $k_1, k_2 \in K$ ,  $g \in G$ .
- ii)  $k \mapsto \Phi(k)$  es una representación de  $K$  tal que cualquier subrepresentación irreducible es equivalente a  $\pi$  en  $\hat{K}$ .

*Demostración.* Sean  $k_1 \in K$  y  $g \in G$ , de la definición tenemos

$$\Phi(k_1 g) = \Phi(e) \Phi(k_1 g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(k k_1 g)$$

como  $\chi_\pi$  es función de clases podemos considerar  $u^{-1} = k_1^{-1} k^{-1} k_1$  con lo que tendremos

$$\Phi(k_1 g) = \frac{1}{|K|} \sum_{u \in K} \chi_\pi(u^{-1}) \Phi(k_1 u g) = \Phi(k_1) \Phi(g).$$

De la misma forma probamos que  $\Phi(g k_2) = \Phi(g) \Phi(k_2)$ .

Para probar la segunda parte observemos que  $\Phi(k_1 k_2) = \Phi(k_1) \Phi(k_2)$ , si ponemos  $g = e$  en la primera parte, de donde  $k \mapsto \Phi(k)$  es una representación de  $K$ . Por definición tenemos

$$I = \Phi(e) \Phi(e) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(k).$$

De la Proposición 2.25 tenemos que  $\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(k)$  es la proyección de  $V$  en la componente isotípica de tipo  $\pi$ ,  $V_{(\pi)}$ , bajo la representación  $k \mapsto \Phi(k)$ . Así, tenemos que  $I = P_\pi$  y por tanto todas las subrepresentaciones irreducibles de  $k \mapsto \Phi(k)$  son equivalentes a  $\pi$ .  $\square$

**Nota 3.3.** Observemos que una consecuencia de la Proposición anterior es que toda función esférica  $\Phi$  determina su tipo unívocamente. El número de veces que  $\pi$  aparece en la representación  $k \mapsto \Phi(k)$  se llama *altura* de la función esférica  $\Phi$ .

Cuando  $K$  es un subgrupo contenido en el centro de  $G$  y  $\Phi$  es una función esférica de  $G$  tenemos:

$$\Phi(g) \Phi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(g k h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(k) \Phi(gh) = \Phi(gh),$$

que para todo  $g, h \in G$ , es decir,  $\Phi$  es una representación de  $G$ . Cuando  $K = \{e\}$  las funciones esféricas en  $G$  son precisamente las representaciones de dimensión finita de  $G$ . Si  $G$  es abeliano las funciones esféricas son las representaciones de dimensión finita de  $G$  las cuales satisfacen ii) de la Proposición 3.2.

Otro caso extremo ocurre cuando  $G = K$ , en este caso las funciones esféricas son las representaciones de dimensión finita de  $G$  con todas sus subrepresentaciones irreducibles equivalentes.

**Definición 3.4.** Diremos que una función no nula  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es *irreducible* cuando el conjunto  $\{\Phi(g) : g \in G\}$  es una familia irreducible no trivial de transformaciones lineales de  $V$  en  $V$ , es decir, todo subespacio  $\Phi(G)$ -invariante de  $V$  es trivial.

**Definición 3.5.** Sean  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  y  $\Phi_1 : G \rightarrow \text{End}(V_1)$  funciones esféricas de  $G$  de tipo  $\pi$ , diremos que son *equivalentes* si existe un isomorfismo lineal  $T$  de  $V$  sobre  $V_1$  tal que  $\Phi_1(g) = T \Phi(g) T^{-1}$  para todo  $g \in G$ .

**Proposición 3.6.** Cualquier función esférica  $\Phi$  de tipo  $\pi$  es la suma directa de funciones esféricas irreducibles de tipo  $\pi$ .

*Demostración.* Sea  $(\cdot, \cdot)$  un producto interno en  $V$  y definimos

$$\langle u, v \rangle = \sum_{g \in G} (\Phi(g)u, \Phi(g)v).$$

Entonces es claro que también  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es un producto interno en  $V$ . Mas aún, probaremos que

$$\langle \Phi(x)u, v \rangle = \langle u, \Phi(x^{-1})v \rangle \quad (3.2)$$

para todo  $x \in G$ . De hecho,

$$\begin{aligned} \langle \Phi(x)u, v \rangle &= \sum_{g \in G} (\Phi(g)\Phi(x)u, \Phi(g)v) = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} (\chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkx)u, \Phi(g)v) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} (\Phi(gx)u, \chi_\pi(k)\Phi(gk^{-1})v) = \sum_{g \in G} \langle \Phi(gx)u, \Phi(g)v \rangle. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Hemos usado  $\chi_\pi(k^{-1}) = \overline{\chi_\pi(k)}$ . Similarmente tenemos

$$\begin{aligned} \langle u, \Phi(x^{-1})v \rangle &= \sum_{g \in G} (\Phi(g)u, \Phi(g)\Phi(x^{-1})v) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} (\Phi(g)u, \chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkx^{-1})v) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} (\chi_\pi(k)\Phi(gxk^{-1})u, \Phi(g)v) = \sum_{g \in G} \langle \Phi(gx)u, \Phi(g)v \rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

De (3.3) y (3.4) tenemos que (3.2) se cumple.

Si  $U \subset V$  es un subespacio invariante bajo  $\Phi(g)$  para todo  $g \in G$  y  $U'$  es el complemento ortogonal de  $U$  con respecto al producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , entonces de (3.2) se sigue que  $U'$  también es invariante. Completamos la demostración de la proposición por inducción en  $\dim V$ .  $\square$

Sea  $\varphi$  función a valores complejos, solución de la ecuación (3.1). Si  $\varphi$  no es idénticamente nula entonces  $\varphi(e) = 1$ . (cf. [12], pág. 400-401). Este resultado se generaliza de la siguiente forma.

**Proposición 3.7.** *Sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  función que satisfice*

$$\Phi(g)\Phi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkh) \quad \text{para todo } g, h \in G.$$

*Si  $\Phi$  es irreducible entonces  $\Phi(e) = I$ .*

*Demostración.* Sea  $v \in V$  arbitrario y fijo,  $W_v$  el espacio vectorial generado por  $\{\Phi(g)(v) : g \in G\}$ , como

$$\Phi(g)\Phi(h)(v) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(gkh)(v) \in W_v.$$

lo cual demuestra que  $W_v$  es  $\Phi(G)$ -invariante, por lo tanto es  $\{0\}$  o  $V$ . Como  $\Phi$  es irreducible por definición es no nula, entonces  $W_v = V$  para algún  $v \in V$ . También tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x)\Phi(e)\Phi(y) &= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xk)\Phi(y) \\ &= \frac{1}{|K|^2} \sum_{k, l \in K} \chi_\pi(k^{-1})\chi_\pi(l^{-1})\Phi(xkly) = \frac{1}{|K|^2} \sum_{k, l \in K} \chi_\pi(k^{-1})\chi_\pi(l^{-1}k)\Phi(xly) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{l \in K} (\chi_\pi * \chi_\pi)(l^{-1})\Phi(xly) = \frac{1}{|K|} \sum_{l \in K} \chi_\pi(l^{-1})\Phi(xly) = \Phi(x)\Phi(y). \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Phi(x)\Phi(e)\Phi(y) = \Phi(x)\Phi(y). \quad (3.5)$$

Como  $W_v = V$  para algún  $v \in V$  entonces todo  $w \in V$  es de la forma  $w = \sum_{i=1}^n \Phi(g_i)v$  y por lo tanto  $\Phi(x)\Phi(e)w = \sum_{i=1}^n \Phi(x)\Phi(e)\Phi(g_i)v$ . Por la ecuación (3.5) tenemos que  $\sum_{i=1}^n \Phi(x)\Phi(e)\Phi(g_i)v = \sum_{i=1}^n \Phi(x)\Phi(g_i)v = \Phi(x)w$ . Por lo tanto se ha probado que  $\Phi(x)\Phi(e) = \Phi(x)$  para todo  $x \in G$ .

Para probar que  $\Phi(e)\Phi(x) = \Phi(x)$  para todo  $x \in G$  supongamos que para algún  $v_0 \in V$  y algún  $x \in G$  se tiene  $\Phi(e)\Phi(x)(v_0) \neq \Phi(x)(v_0)$  de donde el vector  $v = \Phi(e)\Phi(x)(v_0) - \Phi(x)(v_0)$  es un vector no nulo de  $V$  tal que  $W_v = \{0\}$  lo cual es un absurdo considerando que el subespacio vectorial unidimensional generado por  $v$  es  $G$ -invariante y  $\Phi$  es irreducible. Por lo tanto  $\Phi(e)$  es una proyección la cual conmuta con  $\Phi(x)$  para todo  $x \in G$ , de donde  $\Phi(e) = I$ .  $\square$

## 3.2. Caracterización de funciones esféricas como autofunciones.

Para la primera caracterización consideraremos una subálgebra particular de  $A[G]$  conocida como la subálgebra de  $K$ -puntos fijos. Esta subálgebra será fundamental en el estudio de las funciones esféricas a valores matriciales en grupos finitos. Juega un rol similar al del álgebra  $D(G)^K$  cuando  $G$  es un grupo de Lie conexo y  $K$  un subgrupo compacto de  $G$ . En tal caso  $D(G)^K$  es el álgebra de operadores diferenciales en  $G$  invariantes a izquierda por  $G$  y a derecha por  $K$ .

Obtendremos varias propiedades interesantes de las funciones esféricas a partir de la caracterización de ellas como autofunciones de operadores de convolución definidos en esta subálgebra. Comenzamos definiendo los conceptos necesarios.

Recordemos que el grupo  $G$  actúa por conjugación en el álgebra de grupo  $A[G]$

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}xg), \quad \text{para todo } f \in A[G], \text{ y } x, g \in G.$$

Equivalentemente  $g \cdot f = \delta_g * f * \delta_{g^{-1}}$ , para todo  $g \in G$  y  $f \in A[G]$ .

**Definición 3.8.** Considerando la acción de conjugación de  $G$  en  $A[G]$

- Denotaremos por  $A[G]^K$  la *subálgebra de  $K$ -puntos fijos* de  $A[G]$  y viene dada por,

$$A[G]^K = \{f \in A[G] : \delta_k * f = f * \delta_k, \text{ para todo } k \in K\}.$$

- El álgebra de funciones  *$K$ -biinvariantes* en  $A[G]$  esta dada por

$$A[G]^{K \times K} = \{f \in A[G] : f(k_1 g k_2) = f(g), \text{ para todo } k_1, k_2 \in K, g \in G\}.$$

Por el Lema 2.16, una función  $f$  de  $A[G]$  está en  $A[G]^K$  si y solo si  $f(kgk^{-1}) = f(g)$  para todo  $k \in K, g \in G$ . A toda función que satisface esta propiedad la llamamos función  *$K$ -central*.

**Definición 3.9.** Dado  $f \in A[G]$  denotamos por  $D_f$  al operador *multiplicación a derecha* por  $\check{f}$  en  $A[G]$ , es decir,  $D_f(h) = h * \check{f}$ , para todo  $h \in A[G]$ , donde  $\check{f}$  está definida por  $\check{f}(g) = f(g^{-1})$  para todo  $g \in G$ .

**Nota 3.10.** Es fácil verificar que  $(f_1 * f_2)^\check{ } = \check{f}_2 * \check{f}_1$  para cualquier  $f_1, f_2 \in A[G]$ .

La aplicación  $D : A[G] \rightarrow \text{End}(A[G])$  dada por  $D(f) = D_f$  es una representación del álgebra  $A[G]$  sobre el espacio vectorial  $A[G]$ . Para una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  extendemos esta definición por  $D_f(\Phi) = \Phi * \check{f}$ , es decir,

$$(D_f \Phi)(g) = (\Phi * \check{f})(g) = \sum_{x \in G} \Phi(g^{-1}x) f(x), \quad \text{para cualquier } f \in A[G]^K,$$



Necesitamos varios pasos para demostrar la siguiente caracterización de una función esférica en  $G$ .

**Teorema 3.11.** *Sea  $\pi \in \hat{K}$ . Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de  $G$  de tipo  $\pi$  si y solo si*

- (i)  $\Phi(e) = I$ ,
- (ii)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1) \Phi(g) \Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in G$ ,
- (iii)  $(D_f \Phi)(g) = \Phi(g) (D_f \Phi)(e)$  para todo  $f \in A[G]^K, g \in G$ ,
- (iv) La restricción  $\Phi|_K$  como una representación de  $K$  es equivalente a una suma directa de copias de  $\pi$ .

**Definición 3.12.** Con la notación previa a  $(D_f \Phi)(e)$  le denominamos *autovalor de  $\Phi$  asociado a  $f$* .

Comenzamos probando la siguiente proposición, la cual completa la demostración de que una función esférica  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$  satisface las condiciones (i) - (iv) en el Teorema 3.11.

**Proposición 3.13.** *Si  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica entonces*

$$(D_f \Phi)(g) = \Phi(g) (D_f \Phi)(e),$$

para todo  $f \in A[G]^K, g \in G$ .

*Demostración.* Tomamos  $f \in A[G]^K$  y calculamos

$$\begin{aligned} \Phi(g)(D_f \Phi)(e) &= \Phi(g)(\Phi * \check{f})(e) = \Phi(g) \sum_{y \in G} \Phi(y) f(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(gky) f(y) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(gy) f(k^{-1}y) \end{aligned}$$

como  $f$  es una función  $K$ -central

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(gy) f(yk^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(gyk) f(y) \\ &= \sum_{y \in G} \Phi(gy) f(y) = (\Phi * \check{f})(g) = (D_f \Phi)(g). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Para probar el recíproco del Teorema 3.11 probaremos que para ciertas funciones  $\Phi$  la condición (iii) de este teorema es equivalente a la identidad (ii) en la Definición 3.1. Ver Teorema 3.17 abajo. Para este propósito introduciremos una función  $\Psi$  cercanamente relacionada a  $\Phi$ , la cual, de hecho, tomaremos como un camino alternativo para la definición de función esférica.

Recordemos que si  $K$  es un subgrupo del grupo finito  $G$  y  $(\pi, V)$  es una representación de  $K$ , denotamos por  $\text{End}_K(V)$  al *conmutador* de  $\pi$ , es decir

$$\text{End}_K(V) = \{T \in \text{End}(V) : T\pi(k) = \pi(k)T \text{ para todo } k \in K\}.$$

Sea  $(\sigma, V)$  una representación de dimensión finita de  $K$  tal que cualquier subrepresentación irreducible pertenece a la clase de  $\pi \in \hat{K}$ . Consideramos los siguientes espacios vectoriales

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\Phi : G \rightarrow \text{End}(V) : \Phi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1) \Phi(g) \sigma(k_2)\}, \\ \mathcal{B} &= \{\Psi : G \rightarrow \text{End}_K(V) : \Psi \text{ es } K\text{-central y } \chi_\pi * \Psi = |K| \Psi\}. \end{aligned}$$

**Lema 3.14.** Sea  $\pi \in \hat{K}$ , para todo  $k_1 \in K$  se cumple

$$\sum_{k \in K} \pi(kk_1k^{-1}) = \frac{|K|\chi_\pi(k_1)}{d(\pi)^2} I.$$

*Demostración.* Sea  $U = \sum_{k \in K} \pi(kk_1k^{-1})$  claramente  $U$  es  $\pi$ -morfismo, por el Lema de Schur 2.10 existe un escalar  $\alpha$  tal que  $U = \alpha I$ , para determinar  $\alpha$  tomamos traza en la última igualdad tenemos.

$$\text{tr} \left( \sum_{k \in K} \pi(kk_1k^{-1}) \right) = |K|\xi_\pi(k_1) = \frac{|K|}{d(\pi)} d(\pi)\xi_\pi(k_1) = \frac{|K|}{d(\pi)} \chi_\pi(k_1).$$

De donde

$$\frac{|K|}{d(\pi)} \chi_\pi(k_1) = \alpha d(\pi).$$

esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 3.15.** Para  $\Phi \in \mathcal{A}$  y  $\Psi \in \mathcal{B}$ , definimos las aplicaciones lineales  $T$  y  $S$  dadas por

$$(T\Phi)(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\Phi(g)\pi(k^{-1}) \quad \text{y} \quad (S\Psi)(g) = \frac{d(\pi)^2}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\Psi(k^{-1}g).$$

Entonces  $T$  es un isomorfismo de  $\mathcal{A}$  sobre  $\mathcal{B}$  y  $S$  es el inverso de  $T$ .

*Demostración.* Si  $\Phi \in \mathcal{A}$ , comenzamos demostrando que  $T\Phi \in \mathcal{B}$ . Claramente para todo  $g \in G$  tenemos que  $(T\Phi)(g) \in \text{End}_K(V)$ ,  $T\Phi$  es una función  $K$ -central pues

$$(T\Phi)(k_1gk_1^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_1^{-1})\pi(k^{-1}) = (T\Phi)(g).$$

Además  $T\Phi$  satisface  $\chi_\pi * (T\Phi) = |K|T\Phi$  ya que

$$\begin{aligned} (\chi_\pi * (T\Phi))(g) &= \frac{1}{|K|} \sum_{k, k_1 \in K} \chi_\pi(k)\pi(k_1)\Phi(k^{-1}g)\pi(k_1^{-1}) \\ &= \sum_{k_1 \in K} \pi(k_1) \left( \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k)\pi(k^{-1}) \right) \Phi(g)\pi(k_1^{-1}) \\ &= \sum_{k_1 \in K} \pi(k_1)\Phi(g)\pi(k_1^{-1}) = |K|(T\Phi)(g), \end{aligned}$$

pues  $\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k)\pi(k^{-1}) = I$ .

Por otra parte, si  $\Psi \in \mathcal{B}$  entonces  $S\Psi \in \mathcal{A}$ ,

$$\begin{aligned} (S\Psi)(k_1gk_2) &= \frac{d(\pi)^2}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\Psi(k^{-1}k_1gk_2) = \frac{d(\pi)^2}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\Psi(k_2k^{-1}k_1g) \\ &= \frac{d(\pi)^2}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k_1kk_2)\Psi(k^{-1}g) = \frac{d(\pi)^2}{|K|} \pi(k_1) \sum_{k \in K} \pi(k)\Psi(k^{-1}g)\pi(k_2) \\ &= \pi(k_1)(S\Psi)(g)\pi(k_2), \end{aligned}$$

hemos usado que, por hipótesis,  $\pi(k)\Psi(g) = \Psi(g)\pi(k)$  para todo  $g \in G$  y  $k \in K$ .

Para ver que  $S$  es inverso derecho de  $T$  tomamos  $\Psi \in \mathcal{B}$  y observamos que

$$\begin{aligned} (TS\Psi)(g) &= \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \pi(k_1)\pi(k_2)\Psi(k_2^{-1}g)\pi(k_1^{-1}) \\ &= \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k_2 \in K} \sum_{k_1 \in K} \pi(k_1k_2k_1^{-1})\Psi(k_2^{-1}g). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.14 tenemos

$$\sum_{k_1 \in K} \pi(k_1k_2k_1^{-1}) = \frac{|K|\chi_\pi(k_2)}{d(\pi)^2} I. \quad (3.6)$$

Por tanto

$$(TS\Psi)(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k_2 \in K} \chi_\pi(k_2)\Psi(k_2^{-1}g) = \frac{1}{|K|} (\chi_\pi * \Psi)(g) = \Psi(g).$$

Esto prueba que  $S$  es la inversa derecha de  $T$ . Para ver que  $S$  es la inversa izquierda de  $T$  tomamos  $\Phi \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned} (ST\Phi)(g) &= \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \pi(k_1)\pi(k_2)\Phi(k_1^{-1}g)\pi(k_2^{-1}) \\ &= \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k_1 \in K} \sum_{k_2 \in K} \pi(k_1)\pi(k_2)\pi(k_1^{-1})\Phi(g)\pi(k_2^{-1}) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{k_2 \in K} \chi_\pi(k_2)\Phi(g)\pi(k_2^{-1}) = \Phi(g). \end{aligned}$$

En la penúltima ecuación se ha utilizado el Lema 3.14, esto completa la demostración.  $\square$

**Lema 3.16.** Sea  $\Psi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función  $K$ -central, es decir,  $\Psi(kgk^{-1}) = \Psi(g)$ , para todo  $k \in K, g \in G$ . Si  $\Psi$  satisface  $(D_f\Psi)(e) = 0$  para todo  $f \in A[G]^K$ , entonces  $\Psi = 0$ .

*Demostración.* Por hipótesis y definición de convolución de funciones en  $A[G]$  se tiene

$$0 = (D_f\Psi)(e) = (\Psi * \check{f})(e) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \Psi(x)f(x). \quad (3.7)$$

para toda  $f \in A[G]^K$ .

Sea  $f \in A[G]$  arbitraria y fija, se define  $f^\circ(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(kxk^{-1})$ , así definida  $f^\circ \in A[G]^K$ , aplicando esta función en la ecuación (3.7)

$$0 = \sum_{x \in G} \Psi(x)f^\circ(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in G} \sum_{k \in K} \Psi(x)f(kxk^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{u \in G} \sum_{k \in K} \Psi(k^{-1}uk)f(u)$$

por hipótesis  $\Psi(k^{-1}uk) = \Psi(u)$  para todo  $u \in G, k \in K$ , reemplazando en la última igualdad

$$0 = \sum_{u \in G} \Psi(u)f(u).$$

lo que implica que la ecuación (3.7) se cumple para todo  $f \in A[G]$ .

Para  $x \in G$  arbitrario y fijo, sea  $h = \delta_x \in A[G]$  por definición  $(D_h\Psi)(e) = \Psi(x)$  por lo tanto se tiene que  $\Psi(x) = 0$  y esto concluye la demostración.  $\square$

**Teorema 3.17.** Sea  $\Phi \in \mathcal{A}$  y  $\Psi = T\Phi$ , entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(i)  $\Psi$  satisface la ecuación funcional

$$\Psi(x)\Psi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Psi(kxk^{-1}y),$$

(ii)  $\Phi$  satisface la ecuación funcional

$$\Phi(x)\Phi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_{\pi}(k^{-1})\Phi(xky),$$

(iii) para todo  $f \in A[G]^K$

$$(D_f\Phi)(x) = \Phi(x)(D_f\Phi)(e).$$

(iv) para todo  $f \in A[G]^K$

$$(D_f\Psi)(x) = \Psi(x)(D_f\Psi)(e).$$

*Demostración.* (i) implica (ii). Por hipótesis  $\Phi = S\Psi$ , entonces

$$\begin{aligned} \Phi(x)\Phi(y) &= \frac{d(\pi)^4}{|K|^2} \sum_{k_1, k_2 \in K} \pi(k_1)\Psi(k_1^{-1}x)\pi(k_2)\Psi(k_2^{-1}y) \\ &= \frac{d(\pi)^4}{|K|^3} \sum_{k_1, k_2 \in K} \pi(k_1k_2) \sum_{k \in K} \Psi(kk_1^{-1}xk^{-1}k_2^{-1}y) \\ &= \frac{d(\pi)^4}{|K|^3} \sum_{k, k_1, k_2 \in K} \pi(k_1k_2) \sum_{k \in K} \Psi(k_2^{-1}kk_1^{-1}xk^{-1}y) = \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k, k_1 \in K} \pi(k_1)\Phi(kk_1^{-1}xk^{-1}y) \\ &= \frac{d(\pi)^2}{|K|^2} \sum_{k, k_1 \in K} \pi(k_1kk_1^{-1})\Phi(xk^{-1}y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_{\pi}(k)\Phi(xk^{-1}y), \end{aligned}$$

en la última igualdad hemos usado (3.6).

(ii) implica (iii). Esto ha sido probado en la Proposición 3.13.

(iii) implica (iv). Sea  $f \in A[G]^K$ , entonces

$$\begin{aligned} (D_f\Psi)(e) &= \sum_{y \in G} \Psi(y)f(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \Phi(kyk^{-1})f(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \Phi(y)f(y) \\ &= (D_f\Phi)(e), \\ \pi(k)(D_f\Phi)(e)\pi(k^{-1}) &= \pi(k) \sum_{y \in G} \Phi(y)f(y)\pi(k^{-1}) = \sum_{y \in G} \Phi(kyk^{-1})f(y) \\ &= \sum_{y \in G} \Phi(y)f(y) = (D_f\Phi)(e). \end{aligned}$$

También tenemos,

$$\begin{aligned} (D_f\Psi)(x) &= \sum_{y \in G} \Psi(xy)f(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{y \in G} \sum_{k \in K} \pi(k)\Phi(ky)f(y)\pi(k^{-1}) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)(D_f\Phi)(x)\pi(k^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k)\Phi(x)(D_f\Phi)(e)\pi(k^{-1}) \\ &= \Psi(x)(D_f\Phi)(e) = \Psi(x)[D_f\Psi](e). \end{aligned}$$

(iv) implica (i). Observamos que para cualquier  $x \in G$  la función

$$\Psi(x)\Psi(y) - \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Psi(kxk^{-1}y)$$

como función de  $y$  es  $K$ -central. Si aplicamos el operador  $D_f$  a el  $y$  y lo valuamos en la identidad  $e \in G$  obtenemos

$$\begin{aligned} \Psi(x)(D_f\Psi)(e) &= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} [D_f\Psi](kxk^{-1}) \\ &= \Psi(x)[D_f\Psi](e) - \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Psi(kxk^{-1})[D_f\Psi](e) = 0. \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 3.16, concluimos que la condición (i) se cumple. Esto concluye la demostración.  $\square$

Ahora estamos en condiciones de completar la demostración del Teorema 3.11.

**Demostración del Teorema 3.11.** Si  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi \in \hat{K}$  entonces (i) vale por definición, (ii) y (iv) siguen de la Proposición 3.2 y (iii) se sigue de la Proposición 3.13.

Para el recíproco, si una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  satisface las condiciones (i) – (iv) del Teorema 3.11 entonces para que  $\Phi$  sea una función esférica debemos probar que satisface

$$\Phi(x)\Phi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xky),$$

para este fin emplearemos el Teorema 3.17 según el cual esta ecuación es equivalente a

$$(D_f\Phi)(x) = \Phi(x)(D_f\Phi)(e),$$

que  $\Phi$  satisface por hipótesis.

Por hipótesis  $\Phi$  cumple que  $\Phi(k_1gk_2) = \Phi(k_1)\Phi(g)\Phi(k_2)$ , lo que implica que  $\Phi$  pertenece al espacio vectorial  $\mathcal{A}$ , con  $\sigma = \Phi|_K$ , entonces por el Teorema 3.17  $\Phi$  satisface la ecuación funcional y es una función esférica de tipo  $\pi$ .  $\square$ .

Más adelante, en el Teorema 3.40, daremos otra demostración alternativa.

Si  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  y altura  $p$  la función  $\Psi = T(\Phi) : G \rightarrow \text{End}_K(V) \simeq M(p, \mathbb{C})$ , se denomina *contraparte de*  $\Phi$ , será considerada como la otra cara de la misma moneda. Así podemos tomar la siguiente definición equivalente.

**Definición 3.18.** Una función  $\Psi : G \rightarrow \text{End}(W)$  es función esférica de  $G$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$  si

- i)  $\Psi(e) = I$ .
- ii)  $\chi_\pi * \Psi = |K|\Psi$ .
- iii)  $\Psi(g)\Psi(h) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Psi(kgk^{-1}h)$ , para todo  $g, h \in G$ .

La dimensión de  $W$ , llamada la *altura* de  $\Psi$ , es igual a la altura de  $\Phi = S\Psi$ .

**Nota 3.19.** Cuando la altura de  $\Psi$  es uno y  $\pi$  la representación trivial, entonces la definición de arriba coincide con la de función esférica zonal.

### 3.3. Caracterización por representaciones de álgebras

En esta sección establecemos una segunda caracterización de funciones esféricas irreducibles de  $G$  considerando esta vez representaciones irreducibles de ciertas subálgebras de  $A[G]$ , a partir de esta obtenemos propiedades de las funciones esféricas. Comenzamos definiendo los conceptos necesarios para este fin.

**Definición 3.20.** Consideremos una función arbitraria  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$ , podemos extenderla a  $A[G]$  por

$$\Phi : A[G] \rightarrow \text{End}(V), \quad \Phi(f) = \sum_{g \in G} f(g)\Phi(g).$$

Decimos que  $\Phi$  es la *extensión de  $\Phi$* .

Observamos que  $\Phi(f) = (\Phi * \check{f})(e)$  y  $\Phi(\delta_g) = \Phi(g)$ , para todo  $g \in G$ .

**Definición 3.21.** Sean  $\pi \in \hat{K}$ , y  $\chi_\pi = d(\pi)\xi_\pi$  donde  $\xi_\pi$  es el carácter de  $\pi$ . Introducimos la siguiente subálgebra de  $A[G]$

$$A_\pi[G] = \{f \in A[G] : \bar{\chi}_\pi * f = f * \bar{\chi}_\pi = |K|f\}.$$

Observemos que  $\frac{1}{|K|}\bar{\chi}_\pi$  es una identidad de  $A_\pi[G]$ .

**Lema 3.22.** La aplicación  $P : f \mapsto \frac{1}{|K|^2}\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi$  es una proyección lineal de  $A[G]$  sobre  $A_\pi[G]$ .

*Demostración.* Por la Proposición 2.18 obtenemos  $\bar{\chi}_\pi * \bar{\chi}_\pi = |K|\bar{\chi}_\pi$ . Por tanto para toda  $f \in A[G]$  tenemos  $P^2(f) = P(f)$  y  $P(f) \in A_\pi[G]$ . Más aún si  $f \in A_\pi[G]$  entonces  $\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi = |K|^2 f$ . Así obtenemos que  $f = P(f)$ .  $\square$

**Proposición 3.23.** Sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función tal que  $\chi_\pi * \Phi = \Phi * \chi_\pi = |K|\Phi$ . Entonces  $\Phi$  satisface la ecuación funcional

$$\Phi(x)\Phi(y) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xky),$$

si y solo si  $\hat{\Phi}$  es una representación de  $A_\pi[G]$ .

*Demostración.* Sea  $f \in A[G]$ , entonces  $\hat{\Phi}(f) = \sum_{g \in G} f(g)\Phi(g) = (\Phi * \check{f})(e)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \Phi(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) &= (\Phi * (\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi)^\vee)(e) = (\Phi * (\chi_\pi * \check{f} * \chi_\pi))(e) \\ &= |K|(\Phi * \check{f} * \chi_\pi)(e) = |K|(\chi_\pi * \Phi * \check{f})(e) = |K|^2(\Phi * \check{f})(e) \\ &= |K|^2\hat{\Phi}(f), \end{aligned} \quad (3.8)$$

hemos considerado que  $(f * h)^\vee = \check{h} * \check{f}$ ,  $\bar{\chi}_\pi = \check{\chi}_\pi$  y  $(f * h)(e) = (h * f)(e)$ .

Ahora, usando (3.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi((\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) * (\bar{\chi}_\pi * h * \bar{\chi}_\pi)) &= |K|\hat{\Phi}((\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi * h * \bar{\chi}_\pi)) \\ &= |K|^3\hat{\Phi}(f * \bar{\chi}_\pi * h) = |K|^3 \sum_{y \in G} (f * \bar{\chi}_\pi * h)(y)\Phi(y) \\ &= |K|^3 \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} (f * \bar{\chi}_\pi)(x)h(x^{-1}y)\Phi(y) \\ &= |K|^3 \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} \sum_{k \in K} f(xk^{-1})\bar{\chi}_\pi(k)h(y)\Phi(xy) \\ &= |K|^4 \sum_{y \in G} \sum_{x \in G} f(x)h(y) \left( \sum_{k \in K} \frac{1}{|K|} \chi_\pi(k^{-1})\Phi(xky) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Por otra parte, por (3.8) tenemos

$$\hat{\Phi}(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) \Phi(\bar{\chi}_\pi * h * \bar{\chi}_\pi) = |K|^4 \hat{\Phi}(f) \Phi(h) = |K|^4 \sum_{x,y \in G} f(x) h(y) \Phi(x) \Phi(y). \quad (3.10)$$

Desde (3.9) y (3.10) vale para todo  $f, h \in A[G]$ , la proposición se sigue inmediatamente.  $\square$

Estamos en la posición de demostrar un resultado muy importante el cual establece una cercana conexión entre funciones esféricas de tipo  $\pi$  y representaciones del álgebra  $A_\pi[G]$ .

**Teorema 3.24.** *Si  $\Phi$  es una función esférica irreducible de tipo  $\pi \in \hat{K}$ , entonces la aplicación*

$$\Phi : f \mapsto \sum_{g \in G} f(g) \Phi(g)$$

*es una representación irreducible de  $A_\pi[G]$ . Recíprocamente, si  $L$  es una representación irreducible de  $A_\pi[G]$ , entonces  $L = \Phi$  para alguna función esférica irreducible  $\Phi$  de  $G$  de tipo  $\pi$ .*

*Demostración.* Sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función esférica irreducible de tipo  $\pi$ . Entonces

$$(\Phi * \chi_\pi)(g) = \sum_{k \in K} \Phi(gk) \chi_\pi(k^{-1}) = \Phi(g) \sum_{k \in K} \Phi(k) \chi_\pi(k^{-1}) = |K| \Phi(g), \quad (3.11)$$

porque  $\Phi|_K$  es una suma directa de representaciones de  $K$  todas en la clase  $\pi$  y por lo tanto tenemos que  $\frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(k) = I$  por la Proposición 2.25. Similarmente obtenemos que  $\chi_\pi * \Phi = |K| \Phi$ .

Ahora, por la Proposición 3.23, tenemos que  $\Phi : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(V)$  es una representación de  $A_\pi[G]$ . Desde  $\hat{\Phi}(\delta_g) = \Phi(g)$  es claro que la irreducibilidad de una función esférica  $\Phi$  es equivalente a la irreducibilidad de  $\hat{\Phi}$ .

Recíprocamente, sean  $L : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(V)$  una representación irreducible de  $A_\pi[G]$ . Sea  $\Theta$  la función sobre  $G$  a valores en  $\text{End}(V)$  definida por

$$\Theta(g) = \frac{1}{|K|^2} L(\bar{\chi}_\pi * \delta_g * \bar{\chi}_\pi).$$

Si  $f \in A[G]$ , entonces  $f = \sum_g f(g) \delta_g$ . Así por linealidad tenemos

$$L(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) = \sum_{g \in G} f(g) L(\bar{\chi}_\pi * \delta_g * \bar{\chi}_\pi) = |K|^2 \sum_{g \in G} f(g) \Theta(g) = |K|^2 \hat{\Theta}(f).$$

Por tanto si  $f \in A_\pi[G]$ , entonces  $\hat{\Theta}(f) = \frac{1}{|K|^2} L(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) = L(f)$  es una representación de  $A_\pi[G]$ .

Sea  $\Phi = \frac{1}{|K|^2} \chi_\pi * \Theta * \chi_\pi$ . Así  $\chi_\pi * \Phi = \Phi * \chi_\pi = |K| \Phi$ , para todo  $f \in A_\pi[G]$

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(f) &= \frac{1}{|K|^2} (\chi_\pi * \Theta * \chi_\pi * \check{f})(e) = \frac{1}{|K|^2} (\Theta * \chi_\pi * \check{f} * \chi_\pi)(e) \\ &= \frac{1}{|K|^2} (\Theta * (\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi)^\vee)(e) \\ &= (\Theta * \check{f})(e) = \hat{\Theta}(f) = L(f). \end{aligned}$$

Por tanto,  $\hat{\Phi}$  es una representación irreducible del álgebra  $A_\pi[G]$ .

De las Proposiciones 3.23 y 3.7, tenemos que  $\Phi$  es una función esférica irreducible de tipo  $\pi$  tal que  $\Phi(f) = L(f)$  para todo  $f \in A_\pi[G]$ .  $\square$

**Corolario 3.25.** *Las representaciones irreducibles de  $A_\pi[G]$  separan sus puntos.*

*Demostración.* Sea  $0 \neq f \in A_\pi[G]$ . De la Proposición 2.31 existe  $\rho \in \hat{G}$  tal que  $\hat{f}(\rho) \neq 0$ . Por hipótesis  $f = \frac{1}{|K|^2} \bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi$ . Por tanto

$$\hat{f}(\rho) = \frac{1}{|K|^2} \hat{\rho}(\bar{\chi}_\pi) \hat{f}(\rho) \hat{\rho}(\bar{\chi}_\pi) = \hat{\Phi}(f) \neq 0,$$

donde  $\Phi$  es la función esférica de tipo  $\pi$  asociado a  $\rho$ . □

Recordemos que si  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  y  $\Phi_1 : G \rightarrow \text{End}(V_1)$  son funciones esféricas de  $G$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$ , son equivalentes si existe un isomorfismo lineal  $T$  de  $V$  sobre  $V_1$  tal que  $\Phi_1(g) = T\Phi(g)T^{-1}$  para todo  $g \in G$ .

**Proposición 3.26.** *Las funciones esféricas irreducibles  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  y  $\Phi_1 : G \rightarrow \text{End}(V_1)$  de tipo  $\pi$  son equivalentes, si y solo si las correspondientes representaciones  $\hat{\Phi} : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(V)$  y  $\hat{\Phi}_1 : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(V_1)$  son equivalentes.*

*Demostración.* Sea  $T$  un isomorfismo de  $V$  sobre  $V_1$  tal que  $\hat{\Phi}_1(f) = T\hat{\Phi}(f)T^{-1}$  para todo  $f \in A_\pi[G]$ . Entonces, usando (3.8), tenemos

$$\hat{\Phi}_1(f) = \frac{1}{|K|^2} \hat{\Phi}_1(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) = \frac{1}{|K|^2} T \hat{\Phi}(\bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi) T^{-1} = T \hat{\Phi}(f) T^{-1}$$

para cualquier  $f \in A[G]$ . Por tanto  $\Phi_1(g) = T\Phi(g)T^{-1}$  para todo  $g \in G$ . La afirmación recíproca es obvia. □

**Proposición 3.27.** *Las funciones esféricas irreducibles  $\Phi$  y  $\Phi_1$  de tipo  $\pi \in K$  son equivalentes si y solo si  $\text{tr}\Phi(g) = \text{tr}\Phi_1(g)$  para todo  $g \in G$ .*

*Demostración.* Es obvio que si  $\Phi$  y  $\Phi_1$  son equivalentes ellas tienen la misma traza. Recíprocamente, ya que en particular  $\text{tr}\Phi(k) = \text{tr}\Phi_1(k)$  para todo  $k \in K$ ,  $\Phi$  y  $\Phi_1$  son del mismo  $K$ -tipo  $\pi$ . Mas aún,  $\text{tr}\Phi(g) = \text{tr}\Phi_1(g)$  para todo  $g \in G$ , implica que  $\text{tr}\hat{\Phi}(f) = \text{tr}\hat{\Phi}_1(f)$  para todo  $f \in A_\pi[G]$ . Debido a que las funciones  $\hat{\Phi}$  y  $\hat{\Phi}_1$  son dos representaciones irreducibles de dimensión finita de un álgebra asociativa semisimple sobre  $\mathbb{C}$  con la misma traza, ellas son equivalentes (este resultado se encuentra en el Corolario 30.14 página 214 del libro [5]). De ahí, por la Proposición 3.26 las funciones esféricas  $\Phi$  y  $\Phi_1$  son equivalentes. □

### 3.4. Relaciones entre subálgebras de $A[G]$ .

Definiremos las subálgebras  $A_\pi^K[G]$  y  $A_\pi[K]$ , veremos la relación que hay con las subálgebras que hemos introducido antes. Se establecen descomposiciones interesantes de las subálgebras  $A_\pi^K[G]$  y de  $A[G]^K$ , si bien en esta sección no intervienen funciones esféricas los resultados obtenidos son importantes en sí mismos y serán de utilidad en la siguiente sección.

**Definición 3.28.** En  $A[G]$  definimos las subálgebras

$$A_\pi^K[G] = A[G]^K \cap A_\pi[G] \quad \text{y} \quad A_\pi[K] = A[K] * \bar{\chi}_\pi.$$

Recordemos que  $A[G]^K = \{f \in A[G] : \delta_k * f = f * \delta_k, \text{ para todo } k \in K\}$

**Lema 3.29.** *La subálgebra  $A_\pi[K]$  satisface que es un ideal bilátero de  $A[K]$ , es un álgebra con identidad  $\frac{1}{|K|} \bar{\chi}_\pi$ , también se cumple que  $A_\pi[K] = A[K] \cap A_\pi[G]$  y los elementos de  $A_\pi^K[G]$  conmutan con aquellos de  $A_\pi[K]$ .*



*Demostración.* Es obvio que  $A_\pi[K]$  es un ideal izquierdo de  $A[K]$ . Como  $\bar{\chi}_\pi$  es  $K$ -central, dada  $f \in A[K]$  tenemos:  $(f * \bar{\chi}_\pi) * \delta_k = (f * \delta_k) * \bar{\chi}_\pi \in A[K]$ . Entonces la primera afirmación se sigue porque  $\{\delta_k : k \in K\}$  es una base de  $A[K]$ .

Para probar que  $A_\pi[K] \subseteq A[K] \cap A_\pi[G]$  tomando  $f \in A[K]$ . Entonces el Corolario 2.18 implica  $(f * \bar{\chi}_\pi) * \bar{\chi}_\pi = |K|f * \bar{\chi}_\pi$ . Similarmente obtenemos  $\bar{\chi}_\pi * (f * \bar{\chi}_\pi) = f * \bar{\chi}_\pi * \bar{\chi}_\pi = |K|f * \bar{\chi}_\pi$ . Por tanto, por definición, obtenemos  $A_\pi[K] \subseteq A_\pi[G]$ . Debido a que  $A_\pi[K] \subseteq A[K]$  tenemos  $A_\pi[K] \subseteq A[K] \cap A_\pi[G]$ . Recíprocamente, si  $f \in A[K] \cap A_\pi[G]$ , entonces  $f = \frac{1}{|K|}f * \bar{\chi}_\pi \in A[K] * \bar{\chi}_\pi = A_\pi[K]$ .

Finalmente si  $f \in A_\pi^K[G] = A[G]^K \cap A_\pi[G]$  y  $h \in A_\pi[K]$  entonces es claro que  $f * h = h * f$  porque  $f$  es  $K$ -central. Esto completa la demostración.  $\square$

**Lema 3.30.** Sea  $\pi \in \hat{K}$ , si  $V = V_\pi \oplus \dots \oplus V_\pi$  como  $K$ -módulos y definimos  $\Delta(T) = T \oplus \dots \oplus T$  para  $T \in \text{End}(V_\pi)$ , entonces la aplicación lineal

$$p : \text{End}_K(V) \otimes \text{End}(V_\pi) \rightarrow \text{End}(V) \quad \text{definida por} \quad p(S \otimes T) = S\Delta(T) = \Delta(T)S,$$

es un isomorfismo suryectivo de álgebras.

*Demostración.* Sea  $\{v_i\}$  una base de  $V_\pi$  y  $w_i^j = (0, \dots, 0, v_i, 0, \dots, 0)$  los vectores que tienen al vector  $v_i$  en la  $j$ -ésima posición. Entonces  $\{w_i^j\}$  es una base de  $V$ . Dado un par ordenado  $(j, k)$  sea  $S_{j,k} \in \text{End}(V)$  definido por  $S_{j,k}(w_i^j) = w_i^k$  y  $S_{j,k}(w_i^r) = 0$  para todo  $i$ , si  $r \neq j$ . Entonces  $S_{j,k} \in \text{End}_K(V)$  aplica el sumando  $j$ -ésimo sobre los  $k$ -sumandos y todos los otros sumandos a cero. Además sea  $T_{i,r} \in \text{End}(V_\pi)$  definido por  $T_{i,r}(v_s) = \pi_{is}v_r$ . Entonces

$$(T_{i,r} \oplus \dots \oplus T_{i,r})S_{j,k}(w_i^j) = w_r^k, \quad (T_{i,r} \oplus \dots \oplus T_{i,r})S_{j,k}(w_{i'}^{j'}) = 0 \text{ si } (i', j') \neq (i, j),$$

$$S_{j,k}(T_{i,r} \oplus \dots \oplus T_{i,r})(w_i^j) = w_r^k, \quad S_{j,k}(T_{i,r} \oplus \dots \oplus T_{i,r})(w_{i'}^{j'}) = 0 \text{ si } (i', j') \neq (i, j).$$

Esto demuestra que  $p : \text{End}_K(V) \otimes \text{End}(V_\pi) \rightarrow \text{End}(V)$  es sobreyectiva, y que  $(T \oplus \dots \oplus T)S = S(T \oplus \dots \oplus T)$ .

Por otro lado, si  $h$  es la multiplicidad de  $V_\pi$  en  $V$ , entonces

$$\dim(\text{End}_K(V) \otimes \text{End}(V_\pi)) = h^2 d(\pi)^2 = (hd(\pi))^2 = \dim(\text{End}(V)).$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 3.31.** La aplicación bilineal  $(f, h) \mapsto f * h$  induce un isomorfismo de álgebras del producto tensorial  $A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K]$  sobre  $A_\pi[G]$ .

$$A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K] \simeq A_\pi[G].$$

*Demostración.* La aplicación lineal  $m$  definida por  $m : f \otimes h \mapsto f * h$  es un homomorfismo de  $A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K]$  en  $A_\pi[G]$ , pues por el Lema 3.29  $f * h = h * f$  para todo  $f \in A_\pi^K[G], h \in A_\pi[K]$ .

Por el Teorema de Peter-Weyl 2.27

$$A[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} V'_\rho \otimes V_\rho.$$

Por Lema 3.22 sabemos que  $Pf = \frac{1}{|K|} \bar{\chi}_\pi * f * \bar{\chi}_\pi$  es una proyección de  $A[G]$  sobre  $A_\pi[G]$ . Sea  $w \in V_\rho$  y  $\rho \in V'_\rho$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{|K|} (\bar{\chi}_\pi * (\rho \otimes w))(g) &= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) (\rho'(k) \rho)(\rho(g)w) \\ &= (P_{\rho', \pi} \rho \otimes w)(g), \end{aligned}$$

donde  $P_{\rho',\pi}$  denota la  $K$ -proyección de  $V_{\rho}'$  sobre la  $K$ -componente isotópica  $(V_{\rho}')_{(\pi)}$ . Por tanto

$$\frac{1}{|K|} \bar{\chi}_{\pi} * (\rho \otimes w) = P_{\rho',\pi} \rho \otimes w.$$

Similarmente tenemos

$$\frac{1}{|K|} ((\rho \otimes w) * \bar{\chi}_{\pi})(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} (\rho(\rho(k)w)(g) \chi_{\pi'}(k^{-1})) = (\rho \otimes P_{\rho,\pi'} w)(g).$$

Por tanto  $\frac{1}{|K|} (\rho \otimes w) * \bar{\chi}_{\pi} = \rho \otimes P_{\rho,\pi'} w$ . De esto se sigue que  $P(\rho \otimes w) = P_{\rho',\pi} \rho \otimes P_{\rho,\pi'} w$ . De ahí  $P(V_{\rho}' \otimes V_{\rho}) = (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')}$  y

$$A_{\pi}[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')}. \quad (3.12)$$

También

$$A_{\pi}^K[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \left( (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')} \right)^K, \quad (3.13)$$

por otra parte, del Lema 3.29 tenemos

$$A_{\pi}[K] = A[K] * \bar{\chi}_{\pi} = \bar{\chi}_{\pi} * A[K]. \quad (3.14)$$

Entonces el homomorfismo

$$m : A_{\pi}^K[G] \otimes A_{\pi}[K] \rightarrow A_{\pi}[G]$$

es la suma directa de homomorfismos

$$m_{\rho} : \left( (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')} \right)^K \otimes A_{\pi}[K] \rightarrow (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')},$$

$\rho \in \hat{G}$ , definida por  $m_{\rho}(f \otimes a) = f * a$ . Sea  $p_{\rho} : \text{End}_K((V_{\rho})_{(\pi)}) \otimes \text{End}(V_{\pi}) \rightarrow \text{End}((V_{\rho})_{(\pi)})$  definida por  $p_{\rho}(S \otimes T) = S \Delta(T)$ , ver el Lema 3.30.

Si usamos la Proposición 2.28, cambiando  $\rho$  por  $\rho'$  y tomando en cuenta que  $\chi_{\rho'} = \bar{\chi}_{\rho}$ , obtenemos que  $\hat{\rho} : V_{\rho} \otimes V_{\rho}' \rightarrow \text{End}(V_{\rho})$  es un isomorfismo de álgebras, y que  $\hat{\rho}((V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')}) \leq \text{End}((V_{\rho})_{(\pi)})$ , porque

$$\hat{\rho} \left( \frac{1}{|K|^2} \bar{\chi}_{\pi} * f * \bar{\chi}_{\pi} \right) = \frac{1}{|K|^2} \hat{\rho}(\bar{\chi}_{\pi}) \hat{f}(\rho) \hat{\rho}(\bar{\chi}_{\pi}) = P_{\rho,\pi} \hat{f}(\rho) P_{\rho,\pi},$$

como  $\frac{1}{|K|} \hat{\rho}(\bar{\chi}_{\pi}) = P_{\rho,\pi}$ . Mas aún  $\dim((V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')}) = \dim(\text{End}((V_{\rho})_{(\pi)}))$ , por tanto

$$\hat{\rho} : (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')} \rightarrow \text{End}((V_{\rho})_{(\pi)}) \quad (3.15)$$

es un isomorfismo de álgebras. Por las mismas razones  $\hat{\pi} : A_{\pi}[K] \rightarrow \text{End}(V_{\pi})$  es un isomorfismo de álgebras.

Probaremos que el siguiente diagrama de álgebras es conmutativo,

$$\begin{array}{ccc} ((V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')})^K \otimes A_{\pi}[K] & \xrightarrow{m_{\rho}} & (V_{\rho}')_{(\pi)} \otimes (V_{\rho})_{(\pi')} \\ \hat{\rho} \otimes \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \hat{\rho} \\ \text{End}_K((V_{\rho})_{(\pi)}) \otimes \text{End}(V_{\pi}) & \xrightarrow{p_{\rho}} & \text{End}((V_{\rho})_{(\pi)}), \end{array}$$

donde las flechas verticales son isomorfismos de álgebras.

También

$$\hat{\rho}(a) = \sum_{k \in K} a(k)\rho(k) = \sum_{k \in K} a(k)\Delta(\pi(k)) = \Delta(\hat{\pi}(a)). \quad (3.16)$$

De ahí, por otro lado tenemos

$$\hat{\rho}(m_\rho(f \otimes a)) = \hat{\rho}(f * a) = \hat{f}(\rho)\hat{\rho}(a) = \hat{f}(\rho)\Delta(\hat{\pi}(a)),$$

por otro lado tenemos

$$p_\rho((\hat{\rho} \otimes \hat{\pi})(f \otimes a)) = p_\rho(\hat{f}(\rho) \otimes \hat{\pi}(a)) = \hat{f}(\rho)\Delta(\hat{\pi}(a)).$$

Esto prueba que el diagrama es conmutativo.

Por el Lema 3.30  $p_\rho : \text{End}_K((V_\rho)_{(\pi)}) \otimes \text{End}(V_\pi) \rightarrow \text{End}((V_\rho)_{(\pi)})$  es un isomorfismo, de ahí

$$m_\rho : ((V'_\rho)_{(\pi)} \otimes (V_\rho)_{(\pi')})^K \otimes A_\pi[K] \rightarrow (V'_\rho)_{(\pi)} \otimes (V_\rho)_{(\pi')}$$

es un isomorfismo suryectivo para todo  $\rho \in \hat{G}$ . Por tanto  $m : A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K] \rightarrow A_\pi[G]$  es un isomorfismo suryectivo de álgebras, completando la demostración de la proposición.  $\square$

Recordemos que la subálgebra de funciones  $K$ -bi-invariantes de  $A[G]$  viene dada por,

$$A[G]^{K \times K} = \{f \in A[G] : f(k_1 g k_2) = f(g), \text{ para todo } k_1, k_2 \in K, g \in G\}.$$

**Nota 3.32.** Para  $\pi = 1$ , como  $A[K]$  puede ser pensada como subálgebra de  $A[G]$ , se sigue que  $A_1[K] \leq A_1[G] = A[G]^{K \times K}$ , por tanto  $A_1[K] \leq A[K]^{K \times K} = \mathbb{C}$  (las funciones constantes). Por eso, la demostración de  $A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K] \simeq A_\pi[G]$  es inmediata cuando  $\pi$  es la representación trivial, de hecho, se reduce a  $A_1^K[G] \otimes A_1[K] \simeq A_1^K[G] \otimes \mathbb{C} \simeq A_1[G]$ .

**Nota 3.33.** La Proposición 3.31 es un caso particular de un hecho estructural más general debido a J. Dieudonné. Sea  $G$  un grupo localmente compacto y  $K$  un subgrupo compacto. Sea  $C_{c,\pi}^K(G)$  el conjunto de todas las funciones  $K$ -centrales continuas  $f$  sobre  $G$  de soporte compacto tal que  $f = f * \bar{\chi}_\pi$  y sea  $C_\pi(K)$  el conjunto de todas las funciones continuas en  $K$  tal que  $a = a * \bar{\chi}_\pi$ , entonces la aplicación lineal  $m : C_{c,\pi}^K(G) \otimes C_\pi(K) \rightarrow C_{c,\pi}(G)$  definida por  $m(f \otimes a) = f * a$  es un isomorfismo suryectivo de álgebras.

**Corolario 3.34.** Para cualquier  $\pi \in \hat{K}$  el álgebra  $A_\pi^K[G]$  es semisimple, de hecho

$$A_\pi^K[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \text{End}_K((V_\rho)_{(\pi)})$$

es una suma de álgebras matriciales, las cuales son simples.

*Demostración.* De las ecuaciones (3.13) y (3.15) tenemos que

$$A_\pi^K[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \left( (V'_\rho)_{(\pi)} \otimes (V_\rho)_{(\pi')} \right)^K \simeq \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \left( \text{End}_K((V_\rho)_{(\pi)}) \right)^K \simeq \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \text{End}_K((V_\rho)_{(\pi)}).$$

$\square$

Recordemos que si  $(\rho, V)$  es una representación de  $G$ , el conjunto

$$V^G = \{u \in V : \rho(g)u = u, \text{ para todo } g \in G\}.$$

es el subespacio de todos los vectores  $\rho$ -invariantes.

**Proposición 3.35.** Dado  $G$  un grupo finito y  $K$  un subgrupo arbitrario, se cumple que

$$A[G]^K = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}, \pi \in \hat{K}} ((V'_\sigma)_{(\pi')} \otimes (V_\sigma)_{(\pi)})^K,$$

donde los sumandos de la derecha son ideales biláteros. En particular el álgebra  $A[G]^K$  es semisimple.

*Demostración.* Por el Teorema 2.27 y por (2.2) sabemos que

$$A[G] = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} V'_\sigma \otimes V_\sigma \simeq \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} \text{End}(V_\sigma),$$

entonces

$$A[G]^K = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}} \text{End}_K(V_\sigma) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}, \pi \in \hat{K}} \text{End}_K((V_\sigma)_{(\pi)}) = \bigoplus_{\sigma \in \hat{G}, \pi \in \hat{K}} ((V'_\sigma)_{(\pi')} \otimes (V_\sigma)_{(\pi)})^K.$$

Sean  $f \in (V'_\sigma)_{(\pi')} \otimes (V_\sigma)_{(\pi)}$  y  $h \in (V'_\rho)_{(\delta')} \otimes (V_\rho)_{(\delta)}$  con  $\sigma, \rho \in \hat{G}$ . Para  $\sigma \neq \rho$  tenemos  $f * h = 0$ . Cuando  $\sigma = \rho$  y  $\pi \neq \delta$  podemos tomar  $\{v_r\}$  y  $\{w_i\}$  bases ortonormales de  $(V_\sigma)_{(\pi)}$  y  $(V_\rho)_{(\delta)}$  respectivamente. Sea  $\{\rho_r\}$  y  $\{\mu_i\}$  bases duales  $(V'_\sigma)_{(\pi')}$  y  $(V'_\rho)_{(\delta')}$  respectivamente. Recordemos que la aplicación  $\lambda \otimes w \rightarrow \lambda_{\rho, w}$  es un isomorfismo y  $\lambda_{\rho, w}(g) = \lambda(\rho(g)w)$ . Calculamos

$$\begin{aligned} ((\rho_r \otimes v_s) * (\mu_i \otimes w_j))(g) &= \sum_{x \in G} \rho_r(\sigma(gx)v_s) \mu_i(\sigma(x^{-1})w_j) = \\ &= \sum_{x \in G} \langle \rho((gx)v_s, v_r) \langle \rho(x^{-1})w_j, w_i \rangle = \sum_{x \in G} \langle \sigma(x)v_s, \sigma(g^{-1})v_r \rangle \overline{\langle \rho(x)w_i, w_j \rangle} = 0, \end{aligned}$$

en la última igualdad usamos las relaciones de ortogonalidad de Schur 2.12.

Por eso  $(V'_\sigma)_{(\pi')} \otimes (V_\sigma)_{(\pi)}$  es un ideal en  $A[G]$ . Por lo tanto  $((V'_\sigma)_{(\pi')} \otimes (V_\sigma)_{(\pi)})^K$  es un ideal en  $A[G]^K$ , el cual es isomorfo al álgebra matricial  $\text{End}_K(V_\sigma)_{(\pi)}$ . Esto completa la demostración.  $\square$

**Corolario 3.36.** Para cualquier grupo finito  $G$  y subgrupo  $K$  vale

$$A[G]^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} A_\pi^K[G],$$

el producto de dos elementos en diferentes sumandos del lado derecho es cero.

*Demostración.* Se sigue directamente de la Proposición 3.35 y de la ecuación (3.13).  $\square$

**Proposición 3.37.** La proyección  $Q_\pi$  de  $A[G]^K$  en  $A_\pi^K[G]$  está definida por  $Q_\pi(f) = \frac{1}{|K|} f * \bar{\chi}_\pi$ , es un homomorfismo de álgebras y  $\ker Q_\pi = \{|K|f - f * \bar{\chi}_\pi : f \in A[G]^K\}$ . Por tanto

$$A_\pi^K[G] = A[G]^K / \{|K|f - f * \bar{\chi}_\pi : f \in A[G]^K\}.$$

*Demostración.* Se cumple que  $f * \bar{\chi}_\pi = \bar{\chi}_\pi * f$ , para todo  $f \in A[G]^K$ , pues

$$(f * \bar{\chi}_\pi)(g) = \sum_{k \in K} f(gk) \bar{\chi}_\pi(k^{-1}) = \sum_{k \in K} f(kg) \bar{\chi}_\pi(k^{-1}) = \sum_{k \in K} \bar{\chi}_\pi(k) f(k^{-1}g) = (\bar{\chi}_\pi * f)(g).$$

De  $\bar{\chi}_\pi * \bar{\chi}_\pi = |K| \bar{\chi}_\pi$  y  $\bar{\chi}_\pi * \bar{\chi}_\sigma = 0$  si  $\pi \neq \sigma$ , se sigue que  $Q_\pi(f) = \frac{1}{|K|} f * \bar{\chi}_\pi$  para todo  $f \in A[G]^K$ . Si  $f, h \in A[G]^K$  tenemos

$$Q_\pi(f * h) = \frac{1}{|K|} (f * h) * \bar{\chi}_\pi = \frac{1}{|K|^2} f * \bar{\chi}_\pi * h * \bar{\chi}_\pi = Q_\pi(f) * Q_\pi(h).$$

$\square$

### 3.5. Funciones esféricas y representaciones irreducibles de $A_\pi^K[G]$ .

Veremos que la extensión de la contraparte de toda función esférica de  $G$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$  es representación de  $A_\pi^K[G]$  y toda representación de esta subálgebra es de esta forma. Finalmente estableceremos otra demostración del primer teorema de caracterización de funciones esféricas.

Recordemos que para  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$ , a la función  $\Psi(g) = T(\Phi)(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Phi(kgk^{-1})$ , se denomina la contraparte de  $\Phi$ .

**Lema 3.38.** *Sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función esférica de tipo  $\pi$  y sea  $\Psi$  su contraparte. Entonces su extensión  $\hat{\Psi} : A_\pi^K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$  es una representación de  $A_\pi^K[G]$ . Además si  $\Phi$  es irreducible, entonces  $\hat{\Psi}$  es irreducible.*

*Demostración.* Si  $f \in A_\pi^K[G]$  y  $\pi(k) = \Phi(k)$  para  $k \in K$ , entonces

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}(f) &= \sum_{g \in G} f(g) \Psi(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} f(g) \pi(k) \Phi(g) \pi(k^{-1}) \\ &= \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} f(g) \Phi(kgk^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} f(k^{-1}gk) \Phi(g) \\ &= \sum_{g \in G} f(g) \Phi(g) = \hat{\Phi}(f) \end{aligned}$$

y

$$\hat{\Phi}(f) = \sum_{g \in G} f(kgk^{-1}) \Phi(g) = \sum_{g \in G} f(g) \Phi(k^{-1}gk) = \pi(k^{-1}) \hat{\Phi}(f) \pi(k) \in \text{End}_K(V).$$

Como  $\hat{\Phi}$  es una representación de  $A_\pi[G]$  y  $\text{End}_K(V)$  es un álgebra matricial pues  $V = V_\pi \oplus \dots \oplus V_\pi$ , se sigue la primera afirmación.

Ahora queremos probar que si  $\Phi$  es irreducible, entonces  $\hat{\Psi}$  es una representación irreducible de  $A_\pi^K[G]$ . En general, por el Teorema de Burnside. Sea  $A$  es un álgebra asociativa de dimensión finita sobre  $\mathbb{C}$  y sea  $(L, V)$  una representación de dimensión finita de  $A$ , si  $L$  es sobreyectiva entonces es irreducible ( Esto se cumple pues la acción de  $\text{End}(V)$  en  $V$  es transitiva).

Por tanto, es suficiente demostrarr que  $\hat{\Psi} : A_\pi^K[G] \rightarrow \text{End}_K(V)$  es surjectiva. Dado  $M \in \text{End}_K(V)$  sea  $f \in A_\pi[G]$  tal que  $M = \hat{\Phi}(f)$ , ver la Proposición 3.24.

Recordemos que si  $f \in A_\pi[K]$ , entonces  $f^\circ \in A_\pi^K[G]$  donde  $f^\circ(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(kgk^{-1})$ . Ahora observemos que

$$\hat{\Psi}(f^\circ) = \hat{\Phi}(f^\circ) = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} f(g) \Phi(kgk^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \pi(k) \hat{\Phi}(f) \pi(k^{-1}) = M,$$

desde  $\hat{\Phi}(f^\circ) = M \in \text{End}_K(V)$ . Así  $\hat{\Psi}$  es una representación irreducible de  $A_\pi^K[G]$ . □

En la demostración de la Proposición 3.31 establecimos que  $\hat{\pi} : A_\pi[K] \rightarrow \text{End}(V_\pi)$  es un isomorfismo de álgebras . Además si  $V = V_\pi \oplus \dots \oplus V_\pi$  como  $K$ -módulos, entonces la aplicación lineal  $p : \text{End}_K(V) \otimes \text{End}(V_\pi) \rightarrow \text{End}(V)$  definida por  $p(S \otimes T) = S\Delta(T)$  es un isomorfismo de álgebras , ver Lema 3.30. Recordemos que  $m : A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K] \rightarrow A_\pi[G]$  esta dada por  $m(f \otimes h) = f * h$ .

**Teorema 3.39.** *Sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función esférica irreducible de tipo  $\pi \in \hat{K}$  y  $\Psi$  su contraparte, entonces  $\hat{\Psi}$ ,  $\hat{\pi}$  y  $\hat{\Phi}$  son representaciones irreducibles, y el siguiente diagrama es conmutativo.*

$$\begin{array}{ccc}
A_\pi^K[G] \otimes A_\pi[K] & \xrightarrow{m} & A_\pi[G] \\
\hat{\Psi} \otimes \hat{\pi} \downarrow & & \downarrow \hat{\Phi} \\
\text{End}_K(V) \otimes \text{End}(V_\pi) & \xrightarrow{p} & \text{End}(V)
\end{array} \tag{3.17}$$

Si  $M$  es una representación irreducible de dimensión finita de  $A_\pi^K[G]$ , entonces  $L = p(M \otimes \hat{\pi})m^{-1}$  es una representación irreducible de  $A_\pi[G]$  y  $M$  es equivalente a  $\hat{\Psi} = T(\Phi)$  para alguna función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$ .

*Demostración.* Sean  $f \in A_\pi^K[G]$  y  $a \in A_\pi[K]$ . Entonces

$$\begin{aligned}
\Phi(f * a) &= \sum_{g \in G} \Phi(g)(f * a)(g) = \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} \Phi(gk^{-1})f(g)a(k^{-1}) \\
&= \sum_{g \in G} \Phi(g)f(g) \sum_{k \in K} a(k)\pi(k) = \hat{\Phi}(f)\hat{\pi}(a).
\end{aligned}$$

De (3.16) obtenemos  $\hat{\pi}(a) = \sum_{k \in K} a(k)\pi(k) = \sum_{k \in K} a(k)\Delta(\pi(k)) = \Delta(\hat{\pi}(a))$ . Por tanto,

$$\Phi(f * a) = \hat{\Phi}(f)\Delta(\hat{\pi}(a)) = \hat{\Psi}(f)\Delta(\hat{\pi}(a)) = p(\hat{\Psi}(f) \otimes \hat{\pi}(a)).$$

Esto completa la demostración de que el diagrama (3.17) es conmutativo. Que  $\hat{\Psi}$  es irreducible fue establecido en el Lema 3.38. Esto completa la primera parte de la Proposición.

Si  $M$  es una representación irreducible de dimensión finita de  $A_\pi^K[G]$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $M$  es una representación matricial  $M : A_\pi^K[G] \rightarrow M(l, \mathbb{C})$ . Vamos a considerar el  $K$ -modulo  $V = V_\pi \oplus \cdots \oplus V_\pi$ , suma de  $l$ -copias de  $V_\pi$ . Entonces por el Lema de Schur  $M(l, \mathbb{C})$  puede ser identificado con  $\text{End}_K(V)$ .

Ahora la segunda parte es un caso particular del siguiente resultado: Sean  $A_1, A_2$  álgebras complejas asociativas de dimensión finita con identidad. Las representaciones de dimensión finita de  $A_1 \otimes A_2$  son precisamente los productos tensoriales  $L_1 \otimes L_2$  de representaciones de dimensión finita de  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente. Mas aún,  $L_1 \otimes L_2$  es irreducible si y solo si  $L_1$  y  $L_2$  son irreducibles (ver [16] sección 9.3).

De ahí  $L = p(M \otimes \hat{\pi})m^{-1}$  es una representación irreducible de  $A_\pi[G]$ . Por el Teorema 3.24  $L = \hat{\Phi}$  para una función esférica irreducible de tipo  $\pi$ , y es fácil ver que  $\hat{\Psi} = M$ .  $\square$

Ahora podemos dar otra prueba del recíproco del primer teorema de caracterización que vimos, a saber

**Teorema 3.40.** *Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  si y solo si*

- (i)  $\Phi(e) = I$ ,
- (ii)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1)\Phi(g)\Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in G$ ,
- (iii)  $(D_f \Phi)(g) = \Phi(g)(D_f \Phi)(e)$  para todo  $f \in A[G]^K, g \in G$ ,
- (iv) La restricción  $\Phi|_K$  como una representación de  $K$  es equivalente a una suma directa de copias de  $\pi$ .

*Demostración.* Para probar la afirmación recíproca comenzamos con una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  satisfaciendo (i), (ii), (iii) y (iv). De (ii) y (iv), como vimos en la ecuación (3.11), obtenemos que  $\chi_\pi * \Phi = \Phi * \chi_\pi = |K|\Phi$ .

### 3.6. CARACTERIZACIÓN POR MEDIO DE REPRESENTACIONES IRREDUCIBLES DE $G$ .47

Ahora observamos que (iii) es equivalente a  $(\Phi * \check{f})(g) = \Phi(g)\Phi(f)$  para todo  $f \in A[G]^K$ , es decir  $\Phi * \check{f} = \Phi \hat{\Phi}(f)$ . Por tanto si  $f, h \in A[G]^K$  entonces

$$\Phi \hat{\Phi}(f * h) = \Phi * (f * h)^\vee = (\Phi * \check{h}) * \check{f} = \Phi \hat{\Phi}(h) * \check{f} = (\Phi * \check{f}) \hat{\Phi}(h) = \Phi \Phi(f) \Phi(h).$$

De ahí, usando que  $\Phi(e) = I$ , observamos que  $\hat{\Phi}(f * h) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(h)$ , para todo  $f, h \in A[G]^K$ . En particular la extensión de  $\Phi$  da una representación  $M$  del álgebra  $A_\pi^K[G]$ .

Del diagrama (3.17)  $L = p(M \otimes \hat{\pi})m^{-1}$  es una representación de  $A_\pi[G]$  en  $V$ . Pero es fácil ver que  $L = \hat{\Phi}$ . Por tanto la extensión de  $\Phi$  es una representación del álgebra  $A_\pi[G]$  y concluimos, de la Proposición 3.23, que  $\Phi$  satisface la ecuación funcional definiendo una función esférica.  $\square$

### 3.6. Caracterización por medio de representaciones irreducibles de $G$ .

Daremos una tercera caracterización de funciones esféricas irreducibles de  $G$  considerando esta vez representaciones de  $G$ . Notamos que pudimos haberla enunciado antes pero serán necesarios los resultados que hemos obtenido hasta ahora para la demostración.

Si  $(\rho, V)$  es una representación de  $G$  en un espacio vectorial  $V$  que contiene el  $K$ -tipo  $\pi$ , entonces recordemos que

$$P_\pi = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \rho(k)$$

es la  $K$ -proyección de  $V$  sobre  $V_{(\pi)}$ , la componente isotípica de tipo  $\pi$ . (Ver la Proposición 2.25).

**Teorema 3.41.** *Sea  $(\rho, V)$  una representación de  $G$  y  $\pi$  una representación irreducible de  $K$  que aparece en  $\rho$ . La función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V_{(\pi)})$  definida por*

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v \quad g \in G, v \in V_{(\pi)}, \quad (3.18)$$

*es una función esférica de tipo  $\pi$ . Si la representación  $\rho$  es irreducible  $\Phi$  también lo es. Recíprocamente, cualquier función esférica irreducible del par  $(G, K)$  es de esta forma.*

*Demostración.* Si  $v \in V_{(\pi)}$  tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x)\Phi(y)v &= P_\pi \rho(x)P_\pi \rho(y)v = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) P_\pi \rho(x) \rho(k) \rho(y)v \\ &= \left( \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) \Phi(xky) \right) v. \end{aligned}$$

Para probar que  $\Phi$  es irreducible, sea  $W$  un  $\Phi(G)$ -subespacio invariante y no nulo de  $V_{(\pi)}$  y sea  $Q$  la proyección de  $V_{(\pi)}$  sobre  $W$ . Entonces

$$0 = P_\pi \rho(g) Q P_\pi - Q P_\pi \rho(g) Q P_\pi = (I - Q) P_\pi \rho(g) Q P_\pi$$

( $I$ = transformación identidad de  $V_{(\pi)}$ ). Y como  $\rho \in \hat{G}$ , entonces

$$\langle \{\rho(g)a : a \in W, g \in G\} \rangle = V,$$

se sigue que  $I = Q$  lo cual completa la demostración de esta implicación.

Recíprocamente, sea  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  una función esférica irreducible de tipo  $\pi$  y sea  $L$  un ideal izquierdo maximal en  $\text{End}(V)$ . Si

$$I = \{f \in A_\pi[G] : \text{tal que } \hat{\Phi}(f) \in L\},$$

entonces  $I$  es un ideal izquierdo maximal en  $A_\pi[G]$ . Ahora sea

$$J = \{f \in A[G] : \tilde{\chi}_\pi * h * f * \tilde{\chi}_\pi \in I \text{ para todo } h \in A[G]\},$$

entonces  $J$  es un ideal maximal izquierdo en  $A[G]$ ,  $I = J \cap A_\pi[G]$ , y  $f * \tilde{\chi}_\pi \equiv |K|f \pmod{J}$  para todo  $f \in A[G]$ .

La representación regular izquierda en  $A[G]$  induce una representación natural  $U$  de  $G$  en el espacio  $E = A[G]/J$ , por  $U(g)(f+J) = \pi_g * f + J$ , porque  $J$  es un ideal izquierdo en  $A[G]$ . Es fácil ver que la transformada de Fourier de  $f \in A[G]$  en  $U$  esta dada por  $\hat{f}(U)(h+J) = f * h + J$ . Como  $J$  es maximal,  $\hat{f}$  y  $U$  son irreducibles.

Sea  $E_{(\pi)}$  la componente isotípica de tipo  $\pi$  en  $E$  y sea  $Q_\pi : E \rightarrow E$  la proyección ortogonal sobre  $E_{(\pi)}$ . Así

$$\begin{aligned} Q_\pi(f+J) &= \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) U(k)(f+J) = \frac{1}{|K|} \left( \sum_{k \in K} \chi_\pi(k^{-1}) L(k)f \right) + J \\ &= \frac{1}{|K|} \tilde{\chi}_\pi * f + J. \end{aligned}$$

De esto  $f \mapsto f+J$  es una aplicación de  $A_\pi[G]$  sobre  $E_{(\pi)}$ , porque  $f * \tilde{\chi}_\pi \equiv |K|f \pmod{J}$  para todo  $f \in A[G]$  y así  $Q_\pi(f+J) = Q_\pi(\frac{1}{|K|^2} \tilde{\chi}_\pi * f * \tilde{\chi}_\pi + J)$ . En este caso,  $E_{(\pi)} \simeq A_\pi[G]/I$ , porque  $I = J \cap A_\pi[G]$ .

Por otro lado, desde  $I = \Phi^{-1}(L)$  tenemos  $A_\pi[G]/I \simeq \text{End}(V)/L$ , con  $L$  un ideal maximal izquierdo. Por tanto

$$\dim E_{(\pi)} = \dim A_\pi[G]/I = \dim \text{End}(V)/L = \dim V.$$

La función esférica asociada  $\Phi_1 : G \rightarrow \text{End}(E_{(\pi)})$  esta dada por  $\Phi_1(g) = Q_\pi U(g) Q_\pi$ . para ver que  $\Phi_1$  es equivalente a  $\hat{\Phi}$ , por la Proposición 3.26 es suficiente demostrar que las representaciones  $\hat{\Phi} : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(V)$  y  $\hat{\Phi}_1 : A_\pi[G] \rightarrow \text{End}(E_{(\pi)})$  son equivalentes.

Observamos que si  $\hat{\Phi}(f) = 0$ , para  $f \in A_\pi[G]$ , entonces  $\hat{\Phi}_1(f) = 0$ . de hecho si  $\hat{\Phi}(f) = 0$  entonces  $\hat{\Phi}(f * h) = 0$  para todo  $h \in A_\pi[G]$ , lo cual implica que  $f * h \in I \subset J$ . Así  $\hat{\Phi}_1(f)(h+J) = f * h + J = 0$ .

Por tanto, la aplicación lineal bien definida  $\hat{\Phi}(f) \mapsto \hat{\Phi}_1(f)$  es un isomorfismo de álgebras de  $\text{End}(V)$  sobre  $\text{End}(E_{(\pi)})$ . Existe un isomorfismo  $T : V \rightarrow E_{(\pi)}$  tal que  $\hat{\Phi}_1(f) = T \hat{\Phi}(f) T^{-1}$ , debido a que cualquier automorfismo del álgebra asociativa  $\text{End}(V)$  es interior ( este resultado es consecuencia del Teorema de Skolem- Noether, el cual es el Teorema 3.26 página 69 de [5]). Esto completa la demostración.  $\square$

**Definición 3.42.** Sea  $(\rho, V)$  representación de  $G$  y  $\pi$  una representación irreducible de  $K$  que aparece en  $\rho$ . A la función  $\Phi$  definida en 3.18 la denominamos *función esférica del par  $(G, K)$  asociada al par  $(\rho, \pi)$  de tipo  $\pi$* . o simplemente *función esférica de  $G$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$* .

### 3.7. Propiedades de funciones esféricas cuando $A_\pi^K[G]$ es conmutativa.

En primer lugar establecemos la relación entre las representaciones irreducibles de  $A[G]^K$  con las funciones esféricas irreducibles de  $G$ , después obtenemos propiedades de las funciones esféricas cuando  $A_\pi^K[G]$  es conmutativa.

**Proposición 3.43.** Sean  $\pi \in \hat{K}$  y  $Q_\pi$  la proyección de  $A[G]^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} A_\pi^K[G]$ , sobre el sumando  $A_\pi^K[G]$ . Entonces, las representaciones irreducibles  $L$  de  $A[G]^K$  son precisamente aquellas de la forma  $L = \hat{\Phi} \circ Q_\pi$ , donde  $\hat{\Phi}$  es la extensión de una función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$ .



*Demostración.* Si  $L$  es una representación irreducible de  $A[G]^K$  y  $M$  es su restricción a  $A_\pi^K[G]$  por el Teorema 3.39 sabemos que es equivalente a  $\hat{\Psi} = T(\Phi)$ , para alguna función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$ . Además vimos en la demostración del Lema 3.38 que  $\hat{\Psi}(f) = \hat{\Phi}(f)$  para todo  $f \in A_\pi^K[G]$ , la demostración sigue directamente de estos hechos.  $\square$

**Proposición 3.44.** *Sea  $G$  un grupo finito,  $K$  un subgrupo arbitrario y  $\pi \in \hat{K}$ . Las siguientes propiedades son equivalentes:*

(i)  $A_\pi^K[G]$  es conmutativa.

(ii) Toda función esférica irreducible de tipo  $\pi$  es de altura uno.

(iii)  $A_\pi^K[G]$  es el centro de  $A_\pi[G]$ .

*Demostración.* Si (ii) vale, entonces  $A_\pi^K[G]$  admite las suficientes representaciones unidimensionales, de ahí que (i) vale. Recíprocamente, si  $A_\pi^K[G]$  es conmutativa, entonces toda representación irreducible de dimensión finita de  $A_\pi^K[G]$  es de dimensión uno, así que toda función esférica irreducible de tipo  $\pi$  es de altura uno.

Es claro que (iii) implica (i). Para completar la demostración es suficiente probar que (ii) implica (iii). Sea  $f \in A_\pi^K[G]$ , entonces para cualquier  $h \in A_\pi[G]$  y cualquier función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$  tenemos

$$\hat{\Phi}(f * h) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(h) = \hat{\Phi}(h)\hat{\Phi}(f) = \hat{\Phi}(h * f),$$

debido a que  $\hat{\Phi}(f)$  es un escalar para todo  $f \in A_\pi^K[G]$ . Por tanto  $A_\pi^K[G]$  está contenido en el centro de  $A_\pi[G]$ .

Si  $f \in A[G]$  sea

$$f^\circ(g) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} f(kgk^{-1}).$$

Entonces  $f \mapsto f^\circ$  es una proyección de  $A[G]$  sobre  $A[G]^K$ .

Además, si  $f$  pertenece al centro de  $A_\pi[G]$ , entonces  $\hat{\Phi}(f)$  es un escalar para toda función esférica irreducible  $\Phi$  de tipo  $\pi$ . De ahí

$$\hat{\Phi}(f^\circ) = \frac{1}{|K|} \sum_{g \in G} \sum_{k \in K} \Phi(g) f(kgk^{-1}) = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \Phi(k^{-1}) \hat{\Phi}(f) \Phi(k) = \hat{\Phi}(f),$$

lo cual prueba que  $f^\circ = f$ , por tanto  $f \in A_\pi^K[G]$ .  $\square$

**Proposición 3.45.** *Si  $A_\pi^K[G]$  es conmutativa. Entonces las funciones esféricas irreducibles sobre  $G$  de tipo  $\pi$  están en correspondencia uno a uno con las representaciones de dimensión uno  $\beta$  de  $A[G]^K$  tal que  $\beta(\tilde{\chi}_\pi) = |K|$  y  $\beta(\tilde{\chi}_\sigma) = 0$  para todo  $\sigma \in \hat{K}$  tal que  $\sigma \neq \pi$ .*

*Demostración.* Vamos a asumir que  $A_\pi^K[G]$  es conmutativa. Hemos observado que existe una correspondencia uno a uno entre funciones esféricas irreducibles sobre  $G$  de tipo  $\pi$  y las representaciones irreducibles  $L$  del álgebra  $A_\pi^K[G]$ , pero estas son de dimensión uno. De ahí  $\beta = L \circ Q_\pi : A[G]^K \rightarrow \mathbb{C}$  es una representación de dimensión uno de  $A[G]^K$ .

Ahora, estas representaciones  $\beta$ 's son las representaciones de dimensión uno de  $A[G]^K$  tales que  $\beta(|K|f - f * \tilde{\chi}_\pi) = 0$  para todo  $f \in A[G]^K$ . Esto es equivalente a  $|K|\beta(f) = \beta(f)\beta(\tilde{\chi}_\pi)$  para todo  $f \in A[G]^K$ . El álgebra  $A[G]^K$  tiene una identidad, denotada por  $\delta_e$ . De ahí estas  $\beta$ 's son aquellas que satisfacen  $\beta(\tilde{\chi}_\pi) = |K|$ . La última afirmación se sigue de  $|K|\beta(\tilde{\chi}_\sigma) = \beta(\tilde{\chi}_\sigma)\beta(\tilde{\chi}_\pi) = \beta(\tilde{\chi}_\sigma * \tilde{\chi}_\pi) = 0$  para todo  $\sigma \neq \pi \in \hat{K}$ .  $\square$

### 3.8. Pares de Gelfand

Recordemos que dados  $G$  un grupo finito y  $K$  un subgrupo de  $G$ , el álgebra de funciones  $K$ -biinvariantes en  $G$  es

$$A[G]^{K \times K} = \{f \in A[G] : f(k_1 g k_2) = f(g), \text{ para todo } k_1, k_2 \in K, g \in G\}.$$

**Definición 3.46.** Decimos que  $(G, K)$  es un *par de Gelfand* si  $A[G]^{K \times K}$  es conmutativa, mientras que es un *par de Gelfand fuerte* si  $A[G]^K$  es conmutativa.

Recordemos que una representación  $(\rho, V_\rho)$  de un grupo  $G$  es *representación libre de multiplicidad* si todas las subrepresentaciones irreducibles son no equivalentes. Un subgrupo  $K$  de  $G$  es un *subgrupo libre de multiplicidad de  $G$*  si para toda representación irreducible  $(\rho, V_\rho)$  de  $G$ , la representación  $(\text{Res}_K^G(\rho), V_\rho)$  de  $K$  es libre de multiplicidad.

Sea  $(\rho, V)$  una representación irreducible de  $G$ , la representación trivial de  $K$  está contenida en  $\rho$  tantas veces como la dimensión de los vectores  $K$ -invariantes en  $V$ .

$$V^K = \{v \in V : \rho(k)v = v, \text{ para todo } k \in K\}.$$

**Teorema 3.47.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) El álgebra  $A[G]^{K \times K}$  es conmutativa.
- (ii) Para cualquier  $\rho \in \hat{G}$ ,  $\text{Res}_K^G(\rho)$  contiene la representación identidad de  $K$  a lo más una vez.
- (iii) El  $G$ -módulo  $A[G/K]$  es libre de multiplicidad.

*Demostración.* La equivalencia entre i) y ii) está contenida en [4] Teorema 4.4.2. En el Teorema 4.6.2 de [4] está probado que  $(G, K)$  es un par de Gelfand si y solo si la dimensión de  $V^K$  es menor o igual a 1 para toda  $\rho \in \hat{G}$ .  $\square$

**Teorema 3.48.** *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- (i) El álgebra  $A[G]^K$  es conmutativa.
- (ii)  $(G \times K, \tilde{K})$  es un par de Gelfand, donde  $\tilde{K} = \{(\sigma, \sigma) : \sigma \in K\}$ .
- (iii)  $K$  es un subgrupo libre de multiplicidad de  $G$ .

*Demostración.* Comenzamos demostrando que (ii) y (iii) son equivalentes. Vamos a considerar  $A[G]$  como un  $G \times K$ -módulo con la acción

$$((g, k)f)(x) = f(g^{-1}xk), \quad \text{para todo } g, x \in G, k \in K, f \in A[G].$$

La descomposición de  $A[G]$  en  $G \times K$ -módulos irreducibles sigue del teorema de Peter-Weyl 2.27

$$A[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} V_\rho \otimes V'_\rho = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} m_\sigma(\rho) V_\rho \otimes V'_\sigma = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \text{End}(V_\sigma, V_\rho).$$

Por tanto

$$A[G]^K = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \bigoplus_{\sigma \in \hat{K}} \text{End}_K(V_\sigma, V_\rho).$$

Mas aún, esta igualdad es en realidad un isomorfismo de álgebras. Ahora es obvio que  $A[G]^K$  es conmutativa si y solo si  $m_\sigma(\rho) \leq 1$  para todo  $\rho \in \hat{G}$  y todo  $\sigma \in \hat{K}$ .

Para demostrar que (i) es equivalente a (ii) demostraremos que las álgebras  $A[G]^K$  y  $A[G \times K]^{\tilde{K} \times \tilde{K}}$  son isomorfas; recordemos que por definición  $(G \times K, \tilde{K})$  es un par de Gelfand si  $A[G \times K]^{\tilde{K} \times \tilde{K}}$  es conmutativo.

Comenzamos observando que la  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ -órbita de  $(g, k) \in G \times K$  es el conjunto  $\{(k_1 g k_2, k_1 k k_2) : k_1, k_2 \in \tilde{K}\}$ . De ahí, cualquier  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ -órbita en  $G \times K$  es la  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ -órbita de un elemento de la forma  $(g, e)$  con  $g \in G$ . Ahora podemos definir una aplicación del conjunto  $\tilde{K} \backslash (G \times K) / \tilde{K}$  de  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ -órbitas en  $G \times K$  en el conjunto  $C(K, G)$  de clases de conjugación de  $K$  en  $G$  poniendo  $\gamma : (\tilde{K} \times \tilde{K}) \cdot (g, e) \mapsto K \cdot g$ . No es difícil ver que  $\gamma$  es una biyección. Esta biyección se levanta a la siguiente aplicación

$$\Gamma : A[G \times K]^{\tilde{K} \times \tilde{K}} \rightarrow A[G]^K, \quad (\Gamma f)(g) = |K|f(g, e).$$

Es inmediato ver que  $\Gamma$  es una aplicación lineal en  $A[G]^K$ . Mas aún, es fácil ver que la función característica de la  $\tilde{K} \times \tilde{K}$ -órbita de  $(g, e)$  se aplica a la función característica de la  $K$ -clase de conjugación de  $g$ . Por tanto,  $\Gamma$  es un isomorfismo de  $A[G \times K]^{\tilde{K} \times \tilde{K}}$  sobre  $A[G]^K$ . Nos queda solo probar que  $\Gamma$  es multiplicativa. Sean  $f_1, f_2 \in A[G \times K]^{\tilde{K} \times \tilde{K}}$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\Gamma(f_1 * f_2))(g) &= |K|(f_1 * f_2)(g, e) = |K| \sum_{(x,k) \in G \times K} f_1((g, e)(x, k)) f_2(x^{-1}, k^{-1}) \\ &= |K| \sum_{x \in G} \sum_{k \in K} f_1(gxk^{-1}, e) f_2(kx^{-1}, e) \\ &= |K|^2 \sum_{y \in G} f_1(gy, e) f_2(y^{-1}, e) = ((\Gamma f_1) * (\Gamma f_2))(g). \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.49. Lema de Gelfand:** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $K$  un subgrupo. Asumiendo que existe un automorfismo  $\tau$  de  $G$  tal que  $g^{-1} \in K\tau(g)K$  para todo  $g \in G$ . Entonces  $(G, K)$  es un par de Gelfand.

*Demostración.* Por definición debemos probar que  $A[G]^{K \times K}$  es conmutativo. Si  $f \in A[G]^{K \times K}$  tenemos  $f(\tau(g)) = f(g^{-1})$  para todo  $g \in G$ . Entonces, para  $f_1, f_2 \in A[G]^{K \times K}$  y  $g \in G$  tenemos:

$$\begin{aligned} (f_1 * f_2)(\tau(g)) &= \sum_{h \in G} f_1(\tau(gh)) f_2(\tau(h^{-1})) = \sum_{h \in G} f_1((gh)^{-1}) f_2(h) \\ &= \sum_{h \in G} f_2(h) f_1(h^{-1}g^{-1}) = (f_2 * f_1)(g^{-1}) = (f_2 * f_1)(\tau(g)). \end{aligned}$$

La primera igualdad se sigue de la invarianza de la medida de Haar bajo una biyección del grupo. Por tanto  $A[G]^{K \times K}$  es conmutativo. □

**Ejemplo 3.50.** Sea  $G = \mathfrak{S}_n$  y sea  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ , donde  $\mathfrak{S}_{n-m}$  y  $\mathfrak{S}_m$  son, respectivamente, los subgrupos de  $G$  de todas las permutaciones de  $\{1, \dots, n-m\}$  y de  $\{n-m+1, \dots, n\}$ , para  $1 \leq m \leq n-m$ . Consideramos también el subconjunto  $A = \{x_0, \dots, x_m\}$  de  $G$ , donde la sucesión finita  $\{x_i\}$  esta definida inductivamente por:  $x_0 = (1)$  y  $x_i = (n-m-i+1, n-m+i)x_{i-1}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Observamos que  $A$  es un conjunto de permutaciones que conmutan. En 5.1 demostramos que  $G = KAK$ .

Sea  $\tau$  el automorfismo identidad de  $G$ . Entonces, si  $g = k_1 s k_2 \in G$  con  $k_1, k_2 \in K$ ,  $s \in A$  (notar que si  $s \in A$ , entonces  $s = s^{-1}$ ), entonces

$$g^{-1} = k_2^{-1} s^{-1} k_1^{-1} = (k_1 k_2)^{-1} k_1 s k_2 (k_1 k_2)^{-1} \in K\tau(g)K.$$

Por el Lema de Gelfand 3.49 tendremos que  $(G, K)$  es un par de Gelfand.

Para pares de Gelfand Fuertes tenemos

**Proposición 3.51.** Consideremos el grupo  $G = \mathfrak{S}_n$ , para todo  $n \geq 7$  los únicos pares de Gelfand Fuertes  $(\mathfrak{S}_n, K)$  (salvo conjugación) son

- i)  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_n)$ ;
- ii)  $(\mathfrak{S}_n, A_n)$ ;
- iii)  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$ ;
- iv)  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$ .

*Demostración.* Ver Teorema 1.2 en [1]. □

Por medio de Magma (o GAP) en el Teorema 4.13 de [1] obtuvieron el siguiente resultado para los casos  $n = 3, \dots, 6$ .

**Proposición 3.52.** Además del caso  $(G, G)$  (y salvo conjugación) tenemos:

- i) Para  $G = \mathfrak{S}_3$  el par  $(G, K)$  es par de Gelfand fuerte exactamente cuando  $K = \langle (1, 2) \rangle$ ,  $K = A_3$ .
- ii) Para  $G = \mathfrak{S}_4$  el par  $(G, K)$  es par de Gelfand fuerte exactamente cuando  $K = \langle (1, 2, 3) \rangle$ ,  $K = \langle (1, 2, 3, 4) \rangle$ ,  $K = \langle (1, 2)(3, 4) \rangle$ ,  $K = \mathfrak{S}_3$ ,  $K = D_8$ ,  $K = A_4$ .
- iii) Para  $G = \mathfrak{S}_5$  el par  $(G, K)$  es par de Gelfand fuerte exactamente cuando  $K = \langle (1, 2, 3)(4, 5) \rangle$ ,  $K = \mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$ ,  $K = F_{20}$ ,  $K = \mathfrak{S}_4$ ,  $K = A_5$ .
- iv) Para  $G = \mathfrak{S}_6$  el par  $(G, K)$  es par de Gelfand fuerte exactamente cuando  $K = \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$ ,  $K = \mathfrak{S}_5$ ,  $K = \langle (1, 5)(2, 3)(4, 6)(1, 3, 6, 4, 5, 2) \rangle \simeq \mathfrak{S}_5$ ,  $K = A_6$ .

**Definición 3.53.** Se dice que  $(G, K)$  es un par de Gelfand simétrico si  $g^{-1} \in KgK$  para todo  $g \in G$ .

**Nota 3.54.** Por el Lema de Gelfand 3.49 se sigue que un par de Gelfand simétrico es un par de Gelfand, tomando  $\tau$  igual al automorfismo identidad de  $G$ .

**Proposición 3.55.**  $(G \times K, \tilde{K})$  es un par de Gelfand simétrico si y solo si para todo  $g \in G$  existe  $k \in K$  tal que  $g^{-1} = kgk^{-1}$ .

*Demostración.* El par  $(G \times K, \tilde{K})$  es simétrico si y solo si para todo  $(g, k) \in G \times K$  existen  $k_1, k_2 \in K$  tales que

$$g^{-1} = k_1 g k_2 \quad \text{y} \quad k^{-1} = k_1 k k_2. \quad (3.19)$$

Si  $(G \times K, \tilde{K})$  es simétrico, tomando  $k = e$  obtenemos  $k_2 = k_1^{-1}$  y por tanto  $g^{-1} = k_1 g k_1^{-1}$ .

Recíprocamente, supongamos que todo  $g \in G$  es  $K$ -conjugado para  $g^{-1}$ . Entonces, para  $(g, k) \in G \times K$ , sea  $h \in K$  tal que  $(gk^{-1})^{-1} = h(gk^{-1})h^{-1}$ . Entonces podemos resolver el sistema (3.19) poniendo  $k_1 = k^{-1}h$  y  $k_2 = k^{-1}h^{-1}$ . □

Denotamos por  $\mathcal{F}$  al conjunto de todas las funciones esféricas irreducibles de  $G$  de cualquier tipo  $\pi \in \hat{K}$ .

**Teorema 3.56.** Sean  $(G, K)$  un par de Gelfand fuerte y  $\mathcal{C}(K, G)$  el conjunto de todas las  $K$ -clases de conjugación en  $G$ . Entonces

$$|\mathcal{F}| = |\mathcal{C}(K, G)|.$$

*Demostración.* Las funciones características de cada  $K$ -clase de conjugación en  $G$  forma una base de  $A[G]^K$ . Por tanto  $\dim A[G]^K = |\mathcal{C}(K, G)|$ . Del Corolario 3.34 sabemos que

$$A_\pi^K[G] = \bigoplus_{\rho \in \hat{G}} \text{End}_K((V_\rho)_{(\pi)}).$$

Las funciones esféricas irreducibles de  $(G, K)$  de tipo  $\pi$  están en correspondencia uno a uno con el número de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de  $A_\pi^K[G]$ , ver la Proposición 3.39. De ahí este número es  $|\{\rho \in \hat{G} : m_\pi(\rho) \geq 1\}|$ , porque un álgebra simple tiene solo una clase de equivalencia de representaciones irreducibles.

También tenemos  $\dim A_\pi^K[G] = |\{\rho \in \hat{G} : m_\pi(\rho) \leq 1\}|$  por el Lema de Schur 2.10, porque hemos asumido que  $K$  es un subgrupo libre de multiplicidad de  $G$ . Sea  $\mathcal{F}(\pi)$  el conjunto de todas las clases de equivalencia de todas las funciones esféricas irreducibles de tipo  $\pi$ . Entonces,

$$|\mathcal{C}(K, G)| = \dim A[G]^K = \sum_{\pi \in \hat{K}} \dim A_\pi^K[G] = \sum_{\pi \in \hat{K}} |\mathcal{F}(\pi)| = |\mathcal{F}|. \quad (3.20)$$

□

**Proposición 3.57.** *Si  $(G, K)$  es un par de Gelfand fuerte, el conjunto de representaciones del álgebra  $A[G]^K$ , dado por las extensiones de todas las funciones esféricas irreducibles del par  $(G, K)$ , a saber  $\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}\}$ , es una base del dual del espacio vectorial complejo  $A[G]^K$ .*

*Demostración.* El conjunto  $\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}\}$  está en correspondencia uno a uno con el conjunto  $\mathcal{F}$  de todas las funciones esféricas irreducibles de  $(G, K)$ , por la Proposición 3.26 y 3.43. Tomando en cuenta el Teorema 3.56 tenemos

$$|\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}\}| = |\mathcal{F}| = \dim A[G]^K.$$

Por otro lado, el conjunto  $\{\Phi : \Phi \in \mathcal{F}\}$  es linealmente independiente, porque es un conjunto finito de representaciones diferentes de un álgebra. Para ver esto, sea  $\{\hat{\Phi} : \Phi \in \mathcal{F}\} = \{\hat{\Phi}_1, \hat{\Phi}_2, \dots, \hat{\Phi}_m\}$  y tomo  $h \in A[G]^K$  tal que  $\hat{\Phi}_i(h) \neq \hat{\Phi}_j(h)$  para todo  $i \neq j$ , (consideramos la unión de los hiperplanos  $\ker(\hat{\Phi}_i - \hat{\Phi}_j)$ , con  $i \neq j$  claramente esta unión es subconjunto propio de  $A[G]^K$ , todo  $h$  en el complemento de esa unión satisface lo indicado). Si  $\sum_{1 \leq j \leq m} a_j \hat{\Phi}_j = 0$ , entonces para  $i = 0, \dots, m-1$

$$\sum_{1 \leq j \leq m} a_j \hat{\Phi}_j(h^i) = \sum_{1 \leq j \leq m} a_j \hat{\Phi}_j(h)^i = 0$$

es un sistema de  $m$  ecuaciones lineales en  $m$  incógnitas  $a_j$ 's. El coeficiente matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hat{\Phi}_1(h) & \hat{\Phi}_2(h) & \dots & \hat{\Phi}_m(h) \\ \hat{\Phi}_1(h)^2 & \hat{\Phi}_2(h)^2 & \dots & \hat{\Phi}_m(h)^2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hat{\Phi}_1(h)^{m-1} & \hat{\Phi}_2(h)^{m-1} & \dots & \hat{\Phi}_m(h)^{m-1} \end{pmatrix},$$

el cual es una matriz no singular de Vandermonde. Por tanto  $a_j = 0$  para todo  $1 \leq j \leq m$ . Esto completa la demostración de la Proposición. □



## Bases de Gelfand-Tsetlin: Enfoque de Okounkov-Vershik

En este capítulo comenzamos considerando un grupo finito arbitrario  $G$ . Definimos los conceptos y propiedades de bases y álgebras de Gelfand Tsetlin.

Posteriormente hacemos una revisión de un grupo finito particular, el grupo simétrico  $\mathfrak{S}_n$ , mencionamos las propiedades que necesitaremos de este grupo y determinamos las bases y álgebras de Gelfand Tsetlin en  $\mathfrak{S}_n$ .

### 4.1. Grafo de Ramificación y Álgebras de Gelfand-Tsetlin.

Consideraremos un grupo  $G$ . Decimos que una torre

$$G_1 = \{e\} \leq G_2 \leq \dots \leq G_{n-1} \leq G_n \leq \dots \quad (4.1)$$

de subgrupos de  $G$  es *libre de multiplicidad* si  $G_{j-1}$  es un subgrupo libre de multiplicidad de  $G_j$  para todo  $j \geq 2$ .

El *grafo de ramificación* de la torre libre de multiplicidad (4.1) es el grafo orientado cuyo conjunto de vértices es

$$\hat{G}_1 \cup \hat{G}_2 \cup \dots \cup \hat{G}_{n-1} \cup \hat{G}_{n-1} \cup \hat{G}_n \cup \dots$$

y conjunto de aristas

$$\{(\rho, \sigma) : \sigma \in \text{Res}_{G_{j-1}}^{G_j}(\rho), \text{ con } \rho \in \hat{G}_j, \sigma \in \hat{G}_{j-1}, j = 2, 3, \dots\}.$$

Escribiremos  $\rho \rightarrow \sigma$  si  $(\rho, \sigma)$  es una arista del grafo de ramificación.

Sea  $(\rho, V_\rho)$  una representación unitaria e irreducible de  $G_n$ . Si (4.1) es libre de multiplicidad entonces la descomposición de  $V_\rho$  en  $G_{n-1}$ -módulos es

$$V_\rho = \bigoplus_{\substack{\pi \in \widehat{G_{n-1}} \\ \rho \rightarrow \pi}} V_\pi,$$

es una descomposición ortogonal. Iterando esta descomposición obtenemos que si  $\pi \in \hat{G}_{n-1}$  entonces la descomposición de  $V_\pi$  en  $G_{n-2}$ -módulos es

$$V_\pi = \bigoplus_{\substack{v \in \widehat{G_{n-2}} \\ \pi \rightarrow v}} V_v,$$

es de nuevo ortogonal.

Continuando de esta manera, después de  $n - 1$  pasos (la última correspondiente a la restricción de  $G_2$  a  $G_1$ ), obtenemos sumas de representaciones triviales de dimensión uno. Para formalizar esto, denotamos por  $\mathcal{T}(\rho)$  el conjunto de todos los caminos  $T$  en el grafo de ramificación de  $G$  de la forma:

$$T = (\rho = \rho_n \rightarrow \rho_{n-1} \rightarrow \rho_{n-2} \rightarrow \cdots \rightarrow \rho_2 \rightarrow \rho_1 = 1)$$

donde  $\rho_j \in \hat{G}_j$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ . Entonces podemos escribir

$$V_\rho = \bigoplus_{\substack{\rho_{n-1} \in \hat{G}_{n-1} \\ \rho \rightarrow \rho_{n-1}}} V_{\rho_{n-1}} = \bigoplus_{\substack{\rho_{n-1} \in \hat{G}_{n-1} \\ \rho \rightarrow \rho_{n-1}}} \bigoplus_{\substack{\rho_{n-2} \in \hat{G}_{n-2} \\ \rho_{n-1} \rightarrow \rho_{n-2}}} V_{\rho_{n-2}} = \cdots = \bigoplus_{T \in \mathcal{T}(\rho)} V_{\rho_1}. \quad (4.2)$$

En el último término de (4.2) cada espacio  $V_{\rho_1}$  tiene dimensión uno. Así escogemos, para cada  $T \in \mathcal{T}(\rho)$ , un vector  $v_T$  en el correspondiente espacio  $V_{\rho_1}$  con  $\|v_T\| = 1$ . Notamos que  $v_T$  está definido salvo un factor escalar de norma uno. Por lo tanto podemos reescribir (4.2) en la forma

$$V_\rho = \bigoplus_{T \in \mathcal{T}(\rho)} \langle v_T \rangle.$$

**Definición 4.1.** El conjunto  $\{v_T : T \in \mathcal{T}(\rho)\}$  es una base ortonormal de  $V_\rho$ . Se denomina *base de Gelfand-Tsetlin* de  $V_\rho$ , o por brevedad decimos que es una GZ-base, con respecto a la torre libre de multiplicidad (4.1).

Un camino de la forma  $(\rho_j \rightarrow \rho_{j-1} \rightarrow \rho_{j-2} \rightarrow \cdots \rightarrow \rho_i)$  para  $i, j$  tales que  $1 \leq i < j \leq n$  nos indica que la representación  $\rho_i \in \hat{G}_i$  aparece en  $\text{Res}_{G_i}^{G_j} \rho_j$ , cuando este es el caso también lo denotaremos por  $\rho_i \in \text{Res}_{G_i}^{G_j} \rho_j$ .

Por ejemplo, sea  $G_1 = \{e\} \leq G_2 \leq G_3 \leq G_4 \leq G_5 = G$  una torre libre de multiplicidad de subgrupos de  $G$  y  $\rho \in \hat{G}$ . Suponiendo que:  $V_\rho = V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2}$  con  $\mu_1, \mu_2 \in \hat{G}_4$ ,  $V_{\mu_1} = V_{\nu_1} \oplus V_{\nu_2}$  con  $\nu_1, \nu_2 \in \hat{G}_3$ ,  $V_{\mu_2} = V_{\nu_2}$  con  $\nu_2 \in \hat{G}_3$ ,  $V_{\nu_1} = V_{\sigma_1}$  con  $\sigma_1 \in \hat{G}_2$ ,  $V_{\nu_2} = V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2}$  con  $\sigma_1, \sigma_2 \in \hat{G}_2$ ,  $V_{\sigma_1} = V_1$  y  $V_{\sigma_2} = V_1$  con  $1 \in \hat{G}_1$ . Entonces

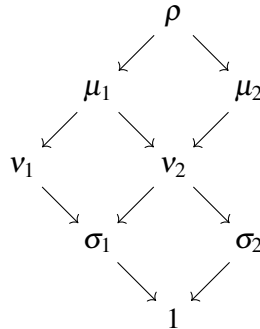
$$\begin{aligned} V_\rho &= V_{\mu_1} \oplus V_{\mu_2} = (V_{\nu_1} \oplus V_{\nu_2}) \oplus V_{\nu_2} = (V_{\sigma_1} \oplus (V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2})) \oplus (V_{\sigma_1} \oplus V_{\sigma_2}) \\ &= (V_1 \oplus (V_1 \oplus V_1)) \oplus (V_1 \oplus V_1). \end{aligned}$$

Los distintos sumandos  $V_1$  corresponden, respectivamente, a los caminos

$$T_1 = (\rho \rightarrow \mu_1 \rightarrow \nu_1 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow 1), \quad T_2 = (\rho \rightarrow \mu_1 \rightarrow \nu_2 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow 1),$$

$$T_3 = (\rho \rightarrow \mu_1 \rightarrow \nu_2 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow 1), \quad T_4 = (\rho \rightarrow \mu_2 \rightarrow \nu_2 \rightarrow \sigma_1 \rightarrow 1) \text{ y } T_5 = (\rho \rightarrow \mu_2 \rightarrow \nu_2 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow 1).$$

En particular vemos que  $\dim(V_\rho) = 5$ . Los cinco caminos en  $\mathcal{T}(\rho)$  pueden ser vistos en la siguiente figura.





También asociada a la torre libre de multiplicidad (4.1) introducimos una subálgebra destacada de  $A[G]$ .

Dada  $f \in A[K]$ , se denota por  $\tilde{f}$  a la función en  $A[G]$  dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in K \\ 0 & \text{si } x \notin K. \end{cases}$$

Podemos considerar  $A[K]$  una subálgebra de  $A[G]$ . Para facilitar la notación, también denotaremos por  $f$  a  $\tilde{f}$ .

**Definición 4.2.** Denotamos por  $Z(k)$  el centro del álgebra de grupo  $A[G_k]$ , que es, la subálgebra de funciones centrales definidas en  $G_k$ . El *álgebra de Gelfand-Tsetlin*  $GZ(n)$  asociada con la torre libre de multiplicidad (4.1) es el álgebra generada por las subálgebras

$$Z(n), Z(n-1), \dots, Z(1).$$

**Teorema 4.3.** *El álgebra de Gelfand-Tsetlin  $GZ(n)$  es una subálgebra abeliana maximal de  $A[G_n]$ . Más aún, coincide con la subálgebra de funciones  $f \in A[G_n]$  cuyas transformadas de Fourier  $\hat{f}(\rho)$ , para  $\rho \in \hat{G}_n$ , son diagonalizables por una base de Gelfand-Tsetlin de  $V_\rho$ . En fórmulas*

$$GZ(n) = \{f \in A[G_n] : \hat{f}(\rho)v_T \in \mathbb{C}v_T, \text{ para todo } \rho \in \hat{G}_n \text{ y } T \in \mathcal{T}(\rho)\}. \quad (4.3)$$

*Demostración.* Ver el Teorema 2,2,2 del libro [3]. □

**Corolario 4.4.** *Todo elemento  $v_T$ ,  $T \in \mathcal{T}(\rho)$ , en una base de Gelfand-Tsetlin de  $V_\rho$  es un autovector común para todos los operadores  $\hat{f}(\rho)$  con  $f \in GZ(n)$ . En particular, si  $\alpha_T(f)$  es el autovalor de  $\hat{f}(\rho)$  correspondiente a  $v_T$ , que es  $\hat{f}(\rho)v_T = \alpha_T(f)v_T$ ,  $v_T$  está determinado de forma única, salvo factor escalar, por la función  $\alpha_T : f \mapsto \alpha_T(f)$ ,  $f \in GZ(n)$ .*

*Demostración.* La última relación se sigue de la existencia de las funciones  $f_T \in GZ(n)$ . De hecho, si  $S, T \in \mathcal{T}(\rho)$  y  $\alpha_T = \alpha_S$ , entonces  $1 = \alpha_T(f_T) = \alpha_S(f_T) = \pi_{S,T}$ , de ahí  $S = T$ . □

## 4.2. El grupo simétrico $\mathfrak{S}_n$ .

Sea  $\mathfrak{S}_n$  el grupo simétrico de grado  $n$ , que es, el grupo de todas las transformaciones biyectivas (permutaciones) del conjunto  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , con la operación de composición de aplicaciones. Denotaremos con letras griegas, no solo los elementos y las representaciones de  $\mathfrak{S}_n$ , sino también las particiones de  $n$ , sin temor a confusión pues estará claro de qué se trata por el contexto.

### 4.2.1. Particiones y clases de conjugación en $\mathfrak{S}_n$ .

A continuación presentamos un listado de definiciones y propiedades conocidas de  $\mathfrak{S}_n$ , de sus clases de conjugación y de las particiones de  $n$ , queremos recordar la relación que existe entre estos conceptos.

**Definición 4.5.** Dado  $n \in \mathbb{N}$

- Sean  $a_1, a_2, \dots, a_r$  ( $r \leq n$ ) números distintos de  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ . Entonces  $(a_1, a_2, \dots, a_r)$  denota la aplicación que transforma  $a_1 \rightarrow a_2, a_2 \rightarrow a_3, \dots, a_{r-1} \rightarrow a_r$ , además  $a_r \rightarrow a_1$  y aplica todos los otros elementos de  $I_n$  en si mismos, se denomina *ciclo de longitud  $r$  o  $r$ -ciclo*. Un 2-ciclo, es llamado *transposición*.

- Dos ciclos  $\theta = (a_1, a_2, \dots, a_r)$  y  $\gamma = (b_1, b_2, \dots, b_s)$  con  $\{a_1, a_2, \dots, a_r\} \cap \{b_1, b_2, \dots, b_s\} = \emptyset$  se dice que son *disjuntos*. Es claro que dos ciclos disjuntos  $\gamma$  y  $\theta$  conmutan:  $\gamma\theta = \theta\gamma$ .

**Proposición 4.6.** *Toda permutación diferente de la identidad de  $\mathfrak{S}_n$  se expresa de manera única (salvo el orden de los factores) como un producto de ciclos disjuntos, cada uno de los cuales tiene al menos longitud 2.*

*Demostración.* Ver Teorema 6.3 en [13]. □

**Definición 4.7.** Sea  $n$  un natural. Una *partición* de  $n$  es una sucesión  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$  de enteros positivos tal que

$$\rho_1 \geq \rho_2 \geq \dots \geq \rho_k \quad \text{y} \quad n = \rho_1 + \rho_2 + \dots + \rho_k;$$

se escribirá  $\rho \vdash n$ .

Las particiones pueden ser descritas a través de notación exponencial: si  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$  es una partición de  $n$  y  $r_\alpha$  la cantidad de veces que aparece  $\alpha$  en  $(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$  escribimos  $\rho = [n^{r_n}, \dots, 1^{r_1}]$  omitiendo los números cuyos exponentes son cero. Por ejemplo,  $\rho = (4, 2, 2, 1) = [4^1 2^2 1^1]$  es una partición de  $n = 9$ .

La Proposición 4.6 permite definir el *tipo* de una permutación de  $\mathfrak{S}_n$  como la partición de  $n$  que resulta de considerar las longitudes de los ciclos que aparecen en su descomposición, incluyendo a los ciclos de longitud 1. Por ejemplo  $\sigma = (2518)(37) = (2518)(37)(4)(6)$  es de tipo  $(4, 2, 1, 1) = [4^1 2^1 1^2]$ .

**Definición 4.8.** Sea  $G$  es un grupo, dos elementos  $x, y \in G$  se denominan *conjugados* si existe un elemento  $g \in G$  tal que  $x = gyg^{-1}$ .

Es claro que la conjugación es una relación de equivalencia en  $G$ , por lo tanto queda descompuesto como unión disjunta de clases de conjugación.

En el grupo simétrico  $\mathfrak{S}_n$  las clases de conjugación quedan descritas por las particiones de  $n$ . Sea  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  con

$$\sigma = (a_{1,1} a_{1,2}, \dots, a_{1,k_1}) \dots (a_{r,1} a_{r,2}, \dots, a_{r,k_r}),$$

su descomposición en ciclos disjuntos, entonces, para todo  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  tenemos

$$\pi\sigma\pi^{-1} = (\pi(a_{1,1})\pi(a_{1,2}), \dots, \pi(a_{1,k_1})) \dots (\pi(a_{r,1})\pi(a_{r,2}), \dots, \pi(a_{r,k_r})),$$

es la descomposición de  $\pi\sigma\pi^{-1}$  en producto de ciclos disjuntos. A partir de esta observación tenemos que dos permutaciones en  $\mathfrak{S}_n$  son conjugadas si y solo si son del mismo tipo. Resumimos la información en el siguiente resultado.

**Proposición 4.9.** *El conjunto de clases de conjugación de  $\mathfrak{S}_n$  está en correspondencia biyectiva con el conjunto de particiones de  $n$ .*

**Definición 4.10.** Con  $C(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, k^{r_k}, \mathfrak{S}_n)$  denotamos la clase de conjugación del producto de  $r_k$   $k$ -ciclos disjuntos en  $\mathfrak{S}_n$ , para  $1 \leq k \leq n$ .

Para simplificar la notación omitimos el número  $k^{r_k}$  cuando  $r_k = 0$ , siempre y cuando no haya confusión.

Por ejemplo:  $C(2, 3^2; \mathfrak{S}_{10})$  denota la clase de conjugación de  $(1, 2)(3, 4, 5)(6, 7, 8)$  en  $\mathfrak{S}_{10}$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$  tenemos  $C(1, \mathfrak{S}_n) = \{(1)\}$ .

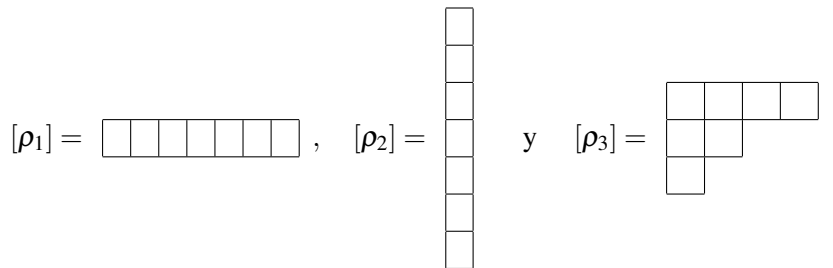
**4.2.2. Diagramas y tableaux de Young.**

Introducimos algunas herramientas algebraicas y combinatorias necesarias de la teoría de representaciones del grupo simétrico.

**Definición 4.11.** Una partición  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k)$  de  $n$  es retratada por el *diagrama de Young* asociado  $[\rho]$ , también llamado *diagrama de Young de forma  $\rho$* , el cual consiste de  $n$  cuadrados o cajas puestos en  $k$  filas alineadas a la izquierda. La  $i$ -ésima fila de  $[\rho]$  consiste de  $\rho_i$  cuadrados.

**Ejemplo 4.12.**

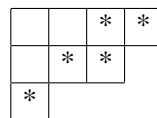
Consideramos las particiones  $\rho_1 = (7)$ ,  $\rho_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$  y  $\rho_3 = (4, 2, 1)$  de  $n = 7$ . Los respectivos diagramas de Young asociados a estas particiones son



**Definición 4.13.** Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq m$ . Sean  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k) \vdash n$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \vdash m$ .

- Decimos que  $\mu$  está contenido en  $\rho$ ,  $\mu \leq \rho$  si  $\mu_i \leq \rho_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, s$ . Pensamos a  $\mu$  dentro de  $\rho$  de tal manera que las cajas en la posición  $(1, 1)$  de  $\mu$  y de  $\rho$  coincidan.
- El *diagrama complementario*  $\rho \setminus \mu$ : es el diagrama obtenido removiendo los cuadrados de  $\mu$  colocados en  $\rho$ .

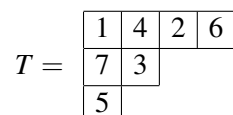
Por ejemplo si  $\rho = (4, 3, 1)$  y  $\mu = (2, 1)$  entonces el diagrama complementario  $\rho \setminus \mu$  es la región con \* en la figura siguiente:



**Definición 4.14.** Dado  $n \in \mathbb{N}$ .

- Sea  $\rho \vdash n$ . En el diagrama de Young  $[\rho]$ , la caja de coordenadas  $(i, j)$  se dice que es *removible* si en las posiciones  $(i + 1, j)$  y  $(i, j + 1)$  no existe caja. Esto significa que removiendo una tal caja, el correspondiente diagrama es todavía un diagrama de Young, asociado con una partición  $\pi \vdash (n - 1)$ . Similarmente, decimos que la posición  $(i, j)$  es *sumable* si  $\rho_i < \rho_{i-1}$  o  $i = k + 1$  y  $j = 1$ . Esto significa que agregando una caja en la posición  $(i, j)$ , obtenemos un diagrama de Young, asociado con una partición  $\rho \vdash (n + 1)$ .
- Sea  $\rho \vdash n$ . Un *tableau de Young* de forma  $\rho$  o  $\rho$ -*tableau* es una biyección entre las cajas de  $[\rho]$  y el conjunto  $\{1, \dots, n\}$ . Es representado llenando las cajas de  $[\rho]$  con los números  $1, 2, \dots, n$ , cada número en exactamente una caja, lo denotamos por  $t^\rho$  o simplemente por  $T$  cuando queda claro cuál es la partición  $\rho$  de  $n$ .

Por ejemplo, sea  $\rho = (4, 2, 1) \vdash 7$ , hay  $7!$  tableaux de Young diferentes, exhibimos uno de ellos



Definimos  $i : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  y  $j : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, \ell\}$  las funciones que asignan a cada  $t \in \{1, 2, \dots, n\}$  la fila y la columna en la que sea encuentra  $t$  en el tableau  $T$ , respectivamente. Por ejemplo, en el tableau  $T$  dado mas arriba,  $i(7) = 2$ ,  $j(7) = 1$ .

**Definición 4.15.** Con la notación previa, sea  $c_l(T) = j(l) - i(l)$  para  $l = 1, \dots, n$

- Se define el *contenido* de  $T$  como el vector en  $\mathbb{Z}^n$  dado por

$$C(T) = (j(1) - i(1), j(2) - i(2), \dots, j(n) - i(n)) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T)).$$

- Un *tableau estándar de Young* es un tableau tal que los números en cada fila y en cada columna ocurren en orden creciente, leyendo las filas de izquierda a derecha y las columnas de arriba hacia abajo.

Por ejemplo, los tableaux estándar de forma  $[(3, 2)]$  son:

$$T_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad T_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline \end{array} \quad T_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad T_4 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline \end{array} \quad T_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & \\ \hline \end{array}$$

y el contenido del último es  $C(T_5) = (0, 1, 2, -1, 0)$ .

Para cualquier partición  $\rho \vdash n$  denotamos por  $Tab(\rho)$  el conjunto de todos los tableaux estándar de forma  $\rho$ . Finalmente ponemos

$$Tab(n) = \bigcup_{\rho \vdash n} Tab(\rho).$$

Sea

$$Cont(n) = \{\alpha = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{Z}^n : \alpha = C(T), T \in Tab(n)\}.$$

Dados  $\alpha = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in Cont(n)$  y  $\pi \in \mathfrak{S}_n$ , denotamos por  $\pi\alpha = (c_{\pi(1)}, c_{\pi(2)}, \dots, c_{\pi(n)})$ . Sean  $\alpha, \beta \in Cont(n)$ , escribimos  $\alpha \approx \beta$ , si  $\beta$  puede ser obtenido de  $\alpha$  permutando sus entradas, es decir, hay una  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  tal que  $\pi\alpha = \beta$ . Claramente,  $\approx$  es una relación de equivalencia en  $Cont(n)$ . Notemos sin embargo que dando  $\alpha \in Cont(n)$  hay permutaciones  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  tal que  $\pi\alpha \notin Cont(n)$ .

**Teorema 4.16.** La aplicación  $Tab(n) \rightarrow Cont(n)$  dada por  $T \mapsto C(T)$  es una biyección. Mas aún, si  $\alpha, \beta \in Cont(n)$ , y  $\alpha = C(T)$ ,  $\beta = C(S)$ , con  $T, S \in Tab(n)$ , entonces  $\alpha \approx \beta$  si y solo si  $T$  y  $S$  son tableaux de la misma forma.

*Demostración.* Ver el Teorema 3.1.10 en [3]. □

Un conjunto distinguido de generadores de  $\mathfrak{S}_n$ , consiste de las *transposiciones adyacentes*

$$s_i = (i, i+1) \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

También los denominamos *generadores de Coxeter* de  $\mathfrak{S}_n$  y satisfacen las siguientes relaciones (*relaciones de Coxeter*):

- (i)  $s_i s_j = s_j s_i$  si  $|i - j| \neq 1$ ,
- (ii)  $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ .

Sea  $T$  un tableau de Young de forma  $\rho$  y tomamos  $\pi \in \mathfrak{S}_n$ . Entonces, denotamos por  $\pi T$  el tableau obtenido reemplazando  $i$  por  $\pi(i)$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 4.17.** Si  $T$  es un tableau de Young estándar, decimos que una transposición adyacente  $s_j$  es *admisibile* para  $T$  cuando  $s_j T$  es también tableau estándar.

Es fácil ver que  $s_j$  es admisible para  $T$  si y solo si  $j$  y  $j + 1$  no pertenecen ni a la misma fila ni a la misma columna de  $T$ . Equivalentemente, en términos del contenido, dado  $\alpha \in \text{Cont}(n)$ , decimos que una transposición adyacente  $s_j$  es *admisible* para  $\alpha$ , si es admisible para (el único)  $T \in \text{Tab}(n)$  tal que  $\alpha = C(T)$ .

Dando  $\pi \in \mathfrak{S}_n$ , una *inversión* para  $\pi$  es un par  $(i, j)$  con  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $i < j$  y  $\pi(i) > \pi(j)$ . Denotamos  $\mathcal{I}(\pi)$  el conjunto de todas las inversiones para  $\pi$ . Entonces  $\ell(\pi) = |\mathcal{I}(\pi)|$  coincide con el menor entero  $k$  tal que  $\pi$  puede ser escrito como un producto de  $k$  generadores de Coxeter, esto es,  $\pi = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ . El número  $\ell(\pi)$  es llamado la *longitud de Coxeter* de  $\pi$ , ver la Proposición 3.1.4 en [3].

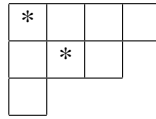
Más adelante necesitaremos determinar el carácter de representaciones irreducibles  $\rho$  de  $\mathfrak{S}_n$  en clases de conjugación, a continuación enunciamos una forma de determinar este carácter cuando consideramos clases de 2-ciclos en  $\mathfrak{S}_n$ .

Una forma de describir particiones debida a Frobenius, es la siguiente. Sea  $\rho$  una partición de  $n$ , supongamos que la diagonal principal del diagrama de Young de  $\rho$  tiene  $s$  cajas.

Sean  $a_i$  el número de cajas debajo de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal, y  $b_i$  el número de cajas a la derecha de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal. Tenemos que  $a_1 > a_2 > \cdots > a_s$  y  $b_1 > b_2 > \cdots > b_s$ , denotamos a  $\rho$  por

$$\rho = (b_1, b_2, \dots, b_s | a_1, a_2, \dots, a_s).$$

Por ejemplo, en el siguiente diagrama de Young



tenemos que la cantidad de elementos en la diagonal principal (los lugares que tienen \*) es  $s = 2$ , hay dos cuadrados vacíos en la primera columna del diagrama, es decir,  $a_1 = 2$ , de la misma forma sabemos que  $a_2 = 0$ , observando los cuadrados vacíos de las filas del diagrama tenemos que  $b_1 = 3$  y  $b_2 = 1$ . Por tanto podemos escribir la partición  $\rho$  que determina el diagrama dado de la siguiente manera

$$\rho = (3, 1 | 2, 0).$$

Si  $C(2, \mathfrak{S}_n)$  denota la clase de conjugación de los dos ciclos en  $\mathfrak{S}_n$ , entonces tenemos la siguiente expresión general del carácter  $\chi_\rho$  en esta clase de conjugación. (Ver por ejemplo [8], página 52):

$$\chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) = \frac{d(\rho)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^s (b_i(b_i + 1) - a_i(a_i + 1)). \quad (4.4)$$

### 4.2.3. El conjunto ordenado de Young

Denotamos por  $\mathbb{Y} = \{\rho : \rho \vdash n, n \in \mathbb{N}\}$  el conjunto de todas las particiones. Alternativamente, podemos considerar  $\mathbb{Y}$  como el conjunto de todos los diagramas de Young. Dotamos a  $\mathbb{Y}$  con una estructura de conjunto parcialmente ordenado poniendo, para  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k) \vdash m$  y  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_h) \vdash n$ ,

$$\mu \preceq \rho$$

si  $m \leq n$ ,  $k \leq h$  y  $\mu_j \leq \rho_j$  para todo  $j = 1, 2, \dots, k$ . Equivalentemente,  $\mu \preceq \rho$  si el diagrama de Young de  $\mu$  está contenido en el diagrama de Young de  $\rho$ , que es, si el diagrama de Young de  $\mu$  contiene una caja en la posición  $(i, j)$ , así lo hace el diagrama de Young de  $\rho$ .

Por ejemplo, si  $\rho = (4, 3, 1)$  y  $\mu = (3, 2, 1)$ , entonces  $\mu \preceq \rho$ .

Para  $\mu, \rho \in \mathbb{Y}$ , decimos que  $\rho$  cubre  $\mu$ , o que  $\mu$  está cubierto por  $\rho$  si  $\mu \preceq \rho$  y

$$\text{Si } \mu \preceq \nu \preceq \rho \text{ y } \nu \in \mathbb{Y}, \text{ entonces } \mu = \nu \text{ o } \nu = \rho,$$

claramente  $\rho$  cubre  $\mu$  si y solo si  $\mu \preceq \rho$  y el diagrama complementario  $\rho \setminus \mu$  tiene una sola caja. Escribiremos  $\rho \rightarrow \mu$  para indicar que  $\rho$  cubre a  $\mu$ .

El *diagrama de Hasse* de  $\mathbb{Y}$ , también conocido como *grafo de Young*, es el grafo orientado con conjunto de vértices  $\mathbb{Y}$  y una flecha de  $\rho$  a  $\mu$  si y solo si  $\rho$  cubre a  $\mu$ .

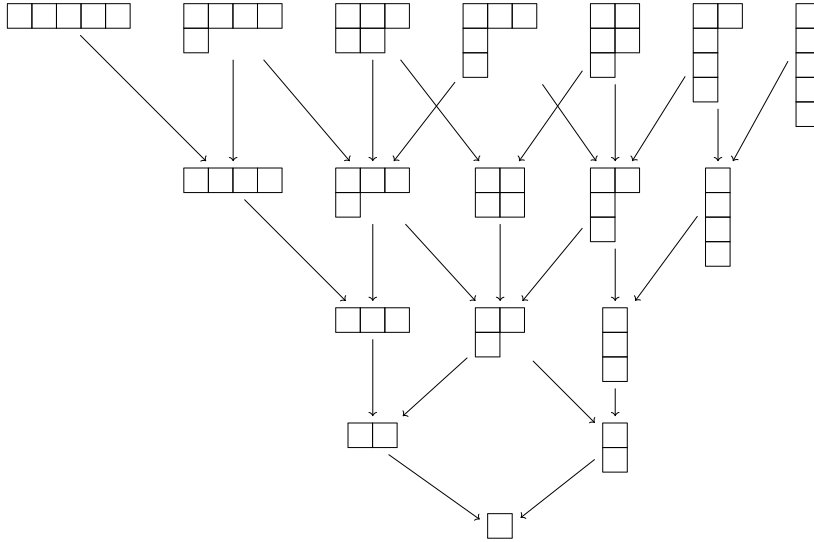


Figura 4.1: La parte inferior del diagrama de Hasse de  $\mathbb{Y}$

Un *camino* en el grafo de Young es una sucesión  $p = (\rho^{(n)} \rightarrow \rho^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \rho^{(1)})$  de particiones  $\rho^{(k)} \vdash k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ , así que un camino siempre finaliza en la partición trivial  $\rho^{(1)} = (1) \vdash 1$ . El número entero  $\ell(p) = n$  es llamado la longitud del camino  $p$ . Denotamos por  $\Pi_n(\mathbb{Y})$  el conjunto de todos los caminos de longitud  $n$ .

Con una partición  $\rho \vdash n$  y un camino  $p = (\rho^{(n)} \rightarrow \rho^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \rho^{(1)})$  asociamos el tableau estándar  $T$  de forma  $\rho$  obtenido reemplazando el entero  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  en la caja  $\rho^{(k)} \setminus \rho^{(k-1)}$ , la caja en  $\rho^{(k)}$  la cual es removida para obtener el diagrama  $\rho^{(k-1)}$ .

Por ejemplo, consideremos el camino

$$(4, 2, 1) \rightarrow (4, 2) \rightarrow (3, 2) \rightarrow (2, 2) \rightarrow (2, 1) \rightarrow (1, 1) \rightarrow (1),$$

según la descripción anterior tiene asociado el siguiente tableau estándar

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

De esta forma, estamos estableciendo una biyección natural

$$\Pi_n(\mathbb{Y}) \leftrightarrow \text{Tab}(n). \tag{4.5}$$

Combinando con la del Teorema 4.16 obtenemos la biyección

$$\Pi_n(\mathbb{Y}) \leftrightarrow \text{Cont}(n). \tag{4.6}$$

entre el conjunto de todos los caminos de longitud  $n$  en  $\mathbb{Y}$  y el conjunto de todos los contenidos de  $n$ . Finalmente, del Teorema 4.16 obtenemos

**Proposición 4.18.** *Sea  $\alpha, \beta \in \text{Cont}(n)$ . Asumiendo que ellos corresponden a los caminos*

$$\rho^{(n)} \rightarrow \rho^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \rho^{(1)} \quad \text{y} \quad \mu^{(n)} \rightarrow \mu^{(n-1)} \rightarrow \dots \rightarrow \mu^{(1)},$$

*respectivamente. Entonces,  $\alpha \approx \beta$  si y solo si  $\rho^{(n)} = \mu^{(n)}$ .*

### 4.3. Elementos de Young-Jucys-Murphy para $\mathfrak{S}_n$ .

Demostraremos que la torre

$$\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \leq \mathfrak{S}_n$$

es libre de multiplicidad y estudiaremos las bases y el álgebra de Gelfand-Tsetlin asociadas.

**Teorema 4.19.** *Se cumple que  $(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{n-1}, \widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1})$  es un par de Gelfand simétrico, donde*

$$\widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1} = \{(\theta, \theta) : \theta \in \mathfrak{S}_{n-1}\}.$$

*Demostración.* Ver Teorema 3.2.1 de [3]. □

**Corolario 4.20.** *El álgebra  $A[\mathfrak{S}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$  es conmutativa, el subgrupo  $\mathfrak{S}_{n-1}$  es libre de multiplicidad en  $\mathfrak{S}_n$  y la torre*

$$\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \leq \mathfrak{S}_n. \tag{4.7}$$

*es libre de multiplicidad.*

*Demostración.* Por el Teorema anterior y la Nota 3.54 tenemos que el par  $(\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_{n-1}, \widetilde{\mathfrak{S}}_{n-1})$  es un par de Gelfand. La demostración concluye por el Teorema 3.48. □

En lo que sigue, para simplificar la notación, si  $f \in A[\mathfrak{S}_n]$  escribiremos  $f = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} f(\pi)\pi$ , es decir, identificaremos un elemento  $\pi \in \mathfrak{S}_n$  con la función de Dirac  $\delta_\pi \in A[\mathfrak{S}_n]$ .

**Definición 4.21.** En  $A[\mathfrak{S}_n]$  definimos los *elementos de Young-Jucys-Murphy* (YJM), por

$$X_1 = 0 \quad \text{y} \quad X_k = (1, k) + (2, k) + \dots + (k-1, k) \quad \text{para} \quad k = 2, \dots, n.$$

Sean  $\ell, k \geq 1$ .  $\mathfrak{S}_{\ell+k}$ ,  $\mathfrak{S}_\ell$  y  $\mathfrak{S}_k$  denotan los grupos de permutaciones sobre  $\{1, 2, \dots, \ell+k\}$ ,  $\{1, 2, \dots, \ell\}$  y  $\{\ell+1, \ell+2, \dots, \ell+k\}$ , respectivamente. Notemos que  $\mathfrak{S}_\ell, \mathfrak{S}_k \leq \mathfrak{S}_{\ell+k}$  y  $\mathfrak{S}_\ell \cap \mathfrak{S}_k = \{1\}$ .

Finalmente ponemos  $Z(\ell, k) = A[\mathfrak{S}_{\ell+k}]^{\mathfrak{S}_\ell}$  y  $Z(\ell) = A[\mathfrak{S}_\ell]^{\mathfrak{S}_\ell}$ , el centro de  $A[\mathfrak{S}_\ell]$ . Claramente los elementos  $X_{\ell+1}, X_{\ell+2}, \dots, X_{\ell+k} \in Z(\ell, k)$  y  $\mathfrak{S}_k, Z(\ell) \subset Z(\ell, k)$ .

**Teorema 4.22.** (*G. I. Olshanskii*) *El álgebra  $Z(\ell, k)$  está generada por los elementos de YJM,  $X_{\ell+1}, X_{\ell+2}, \dots, X_{\ell+k}$ , el subgrupo  $\mathfrak{S}_k$  y  $Z(\ell)$ . Es decir*

$$Z(\ell, k) = \langle X_{\ell+1}, X_{\ell+2}, \dots, X_{\ell+k}, \mathfrak{S}_k, Z(\ell) \rangle.$$

*Demostración.* Ver Teorema 3.2.6 en [3]. □

**Corolario 4.23.** *El álgebra de Gelfand-Tsetlin  $GZ(n)$  de la torre libre de multiplicidad*

$$\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \cdots \leq \mathfrak{S}_n,$$

*está generada por los elementos de YJM,  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .*

*Demostración.* Ver Corolario 3.2.7 en [3]. □

Sea  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y consideramos una base ortonormal de Gelfand-Tsetlin  $\{v_T : T \in \mathcal{T}(\rho)\}$  asociada a la torre libre de multiplicidad  $\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \cdots \leq \mathfrak{S}_n$ . Por simplicidad diremos simplemente una GZ-base.

Todo elemento  $v_T, T \in \mathcal{T}(\rho)$  es un autovector común para todos los operadores  $\hat{f}(\rho)$  con  $f \in GZ(n)$ . Del Corolario 4.23 tenemos que todo  $v_T$  es un autovector de  $\hat{\rho}(X_j)$  para todo  $j = 1, 2, \dots, n$ . Esto sugiere la siguiente definición: para todo  $v_T$  sea  $\alpha(T) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  donde  $a_j$  es el autovalor de  $\hat{\rho}(X_j)$  correspondiente a  $v_T$ , que es  $\hat{\rho}(X_j)v_T = a_j v_T, j = 1, 2, \dots, n$  y  $a_1 = 0$  pues  $X_1 = 0$ .

Como  $X_1, X_2, \dots, X_n$  generan el álgebra de Gelfand-Tsetlin  $GZ(n)$ , el Corolario 4.4 asegura que  $v_T$  está determinado, salvo un factor escalar por los autovalores  $a_j$ 's. El vector  $\alpha(T)$  es llamado el *peso* de  $v_T$ . En lo que sigue ponemos

$$\text{Spec}(n) = \{\alpha(T) : T \in \mathcal{T}(\rho), \rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n\}.$$

Como el subconjunto  $\{\alpha(T) : T \in \mathcal{T}(\rho)\}$  de  $\text{Spec}(n)$  determina los elementos, salvo escalares, de una GZ-base de  $V_\rho$ , tenemos

$$|\text{Spec}(n)| = \sum_{\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n} \dim V_\rho.$$

En otras palabras,  $\text{Spec}(n)$  es una biyección natural con el conjunto de todos los caminos del grafo de ramificación de  $\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \leq \mathfrak{S}_n$ . Denotamos por  $\alpha \mapsto T_\alpha, \alpha \in \text{Spec}(n)$  a esta correspondencia. También denotamos por  $v_\alpha$  al vector de la GZ-base correspondiente a  $T_\alpha$ .

**Nota 4.24.** En lo que sigue, si  $v_\alpha$  es un vector de la GZ-base de una representación  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  a  $\rho(s_i)v_\alpha$  y  $\rho(X_i)v_\alpha$  denotamos simplemente por  $s_i v_\alpha$  y  $X_i v_\alpha$ , respectivamente.

Ahora introducimos una relación de equivalencia en  $\text{Spec}(n)$  definiendo para  $\alpha, \beta \in \text{Spec}(n)$ ,  $\alpha \sim \beta$  si  $v_\alpha$  y  $v_\beta$  pertenecen a la misma representación irreducible de  $G$ , en términos del grafo de ramificación, esto significa que los correspondientes caminos  $T_\alpha$  y  $T_\beta$  tienen el mismo punto inicial.

Valen las siguientes relaciones de conmutatividad entre los elementos YJM y los generadores de Coxeter de  $G = \mathfrak{S}_n$ :  $s_i X_j = X_j s_i$  para  $j \neq i, i+1$  lo cual es obvio y  $s_i X_{i+1} = X_{i+1} s_i$  lo cual es equivalente a  $s_i X_i s_i + s_i = X_{i+1}$ , también es un resultado inmediato. Además, es importante tener en mente que  $\hat{\rho}(X_j)$  es autoadjunto pues  $X_j(g^{-1}) = X_j(g)$  para todo  $g \in G$ . De estos hechos se obtiene el siguiente resultado.

**Proposición 4.25.** *Sea  $\alpha = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n) \in \text{Spec}(n)$ . Entonces*

(i)  $a_i \neq a_{i+1}$  para  $i = 1, 2, \dots, n-1$

(ii)  $a_{i+1} = a_i \pm 1$  si y solo si  $s_i v_\alpha = \pm v_\alpha$ .

(iii) Si  $a_{i+1} \neq a_i \pm 1$  entonces  $\alpha' = s_i \alpha = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, a_i, \dots, a_n) \in \text{Spec}(n)$ ,  $\alpha \sim \alpha'$  y el vector asociado con  $\alpha'$  es, salvo un factor escalar,

$$v_{\alpha'} = s_i v_\alpha - \frac{1}{a_{i+1} - a_i} v_\alpha.$$



Más aún, el espacio  $\langle v_\alpha, v_{\alpha'} \rangle$  es invariante para  $X_i, X_{i+1}, s_i$ , y en las bases  $\{v_\alpha, v_{\alpha'}\}$  tenemos

$$X_i = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & a_{i+1} \end{pmatrix}, X_{i+1} = \begin{pmatrix} a_{i+1} & 0 \\ 0 & a_i \end{pmatrix}, s_i = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{i+1}-a_i} & 1 - \frac{1}{(a_{i+1}-a_i)^2} \\ 1 & \frac{1}{a_i-a_{i+1}} \end{pmatrix}.$$

*Demostración.* Ver Proposición 3.3.3 de [3]. □

**Ejemplo 4.26.** Las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_2$  son la representación trivial  $\text{tr}$  y la representación signo  $\text{sg}$ . Considerando que los elementos de YJM son  $X_1 = 0$  y  $X_2 = (1, 2)$  obtenemos los pesos  $\alpha = (0, 1)$  y  $\alpha' = (0, -1)$  para las representaciones  $\text{tr}$  y  $\text{sg}$ , respectivamente.

Ellas corresponden a los caminos  $T_\alpha = (\text{tr}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$  y  $T_{\alpha'} = (\text{sg}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$ . Las dos particiones de 2, a saber  $\rho = (2)$  y  $\rho' = (1, 1)$ . En cada caso hay solo un tableau estándar:

$$T_\alpha = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array} \quad T_{\alpha'} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$$

con contenidos  $C(T) = (0, 1)$  y  $C(T') = (0, -1)$ .

Por lo tanto  $\text{Spec}(2) = \text{Cont}(2)$ . Esto da una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de todos los caminos en el grafo de ramificación (parametrizados por  $\text{Spec}(2)$ ) y el conjunto de todos los caminos en  $\mathbb{Y}$  de longitud 2 parametrizados por  $\text{Cont}(2)$ , ver (4.5).

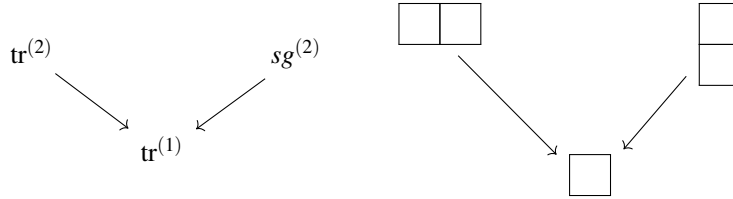


Figura 4.2: Isomorfismo de Grafos

Esta correspondencia es claramente un isomorfismo de grafos, Figura 4.2.

**Ejemplo 4.27.** Las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_3$  son la representación trivial  $\text{tr}$ , la representación signo  $\text{sg}$  y la representación estándar  $\text{st}$ . La representación estándar esta realizada en el espacio vectorial de dimensión dos

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 : x + y + z = 0\}$$

y  $\mathfrak{S}_3$  actuando por permutación de la entrada de sus elementos. Considerando que los elementos YJM son  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = (1, 2)$  y  $X_3 = (1, 3) + (2, 3)$  obtenemos los pesos  $\alpha = (0, 1, 2)$  y  $\alpha' = (0, -1, -2)$  para las representaciones  $\text{tr}$  y  $\text{sg}$ , respectivamente. Ellos corresponden a los caminos  $T_\alpha = (\text{tr}^{(3)} \rightarrow \text{tr}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$  y  $T_{\alpha'} = (\text{sg}^{(3)} \rightarrow \text{sg}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$ . La representación estándar tiene dos pesos  $\beta = (0, -1, 1)$  y  $\beta' = (0, 1, -1)$  correspondientes a los caminos  $T_\beta = (\text{st}^{(3)} \rightarrow \text{sg}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$  y  $T_{\beta'} = (\text{st}^{(3)} \rightarrow \text{tr}^{(2)} \rightarrow \text{tr}^{(1)})$ . Son las particiones de 3, a saber  $(3)$ ,  $(1, 1, 1)$  y  $(2, 1)$ . El conjunto  $\text{Tab}(3)$  de tableaux estándar consiste de

$$T_\alpha = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad T_{\alpha'} = \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array} \quad T_\beta = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \phantom{3} \\ \hline \end{array} \quad T_{\beta'} = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \phantom{2} \\ \hline \end{array}$$

con contenidos  $C(T_\alpha) = (0, 1, 2)$ ,  $C(T_{\alpha'}) = (0, -1, -2)$ ,  $C(T_\beta) = (0, -1, 1)$  y  $C(T_{\beta'}) = (0, 1, -1)$ . Por tanto  $\text{Spec}(3) = \text{Cont}(3)$ . Esto da una correspondencia biyectiva natural entre el conjunto de caminos en el grafo de ramificación (parametrizados por  $\text{Spec}(3)$ ) y el conjunto de todos caminos en  $\mathbb{Y}$  de longitud 3 parametrizados por  $\text{Cont}(3)$ , ver (4.5). Tenemos

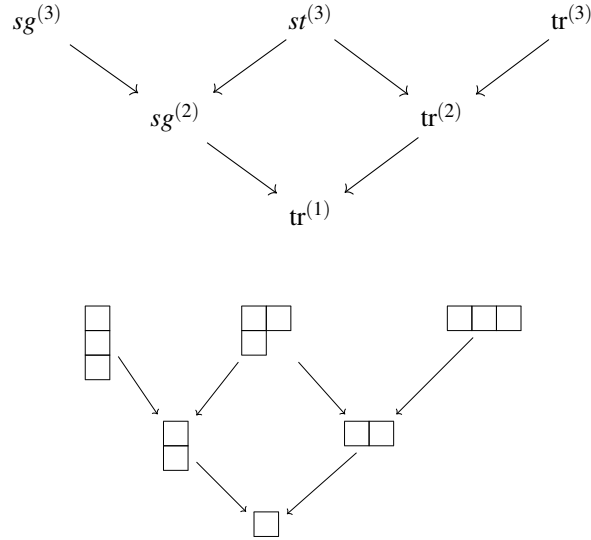


Figura 4.3: Isomorfismo de grafos

Esto muestra una correspondencia biyectiva entre los vértices y las filas de estos grafos. Esta correspondencia es claramente un isomorfismo de grafos.

Los resultados obtenidos en los casos particulares anteriores se generalizan a todo  $\mathfrak{S}_n$ . Si eliminamos la  $n$ -ésima caja de un tableau estándar  $T \in \text{Tab}(n)$  obtenemos un tableau  $S \in \text{Tab}(n-1)$ . Más aún, si  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  entonces  $C(S) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_{n-1}(T))$ .

Si  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \text{Spec}(n)$ , entonces  $\alpha' = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \text{Spec}(n-1)$ , entonces la Proposición 4.25 se sigue probando por inducción en  $n$  que  $\text{Spec}(n) \equiv \text{Cont}(n)$ . Esto también proporciona una correspondencia natural entre el conjunto de caminos en el grafo de ramificación (parametrizados por  $\text{Spec}(n)$ ) y el conjunto de todos los caminos en  $\mathbb{Y}$  parametrizados por  $\text{Cont}(n)$ , ver (4.5). Esto admite una correspondencia biyectiva entre el conjunto de vértices y de flechas de estos grafos.

**Teorema 4.28.** *Se cumple que  $\text{Spec}(n) = \text{Cont}(n)$ . Más aún, las relaciones de equivalencia  $\sim$  y  $\approx$  coinciden. Finalmente el grafo de Young  $\mathbb{Y}$  es isomorfo al grafo de ramificación de la torre libre de multiplicidad  $\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \mathfrak{S}_n$ .*

*Demostración.* Ver Teorema 3.3.7 de [3]. □

Del Teorema de arriba, obtenemos una correspondencia natural entre  $\hat{\mathfrak{S}}_n$  y el  $n$ -ésimo nivel del grafo de ramificación  $\mathbb{Y}$ , que es, el conjunto de todas las particiones de  $n$ .

Dada una partición  $\rho \vdash n$ , por simplicidad de la notación, denotaremos también por  $\rho$  la representación irreducible de  $\mathfrak{S}_n$  generada por los vectores  $\{v_\alpha\}$ , con  $\alpha \in \text{Spec}(n) \equiv \text{Cont}(n)$  correspondiente al tableau estándar de forma  $\rho$  y  $V_\rho$  denotará el espacio de esta representación.

En el siguiente resultado se determinan las subrepresentaciones de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  que aparecen en la restricción de una representación irreducible dada  $\rho$  en  $\mathfrak{S}_n$ .

**Corolario 4.29.** (Regla de ramificación ) Para toda  $\rho \vdash n$  tenemos

$$V_\rho = \bigoplus_{\substack{\mu \vdash n-1 \\ \rho \rightarrow \mu}} V_\mu,$$

que es, la suma corre sobre todas las particiones  $\mu \vdash n - 1$  que se pueden obtener de  $\rho$  removiendo una caja.

#### 4.4. Formas semi normal y ortogonal de Young

Recordemos que la torre

$$\mathfrak{S}_1 \leq \mathfrak{S}_2 \leq \dots \mathfrak{S}_n.$$

determina una descomposición de toda representación irreducible de  $\mathfrak{S}_n$  en subespacios de dimensión uno y que una GZ-base se obtiene eligiendo un vector de norma 1 en cada uno de estos subespacios. Note que los vectores son elegidos salvo un factor escalar de módulo uno.

Si  $\rho \vdash n$  y  $T \in \text{Tab}(\rho)$  denotamos por  $v_T$  el correspondiente vector en la GZ-base de  $V_\rho$ .

Para  $\rho \vdash n$  denotamos por  $T^\rho$  el tableau estándar de forma  $\rho$  donde la numeración va creciendo de izquierda a derecha en cada fila del diagrama. Por ejemplo, si  $\rho = (4, 2, 1) \vdash 7$ , tenemos

$$T^\rho = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

Sin embargo, usando la Proposición 4.25 uno puede probar el siguiente hecho.

**Proposición 4.30.** Es posible escoger los factores escalares de los vectores  $\{v_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  de tal forma que, para todo  $T \in \text{Tab}(\rho)$ , uno tiene

$$\pi_T^{-1} v_{T^\rho} = v_T + \sum_{\substack{S \in \text{Tab}(\rho) \\ \ell(\pi_S) < \ell(\pi_T)}} \gamma_S v_S,$$

donde  $\gamma_R \in \mathbb{C}$  y  $\pi_T \in \mathfrak{S}_n$  es la única permutación tal que  $\pi_T T = T^\rho$ .

*Demostración.* Ver la Proposición 3.4.1 de [3]. □

**Teorema 4.31. Forma seminormal de Young.** Escogemos los vectores de una GZ-base ortogonal de  $V_\rho$  de acuerdo a la Proposición anterior. Si  $T \in \text{Tab}(\rho)$  y  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  es su contenido, recordando que  $\text{Spec}(n) \equiv \text{Cont}(n)$  entonces la transposición adyacente  $s_i$  actúa sobre  $v_T$  del siguiente modo

- (i) Si  $c_{i+1}(T) = c_i(T) \pm 1$  entonces  $s_i v_T = \pm v_T$ .
- (ii) Cuando  $c_{i+1}(T) \neq c_i(T) \pm 1$ , poniendo  $T' = s_i T$ , entonces

$$v_T = \begin{cases} \frac{1}{c_{i+1}(T) - c_i(T)} v_T + v_{T'} & \text{si } \ell(\pi_{T'}) > \ell(\pi_T), \\ \frac{1}{c_{i+1}(T) - c_i(T)} v_T + \left(1 - \frac{1}{(c_{i+1}(T) - c_i(T))^2}\right) v_{T'} & \text{si } \ell(\pi_{T'}) < \ell(\pi_T). \end{cases}$$

*Demostración.* Ver [3], Teorema 3.4.2. □

Podemos escoger normalizar la base  $\{v_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  tomando  $w_T = \frac{v_T}{\|v_T\|}$ , donde  $\|\cdot\|$  esta asociado con un producto interno invariante que hace de  $V_\rho$  una representación unitaria de  $\mathfrak{S}_n$ .

Sea  $T$  un tableau estándar y sea  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  el contenido del tableau  $T$ . Dados  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la *distancia axial* desde  $j$  a  $i$  en  $T$  es el entero  $c_j(T) - c_i(T)$  y se denota por  $r_T(j, i)$ .

Esta distancia tiene un significado claramente geométrico: Asumiendo que nos movemos desde  $j$  a  $i$ , cada paso hacia la izquierda o hacia abajo se cuenta  $+1$ , mientras que cada paso hacia la derecha o hacia arriba se cuenta  $-1$ . Entonces el entero resultante es exactamente  $c_j(T) - c_i(T)$  y es independiente de la elección del camino elegido, ver la Figura 4.4. El siguiente resultado es consecuencia directa del Teorema 4.31.

$$T = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 4 & & \\ \hline 7 & & & \\ \hline \end{array}$$

Figura 4.4:  $c_5(T) - c_7(T) = 4$ ,  $c_2(T) - c_6(T) = -4$ .

**Teorema 4.32. Forma ortogonal de Young** Dando la GZ-base  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  elegida en el Teorema 4.31 y normalizada, tenemos

$$s_i w_T = \frac{1}{r_T} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r_T^2}} w_{s_i T}$$

donde,  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$ , es el contenido de algún tableau  $T \in \text{Tab}(\rho)$  y  $r_T = r_T(i+1, i) = c_{i+1}(T) - c_i(T)$  es la distancia axial en  $T$  desde  $i+1$  a  $i$ .

*Demostración.* Ver la Proposición 3.4.4 de [3]. □

## Propiedades del par $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$ .

En este capítulo consideramos el grupo  $G = \mathfrak{S}_n$  y el subgrupo  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  cuando  $2m \leq n$ . Establecemos propiedades de este par y nos concentramos en la descomposición de un  $G$ -módulo en  $K$ -submódulos. Pondremos especial atención en los casos  $m = 1$  y  $m = 2$ , para los cuales también consideramos la descomposición de  $K$ -módulos en submódulos de otros subgrupos destacados de  $K$  y daremos bases para las componentes isotípicas.

### 5.1. El Par $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$

En el Capítulo 4 hicimos una revisión del grupo simétrico de  $n$  elementos y de las propiedades que necesitamos. Sean  $G = \mathfrak{S}_n$  y  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ , donde  $\mathfrak{S}_{n-m}$  y  $\mathfrak{S}_m$  son, respectivamente, los subgrupos de  $G$  de todas las permutaciones de  $\{1, \dots, n-m\}$  y de  $\{n-m+1, \dots, n\}$ , para  $1 \leq m \leq n-m$ . Consideramos el subconjunto

$$A = \{x_0, \dots, x_m\} \subset G$$

donde la sucesión finita  $\{x_i\}$  está definida inductivamente por:

$$x_0 = (1) \quad \text{y} \quad x_i = (n-m-i+1, n-m+i)x_{i-1} \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, m.$$

Observamos que  $A$  es un conjunto de permutaciones que conmutan entre sí.

**Lema 5.1.** Como conjuntos  $\mathfrak{S}_n = (\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)A(\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$ .

*Demostración.* Sea  $X$  el conjunto de todos los subconjuntos de  $n-m$  elementos de  $\{1, \dots, n\}$ . Consideremos la acción

$$\mathfrak{S}_n \times X \rightarrow X, \quad \text{dada por} \quad \sigma \cdot \{i_1, i_2, \dots, i_{n-m}\} = \{\sigma(i_1), \sigma(i_2), \dots, \sigma(i_{n-m})\},$$

esta acción es transitiva. El subgrupo de isotropía de  $O_0 = \{1, \dots, n-m\} \in X$  es  $K$ . Sea  $p : G \rightarrow X$  la aplicación proyección  $p(\pi) = \pi(O_0)$ . Las  $K$ -órbitas en  $X$  son los subconjuntos de todos los conjuntos con el mismo número de elementos en  $O_0$ . Vamos a considerar los siguientes conjuntos de  $n-m$  elementos:

$$\begin{aligned} O_0 &= \{1, \dots, n-m-1, n-m\}, \\ O_1 &= \{1, \dots, n-m-1, n-m+1\}, \\ O_2 &= \{1, \dots, n-m-2, n-m+1, n-m+2\}, \\ &\vdots \\ O_m &= \{1, \dots, n-2m, n-m+1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Tenemos  $O_i = \{1, \dots, n-m-i, n-m+1, \dots, n-m+i\} = (n-m-i+1, n-m+i)O_{i-1}$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Así por inducción se sigue que  $O_i = x_i O_0$  para todo  $i = 0, \dots, m$ .

Así  $X = K(O_0) \cup \dots \cup K(O_m)$ , unión disjunta. Dando  $\pi \in G$  tenemos que  $p(\pi) \in K(O_i)$  para algún  $i = 0, \dots, m$ . De ahí  $p(\pi) \in Kx_i O_0$  y  $\pi \in Kx_i K$ .

Esto completa la demostración.  $\square$

Consideremos la acción por conjugación de  $\mathfrak{S}_n$  en  $\mathfrak{S}_n$ , dada por  $\sigma \cdot \pi = \sigma \pi \sigma^{-1}$ . Denotemos por  $M$  al *centralizador de A en K* bajo esta acción, es decir

$$M = \text{cent}_K(A) = \{\sigma \in K : \sigma x_i \sigma^{-1} = x_i, \text{ para todo } i = 0, 1, 2, \dots, m\}.$$

En la siguiente Proposición interviene el subgrupo  $\mathfrak{S}_{n-2m}$  que está conformado por las permutaciones  $\pi$  de  $\mathfrak{S}_n$  tales que  $\pi(i) = i$  para toda  $i = n-2m+1, \dots, n$ . Si  $n = 2m$ , entonces  $\mathfrak{S}_{n-2m} = \mathfrak{S}_0 = (1)$ .

**Proposición 5.2.** *Dado  $M = \text{cent}_K(A)$ , se satisface que  $M = \mathfrak{S}_{n-2m}$ .*

*Demostración.* Asumimos que  $\pi \in K$  satisface  $\pi x_i \pi^{-1} = x_i$  para todo  $i = 0, \dots, m$ , equivalentemente

$$\begin{aligned} \pi(n-m-i+1, n-m+i)\pi^{-1} &= \left( \pi(n-m-i+1), \pi(n-m+i) \right) \\ &= (n-m-i+1, n-m+i) \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

ya que  $x_i = (n-m-i+1, n-m+i)x_{i-1}$ .

De ahí que  $\pi(n-m-i+1) = n-m-i+1$  y  $\pi(n-m+i) = n-m+i$ , dado que  $\pi \in K$ . Esto completa la demostración.  $\square$

Respecto a la restricción de representaciones de  $\mathfrak{S}_n$  al subgrupo  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ . Recordemos que dado un subgrupo  $K$  de  $G$ , se dice que el par  $(G, K)$  es libre de multiplicidad si cualquier representación de  $G$  es libre de multiplicidad como  $K$ -módulo.

**Teorema 5.3.** *El par  $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m)$  es libre de multiplicidad si y solo si  $m = 1, 2$ .*

*Demostración.* Se deduce del Teorema 3.48 y de la Proposición 3.51.  $\square$

Cuando  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  con  $m \neq 1, 2$  las reglas de Littlewood-Richardson, que se describen en la siguiente sección, nos proporcionan la multiplicidad de las representaciones irreducibles de  $K$  que aparecen en una representación irreducible dada de  $G$ .

## 5.2. Restricción de $\mathfrak{S}_n$ -módulos.

En esta sección enunciamos las reglas de Littlewood-Richardson que nos permite determinar la multiplicidad de las representaciones irreducibles de  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  que aparecen en la descomposición de una representación irreducible de  $G = \mathfrak{S}_n$  en  $K$ -submódulos. Esto lo consiguen mediante un algoritmo combinatorio.

Posteriormente determinamos la descomposición de representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_n$  considerando los subgrupos  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$ , para  $m = 1, 2$  empleando un procedimiento distinto e independiente de las reglas mencionadas.

### 5.2.1. Regla de Littlewood - Richardson

Dada una representación irreducible  $(\rho, V_\rho)$  de  $\mathfrak{S}_n$  nos interesa saber cuales son las representaciones irreducibles de  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  que aparecen en la restricción de  $\rho$  a  $K$  y la multiplicidad de ellas. Recordemos que las representaciones irreducibles del grupo  $K = \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m$  son de la forma

$$\pi = \mu \otimes \nu$$

donde  $\mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-m}$  y  $\nu \in \hat{\mathfrak{S}}_m$ .

Sea  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  entonces

$$\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_n} (V_\rho) \simeq \bigoplus_{\substack{\mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-m} \\ \nu \in \hat{\mathfrak{S}}_m}} m_{\mu \otimes \nu}(\rho) V_\mu \otimes V_\nu, \quad (5.1)$$

Los multiplicidades  $m_{\mu \otimes \nu}(\rho)$  son los llamados coeficientes de *Littlewood-Richardson* y se describen de manera combinatoria en las reglas de Littlewood-Richardson que enunciaremos.

Recordemos algunos conceptos: Dados  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_k) \vdash n$  y  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_s) \vdash m$ .

- Decimos que  $\mu$  está contenido en  $\rho$ , y denotamos por  $\mu \preceq \rho$  si  $m \leq n$  y  $\mu_i \leq \rho_i$  para cualquier  $i = 1, \dots, s$ . Pensamos a  $\mu$  dentro de  $\rho$  de tal manera que la caja  $(1, 1)$  de  $\mu$  coincida con la caja  $(1, 1)$  de  $\rho$ .
- El diagrama complementario  $\rho \setminus \mu$ , es el diagrama obtenido removiendo los cuadrados de  $\mu$  puestos en el diagrama de Young de  $\rho$ .

En lo que sigue enunciamos el procedimiento para la interpretación combinatoria de los números  $m_{\mu \otimes \nu}(\rho)$ . La demostración de que estos números son las multiplicidades respectivas la podemos encontrar en el Corolario 6.1.35 pág. 293 [3]. Sean  $\rho \vdash n$ ,  $\mu \vdash m$  y  $\nu \vdash (n - m)$ , digamos  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)$ .

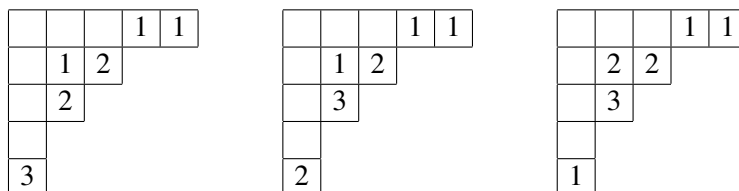
Si no se cumple que  $\mu \preceq \rho$  y  $\nu \preceq \rho$  tendremos  $m_{\mu \otimes \nu}(\rho) = 0$ .

El *coeficiente de Littlewood-Richardson*  $m_{\mu \otimes \nu}(\rho)$  es el número de formas de escribir en el diagrama complementario  $\rho \setminus \mu$   $\nu_1$  veces el número 1,  $\nu_2$  veces el número 2, ...,  $\nu_k$  veces el número  $k$ , satisfaciendo las siguientes condiciones:

1. Para cada fila los números son no decrecientes de izquierda a derecha.
2. Para cada columna, los números son estrictamente crecientes de arriba hacia abajo.
3. Al leer los números de la primera fila de derecha a izquierda y a continuación leer los números de la segunda fila de derecha a izquierda y así sucesivamente, armamos una sucesión de longitud  $n - m$ , digamos  $i_1, i_2, \dots, i_{n-m}$ . Esta sucesión satisface la siguiente condición:

Para cualquier  $r$ , la multiplicidad de 1 en la sucesión  $i_1, i_2, \dots, i_r$  es mayor o igual a la multiplicidad de 2 en la sucesión  $i_1, i_2, \dots, i_r$  y esta es mayor o igual a la multiplicidad de 3 en la sucesión  $i_1, i_2, \dots, i_r$  y continuamos con estas comparaciones.

Por ejemplo para  $\rho = (5, 3, 2, 1, 1)$ ,  $\mu = (3, 1, 1, 1)$  y  $\nu = (3, 2, 1)$  tenemos  $m_{\mu \otimes \nu}(\rho) = 3$  pues



### 5.2.2. Descomposición de $\mathfrak{S}_n$ -módulos a $\mathfrak{S}_{n-1}$ y $\mathfrak{S}_{n-2}$ módulos.

Dado  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ , veremos un procedimiento, independiente de las reglas de Littlewood - Richardson, para descomponer el espacio de la representación  $V_\rho$  como subrepresentaciones de  $K$  cuando  $K = \mathfrak{S}_{n-1}$  y  $M = \mathfrak{S}_{n-2}$ .

Consideremos  $K = \mathfrak{S}_{n-1} \times \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{n-1}$  y  $M = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_1 \times \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{n-2}$ . Por el Teorema 5.3 sabemos que los pares  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$  y  $(\mathfrak{S}_{n-1}, \mathfrak{S}_{n-2})$  son libres de multiplicidad. Por tanto dada  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  la descomposición de  $V_\rho$ , como subrepresentaciones irreducibles de  $K$  es

$$V_\rho = \bigoplus_{\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}} m_\pi(\rho) V_\pi, \quad (5.2)$$

con  $m_\pi(\rho) \leq 1$  para todo  $\pi \in \hat{K}$ . De la misma forma cuando consideramos el par  $(\mathfrak{S}_{n-1}, \mathfrak{S}_{n-2})$ . Dada  $\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}$  tal que  $m_\pi(\rho) = 1$ , la descomposición de  $V_\pi$ , como subrepresentaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_{n-2}$  es

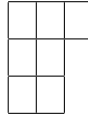
$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}} m_\sigma(\pi) V_\sigma, \quad (5.3)$$

con  $m_\sigma(\pi) \leq 1$ .

**Nota 5.4.** Recordemos que dado un diagrama de Young  $[\rho]$ , la caja de coordenadas  $(i, j)$  se dice que es removible si en las posiciones  $(i+1, j)$  y  $(i, j+1)$  no hay cajas. Esto significa que removiendo una tal caja el correspondiente diagrama es todavía un diagrama de Young, asociado con una partición de  $(n-1)$ .

Así que en términos de diagramas de Young en la descomposición de  $V_\rho$  hay tantas representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  como cajas removibles tiene el diagrama de Young de  $\rho$ .

**Ejemplo 5.5.** Sean  $G = \mathfrak{S}_7$ , consideremos  $\rho = (3, 2, 2) \vdash 7$ , tiene diagrama de Young asociado



Las representaciones irreducibles de  $K = \mathfrak{S}_6$  que aparecen en  $\rho$  tienen los siguientes diagramas de Young asociados

$$\pi = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \pi_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}$$

Consideramos ahora las descomposiciones de  $\pi$  y de  $\pi_1$  en  $M$ -módulos.

La única representación irreducible de  $M$  en  $\pi$  es  $\sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}$ , mientras que en para  $\pi_1$  tenemos

$$\sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad \sigma_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \sigma_2 = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}.$$

Por tanto

$$Res_{\mathfrak{S}_6}^{\mathfrak{S}_7}(\rho) = \pi \oplus \pi_1 \quad \text{y} \quad Res_{\mathfrak{S}_5}^{\mathfrak{S}_6}(\rho) = (\sigma) \oplus (\sigma \oplus \sigma_1 \oplus \sigma_2).$$

Notemos que la multiplicidad de  $V_\sigma$  es 2 en  $V_\rho$ , es decir, el par  $(\mathfrak{S}_7, \mathfrak{S}_5)$  no es libre de multiplicidad.



**5.2.3. Descomposición de  $\mathfrak{S}_n$ -módulos en  $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ -módulos.**

Dado  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ , consideremos ahora el caso  $m = 2$ , es decir,  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ , entonces, así como hicimos antes, determinaremos la descomposición de  $V_\rho$  como  $K$ -subrepresentaciones, con un procedimiento diferente al de las reglas de Littlewood-Richardson,

Por el Teorema 5.3 el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$  es libre de multiplicidad, como en la sección anterior para  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  la descomposición de  $V_\rho$ , como subrepresentaciones irreducibles de  $K$  es

$$V_\rho = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} m_\pi(\rho) V_\pi,$$

con  $m_\pi(\rho) \leq 1$  para todo  $\pi \in \hat{K}$ .

Las representaciones irreducibles de  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  son de la forma  $\mu \otimes \delta$  donde  $\mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}$ , y  $\delta \in \hat{\mathfrak{S}}_2$ . Para determinar las representaciones  $\pi = \mu \otimes \delta \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  comenzamos describiendo las representaciones  $\mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}$  tales que  $\mu \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ .

La representación  $\mu$  está contenida en  $Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  si y solo si existe un camino en  $\mathbb{Y}$  de  $\rho$  a  $\mu$ . Esto es equivalente a afirmar que  $\mu \preceq \rho$  ó que el diagrama de Young de  $\mu$  se obtiene borrando dos cajas removibles del diagrama de Young de  $\rho$ . Si  $V_{(\mu)}$  es la  $\mathfrak{S}_{n-2}$ -componente isotípica de la representación  $\mu$  en  $Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Veremos que la multiplicidad de  $\mu$  es a lo más dos.

Sea  $\mathcal{T}_{\rho, \mu}$  el conjunto de tableaux estándares  $T$  asociados a caminos de la forma

$$\rho_n \rightarrow \rho_{n-1} \rightarrow \rho_{n-2} \rightarrow \rho_{n-3} \rightarrow \cdots \rightarrow \rho_1.$$

con  $\rho_n = \rho$ ,  $\rho_{n-2} = \mu$  y  $\rho_i$  arbitrarios para  $i \neq n, n-2$ . Es decir, todos los caminos de  $\prod_n(\mathbb{Y})$  que pasan por  $\rho$  y por  $\mu$ .

Recordemos que  $r_T(n, n-1)$  es la distancia axial entre  $n$  y  $n-1$ . Para cualquier tableau  $T$  estándar tenemos que  $r_T(n, n-1) \neq 0$ .

**Definición 5.6.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\mu \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Definimos  $\mathcal{T}_{\rho, \mu}^\pm$  de la siguiente forma

$$\mathcal{T}_{\rho, \mu}^+ = \{T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu} : r_T(n, n-1) > 0\}, \quad \mathcal{T}_{\rho, \mu}^- = \{T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu} : r_T(n, n-1) < 0\}.$$

Tenemos

$$\mathcal{T}_{\rho, \mu} = \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+ \cup \mathcal{T}_{\rho, \mu}^-.$$

Dado  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , recordemos que  $s_{n-1}T$  es el tableau que tiene intercambiados los números  $n$  y  $n-1$  (si es admisible). Entonces los caminos asociados a  $T$  y  $s_{n-1}T$  sólo difieren entre si en el lugar  $n-1$  del camino. Se cumple que el tableau  $s_{n-1}T = (n, n-1)T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$  si y solo si  $n$  y  $n-1$  están en distintas filas y en distintas columnas del diagrama de Young de  $\rho$ , esto a su vez es equivalente a que  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$ , en este caso

$$T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+ \quad \text{si y solo si} \quad s_{n-1}T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^-$$

Estamos listos para caracterizar la multiplicidad con la que puede aparecer  $\mu$  en  $Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ .

**Proposición 5.7.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\mu \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ . Entonces

- i) La multiplicidad de  $\mu$  en  $\rho$  es 1, si y solo si  $r_T(n, n-1) = \pm 1$ .
- ii) La multiplicidad de  $\mu$  en  $\rho$  es 2, si y solo si  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$ .

*Demostración.* Sea  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , si  $r_T(n, n-1) = \pm 1$ , entonces  $n$  y  $n-1$  están en la misma fila o en la misma columna, en cualquiera de esos casos el tableau  $s_{n-1}T$  no es estándar, por lo tanto  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+$  o  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^-$ .

Si  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  en una GZ-base de  $V_\rho$  elegida según el Teorema 4.32 entonces tenemos que o  $\{w_T : T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+\}$   $\{w_T : T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^-\}$  es una base de  $V_\mu$ , pero no ambas, esto significa que la multiplicidad de  $\mu$  es 1.

Finalmente, si  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$  entonces el tableau  $s_{n-1}T = (n, n-1)T$  esta en  $\mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , entonces

$$\{w_T : T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+\} \quad \text{y} \quad \{w_T : T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^-\},$$

son bases de  $V_\mu$  (simultáneamente). Esto significa que la multiplicidad de  $\mu$  es 2.  $\square$

Para representaciones en  $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  tenemos el siguiente resultado

**Proposición 5.8.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\mu \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ .

- i) Si  $r_T(n, n-1) = 1$  entonces  $\mu \otimes tr \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,
- ii) Si  $r_T(n, n-1) = -1$  entonces  $\mu \otimes sg \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,
- iii) Cuando  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$  tenemos que  $\mu \otimes tr$  y  $\mu \otimes sg \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ .

*Demostración.* Si  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  es el contenido de  $T$ , entonces

$$r_T(n, n-1) = c_n(T) - c_{n-1}(T) = j(n) - i(n) - i(n-1) + i(n-1),$$

por lo tanto cuando  $r_T(n, n-1) = 1$ , tenemos  $j(n) + i(n-1) = j(n-1) + i(n) + 1$ .

Hay tres posibilidades: Cuando  $i(n-1) > i(n)$  o  $i(n-1) < i(n)$ , entonces  $j(n) \leq j(n-1)$  lo cual es imposible pues  $T$  es un tableau estándar.

Finalmente Si  $i(n-1) = i(n)$ , entonces  $j(n) = j(n-1) + 1$  lo cual es posible y esta dibujado abajo

$$\begin{array}{|c|c|} \hline n-1 & n \\ \hline \end{array} \quad (5.4)$$

Sabemos que la forma del diagrama (5.4) corresponde a la representación trivial de  $\mathfrak{S}_2$ .

Vamos a considerar el caso  $c_n(T) = c_{n-1}(T) - 1$ , entonces  $j(n) + i(n-1) = j(n-1) + i(n) - 1$ .

Cuando  $j(n-1) > j(n)$  o  $j(n-1) < j(n)$ , entonces  $i(n-1) \geq i(n)$  lo cual es imposible pues  $T$  es un tableau estándar.

Finalmente Si  $j(n-1) = j(n)$ , entonces  $i(n) = i(n-1) + 1$  lo cual es posible y está dibujado abajo

$$\begin{array}{|c|} \hline n-1 \\ \hline n \\ \hline \end{array} \quad (5.5)$$

Sabemos que la forma del diagrama de Young de la ecuación anterior corresponde a la representación signo de  $\mathfrak{S}_2$ . El caso que falta analizar es  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$ , por la proposición anterior  $\mu$  tiene multiplicidad 2, en este caso, basta recordar que el par  $(G, K)$  es libre de multiplicidad. Esto completa la demostración.  $\square$

Dada  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  una GZ-base de  $V_\rho$  elegida según el Teorema 4.32, definimos bases adecuadas de los espacios de las representaciones  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ .

**Definición 5.9.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\mu \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\pi = \mu \otimes \delta$ . Para  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , definimos

$$\bar{u}_{T, \pi} = w_T + \delta(\pi) s_{n-1} w_T \quad \text{y} \quad u_{T, \pi} = \frac{\bar{u}_{T, \pi}}{\|\bar{u}_{T, \pi}\|} \quad \text{con} \quad \delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \mu \otimes tr \\ -1 & \text{si } \pi = \mu \otimes sg \end{cases},$$

Por la forma ortogonal de Young (FOY), ver Teorema 4.32, tenemos

$$\bar{u}_{T, \pi} = w_T + \delta(\pi) \frac{1}{s} w_T + \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1} T} = \left(1 + \delta(\pi) \frac{1}{s}\right) w_T + \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1} T}. \quad (5.6)$$

El conjunto

$$\mathcal{B}_{\mu, \pi} = \{u_{T, \pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}^{\pm}\}. \quad (5.7)$$

es una base de  $V_{\mu \otimes \delta}$ .

Consideramos el siguiente ejemplo para aclarar conceptos y notación.

Por simplicidad, cuando  $\delta(\pi) = 1$  denotaremos a  $u_{T, \pi}$  por  $u_{T, 1}$ , de forma similar si  $\delta(\pi) = -1$  denotaremos a  $u_{T, \pi}$  por  $u_{T, -1}$ .

**Ejemplo 5.1**

Sea  $\rho = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \in \hat{\mathfrak{S}}_7$ , las representaciones de  $\mathfrak{S}_5$  que están en  $Res_{\mathfrak{S}_5}^{\mathfrak{S}_7}(\rho)$  son

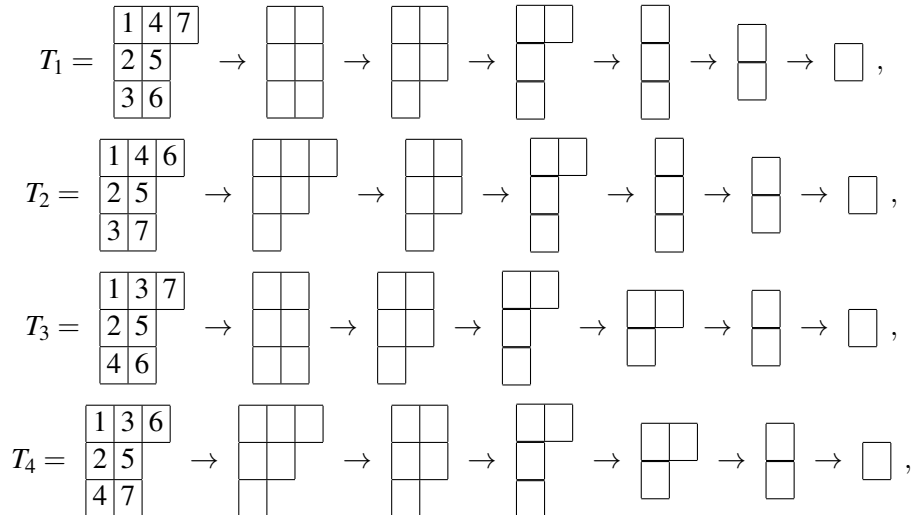
$$\mu = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \quad \mu_1 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad \mu_2 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Si  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , tenemos que  $r_T(n, n-1) = 3 \neq \pm 1$ , por lo tanto,  $V_{(\mu)} = V_{\mu} \oplus V_{\mu} = V_{\mu \otimes tr} \oplus V_{\mu \otimes sg}$ . Para  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu_1}$ ,  $r_T(n, n-1) = 1$ , por lo tanto  $V_{(\mu_1)} = V_{\mu_1 \otimes tr}$ . Finalmente para  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu_2}$ , tenemos que  $r_T(n, n-1) = -1$ , entonces  $V_{(\mu_2)} = V_{\mu_2 \otimes sg}$ .

Tenemos la siguiente descomposición de  $V_{\rho}$  en  $\mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{S}_2$ -módulos irreducibles

$$V_{\rho} = V_{\mu \otimes tr} \oplus V_{\mu \otimes sg} \oplus V_{\mu_1 \otimes tr} \oplus V_{\mu_2 \otimes sg}.$$

Los caminos de submódulos que pasan por  $\rho$  y por  $\mu$  son:



$$\begin{aligned}
T_5 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\
T_6 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\
T_7 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\
T_8 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\
T_9 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\
T_{10} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & 7 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array},
\end{aligned}$$

Tenemos que

$$\mathcal{T}_{\rho, \mu} = \{T_1, T_2, \dots, T_{10}\}, \mathcal{T}_{\rho, \mu}^+ = \{T_1, T_3, T_5, T_7, T_9\} \text{ y } \mathcal{T}_{\rho, \mu}^- = \{T_2, T_4, T_6, T_8, T_{10}\}.$$

Además  $\{u_{T_i, \mu \otimes tr} : i = 1, 3, 5, 7, 9\}$  es base de  $V_{\mu \otimes tr}$  y  $\{u_{T_i, \mu \otimes sg} : i = 2, 4, 6, 8, 10\}$  es base de  $V_{\mu \otimes sg}$ , mientras que

$$\{u_{T_i, \mu \otimes tr} : i = 1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{u_{T_i, \mu \otimes sg} : i = 2, 4, 6, 8, 10\},$$

es base de  $V_{\mu \otimes tr} \oplus V_{\mu \otimes sg}$ .

#### 5.2.4. Descomposición de representaciones de $K$ como $M \times \mathfrak{S}'_2$ -módulos

En el Capítulo 7 será necesario considerar la descomposición de  $K$ -módulos en subrepresentaciones del grupo  $M \times \mathfrak{S}'_2$ , donde  $M = \text{cent}_K(A) = \mathfrak{S}_{n-4}$  y  $\mathfrak{S}'_2$  es el grupo de permutaciones de  $\{n-3, n-2\}$ . Notemos que  $M \times \mathfrak{S}'_2 \leq \mathfrak{S}_{n-2}$ .

**Lema 5.10.** *El subgrupo  $M \times \mathfrak{S}'_2 = \mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2$  es libre de multiplicidad en  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ .*

*Demostración.* Toda representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  es de la forma

$$\pi = \mu \otimes \delta \quad \text{donde} \quad \mu \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2} \text{ y } \delta \in \hat{\mathfrak{S}}_2.$$

Entonces  $V_\pi \simeq V_\mu$ , como  $\mathfrak{S}_{n-2}$ -módulos. Por el Teorema 5.3 el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$  es libre de multiplicidad, entonces también lo es el par  $(\mathfrak{S}_{n-2}, \mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2)$ .  $\square$

Dada  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ , sea  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  determinamos cuáles son las representaciones irreducibles de  $M \times \mathfrak{S}'_2$  que aparecen en  $\text{Res}_{M \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ .

Toda representación en  $M \times \mathfrak{S}'_2$  es de la forma  $\tau = \sigma \otimes \varepsilon$  donde  $\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-4}$ , y  $\varepsilon$  es representación irreducible de  $\mathfrak{S}'_2$ . Por el Lema 5.10 toda  $\sigma \otimes \varepsilon$  en  $\text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  tiene multiplicidad 1. Primero determinaremos las representaciones  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}(\mu)$ .

La representación  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}(\mu)$  si y solo si existe un camino en  $\mathbb{Y}$  de  $\mu$  a  $\sigma$ . Esto es equivalente a afirmar que  $\sigma \preceq \mu$  o que el diagrama de Young de  $\sigma$  se obtiene borrando dos cajas removibles del diagrama de Young de  $\mu$ . Sean  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}(\mu)$ , si  $T$  es un tableau cuyo camino asociado pasa por  $\rho, \mu$  y  $\sigma$ , denotamos por  $r_T(i, j)$  la distancia axial de  $i$  a  $j$  en el tableau  $T$ .

Por la Proposición 5.7 para  $n-2$  y  $n-4$  obtenemos que

- i) La multiplicidad de  $\sigma$  en  $\mu$  es 1 si y solo si  $r_T(n-2, n-3) = \pm 1$ ,
- ii) La multiplicidad de  $\sigma$  en  $\mu$  es 2, si y solo si  $r_T(n-2, n-3) \neq \pm 1$ .

Por la Proposición 5.8, tomando  $n-2$  y  $n-4$  en vez de  $n$  y  $n-2$  obtenemos

- iii) Si  $r_T(n-2, n-3) = 1$  entonces  $\sigma \otimes tr \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ ,
- iv) Si  $r_T(n-2, n-3) = -1$  entonces  $\sigma \otimes sg \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ ,
- v) Cuando  $r_T(n-2, n-3) \neq \pm 1$  entonces  $\sigma \otimes tr$  y  $\sigma \otimes sg \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ .

Consideraremos tableaux cuyos caminos asociados pasen por  $\rho, \mu$  y  $\sigma$ , extendemos de forma natural las definiciones de  $\mathcal{T}_{\rho, \mu}$  y  $\mathcal{T}_{\rho, \mu}^\pm$ .

**Definición 5.11.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\sigma \otimes \varepsilon \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ , denotamos por  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$  el conjunto de tableaux estándares cuyos caminos asociados pasan por  $\rho, \mu$  y  $\sigma$ .

Cuando  $\varepsilon$  sea la representación trivial de  $\mathfrak{S}'_2$  tenemos que

$$\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{\pm, +} = \{T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^\delta : r_T(n-2, n-3) > 0\},$$

y si  $\varepsilon$  es la representación signo de  $\mathfrak{S}'_2$  tenemos que  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{\pm, -} = \{T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^\delta : r_T(n-2, n-3) < 0\}$ .

A continuación introducimos la notación necesaria para clasificar, según su multiplicidad, a las representaciones  $\sigma \in \hat{M}$  que aparecen en los caminos asociados a tableaux  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$ .

**Definición 5.12.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ , definimos

- i)  $\mathcal{I}_1 = \{\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi) : m_\sigma(\mu) = 1\}$ ,  $\mathcal{I}_2 = \{\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi) : m_\sigma(\mu) = 2\}$ ,
- ii)  $\mathcal{I}_{1,1} = \{\sigma \in \mathcal{I}_1 : \sigma \otimes tr \in \text{Res}_{M \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)\}$ ,  $\mathcal{I}_{1,-1} = \{\sigma \in \mathcal{I}_1 : \sigma \otimes sg \in \text{Res}_{M \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)\}$ .

Con las consideraciones previas tenemos la descomposición de  $V_\pi$  como suma de  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -subrepresentaciones irreducibles.

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_{1,1}} V_{\sigma \otimes tr} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_{1,-1}} V_{\sigma \otimes sg} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_2} V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}, \quad (5.8)$$

### 5.2.5. Bases de las componentes isotópicas de representaciones de $\mathfrak{S}_{n-4}$ .

Recordemos, si  $\pi = \mu \otimes \delta$  en la Definición 5.9 dimos bases de  $V_\pi$  conformadas por los vectores

$$\bar{u}_{T,\pi} = w_T + \delta(\pi)s_{n-1}w_T \quad \text{y} \quad u_{T,\pi} = \frac{\bar{u}_{T,\pi}}{\|\bar{u}_{T,\pi}\|} \quad \text{con} \quad \delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = tr \\ -1 & \text{si } \delta = sg \end{cases},$$

Dado  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}(\mu)$ , cuando  $\sigma \in \mathcal{I}_{1,1} \cup \mathcal{I}_{1,-1}$  la multiplicidad de  $\sigma$  es 1, por tanto

$$\{u_{T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}\} \quad \text{es base de} \quad V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes \varepsilon}.$$

Ahora consideraremos  $\sigma \in \mathcal{I}_2$  y determinaremos dos bases de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$ , que nos servirán en el Capítulo 7.

Por el Teorema 5.3 sabemos que el subgrupo  $\mathfrak{S}_{n-3}$  es libre de multiplicidad en  $\mathfrak{S}_{n-2}$  y  $\mathfrak{S}_{n-4}$  es libre de multiplicidad en  $\mathfrak{S}_{n-3}$ , existen dos representaciones  $v_1$  y  $v_2$  en  $Res_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes \delta)$  tales que  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_1)$  y  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_2)$ , además, si  $V_\sigma^1$  y  $V_\sigma^2$  denotan las componentes isotópicas de  $\sigma$  en  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente, entonces

$$V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg} = V_\sigma^1 \oplus V_\sigma^2.$$

Notemos que si  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}$  es un tableau cuyo camino asociado pasa por  $v_1$ , entonces  $s_{n-3}T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,-}$  es un tableau cuyo camino asociado pasa por  $v_2$ .

Por tanto

$$\mathcal{B}_\sigma^u = \{u_{T,\pi}, u_{s_{n-3}T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}\}, \quad (5.9)$$

es base de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$ .

Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\tau = \sigma \otimes \varepsilon \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ . Para cualquier  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu}^\pm$  definimos

$$\bar{e}_{T,\pi,\tau} = \bar{u}_{T,\pi} + \varepsilon(\tau)s_{n-3}\bar{u}_{T,\pi}, \quad e_{T,\pi,\tau} = \frac{\bar{e}_{T,\pi,\tau}}{\|\bar{e}_{T,\pi,\tau}\|}, \quad (5.10)$$

donde

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \mu \otimes tr \\ -1 & \text{si } \pi = \mu \otimes sg \end{cases}, \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes tr \\ -1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes sg \end{cases}.$$

Cuando  $\varepsilon$  es la representación trivial de  $\mathfrak{S}_2$  el conjunto  $\mathcal{B}_{\sigma,+}^e = \{e_{T,\pi,\tau} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}\}$  es base de  $V_{\sigma \otimes tr}$ . Si  $\varepsilon$  es la representación signo de  $\mathfrak{S}_2$  el conjunto  $\mathcal{B}_{\sigma,-}^e = \{e_{T,\pi,\tau} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,-}\}$  es base de  $V_{\sigma \otimes sg}$ .

Finalmente, si  $\sigma \in \mathcal{I}_2$ , entonces

$$\mathcal{B}_\sigma^e = \mathcal{B}_{\sigma,+}^e \cup \mathcal{B}_{\sigma,-}^e \quad \text{es base de} \quad V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}. \quad (5.11)$$

En el siguiente resultado se establece la relación que hay entre estas bases

**Teorema 5.13.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}$  arbitrario. Cuando  $\sigma \in \mathcal{I}_2$  tenemos la siguiente relación entre los elementos de las bases  $\mathcal{B}_\sigma^u$  y  $\mathcal{B}_\sigma^e$

$$\begin{pmatrix} e_{T,\pi,\sigma \otimes tr} \\ e_{T,\pi,\sigma \otimes sg} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\frac{1}{d}} & \sqrt{1-\frac{1}{d}} \\ \sqrt{1-\frac{1}{d}} & -\sqrt{1+\frac{1}{d}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{T,\pi} \\ u_{s_{n-3}T,\pi} \end{pmatrix},$$

donde  $d = r_T(n-2, n-3)$ .

*Demostración.* Aplicando la forma ortogonal de Young, y operando algebraicamente obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_{T,\pi} &= \left(1 + \frac{\delta(\pi)}{s}\right) w_T + \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1}T}, \\ \bar{u}_{s_{n-3}T,\pi} &= \left(1 + \frac{\delta(\pi)}{s}\right) w_{s_{n-3}T} + \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1}s_{n-3}T}, \\ \bar{e}_{T,\pi,\tau} &= \left(1 + \frac{\delta(\pi)}{s}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{d}\right) w_T + \varepsilon(\tau) \left(1 + \frac{\delta(\pi)}{s}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{s_{n-3}T} \\ &\quad + \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \left(1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{d}\right) w_{s_{n-1}T} + \varepsilon(\tau) \delta(\pi) \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{s_{n-3}s_{n-1}T} \\ &= \left(1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{d}\right) \bar{u}_{T,\pi} + \varepsilon(\tau) \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} \bar{u}_{s_{n-3}T,\pi}. \end{aligned}$$

donde  $d = r_T(n-2, n-3)$ ,  $s = r_T(n, n-1)$ .

Recordando que  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  es una base ortonormal, tenemos

$$\|\bar{u}_{T,\pi}\| = \|\bar{u}_{s_{n-3}T,\pi}\| = \sqrt{1 + \delta(\pi)(\delta(\pi) + \frac{2}{s})}$$

y

$$\|\bar{e}_{T,\pi,\tau}\| = \sqrt{1 + \varepsilon(\tau)(\varepsilon(\tau) + \frac{2}{d})} \sqrt{1 + \delta(\pi)(\delta(\pi) + \frac{2}{s})}. \quad (5.12)$$

A partir de las ecuaciones anteriores y operando algebraicamente tenemos

$$e_{T,\pi,\tau} = \frac{\bar{e}_{T,\pi,\tau}}{\|\bar{e}_{T,\pi,\tau}\|} = \frac{1 + \frac{\varepsilon(\tau)}{d}}{\sqrt{1 + \varepsilon(\tau)(\varepsilon(\tau) + \frac{2}{d})}} u_{T,\pi} + \frac{\varepsilon(\tau) \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}}{\sqrt{1 + \varepsilon(\tau)(\varepsilon(\tau) + \frac{2}{d})}} u_{s_{n-3}T,\pi}.$$

Para  $\varepsilon(\tau) = 1$  tenemos

$$e_{T,\pi,\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{d}} u_{T,\pi} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{d}} u_{s_{n-3}T,\pi},$$

Si  $\varepsilon(\tau) = -1$ , tenemos

$$e_{T,\pi,\tau} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \frac{1}{d}} u_{T,\pi} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{d}} u_{s_{n-3}T,\pi}.$$

Esto completa la demostración. □

**Ejemplo 5.14.** *Volvemos al ejemplo considerado antes, tomando las representaciones*

$$\rho = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \in \hat{\mathfrak{S}}_7 \quad \text{y} \quad \mu = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_5}^{\mathfrak{S}_7}(\rho).$$

Vimos que  $\{u_{T_i} : i = 1, 3, 5, 7, 9\}$  es base de  $V_{\mu \otimes tr}$  donde

$$\begin{aligned} T_1 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 7 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \\ T_3 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array}, \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
T_5 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 7 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} , \\
T_7 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 4 & \\ \hline 5 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} , \\
T_9 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 7 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & 6 & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} ,
\end{array}$$

Consideramos la representación  $\sigma = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_5}(\mu)$ , en este caso tenemos

$$\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma} = \{T_3, T_5, T_7, T_9\}, \quad \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{\pm, +} = \{T_3, T_9\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{\pm, -} = \{T_5, T_7\}.$$

Notemos que para todo  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$  tenemos,  $r_T(n-2, n-3) \neq \pm 1$ .

$\mathcal{B}_{\sigma, +}^e = \{e_{T_3, \pi, \tau}, e_{T_9, \pi, \tau}\}$  es base de  $V_{\sigma \otimes tr}$  y  $\mathcal{B}_{\sigma, -}^e = \{e_{T_5, \pi, \tau}, e_{T_7, \pi, \tau}\}$  es base de  $V_{\sigma \otimes sg}$ .

Consideramos ahora  $\sigma_1 = \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_5}(\mu)$ . Tenemos que  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma_1} = \{T_1\}$ , y la distancia axial  $r_T(n-2, n-3) = -1$  entonces  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma_1}^{\pm, +} = \{\}$  y  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma_1}^{\pm, -} = \{T_1\}$

Por lo tanto  $\mathcal{B}_{\sigma_1, -}^e = \{e_{T_1, \pi, \tau} = u_{T_1, \pi, \tau}\}$  es base de  $V_{\sigma_1 \otimes sg}$  y

$$V_{\mu \otimes tr} = V_{\sigma_1 \otimes sg} \oplus V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}.$$

### 5.3. Determinación de $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}$ para $m = 1, 2$ .

Recordemos que  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m} = \{f \in A[\mathfrak{S}_n] : \delta_k * f = f * \delta_k, \text{ para todo } k \in \mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m\}$ , es una subálgebra destacada en el estudio de funciones esféricas. En esta sección determinamos propiedades y generadores cuando  $m = 1, 2$ .

**Proposición 5.15.** *El álgebra  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-m} \times \mathfrak{S}_m}$  es conmutativa si y sólo si  $m = 1$  o  $m = 2$ .*

*Demostración.* Se deduce de los Teoremas 3.48, 3.51 y 3.52. □

Comenzamos considerando  $m = 1$ , es decir, la subálgebra  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$ . Como vimos en la Definición 4.21 los elementos YJM están definidos por

$$X_1 = 0 \quad \text{y} \quad X_k = (1, k) + (2, k) + \cdots + (k-1, k) \quad \text{para} \quad k = 2, \dots, n.$$

Para  $\ell, k \geq 1$ , sean  $\mathfrak{S}_{\ell+k}, \mathfrak{S}_\ell, \mathfrak{S}_k$  los grupos de permutaciones de los conjuntos  $\{1, 2, \dots, \ell+k\}$ ,  $\{1, 2, \dots, \ell\}$  y  $\{\ell+1, \ell+2, \dots, \ell+k\}$ , respectivamente. En particular  $\mathfrak{S}_\ell, \mathfrak{S}_k \leq \mathfrak{S}_{\ell+k}$  y  $\mathfrak{S}_\ell \cap \mathfrak{S}_k = \{1\}$ . Finalmente ponemos  $Z(\ell, k) = A[\mathfrak{S}_{\ell+k}]^{\mathfrak{S}_\ell}$  y  $Z(\ell) = A[\mathfrak{S}_\ell]^{\mathfrak{S}_\ell}$ , el centro de  $A[\mathfrak{S}_\ell]$ . Claramente

$$X_{\ell+1}, X_{\ell+2}, \dots, X_{\ell+k} \in Z(\ell, k) \quad \text{y} \quad \mathfrak{S}_k, Z(\ell) \subset Z(\ell, k).$$

El Teorema 4.22 establece que el álgebra  $A[\mathfrak{S}_{\ell+k}]^{\mathfrak{S}_\ell}$  está generada por los elementos YJM  $X_{\ell+1}, X_{\ell+2}, \dots, X_{\ell+k}$ , el subgrupo  $\mathfrak{S}_k$  y por  $Z(\ell)$ .



**Proposición 5.16.** Para el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$ , si  $f_1$  denota la función característica de la  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -órbita del elemento  $x_1 = (n-1, n)$  tenemos

$$A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}[X_n] = A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}[f_1].$$

Más aun  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n}$ .

*Demostración.* Con la notación previa y tomando  $\ell = n-1, k = 1$ , por el Teorema de Olshanskii tenemos  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = Z(n-1, 1)$  y  $A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = Z(n-1)$ . Por tanto  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} = A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}[X_n]$ . Notemos que la  $\mathfrak{S}_{n-1}$ -órbita de la permutación  $x_1 = (n, n-1)$  es  $\{(1, n), \dots, (n-1, n)\}$ , por tanto su función característica coincide con  $X_n$ .

Finalmente, sea  $T_j$  la función característica del conjunto de todas las transposiciones en  $\mathfrak{S}_j$ , entonces  $T_j \in Z(j)$ . Se cumple que  $X_n = T_n - T_{n-1}$  se sigue que  $X_n \in A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n}$ . Podemos concluir que  $A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n} \leq A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}} \leq A[\mathfrak{S}_{n-1}]^{\mathfrak{S}_{n-1}}A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n}$ .  $\square$

En el Capítulo 6 determinaremos  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$  por generadores y relaciones, este resultado lo veremos en el Teorema 6.10.

En lo que sigue consideramos el caso  $m = 2$ . Sea  $Y_n = X_n - (n-1, n)$ , los elementos  $X_{n-1}, Y_n$  no conmutan, pero, es fácil probar que  $(n-1, n)X_{n-1}(n-1, n) = Y_n$ .

**Lema 5.17.** Para todo  $h, k \geq 0$  tenemos

$$(X_{n-1} - Y_n)^k (X_{n-1} + Y_n)^h = (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n))^h (X_{n-1} - Y_n)^k. \quad (5.13)$$

*Demostración.* Primero consideraremos  $h = 1$  y demostraremos por inducción en  $k \geq 0$ . Es obvio para  $k = 0$ , para  $k = 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} (X_{n-1} - Y_n)(X_{n-1} + Y_n) - (X_{n-1} + Y_n)(X_{n-1} - Y_n) &= 2(X_{n-1}Y_n - Y_nX_{n-1}), \\ X_{n-1}Y_n &= X_{n-1}(X_n - (n-1, n)) = X_{n-1}X_n - X_{n-1}(n-1, n) \\ &= X_{n-1}X_n - (n-1, n)Y_n, \\ Y_nX_{n-1} &= (X_n - (n-1, n))X_{n-1} = X_nX_{n-1} - (n-1, n)X_{n-1} \\ &= X_nX_{n-1} - (n-1, n)X_{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $X_{n-1}X_n = X_nX_{n-1}$  obtenemos  $X_{n-1}Y_n - Y_nX_{n-1} = (n-1, n)(X_{n-1} - Y_n)$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} (X_{n-1} - Y_n)(X_{n-1} + Y_n) &= (X_{n-1} + Y_n)(X_{n-1} - Y_n) + 2(X_{n-1}Y_n - Y_nX_{n-1}) \\ &= (X_{n-1} + Y_n + 2(n-1, n))(X_{n-1} - Y_n), \end{aligned}$$

queda demostrado para  $h, k = 1$ . Ahora asumimos que es verdad para  $k \geq 1$ . Tomando en cuenta que  $(X_{n-1} - Y_n)(n-1, n) = -(n-1, n)(X_{n-1} - Y_n)$  conseguimos

$$\begin{aligned} &(X_{n-1} - Y_n)^{k+1}(X_{n-1} + Y_n) \\ &= (X_{n-1} - Y_n)(X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n))(X_{n-1} - Y_n)^k \\ &= \left( (X_{n-1} + Y_n + 2(n-1, n))(X_{n-1} - Y_n) - (1 - (-1)^k)(n-1, n)(X_{n-1} - Y_n) \right) \\ &\quad \times (X_{n-1} - Y_n)^k = (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^{k+1})(n-1, n))(X_{n-1} - Y_n)^{k+1}, \end{aligned}$$

lo cual demuestra que se satisface para todo  $k \geq 0$  cuando  $h = 1$ .

Para demostrar para cualquier  $h$  fijamos  $k \geq 0$  y procedemos por inducción en  $h \geq 0$ . Para  $h = 0$  es obvio. Asumimos que (5.13) es verdad para  $h \geq 0$ . Entonces

$$\begin{aligned}
& (X_{n-1} - Y_n)^k (X_{n-1} + Y_n)^{h+1} \\
&= (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n))^h (X_{n-1} - Y_n)^k (X_{n-1} + Y_n) \\
&= (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n))^h (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n)) \\
&\quad \times (X_{n-1} - Y_n)^k = (X_{n-1} + Y_n + (1 - (-1)^k)(n-1, n))^{h+1} (X_{n-1} - Y_n)^k.
\end{aligned}$$

El Lema está demostrado.  $\square$

**Proposición 5.18.** *El álgebra  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}$  está generada por  $A[\mathfrak{S}_{n-2}]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$ ,  $X_{n-1} + Y_n$ ,  $(X_{n-1} - Y_n)^2$  y  $(n-1, n)$ . Sean  $f_1$  y  $f_2$ , las funciones características de las  $K$ -clases de conjugación de los elementos  $x_1 = (n-1, n-2)$  y  $x_2 = (n, n-3)(n-1, n-2)$ , respectivamente. Entonces*

$$\begin{aligned}
A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2} &= A[K]^K[X_{n-1} + Y_n, (X_{n-1} - Y_n)^2] \\
&= A[K]^K[X_{n-1} + Y_n, X_{n-1}Y_n + Y_nX_{n-1}] = A[K]^K[f_1, f_2]
\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$y A[K]^K = A[\mathfrak{S}_{n-2}]^{\mathfrak{S}_{n-2}} \times A[\mathfrak{S}_2].$$

*Demostración.* Primero observamos que de (5.13) para  $h = 1$  tenemos que  $X_{n-1} + Y_n$  y  $(X_{n-1} - Y_n)^2$  conmutan. De  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  se sigue que  $A[G]^K = (A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2}})^{\mathfrak{S}_2}$  y que

$$A[K]^K = (A[\mathfrak{S}_{n-2}] \otimes A[\mathfrak{S}_2])^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2} = A[\mathfrak{S}_{n-2}]^{\mathfrak{S}_{n-2}} \otimes A[\mathfrak{S}_2].$$

si ponemos  $\ell = n-2, k = 2$  en el Teorema 4.22 obtenemos que  $Z(n-2, 2) = A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$  es el álgebra generada por  $X_{n-1}, X_n$ , el subgrupo  $\mathfrak{S}_2$  y el centro  $Z(n-2) = A[\mathfrak{S}_{n-2}]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$  de  $A[\mathfrak{S}_{n-2}]$ . Por tanto  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$  también es una subálgebra generada por  $X_{n-1} + Y_n, X_{n-1} - Y_n$ , el elemento  $(n-1, n)$  y  $A[\mathfrak{S}_{n-2}]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$ . Ahora observamos que

$$\begin{aligned}
(n-1, n)(X_{n-1} + Y_n) &= (X_{n-1} + Y_n)(n-1, n), \\
(n-1, n)(X_{n-1} - Y_n) &= -(X_{n-1} - Y_n)(n-1, n).
\end{aligned}$$

De ahí, usando también (5.13) vemos que cualquier elemento  $f \in A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2}}$  puede ser escrito en la siguiente forma:

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} (X_{n-1} + Y_n)^i (X_{n-1} - Y_n)^j, \quad a_{ij} \in A[K]^K.$$

Ahora es fácil ver que  $f \in (A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-2}})^{\mathfrak{S}_2}$  si y solo si

$$f = \sum_{i,j} a_{ij} (X_{n-1} + Y_n)^i (X_{n-1} - Y_n)^{2j}, \quad a_{ij} \in A[K]^K.$$

Por tanto

$$A[G]^K = A[K]^K[X_{n-1} + Y_n, (X_{n-1} - Y_n)^2].$$

La segunda igualdad de (5.14) se sigue de las siguientes identidades:

$$(X_{n-1} \pm Y_n)^2 = X_{n-1}^2 \pm (X_{n-1} + Y_n) + Y_n^2.$$

Para probar la tercera igualdad de (5.14) es suficiente observar que  $X_{n-1} + Y_n = f_1$  y que  $X_{n-1}Y_n + Y_nX_{n-1} = f_2 + (X_{n-1} + Y_n)(n-1, n)$ . De hecho,

$$\begin{aligned}
X_{n-1}Y_n + Y_nX_{n-1} &= \sum_{1 \leq i, j \leq n-2} ((j, n-1)(i, n) + (j, n)(i, n-1)) \\
&= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-2} ((j, n-1)(i, n) + (j, n)(i, n-1)) + \sum_{1 \leq j \leq n-2} ((j, n-1)(j, n) + (j, n)(j, n-1)) \\
&= 2f_2 + \sum_{1 \leq j \leq n-2} ((j, n)(n-1, n) + (j, n-1)(n-1, n)) = 2f_2 + (X_{n-1} + Y_n)(n-1, n).
\end{aligned}$$

La proposición esta demostrada.  $\square$

---

## Funciones esféricas del par $(G, K) = (\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$

---

El objetivo de este capítulo es determinar explícitamente las funciones esféricas en el grupo  $G = \mathfrak{S}_n$ , para cualquier  $K$ -tipo  $\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}$ . Con frecuencia haremos referencia a resultados obtenidos en capítulos anteriores.

En este caso tenemos que  $A = \{x_0 = (1), x_1 = (n, n-1)\}$  y por el Lema 5.1 y por la Proposición 5.2 tenemos

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_{n-1}A\mathfrak{S}_{n-1} \quad \text{y} \quad M = \text{cent}_K(A) = \{\sigma \in G : \sigma(i) = i, \text{ para } i = n-1, n\} \simeq \mathfrak{S}_{n-2}.$$

A partir de esta descomposición tenemos

**Lema 6.1.** *Sea  $\pi \in \hat{K}$  y  $(\delta, V)$  una representación de  $K$  tal que toda subrepresentación irreducible es de tipo  $\pi$ . Dada una función  $\phi : A \rightarrow \text{End}(V)$ , tal que*

$$\phi(x_0) = I \quad \text{y} \quad \phi(x_1)\pi(\sigma) = \pi(\sigma)\phi(x_1) \quad \text{para todo } \sigma \in M.$$

*Entonces existe una única función  $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V)$  tal que*

$$\Phi(k_1x_ik_2) = \pi(k_1)\phi(x_i)\pi(k_2) \quad \text{para todo } k_1, k_2 \in \mathfrak{S}_{n-1}, x_i \in A.$$

*Demostración.* Como  $\mathfrak{S}_n = (\mathfrak{S}_{n-1})A(\mathfrak{S}_{n-1})$ , por tanto, para todo  $g \in \mathfrak{S}_n$  existen  $k_1, k_2 \in \mathfrak{S}_{n-1}$  tales que  $g = k_1x_ik_2$  para  $i = 0, 1$ , cuando  $g \in K$  (es decir cuando  $i = 0$ ) definimos  $\Phi(g) = \delta(g)$ , cuando  $g \notin K$  tenemos que  $g = k_1x_1k_2$  y para definir  $\Phi(k_1x_1k_2) = \delta(k_1)\phi(x_1)\delta(k_2)$  es necesario verificar que  $k_1x_1k_2 = h_1x_1h_2$  implica que  $\delta(k_1)\phi(x_1)\delta(k_2) = \delta(h_1)\phi(x_1)\delta(h_2)$ .

De  $h_2k_2^{-1}(n) = n$  y  $h_1^{-1}k_1x_1 = x_1h_2k_2^{-1}$  obtenemos

$$n-1 = x_1h_2k_2^{-1}(n) = h_1^{-1}k_1x_1(n) = h_1^{-1}k_1(n-1).$$

Por tanto  $h_1^{-1}k_1 \in M$  y  $h_1^{-1}k_1 = h_2k_2^{-1}$ . Así  $\delta(h_1^{-1}k_1)\phi(x_1) = \phi(x_1)\delta(h_1^{-1}k_1) = \phi(x_1)\delta(h_2k_2^{-1})$  y  $\delta(k_1)\phi(x_1)\delta(k_2) = \delta(h_1)\phi(x_1)\delta(h_2)$ . Claramente por su definición  $\Phi|_A = \phi$  y  $\Phi|_K = \delta$ . Esto completa la demostración.  $\square$

### 6.1. Determinación de funciones esféricas

En esta sección determinamos las funciones esféricas para el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$  a partir de la primera caracterización, dada en el Teorema 3.11.

Recordemos, en la Definición 4.21 se establecieron los elementos de Young-Jucys-Murphy (YJM) en  $A[\mathfrak{S}_n]$ , por

$$X_1 = 0 \quad \text{y} \quad X_k = (1, k) + (2, k) + \cdots + (k-1, k) \quad \text{para} \quad k = 2, \dots, n.$$

Para el siguiente Teorema es fundamental el resultado que obtuvimos en la Proposición 5.16 según la cual la subálgebra  $A[G]^K = A[K]^K[X_n]$ . Por el Teorema 3.11 obtenemos la siguiente caracterización para el par que estamos considerando

**Teorema 6.2.** *Sea  $\pi \in \hat{K}$ . Una función  $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  de tipo  $\pi$  si y solo si*

- (i)  $\Phi(e) = I$ ,
- (ii)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1) \Phi(g) \Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in \mathfrak{S}_n$ ,
- (iii)  $(\Phi * X_n)(x_1) = \Phi(x_1) (\Phi * X_n)(e)$ , donde  $x_1 = (n-1, n)$ .
- (iv) La restricción  $\Phi|_K$  como una representación de  $K$  es equivalente a una suma directa de copias de  $\pi$ .

*Demostración.* Para demostrar el recíproco necesitamos que (iii) se cumpla para todo  $x \in \mathfrak{S}_n$ . Como (iii) vale obviamente para  $x = e$  entonces vale para todo  $x \in A$ . Sean  $x \in A$  y  $k \in K$ , entonces

$$(\Phi * X_n)(kx) = \sum_{y \in G} \Phi(kxy^{-1}) X_n(y) = \Phi(k) (\Phi * X_n)(x) = \Phi(kx) (\Phi * X_n)(e).$$

Similarmente

$$\begin{aligned} (\Phi * X_n)(xk) &= \sum_{y \in G} \Phi(y) X_n(y^{-1} xk) = \sum_{y \in G} \Phi(y) X_n(ky^{-1} x) = \sum_{y \in G} \Phi(yk) X_n(y^{-1} x) \\ &= (\Phi * X_n)(x) \Phi(k) = \Phi(x) (\Phi * X_n)(e) \Phi(k) = \Phi(xk) (\Phi * X_n)(e), \end{aligned}$$

porque  $(\Phi * X_n)(e) \Phi(k) = \Phi(k) (\Phi * X_n)(e)$  y  $X_n(yk) = X_n(ky)$  para todo  $y \in \mathfrak{S}_n$ . Por tanto (iii) vale para todo  $x \in \mathfrak{S}_n$ .

Ahora probaremos que  $(\Phi * f)(x) = \Phi(x) (\Phi * f)(e)$  para todo  $x \in \mathfrak{S}_n$  y toda  $f \in A[G]^K = A[K]^K[X_n]$ . Por inducción probamos primero que  $\Phi * X_n^j = \Phi(\Phi * X_n^j)(e)$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Ya hemos establecido esto para  $j = 1$ . Asumimos ahora que  $\Phi * X_n^j = \Phi(\Phi * X_n^j)(e)$  vale. Entonces

$$\begin{aligned} \Phi * X_n^{j+1} &= \Phi * X_n * X_n^j = \Phi(\Phi * X_n)(e) * X_n^j = \Phi * X_n^j (\Phi * X_n)(e) \\ &= \Phi(\Phi * X_n^j)(e) (\Phi * X_n)(e). \end{aligned}$$

En particular, evaluando en la identidad obtenemos  $(\Phi * X_n^{j+1})(e) = (\Phi * X_n^j)(e) (\Phi * X_n)(e)$ , con lo que probamos que  $\Phi * X_n^j = \Phi(\Phi * X_n^j)(e)$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

Si  $f \in A[K]^K$  tenemos

$$(\Phi * f)(x) = \sum_{y \in G} \Phi(xy^{-1}) f(y) = \sum_{k \in K} \Phi(xk^{-1}) f(k) = \Phi(x) \sum_{k \in K} \Phi(k^{-1}) f(k).$$

Evaluando en  $x = e$  obtenemos  $(\Phi * f)(e) = \sum_{k \in K} \Phi(k^{-1}) f(k)$ . Por eso  $\Phi * f = \Phi(\Phi * f)(e)$ .

Finalmente,

$$\Phi * (f * X_n^j) = \Phi(\Phi * f)(e) * X_n^j = \Phi * X_n^j (\Phi * f)(e) = \Phi(\Phi * X_n^j)(e) (\Phi * f)(e).$$

Evaluando en  $x = e$  obtenemos  $(\Phi * (f * X_n^j))(e) = (\Phi * X_n^j)(e) (\Phi * f)(e)$ , demostrando que

$$\Phi * (f * X_n^j) = \Phi(\Phi * (f * X_n^j))(e),$$

completando la demostración.  $\square$

**Corolario 6.3.** Sea  $(\pi, V)$  una representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-1}$ ,  $\phi : A \rightarrow \text{End}_M(V)$  la restricción de una función esférica irreducible  $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V)$  de tipo  $\pi \in \tilde{\mathfrak{S}}_{n-1}$ . Entonces  $\phi$  satisface las siguientes ecuaciones

$$(n-1) \text{tr} \phi(x_1) = \eta \dim V, \quad (6.1)$$

$$(\eta I - \pi(X_{n-1}))\phi(x_1) = I, \quad (6.2)$$

para algún  $\eta \in \mathbb{C}$  y recordemos que  $x_1 = (n-1, n)$ .

Recíprocamente, si  $(\pi, V)$  es una representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-1}$  y  $\phi : A \rightarrow \text{End}_M(V)$  satisface  $\phi(e) = I$  y las ecuaciones (6.1) y (6.2), entonces existe una única función esférica  $\Phi : \mathfrak{S}_n \rightarrow \text{End}(V)$  tal que  $\Phi|_K = \pi$  y  $\Phi|_A = \phi$ .

*Demostración.* Primero observamos que si  $f \in A[G]^K$  entonces  $(\Phi * \check{f})(e) \in \text{End}_K(V)$ ,

$$\begin{aligned} \pi(k)(\Phi * \check{f})(e)\pi(k^{-1}) &= \pi(k) \sum_{y \in G} \Phi(y)f(y)\pi(k^{-1}) = \sum_{y \in G} \Phi(kyk^{-1})f(y) \\ &= \sum_{y \in G} \Phi(y)f(k^{-1}yk) = (\Phi * \check{f})(e). \end{aligned} \quad (6.3)$$

De ahí por el Lema de Schur tenemos que  $(\Phi * X_n)(e) = \eta I$  para algún  $\eta \in \mathbb{C}$ . Más aun

$$(\Phi * X_n)(e) = \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi * (j, n))(e) = \sum_{j=1}^{n-1} \pi(j, n-1)\phi(x_1)\pi(j, n-1),$$

porque  $(j, n) = (j, n-1)(n-1, n)(j, n-1)$ . De ahí

$$\eta \dim V = \text{tr}(\Phi * X_n)(e) = (n-1) \text{tr} \phi(x_1).$$

Por el Teorema 3.11 sabemos que  $(\Phi * X_n)(x_1) = \Phi(x_1)(\Phi * X_n)(e)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi * (j, n))(x_1) &= \sum_{j=1}^{n-1} \Phi(x_1(j, n)) = \sum_{j=1}^{n-2} \Phi((j, n-1)x_1) + I \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-1))\phi(x_1) + I = \pi(X_{n-1})\phi(x_1) + I = \eta \phi(x_1). \end{aligned}$$

Recíprocamente, para  $\phi : A \rightarrow \text{End}_M(V)$  definimos  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  por

$$\Phi(k_1 a k_2) = \pi(k_1)\phi(a)\pi(k_2) \quad \text{para } k_1, k_2 \in K \quad \text{y } a \in A,$$

para la buena definición ver el Lema 6.1. Así definido  $\Phi$  satisface las condiciones i), ii), y iv) del Teorema 6.2. Veamos ahora que también cumple la condición iii). Como  $(\Phi * X_n)(e) \in \text{End}_K(V)$  por el Lema de Schur tenemos  $(\Phi * X_n)(e) = \mu I$ , para algún  $\mu \in \mathbb{C}$ . Por eso

$$\sum_{j=1}^{n-1} \pi(j, n-1)\phi(x_1)\pi(j, n-1) = \mu I \quad \text{por tanto} \quad (n-1) \text{tr} \phi(x_1) = \mu \dim V,$$

por hipótesis, obtenemos  $\mu = \eta$ , es decir hemos probado que  $(\Phi * X_n)(e) = \eta I$ . Evaluando en  $x_1$ , y usando (6.2), obtenemos

$$(\Phi * X_n)(x_1) = \sum_{u \in G} \Phi(x_1 u^{-1})X_n(u) = \sum_{j=1}^{n-2} \pi(n-1, j)\phi(x_1) + I = \hat{\pi}(X_{n-1})\phi(x_1) + I = \eta I,$$

La demostración concluye por el Teorema 6.2. □

Ahora determinaremos el autovalor  $(\Phi * X_n)(e)$ , para ello recordemos algunos conceptos del Capítulo 4.

Toda representación irreducible  $\rho$  de  $\mathfrak{S}_n$  esta asociada unívocamente a una partición  $\rho$  de  $n$ , una forma de describir particiones debida a Frobenius, es la siguiente. Supongamos que la diagonal principal del diagrama de Young de  $\rho$  tiene  $s$  cajas. Sea  $a_i$  el número de cajas debajo de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal, y sea  $b_i$  el número de cajas a la derecha de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal. Tenemos que  $a_1 > a_2 > \dots > a_s$  y  $b_1 > b_2 > \dots > b_s$ , denotamos a  $\rho$  por

$$\rho = (b_1, b_2, \dots, b_s | a_1, a_2, \dots, a_s).$$

Entonces como vimos en la ecuación (4.4) tenemos la siguiente expresión general del carácter  $\chi_\rho$  en la clase de conjugación  $C(2, \mathfrak{S}_n)$ , de los 2-ciclos en  $\mathfrak{S}_n$ .

$$\chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) = \frac{d(\rho)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^s (b_i(b_i+1) - a_i(a_i+1)).$$

Recordemos que dada una representación  $(\rho, V)$  de  $G$  y  $\pi$  una representación irreducible de  $K$  que aparece en  $\rho$ ,  $P_\pi$  el operador proyección de  $V$  en  $V_{(\pi)}$  que es la componente isotópica de  $\pi$ , a la función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V_{(\pi)})$  definida por

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v \quad g \in G, v \in V_{(\pi)},$$

la denominamos función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ .

Necesitaremos los siguientes resultados generales para un grupo finito arbitrario  $G$  y  $K$  un subgrupo.

**Teorema 6.4.** *Sea  $\rho \in \hat{G}$  y  $\pi \in \text{Res}_K^G(\rho)$ . Sea  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Si  $f_O$  es la función característica de una clase de conjugación  $O$  de  $G$ . Entonces*

$$[\Phi * \check{f}_O](e) = \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O)I,$$

donde  $\chi_\rho(O) = \chi_\rho(y)$  para cualquier  $y \in O$ .

*Demostración.*

$$[\Phi * \check{f}_O](e) = \sum_{y \in G} \Phi(y) \check{f}_O(y^{-1}) = \sum_{y \in G} \Phi(y) f_O(y) = \sum_{y \in O} \Phi(y) = P_\pi \sum_{y \in O} \rho(y) P_\pi.$$

La suma  $\sum_{y \in O} \rho(y)$  conmuta con  $\rho(g)$  para todo  $g \in \mathfrak{S}_n$ . Por el Lema de Schur tenemos  $\sum_{y \in O} \rho(y) = \nu I_\rho$ . Tomando traza obtenemos  $\nu d(\rho) = |O| \chi_\rho(O)$  donde  $\chi_\rho(O) = \chi_\rho(y)$  para cualquier  $y \in O$ .

Por tanto

$$(\Phi * \check{f}_O)(e) = \nu I_\rho = \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O) I_\rho.$$

□

**Teorema 6.5.** *Sean  $\rho \in \hat{G}$ ,  $\pi \in \text{Res}_K^G(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Sea  $f_Q$  la función característica de una  $K$ -clase de conjugación  $Q$  de  $K$ . Entonces*

$$(\Phi * \check{f}_Q)(e) = \frac{|Q|}{d(\pi)} \chi_\pi(Q) I,$$

donde  $\chi_\pi(Q) = \chi_\pi(y)$  para cualquier  $y \in Q$ .

*Demostración.* Como en la prueba del Teorema 6.4 tenemos

$$(\Phi * \check{f}_Q)(e) = \sum_{y \in Q} \Phi(y).$$

Cuando el  $K$ -módulo  $V$  no es irreducible, es suma directa de copias de  $V_\pi$ . Sin embargo por el Lema de Schur  $\sum_{y \in Q} \pi(y) = \nu I$ . Tomando traza obtenemos  $\nu \dim(V) = \chi_\pi(Q) |Q| h(\Phi)$  donde  $\chi_\pi(Q) = \chi_\pi(y)$  para cualquier  $y \in Q$  y  $h(\Phi)$  denota la altura de la función esférica. Como  $\dim(V) = h(\Phi_\pi^\tau) d(\pi)$  obtenemos

$$(\Phi * \check{f}_Q)(e) = \nu I = \frac{|Q|}{d(\pi)} \chi_\pi(Q) I.$$

□

Estamos listos para determinar el valor del autovalor asociado a  $\Phi$  en términos del contenido de los tableaux cuyos caminos asociados pasan por  $\rho$  y por  $\pi$ .

**Proposición 6.6.** *Sea  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$ . Si  $T$  es un tableau estándar cuyo camino asociado pasa por  $\rho$  y por  $\pi$  y  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  es el contenido de  $T$ , entonces*

$$(\Phi * X_n)(e) = c_n(T) I.$$

*Demostración.* Denotaremos por  $C(2, \mathfrak{S}_n)$  la clase de conjugación de un 2-ciclo en  $\mathfrak{S}_n$  (o su función característica) y por  $C(2, \mathfrak{S}_{n-1})$  la clase de conjugación de un 2-ciclo en  $K$  (o su función característica). Entonces  $X_n = C(2, \mathfrak{S}_n) - C(2, \mathfrak{S}_{n-1})$ .

Si  $\eta = (\Phi * X_n)(e)$ , por los Teoremas anteriores tenemos

$$\eta = \frac{|C(2, \mathfrak{S}_n)|}{d(\rho)} \chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) - \frac{|C(2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\pi)} \chi_\pi(C(2, \mathfrak{S}_{n-1})).$$

Tenemos que  $|C(2, \mathfrak{S}_n)| = n(n-1)/2$  y  $|C(2, \mathfrak{S}_{n-1})| = (n-1)(n-2)/2$ . De la ecuación (4.4) para

$$\rho = (b'_1, \dots, b'_s | a'_1, \dots, a'_s) \quad \text{y} \quad \pi = (b_1, \dots, b_s | a_1, \dots, a_s)$$

(teniendo en cuenta que la única diferencia en los diagramas de Young de cada una es un cuadrado) tenemos

$$\eta = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{s'} (b'_j(b'_j + 1) - a'_j(a'_j + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s (b_j(b_j + 1) - a_j(a_j + 1)). \quad (6.4)$$

Ahora consideramos los diferentes casos:

1) Tenemos  $s' = s$ ,  $b'_j = b_j$  si  $j \neq i+1$ ,  $b'_{i+1} = b_{i+1} + 1$  y  $a'_j = a_j$  para todo  $1 \leq j \leq s$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{1}{2} (b'_{i+1}(b'_{i+1} + 1) - b_{i+1}(b_{i+1} + 1)) \\ &= \frac{1}{2} ((b_{i+1} + 1)(b_{i+1} + 2) - b_{i+1}(b_{i+1} + 1)) = b_{i+1} + 1 = j(n) - i(n) = c_n(T). \end{aligned}$$

2) Tenemos  $s' = s$ ,  $a'_j = a_j$  si  $j \neq i+1$ ,  $a'_{i+1} = a_{i+1} + 1$  y  $b'_j = b_j$  para todo  $1 \leq j \leq s$ . Por tanto

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{1}{2} (a'_{i+1}(a'_{i+1} + 1) - a_{i+1}(a_{i+1} + 1)) \\ &= -\frac{1}{2} ((a_{i+1} + 1)(a_{i+1} + 2) - a_{i+1}(a_{i+1} + 1)) = -(a_{i+1} + 1)j(n) - i(n) = c_n(T). \end{aligned}$$

3) Finalmente consideramos  $s' = s + 1$ ,  $b'_j = b_j$ ,  $a'_j = a_j$  si  $1 \leq j \leq s$  y  $b'_{s+1} = a'_{s+1} = 0$ . Por tanto  $j(n) = i(n)$  y  $c_n(T) = 0$

$$\eta = \frac{1}{2}(b'_{s+1}(b'_{s+1} + 1) - a'_{s+1}(a'_{s+1} + 1)) = 0 = c_n(T).$$

□

Así como observamos en el Lema 6.1, toda función esférica está determinada por su restricción al conjunto  $A$ , por esta razón en lo que sigue determinaremos  $\Phi(x_1)$ , la función esférica determinada por  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  de tipo  $\pi \in \hat{K}$ . Recordemos que  $M = \text{cent}_K(A) = \mathfrak{S}_{n-2}$ , como vimos en (5.3), la descomposición de  $V_\pi$ , como subrepresentaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_{n-2}$  es

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}} m_\sigma(\pi) V_\sigma,$$

con la multiplicidad  $m_\sigma(\pi) \leq 1$  para todo  $\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}$ . Como  $x_1$  conmuta con todos los elementos de  $M$ , tenemos que  $\Phi(x_1)$  es un  $M$ - morfismo y por la descomposición anterior y el Lema de Schur tenemos

$$\Phi(x_1) = \sum_{\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2}} \alpha_\sigma I_\sigma \quad \text{con } \alpha_\sigma \in \mathbb{C}.$$

Finalmente recordemos que si  $T$  es un tableau estándar asociado a un camino que pasa por  $\rho$  y  $\pi$ , denotamos por  $r_T(i, j)$  a la distancia axial de  $i$  a  $j$  en  $T$ .

**Teorema 6.7.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\pi)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ ,  $T$  un tableau estándar asociado a algún camino que pasa por  $\rho$ ,  $\pi$  y por  $\sigma$  con  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  el contenido de  $T$ .

Entonces la restricción de  $\Phi(x_1)$  a la componente isotópica de  $\sigma$  en  $V_\pi$  es

$$\Phi(x_1) = \alpha_\sigma I_\sigma,$$

$$\text{donde } \alpha_\sigma = \frac{1}{r_T(n, n-1)} = \frac{1}{c_n(T) - c_{n-1}(T)}.$$

*Demostración.* Del Teorema 3.11 (iii) y por la Proposición 6.6 tenemos

$$(D_{X_n} \Phi)(x_1) = (\Phi * X_n)(x_1) = \Phi(x_1)(\Phi * X_n)(e) = \Phi(x_1) \hat{\Phi}(X_n) = c_n(T) \Phi(x_1), \quad (6.5)$$

por otra parte

$$\begin{aligned} (\Phi * X_n)(x_1) &= \sum_{j=1}^{n-1} (\Phi * (j, n))(x_1) = \sum_{j=1}^{n-1} \Phi(x_1(j, n)) = \sum_{j=1}^{n-2} \Phi((j, n-1)x_1) + I_\pi \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-1)) \Phi(x_1) + I = \hat{\pi}(X_{n-1}) \Phi(x_1) + I_\rho = c_{n-1}(T) \Phi(x_1) + I_\pi. \end{aligned} \quad (6.6)$$

para la última igualdad estamos usando que  $\hat{\pi}(X_{n-1}) = c_{n-1}(T) I_\pi$ , lo cual se prueba de la misma forma que se vió en la Proposición 6.6.

De las ecuaciones (6.5) y (6.6) tenemos

$$c_n(T) \Phi(x_1) = c_{n-1}(T) \Phi(x_1) + I_\pi.$$

Sea  $\sigma \in \text{Res}_M^K(\pi)$ , como  $\Phi(x_1)$  es un  $M$ - morfismo, al restringir la última ecuación a  $V_\sigma$  tenemos

$$c_n(T) \Phi(x_1) = c_{n-1}(T) \Phi(x_1) + I_\sigma.$$



por la Proposición 4.25 (i) sabemos que  $c_n(T) - c_{n-1}(T) \neq 0$ , por lo tanto

$$\Phi(x_1) = \left( \frac{1}{c_n(T) - c_{n-1}(T)} \right) I_\sigma.$$

□

## 6.2. Determinación de las funciones esféricas por proyecciones.

En esta sección determinaremos las funciones esféricas del par que estamos considerando, esta vez por medio de la caracterización del Teorema 3.41 según el cual, si  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}$  tal que  $\pi$  aparece en  $\rho$ , y si denotamos por  $P_\pi$  el operador proyección ortogonal del espacio de la representación  $\rho$  en la componente isotípica de  $\pi$  entonces la función

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v \quad g \in G, v \in V(\pi),$$

es la función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ .

El siguiente resultado ya lo hemos establecido en la sección anterior, lo incorporamos a continuación para dar una demostración alternativa.

**Teorema 6.8.** *Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\pi)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ ,  $T$  un tableau estándar asociado a algún camino que pasa por  $\rho$ ,  $\pi$  y por  $\sigma$  con  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  el contenido de  $T$ .*

*Entonces la restricción de  $\Phi(x_1)$  a la componente isotípica de  $\sigma$  en  $V_\pi$  es*

$$\Phi(x_1) = \alpha_\sigma I_\sigma,$$

donde  $\alpha_\sigma = \frac{1}{r_T(n, n-1)} = \frac{1}{c_n(T) - c_{n-1}(T)}$ .

*Demostración.* Por la forma ortogonal de Young, Teorema 4.32 sabemos que si tomamos la GZ-base  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$ , tenemos

$$s_i w_T = \frac{1}{r} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}} w_{s_i T}$$

donde  $s_i = (i+1, i)$  y  $r = r_T(i+1, i)$  es la distancia axial en  $T$  desde  $i+1$  a  $i$ , para todo  $1 \leq i \leq n-1$ . Tomando  $i = n-1$  tenemos que  $s_{n-1} = x_1$

$$s_{n-1} w_T = \frac{1}{s} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1} T} \quad \text{donde} \quad s = r_T(n, n-1).$$

Recordemos que  $s = r_T(n, n-1) = c_n(T) - c_{n-1}(T)$ . Cuando  $s = \pm 1$ , tenemos  $s_{n-1} w_T = \pm w_T = \frac{1}{s} w_T$ , así  $\Phi(x_1) w_T = \frac{1}{s} w_T = \frac{1}{c_n(T) - c_{n-1}(T)} w_T$ .

Vamos a considerar el caso en que  $r_T(n, n-1) \neq \pm 1$ . Si el camino asociado a  $T$  es

$$\rho \rightarrow \pi \rightarrow \sigma \rightarrow \dots,$$

entonces el camino asociado a  $T_1 = s_{n-1} T$  es de la forma

$$\rho \rightarrow \pi_1 \rightarrow \sigma \rightarrow \dots,$$

afirmamos que  $\pi \neq \pi_1$ . Pues, si  $\pi = \pi_1$  y denotamos por  $w_T, w_{T_1}$  a los vectores de la GZ-base asociados a los tableaux  $T$  y  $T_1$ , respectivamente, entonces  $\Phi(x_1) w_T = P_\pi \left( \frac{1}{s} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1} T} \right) = \frac{1}{s} w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} w_{s_{n-1} T} \notin \mathbb{C} w_T$ , pues  $w_T, w_{T_1}$  son linealmente independientes. Pero sabemos que  $\Phi(x_1)$  es un  $M$ -morfismo. Por lo tanto  $\pi \neq \pi_1$  y  $P_\pi w_{T_1} = 0$ . Esto completa la demostración. □

### 6.3. $A[G]^K$ y sus representaciones para $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-1})$

Por la Proposición 5.15  $A[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_{n-1}}$  es conmutativa y por la Proposición 5.16 sabemos que

$$A[G]^K = A[K]^K[X_n] \quad \text{donde} \quad X_n = (1, n) + (2, n) + \cdots + (n-1, n).$$

Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi \in \hat{K} = \hat{\mathfrak{S}}_{n-1}$ . Si  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  de tipo  $\pi$  y  $\beta$  es la representación de  $A[G]^K$  dada por la extensión de  $\Phi$ . Sea  $c_n(T)$  la  $n$ -ésima coordenada del contenido de cualquier tableau estándar  $T \in \text{Tab}(\rho)$  correspondiente al camino que pasa por  $\rho$  y  $\pi$ .

**Teorema 6.9.** Con la notación previa, sabiendo que el conjunto  $\{\tilde{\chi}_\mu : \mu \in \hat{K}\}$  es una base de  $A[K]^K$ , cualquier elemento  $f \in A[G]^K$  es de la forma

$$f = \sum_{j \geq 0} \left( \sum_{\mu \in \hat{K}} c_{j,\mu} \tilde{\chi}_\mu \right) * X_n^j, \quad c_{j,\mu} \in \mathbb{C}.$$

en tal caso

$$\beta(f) = \Phi(f) = |K| \sum_{j \geq 0} c_{j,\mu} c_n(T)^j.$$

*Demostración.* Recordemos que  $(\Phi * X_n)(e) = c_n(T)I$ , ver la Proposición 6.6.

Por otra parte, si  $\mu \in \hat{K}$  tenemos

$$\hat{\Phi}(\tilde{\chi}_\mu) = \sum_{k \in K} \Phi(k) \chi_\mu(k^{-1}) = \sum_{k \in K} \pi(k) \chi_\mu(k^{-1}) = \begin{cases} |K|I, & \text{si } \mu = \pi, \\ 0 & \text{si } \mu \neq \pi, \end{cases}$$

hemos considerado el operador  $P_\mu = \frac{1}{|K|} \sum_{k \in K} \mu(k) \chi_\mu(k^{-1})$  que por la Proposición 2.25 es el operador proyección ortogonal del espacio en la componente isotópica de  $\mu$ . Será  $I$  cuando  $\mu = \pi$  y el operador nulo en otro caso. Esto completa la demostración.  $\square$

Recordemos que dadas dos particiones  $\rho \vdash n$  y  $\pi \vdash n-1$ , el símbolo  $\rho \rightarrow \pi$  denota que  $\pi$  es una subrepresentación de la restricción de la representación  $\rho$  a  $K$ . Dada  $\pi \in \hat{K}$ , sea

$$\mathcal{R} = \{(\rho, \pi) \in \hat{G} \times \hat{K} : \rho \rightarrow \pi\}.$$

Para cada  $(\rho, \pi) \in \mathcal{R}$ , sea  $T$  un tableau de Young cuyo camino asociado pasa por  $\rho$  y por  $\pi$  y sea  $c_n(\rho, \pi)$  el contenido de  $T$  la caja del diagrama de Young de  $\rho$  borrada para obtener el diagrama de Young de  $\pi$ . Sea  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$  y  $\beta = \hat{\Phi}$ . Los parámetros de la representación  $\beta$  del álgebra  $A[G]^K = A[K]^K[X_n]$ , son:  $\beta(X_n) = c_n(\rho, \pi)$ ,  $\beta(\tilde{\chi}_\mu) = 0$  para todo  $\mu \in \hat{K}$ ,  $\mu \neq \pi$ , y  $\beta(\tilde{\chi}_\pi) = |K|$ .

Para cada  $(\rho, \pi) \in \mathcal{R}$  construimos ahora el polinomio mónico  $p_\pi$  en  $\mathbb{C}[x]$  ( $x$  variable indeterminada) cuyas raíces sean  $\beta(X_n)$ :

$$p_\pi(x) = \prod_{(\rho, \pi) \in \mathcal{R}} (x - c_n(\rho, \pi)).$$

De acuerdo a la Proposición 3.43, hay un único  $p \in A[G]^K = A[K]^K[X_n]$  tal que  $Q_\pi(p) = \frac{1}{|K|} \tilde{\chi}_\pi p_\pi(X_n)$  para todo  $\pi \in \hat{K}$ . Entonces

$$p = \frac{1}{|K|} \sum_{\pi \in \hat{K}} \prod_{(\rho, \pi) \in \mathcal{R}} \tilde{\chi}_\pi (X_n - c_n(\rho, \pi)). \quad (6.7)$$

Por construcción, si aplicamos cualquier representación  $\beta$  de  $A[K]^K[X_n]$  obtenemos  $\beta(p) = 0$ .

**Teorema 6.10.** *Sea  $A[K]^K[x]$  el anillo polinomial en la indeterminada  $x$  con coeficientes en el anillo conmutativo con identidad  $A[K]^K$ .*

*Sea  $\alpha : A[K]^K[x] \rightarrow A[K]^K[X_n]$  el homomorfismo de álgebra definido por  $\alpha(h) = h$  para todo  $h \in A[K]^K$  y  $\alpha(x) = X_n$ .*

Para

$$f = \frac{1}{|K|} \sum_{\pi \in \hat{K}} \prod_{(\rho, \pi) \in \mathcal{R}} \tilde{\chi}_\pi(x - c_n(\rho, \pi)).$$

se tiene  $f \in \ker \alpha$  y  $\alpha$  induce el siguiente isomorfismo de álgebras

$$A[G]^K \simeq A[K]^K[x]/(f),$$

donde  $\langle f \rangle$  es el ideal de  $A[K]^K[x]$  generado por el polinomio  $f$ .

*Demostración.* Primero observamos que  $\alpha(f) = p$ , ver (6.7). Se ha establecido que  $\hat{\Phi}(p) = 0$  para todo  $(\rho, \pi) \in \mathcal{R}$ , Proposición 3.57 implica que  $p = 0$ . Por tanto,  $f \in \ker(\alpha)$ .

En la ecuación (3.20) hemos establecido que  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_n] = \dim_{\mathbb{C}} A[G]^K = |\mathcal{F}|$ , donde  $\mathcal{F}$  el conjunto de todas las funciones esféricas irreducibles de  $(G, K)$ . De ahí que

$$|\mathcal{F}| = \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_n] = \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x]/\ker \alpha \leq \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x]/(f). \quad (6.8)$$

El álgebra  $A[K]^K = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi$ , por tanto

$$A[K]^K[x] = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi[x],$$

como suma directa de álgebras.

Sea  $f_\pi = \frac{1}{|K|} \prod_{\rho \in \mathcal{F}_\pi} \tilde{\chi}_\pi(x - c_n(\rho, \pi))$  la correspondiente proyección de  $f$  en  $\mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi[x]$ . Si  $h = \sum_{\pi \in \hat{K}} h_\pi$ , con  $h_\pi \in \mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi$ , entonces  $hf = \sum_{\pi \in \hat{K}} h_\pi f_\pi$ . Por tanto

$$A[K]^K[x]/(f) = \bigoplus_{\pi \in \hat{K}} \mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi[x]/(f_\pi).$$

El grado de  $(f_\pi)$  coincide con  $|\mathcal{F}_\pi| = m_\pi$ . Ahora es claro que  $\{\chi_\pi x^{m_\pi-1}, \chi_\pi x^{m_\pi-2}, \dots, \chi_\pi x, \chi_\pi\}$  es una  $\mathbb{C}$ -base de  $\mathbb{C} \tilde{\chi}_\pi[x]/(f_\pi)$  ya que  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x]/(f) = \sum_{\pi \in \hat{K}} |\mathcal{F}_\pi| = |\mathcal{F}|$ . Volviendo atrás a (6.8) vemos que  $\ker \alpha = \langle f \rangle$ . Por lo tanto

$$A[G]^K = A[K]^K[X_n] \simeq A[K]^K[x]/(f).$$

□

### 6.3.1. Ejemplos del álgebra $A[G]^K$ y sus representaciones para el par $(\mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_2)$ .

Vimos en la Definición 4.10 que con  $C(1^{r_1}, 2^{r_2}, \dots, k^{r_k}, \mathfrak{S}_n)$  denotamos la clase de conjugación del producto de  $r_k$   $k$ -ciclos disjuntos en  $\mathfrak{S}_n$ , para  $1 \leq k \leq n$  y para simplificar la notación omitimos el número  $k^{r_k}$  cuando  $r_k = 0$ , siempre y cuando no haya confusión.

Recordemos que  $X_3 = (1, 3) + (2, 3) \in A[\mathfrak{S}_3]^{\mathfrak{S}_2}$ . No es difícil verificar que valen las siguientes identidades

$$X_3^2 - \chi_{C(2, \mathfrak{S}_2)} X_3 - 2 = 0,$$

donde  $\chi_{C(2, \mathfrak{S}_2)}$  denota el carácter de la clase de conjugación de  $C(2, \mathfrak{S}_2)$ . La tabla de caracteres de  $\mathfrak{S}_2$  es

$\chi$	$C(1, \mathfrak{S}_2)$	$C(2, \mathfrak{S}_2)$
tr	1	1
sg	1	-1

Por tanto,  $\chi_{C(2, \mathfrak{S}_2)} = \frac{1}{2}(\chi_{\text{tr}} - \chi_{\text{sg}})$  y

$$X_3^2 - \frac{1}{2}(\chi_{\text{tr}} - \chi_{\text{sg}})X_3 - 2 = 0. \quad (6.9)$$

En la tabla siguiente listaremos las representaciones irreducibles  $\rho \in \hat{G}$ , su descomposición en  $K$ -módulos irreducibles y los parámetros de las correspondientes representaciones  $\beta$ 's del álgebra  $A[G]^K = A[K]^K[X_3]$ , dado por la extensión de cada función esférica irreducible.

$\rho_1 = \begin{array}{ c c c } \hline & & 3 \\ \hline \end{array}$	$\beta(X_3) = 2, \quad \beta(\chi_{\text{tr}}) = 2,$	$\beta(\chi_{\text{sg}}) = 0,$
$\rho_2 = \begin{array}{ c } \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\beta(X_3) = 1, \quad \beta(\chi_{\text{tr}}) = 0,$	$\beta(\chi_{\text{sg}}) = 2,$
$\rho_2 = \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$	$\beta(X_3) = -1, \quad \beta(\chi_{\text{tr}}) = 2,$	$\beta(\chi_{\text{sg}}) = 0,$
$\rho_3 = \begin{array}{ c } \hline \\ \hline \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$	$\beta(X_3) = -2, \quad \beta(\chi_{\text{tr}}) = 0,$	$\beta(\chi_{\text{sg}}) = 2.$

Si reemplazamos  $\chi_\pi$  por  $\beta(\chi_\pi)$  y  $X_3$  por la indeterminada  $x$  en la identidad (6.9) para  $\pi = \chi_{\text{tr}}, \chi_{\text{sg}}$  respectivamente tenemos los siguientes polinomios

$$x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1), \quad x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1).$$

Así hemos verificado que si aplicamos las cuatro representaciones  $\beta : A[K]^K[X_3] \rightarrow \mathbb{C}$  a (6.9) obtenemos cero.

El conjunto  $\mathcal{F}$  de todas las funciones esféricas irreducibles es

$$\mathcal{F} = \{\Phi_{\text{tr}}^{\rho_1}, \Phi_{\text{tr}}^{\rho_2}, \Phi_{\text{sg}}^{\rho_2}, \Phi_{\text{sg}}^{\rho_3}\}.$$

Tenemos que

$$A[G]^K = \{\mathfrak{S}_2 \cdot (1, 2, 3), \mathfrak{S}_2 \cdot (1, 2), \mathfrak{S}_2 \cdot (1, 3), \mathfrak{S}_2 \cdot (1)\}.$$

Vale la pena observar que los números cardinales  $|\mathcal{F}| = |A[G]^K|$ . Esto implica que el conjunto de transformadas de Fourier en cada función esférica irreducible  $\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_3}\}$  es una base del dual de  $A[G]^K$  como espacio vectorial complejo.

Tenemos que  $A[G]^K = A_{\text{tr}}^K[G] \oplus A_{\text{sg}}^K[G]$  y  $\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}\}$  es ortogonal a  $A_{\text{sg}}^K[G]$  y  $\{\hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_3}\}$  es ortogonal a  $A_{\text{tr}}^K[G]$ . Mas aún, los conjuntos  $\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}\}$  y  $\{\hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_3}\}$  son linealmente independientes, porque son conjuntos de representaciones diferentes de un álgebra (Vandermonde).

Sea  $A[K]^K[x]$  el anillo de polinomios en la indeterminada  $x$  con coeficientes en el anillo conmutativo con identidad  $A[K]^K$ . Sea  $\alpha : A[K]^K[x] \rightarrow A[K]^K[X_3]$  el homomorfismo de álgebra definido por  $\alpha(f) = f$  para todo  $f \in A[K]^K$  y  $\alpha(x) = X_3$ . Entonces  $x^2 - \frac{1}{2}(\chi_{\text{tr}} - \chi_{\text{sg}})x - 2 \in \ker \alpha$ . Como  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_3] = \dim_{\mathbb{C}} A[G]^K = 4$  tenemos

$$\begin{aligned} 4 &= \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_3] = \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x] / \ker \alpha \\ &\leq \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x] / \langle x^2 - \frac{1}{2}(\chi_{\text{tr}} - \chi_{\text{sg}})x - 2 \rangle \leq 4, \end{aligned}$$

ya que  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K = 2$  y  $\{1, x\}$  es una base del módulo libre  $A[K]^K[x]/\langle x^2 - \frac{1}{2}(\chi_{tr} - \chi_{sg})x - 2 \rangle$  sobre  $A[K]^K$ . Por tanto

$$A[G]^K \simeq A[K]^K[x]/\langle x^2 - \frac{1}{2}(\chi_{tr} - \chi_{sg})x - 2 \rangle.$$

### 6.3.2. Ejemplos del álgebra $A[G]^K$ y sus representaciones para el par $(\mathfrak{S}_4, \mathfrak{S}_3)$ .

Recordemos que  $X_4 = (1, 4) + (2, 4) + (3, 4) \in A[\mathfrak{S}_4]^{\mathfrak{S}_3}$ . Cambiamos la estrategia. Comenzamos construyendo la siguiente tabla de representaciones irreducibles  $\rho \in \hat{G}$ , su descomposición en  $K$ -módulos irreducibles y los parámetros de las correspondientes representaciones  $\beta$ 's del álgebra  $A[G]^K = A[K]^K[X_4]$ , dados por las transformadas de Fourier en cada función esférica irreducible.

$\rho_1 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td></td><td></td><td>4</td></tr></table>				4	$\beta(X_4) = 3,$	$\beta(\chi_{tr}) = 6,$	$\beta(\chi_{st}) = 0,$	$\beta(\chi_{sg}) = 0,$				
			4										
$\rho_2 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td><td></td></tr></table>			4				$\beta(X_4) = 2,$	$\beta(\chi_{tr}) = 0,$	$\beta(\chi_{st}) = 6,$	$\beta(\chi_{sg}) = 0,$		
		4											
$\rho_2 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td><td></td></tr></table>				4			$\beta(X_4) = -1,$	$\beta(\chi_{tr}) = 6,$	$\beta(\chi_{st}) = 0$	$\beta(\chi_{sg}) = 0,$		
4													
$\rho_3 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td>4</td></tr></table>				4	$\beta(X_4) = 0,$	$\beta(\chi_{tr}) = 0,$	$\beta(\chi_{st}) = 6,$	$\beta(\chi_{sg}) = 0,$				
	4												
$\rho_4 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td>4</td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr></table>		4					$\beta(X_4) = 1,$	$\beta(\chi_{tr}) = 0,$	$\beta(\chi_{st}) = 0,$	$\beta(\chi_{sg}) = 6,$		
	4												
$\rho_4 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td></td><td></td></tr><tr><td>4</td><td></td></tr></table>							4		$\beta(X_4) = -2,$	$\beta(\chi_{tr}) = 0,$	$\beta(\chi_{st}) = 6,$	$\beta(\chi_{sg}) = 0,$
4													
$\rho_5 =$	<table border="1" style="display: inline-table; vertical-align: middle;"><tr><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td></td></tr><tr><td>4</td></tr></table>				4	$\beta(X_4) = -3,$	$\beta(\chi_{tr}) = 0,$	$\beta(\chi_{st}) = 0,$	$\beta(\chi_{sg}) = 6.$				
4													

Construimos ahora tres polinomios mónicos  $p_{tr}, p_{st}$  y  $p_{sg}$  en  $\mathbb{C}[x]$  usando los correspondientes valores de  $\beta(X_4)$  como raíces:

$$p_{tr}(x) = (x-3)(x+1), \quad p_{st}(x) = x(x-2)(x+2), \quad p_{sg}(x) = (x+3)(x-1).$$

De acuerdo a la Proposición 3.43, existe un único  $p \in A[G]^K = A[K]^K[X_4]$  tal que

$$\begin{aligned} P_{tr}(p) &= \frac{1}{6}\chi_{tr}(X_4-3)(X_4+1), & P_{st}(p) &= \frac{1}{6}\chi_{st}X_4(X_4-2)(X_4+2), \\ P_{sg}(p) &= \frac{1}{6}\chi_{sg}(X_4+3)(X_4-1). \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{6}\chi_{tr}(X_4^2 - 2X_4 - 3) + \frac{1}{6}\chi_{st}X_4(X_4^2 - 4) + \frac{1}{6}\chi_{sg}(X_4^2 + 2X_4 - 3) \\ &= \frac{1}{6}\chi_{st}X_4^3 + \frac{1}{6}(\chi_{tr} + \chi_{sg})X_4^2 - \frac{1}{3}(\chi_{tr} + 2\chi_{st} - \chi_{sg})X_4 - \frac{1}{2}(\chi_{tr} + \chi_{sg}). \end{aligned}$$

Por construcción, si aplicamos las siete representaciones  $\beta$ 's de  $A[K]^K[X_4]$  obtenemos  $\beta(p) = 0$ .

El conjunto  $\mathcal{F}$  de todas las funciones esféricas irreducibles es

$$\mathcal{F} = \{\Phi_{tr}^{\rho_1}, \Phi_{st}^{\rho_2}, \Phi_{tr}^{\rho_3}, \Phi_{st}^{\rho_4}, \Phi_{sg}^{\rho_4}, \Phi_{st}^{\rho_5}, \Phi_{sg}^{\rho_5}\}.$$

El conjunto  $A[G]^G = \{C(4, \mathfrak{S}_4), C(3, \mathfrak{S}_4), C(2^2, \mathfrak{S}_4), C(2, \mathfrak{S}_4), C(1, \mathfrak{S}_4)\}$  y

$$A[G]^K = \{\mathfrak{S}_3 \cdot (1, 2, 3, 4), \mathfrak{S}_3 \cdot (1, 2, 4), \mathfrak{S}_3 \cdot (1, 2, 3), \mathfrak{S}_3 \cdot (1, 2)(3, 4), \\ \mathfrak{S}_3 \cdot (1, 4), \mathfrak{S}_3 \cdot (1, 2), \mathfrak{S}_3 \cdot (1)\}.$$

Vale la pena notar que los números cardinales  $|\mathcal{F}| = |A[G]^K|$ . Esto implica que el conjunto de transformadas de Fourier en cada función esférica irreducible

$$\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_3}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_4}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_4}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_5}\}$$

es una base del dual de  $A[G]^K$  como un espacio vectorial complejo.

De hecho,  $A[G]^K = A_{\text{tr}}^K[G] \oplus A_{\text{st}}^K[G] \oplus A_{\text{sg}}^K[G]$  y el conjunto  $\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}\}$  es ortogonal a  $A_{\text{st}}^K[G] \oplus A_{\text{sg}}^K[G]$ ,  $\{\hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_3}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_4}\}$  es ortogonal a  $A_{\text{tr}}^K[G] \oplus A_{\text{sg}}^K[G]$  y  $\{\hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_4}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_5}\}$  es ortogonal a  $A_{\text{tr}}^K[G] \oplus A_{\text{st}}^K[G]$ . Mas aún, los conjuntos  $\{\hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_1}, \hat{\Phi}_{\text{tr}}^{\rho_2}\}$ ,  $\{\hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_2}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_3}, \hat{\Phi}_{\text{st}}^{\rho_4}\}$  y  $\{\hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_4}, \hat{\Phi}_{\text{sg}}^{\rho_5}\}$  son linealmente independientes, pues son conjuntos de representaciones diferentes de un álgebra (Vandermonde). Ya que  $\beta(p) = 0$  para todo  $\beta$ , tenemos  $p = 0$ .

Sea  $A[K]^K[x]$  el anillo polinomial en la indeterminada  $x$  con coeficientes en el anillo conmutativo con identidad  $A[K]^K$ . Sea  $\alpha : A[K]^K[x] \rightarrow A[K]^K[X_4]$  el homomorfismo de álgebra definido por  $\alpha(f) = f$  para todo  $f \in A[K]^K$  y  $\alpha(x) = X_4$ . Sea

$$f = \frac{1}{6}\chi_{\text{st}}x^3 + \frac{1}{6}(\chi_{\text{tr}} + \chi_{\text{sg}})x^2 - \frac{1}{3}(\chi_{\text{tr}} + 2\chi_{\text{st}} - \chi_{\text{sg}})x - \frac{1}{2}(\chi_{\text{tr}} + \chi_{\text{sg}}).$$

Entonces  $f \in \ker \alpha$ . Como  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_4] = \dim_{\mathbb{C}} A[G]^K = 7$  tenemos

$$7 = \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[X_3] = \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x] / \ker \alpha \leq \dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x] / \langle f \rangle. \quad (6.10)$$

El álgebra  $A[K]^K = \mathbb{C}\chi_{\text{tr}} \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{st}} \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{sg}}$ , por tanto

$$A[K]^K[x] = \mathbb{C}\chi_{\text{tr}}[x] \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{st}}[x] \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{sg}}[x].$$

Sea  $f_{\text{tr}}, f_{\text{st}}, f_{\text{sg}}$  las correspondientes proyecciones de  $f$ . Entonces,

$$f_{\text{tr}} = \frac{1}{6}\chi_{\text{tr}}(x^2 - 2x - 3), \quad f_{\text{st}} = \frac{1}{6}\chi_{\text{st}}(x^3 - 4x), \quad f_{\text{sg}} = \frac{1}{6}\chi_{\text{sg}}(x^2 + 2x - 3).$$

Si  $h = h_{\text{tr}} + h_{\text{st}} + h_{\text{sg}} \in A[K]^K[x]$ , entonces  $hf = h_{\text{tr}}f_{\text{tr}} + h_{\text{st}}f_{\text{st}} + h_{\text{sg}}f_{\text{sg}}$ . por tanto

$$A[K]^K[x] / \langle f \rangle = \mathbb{C}\chi_{\text{tr}}[x] \langle f_{\text{tr}} \rangle \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{st}}[x] \langle f_{\text{st}} \rangle \oplus \mathbb{C}\chi_{\text{sg}}[x] \langle f_{\text{sg}} \rangle.$$

Ahora es claro que  $\{\chi_{\text{tr}}x, \chi_{\text{tr}}\}$ ,  $\{\chi_{\text{st}}x^2, \chi_{\text{st}}x, \chi_{\text{st}}\}$  y  $\{\chi_{\text{sg}}x, \chi_{\text{sg}}\}$  son, respectivamente,  $\mathbb{C}$ -bases de

$$\mathbb{C}\chi_{\text{tr}}[x] \langle f_{\text{tr}} \rangle, \mathbb{C}\chi_{\text{st}}[x] \langle f_{\text{st}} \rangle, \mathbb{C}\chi_{\text{sg}}[x] \langle f_{\text{sg}} \rangle.$$

De ahí  $\dim_{\mathbb{C}} A[K]^K[x] / \langle f \rangle = 7$ . Por (6.10) resulta que  $\ker \alpha = \langle f \rangle$ . Así hemos probado que

$$A[G]^K = A[K]^K[X_4] \simeq A[K]^K[x] / \langle f \rangle.$$

## Funciones esféricas del par $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$

El objetivo en este capítulo es determinar explícitamente las funciones esféricas irreducibles de  $G = \mathfrak{S}_n$ , de cualquier tipo  $\pi \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-2} \otimes \hat{\mathfrak{S}}_2$ . Para lo cual usamos la caracterización del Teorema 3.41, según el cual, dados  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi$  representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  que aparece en la restricción de  $\rho$ , entonces la función

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v, \quad \text{para todo } g \in \mathfrak{S}_n, v \in V(\pi).$$

es la función esférica irreducible de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Donde  $P_\pi$  es el operador proyección ortogonal del espacio de la representación  $\rho$  en la componente isotípica de  $\pi$ .

Por el Teorema 5.3, tenemos que el par  $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$  es libre de multiplicidad, por tanto la componente isotípica  $V(\pi)$  de  $\pi$ , coincide con el espacio de la representación  $\pi$ , es decir,  $V(\pi) = V_\pi$ .

Tenemos  $A = \{x_0 = (1), x_1 = (n-1, n-2), x_2 = (n, n-3)(n-1, n-2)\}$  y por el Lema 5.1 resulta

$$\mathfrak{S}_n = (\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)A(\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2).$$

Mientras que por la Proposición 5.2 tenemos

$$M = \text{cent}_K(A) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(i) = i, \text{ para } i = n-3, n-2, n-1, n\} = \mathfrak{S}_{n-4}.$$

Recordemos que  $\mathfrak{S}'_2$  es el grupo de permutaciones de  $\{n-3, n-2\}$ . Tenemos que  $M \times \mathfrak{S}'_2$  es subgrupo de  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$ , en particular  $M \times \mathfrak{S}'_2 \leq \mathfrak{S}_{n-2}$ .

Del siguiente resultado sabemos, en particular, que para determinar las funciones esféricas del par que estamos considerando basta determinarlas en  $x_1$  y  $x_2$ .

**Proposición 7.1.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ , si  $\Phi$  denota la función esférica irreducible de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Entonces

- i) La función  $\Phi$  queda determinada por  $\Phi(x_1)$  y  $\Phi(x_2)$ .
- ii)  $\Phi(x_1)$  y  $\Phi(x_2)$  son  $M$ -morfismos.
- iii)  $\Phi(x_1)$  es  $\mathfrak{S}_{n-3}$ -morfismo y  $\Phi(x_2)$  es  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -morfismo.

*Demostración.* i) Sabemos que  $\mathfrak{S}_n = (\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)A(\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2)$ , entonces para todo  $g \in \mathfrak{S}_n$  existen  $k_1, k_2 \in \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  y  $x_i \in A$  tales que  $g = k_1 x_i k_2$ . Por la Proposición 3.11 sabemos que  $\Phi(k_1 x_i k_2) = \Phi(k_1) \Phi(x_i) \Phi(k_2) = \pi(k_1) \Phi(x_i) \pi(k_2)$ , por lo tanto  $\Phi$  queda determinado por sus valores en  $A$ .

- ii) Es inmediato considerando que  $kx_i = x_i k$  para todo  $k \in M = \mathfrak{S}_{n-4}, x_i \in A$ .

Finalmente para iii). Notemos que  $kx_1 = x_1k$  para todo  $k \in \mathfrak{S}_{n-3}$ , por la Proposición 3.11 esto implica que  $\Phi(x_1)$  es un  $\mathfrak{S}_{n-3}$ -morfismo. Por ii) sabemos que  $\Phi(x_2)$  es ya un  $M$ -morfismo, queda probar que  $\pi((n-3, n-2))\Phi(x_2) = \Phi(x_2)\pi((n-3, n-2))$ .

Como  $(n-1, n)^2 = (1)$ , entonces  $\pi((n-1, n)) = \pm I$ , por lo tanto  $\Phi(x_2)\pi((n-1, n)) = \pi((n-1, n))\Phi(x_2)$ . Además se cumple que  $(n-3, n-2)x_2 = x_2(n-1, n)$  y  $(n-1, n)x_2 = x_2(n-3, n-2)$ , entonces

$$\pi((n-3, n-2))\Phi(x_2) = \Phi(x_2)\pi((n-1, n)) = \pi(n-1, n)\Phi(x_2) = \Phi(x_2)\pi((n-3, n-2)).$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

Determinaremos  $\Phi(x_1)$  y  $\Phi(x_2)$  considerando la descomposición (5.8) que vimos en el Capítulo 5, de  $V_\pi$  como suma de  $M \times \mathfrak{S}'_2$ -subrepresentaciones irreducibles, que es:

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_{1,1}} V_{\sigma \otimes tr} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_{1,-1}} V_{\sigma \otimes sg} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{I}_2} (V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}). \quad (7.1)$$

Cuando  $\sigma \in \mathcal{I}_{1,\pm 1}$  consideraremos las bases  $\{u_{T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}\}$  de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes \varepsilon}$ . Si  $\sigma \in \mathcal{I}_2$  hay distintas bases de  $V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  que diagonalizan a  $\Phi(x_1)$  o  $\Phi(x_2)$  según veremos en las siguientes secciones.

## 7.1. Determinación de $\Phi(x_1)$ .

Dados  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . En esta sección determinaremos  $\Phi(x_1)$  a partir de una base de  $V_\pi$  que diagonalice a este operador en cada sumando que aparece en la descomposición anterior.

En las Definiciones 5.11 y 5.12 del Capítulo 5, establecimos notación para distinguir los tableaux cuyos caminos asociados pasan por  $\rho, \mu$  y  $\sigma$  y las naturalezas de las representaciones  $\sigma$  según su multiplicidad y distancia axial de  $n-2$  a  $n-3$ , así por ejemplo  $\mathcal{I}_2$  representa el conjunto de representaciones irreducibles  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-2}}(\mu)$  tales que la multiplicidad  $m_\sigma(\mu) = 2$ .

Cuando  $\sigma \in \mathcal{I}_{1,1}$ , hay una sola representación  $v_1 \in Res_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes \delta)$  tal que  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_1)$ . Por tanto

$$\{u_{T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}\},$$

es base de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr}$ .

Finalmente, si tomamos  $\sigma \in \mathcal{I}_{1,-1}$ , hay una sola representación  $v_2 \in Res_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes \delta)$  tal que  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_2)$ . Por tanto

$$\{u_{s_{n-3}T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}\},$$

es base de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes sg}$ .

Notemos que  $\mathcal{B}_\sigma^u = \{u_{T,\pi}, u_{s_{n-3}T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}\}$  es base de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes sg}$ .

Si  $\sigma \in \mathcal{I}_2$ , dimos en la Subsección 5.2.5 dos bases de  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  y el cambio de bases que existe entre ellas. Sabemos por la Proposición 7.1 que  $\Phi(x_1)$  es  $\mathfrak{S}_{n-3}$ -morfismo, podemos afirmar que la base que diagonaliza a  $\Phi(x_1)$  es  $\mathcal{B}_\sigma^u$ .

En el siguiente resultado damos la forma diagonal de  $\Phi(x_1)$  para la descomposición (7.1) de  $V_\pi$ .



Para  $\pi \in \hat{K}$  y  $\tau \in \hat{M} \otimes \hat{\mathfrak{S}}'_2$  consideraremos la siguiente notación

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \pi = \mu \otimes tr \\ -1 & \text{si } \pi = \mu \otimes sg \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes tr \\ -1 & \text{si } \tau = \sigma \otimes sg \end{cases}.$$

**Teorema 7.2.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\hat{\mathfrak{S}}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\hat{\mathfrak{S}}_n}(\rho)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica irreducible de  $G$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$  entonces existe una base de  $V_\pi$  tal que la representación matricial de  $\Phi(x_1)$  según la descomposición (7.1) es la siguiente

$$\Phi(x_1) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}_{1,1}} \zeta_{\pi,\tau}^+ I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}_{1,-1}} \zeta_{\pi,\tau}^- I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{I}_2} \begin{pmatrix} \zeta_{\pi,\tau}^+ I & 0 \\ 0 & \zeta_{\pi,\tau}^- I \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

donde

$$\zeta_{\pi,\tau}^\pm = \begin{cases} \zeta_{\pi,\tau}^+ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{\delta(\pi)}{r(r+s)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = 1 \\ \zeta_{\pi,\tau}^- = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} + \frac{\delta(\pi)}{(r+d)(r+s+d)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = -1, \end{cases}$$

y  $s = r_T(n, n-1)$ ,  $r = r_T(n-1, n-2)$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ , para cualquier tableau estándar  $T$  asociado a un camino que pasa por  $\rho$ ,  $\mu$  y por  $\sigma$ .

*Demostración.* Recordemos que estamos considerando la caracterización del Teorema 3.41 según el cual, dados  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi$  representación irreducible de  $\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  que aparece en la restricción de  $\rho$ , entonces la función

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v, \quad \text{para todo } g \in \mathfrak{S}_n, \quad v \in V(\pi),$$

donde  $P_\pi$  es el operador proyección ortogonal del espacio de la representación  $\rho$  en la componente isotópica de  $\pi$ , es la función esférica irreducible de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ .

Consideramos primero el caso  $\pi = \mu \otimes tr$  y  $\tau = \sigma \otimes tr$ , es decir  $\delta(\pi) = \varepsilon(\tau) = 1$ . Tomamos la base de  $V_{\sigma \otimes tr}$  dada por

$$\{u_{T,\pi} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^+\},$$

en la Definición (5.9) se estableció que  $\bar{u}_{T,\pi} = w_T + \delta(\pi)s_{n-1}w_T$ , además, recordemos que en este caso denotamos a  $u_{T,\pi}$  por  $u_{T,1}$  y por (5.6) tenemos

$$\bar{u}_{T,1} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{s_{n-1}T},$$

por tanto

$$\begin{aligned} \rho(x_1)\bar{u}_{T,1} &= s_{n-2}\bar{u}_{T,1} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)s_{n-2}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}s_{n-2}w_{s_{n-1}T} \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{s}\right)w_T + \left(1 + \frac{1}{s}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_{s_{n-2}T} + \frac{1}{s+r}\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{s_{n-1}T} \\ &\quad + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(s+r)^2}}w_{s_{n-2}s_{n-1}T}, \end{aligned}$$

en la última igualdad se ha utilizado que  $r_{s_{n-1}T}(n-1, n-2) = s+r$ .

Si  $\rho \rightarrow \theta \rightarrow \mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \dots$  es el camino asociado a  $T$ , entonces el asociado a  $s_{n-2}T$  es

$$\rho \rightarrow \theta \rightarrow \tilde{\mu} \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \dots,$$

afirmamos que  $\mu \neq \tilde{\mu}$  pues  $\mu = \rho \setminus \{n, n-1\}$  mientras que  $\tilde{\mu} = \rho \setminus \{n, n-2\}$ , esto implica que  $P_\pi w_{s_{n-2}T} = 0$ , de la misma forma tenemos que  $P_\pi w_{s_{n-2}s_{n-1}T} = 0$ , por lo tanto

$$\Phi(x_1)\bar{u}_{T,1} = P_\pi s_{n-2}\bar{u}_{T,1} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{s}\right)P_\pi w_T + \frac{1}{s+r}\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi w_{s_{n-1}T}. \quad (7.3)$$

Para calcular  $P_\pi w_T$  y  $P_\pi w_{s_{n-1}T}$ , notemos que  $w_T = \frac{1}{2}(\bar{u}_{T,1} + \bar{u}_{T,-1})$  entonces  $P_\pi w_T = \frac{1}{2}\bar{u}_{T,1}$ . Por otra parte

$$s_{n-1}w_T = \frac{1}{s}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{s_{n-1}T}$$

obtenemos

$$\frac{1}{2}\bar{u}_{T,1} = \frac{1}{2}s_{n-1}\bar{u}_T = s_{n-1}P_\pi w_T = P_\pi s_{n-1}w_T = \frac{1}{2s}\bar{u}_{T,1} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi w_{s_{n-1}T},$$

porque  $s_{n-1}$  conmuta con todos los elementos en  $K$  y de ahí  $\rho(s_{n-1})P_\pi = P_\pi\rho(s_{n-1})$ . Así

$$\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi w_{s_{n-1}T} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{s}\right)\bar{u}_{T,1}.$$

Regresando a (7.3) tenemos

$$\Phi(x_1)\bar{u}_{T,1} = \frac{1}{2r}\left(1 + \frac{1}{s}\right)\bar{u}_{T,1} + \frac{1}{2(r+s)}\left(1 - \frac{1}{s}\right)\bar{u}_{T,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{rs} + \frac{1}{r+s} - \frac{1}{(r+s)s}\right)\bar{u}_{T,1},$$

se deduce que  $\Phi(x_1)u_{T,1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{rs} + \frac{1}{r+s} - \frac{1}{(r+s)s}\right)u_{T,1}$ , de donde

$$\zeta_{\pi,\tau}^+ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{r(r+s)}\right).$$

Para el caso  $\pi = \mu \otimes tr$  y  $\tau = \sigma \otimes sg$ , es decir  $\delta(\pi) = 1, \varepsilon(\tau) = -1$  tomamos la base de  $V_{\sigma \otimes sg}$  dada por

$$\{u_{s_{n-3}T,1} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,1}\},$$

Seguimos el proceso anterior con el que calculamos  $\zeta_{\pi,\tau}$  notando que

$$r_{s_{n-3}T}(n-1, n-2) = r_T(n-1, n-3) = r_T(n-1, n-2) + r_T(n-2, n-3) = r + d$$

y

$$r_{s_{n-1}s_{n-3}T}(n-1, n-2) = r_{s_{n-3}T}(n, n-2) = r_T(n, n-3) = s + r + d.$$

Finalmente cuando  $\delta(\pi) = -1$ , es decir, si  $\pi = \mu \otimes sg$ . Consideramos los vectores  $\bar{u}_{T,-1}$  y con ellos seguimos los pasos de forma análoga al caso anterior.  $\square$

Por la Proposición 7.1 sabemos que  $\Phi(x_1)$  también es  $\mathfrak{S}_{n-4}$ -morfismo, por lo tanto cuando  $\sigma \in \mathcal{S}_2$ , preserva la componente isotópica  $V(\sigma) = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$ . A partir del Lema 5.13 en el cual determinamos la matriz de cambio de bases entre  $\mathcal{B}_\sigma^e$  y  $\mathcal{B}_\sigma^u$  podemos dar su expresión en términos de la base  $\mathcal{B}_\sigma^e$ .

**Corolario 7.3.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica irreducible de  $G$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$  entonces existe una base de  $V_\pi$  tal que la representación matricial de  $\Phi(x_1)$  según la descomposición (7.1) es la siguiente

$$\Phi(x_1) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,1}} \zeta_{\pi,\tau}^+ I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_{1,-1}} \zeta_{\pi,\tau}^- I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{S}_2} \begin{pmatrix} \gamma_{1,1} I & \gamma_{1,2} I \\ \gamma_{2,1} I & \gamma_{2,2} I \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

donde

$$\zeta_{\pi,\tau}^\pm = \begin{cases} \zeta_{\pi,\tau}^+ = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{\delta(\pi)}{r(r+s)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = 1 \\ \zeta_{\pi,\tau}^- = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} + \frac{\delta(\pi)}{(r+d)(r+s+d)} \right) & \text{si } \varepsilon(\tau) = -1, \end{cases}$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_{1,1} &= \frac{1}{2} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) \zeta_{\pi,\tau}^+ + \left(1 - \frac{1}{d}\right) \zeta_{\pi,\tau}^- \right), & \gamma_{1,2} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} (\zeta_{\pi,\tau}^+ - \zeta_{\pi,\tau}^-) \\ \gamma_{2,1} &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} (\zeta_{\pi,\tau}^+ - \zeta_{\pi,\tau}^-), & \gamma_{2,2} &= \frac{1}{2} \left( \left(1 - \frac{1}{d}\right) \zeta_{\pi,\tau}^+ + \left(1 + \frac{1}{d}\right) \zeta_{\pi,\tau}^- \right), \end{aligned} \quad (7.5)$$

y consideramos las distancias axiales  $s = r_T(n, n-1), r = r_T(n-1, n-2), d = r_T(n-2, n-3)$ , para todo  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,+}$ .

*Demostración.* Se sigue directamente del Teorema de cambio de base en matrices de aplicaciones lineales, del Lema 5.13 y del Teorema anterior.  $\square$

## 7.2. Determinación de $\Phi(x_2)$ .

Dados  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  asociada a  $\rho$ , en esta sección determinamos  $\Phi(x_2)$  a partir de la caracterización dada en el Teorema 3.41, la cual establece

$$\Phi(g)v = P_\pi \rho(g)v \quad \text{para todo } g \in \mathfrak{S}_n, v \in V_\pi,$$

donde  $P_\pi$  es la proyección del espacio de la representación  $\rho$  en la componente isotípica de  $\pi$ .

Elegiremos una base de  $V_\pi$  en la cual quede diagonal en cada sumando que aparece en la descomposición 5.8, que es

$$V_\pi = \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_{1,1}} V_{\sigma \otimes tr} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_{1,-1}} V_{\sigma \otimes sg} \oplus \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{S}_2} V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}. \quad (7.6)$$

Recordemos, en la Subsección 5.2.5 definimos los vectores

$$\bar{e}_{T,\pi,\tau} = \bar{u}_{T,\pi} + \varepsilon(\tau) s_{n-3} \bar{u}_{T,\pi}, \quad e_{T,\pi,\tau} = \frac{\bar{e}_{T,\pi,\tau}}{\|\bar{e}_{T,\pi,\tau}\|},$$

y las bases

$$\mathcal{B}_\sigma^e = \{\bar{e}_{T,\pi,\tau} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,\pm}\},$$

Recordemos además que

$$\delta(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta = tr \\ -1 & \text{si } \delta = sg \end{cases} \quad \text{y} \quad \varepsilon(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{si } \varepsilon = tr \\ -1 & \text{si } \varepsilon = sg \end{cases}.$$

La diferencia principal con el procedimiento que nos permitió determinar  $\Phi(x_1)$  en la sección anterior, es que el elemento  $x_2$ , no es un generador de Coxeter, como lo es  $x_1$ . Para ser más precisos la longitud de Coxeter de  $x_2$ , es  $\ell(x_2) = 6$ . Tenemos

$$x_2 = s_{n-3} s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} s_{n-2}.$$

Por lo cual tenemos que determinar como actúan cada uno de estos generadores de Coxeter en los vectores de la base que elegimos.

**Nota 7.4.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\sigma \otimes \varepsilon \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}_2'}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ . Dado  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\pm,\pm}$ , para facilitar la notación en la demostración del siguiente Teorema denotaremos por  $T_j$  al tableau que obtenemos de  $T$  aplicando  $s_{n-j}$ , es decir.

$$T_j = s_{n-j} T, \quad \text{para } j = 1, \dots, n-1.$$

Siguiendo esta idea, para indicar la aplicación sucesiva de los elementos de Coxeter  $s_{n-i_1}, \dots, s_{n-i_k}$  en  $T$ , denotaremos con

$$T_{i_1, i_2, \dots, i_k} = s_{n-i_k} \dots s_{n-i_1} T.$$

Observemos que  $T_{i,i} = T$ , para todo  $i$  y  $T_{i,j} = T_{j,i}$  si las transposiciones  $s_{n-i}$  y  $s_{n-j}$  conmutan. Además

$$T_{j,(j+1),j} = T_{(j+1),j,(j+1)},$$

debido a que  $s_{j+i} s_j s_{j+1} = s_j s_{j+1} s_j$  para todo  $j$ .

También necesitaremos considerar las distancias axiales de estos tableaux. Denotaremos por  $r_{i_1, \dots, i_k}^j$  a la distancia axial entre  $n-j+1$  y  $n-j$  en el tableau  $T_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ , es decir

$$r_{i_1, \dots, i_k}^j = r_{T_{i_1, i_2, \dots, i_k}}(n-j+1, n-j).$$

Observemos que

$$r_j^j = r_{T_j}(n-j+1, r-j) = -r_T(n-j+1, n-j) \quad \text{y} \quad r_{j+1}^j = r_j^{j+1} \quad \text{para todo } j.$$

**Teorema 7.5.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Si  $\Phi$  es la función esférica irreducible de  $G$  asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$  entonces existe una base de  $V_\pi$  tal que la representación matricial de  $\Phi(x_2)$  en esa base, según la descomposición (7.6), es la siguiente

$$\Phi(x_2) = \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}_{1,1}} \beta_{\pi, \tau}^+ I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}_{1,-1}} \beta_{\pi, \tau}^- I \oplus \bigoplus_{\tau \in \mathcal{J}_2} \begin{pmatrix} \beta_{\pi, \tau}^+ I & 0 \\ 0 & \beta_{\pi, \tau}^- I \end{pmatrix},$$

donde

$$\beta_{\pi, \tau}^\pm = \delta_{\pi, \tau} \frac{2(r+s)(r+d+\varepsilon(\tau)) + (1-\delta(\pi)s)(1+\varepsilon(\tau)d)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)},$$

y

$$\delta_{\pi, \tau} = \begin{cases} 1 & \text{si } \delta(\pi) = \varepsilon(\tau) \\ 0 & \text{si } \delta(\pi) \neq \varepsilon(\tau), \end{cases}$$

además  $s = r_T(n, n-1)$ ,  $r = r_T(n-1, n-2)$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ , para cualquier  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{\pm, \pm}$ .

*Demostración.* Primero consideraremos el caso  $\delta(\pi) = 1$  y  $\varepsilon(\tau) = -1$ . Tenemos que

$$\pi(s_{n-3})\Phi(x_2) = \Phi(x_2)\pi(s_{n-1}) \quad \text{porque} \quad (n-3, n-2)x_2 = x_2(n-1, n).$$

Además  $\pi(s_{n-1})e_{T,1,-1} = e_{T,1,-1}$  y  $\pi(s_{n-3})e_{T,1,-1} = -e_{T,1,-1}$  entonces

$$\beta_{\pi, \tau}^- e_{T,1,-1} = \Phi(x_2)\Phi(s_{n-1})e_{T,1,-1} = \pi(s_{n-3})\Phi(x_2)e_{T,1,-1} = -\beta_{\pi, \tau}^- e_{T,1,-1},$$

por tanto  $\beta_{\pi, \tau}^- = 0$ .

Nuestro objetivo ahora es determinar  $\beta_{\pi, \tau}^1$ , consideramos la notación y observaciones indicadas en la Nota 7.4. Dado  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$  y una base de Gelfand Tsetlin  $\{w_T : T \in \text{Tab}(\rho)\}$  tomamos los vectores  $\bar{u}_{T, \pi}$  y  $u_{T, \pi}$ , por la forma ortogonal de Young, dada en el Teorema 4.32, obtenemos

$$\begin{aligned} \bar{u}_{T,1} &= w_T + \frac{1}{s}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_1} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_1}, \\ s_{n-3}\bar{u}_{T,1} &= \frac{1}{d}\left(1 + \frac{1}{s}\right)w_T + \left(1 + \frac{1}{s}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3} + \frac{1}{d}\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_{1,3}}, \end{aligned}$$

donde  $s = r_T(n, n-1)$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ .

Sea  $\sigma \otimes tr \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes tr)$ , consideramos los vectores  $\bar{e}_{T,1,1} = \bar{u}_{T,1} + s_{n-3}\bar{u}_{T,1}$ , a partir de las expresiones que obtuvimos para  $\bar{u}_{T,1}$  y  $s_{n-3}\bar{u}_{T,1}$  tenemos

$$\bar{e}_{T,1,1} = \left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_{1,3}}\right), \quad (7.7)$$

hemos considerado que  $r_1^3 = r_{T_1}(n-2, n-3) = r_T(n-2, n-3) = d$ .

Queremos calcular  $\Phi(x_2)e_{T,1,1}$ , donde  $x_2$  se descompone como producto de generadores de Coxeter

$$x_2 = s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}.$$

Debido a que la proyección  $P_\pi$  conmuta con  $s_{n-3}$  obtenemos que

$$\Phi(x_2)\bar{e}_{T,1,1} = P_\pi s_{n-3}s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\bar{e}_{T,1,1} = s_{n-3}P_\pi s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\bar{e}_{T,1,1}.$$

En primer lugar determinamos

$$\left(1 + \frac{1}{s}\right)P_\pi s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right),$$

siguiendo el mismo razonamiento obtenemos

$$\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_{1,3}}\right).$$

Finalmente aplicamos  $s_{n-3}$  en todos los términos que aparecen en las expresiones que conseguimos antes y obtenemos  $\Phi(x_2)\bar{e}_{T,1,1}$  que es

$$\Phi(x_2)\left(1 + \frac{1}{s}\right)\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) + \Phi(x_2)\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_{1,3}}\right).$$

Comenzamos calculando

$$s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right),$$

por la forma ortogonal de Young tenemos

$$\begin{aligned} & s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{r}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_{T_2}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\left(\frac{1}{r_3}w_{T_3} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_3)^2}}w_{T_{3,2}}\right) \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_{T_2} + \frac{1}{r_3}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_3)^2}}w_{T_{3,2}}, \end{aligned} \quad (7.8)$$

donde  $r = r_T(n-1, n-2)$ .

Para calcular  $s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right)$  necesitamos  $s_{n-3}w_{T_3}$  y  $s_{n-3}w_{T_{2,3}}$ , usando las observaciones de la Nota 7.4 y propiedades de las permutaciones, como ser  $s_{n-3}s_{n-2}s_{n-3} = s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}$  tenemos

$$s_{n-3}w_{T_3} = -\frac{1}{d}w_{T_3} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_T \quad \text{y} \quad s_{n-3}w_{T_{2,3}} = \frac{1}{r_{2,3}}w_{T_{2,3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3})^2}}w_{T_2}.$$

Aplicando  $s_{n-3}$  en cada término de la ecuación (7.8) y reemplazando las expresiones que acabamos de obtener para  $s_{n-3}w_{T_3}$  y  $s_{n-3}w_{T_{2,3}}$  tenemos

$$\begin{aligned} & s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) = \\ &= \frac{1}{r}\left(1 + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{d}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) + \left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\left(\frac{1}{r_2}w_{T_2} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_2)^2}}w_{T_{2,3}}\right) \\ &+ \frac{1}{r_3}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\left(-\frac{1}{d}w_{T_3} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_T\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_3)^2}}\left(\frac{1}{r_{3,2}}w_{T_{3,2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2})^2}}w_{T_{3,2,3}}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3d}\right)w_{T_3} \\ &+ \frac{1}{r_2}\left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_{T_2} + \left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_2)^2}}w_{T_{2,3}} \\ &+ \frac{1}{r_{3,2}}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_3)^2}}w_{T_{3,2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_3)^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2})^2}}w_{T_{3,2,3}}. \end{aligned}$$

Para calcular  $s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right)$  necesitamos  $s_{n-2}w_{T_{3,2,3}}$  y  $s_{n-2}w_{T_{3,2,3}}$ , considerando que  $r_{3,2,3}^2 = r_{2,3,2}(n-1, n-2) = r_{2,3}(n-2, n-1) = -r_{2,3}(n-1, n-2) = -r_{2,3}^2$  y aplicando la forma ortogonal de Young tenemos

$$s_{n-2}w_{T_{3,2}} = -\frac{1}{r_2^3}w_{T_{2,3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^3)^2}}w_{T_3} \quad \text{y} \quad s_{n-2}w_{T_{3,2,3}} = -\frac{1}{r_{2,3}^2}w_{T_{3,2,3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}}w_{T_{2,3}},$$

Aplicamos  $s_{n-2}$  a los términos que obtuvimos de  $s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right)$  y reemplazamos las expresiones que conseguimos de  $s_{n-2}w_{T_{3,2}}$  y  $s_{n-2}w_{T_{3,2,3}}$ . Por la forma ortogonal de Young y operando algebraicamente tenemos

$$\begin{aligned} & s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2}\left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_3}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{d}\right)\left(\frac{1}{r^2d} + \frac{1}{rr_3^2} - \frac{1}{rr_3^2d} + \frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_2^2r_3^2}\right)w_T + \left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_3^2d} + \frac{1}{r_2^2r_3^2}\right)w_{T_2} \\ &+ \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\left(\frac{1}{rd^2} + \frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{(r_3^2)^2d} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r(r_2^3)^2}\right)w_{T_3} \\ &+ \sqrt{\left(1 - \frac{1}{d^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(r_3^2)^2}\right)}\left(\frac{1}{rd} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3^2d} - \frac{1}{r_2^3r_3^2}\right)w_{T_{3,2}} \\ &+ \left(\frac{1}{r_{2,3}^2}\left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^3)^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^3)^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2}^3)^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}}\right)w_{T_{2,3}} \\ &+ \left(\left(1 + \frac{1}{d}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^3)^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}} - \frac{1}{r_{2,3}^2}\sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^3)^2}}\sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2}^3)^2}}\right)w_{T_{2,3,2}}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Ahora nos detenemos a calcular  $s_{n-2}s_{n-1}$  de todos los vectores de la base de Gelfand Tsetlin que aparecen en la ecuación (7.9), por la forma ortogonal de Young tenemos

$$\begin{aligned} s_{n-2}s_{n-1}w_T &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_{T_2}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\left(\frac{1}{r_1}w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}}w_{T_{1,2}}\right), \\ s_{n-2}s_{n-1}w_{T_2} &= \frac{1}{r_1^2}\left(-\frac{1}{r}w_{T_2} + \sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}w_T\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}}\left(\frac{1}{s}w_{T_{2,1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_{2,1,2}}\right), \\ s_{n-2}s_{n-1}w_{T_3} &= \frac{1}{s}\left(\frac{1}{r_3^2}w_{T_3} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_3^2)^2}}w_{T_{3,2}}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}\left(\frac{1}{r_{3,1}^2}w_{T_{3,1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,1}^2)^2}}w_{T_{3,1,2}}\right), \\ s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{3,2}} &= \frac{1}{r_{3,2}^2}\left(\frac{1}{r_{3,2}^2}w_{T_{3,2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2}^2)^2}}w_{T_3}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{3,2}^2)^2}}\left(\frac{1}{r_{3,1,2}^2}w_{T_{3,2,1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_{3,2,1,2}}\right), \\ s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{2,3}} &= \frac{1}{r_{2,3}^2}\left(\frac{1}{r_{2,3}^2}w_{T_{2,3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}}w_{T_{2,3,2}}\right) \\ &+ \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}}\left(\frac{1}{r_{2,3,1}^2}w_{T_{2,3,1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3,1}^2)^2}}w_{T_{2,3,1,2}}\right), \\ s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{2,3,2}} &= \frac{1}{r_{2,3,2}^2}\left(-\frac{1}{d}w_{T_{2,3,2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}}w_{T_{2,3}}\right) \\ &+ \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3,2}^2)^2}}\left(\frac{1}{r_2^2}w_{T_{2,3,2,1}} + \sqrt{1 - \frac{1}{(r_2^2)^2}}w_{T_{2,3,2,1,2}}\right). \end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es determinar  $P_\pi s_{n-2}s_{n-1}$  en los vectores  $w_T$ ,  $w_{T_2}$ ,  $w_{T_3}$ ,  $w_{T_{3,2}}$  y  $w_{T_{2,3,2}}$ . Comenzamos por  $P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_T$ , por la expresión que obtuvimos de  $s_{n-2}s_{n-1}w_T$  notamos que necesitamos  $P_\pi w_T$ ,  $P_\pi w_{T_1}$ ,  $P_\pi w_{T_2}$  y  $P_\pi w_{T_{1,2}}$ . Por definición tenemos

$$\bar{u}_{T,1} = w_T + s_{n-1}w_T \quad \text{y} \quad \bar{u}_{T,-1} = w_T - s_{n-1}w_T,$$

por tanto  $2w_T = \bar{u}_{T,1} + \bar{u}_{T,-1}$ , como  $\bar{u}_{T,-1} \notin V_\pi$  aplicando  $P_\pi$  tenemos  $2P_\pi w_T = \bar{u}_{T,1}$ , es decir,

$$P_\pi w_T = \frac{1}{2s}\bar{u}_{T,1}.$$

Por definición  $s_{n-1}\bar{u}_{T,1} = \bar{u}_{T,1}$  y como  $s_{n-1}$  conmuta con todos los elementos de  $K$  entonces  $s_{n-1}$  conmuta con  $P_\pi$ , por lo tanto

$$\frac{1}{2}\bar{u}_{T,1} = s_{n-1}P_\pi w_T = P_\pi s_{n-1}w_T = P_\pi \left( \frac{1}{s}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{T_1} \right) = \frac{1}{2s}\bar{u}_{T,1} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi w_{T_1}.$$

Obtenemos

$$\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}P_\pi w_{T_1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{s} \right) \bar{u}_{T,1}.$$

Si  $\rho \rightarrow \theta \rightarrow \mu \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \dots$  es el camino asociado a  $T$ , entonces el asociado a  $T_2$  es

$$\rho \rightarrow \theta \rightarrow \tilde{\mu} \rightarrow \nu \rightarrow \sigma \rightarrow \dots,$$

afirmamos que  $\mu \neq \tilde{\mu}$  pues  $\mu = \rho \setminus \{n, n-1\}$  mientras que  $\tilde{\mu} = \rho \setminus \{n, n-2\}$ , esto implica que  $P_\pi w_{s_{n-2}T} = 0$ , de la misma forma tenemos que  $P_\pi w_{T_{1,2}} = 0$ . Reemplazando en la expresión que obtuvimos para  $s_{n-2}s_{n-1}w_T$  conseguimos

$$P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_T = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{sr} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{sr_1^2} \right) \bar{u}_{T,1}.$$

Con similares consideraciones obtenemos

$$\begin{aligned} P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_{T_2} &= \frac{1}{2r_1^2} \sqrt{1 - \frac{1}{r_1^2}} \bar{u}_{T,1}, \\ P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_{T_3} &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{d^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{1}{sr_2^3} + \frac{1}{r_{2,1}^3} - \frac{1}{sr_{2,1}^3} \right) \left( s_{n-3}\bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d}\bar{u}_{T,1} \right), \\ P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{3,2}} &= \frac{1}{2r_{2,3}^2} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2}} \left( 1 - \frac{1}{d^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( s_{n-3}\bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d}\bar{u}_{T,1} \right), \end{aligned}$$

Ademas

$$P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{2,3}} = P_\pi s_{n-2}s_{n-1}w_{T_{2,3,2}} = 0$$

Reemplazando en (7.9) tenemos

$$\begin{aligned} &P_\pi s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left( 1 + \frac{1}{d} \right) w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_3} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{r^2d} + \frac{1}{rr_3^2} - \frac{1}{rr_3^2d} + \frac{1}{r_3^3} - \frac{1}{r^2r_3^3} \right) \left( \frac{1}{sr} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{sr_1^2} \right) \bar{u}_{T,1} \\ &\quad + \frac{1}{2r_1^2} \left( 1 + \frac{1}{d} \right) \left( \frac{1}{rd} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_3^2d} - \frac{1}{r_3^2r} \right) \left( 1 - \frac{1}{r_1^2} \right) \bar{u}_{T,1} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{rdr_3^2} + \frac{1}{rr_3^2} - \frac{1}{(r_3^2)^2d} + \frac{1}{r_{3,2}^3} \left( 1 - \frac{1}{(r_3^2)^2} \right) \right) \left( \frac{1}{sr_2^3} + \frac{1}{r_{1,2}^3} - \frac{1}{sr_{2,1}^3} \right) \left( s_{n-3}\bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d}\bar{u}_{T,1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2r_{2,3}^2} \left( \frac{1}{rd} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3^2d} - \frac{1}{r_3^2r_{2,3}} \right) \left( 1 - \frac{1}{(r_{2,3}^2)^2} \right) \left( s_{n-3}\bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d}\bar{u}_{T,1} \right). \end{aligned} \tag{7.10}$$

Considerando que  $r_{j+1}^j = r_j^{j+1}$  para todo  $j$  y haciendo uso de las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} r_3^2 &= r_{T_3}(n-1, n-2) = r_T(n-1, n-3) = r+d, & r_2^1 &= r_{T_2}(n, n-1)r_T(n, n-2) = s+r, \\ r_{2,3}^3 &= r_{T_{2,3}}(n-1, n-2) = d, & r_{1,2}^3 &= r_{T_{1,2}}(n-2, n-3) = r_T(n, n-3) = r+s+d. \end{aligned}$$

Reemplazando en las ecuaciones (7.9), multiplicando por  $(1 + \frac{1}{s})$  y operando algebraicamente tenemos

$$\left( 1 + \frac{1}{s} \right) P_\pi s_{n-2}s_{n-1}s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left( 1 + \frac{1}{d} \right) w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_3} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) \frac{(r+1)^2}{r^2(r+d)(r+s)} \bar{u}_{T,1} + \frac{1}{2(r+s)(r+d)} \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \bar{u}_{T,1} \\
&\quad + \frac{(r+d+1)^2}{2r(r+d)^2(r+s+d)} \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right) + \frac{1}{2r(r+s+d)} \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{(r+d)^2}\right) \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right) \\
&= \frac{(s+1)(r+1)}{sr(r+d)(r+s)} \left(1 + \frac{1}{d}\right) \bar{u}_{T,1} + \frac{(s+1)(r+d+1)}{sr(r+d)(r+s+d)} \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right) \\
&= \frac{(s+1)(r(r+s+d)+r+d+1)}{sr(r+d)(r+s)(r+s+d)} \bar{u}_{T,1} + \frac{(s+1)(r+d+1)}{sr(r+d)(r+s+d)} s_{n-3} \bar{u}_{T,1}.
\end{aligned} \tag{7.11}$$

Para calcular  $s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_{1,3}} \right)$  seguimos los pasos que nos permitieron determinar  $s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_3} \right)$ . Consideramos que las distancias axiales y los tableaux que intervienen en cada paso para llegar a la ecuación (7.9) cambian de la siguiente forma, donde aparece  $r_i^j$  ahora estará  $r_{1,i}^j$  y donde estaba  $T_i$  ahora aparece  $T_{1,i}$ .

Con estas consideraciones obtenemos

$$\begin{aligned}
&s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_{1,3}} \right) = \\
&= \left(1 + \frac{1}{d}\right) \left( \frac{1}{(r_1^2)^2 d} + \frac{1}{r_1^2 r_{1,3}^2} - \frac{1}{r_1^2 r_{1,3}^2 d} + \frac{1}{r_{1,2}^3} - \frac{1}{(r_1^2)^2 r_{1,2}^3} \right) w_{T_1} \\
&\quad + \left(1 + \frac{1}{d}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}} \left( \frac{1}{r_1^2 d} + \frac{1}{r_{1,3}^2} - \frac{1}{r_{1,3}^2 d} + \frac{1}{r_{1,2}^3 r_{1,2}^2} \right) w_{T_{1,2}} \\
&\quad + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} \left( \frac{1}{r_1^2 d r_{1,3}^2} + \frac{1}{r_1^2 r_{1,3}^2} - \frac{1}{(r_{1,3}^2)^2 d} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_1^2 (r_{1,2}^3)^2} \right) w_{T_{1,3}} \\
&\quad + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{d^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(r_{1,3}^2)^2}\right)} \left( \frac{1}{r_1^2 d} + \frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_{1,3}^2 d} - \frac{1}{r_{1,2}^3 r_{1,2}^3} \right) w_{T_{1,3,2}} \\
&\quad + \left( \frac{1}{r_{1,2,3}^2} \left(1 + \frac{1}{d}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,2}^3)^2}} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,3}^2)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,3,2}^3)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,2,3}^2)^2}} \right) w_{T_{1,2,3}} \\
&\quad + \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,2}^3)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,2,3}^2)^2}} - \frac{1}{r_{1,2,3}^2} \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,3}^2)^2}} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,3,2}^3)^2}} \right) w_{T_{1,2,3,2}}.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

De forma similar determinamos

$$\begin{aligned}
P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_1} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{sr_1^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{rs}\right) \bar{u}_{T,1}, \\
P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_{1,2}} &= \frac{1}{2r} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_1^2)^2}} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \bar{u}_{T,1}, \\
P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_{1,3}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{sr_{1,2}^3} + \frac{1}{r_2^3} + \frac{1}{r_2^3 s}\right) \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right), \\
P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_{1,3,2}} &= \frac{1}{2r_2^3} \sqrt{1 - \frac{1}{(r_{1,2}^3)^2}} \left(1 - \frac{1}{s}\right) \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{d^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right),
\end{aligned}$$

y

$$P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_{1,2,3}} = P_\pi s_{n-2}s_{n-1} w_{T_{1,2,3,2}} = 0.$$

Reemplazando en las ecuaciones (7.12), multiplicando por  $\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}$  y operando algebraicamente tenemos

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} P_\pi s_{n-2}s_{n-1} s_{n-2}s_{n-3}s_{n-2} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2}} w_{T_{1,3}} \right) \\
&= \frac{(s-1)(d+1)(r+s+1)^2}{2sdr(r+s)^2(r+s+d)} \bar{u}_{T,1} + \frac{(s-1)(d+1)(r+s+1)(r+s-1)}{2srd(r+s)^2(r+s+d)} \bar{u}_{T,1} \\
&\quad + \frac{(s-1)(r+s+d+1)^2}{2s(r+s+d)^2(r+s)(r+d)} \left(s_{n-3} \bar{u}_T - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right) + \frac{(s-1)(r+s+d+1)(r+s+d-1)}{2s(r+s+d)^2(r+d)(r+s)} \left(s_{n-3} \bar{u}_{T,1} - \frac{1}{d} \bar{u}_{T,1}\right) \\
&= \frac{(s-1)((r+s)(r+d+1)+d+1)}{sr(r+s+d)(r+s)(r+d)} \bar{u}_{T,1} + \frac{(s-1)(r+s+d+1)}{s(r+s+d)(r+s)(r+d)} s_{n-3} \bar{u}_{T,1}.
\end{aligned} \tag{7.13}$$



Recordemos que

$$\bar{e}_{T,1,1} = \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2} w_{T_3}} \right) + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \left( \left(1 + \frac{1}{d}\right) w_{T_1} + \sqrt{1 - \frac{1}{d^2} w_{T_{1,3}}} \right),$$

por tanto

$$\Phi(x_2) \bar{e}_{T,1,1} = P_\pi s_{n-3} s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} s_{n-2} \bar{e}_{T,1,1} = s_{n-3} P_\pi s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} s_{n-3} s_{n-2} \bar{e}_{T,1,1}.$$

Aplicando  $s_{n-3}$  en (7.11) y (7.13) y operando algebraicamente obtenemos

$$\begin{aligned} \Phi(x_2) \bar{e}_{T,1,1} &= \left( \frac{(s+1)(r(r+s+d)+r+d+1)}{sr(r+d)(r+s)(r+s+d)} + \frac{(s-1)((r+s)(r+d+1)+d+1)}{sr(r+s+d)(r+s)(r+d)} \right) \bar{u}_{T,1} \\ &\quad + \left( \frac{(s+1)(r+d+1)}{sr(r+d)(r+s+d)} + \frac{(s-1)(r+s+d+1)}{s(r+s+d)(r+s)(r+d)} \right) s_{n-3} \bar{u}_{T,1} \\ &= \frac{2(r+s)(r+d+1) + (1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} \bar{u}_{T,1} + \frac{2(r+s)(r+d+1) + (1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} s_{n-3} \bar{u}_{T,1} \\ &= \frac{2(r+s)(r+d+1) + (1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} \bar{e}_{T,1,1}. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Finalmente recordando que  $e_{T,\pi,\tau} = \frac{\bar{e}_{T,\pi,\tau}}{|\bar{e}_{T,\pi,\tau}|}$ , tenemos

$$\beta_{\pi,\tau}^1 = \frac{2(r+s)(r+d+1) + (1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)}.$$

Omitimos la determinación de  $\beta_{\sigma,-1,1}$  y  $\beta_{\sigma,-1,-1}$ , es decir, el caso  $\delta(\pi) = -1$ , por la analogía en el procedimiento, esto concluye la demostración.  $\square$

### 7.3. Autovalores de las funciones esféricas.

En esta sección comenzamos enunciando la caracterización del Teorema 3.11 en el par que estamos considerando. Posteriormente determinamos los autovalores de la función esférica.

**Teorema 7.6.** *Sean  $f_1$  y  $f_2$  las funciones características de las  $K$ -clases de conjugación de los elementos  $x_1 = (n-2, n-1)$  y  $x_2 = (n-3, n)(n-2, n-1)$ , respectivamente. Si  $(\pi, V)$  una representación irreducible de  $K$ . Una función  $\Phi : G \rightarrow \text{End}(V)$  es una función esférica de tipo  $\pi$  si y solo si*

- i)  $\Phi(e) = I$ ,
- ii)  $\Phi(k_1 g k_2) = \Phi(k_1) \Phi(g) \Phi(k_2)$  para todo  $k_1, k_2 \in K, g \in G$ ,
- iii)  $(\Phi * f_1)(x_i) = \Phi(x_i)(\Phi * f_1)(e)$ ,  $(\Phi * f_2)(x_i) = \Phi(x_i)(\Phi * f_2)(e)$  para  $i = 1, 2$ ,
- iv) la restricción  $\Phi|_K$  es representación de  $K$  equivalente a una suma directa de copias de  $\pi$ .

Recordemos que a los valores  $\eta_1 = (\Phi * f_1)(e)$  y  $\eta_2 = (\Phi * f_2)(e)$  les denominamos autovalores de  $\Phi$ .

*Demostración.* Que una función esférica tiene estas propiedades es una consecuencia del Teorema 3.11. Para la suficiencia, primero demostraremos que si  $f \in A[G]^K$  y  $(\Phi * f)(x_i) = \Phi(x_i)(\Phi * f)(e)$  vale para todo  $x_i \in A$ , entonces  $(\Phi * f)(g) = \Phi(g)(\Phi * f)(e)$  vale para todo  $g \in G$ .

Sean  $x_i \in A$  y  $k \in K$ , entonces

$$(\Phi * f)(kx_i) = \sum_{y \in G} \Phi(kx_i y^{-1}) f(y) = \Phi(k)(\Phi * f)(x_i) = \Phi(kx_i)(\Phi * f)(e).$$

Ahora, sea  $x = k_1 x_i$ , con  $k_1 \in K, x_i \in A$ . Entonces

$$\begin{aligned} (\Phi * f)(xk) &= \sum_{y \in G} \Phi(y) f(y^{-1} xk) = \sum_{y \in G} \Phi(y) f(ky^{-1} x) = \sum_{y \in G} \Phi(yk) f(y^{-1} x) \\ &= (\Phi * f)(x) \Phi(k) = \Phi(x)(\Phi * f)(e) \Phi(k) \\ &= \Phi(xk)(\Phi * f)(e), \end{aligned}$$

porque  $(\Phi * f)(e) \Phi(k) = \Phi(k)(\Phi * f)(e) = (\Phi * f)(e)$  como probamos arriba. De  $G = KAK$  obtenemos que  $(\Phi * f)(g) = \Phi(g)(\Phi * f)(e)$  para todo  $g \in G$ .

Sea  $f \in A[K]$ , entonces

$$(\Phi * f)(g) = \sum_{y \in G} \Phi(gy^{-1}) f(y) = \sum_{y \in K} \Phi(g) \Phi(y^{-1}) f(y) = \Phi(g)(\Phi * f)(e).$$

Así  $(\Phi * f)(g) = \Phi(g)(\Phi * f)(e)$  para  $f \in A[K]^K$  o  $f = f_1, f_2$ .

Para probar que  $(\Phi * F)(g) = \Phi(g)(\Phi * F)(e)$  para todo  $F \in A[G]^K$  es suficiente verificar esto para  $F = fZ_1 \cdots Z_r$  con  $f \in A[K]^K$  y  $Z_j \in \{f_1, f_2\}$  ver la Proposición 5.18. Esto se puede probar por inducción en  $r \geq 0$ . Si  $F = F_1 * F_2$  con  $(\Phi * F_j)(g) = \Phi(g)(\Phi * F_j)(e)$   $j = 1, 2$ , entonces

$$\begin{aligned} (\Phi * F)(g) &= (\Phi * (F_1 * F_2))(g) = (\Phi(\Phi * F_1)(e) * F_2)(g) = (\Phi * F_2)(g)(\Phi * F_1)(e) \\ &= \Phi(g)(\Phi * F_2)(e)(\Phi * F_1)(e) = \Phi(g)(\Phi * F)(e). \end{aligned}$$

Ahora la demostración se sigue directamente del Teorema 3.11 □

**Corolario 7.7.** Sean  $\pi \in \hat{K}$ ,  $f_1$  la función característica de la  $K$  órbita de  $x_1 = (n-1, n-2)$  y  $\Phi$  una función esférica de  $\mathfrak{S}_n$  de tipo  $\pi$ . Entonces  $\Phi$  satisface

i)

$$2 \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-2)) \Phi(x_1) \pi((j, n-2)) = \eta_1 I. \quad (7.15)$$

ii)

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leq i \neq j \leq n-4} \pi((i, n-2)(j, n-3)) \Phi(x_2) \pi((j, n-3)(i, n-2)) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-2)) \Phi(x_2) \pi((i, n-2)) + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-3)) \Phi(x_2) \pi((i, n-3)) \\ &+ 2 \Phi(x_2) = \eta_2 I. \end{aligned} \quad (7.16)$$

*Demostración.* Para i) tenemos que

$$\begin{aligned} (\Phi * f_1)(e) &= \sum_{j=1}^{n-2} (\Phi * (j, n-1))(e) + \sum_{j=1}^{n-2} (\Phi * (j, n))(e) \\ &= 2 \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-2)) \Phi(x_1) \pi((j, n-2)), \end{aligned}$$

porque  $(j, n-1) = (j, n-2)x_1(j, n-2)$ ,  $(j, n) = (n-1, n)(j, n-2)x_1(j, n-2)(n-1, n)$  y  $\pi(n-1, n) = \delta I$ .

Para ii) comenzamos trabajando con las ecuaciones

$$(\Phi * f_2)(s) = \Phi(s)(\Phi * f_2)(e)$$

para  $s = (1), x_1, x_2$ . Por definición

$$f_2 = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-2} (n-1, i)(n, j).$$

Como hemos observado previamente tenemos  $(\Phi * f_2)(e) = \eta_2 I$  para algún  $\eta_2 \in \mathbb{C}$ . Más aún

$$(\Phi * f_2)(e) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-2} (\Phi * ((n-1, i)(n, j)))(e) = \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-2} \Phi((j, n)(i, n-1)).$$

Necesitamos las siguientes identidades: Para  $1 \leq i \neq j \leq n-4$  tenemos

$$(j, n)(i, n-1) = (i, n-2)(j, n-3)x_2(j, n-3)(i, n-2),$$

para  $1 \leq i, j \leq n-4$  tenemos

$$\begin{aligned} (n-3, n)(i, n-1) &= (i, n-2)x_2(i, n-2), \\ (j, n)(n-3, n-1) &= (j, n-2)x_2(n-3, n-2)(j, n-2)(n-1, n), \end{aligned}$$

para  $1 \leq i, j \leq n-4$  tenemos

$$\begin{aligned} (n-2, n)(i, n-1) &= (i, n-3)x_2(n-1, n)(n-3, n-2)(i, n-3), \\ (j, n)(n-2, n-1) &= (j, n-3)x_2(j, n-3), \\ (n-2, n)(n-3, n-1) &= (n-1, n)x_2(n-1, n), \\ (n-3, n)(n-2, n-1) &= x_2. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (\Phi * f_2)(e) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-4} \pi((i, n-2)(j, n-3))\Phi(x_2)\pi((j, n-3)(i, n-2)) \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-2))\Phi(x_2)\pi((i, n-2)) \\ &+ \alpha \sum_{1 \leq j \leq n-4} \pi((j, n-2))\Phi(x_2)\pi((n-3, n-2)(j, n-2)) \\ &+ \alpha \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-3))\Phi(x_2)\pi((n-3, n-2)(i, n-3)) \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq n-4} \pi((j, n-3))\Phi(x_2)\pi((j, n-3)) + \Phi(x_2) + \Phi(x_2). \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $\pi((n-3, n-2))\Phi(x_2) = \alpha\Phi(x_2) = \Phi(x_2)\pi((n-3, n-2))\Phi(x_2)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} (\Phi * f_2)(e) &= \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-4} \pi((i, n-2)(j, n-3))\Phi(x_2)\pi((j, n-3)(i, n-2)) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-2))\Phi(x_2)\pi((i, n-2)) \\ &+ 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-3))\Phi(x_2)\pi((i, n-3)) + 2\Phi(x_2). \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración de (7.16). □

### 7.3.1. Autovalor $\eta_1$ .

Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4} \times \mathfrak{S}_2'}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ , nuestro objetivo es determinar el autovalor  $\eta_1$  en términos del contenido de cualquier tableau  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$ .

**Proposición 7.8.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\pi = \mu \otimes \delta$  una representación irreducible de  $K = \mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2$  contenida en  $\rho$ . Si  $\Phi$  es la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$  y  $f_1$  la función característica de la  $K$ -clase de conjugación de  $x_1 = (n-2, n-1)$ . Entonces la función  $(\Phi * f_1)(e)$  es un  $K$ -morfismo por tanto existe un escalar  $\eta_1 \in \mathbb{C}$  tal que  $(\Phi * f_1)(e) = \eta_1 Id$  y

$$\eta_1 = \frac{n(n-1)}{2d(\rho)} \chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) - \frac{(n-2)(n-3)}{2d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2})) - \delta.$$

*Demostración.* Que  $(\Phi * f_1)(e)$  es un  $K$ -morfismo lo vimos en (6.3). Sea  $Q$  la  $K$ -clase de conjugación de  $x_1$ , entonces

$$\begin{aligned} (\Phi * f_1)(e) &= \sum_{y \in K} \Phi(y) f_1(y^{-1}) = \sum_{y \in K} \Phi(y) f_1(y) = \sum_{y \in Q} \Phi(y) \\ &= \sum_{j=1}^{n-2} \Phi((j, n-1)) + \sum_{j=1}^{n-1} \Phi((j, n)) - \delta I \\ &= P_\pi \left( \sum_{j=1}^{n-2} \rho((j, n-1)) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho((j, n)) \right) P_\pi - \delta I, \end{aligned}$$

porque  $\Phi((n, n-1)) = \delta I$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-2} \rho((j, n-1)) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \rho((i, j)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \rho((i, j)), \\ \sum_{j=1}^{n-1} \rho((j, n)) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho((i, j)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \rho((i, j)). \end{aligned}$$

De ahí

$$\sum_{j=1}^{n-2} \rho((j, n-1)) + \sum_{j=1}^{n-1} \rho((j, n)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho((i, j)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \rho((i, j)).$$

El  $G$ -módulo  $V_\rho$  y el  $K$ -submódulo  $V = V_\pi$  son irreducibles, por el Lema de Schur

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \rho((i, j)) = aI \quad \text{y} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n-2} \rho((i, j)) = bI. \quad (7.17)$$

Tomando traza tenemos

$$\frac{n(n-1) \chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n))}{2} = ad(\rho) \quad \text{y} \quad \frac{(n-2)(n-3) \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2}))}{2} = bd(\mu).$$

Finalmente obtenemos

$$(\Phi * f_1)(e) = (a - b - \delta)I.$$

Por eso

$$\eta_1 = \frac{n(n-1)}{2d(\rho)} \chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) - \frac{(n-2)(n-3)}{2d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2})) - \delta.$$

Esto completa la demostración.  $\square$

Recordemos que cuando  $\sigma \in \mathcal{S}_2$ , existen dos representaciones  $v_1$  y  $v_2$  en  $Res_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes \delta)$  tales que  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_1)$  y  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_2)$ , además, si  $V_\sigma^1$  y  $V_\sigma^2$  denotan las componentes isotópicas de  $\sigma$  en  $v_1$  y  $v_2$  respectivamente, entonces

$$V(\sigma) = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg} = V_\sigma^1 \oplus V_\sigma^2.$$

Sea

$$P = \sum_{j=1}^{n-4} \pi((j, n-3)), \quad (7.18)$$

claramente  $P$  es  $\mathfrak{S}_{n-3}$ -morfismo, por tanto preserva  $V_\sigma^1$  y  $V_\sigma^2$  que son  $\mathfrak{S}_{n-3}$ -módulos. De ahí que existen  $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$  tales que

$$Pu_{T,\pi} = \mu_1 u_{T,\pi} \quad y \quad Pu_{s_{n-3}T,\delta} = \mu_2 u_{s_{n-3}T,\delta} \quad \text{para todo } T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\delta,\varepsilon}.$$

La representación matricial de  $P$  en la base  $\mathcal{B}_{\sigma,\delta,\varepsilon}^u$  de  $V(\sigma)$  es

$$P = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Se cumple que  $P$  es un  $\mathfrak{S}_{n-4}$ -morfismo, en la base  $\mathcal{B}_{\sigma,\delta,\varepsilon}^e = \{\tilde{e}_{T,\delta(\pi),\varepsilon(\tau)} : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{\delta,\varepsilon}\}$  de  $V(\sigma)$  tenemos

$$P = \begin{pmatrix} a-1 & -b \\ -c & d+1 \end{pmatrix},$$

por medio de la matriz de cambio de base, ver Teorema 5.13, tenemos

$$\begin{pmatrix} a-1 & -b \\ -c & \tilde{d}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{d}(\mu_1 - \mu_2) & \left(1 + \frac{1}{d}\right)(\mu_1 - \mu_2) \\ \left(1 - \frac{1}{d}\right)(\mu_1 - \mu_2) & \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{d}(\mu_1 - \mu_2) \end{pmatrix}. \quad (7.19)$$

En el siguiente resultado determinamos los escalares  $\mu_1$  y  $\mu_2$ . Recordemos que dada una representación  $\sigma \in \hat{\mathfrak{S}}_{n-4}$  denotamos por  $\chi_\sigma(C(2, \mathfrak{S}_{n-4}))$  al carácter de  $\sigma$  en la clase de conjugación  $C(2, \mathfrak{S}_{n-4})$ , de los dos ciclos en  $\mathfrak{S}_{n-4}$ .

**Proposición 7.9.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in Res_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,  $v_1, v_2 \in Res_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  con  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_1)$  y  $\sigma \in Res_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(v_2)$ . Para el operador definido en (7.18), Tenemos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{(n-3)(n-4)}{2d(v_1)} \chi_{v_1}(C(2, \mathfrak{S}_{n-3})) - \frac{(n-4)(n-5)}{2d(\sigma)} \chi_\sigma(C(2, \mathfrak{S}_{n-4})), \\ \mu_2 &= \frac{(n-3)(n-4)}{2d(v_2)} \chi_{v_2}(C(2, \mathfrak{S}_{n-3})) - \frac{(n-4)(n-5)}{2d(\sigma)} \chi_\sigma(C(2, \mathfrak{S}_{n-4})). \end{aligned} \quad (7.20)$$

*Demostración.* Observamos que

$$\sum_{j=1}^{n-4} v_1((j, n-3)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-3} v_1((i, j)) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-4} v_1((i, j)).$$

Tenemos

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-3} v_1((i, j)) = xI, \quad \text{tomando traza tenemos } \frac{(n-3)(n-4)}{2} \chi_{v_1}(C(2, \mathfrak{S}_{n-3})) = xd(v_1).$$

Similarmente

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n-4} \nu_1((i, j)) = \sum_{1 \leq i < j \leq n-4} \sigma((i, j)) = yI,$$

tomando traza

$$\frac{(n-4)(n-5)}{2} \chi_\sigma(C(2, \mathfrak{S}_{n-4})) = yd(\sigma).$$

Esto completa la demostración de la primera fórmula. La otra sigue de cambiar  $\nu_1$  por  $\nu_2$ .  $\square$

Vimos en el Capítulo 4 una fórmula para el carácter de representaciones irreducibles de  $\mathfrak{S}_n$  en dos ciclos. Dado  $\rho$  partición de  $n$ , si la diagonal principal de su diagrama de Young tiene  $t$  cajas. Sea  $a_i^\rho$  el número de cajas debajo de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal, y sea  $b_i^\rho$  el número de cajas a la derecha de la  $i$ -ésima caja de la diagonal principal. Tenemos que  $a_1^\rho > a_2^\rho > \dots > a_t^\rho$  y  $b_1^\rho > b_2^\rho > \dots > b_t^\rho$ , denotamos a  $\rho$  por

$$\rho = (b_1^\rho, b_2^\rho, \dots, b_t^\rho | a_1^\rho, a_2^\rho, \dots, a_t^\rho).$$

Entonces tenemos la siguiente expresión general del carácter  $\chi_\rho$  en la clase de conjugación  $C(2, \mathfrak{S}_n)$  de la clase de conjugación de los 2-ciclos en  $\mathfrak{S}_n$ :

$$\chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) = \frac{d(\rho)}{n(n-1)} \sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1)). \quad (7.21)$$

En particular tenemos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\mu (b_i^\mu + 1) - a_i^\mu (a_i^\mu + 1)) - \delta, \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^{\nu_1} (b_i^{\nu_1} + 1) - a_i^{\nu_1} (a_i^{\nu_1} + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\sigma (b_i^\sigma + 1) - a_i^\sigma (a_i^\sigma + 1)), \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^{\nu_2} (b_i^{\nu_2} + 1) - a_i^{\nu_2} (a_i^{\nu_2} + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\sigma (b_i^\sigma + 1) - a_i^\sigma (a_i^\sigma + 1)). \end{aligned}$$

Sea  $T \in \text{Tab}(\rho)$ . Si  $\rho = (b_1^\rho, b_2^\rho, \dots, b_t^\rho | a_1^\rho, a_2^\rho, \dots, a_t^\rho)$  extendemos la definición de  $b_i^\rho$  y  $a_i^\rho$  poniendo  $b_i^\rho = a_i^\rho = 0$  para todo  $i > t$ . Recordemos que  $i: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$  y  $j: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, \rho_1\}$  denotan las funciones en las que  $i(m)$ ,  $j(m)$  son la fila y la columna de  $T$  que contiene a  $m$ , respectivamente.

**Lema 7.10.** Sea  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$  y  $\theta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ . Con la notación previa tenemos

$$\sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1)) - \sum_{i=1}^t (b_i^\theta (b_i^\theta + 1) - a_i^\theta (a_i^\theta + 1)) = 2(b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho).$$

*Demostración.* Sean  $i(n) \leq t$  y  $1 \leq i \leq t$ . Entonces  $a_i^\rho = a_i^\theta$ . Más aún,  $b_i^\rho = b_i^\theta$  para todo  $i \neq i(n)$ . Por tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1) - b_i^\theta (b_i^\theta + 1) + a_i^\theta (a_i^\theta + 1)) \\ &= b_{i(n)}^\rho (b_{i(n)}^\rho + 1) - b_{i(n)}^\theta (b_{i(n)}^\theta + 1). \end{aligned}$$

(i) Si  $i(n) < t$ , entonces  $b_{i(n)}^\theta = b_{i(n)}^\rho - 1$  y  $a_{j(n)}^\rho = 0$  porque  $j(n) > t$ . Así

$$\begin{aligned} & b_{i(n)}^\rho (b_{i(n)}^\rho + 1) - b_{i(n)}^\theta (b_{i(n)}^\theta + 1) \\ &= b_{i(n)}^\rho (b_{i(n)}^\rho + 1) - (b_{i(n)}^\rho - 1) b_{i(n)}^\rho = 2b_{i(n)}^\rho = 2(b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho). \end{aligned}$$

(ii) Si  $i(n) = t$ , entonces cuando  $j(n) > t$  tenemos  $b_{i(n)}^\theta = b_{i(n)}^\rho - 1$  y

$$b_{i(n)}^\rho (b_{i(n)}^\rho + 1) - b_{i(n)}^\theta (b_{i(n)}^\theta + 1) = 2(b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho).$$

Si  $j(n) = t$  entonces  $b_{i(n)}^\theta = b_{i(n)}^\rho = a_{j(n)}^\rho = 0$ . Por tanto

$$b_{i(n)}^\rho (b_{i(n)}^\rho + 1) - b_{i(n)}^\theta (b_{i(n)}^\theta + 1) = 0 = 2(b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho).$$

Finalmente Si  $i(n) > t$  y  $1 \leq i \leq t$ , entonces  $b_i^\rho = b_i^\theta$  y  $a_i^\rho = a_i^\theta$  para todo  $i \neq j(n)$ . Además  $a_{j(n)}^\theta = a_{j(n)}^\rho - 1$ . Por tanto

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1)) - \sum_{i=1}^t (b_i^\theta (b_i^\theta + 1) - a_i^\theta (a_i^\theta + 1)) = -a_{j(n)}^\rho (a_{j(n)}^\rho + 1) + a_{j(n)}^\theta (a_{j(n)}^\theta + 1) \\ & = -a_{j(n)}^\rho (a_{j(n)}^\rho + 1) + (a_{j(n)}^\rho - 1) a_{j(n)}^\rho = -2a_{j(n)}^\rho = 2(b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho). \end{aligned}$$

Queda demostrado.  $\square$

A partir del resultado anterior tenemos

**Lema 7.11.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  tales que  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_1)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_2)$ . Entonces

$$\eta_1 = (b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho) + (b_{i(n-1)}^\rho - a_{j(n-1)}^\rho) - \delta,$$

$$\mu_1 = b_{i(n-3)}^{\nu_1} - a_{j(n-3)}^{\nu_1} \quad \text{y} \quad \mu_2 = b_{i(n-3)}^{\nu_2} - a_{j(n-3)}^{\nu_2}.$$

*Demostración.* Tenemos

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\rho (b_i^\rho + 1) - a_i^\rho (a_i^\rho + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\theta (b_i^\theta + 1) - a_i^\theta (a_i^\theta + 1)) \\ & \quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\theta (b_i^\theta + 1) - a_i^\theta (a_i^\theta + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\mu (b_i^\mu + 1) - a_i^\mu (a_i^\mu + 1)) - \delta. \end{aligned}$$

Por el Lema 7.10 tenemos

$$\eta_1 = (b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho) + (b_{i(n-1)}^\theta - a_{j(n-1)}^\theta) - \delta.$$

Como  $b_{i(n-1)}^\theta = b_{i(n-1)}^\rho$  y  $a_{j(n-1)}^\theta = a_{j(n-1)}^\rho$  obtenemos la expresión anunciada para  $\eta_1$ . Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^{\nu_1} (b_i^{\nu_1} + 1) - a_i^{\nu_1} (a_i^{\nu_1} + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\sigma (b_i^\sigma + 1) - a_i^\sigma (a_i^\sigma + 1)) \\ & = b_{i(n-3)}^{\nu_1} - a_{j(n-3)}^{\nu_1}, \\ \mu_2 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^{\nu_2} (b_i^{\nu_2} + 1) - a_i^{\nu_2} (a_i^{\nu_2} + 1)) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^t (b_i^\sigma (b_i^\sigma + 1) - a_i^\sigma (a_i^\sigma + 1)) \\ & = b_{i(n-3)}^{\nu_2} - a_{j(n-3)}^{\nu_2}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

Recordemos que  $r_T(i, j)$  denota la distancia axial del elemento  $i$  al  $j$  en un tableau arbitrario  $T$ . En los siguientes Lemas relacionamos los valores  $a_i^\rho, b_j^\rho$  con distancias axiales.

**Lema 7.12.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  tales que  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_1)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_2)$ . Si  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$ , entonces

$$r_T(n, n-1) = b_{i(n)}^{\rho} - a_{j(n)}^{\rho} - b_{i(n-1)}^{\rho} + a_{j(n-1)}^{\rho}. \quad (7.22)$$

*Demostración.* Recordemos que por definición

$$r_T(n, n-1) = (j(n) - i(n)) - (j(n-1) - i(n-1)).$$

Para facilitar la notación en esta prueba ponemos  $b_i^{\rho} = b_i$  y  $a_i^{\rho} = a_i$ .

Comenzamos considerando  $i(n), i(n-1) \leq t$  entonces  $j(n) = b_{i(n)} + i(n)$  y  $j(n-1) = b_{i(n-1)} + i(n-1)$ . Por tanto  $r_T(n, n-1) = b_{i(n)} - b_{i(n-1)}$ , como  $j(n), j(n-1) \geq t$  tenemos  $a_{j(n)} = a_{j(n-1)} = 0$ .

Cuando  $i(n) \leq t < i(n-1)$ , entonces  $j(n) = b_{i(n)} + i(n)$  y  $i(n-1) = a_{j(n-1)} + j(n-1)$ . Por eso  $r_T(n, n-1) = b_{i(n)} + a_{j(n-1)}$ , como  $j(n), i(n-1) \geq t$  tenemos  $b_{i(n-1)} = a_{j(n)} = 0$ . Consideramos ahora  $i(n-1) \leq t < i(n)$ , entonces tenemos que  $i(n) = a_{j(n)} + j(n)$  y  $j(n-1) = b_{i(n-1)} + i(n-1)$ . Por eso  $r_T(n, n-1) = -a_{j(n)} - b_{i(n-1)}$ . Como  $j(n-1), i(n) \geq t$  obtenemos  $b_{i(n)} = a_{j(n-1)} = 0$ .

Finalmente cuando  $i(n), i(n-1) > t$ , entonces  $i(n) = a_{j(n)} + j(n)$  y  $i(n-1) = a_{j(n-1)} + j(n-1)$ . Por eso  $r_T(n, n-1) = -a_{j(n)} + a_{j(n-1)}$ , como  $i(n-1), i(n) > t$  tenemos  $b_{i(n)} = b_{i(n-1)} = 0$ . Por lo tanto (7.22) vale en todos los casos posibles.  $\square$

**Lema 7.13.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  con  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_1)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_2)$ . Si  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$  y  $d = r_T(n-2, n-3)$ . Entonces  $\mu_1 - \mu_2 = -d$ .

*Demostración.* Por el Lema 7.11 tenemos  $\mu_1 = b_{i(n-3)}^{\nu_1} - a_{j(n-3)}^{\nu_1}$ ,  $\mu_2 = b_{i(n-3)}^{\nu_2} - a_{j(n-3)}^{\nu_2}$  y del Lema 7.12 obtenemos  $r_T(n-2, n-3) = b_{i(n-2)}^{\mu} - a_{j(n-2)}^{\mu} - b_{i(n-3)}^{\mu} + a_{j(n-3)}^{\mu}$ . Más aún  $b_{i(n-3)}^{\mu} = b_{i(n-3)}^{\nu_1}$ ,  $a_{j(n-3)}^{\mu} = a_{j(n-3)}^{\nu_1}$ ,  $b_{i(n-2)}^{\mu} = b_{i(n-2)}^{\nu_2}$  y  $a_{j(n-2)}^{\mu} = a_{j(n-2)}^{\nu_2}$ . Por lo tanto  $\mu_1 - \mu_2 = -d$ .  $\square$

En el siguiente Teorema necesitamos recordar que para  $\sigma \in \mathcal{J}_2$  en (7.19) vimos la siguiente expresión para el operador  $P = \sum_{j=1}^{n-4} \pi((j, n-3))$  en  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$ .

$$\begin{pmatrix} a-1 & -b \\ -c & \tilde{d}+1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mu_1 + \mu_2 + \frac{1}{d}(\mu_1 - \mu_2) & \left(1 + \frac{1}{d}\right)(\mu_1 - \mu_2) \\ \left(1 - \frac{1}{d}\right)(\mu_1 - \mu_2) & \mu_1 + \mu_2 - \frac{1}{d}(\mu_1 - \mu_2) \end{pmatrix}.$$

**Teorema 7.14.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$ ,  $\nu_1, \nu_2 \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-3}}^{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$  con  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_1)$  y  $\sigma \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-4}}^{\mathfrak{S}_{n-3}}(\nu_2)$ . Sean  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$  y  $s = r_T(n, n-1)$ ,  $r = r_T(n-1, n-2)$ ,  $d = r_T(n-2, n-3)$ . Cuando  $\delta = 1$  se tiene

$$\eta_1 - 2(a-1) = 2r + s + d.$$

*Demostración.* De los Lemas 7.11 y 7.12 obtenemos

$$\eta_1 = b_{i(n)}^{\rho} - a_{j(n)}^{\rho} + b_{i(n-1)}^{\rho} - a_{j(n-1)}^{\rho} - 1, \quad s = r_T(n, n-1) = b_{i(n)}^{\rho} - a_{j(n)}^{\rho} - b_{i(n-1)}^{\rho} + a_{j(n-1)}^{\rho},$$

$$\mu_1 = b_{i(n-3)}^{\nu_1} - a_{j(n-3)}^{\nu_1}, \quad \mu_2 = b_{i(n-3)}^{\nu_2} - a_{j(n-3)}^{\nu_2}.$$

Y por el Lema 7.12 se sigue:

$$\begin{aligned} d = r_T(n-2, n-3) &= b_{i(n-2)}^{\mu} - a_{j(n-2)}^{\mu} - b_{i(n-3)}^{\mu} + a_{j(n-3)}^{\mu}, \\ r = r_T(n-1, n-2) &= b_{i(n-1)}^{\theta} - a_{j(n-1)}^{\theta} - b_{i(n-2)}^{\theta} + a_{j(n-2)}^{\theta}. \end{aligned}$$



Notemos que  $b_{i(n-1)}^\theta = b_{i(n-1)}^\rho$ ,  $a_{j(n-1)}^\theta = a_{j(n-1)}^\rho$ ,  $b_{i(n-2)}^\theta = b_{i(n-3)}^{v_2}$ ,  $a_{j(n-2)}^\theta = a_{j(n-3)}^{v_2}$ .

Por lo tanto  $r + s = b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho - b_{i(n-3)}^{v_2} + a_{j(n-3)}^{v_2}$ .

También tenemos

$$b_{i(n-2)}^\theta = b_{i(n-2)}^{\mu_1}, \quad a_{j(n-2)}^\theta = a_{j(n-2)}^{\mu_1}, \quad b_{i(n-3)}^{v_1} = b_{i(n-3)}^{\mu_1}, \quad a_{j(n-3)}^{v_1} = a_{j(n-3)}^{\mu_1}.$$

Así

$$r + d = b_{i(n-1)}^\theta - a_{j(n-1)}^\theta - b_{i(n-3)}^{v_1} + a_{j(n-3)}^{v_1}$$

y

$$2r + s + d = b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho - b_{i(n-3)}^{v_2} + a_{j(n-3)}^{v_2} + b_{i(n-1)}^\theta - a_{j(n-1)}^\theta - b_{i(n-3)}^{v_1} + a_{j(n-3)}^{v_1}. \quad (7.23)$$

Por otro lado  $\eta_1 - 2(a-1) = \eta_1 - (\mu_1 + \mu_2) - \frac{1}{d}(\mu_1 - \mu_2)$  y  $\mu_1 - \mu_2 = -d$ .

Por eso

$$\begin{aligned} \eta_1 - 2(a-1) &= \eta_1 - (\mu_1 + \mu_2) + 1 \\ &= b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho + b_{i(n-1)}^\rho - a_{j(n-1)}^\rho - 1 - (b_{i(n-3)}^{v_1} - a_{j(n-3)}^{v_1} + b_{i(n-3)}^{v_2} - a_{j(n-3)}^{v_2}) + 1 \\ &= b_{i(n)}^\rho - a_{j(n)}^\rho + b_{i(n-1)}^\rho - a_{j(n-1)}^\rho - b_{i(n-3)}^{v_1} + a_{j(n-3)}^{v_1} - b_{i(n-3)}^{v_2} + a_{j(n-3)}^{v_2} \\ &= 2r + s + d. \end{aligned} \quad (7.24)$$

La última igualdad se sigue de (7.23) considerando que  $b_{i(n-1)}^\theta = b_{i(n-1)}^\rho$  y  $a_{j(n-1)}^\theta = a_{j(n-1)}^\rho$ . Esto completa la demostración.  $\square$

A partir de los resultados obtenidos estamos listos para determinar el autovalor  $\eta_1$  en términos del contenido de un tableau.

**Proposición 7.15.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Sea  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$  y  $C(T) = (c_1(T), c_2(T), \dots, c_n(T))$  el contenido de  $T$ . Entonces el autovalor  $\eta_1$  correspondiente a la función esférica  $\Phi$  está dado por

$$\eta_1 = c_n(T) + c_{n-1}(T) - \delta. \quad (7.25)$$

*Demostración.* Hay cuatro casos para ser considerados:

El primero, cuando  $i(n), i(n-1) \leq t$ , tenemos  $j(n) = b_{i(n)} + i(n)$  y  $j(n-1) = b_{i(n-1)} + i(n-1)$ . Como  $j(n), j(n-1) \geq t$  tenemos  $a_{j(n)} = a_{j(n-1)} = 0$ . Por eso

$$\eta_1 = b_{i(n)} + b_{i(n-1)} - \delta = j(n) - i(n) + j(n-1) - i(n-1) - \delta$$

y (7.25) se cumple.

Cuando  $i(n) \leq t < i(n-1)$ , tenemos  $j(n) = b_{i(n)} + i(n)$  y  $i(n-1) = a_{j(n-1)} + j(n-1)$ . Como  $j(n), i(n-1) \geq t$  tenemos  $b_{i(n-1)} = a_{j(n)} = 0$ . Por lo tanto

$$\eta_1 = b_{i(n)} - a_{j(n-1)} - \delta = j(n) - i(n) + j(n-1) - i(n-1) - \delta,$$

la ecuación (7.25) se cumple. Consideramos ahora el caso  $i(n-1) \leq t < i(n)$ . Entonces  $i(n) = a_{j(n)} + j(n)$  y  $j(n-1) = b_{i(n-1)} + i(n-1)$ . Como  $j(n-1), i(n) \geq t$  tenemos  $b_{i(n)} = a_{j(n-1)} = 0$ . Por eso  $\eta_1 = -a_{j(n)} + b_{i(n-1)} - 1 = j(n) - i(n) + j(n-1) - i(n-1) - \delta$  y (7.25) vale.

Finalmente, cuando  $i(n), i(n-1) > t$ , tenemos  $i(n) = a_{j(n)} + j(n)$  y  $i(n-1) = a_{j(n-1)} + j(n-1)$ . Como  $i(n-1), i(n) > t$ , además  $b_{i(n)} = b_{i(n-1)} = 0$ . Por eso

$$\eta_1 = -a_{j(n)} - a_{j(n-1)} - \delta = j(n) - i(n) + j(n-1) - i(n-1) - \delta,$$

y (7.25) vale en todos los casos posibles.  $\square$

### 7.3.2. Autovalor $\eta_2$ .

Consideramos  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  con  $m_\mu(\rho) = 2$ . Recordemos que  $f_2$  es la función característica de la  $K$ -clase de conjugación de  $x_2 = (n-3, n)(n-2, n-1)$ , de la misma forma que vimos para  $\eta_1$ , el operador  $(\Phi * f_2)(x_0)$  es un  $K$ -morfismo, por tanto existe un escalar  $\eta_2$  tal que

$$(\Phi * f_2)(x_0) = \eta_2 I.$$

Sea  $O$  la clase de conjugación de todos los productos de dos transposiciones de  $G = \mathfrak{S}_n$ , es decir,  $O = C(2^2, \mathfrak{S}_n)$ , con  $n \geq 6$ . Estamos interesados en descomponer  $O$  en  $K$ -clases de conjugación:

Sea  $Q_1$  el conjunto de todos los productos  $(i, j)(n-1, n)$  con  $1 \leq i \neq j \leq n-2$ , es decir,

$$Q_1 = \{(i, j)(n-1, n) : 1 \leq i \neq j \leq n-2\},$$

$Q_2$  es el conjunto de todos los productos de dos transposiciones disjuntas de la forma  $(i, n-1)(j, n)$ . Observamos que  $Q_2$  es la  $K$ -clase de conjugación de  $x_2$ .

Sea  $Q_3$  el conjunto de todos los productos de dos transposiciones disjuntas de la forma  $(i, j)$  con  $1 \leq i \neq j \leq n-2$ .

Finalmente por  $Q_4$  denotamos al conjunto de todos los productos de dos transposiciones disjuntas donde precisamente una es de la forma  $(i, n-1)$  o  $(i, n)$  con  $1 \leq i \leq n-2$ .

Entonces

$$O = Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4.$$

Denotaremos por  $\mathfrak{S}'_{n-1}$  al grupo de permutaciones de los elementos  $\{1, \dots, n-2, n\}$ . Sea  $O_4$  el conjunto de todos los productos de dos transposiciones disjuntas en  $\mathfrak{S}_{n-1}$  donde una es de la forma  $(i, n-1)$ , y el conjunto  $O'_4$  de todos los productos de transposiciones disjuntas en  $\mathfrak{S}'_{n-1}$  donde una es de la forma  $(i, n)$ .

Sean  $f, h_1, h_3, h_4, h'_4$  respectivamente, las funciones características de  $O, Q_1, Q_3, O_4$  y  $O'_4$ . Entonces  $h_4 + h'_4$  es la función característica de  $Q_4$ . Por tanto

$$f = h_1 + f_2 + h_3 + h_4 + h'_4. \quad (7.26)$$

En general, si  $O$  es una clase de conjugación en un grupo finito  $G$  y dado un subgrupo  $K, Q$  es una  $K$ -clase de conjugación en  $G$ . Sean  $f_O$  y  $f_Q$  las respectivas funciones características. Entonces por los Teoremas 6.4 y 6.5 tenemos

$$(\Phi * f_O)(x_0) = \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O) I, \quad (\Phi * f_Q)(x_0) = \frac{|Q|}{d(\pi)} \chi_\pi(Q) I, \quad (7.27)$$

donde  $\chi_\rho(O) = \chi_\rho(y)$  para cualquier  $y \in O$  y  $\chi_\pi(Q) = \chi_\pi(y)$  para cualquier  $y \in Q$ .

A partir de estos resultados tenemos.

**Proposición 7.16.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Asumiremos que  $\delta = 1$ , es decir  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  y que  $m_\mu(\rho) = 2$ .

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O) - \frac{|C(2, \mathfrak{S}_{n-2})|}{d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2})) + \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3) \\ &\quad - |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} + \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) \\ &\quad - \frac{1}{s} |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} - \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right). \end{aligned}$$

*Demostración.* De la ecuación (7.26) tenemos

$$(\Phi * f_2)(x_0) = (\Phi * f)(x_0) - (\Phi * h_1)(x_0) - (\Phi * h_3)(x_0) - (\Phi * (h_4 + h'_4))(x_0). \quad (7.28)$$

De las ecuaciones (7.27) conseguimos directamente que las igualdades valen para  $V_\pi$ .

$$(\Phi * f)(x_0) = \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O)I, \quad (\Phi * h_3)(x_0) = \frac{|Q_3|}{d(\pi)} \chi_\pi(Q_3)I.$$

Observando que  $Q_1 = C(2, \mathfrak{S}_{n-2})(n-1, n)$  se sigue que

$$(\Phi * h_1)(x_0) = \frac{|Q_1|}{d(\pi)} \chi_\pi(Q_1)I = \frac{|C(2, \mathfrak{S}_{n-2})|}{d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2}))I.$$

El calculo de  $(\Phi * (h_4 + h'_4))(x_0)$  requiere mas esfuerzo.

Recordemos que  $\{u_{T,1} = w_T + s_{n-1}w_T : T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu}\}$ , es una base de  $V_\pi$ . Observemos que

$$\begin{aligned} (\Phi * h_4)(x_0)u_{T,1} &= \sum_{y \in O_4} \rho(y) \left( \left(1 + \frac{1}{s}\right)w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{s_{n-1}T} \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left( \sum_{y \in C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})} \rho(y) - \sum_{y \in Q_3} \rho(y) \right) w_T \\ &\quad + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \left( \sum_{y \in C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})} \rho(y) - \sum_{y \in Q_3} \rho(y) \right) w_{s_{n-1}T} \\ &= \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left( \frac{|C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\theta)} \chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})) - \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3) \right) w_T \\ &\quad + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \left( \frac{|C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\theta_1)} \chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})) - \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3) \right) w_{s_{n-1}T}. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Dejamos por un momento

$$\begin{aligned} A &= \frac{|C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\theta)} \chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})) - \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3), \\ B &= \frac{|C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\theta_1)} \chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})) - \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3). \end{aligned}$$

Por definición  $O'_4 = s_{n-1}O_4s_{n-1}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} (\Phi * h'_4)(x_0)u_{T,1} &= \sum_{y \in O_4} \rho(s_{n-1})\rho(y)v_T = \rho(s_{n-1})(\Phi * h_4)(x_0)u_{T,1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{s}\right)A\rho(s_{n-1})w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}B\rho(s_{n-1})w_{s_{n-1}T} \\ &= \left(1 + \frac{1}{s}\right)A\left(\frac{1}{s}w_T + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_{s_{n-1}T}\right) + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}B\left(-\frac{1}{s}w_{s_{n-1}T} + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}w_T\right) \\ &= \left(\frac{1}{s}\left(1 + \frac{1}{s}\right)A + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right)B\right)w_T + \left(\left(1 + \frac{1}{s}\right)\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}A - \frac{1}{s}\sqrt{1 - \frac{1}{s^2}}B\right)w_{s_{n-1}T}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\Phi * (h_4 + h'_4))(x_0)u_{T,1} &= \left(1 + \frac{1}{s}\right) \left( \left(1 + \frac{1}{s}\right)A + \left(1 - \frac{1}{s}\right)B \right) w_T \\ &\quad + \sqrt{1 - \frac{1}{s^2}} \left( \left(1 + \frac{1}{s}\right)A + \left(1 - \frac{1}{s}\right)B \right) w_{s_{n-1}T} \\ &= \left( \left(1 + \frac{1}{s}\right)A + \left(1 - \frac{1}{s}\right)B \right) u_{T,1} = \left( A + B + \frac{1}{s}(A - B) \right) u_{T,1}. \end{aligned}$$

Tenemos

$$A + B = |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} + \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) - 2 \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3),$$

$$A - B = |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} - \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right).$$

Por lo tanto

$$(\Phi^*(h_4 + h'_4))(x_0) = |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} + \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) I$$

$$+ \frac{1}{s} |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} - \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) I - 2 \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3) I.$$

Regresando a la ecuación (7.28) y usando el cálculo de arriba concluimos la demostración.  $\square$

Recordemos que  $[n]_4 = n(n-1)(n-2)(n-3)$ .

**Lema 7.17.** Si  $O = C(2^2, \mathfrak{S}_n)$  entonces  $|O| = \frac{[n]_4}{8}$ .

*Demostración.* Tenemos que

$$O = \{(1, k)(i, j) : k > 1; i, j \neq 1, k; 2 < i < j\} \cup \{(2, k)(i, j) : k > 2; i, j \neq 2, k; 3 < i < j\}$$

$$\dots \cup \{(n-3, k)(i, j) : k > n-3; i, j \neq n-3, k; n-3 < i < j\}.$$

Por lo tanto

$$|O| = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2} + \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{2} + \dots + \frac{3 \times 2 \times 1}{2}$$

$$= \sum_{j=1}^{n-3} \frac{(n-j)(n-j-1)(n-j-2)}{2}.$$

Tenemos

$$(n-j)(n-j-1)(n-j-2) = n(n-1)(n-2) - (3n^2 - 6n + 2)j + 3(n-1)j^2 - j^3.$$

Mediante el uso de

$$\sum_{j=1}^{n-3} j = \frac{(n-2)(n-3)}{2}, \quad \sum_{j=1}^{n-3} j^2 = \frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6}, \quad \sum_{j=1}^{n-3} j^3 = \frac{((n-3)(n-2))^2}{4}$$

obtenemos

$$\sum_{j=1}^{n-3} (n-j)(n-j-1)(n-j-2) = [n]_4 - \frac{1}{2}(3n^2 - 6n + 2)(n-2)(n-3)$$

$$+ \frac{1}{2}(n-1)(n-3)(n-2)(2n-5) - \frac{1}{4}((n-3)(n-2))^2$$

$$= [n]_4 - \frac{1}{4}(n-2)(n-3)(6n^2 - 12n + 4 - 4n^2 + 14n - 10 + n^2 - 5n + 6)$$

$$= [n]_4 - \frac{1}{4}(n-2)(n-3)(3n^2 - 3n) = [n]_4 - \frac{3}{4}[n]_4 = \frac{1}{4}[n]_4.$$

Con lo que se concluye la demostración.  $\square$

Ahora citamos algunos de los resultados mas interesantes y profundos de la Sección 5.3 “ fórmula explícita de Lassalle del carácter del grupo simétrico” del libro [3]. Dada una partición de  $n$ ,  $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_r)$ , sea

$$d_k(\rho) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\rho_i} (j-i)^k.$$

Entonces valen las siguientes fórmulas del carácter de una representación  $\rho$ .

$$\chi_\rho(C(2, \mathfrak{S}_n)) = \frac{2d(\rho)}{[n]_2} d_1(\rho), \quad \chi_\rho(C(2^2, \mathfrak{S}_n)) = \frac{4d(\rho)}{[n]_4} (d_1(\rho)^2 - 3d_2(\rho) + [n]_2).$$

**Proposición 7.18.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Asumiremos que  $\delta = 1$ , es decir  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  y que  $m_\mu(\rho) = 2$ . Sean  $\theta, \theta_1 \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  tales que  $\mu \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\theta)$  y  $\mu \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\theta_1)$ . Entonces

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2}(d_1(\mu)^2 - d_1(\theta_1)^2) - \frac{3}{2}(d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ - \frac{3}{2}(d_2(\mu) - d_2(\theta_1)) - \frac{1}{2s}(d_1(\theta)^2 - d_1(\theta_1)^2) + \frac{3}{2s}(d_2(\theta) - d_2(\theta_1)) + 1,$$

donde  $s = r_T(n, n-1)$ .

*Demostración.* Tomando en cuenta que

$$|O| = \frac{[n]_4}{8}, \quad |Q_1| = \frac{[n-2]_2}{2}, \quad |Q_3| = \frac{[n-2]_4}{8}, \quad |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| = \frac{[n-1]_4}{8},$$

de la Proposición 7.16 obtenemos

$$\eta_2 = \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O) - \frac{|C(2, \mathfrak{S}_{n-2})|}{d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2})) + \frac{|Q_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(Q_3) \\ - |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} + \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) \\ - \frac{1}{s} |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| \left( \frac{\chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta)} - \frac{\chi_{\theta_1}(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1}))}{d(\theta_1)} \right) \\ = \frac{1}{2}(d_1(\rho)^2 - 3d_2(\rho) + [n]_2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2}(d_1(\mu)^2 - 3d_2(\mu) + [n-2]_2) \\ - \frac{1}{2}(d_1(\theta)^2 - 3d_2(\theta) + [n-1]_2) - \frac{1}{2}(d_1(\theta_1)^2 - 3d_2(\theta_1) + [n-1]_2) \\ - \frac{1}{2s}(d_1(\theta)^2 - 3d_2(\theta) + [n-1]_2) + \frac{1}{2s}(d_1(\theta_1)^2 - 3d_2(\theta_1) + [n-1]_2) \\ = \frac{1}{2}(d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2}(d_1(\mu)^2 - d_1(\theta_1)^2) - \frac{3}{2}(d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ - \frac{3}{2}(d_2(\mu) - d_2(\theta_1)) - \frac{1}{2s}(d_1(\theta)^2 - d_1(\theta_1)^2) + \frac{3}{2s}(d_2(\theta) - d_2(\theta_1)) + 1,$$

como

$$\frac{1}{2}[n]_2 + \frac{1}{2}[n-2]_2 - [n-1]_2 = \frac{1}{2}(n(n-1) + (n-2)(n-3) - 2(n-1)(n-2)) = 1.$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 7.19.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Asumiremos que  $\delta = 1$ , es decir,  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  y que  $m_\mu(\rho) = 1$ . Sea  $\theta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-1}}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  tal que  $\mu \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2}}^{\mathfrak{S}_{n-1}}(\theta)$ . Entonces

$$\eta_2 = \frac{1}{2}(d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2}(d_1(\mu)^2 - d_1(\theta)^2) - \frac{3}{2}(d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ - \frac{3}{2}(d_2(\mu) - d_2(\theta)) + 1.$$

*Demostración.* Tomando en cuenta que

$$|O| = \frac{[n]_4}{8}, |\mathcal{Q}_1| = \frac{[n-2]_2}{2}, |\mathcal{Q}_3| = \frac{[n-2]_4}{8}, |C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})| = \frac{[n-1]_4}{8},$$

de la Proposición 7.16 obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{|O|}{d(\rho)} \chi_\rho(O) - \frac{|C(2, \mathfrak{S}_{n-2})|}{d(\mu)} \chi_\mu(C(2, \mathfrak{S}_{n-2})) + \frac{|\mathcal{Q}_3|}{d(\mu)} \chi_\mu(\mathcal{Q}_3) \\ &\quad - 2 \frac{|C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})|}{d(\theta)} \chi_\theta(C(2^2, \mathfrak{S}_{n-1})) \\ &= \frac{1}{2} (d_1(\rho)^2 - 3d_2(\rho) + [n]_2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2} (d_1(\mu)^2 - 3d_2(\mu) + [n-2]_2) \\ &\quad - (d_1(\theta)^2 - 3d_2(\theta) + [n-1]_2) \\ &= \frac{1}{2} (d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2} (d_1(\mu)^2 - d_1(\theta)^2) - \frac{3}{2} (d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ &\quad - \frac{3}{2} (d_2(\mu) - d_2(\theta)) + 1. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración.  $\square$

En los siguientes resultados obtenemos finalmente la expresión de  $\eta_2$  en términos del contenido de tableaux en  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}$ .

**Proposición 7.20.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Asumiremos que  $\delta = 1$ , es decir  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  y que  $m_\mu(\rho) = 2$ . Dado  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , si  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  es el contenido de  $T$ , entonces

$$\eta_2 = (c_n(T) - 1)(c_{n-1}(T) - 1).$$

*Demostración.* Ahora nos encargaremos de hacer la siguiente evaluación

$$\begin{aligned} d_2(\rho) - d_2(\theta) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\rho_i} (j-i)^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i(n)}}^r \sum_{j=1}^{\rho_i} (j-i)^2 - \sum_{j=1}^{\rho_{i(n)}-1} (j-i(n))^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\rho_{i(n)}} (j-i(n))^2 - \sum_{j=1}^{\rho_{i(n)}-1} (j-i(n))^2 = (\rho_{i(n)} - i(n))^2 = c_n^2(T). \end{aligned}$$

Similarmente obtenemos

$$d_2(\theta_1) - d_2(\mu) = c_n^2(T).$$

Para evaluar  $d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2 = (d_1(\rho) - d_1(\theta))(d_1(\rho) + d_1(\theta))$  comenzamos con

$$\begin{aligned} d_1(\rho) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\rho_i} (j-i) = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^{\rho_i} j - i\rho_i \right) = \sum_{i=1}^r \left( \frac{(\rho_i+1)\rho_i}{2} - i\rho_i \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \rho_i(\rho_i+1-2i) \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d_1(\rho) - d_1(\theta) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \rho_i(\rho_i+1-2i) - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i(n)}}^r \rho_i(\rho_i+1-2i) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\rho_{i(n)} - 1)(\rho_{i(n)} - 2i(n)) = \frac{1}{2} \rho_{i(n)}(\rho_{i(n)} + 1 - 2i(n)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\rho_{i(n)} - 1)(\rho_{i(n)} - 2i(n)) = \rho_{i(n)} - i(n) = c_n(T). \end{aligned}$$

Similarmente, obtenemos

$$d_1(\theta) - d_1(\mu) = c_{n-1}(T).$$

Por otro lado

$$d_1(\rho) + d_1(\theta) = d_1(\rho) - d_1(\theta) + 2d_1(\theta) = c_n(T) + 2d_1(\theta).$$

Por lo tanto

$$d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2 = c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\theta)).$$

Similarmente obtenemos

$$\begin{aligned} d_1(\theta_1) - d_1(\mu) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r (\theta_1)_i ((\theta_1)_i + 1 - 2i) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \mu_i (\mu_i + 1 - 2i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i(n), i(n-1)}}^r \rho_i (\rho_i + 1 - 2i) + \frac{1}{2} \rho_{i(n)} (\rho_{i(n)} + 1 - 2i(n)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\rho_{i(n-1)} - 1) (\rho_{i(n-1)} - 2i(n-1)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i(n), i(n-1)}}^r \rho_i (\rho_i + 1 - 2i) - \frac{1}{2} (\rho_{i(n)} - 1) (\rho_{i(n)} - 2i(n)) \\ &\quad - \frac{1}{2} (\rho_{i(n-1)} - 1) (\rho_{i(n-1)} - 2i(n-1)) \\ &= \frac{1}{2} (\rho_{i(n)}^2 + \rho_{i(n)} - 2i(n) \rho_{i(n)} - \rho_{i(n)}^2 + 2i(n) \rho_{i(n)} \\ &\quad + \rho_{i(n)} - 2i(n)) = \rho_{i(n)} - i(n) = c_n(T), \\ d_1(\theta_1) + d_1(\mu) &= d_1(\theta_1) - d_1(\mu) + 2d_1(\mu) = c_n(T) + 2d_1(\mu), \\ d_1(\theta_1)^2 - d_1(\mu)^2 &= c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\mu)). \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} d_2(\theta) - d_2(\theta_1) &= d_2(\theta) - d_2(\mu) + d_2(\mu) - d_2(\theta_1) = c_{n-1}^2(T) - c_n^2(T), \\ d_1(\theta) - d_1(\theta_1) &= d_1(\theta) - d_1(\mu) + d_1(\mu) - d_1(\theta_1) = c_{n-1}(T) - c_n(T), \\ d_1(\theta) + d_1(\theta_1) &= d_1(\theta) - d_1(\mu) + d_1(\mu) + d_1(\theta_1) - d_1(\mu) + 2d_1(\mu) \\ &= c_{n-1}(T) + c_n(T) + 2d_1(\mu), \\ d_1(\theta)^2 - d_1(\theta_1)^2 &= (c_{n-1}(T) - c_n(T))(c_{n-1}(T) + c_n(T) + 2d_1(\mu)) \\ &= c_{n-1}(T)^2 - c_n^2(T) + 2d_1(\mu)(c_{n-1}(T) - c_n(T)). \end{aligned}$$

De la Proposición 7.18 obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{2} (d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) + \frac{1}{2} (d_1(\mu)^2 - d_1(\theta_1)^2) - \frac{3}{2} (d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ &\quad - \frac{3}{2} (d_2(\mu) - d_2(\theta_1)) - \frac{1}{2s} (d_1(\theta)^2 - d_1(\theta_1)^2) + \frac{3}{2s} (d_2(\theta) - d_2(\theta_1)) - d_1(\mu) + 1 \\ &= \frac{1}{2} c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\theta)) - \frac{1}{2} c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\mu)) - \frac{3}{2} c_n^2(T) + \frac{3}{2} c_n^2(T) \\ &\quad - \frac{1}{2s} (c_{n-1}(T) - c_n(T))(c_{n-1}(T) + c_n(T) + 2d_1(\mu)) + \frac{3}{2s} (c_{n-1}^2(T) - c_n^2(T)) - d_1(\mu) + 1 \\ &= c_n(T)c_{n-1}(T) + \frac{1}{s} (c_n(T) - c_{n-1}(T))(c_{n-1}(T) + c_n(T) - d_1(\mu)) - d_1(\mu) + 1. \end{aligned}$$

Si tomamos en cuenta que  $r_T(n, n-1) = s = c_n(T) - c_{n-1}(T)$  finalmente conseguimos

$$\eta_2 = c_n(T)c_{n-1}(T) - c_{n-1}(T) - c_n(T) + 1 = (c_n(T) - 1)(c_{n-1}(T) - 1).$$

esto concluye la demostración.  $\square$

**Proposición 7.21.** Sean  $\rho \in \hat{\mathfrak{S}}_n$ ,  $\pi = \mu \otimes \delta \in \text{Res}_{\mathfrak{S}_{n-2} \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_n}(\rho)$  y  $\Phi$  la función esférica asociada a  $\rho$  de tipo  $\pi$ . Asumimos que  $\delta = 1$ , es decir  $\pi = \mu \otimes \text{tr}$  y que  $m_\mu(\rho) = 1$ . Dado  $T \in \mathcal{T}_{\rho, \mu}$ , si  $C(T) = (c_1(T), \dots, c_n(T))$  es el contenido de  $T$ , entonces

$$\eta_2 = (c_n(T) - 1)(c_n(T) - 2).$$

*Demostración.* Los siguientes cálculos realizados en la demostración de la Proposición 7.20 también son válidos cuando  $s = 1$ :

$$d_2(\rho) - d_2(\theta) = c_n^2(T), \quad d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2 = c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\theta)), \quad d_1(\theta) - d_1(\mu) = c_{n-1}(T).$$

Además necesitamos,

$$d_1(\theta) + d_1(\mu) = d_1(\theta) - d_1(\mu) + 2d_1(\mu) = c_{n-1}(T) + 2d_1(\mu),$$

Por eso

$$d_1(\theta)^2 - d_1(\mu)^2 = c_{n-1}(T)(c_{n-1}(T) + 2d_1(\mu)).$$

Mas aún

$$\begin{aligned} d_2(\theta) - d_2(\mu) &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\theta_i} (j-i)^2 - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i(n-1)}}^r \sum_{j=1}^{\theta_i} (j-i)^2 - \sum_{j=1}^{\theta_{i(n-1)}-1} (j-i(n-1))^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\theta_{i(n-1)}} (j-i(n-1))^2 - \sum_{j=1}^{\theta_{i(n-1)}-1} (j-i(n-1))^2 \\ &= (\theta_{i(n-1)} - i(n-1))^2 = c_{n-1}^2(T). \end{aligned}$$

De la Proposición 7.19 obtenemos que

$$\begin{aligned} \eta_2 &= \frac{1}{2}(d_1(\rho)^2 - d_1(\theta)^2) - d_1(\mu) + \frac{1}{2}(d_1(\mu)^2 - d_1(\theta)^2) - \frac{3}{2}(d_2(\rho) - d_2(\theta)) \\ &\quad - \frac{3}{2}(d_2(\mu) - d_2(\theta)) + 1 \\ &= \frac{1}{2}c_n(T)(c_n(T) + 2d_1(\theta)) - \frac{1}{2}c_{n-1}(T)(c_{n-1}(T) + 2d_1(\mu)) - \frac{3}{2}c_n^2(T) + \frac{3}{2}c_{n-1}^2(T) - d_1(\mu) + 1 \\ &= -c_n^2(T) + c_{n-1}^2(T) + c_n(T)(c_n(T) - 1 + d_1(\mu)) - c_{n-1}(T)d_1(\mu) - d_1(\mu) + 1. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $c_n(T) = c_{n-1}(T) + 1$  obtenemos

$$\begin{aligned} \eta_2 &= -c_n^2(T) + (c_n(T) - 1)^2 + c_n(T)(c_n(T) - 1 + d_1(\mu)) - (c_n(T) - 1)d_1(\mu) - d_1(\mu) + 1 \\ &= (c_n(T) - 1)^2 - c_n(T) + 1 = c_n^2(T) - 3c_n(T) + 2 = (c_n(T) - 1)(c_n(T) - 2). \end{aligned}$$

La Proposición esta demostrada. □

**Nota 7.22.** Observemos que cuando  $s = r_T(n, n-1) = 1$  tenemos  $c_{n-1}(T) = c_n(T) - 1$ , por eso los valores de  $\eta_2$  dados en las Proposiciones 7.20 y 7.21 coinciden.

## 7.4. Ejemplos

### 7.4.1. Ejemplo para el par $(\mathfrak{S}_6, \mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2)$ .

Consideramos  $\rho = (3, 2, 1)$  y  $\mu = (2, 1, 1)$  particiones de  $n = 6$  y  $n - 2 = 4$ , respectivamente. Observemos que para obtener el diagrama de Young de  $\mu$  a partir del diagrama de Young de  $\rho$



quitamos dos cajas que están en diferentes filas y columnas.

$$[\rho] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \quad \text{y} \quad [\mu] = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

Respecto a representaciones esto implica que  $\mu \otimes tr$  y  $\mu \otimes sg$  están en  $Res_{\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_6}(\rho)$ .

Los caminos que pasan por  $\rho$  a través de  $\mu$  son:

$$\begin{aligned} T &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \square, \\ s_{n-1}T = T_1 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \square, \\ s_{n-3}T = T_3 &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 6 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \square, \\ s_{n-1}s_{n-3}T = T_{3,1} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} \rightarrow \square, \\ s_{n-4}s_{n-3}T = T_{3,4} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 6 \\ \hline 3 & 5 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \square, \\ s_{n-1}s_{n-4}s_{n-3}T = T_{3,4,1} &= \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline 3 & 6 & \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \rightarrow \square. \end{aligned}$$

Podemos observar que las representaciones irreducibles de  $M = \mathfrak{S}_2$  que aparecen en  $Res_{\mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_4}(\mu)$  son  $\sigma = sg$  y  $\sigma_1 = tr$ .

Para estos caminos determinamos las distancias axiales que nos permiten clasificar sus respectivos tableaux asociados. Debido a que  $r_T(6,5) = 2$  y  $r_T(4,3) = 3$ , entonces  $T \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{1,1}$ . Para  $T_1$  tenemos  $r_{T_1}(6,5) = -2$  y  $r_{T_1}(4,3) = 3$ , por lo tanto  $T_1 \in \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{-1,1}$ . Continuando de esta forma podemos afirmar que

$$\mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{1,1} = \{T\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{-1,1} = \{T_1\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{1,-1} = \{T_3\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{-1,-1} = \{T_{3,1}\}$$

y para  $\sigma_1$

$$\mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{1,-1} = \{T_{3,4}\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{-1,-1} = \{T_{3,4,1}\}.$$

Comenzamos considerando la representación  $\pi = \mu \otimes tr$ , debido a que  $r_T(4,3) \neq \pm 1$ , sabemos que la multiplicidad de  $\sigma$  en  $\mu$  es dos, esto implica que  $\sigma \otimes tr$  y  $\sigma \otimes sg$  están en  $Res_{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2'}^{\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ , además como  $r_{T_{3,4}} = -1$ , sabemos que la multiplicidad de  $\sigma_1$  en  $\mu$  es uno, entonces  $\sigma_1 \otimes sg \in Res_{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}_2'}^{\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ . Tenemos la siguiente descomposición

$$V_\pi = V_{\mu \otimes tr} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg} \oplus V_{\sigma_1 \otimes sg}.$$

la base que consideramos para  $V_\pi$  es  $\{u_{T,1}, u_{T_{3,1}}, u_{T_{3,4,1}}\}$ .

Considerando que  $\mathcal{F}_{\rho,\mu,\sigma}^{1,1} = \{T\}$  y notando que  $s = r_T(6,5) = 2$ ,  $r = r_T(5,4) = -1$  y  $d = r_T(4,3) = 3$ , por el Teorema 7.2 tenemos que la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_1) = \begin{pmatrix} \zeta_{\pi,\tau}^+ I & 0 \\ 0 & \zeta_{\pi,\tau}^- I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{7}{16} I \end{pmatrix},$$

porque

$$\begin{aligned} \zeta_{\pi,\tau}^+ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} (-1 + 1 - 1) = -\frac{1}{2}, \\ \zeta_{\pi,\tau}^- &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} + \frac{1}{(r+d)(r+s+d)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

La forma reducida de  $\Phi(x_1)$  a  $V_{(\sigma_1)}$  es

$$\Phi(x_1) = (\zeta_{\pi,\tau}^+) I = \frac{7}{16} I,$$

porque si  $s = r_{T_{3,4}}(6,5) = 2$ ,  $r = r_{T_{3,4}}(5,4) = 2$  y  $d = r_{T_{3,4}}(4,3) = -1$ , entonces

$$\zeta_{\pi,\tau}^- = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \right) = \frac{7}{16}.$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_\pi$  es

$$\Phi(x_1) = \left( \frac{7}{16} I \right) \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{7}{16} I \end{pmatrix}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \Phi(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{7}{16} I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{16} I \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora el autovalor  $\eta_1$  de  $\Phi$ , de la ecuación (7.15) tenemos que

$$2 \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-2)) \Phi(x_1) \pi((j, n-2)) = \eta_1 I,$$

tomando traza, obtenemos

$$2(n-2) \operatorname{tr}(\Phi(x_1)) = \eta_1 d(\pi).$$

En nuestro caso  $n = 6$ ,  $d(\pi) = 3$  y  $\operatorname{tr}(\Phi(x_1)) = \frac{3}{8}$ . Por lo tanto  $\eta_1 = 1$ . Podemos comparar este resultado con el que obtuvimos de  $\eta_1 = c_n(T) + c_{n-1}(T) - 1$ , ver (7.25). Tenemos  $c_6(T) = 2$ ,  $c_5(T) = 0$ , por lo tanto también obtenemos que  $\eta_1 = 1$ .

Empezamos a considerar  $\Phi(x_2)$ , recordemos que  $r_T(6,5) = 2$ ,  $r_T(5,4) = -1$  y  $r_T(4,3) = 3$ , por el Teorema 7.5 podemos afirmar que la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_2) = \begin{pmatrix} \beta_{\pi,\tau}^1 I & 0 \\ 0 & 0I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pues

$$\beta_{\pi,\tau}^1 = \frac{2(r+s)(r+d+1)+(1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} = \frac{2(1)(3)+(1-2)(4)}{(-1)(2)(1)(4)} = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \beta_{\pi,\tau}^- = 0.$$

Como  $\mathcal{F}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{1,-1} = \{T_{3,4}\}$ , por el Teorema 7.5 tenemos que la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  a  $V_{(\sigma_1)}$  es

$$\Phi(x_2) = (\beta_{\pi,\tau}^-) = 0,$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_\pi$  es

$$\Phi(x_2) = (0) I \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \Phi(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Empezamos a considerar el autovalor  $\eta_2$ , por la Proposición 7.20 tenemos que

$$\eta_2 = (c_6(T) - 1)(c_5(T) - 1),$$

en nuestro caso  $r_T(6, 5) = 2, c_6(T) = 2$  y  $c_5(T) = 0$ . Obtenemos  $\eta_2 = (2 - 1)(0 - 1) = -1$ .

De la ecuación (7.16) tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-4} \pi((i, n-2)(j, n-3)) \Phi(s_2) \pi((j, n-3)(i, n-2)) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-2)) \Phi(s_2) \pi((i, n-2)) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-3)) \Phi(s_2) \pi((i, n-3)) + 2\Phi(s_2) = \eta_2 I, \end{aligned} \quad (7.30)$$

tomando traza obtenemos  $(n-2)(n-3) \operatorname{tr}(\Phi(x_2)) = \eta_2 d(\pi)$ . En el ejemplo que estamos considerando  $n = 6, d(\pi) = 3$  y  $\operatorname{tr}(\Phi(x_2)) = -\frac{1}{4}$  por la representación matricial que obtuvimos de  $\Phi(x_2)$ , por tanto obtenemos  $\eta_2 = -1$ , como debería ser.

Finalmente consideramos la representación  $\pi = \mu \otimes sg \in \operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_6}(\rho)$ , debido a que  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{-1,1} = \{T_1\}$  y  $r_{T_1}(4, 3) \neq \pm 1$  afirmamos que  $\sigma \otimes tr$  y  $\sigma \otimes sg$  están en  $\operatorname{Res}_{\mathfrak{S}_2 \times \mathfrak{S}'_2}^{\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2}(\mu \otimes sg)$ . Además  $\mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma_1}^{-1,-1} = \{T_{3,4,1}\}$  y  $r_{T_{3,4,1}}(4, 3) = -1$ , lo que significa que la multiplicidad de  $\sigma_1$  es uno en  $\mu$ . Tenemos la siguiente descomposición de  $V_\pi$  en  $\mathfrak{S}_2 \otimes \mathfrak{S}'_2$ -módulos irreducibles

$$V_\pi = V_{\mu \otimes sg} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg} \oplus V_{\sigma_1 \otimes sg}.$$

la base que consideramos para  $V_\pi$  es  $\{u_{T_1, -1}, u_{T_{3,1}, -1}, u_{T_{3,4,1}, -1}\}$ .

Debido a que  $s = r_{T_1}(6, 5) = -2, r = r_{T_1}(5, 4) = 1$  y  $d = r_{T_1}(4, 3) = 3$ , por el Teorema 7.2 tenemos que la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_1) = \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma, -1, 1} I & 0 \\ 0 & \zeta_{\sigma, -1, -1} I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} I \end{pmatrix},$$

porque

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma, -1, 1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} - \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} (1 - 1 + 1) = \frac{1}{2}, \\ \zeta_{\sigma, -1, -1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} - \frac{1}{(r+d)(r+s+d)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5}{16}. \end{aligned}$$

La forma reducida de  $\Phi(x_1)$  a  $V_{(\sigma_1)}$  es

$$\Phi(x_1) = (\zeta_{\sigma_1, -1, -1}) I = \frac{5}{16} I,$$

porque si  $s = r_{T_{3,4,1}}(6, 5) = -2, r = r_{T_{3,4,1}}(5, 4) = 4$  y  $d = r_{T_{3,4,1}}(4, 3) = -1$ , entonces

$$\zeta_{\sigma_1, -1, -1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} - \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5}{16}.$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_\pi$  es

$$\Phi(x_1) = \left( \frac{5}{16} I \right) \oplus \begin{pmatrix} \frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{5}{16} I \end{pmatrix} \quad \text{equivalentemente} \quad \Phi(x_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{16} I & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{16} I \end{pmatrix}.$$

Para  $\Phi(x_2)$ , recordemos que  $T_1 \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma}^{-1,1}$ , si  $s = r_{T_1}(6, 5) = -2, r = r_{T_1}(5, 4) = 1$  y  $d = r_{T_1}(4, 3) = 3$ , por el Teorema 7.5 la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_{(\sigma)} = V_{\sigma \otimes tr} \oplus V_{\sigma \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_2) = \begin{pmatrix} \beta_{\sigma, -1, 1} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 I & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} I \end{pmatrix},$$

ya que

$$\beta_{\sigma,-1,1} = 0 \quad \text{y} \quad \beta_{\sigma,-1,-1} = \frac{2(r+s)(r+d-1)+(1+s)(1-d)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} = \frac{2(-1)(3)+(1-2)(-2)}{(1)(4)(-1)(2)} = \frac{1}{2}.$$

Como  $\mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{-1,-1} = \{T_{3,4,1}\}$ , por el Teorema 7.5 tenemos que la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  a  $V_{(\sigma_1)}$  es

$$\Phi(x_2) = (\beta_{\sigma,-1,-1})I = \frac{1}{4}I,$$

ya que

$$\beta_{\sigma,-1,-1} = \frac{2(r+s)(r+d-1)+(1+s)(1-d)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} = \frac{2(2)(2)+(-1)(2)}{(4)(3)(2)(1)} = \frac{1}{4}.$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_\pi$  es

$$\Phi(x_2) = \left(\frac{1}{4}\right)I \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I \end{pmatrix}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \Phi(x_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}I \end{pmatrix}.$$

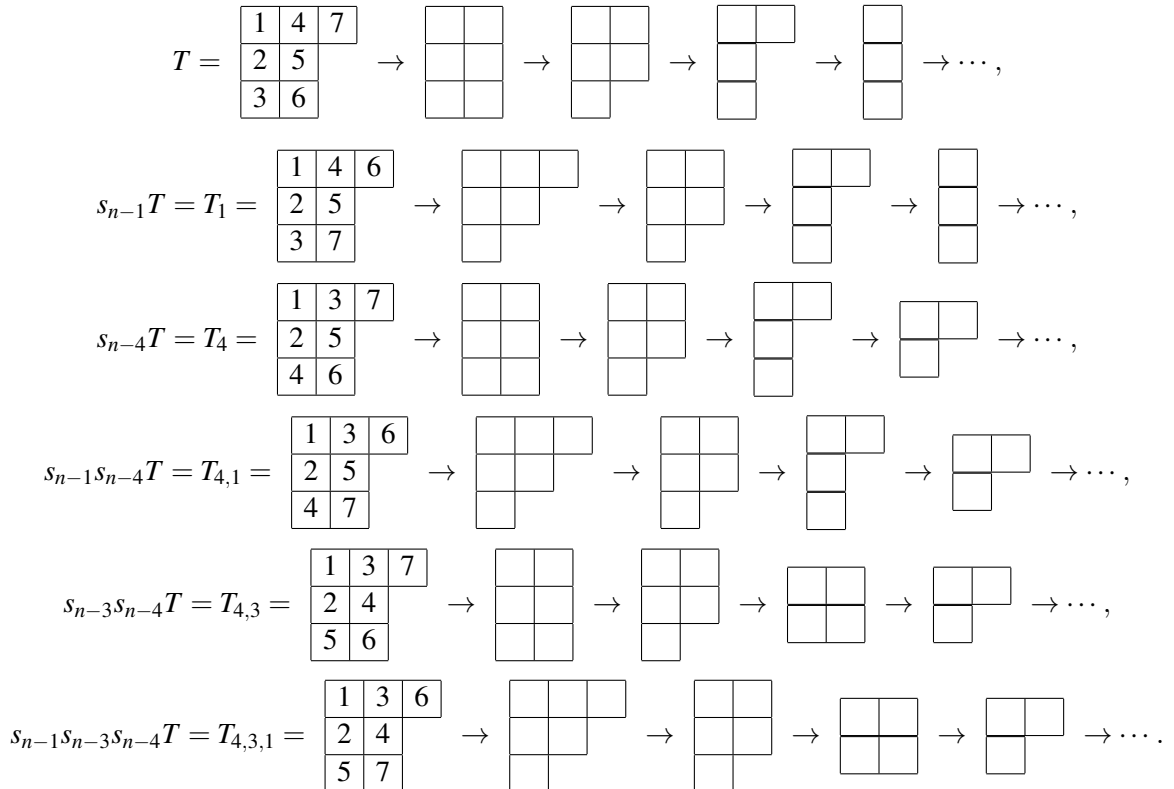
### 7.4.2. Ejemplo para el par $(\mathfrak{S}_7, \mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{S}_2)$ .

Consideramos  $\rho = (3, 2, 2)$  y  $\mu = (2, 2, 1)$  particiones de  $n = 7$  y  $n - 2 = 5$ , respectivamente. Observemos que para obtener el diagrama de Young de  $\mu$  a partir del diagrama de Young de  $\rho$  quitamos dos cajas que están en diferentes filas y columnas.

$$[\rho] = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \quad [\mu] = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}.$$

Respecto a representaciones esto implica que  $\mu \otimes tr$  y  $\mu \otimes sg$  están en  $Res_{\mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_7}(\rho)$ .

Los caminos de los submódulos de la representación  $\rho$  que pasan a través de  $\mu$  son:



Podemos observar que las representaciones irreducibles de  $M = \mathfrak{S}_3$  que aparecen en  $\text{Res}_{\mathfrak{S}_3}^{\mathfrak{S}_5}(\mu)$  son  $\sigma = sg$  y  $\sigma_1 = st$ .

Calculando las distancias axiales, para  $\sigma_1$  tenemos

$$\mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{1,1} = \{T_4\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{-1,1} = \{T_{4,1}\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{1,-1} = \{T_{4,3}\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma_1}^{-1,-1} = \{T_{4,3,1}\},$$

y para  $\sigma$

$$\mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{1,-1} = \{T\}, \quad \mathcal{T}_{\rho,\mu,\sigma}^{-1,-1} = \{T_1\}.$$

Consideramos la representación  $\pi = \mu \otimes tr$ , debido a que  $r_{T_4}(5,4) = 2 \neq \pm 1$ , sabemos que la multiplicidad de  $\sigma_1 = st$  en  $\mu$  es dos, esto implica que  $\sigma_1 \otimes tr$  y  $\sigma_1 \otimes sg$  están en  $\text{Res}_{\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2}^{\mathfrak{S}_5 \times \mathfrak{S}_2}(\pi)$ , además como  $r_T(5,4) = -1$ , sabemos que la multiplicidad de  $\sigma = sg$  en  $\mu$  es uno. Tenemos la siguiente descomposición de  $V_\pi$  en  $\mathfrak{S}_3 \times \mathfrak{S}_2$ -módulos.

$$V_\pi = V_{\mu \otimes tr} = V_{\sigma \otimes sg} \oplus V_{\sigma_1 \otimes tr} \oplus V_{\sigma_1 \otimes sg}.$$

la base que consideramos para  $V_\pi$  es  $\{u_{T,1}, u_{T_4,1}, u_{T_{4,3,1}}\}$ .

Debido a que  $s = r_{T_4}(7,6) = 3$ ,  $r = r_{T_4}(6,5) = -1$  y  $d = r_{T_4}(5,4) = 2$ , por el Teorema 7.2 tenemos que la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_{(\sigma_1)} = V_{\sigma_1 \otimes tr} \oplus V_{\sigma_1 \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_1) = \begin{pmatrix} \zeta_{\sigma,1,1} I & 0 \\ 0 & \zeta_{\sigma,1,-1} I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} I \end{pmatrix},$$

porque

$$\begin{aligned} \zeta_{\sigma,1,1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}, \\ \zeta_{\sigma,1,-1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r+d} + \frac{1}{r+s+d} + \frac{1}{(r+d)(r+s+d)} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Para  $\sigma = sg$  tenemos  $d = r_T(5,4) = -1$ ,  $r = r_T(6,5) = -1$ ,  $s = r_T(7,6) = 3$ , por el Teorema 7.2 la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  a  $V_\sigma = V_{\sigma \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_1) = (\zeta_{\pi,\tau}) = -\frac{1}{2} I,$$

porque

$$\zeta_{\pi,\tau} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r+s} + \frac{1}{r(r+s)} \right) = \frac{1}{2} \left( -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_1)$  en  $V_\pi = V_{\mu \otimes tr}$  es

$$\Phi(x_1) = \left(-\frac{1}{2}\right) I \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} I \end{pmatrix}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \Phi(x_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} I & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} I \end{pmatrix}.$$

De la ecuación (7.15) tenemos que

$$2 \sum_{j=1}^{n-2} \pi((j, n-2)) \Phi(x_1) \pi((j, n-2)) = \eta_1 I,$$

tomando traza, obtenemos

$$2(n-2) \text{tr}(\Phi(x_1)) = \eta_1 d(\pi).$$

En nuestro caso  $n = 7$ ,  $d(\pi) = 5$  y  $\text{tr}(\Phi(x_1)) = -\frac{1}{2} + 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right) = 0$ . Por lo tanto  $\eta_1 = 0$ .

Podemos compara este resultado con la expresión que obtuvimos para  $\eta_1$  en la Proposición 7.15, que es,  $\eta_1 = c_n(T) + c_{n-1}(T) - 1$ . Tenemos  $c_7(T) = 2$ ,  $c_6(T) = -1$ , por eso también obtenemos  $\eta_1 = 0$ .

Empezamos a considerar  $\Phi(x_2)$ , para la representación  $\sigma_1$  tenemos que  $T_4 \in \mathcal{T}_{\rho, \mu, \sigma_1}^{1,1}$ , además  $s = r_{T_4}(7, 6) = 3$ ,  $r_{T_4}(6, 5) = -1$  y  $d = r_{T_4}(5, 4) = 2$ , por el Teorema 7.5 podemos afirmar que la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_{(\sigma_1)} = V_{\sigma_1 \otimes tr} \oplus V_{\sigma_1 \otimes sg}$  es

$$\Phi(x_2) = \begin{pmatrix} \beta_{\sigma_1, 1, 1} I & 0 \\ 0 & 0I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

porque

$$\beta_{\sigma_1, 1, 1} = \frac{2(r+s)(r+d+1)+(1-s)(d+1)}{r(r+d)(r+s)(r+s+d)} = \frac{2 \times 2 \times 2 + 3 \times (-2)}{(-1) \times 1 \times 2 \times 2 \times 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \beta_{\sigma_1, 1, -1} = 0.$$

Para  $\sigma$ , por el Teorema 7.5 tenemos que la expresión de  $\Phi(x_2)$  en  $V_{(\sigma)}$  es

$$\Phi(x_2) = (\beta_{\pi, \tau}^-) = 0,$$

Así la forma reducida de  $\Phi(x_2)$  en  $V_{\pi}$  es

$$\Phi(x_2) = (0)I \oplus \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{o equivalentemente} \quad \Phi(x_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4}I & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Empezamos a considerar el autovalor  $\eta_2$ , por la Proposición 7.20 tenemos que

$$\eta_2 = (c_7(T) - 1)(c_6(T) - 1),$$

en nuestro caso  $c_7(T) = 2$  y  $c_6(T) = -1$ . Obtenemos  $\eta_2 = (2 - 1)(-1 - 1) = -2$ .

De la ecuación (7.16) tenemos

$$\begin{aligned} & \sum_{1 \leq i \neq j \leq n-4} \pi((i, n-2)(j, n-3)) \Phi(s_2) \pi((j, n-3)(i, n-2)) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-2)) \Phi(s_2) \pi((i, n-2)) \\ & + 2 \sum_{1 \leq i \leq n-4} \pi((i, n-3)) \Phi(s_2) \pi((i, n-3)) + 2\Phi(s_2) = \eta_2 I, \end{aligned} \quad (7.31)$$

tomando traza obtenemos  $(n-2)(n-3) \text{tr}(\Phi(x_2)) = \eta_2 d(\pi)$ . En el ejemplo que estamos considerando  $n = 7$ ,  $d(\pi) = 5$  y  $\text{tr}(\Phi(x_2)) = 2 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{1}{2}$  por tanto obtenemos  $\eta_2 = -2$ , como debería ser.

---

## Bibliografía

---

- [1] Anderson Gradin, Humphries Stephen and Nathan Nicholson, *Strong Gelfand Pairs of Symmetric Groups*, Journal of álgebra and Applications World Scientific Publishing Company, 2021.
- [2] Andrews G., R. Askey and R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its applications, Cambridge University Press, 1999.
- [3] Ceccherini Tullio, Scarabotti Fabio and Tolli Filippo, *Representation Theory of the Symmetric Groups*, Cambridge University Press, 2010.
- [4] Ceccherini Tullio, Scarabotti Fabio and Tolli Filippo, *Harmonic Analysis on Finite Groups*, Cambridge University Press, 2008.
- [5] Curtis Charles, Reiner Irving, *Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, Volumen 1.*, Wiley Classics Library; A Wiley-Interscience Publication. New York etc.: John Wiley and Sons. XXI, 819 p. (1990).
- [6] Doklady-Akad. Nauk, *Gelfand I. Spherical Functions on symmetric spaces*, SSSR(N.S.), 70 (1950)5-8.
- [7] Folland B.Gerald, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*, CRC Press, New York, 1988.
- [8] Fulton W. and Harris J. , *Representation Theory* , Springer - Verlag, Berlin, New York, 1991
- [9] Gangolli R. and Varadarajan V.S., *Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1988. Series title: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 101.
- [11] Grünbaum F. A. , Pacharoni Inés and Tirao Juan., *Matrix valued spherical functions associated to the complex projective plane*, J. Functional Analysis, **188** (2002), 350-441.
- [12] Helgason S., *Groups and geometric analysis*, Academic Press, New York, 1984.
- [13] Hungerford Thomas W., *Algebra*, Spring-Verlag, Berlin, New York, 1974.
- [14] Macdonald G., *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Clarendon Press, Oxford, 1979
- [15] Pierce Richard S., *Associative álgebras*, Springer - Verlag, Berlin, New York, 1982.
- [16] Serre J. P. , *Linear Representations of Finite Groups*, Springer - Verlag, Berlin, New York, 1971.
- [17] Tirao Juan, *Spherical Functions*, Rev. de la Unión Matem. Argentina, 28 (1977), 75-98.