

**Título:** UNA EXPERIENCIA CON MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO ESCOLAR

**Autores:** Alomar Bianca Roberta, Carreras María Celeste y Dipierri Iris Carolina

**Profesores de MOPE:** Erika Delgado, Cristina Esteley, Leticia Losano, Mónica Villarreal y  
Fernanda Viola

**Carrera:** Profesorado en Matemática

**Fecha:** 22-11-2013

**Clasificación:**

97 Mathematical Education

**Palabras Claves:**

Variable, tabla, regularidad, plano cartesiano, modelización intramatemática, proyectos de modelización extramatemática.

**Resumen:**

El presente informe describe la experiencia de práctica profesional realizada por tres estudiantes de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física, en tres divisiones de primer año de un colegio céntrico de la ciudad de Córdoba. El eje de estas prácticas fue el trabajo con modelización. En una primera instancia, se trabajó con una actividad guiada de modelización intramatemática en un contexto geométrico, para luego abordar las etapas del proceso de modelización matemática como contenido. Realizando posteriormente, experiencias de modelización extramatemática, con temas elegidos por los alumnos, mediante el trabajo por proyectos.

Por último, considerando diferentes perspectivas teóricas en educación matemática, se presenta una reflexión, sobre el trabajo con modelización extramatemática y nuestra dificultad en reconocer la matemática subyacente en el trabajo de los estudiantes, con la realidad como contexto.

Agradecemos:

Por el apoyo incondicional, el acompañamiento y la contención durante el trayecto de nuestras prácticas, al equipo de docentes de Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE): Erika Delgado, Cristina Esteley, Leticia Losano, Mónica Villarreal y Fernanda Viola, quienes nos brindaron herramientas que nos acompañarán durante nuestra vida profesional.

Por la generosidad y por la libertad ofrecida para llevar adelante nuestra propuesta didáctica, a la docente titular de los primeros años donde realizamos nuestras prácticas docentes.

Por el trabajo y el afecto, a quienes fueron nuestros primeros alumnos.

Por la solidaridad, a nuestros compañeros de MOPE.

Por querernos y cuidarnos siempre, a nuestros familiares y amigos.

*Estudar não é um ato de consumir ideias, mas de criá-las e recriá-las.*

Paulo Freire

**Índice**

<b>PREFACIO .....</b>	<b>9</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN.....</b>	<b>10</b>
1.1. ACERCA DE LA INSTITUCIÓN .....	10
1.2. RECURSOS.....	10
1.3. LOS CURSOS EN LOS QUE SE TRABAJÓ .....	14
1.4. LA CLASE DE MATEMÁTICA.....	14
1.5. PLANIFICACIÓN ANUAL DE LA PROFESORA .....	15
<b>2. PLANIFICACIÓN E IMPLEMENTACIÓN DE LAS PRÁCTICAS EN EL AULA.....</b>	<b>17</b>
2.1. CONTENIDOS DESARROLLADOS POR LA DOCENTE PREVIO AL INICIO DE LAS PRÁCTICAS.....	17
2.2. LA UNIDAD TRABAJADA.....	17
2.3. LOS OBJETIVOS PROPUESTOS PARA LA PLANIFICACIÓN .....	18
2.4. INTRODUCCIÓN A LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA: EL PROBLEMA DEL CUADRADO QUE CUMPLE AÑOS.....	18
2.4.1. <i>El cuadrado que cumple años</i> .....	18
2.4.2. <i>La actividad propuesta: Cuadrados de contorno pintado</i> .....	21
2.4.3. <i>Una actividad con deslizador</i> .....	25
2.4.4. <i>La tabla como herramienta para organizar la información recolectada</i> .....	29
2.4.5. <i>Búsqueda y expresión de regularidades a partir de los datos sistematizados en la tabla: uso del lenguaje coloquial</i> .....	31
2.4.6. <i>Traducción del lenguaje coloquial al simbólico</i> .....	35
2.5. UNA PRIMERA INSTANCIA DE EVALUACIÓN ESCRITA .....	37
2.5.1. <i>Repaso para el Trabajo Práctico Evaluable (TPE)</i> .....	37
2.5.2. <i>Trabajo Práctico Evaluable</i> .....	39
2.5.3. <i>Resoluciones y análisis de los resultados obtenidos en el TPE</i> .....	41
2.5.4. <i>Criterios de evaluación para el TPE</i> .....	47
2.5.5. <i>Resultados obtenidos en el TPE</i> .....	48

2.6.	PLANO CARTESIANO Y PARES ORDENADOS .....	50
2.7.	INTRODUCIENDO LA NOCIÓN DE GRÁFICO EN EL PLANO CARTESIANO .....	54
2.8.	EL CUADRADO QUE CUMPLE AÑOS COMO UN CONTEXTO DE MODELIZACIÓN MATEMÁTICA .....	59
2.9.	EL SALTO A LA REALIDAD: PROYECTOS DE MODELIZACIÓN EXTRAMATEMÁTICA.....	62
2.9.1.	<i>Elección del tema y formulación de problemas.....</i>	<i>64</i>
2.9.2.	<i>Socialización del tema elegido, problema a modelizar y variables identificadas: primeras presentaciones de los proyectos .....</i>	<i>67</i>
2.9.3.	<i>Organización de la información y búsqueda de regularidades.....</i>	<i>68</i>
2.9.4.	<i>Representación de las regularidades halladas y ajustes finales: las presentaciones de la última etapa de los proyectos .....</i>	<i>72</i>
2.10.	EVALUACIÓN .....	74
2.11.	CONCLUSIONES .....	80
<b>3.</b>	<b>¿HICIMOS MATEMÁTICA?.....</b>	<b>81</b>
3.1.	¿QUÉ ES HACER MATEMÁTICA? .....	81
3.2.	¿QUÉ ES HACER MATEMÁTICA EN EL CONTEXTO ESCOLAR?, ¿HICIMOS MATEMÁTICA DURANTE EL DESARROLLO DE LOS PROYECTOS DE MODELIZACIÓN EXTRAMATEMÁTICA? .....	83
3.2.1.	<i>Alfabetización Matemática.....</i>	<i>84</i>
3.2.2.	<i>Discernimiento matemático.....</i>	<i>87</i>
3.2.3.	<i>Actividades Universales: contar, localizar, medir y explicar .....</i>	<i>88</i>
3.2.3.1.	<i>Contar.....</i>	<i>88</i>
3.2.3.2.	<i>Localizar.....</i>	<i>88</i>
3.2.3.3.	<i>Medir.....</i>	<i>89</i>
3.2.3.4.	<i>Explicar .....</i>	<i>90</i>
<b>4.</b>	<b>REFLEXIONES FINALES .....</b>	<b>92</b>
<b>5.</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>	<b>95</b>
<b>6.</b>	<b>ANEXOS .....</b>	<b>97</b>
6.1.	ANEXO 1: MATERIAL DE ESTUDIO.....	97

6.2. ANEXO 2: EJERCITACIÓN PARA TRABAJO PRÁCTICO EVALUABLE Y SOLUCIONES ..... 104

**Índice de Anexo digital**

Anexo digital 1 - *Cuadrado de contorno pintado.*

Anexo digital 2 - Barco asociado a deslizadores sobre planisferio.



## **Prefacio**

El siguiente informe tiene el objetivo de comunicar las experiencias de las prácticas docentes realizadas en 2013 en tres divisiones de primer año de un colegio cercano al centro de la ciudad de Córdoba, en el marco de la materia Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE) correspondiente al último año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC).

Este trabajo se estructura en cuatro secciones. La introducción presenta una descripción general de la institución, su infraestructura y las dinámicas sociales que se establecen en el contexto escolar.

La segunda sección detalla las actividades llevadas a cabo en el marco de las prácticas, su planificación, implementación y modificación en función de los emergentes. Este apartado se divide en dos partes, la primera describe una actividad introductoria de modelización intramatemática fuertemente dirigida por las practicantes. La segunda parte, refiere a un trabajo de modelización extramatemática llevado adelante por grupos de alumnos mediante la gestión de un proyecto de modelización de un tema a elección.

En una tercera sección, se analiza un aspecto particular de las prácticas que delimitamos como una problemática relevante para ponerla en relación con la bibliografía estudiada sobre el tema.

Por último, en la cuarta sección, se realizan las reflexiones finales en torno a la problemática abordada en la sección 3.

## 1. Introducción

### 1.1. Acerca de la institución

El colegio donde se realizaron las prácticas se encuentra ubicado en cercanías del centro de la ciudad de Córdoba y asisten principalmente alumnos procedentes de la zona sur de la ciudad. El mismo es público de gestión privada, confesional y de carácter mixto. La institución cuenta con nivel inicial, primario y secundario. El nivel secundario, respondiendo a la Ley Provincial de Educación y a los Diseños Curriculares vigentes, se estructura en un Ciclo Básico de tres años y un Ciclo Orientado con la misma duración cuya especialidad es Humanidades con Orientación en Ciencias Sociales.

EL Ciclo Básico cuenta con cuatro divisiones (A, B, C y D) por cada año, mientras que en el Ciclo Orientado el número de divisiones por años es tres (A, B y C).

La escuela se encuentra ubicada en un predio con un área total de 18.000 m<sup>2</sup>, de los cuales 12.000 m<sup>2</sup> están cubiertos. La edificación, constituida por cuatro pabellones principales de dos y tres plantas comunicados entre sí, se encuentra rodeada por jardines, patios y playas de estacionamiento. De estos cuatro pabellones, un pabellón se destina al nivel inicial, uno al nivel primario y dos al nivel secundario. Actualmente se están realizando obras de ampliación.

La institución cuenta además con sala de profesores, gabinete de física y tecnología, gabinete de informática, salón de usos múltiples, natatorio cubierto y climatizado, campo de deportes, biblioteca equipada con computadoras, capilla propia, cantina y comedor.

Resulta importante destacar que todo el colegio cuenta con una gran infraestructura tecnológica, una plataforma virtual, una red de uso interno y acceso a internet Wi-Fi.

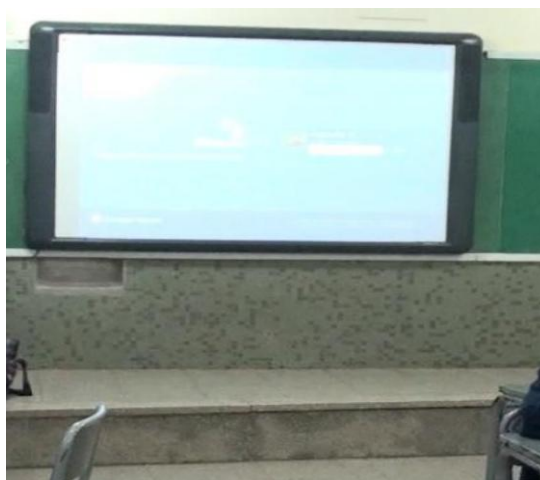
Debemos destacar, que la institución cuenta con un Gabinete Psicopedagógico, que tiene por función buscar soluciones a problemas que puedan aparecer en la interacción entre los distintos actores de la escuela.

### 1.2. Recursos

Son numerosos los recursos tecnológicos con los que cuenta la institución. A continuación se describen los más utilizados tanto por la docente a cargo de las divisiones de primer año en las cuales se desarrollaron las prácticas, como por los alumnos y las practicantes.

- Netbooks: todos los alumnos cuentan con el mismo modelo comprado a través del colegio y su uso es personal. Disponen de acceso a internet Wi-Fi, conexión a la red interna, editor de texto, planilla de cálculo, programas para presentaciones multimedia y GeoGebra, entre otros programas informáticos. Muchos estudiantes organizan sus producciones escolares en carpetas digitales con el nombre de cada una de las materias.
- Pizarra digital: este dispositivo (ver Figura 1), es empleado con naturalidad por los docentes de las diferentes materias. Todas las pizarras cuentan con acceso a internet Wi-Fi, editor de texto, hoja de cálculo, programas para presentaciones multimedia, GeoGebra (ver
- Figura 2) y están equipadas con el software ActivInspire (ver Figura 3), que ofrece numerosos recursos didácticos y un uso interactivo mediante el lápiz óptico. Entre las posibilidades que brinda este software, se destaca el uso de una herramienta que permite escribir con el lápiz óptico sobre todo tipo de documentos (documentos de

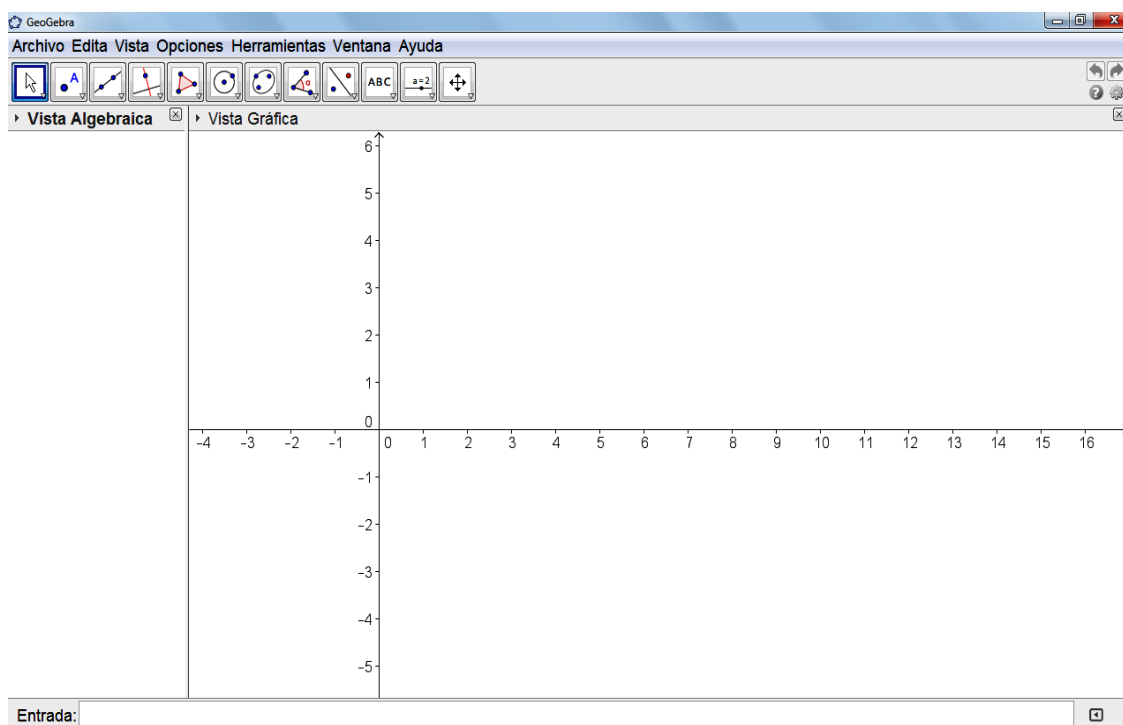
texto, hojas de cálculo, programas para presentaciones multimedia, GeoGebra, archivos de video, páginas de internet, etc.) y el uso de diversos dispositivos para matemática (regla, compás, escuadra, transportador, hoja milimetrada, hoja cuadrículada, calculadora, etc.).



**Figura 1: Pizarra digital**

Las pizarras digitales están conectadas a un programa maestro (ver Figura 4) que permite al docente: ver la actividad de las netbooks de todos los alumnos, socializar el trabajo de los mismos y enviar documentos a las computadoras de los estudiantes.

Así como estos dispositivos se encuentran equipados con programas determinados para el área de Matemática, también cuentan con recursos específicos para las distintas materias, como por ejemplo, un diapasón digital para Música.



**Figura 2: GeoGebra**

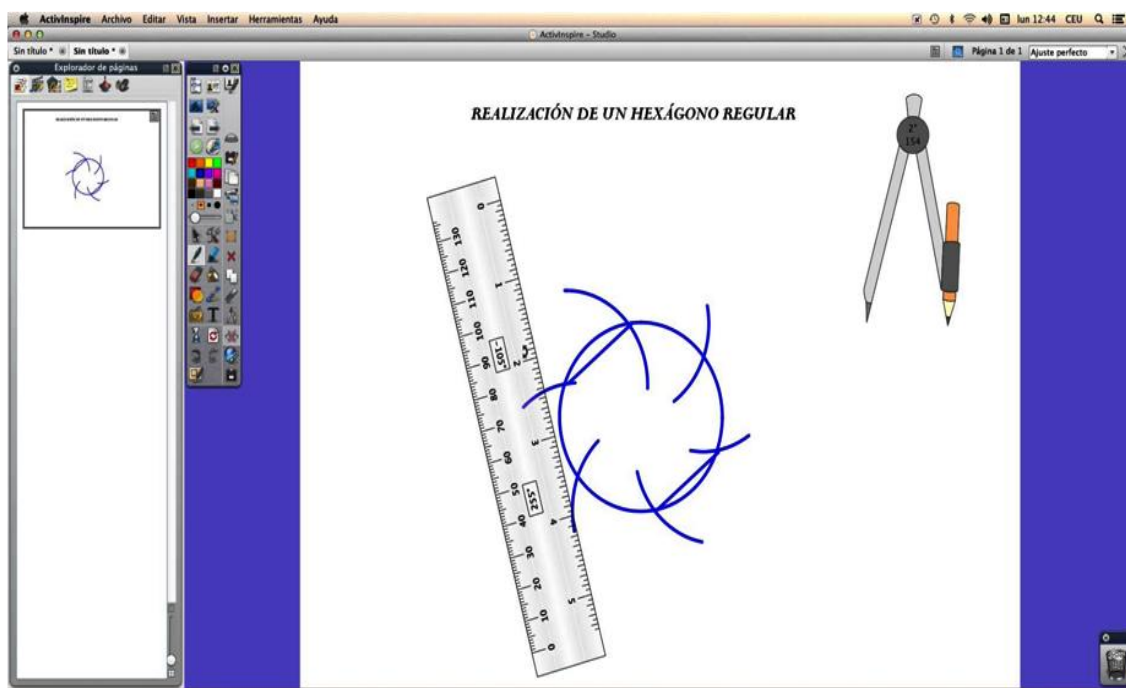


Figura 3: Captura de hoja de trabajo del ActivInspire con regla y compás



Figura 4 : Programa Maestro que muestra las pantallas activadas de cada estudiante

- Plataforma Moodle: ambiente virtual que pone a disposición de los docentes aulas virtuales que les permiten organizar los contenidos y las tareas que se llevan adelante en los diferentes cursos. Entre los recursos que ofrece el aula virtual se destacan el calendario, el foro de novedades, la posibilidad de contactarse con otros participantes, la creación de lecciones mediante la edición de una página web, los cuestionarios, la entrega de tareas y la creación de grupos de estudiantes y foros de discusión.

A solicitud de la docente responsable de los cursos donde realizamos las prácticas, la encargada del gabinete de informática nos habilitó un aula virtual de uso compartido entre las tres divisiones, llamada “Práctica1 2013” (ver Figura 5). La Figura 6 muestra una imagen de la página de inicio de nuestra aula virtual. Asimismo, nos creó cuentas personales mediante las cuales podíamos editar el aula. Para diferenciar las actividades y documentos de cada división, el aula virtual se dividió en tres cajas con los nombres 1°A, 1°B y 1°C.

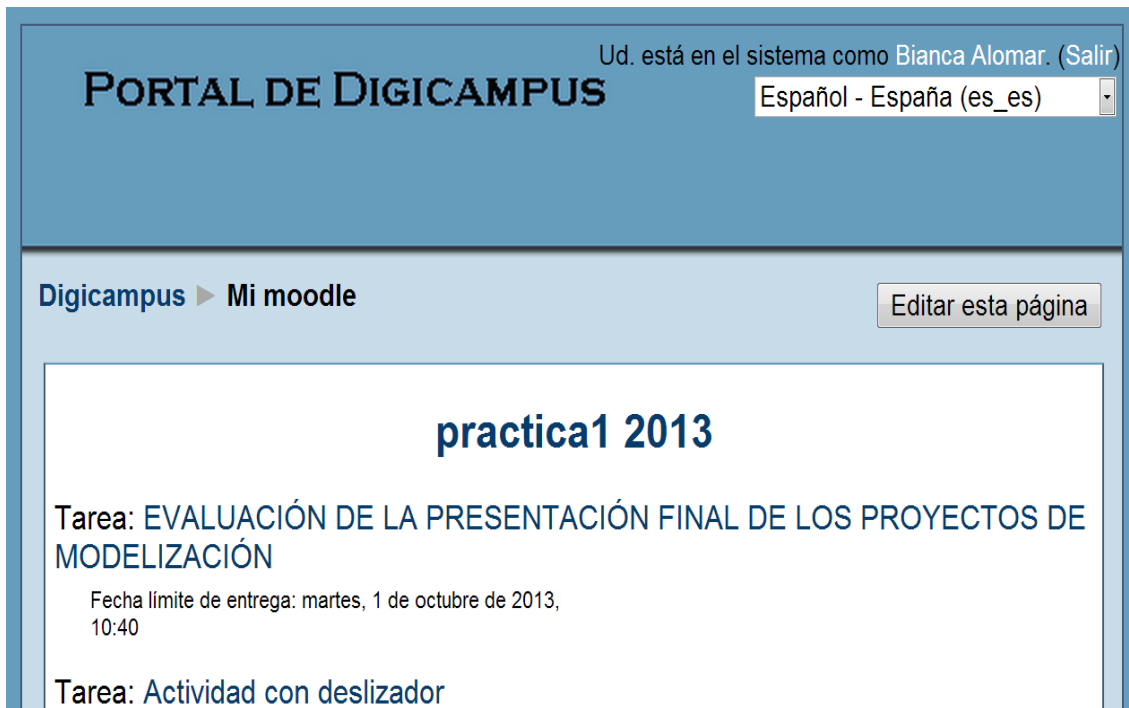


Figura 5: Pantalla de ingreso al Aula Virtual

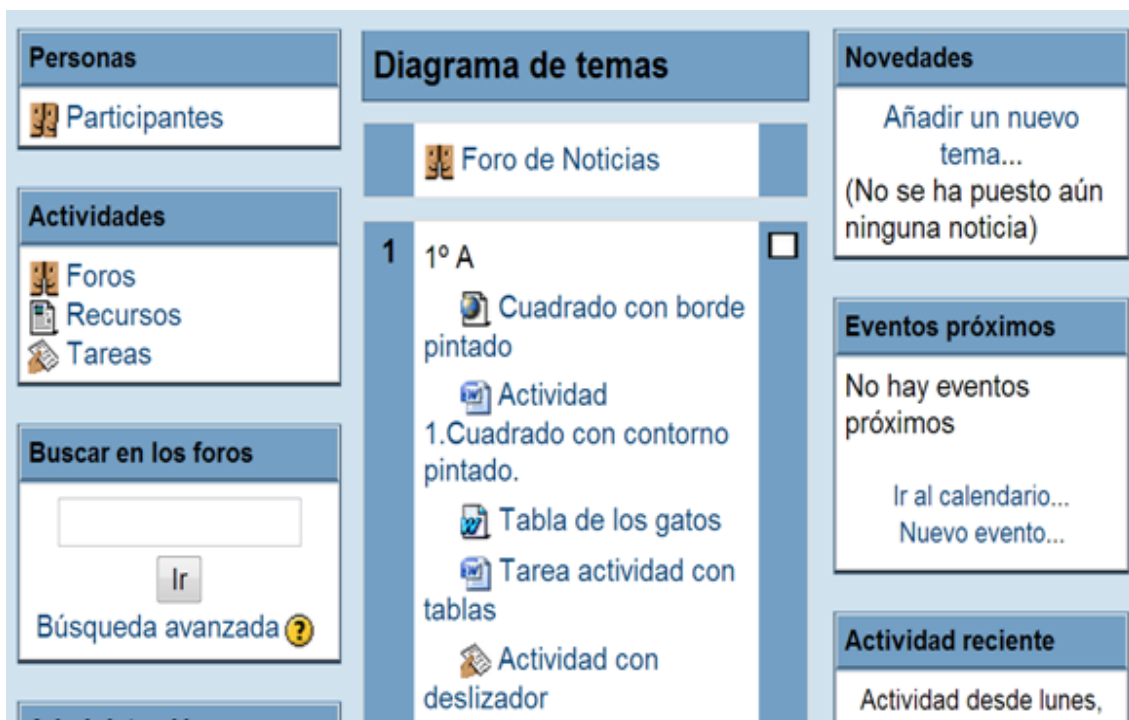


Figura 6: Contenidos de Aula Virtual

Además de los recursos antes descriptos, en las clases también se utilizan elementos didácticos tradicionales como ser el pizarrón de tiza, el lápiz y papel (cuadrulado y milimetrado) y los útiles de geometría (regla, compás, escuadra, transportador).

### 1.3. Los cursos en los que se trabajó

Las prácticas se realizaron en tres primeros años, divisiones A, B y C, a cargo de una misma docente de la institución. 1° A cuenta con 36 alumnos (15 mujeres y 21 varones), 1° B cuenta con 32 alumnos (14 mujeres y 18 varones) y 1° C cuenta con 36 alumnos (16 mujeres y 20 varones). La división “A” tenía como practicante a Bianca, la “B” a Celeste y la “C” a Iris.

Las aulas en donde se trabajó se encuentran ubicadas en el primer piso de uno de los pabellones destinados al nivel secundario. Cuentan con seis filas de siete bancos individuales atornillados al piso y una tarima al frente de la clase donde se encuentra un pizarrón de tiza y una pizarra digital que divide a este en dos partes, además sobre la tarima hay un escritorio con una computadora para uso del docente. Las aulas se encuentra en muy buen estado, son amplias y luminosas, con ventanas en ambos laterales y disponen de aire acondicionado frío-calor, sistema de audio, cañón, acceso a la red local, módems para distribución de internet Wi-Fi y toma corrientes en la pared posterior del aula.

Todos los alumnos deben asistir al establecimiento con una netbook de uso personal que sus padres deben comprar mediante la gestión de la institución.

Cada primer año contaba con una carga horaria de cinco horas cátedra<sup>1</sup> semanales, distribuidas como se puede observar en la Figura 7.

	<b>Lunes</b>	<b>Martes</b>	<b>Miércoles</b>	<b>Jueves</b>	<b>Viernes</b>	
<b>1</b>	1° B					7:35 - 8:15
<b>2</b>	1° B					8:15 - 8:50
<b>3</b>		1° A			1° B	8:50 - 9:30
<b>4</b>	1° C	1° C	1° A	1° C	1° A	9:40 - 10:20
<b>5</b>		1° C	1° A	1° C	1° A	10:20 - 11:00
<b>6</b>		1° B				11:20 - 12:00
<b>7</b>		1° B				12:00 - 12:35

**Figura 7: Horarios**

En términos generales los grupos de alumnos son tranquilos, respetuosos, trabajadores, participativos y críticos en relación a las actividades que se proponen en las diferentes materias. Se distribuyen en los bancos según el criterio del preceptor, y los docentes pueden acordar con éste modificaciones en la disposición de los estudiantes si la situación lo amerita.

### 1.4. La clase de Matemática

La docente de matemática a cargo de los cursos donde realizamos las prácticas, a quienes nos referiremos como profesora tutora, es una profesional con una gran formación y una amplia experiencia en educación matemática. Posee un buen manejo de las tecnologías actuales y trabaja con equipos de investigación en educación matemática pertenecientes a la FaMAF.

<sup>1</sup> Una hora cátedra equivale a 40 minutos reloj de trabajo áulico.

En el aula se muestra como una persona seria y estricta. Procura siempre que en el ámbito de trabajo reine un marco de respeto y orden. El carácter de sus clases es variado y recorre todos los ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2000), desde el paradigma del ejercicio a los escenarios de investigación haciendo referencias a la matemática pura, semirrealidades y en algunas ocasiones a la realidad, a través de proyectos de modelización. Cuenta con una gran producción de material didáctico de su autoría y de otras fuentes, que pone a disposición de sus alumnos mediante el aula virtual.

Rara vez sus clases son expositivas y por lo general procura gestionarlas de forma tal que los alumnos sean los protagonistas del aprendizaje. Para ello, una vez explicitada la dinámica de trabajo, la docente suele ubicarse en la parte posterior de la clase para hacer pasar al frente a los alumnos y, mediante preguntas, despertar en ellos un espíritu crítico y reflexivo hacia la matemática.

Los alumnos responden muy bien ante esta dinámica de trabajo, muestran respeto y estima por la docente y sus pares, son altamente participativos y permanentemente interpelean críticamente los contenidos que se desarrollan en la clase, mostrando un gran interés por lo que hacen.

Cabe destacar que si bien durante las observaciones de día completo, en ningún momento del dictado de las clases de las otras materias los alumnos se mostraron irrespetuosos, no se observó el alto nivel de participación e interés por el trabajo que se evidenció en todas las clases de matemática.

#### 1.5. Planificación anual de la profesora

La planificación de primer año es una producción colectiva realizada por la docente de los cursos en los que realizamos las prácticas y la docente de 1° D, en base a una concepción de la Matemática como una:

...ciencia que busca regularidades (Steen, 1990), en situaciones dentro y fuera de ella, expresa estas regularidades usando el lenguaje que le es propio, y usa estas regularidades para predecir, resolver problemas, modelizar situaciones de la vida diaria, elaborar argumentos, etc.<sup>2</sup>

La planificación, se elaboró, en base a la información proveniente de docentes y directivos de la primaria y la experiencia del trabajo en primer año con la que estas docentes cuentan; admitiendo flexibilidad ante las particularidades de los diferentes grupos de estudiantes. La misma atiende al perfil institucional y se enmarca en los Diseños Curriculares para Matemática de la Provincia de Córdoba 2011-2015 y busca satisfacer las demandas de docentes del área de años superiores, como así también, los requerimientos de docentes de primer año de diferentes materias.

Las expectativas generales<sup>3</sup> expresadas en la planificación son:

- Buscar regularidades en situaciones donde, su principal contenido esté centrado en la matemática o en situaciones fuera de ella pero donde se pueda obtener alguna representación matemática de dicha situación.
- Representar las regularidades encontradas mediante distintos textos propios de la matemática (lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, gráficos, tablas, fórmulas, etc.) y traducir de una forma de representación en otra.

---

<sup>2</sup> Información extraída de la Planificación Anual de Matemática de Primer Año.

<sup>3</sup> Ibídem 2.

- Manipular las distintas representaciones obtenidas y controlar los cambios que esto significa en otra representación disponible.
- Identificar las representaciones óptimas para resolver un problema y seleccionar los recursos materiales apropiados (por ejemplo, papel y lápiz, calculadora, software, útiles de geometría, etc.), reconociéndolas como distintas formas de comunicar una idea a los otros.
- Aprovechar las distintas situaciones que se presenten para repasar, sintetizar y afianzar conceptos aprendidos en el nivel primario, especialmente dándoles mayor grado de formalidad propia de la matemática.
- Escribir pequeños textos argumentativos para justificar ideas o procesos de solución de un ejercicio o construcción, utilizando distintos tipos de lenguajes.
- Valorar la aplicación de la matemática a situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria.
- Reconocer el valor de la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana, y como un lenguaje particular.

Las docentes pretenden alcanzar estas expectativas apelando a estrategias metodológicas como ser: modelización matemática, experimentos matemáticos, ejercitación de afianzamiento de procedimientos propios de la matemática, resolución de problemas y desarrollo de pequeños proyectos de modelización de temas elegidos por los alumnos.

Los contenidos abordan los cuatro ejes previstos en el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba (Número y Operaciones, Álgebra y Funciones, Geometría y Medida y, Estadística y Probabilidad) y se estructura en nueve unidades con coherencia temática, cuyo orden no es necesariamente lineal, debido a las estrategias metodológicas previstas.

Según lo observado y lo explicitado en la planificación anual de la docente, en las diferentes divisiones de primer año donde la profesora tutora da clases, se recorren los diferentes ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2000) y para ello se recurre a los diferentes formatos pedagógicos previstos por el Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba 2011 - 2015.



## **2. Planificación e implementación de las prácticas en el aula**

### **2.1. Contenidos desarrollados por la docente previo al inicio de las prácticas**

Previo al inicio de nuestras prácticas, la docente desarrolló en los cursos los siguientes contenidos correspondientes a las unidades 1, 2 y 3<sup>4</sup>:

Conjunto de los Números Naturales y su representación en la recta numérica. Orden en  $\mathbb{N}$ . Operaciones en  $\mathbb{N}$  y sus propiedades. Potenciación y radicación en  $\mathbb{N}$ . Propiedades de la potenciación en  $\mathbb{N}$ . Divisibilidad en  $\mathbb{N}$ . Divisor y múltiplo. Números primos. Criterios de divisibilidad. Factorización de un número natural. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Conjunto de los Números Enteros y su representación en la recta numérica. Orden en  $\mathbb{Z}$ . La suma en  $\mathbb{Z}$ . Igualdades y desigualdades numéricas sencillas. Ecuaciones: definición. Resolución de ecuaciones e inecuaciones.

Conjunto de los Números Racionales Positivos

Problema de la medida. Proceso de medir. Magnitudes. La unidad de medida. Insuficiencia de los naturales para resolver el problema de la medida. Particiones de la unidad de medida. El número racional positivo como solución al problema de la medida.

### **2.2. La unidad trabajada**

A continuación presentamos la unidad asignada para el desarrollo de las prácticas:

Unidad 4: Relaciones entre Variables.

Búsqueda de regularidades entre dos variables. Noción de variables. Distintas representaciones de la representación entre dos variables: tabla, lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, esquemas. Sistema de coordenadas cartesianas para ubicar puntos en el plano, y para representar la relación entre dos variables. Traducción de una forma de representación en otra. Pequeños proyectos de estudio de fenómenos que involucren la búsqueda de una relación entre dos variables como respuesta a alguna pregunta que se plantean los alumnos. Estudio de algunas relaciones de proporcionalidad directa e inversa. La constante de proporcionalidad directa e inversa. La escala y el porcentaje desde la perspectiva de constante de proporcionalidad y como número racional. Mediciones de ángulos: conversiones<sup>5</sup>.

Cabe aclarar que durante las prácticas no se alcanzaron a abordar los contenidos referentes a relaciones de proporcionalidad.

En este punto, resulta importante destacar que para las actividades propuestas al inicio de nuestras prácticas nos apoyamos fuertemente en contenidos trabajados previamente por la docente en el curso, tales como aquellos referentes a la medida, para la recolección inicial de datos, y ecuaciones, para el proceso de búsqueda de regularidades. Además partimos de los conocimientos que los alumnos tenían en relación a la representación de números en la recta numérica para introducir la noción de plano cartesiano, ejes de coordenadas, pares ordenados y representación de puntos en el plano. Volveremos sobre este tema cuando presentemos y desarrollemos las actividades propuestas a lo largo de las prácticas.

---

<sup>4</sup> Información extraída del programa de Matemática de 1° Año.

<sup>5</sup> Información extraída de la Planificación Anual de Matemática de Primer Año.

Los contenidos trabajados a continuación de nuestras prácticas fueron, según nos informó la docente tutora, en comunicación personal vía e-mail:

(...) luego de las prácticas de uds. empecé con conceptos geométricos (su definición, representación, simbolización) y el rol de estos elementos (la definición, ejemplos, contraejemplos, simbolización, etc.) en el trabajo en geometría.

Luego pasaré a estudiar propiedades de figuras geométricas (polígonos en general, triángulos, cuadriláteros, poliedros) buscando "relaciones". Con estas relaciones, utilizaremos ecuaciones para realizar cálculos.<sup>6</sup>

### 2.3. Los objetivos propuestos para la planificación

Para el abordaje de la unidad 4 nos propusimos como objetivo general *"Introducir la noción de modelización a través de búsqueda de regularidades numéricas"*. Para ello establecimos los siguientes objetivos específicos:

- Recurrir a los conceptos de medida vistos en la unidad anterior.
- Identificar patrones de comportamiento de una sucesión de cuadrados de lado entero.
- Apelar al uso de GeoGebra para visualizar la sucesión de cuadrados de lado entero.
- Recolectar y organizar datos en tablas.
- Reflexionar sobre la importancia de la tabla y el gráfico como herramientas universales para comunicar datos.
- Buscar regularidades atendiendo a diversos aspectos de la sucesión.
- Expresar las regularidades encontradas en forma coloquial y simbólica.
- Recurrir al uso de tablas y gráficos para representar las regularidades halladas.
- Identificar variables y establecer relaciones entre ellas.
- Introducir el plano cartesiano y la noción de par ordenado estudiando su origen histórico y su uso en el ámbito de la matemática.
- Realizar con GeoGebra representaciones gráficas de las relaciones descubiertas.

### 2.4. Introducción a la modelización matemática: el problema del cuadrado que cumple años

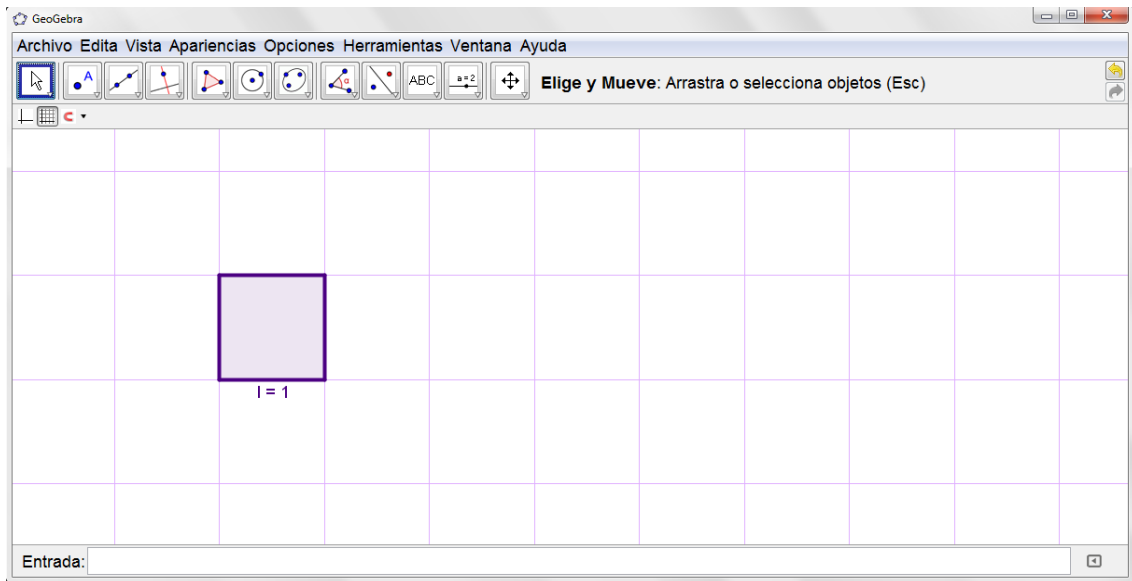
#### 2.4.1. El cuadrado que cumple años

Para introducir a los alumnos en la modelización matemática, se recurrió a un problema que resultó potente para el trabajo en el curso y permitió abordar casi todas las etapas que un proceso de modelización supone. Para arribar a este problema se realizó un trabajo previo de lectura de bibliografía y análisis de diversos problemas que fueron descartados por diferentes motivos. Finalmente, y gracias a una bibliografía (Phillips, 1991, pág.17-20) sugerida por la docente a cargo de los cursos donde realizamos las prácticas, encontramos un problema muy interesante para el enfoque de los contenidos propuestos por la unidad 4. Si bien el problema resultaba atractivo, presentaba una dificultad de carácter técnico, pues para que los alumnos pudieran comprender y visualizar el planteo del problema, era preciso contar con una gran cantidad de cubos de  $1 \text{ cm}^3$  como material didáctico. Esta dificultad nos llevó a realizar una serie de modificaciones, con ayuda de nuestra profesora supervisora, en el enunciado del problema. Llegamos así, a la formulación del problema *El cuadrado que cumple años*, que utilizaríamos para introducir el proceso de modelización en el curso.

---

<sup>6</sup> Extracto de correo electrónico enviado por la docente tutora el día 13 de Octubre de 2013.

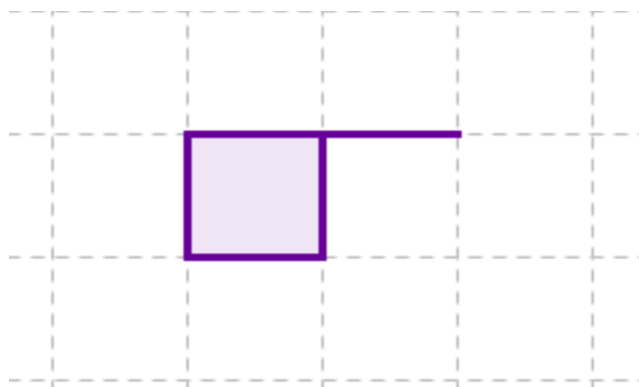
Para presentar *El problema del cuadrado que cumple años* a los alumnos, les mostramos un gráfico de GeoGebra con un cuadrado de contorno pintado, de 1 cm de lado al que llamamos figura 1 (ver Figura 8). Definimos este cuadrado como unidad de medida de área, explicando que tiene un año.



**Figura 8: Cuadrado de un año de edad**

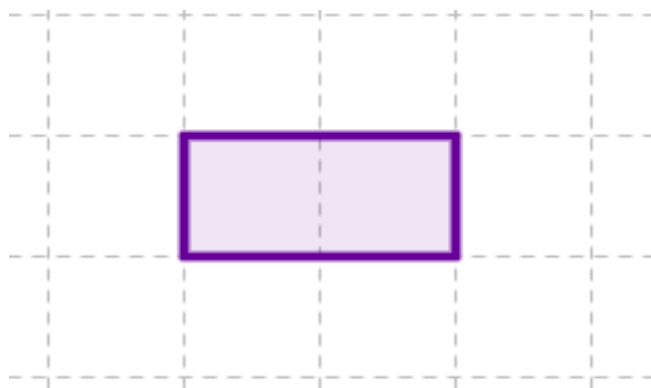
A continuación les preguntamos cómo sería la figura 2, cuando el cuadrado cumpliera dos años de edad, si de un año al siguiente su lado aumenta en 1 cm. Pedimos a los alumnos que grafiquen en GeoGebra las figuras 1 y 2. Pretendíamos con esta actividad constatar que los alumnos comprendieran que al incrementar 1 cm uno de los lados del cuadrado, todos los lados aumentan su longitud de la misma manera para que la figura mantenga la identidad de cuadrado, pues nació cuadrado.

En términos generales, la sucesión de figuras correspondientes a los cuadrados de 1 y 2 años se comprendió rápidamente. Sin embargo, en uno de los cursos se generó un debate entre los alumnos pues hubo chicos que no comprendían cabalmente que el crecimiento de un lado del cuadrado, suponía el crecimiento proporcional de todos sus lados. A continuación, en la Figura 9 y Figura 10, se exhiben los planteos realizados por estos alumnos<sup>7</sup>.



**Figura 9: Interpretaciones del crecimiento del cuadrado (1)**

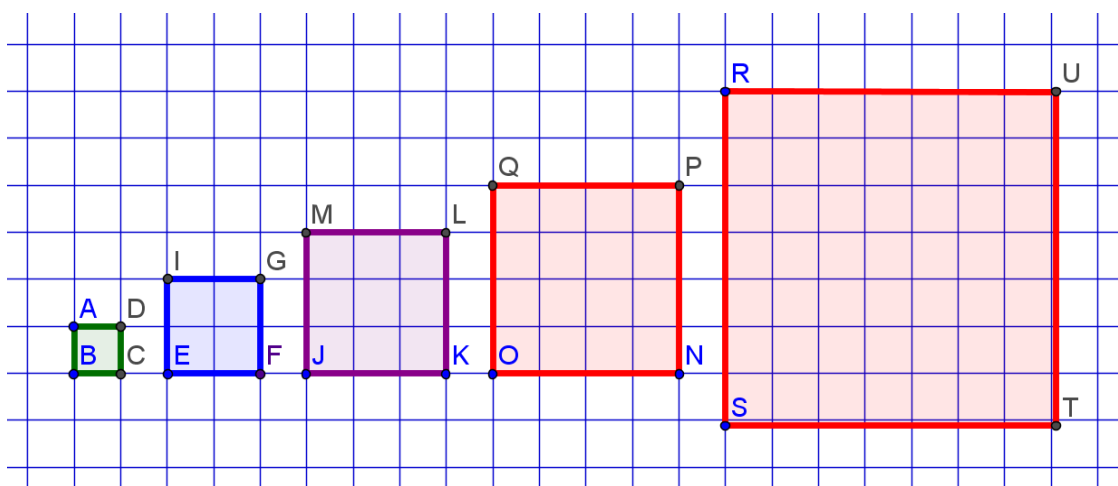
<sup>7</sup> Las imágenes que se exhiben son reproducciones del trabajo realizado por los alumnos.



**Figura 10: Interpretaciones del crecimiento del cuadrado (2)**

Para resolver este problema la docente practicante realizó una serie de intervenciones que apelaban a las características distintivas del cuadrado, para contrastarlas con las construcciones realizadas en el curso. Se formularon preguntas del tipo ¿Cuáles son las características de un cuadrado?, ¿en qué se diferencia un cuadrado de un rectángulo?, ¿esta figura cumple con esa condición?

Una vez comprendido el patrón de crecimiento del cuadrado, preguntamos a los alumnos ¿Cómo sería la figura cuando cumple 3 años?, ¿Cuándo cumple 4 años?, ¿y cuando cumple 7 años de edad?, solicitando que las grafiquen en GeoGebra. A continuación, mostramos algunas de las construcciones realizadas por los alumnos, destacando que en este proceso los mismos recurrieron a diversas herramientas que el programa ofrece, como por ejemplo, *Segmento entre Dos Puntos*, *Recta que pasa por Dos Puntos*, *Recta Paralela*, *Recta Perpendicular*, *Polígono*, *Polígono Regular*, *Lápiz*, entre otras (ver Figura 11<sup>8</sup> y Figura 12<sup>9</sup>).



**Figura 11: Producción de un alumno, utilizando la herramienta *Polígono Regular***

<sup>8</sup>Contamos con producciones realizadas por los alumnos, gracias a que éstos compartieron sus archivos a través de la plataforma.

<sup>9</sup> La imagen que se exhibe es una reproducción del trabajo realizado por un alumno.

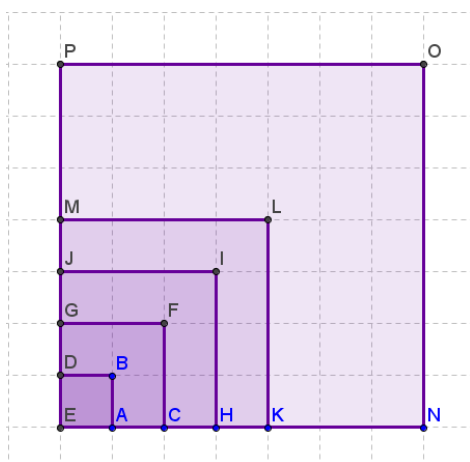


Figura 12: Reproducción del trabajo realizado por alumnos que utilizaron la herramienta *Polígono*

#### 2.4.2. La actividad propuesta: Cuadrados de contorno pintado

Luego de habernos puesto de acuerdo en cómo construir la sucesión de cuadrados, se procedió a trabajar con la *Actividad 1: Cuadrados de contorno pintado*. Esta actividad proponía la exploración de un archivo de GeoGebra (Anexo digital 1: *Cuadrado de contorno pintado*) en el que se podía observar un cuadrado de contorno pintado, con un deslizador denominado  $b$ , asociado a la longitud del lado del cuadrado, definido en el intervalo  $[1,15]$  con incremento de 1. No se visualizaban los ejes cartesianos pero sí la cuadrícula fija de  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ . El archivo arrojaba además, la longitud del lado del cuadrado, llamado  $l$ , para la sucesión de figuras que podían obtenerse al mover el deslizador. Cabe destacar que tanto el enunciado de la actividad como el archivo de GeoGebra se encontraban a disposición de los alumnos en el aula virtual. A continuación se exhiben la Actividad 1 propuesta a los alumnos y capturas de pantalla del archivo para distintas posiciones del deslizador (ver Figura 13).

#### Actividad 1: Cuadrados de contorno pintado

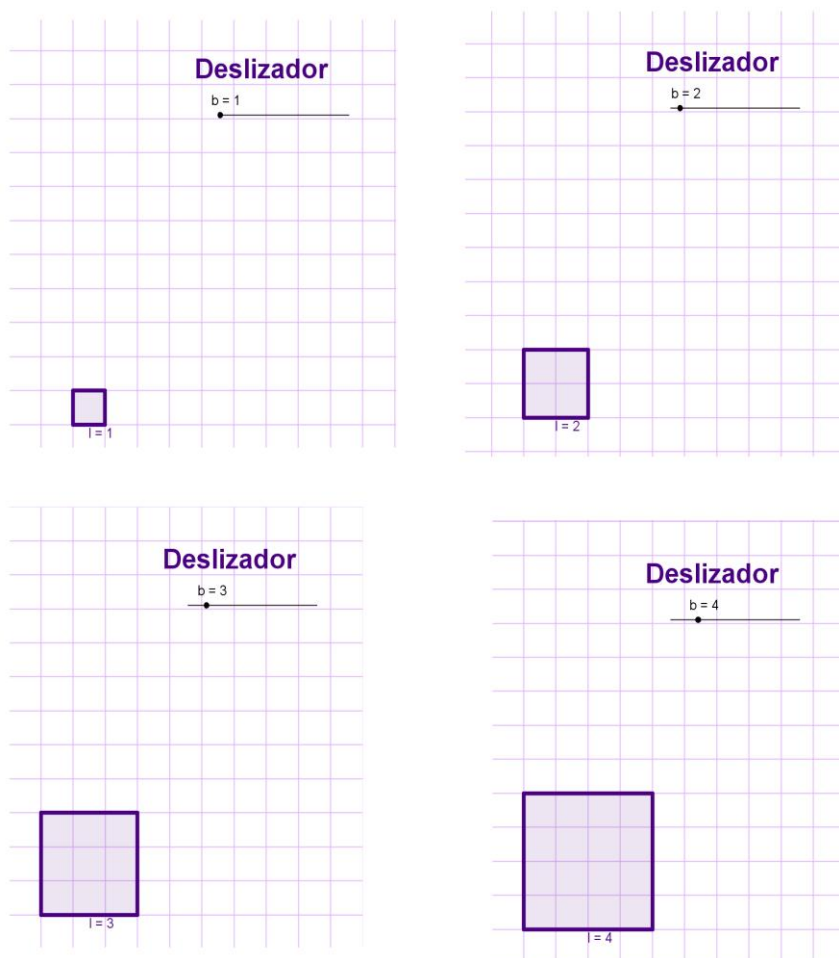
1. Observe detenidamente las figuras que obtiene al mover el deslizador. Conteste las siguientes preguntas por escrito en un archivo de Word o en la carpeta.
  - a. ¿Qué características tienen en común estas figuras?
  - b. ¿Qué cualidades se modifican de una figura a la siguiente?
2. Note que las figuras tienen el contorno pintado.

Posicione el deslizador en  $b=2$ .

Organice los datos que obtenga al responder las siguientes preguntas. Para ello, considere que esta información tiene que ser leída y comprendida por todos.

- a. ¿Qué longitud tiene el lado del cuadrado?
- b. Mida el área del cuadrado, para ello recuerde que la cuadrícula es  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ .
- c. Mida el perímetro del cuadrado, para ello recuerde que la cuadrícula es  $1\text{cm} \times 1\text{cm}$ .
- d. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen dos lados pintados?
- e. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen un lado pintado?
- f. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman el forman la figura no tienen ningún lado pintado?

Repita el mismo análisis para  $b=3$ ,  $b=4$ ,  $b=5$  y  $b=7$ .



**Figura 13: Figuras del cuadrado con contorno pintado obtenidas con las distintas posiciones del deslizador**

En general esta actividad no presentó dificultad, y utilizamos la misma para introducir una primera aproximación a la noción de *variable*, como “una magnitud cuyo valor varía en la medida en que la situación donde se presenta también cambia”<sup>10</sup>.

La actividad apuntaba a la recolección y organización de datos. La forma de organizar los datos se dejaba abierta al criterio del alumno, bajo la condición de que la información recolectada fuera de claro acceso para cualquiera. Fueron pocos los alumnos que realizaron tablas pero estas producciones, nos sirvieron para introducir la tabla como un medio para la organización de datos en clases posteriores.

A continuación se muestra la resolución de esta actividad por parte de una alumna<sup>11</sup>. Sus respuestas están escritas en *italicas*. En general, la mayoría de los alumnos recolectó los datos de forma similar, ya sea en papel o en un editor de texto.

<sup>10</sup> Definición extraída de material didáctico creado por la profesora tutora.

<sup>11</sup> Obsérvese que en el punto **2c**, la resolución resulta incorrecta para el cuadrado de longitud de lado 2 cm.

**Actividad 1: Cuadrados de contorno pintado.**

1. Observe detenidamente las figuras que obtiene al mover el deslizador. Conteste las siguientes preguntas por escrito en un archivo de Word o en la carpeta.

a. ¿Qué características tienen en común estas figuras?

*Todas estas figuras tienen en común que son un cuadrado.*

b. ¿Qué cualidades se modifican de una figura a la siguiente?

*El área, el perímetro, la longitud.*

2. Note que las figuras tienen el contorno pintado.

Posicione el deslizador en  $b=2$ .

Organice los datos que obtenga al responder las siguientes preguntas. Para ello, considere que esta información tiene que ser leída y comprendida por todos.

a. ¿Qué longitud tiene el lado del cuadrado?

*$B=2$  Longitud: 2 cm*

*$B=3$  Longitud: 3 cm*

*$B=4$  Longitud: 4 cm*

*$B=5$  Longitud: 5 cm*

*$B=7$  Longitud: 7 cm*

b. Mida el área del cuadrado, para ello recuerde que la cuadrícula es 1cm x 1cm.

*$B=2$  Área: 4 cm<sup>2</sup>*

*$B=3$  Área: 9 cm<sup>2</sup>*

*$B=4$  Área: 16 cm<sup>2</sup>*

*$B=5$  Área: 25 cm<sup>2</sup>*

*$B=7$  Área: 49 cm<sup>2</sup>*

c. Mida el perímetro del cuadrado, para ello recuerde que la cuadrícula es 1cm x 1cm.

*$B=2$  Perímetro: 6 cm*

*$B=3$  Perímetro: 12 cm*

*$B=4$  Perímetro: 16 cm*

*$B=5$  Perímetro: 20 cm*

*$B=7$  Perímetro: 28 cm*

d. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen dos lados pintados?

*B=2 Cuadrados pintados dos veces: 4 cuadrados*

*B=3 Cuadrados pintados dos veces: 4 cuadrados*

*B=4 Cuadrados pintados dos veces: 4 cuadrados*

*B=5 Cuadrados pintados dos veces: 4 cuadrados*

*B=7 Cuadrados pintados dos veces: 4 cuadrados*

e. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura tienen un lado pintado?

*B=2 Cuadrados pintados una vez: 0 cuadrados*

*B=3 Cuadrados pintados una vez: 4 cuadrados*

*B=4 Cuadrados pintados una vez: 8 cuadrados*

*B=5 Cuadrados pintados una vez: 12 cuadrados*

*B=7 Cuadrados pintados una vez: 20 cuadrados*

f. ¿Cuántos cuadrados unidad de los que forman la figura no tienen ningún lado pintado?

*B=2 Cuadrados sin pintar: 0 cuadrados*

*B=3 Cuadrados sin pintar: 1 cuadrado*

*B=4 Cuadrados sin pintar: 4 cuadrados*

*B=5 Cuadrados sin pintar: 9 cuadrados*

*B=7 Cuadrados sin pintar: 25 cuadrados*

Repita el mismo análisis para B=3, B=4, B=5 y B=7.

Además del tipo de resolución antes mostrado, como ya dijimos, algunos alumnos construyeron tablas en Excel o en papel (ver Figura 14). Una situación que merece ser mencionada, refiere a la construcción de tablas “invertidas” en dos de los cursos (ver Figura 15). Estas producciones requirieron introducir algunas indicaciones sobre cómo se construye y se lee una tabla, según convenciones matemáticas.



	Longitud	Área	Perímetro	Cantidad de cuadrados unidad con 2 lados pintados	Cantidad de cuadrados unidad con 1 lado pintado	Cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado
b=2	2	4	8	4	0	0
b=3	3	9	12	4	4	1
b=4	4	16	16	4	8	4
b=5	5	25	20	4	12	9
b=7	7	49	28	4	20	25

Figura 14: Reproducción de tabla construida por un alumno

	b=2	b=3	b=4	b=5	b=7
Longitud	2 cm	3 cm	4 cm	5 cm	7 cm
Área	4 cm <sup>2</sup>	9 cm <sup>2</sup>	16 cm <sup>2</sup>	25 cm <sup>2</sup>	49 cm <sup>2</sup>
Perímetro	8 cm	12 cm	16 cm	20 cm	28 cm
Cantidad de cuadrados unidad con 2 lados pintados	4	4	4	4	4
Cantidad de cuadrados unidad con 1 lado pintado	0	4	8	12	20
Cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado	0	1	4	9	25

Figura 15: Reproducción de “tabla invertida” construida por un alumno

Como puede observarse en las tablas, hubo alumnos que olvidaron dar cuenta de las unidades de medida de las diferentes cualidades, mientras que otros las colocaron en todas las celdas de la tabla. En algunos casos, los alumnos confundieron la unidad de medida para área (cm<sup>2</sup>) con cm<sup>3</sup>.

#### 2.4.3. Una actividad con deslizador

Durante esta etapa de trabajo, para trabajar de manera implícita la noción de variable, se mostró a los alumnos cómo encontrar e insertar la herramienta *deslizador* en un archivo de GeoGebra, realizando como ejemplo un segmento de longitud variable y a partir de éste, la construcción de un cuadrado con longitud del lado variable. Una vez comprendido esto, se planteó a los estudiantes la actividad que se detalla a continuación<sup>12</sup>.

##### **Actividad con deslizador:**

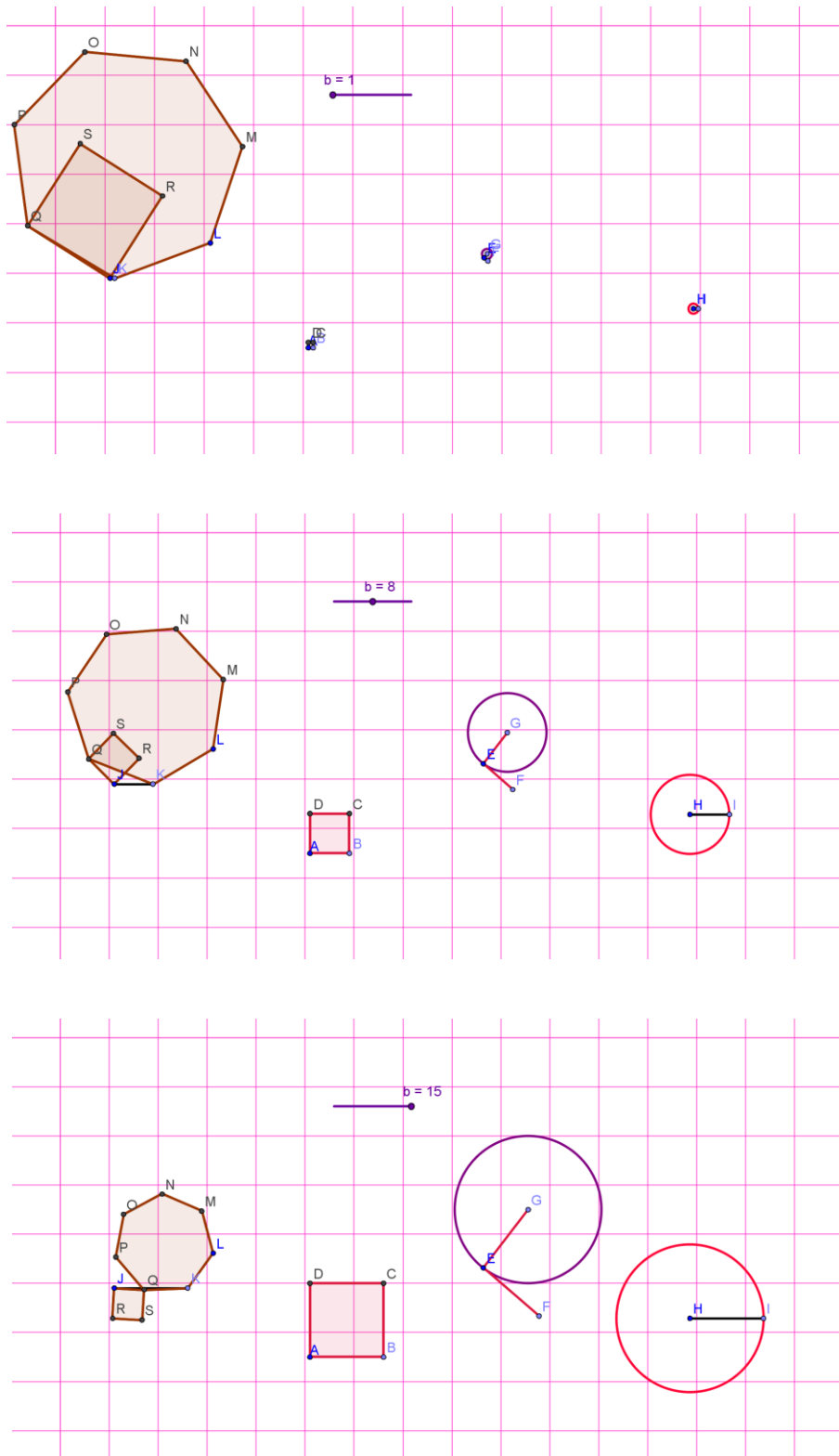
Realice trabajando con un compañero, un archivo de GeoGebra donde emplee, al menos, un deslizador. Construya una secuencia de figuras como por ejemplo la secuencia de cuadrados de lado variable trabajada en clase.

Deberá subir este archivo a la plataforma antes del viernes 16 a las 22:00 hs, después de esta fecha límite la plataforma no admitirá más archivos y no se recibirán fuera de este plazo. Cabe aclarar que el nombre que deberá llevar el archivo será los apellidos de los integrantes, como por ejemplo: T.P: Pérez-Argüello.

<sup>12</sup> Cabe destacar que la realización de esta actividad fue considerada para la conformación de una nota final de evaluación. En la sección de Evaluación se brindan detalles de esta nota final.

En términos generales, los alumnos cargaron los archivos a la plataforma en tiempo y forma. Los resultados de esta actividad fueron muy buenos debido a que la mayoría de los estudiantes, comprendió como insertar un deslizador en GeoGebra y luego asociarlo a alguna cualidad cuantificable de una/s figura/s. Es importante enfatizar, además, que los Protocolos de Construcción que muestra GeoGebra en los archivos de los estudiantes, dan cuenta de diversas estrategias para la resolución de esta actividad.

De los planteos realizados queremos destacar tres producciones que nos interesa comentar, pues tienen características distintivas que las diferencian del común de las construcciones realizadas por los alumnos y de los ejemplos dados en clases. En primer lugar, un archivo muestra varias figuras. En una de éstas, el área disminuye al aumentar el valor del deslizador, mientras que el área de otra figura en un primer momento se reduce y luego empieza a aumentar al incrementar el valor del deslizador (ver Figura 16).

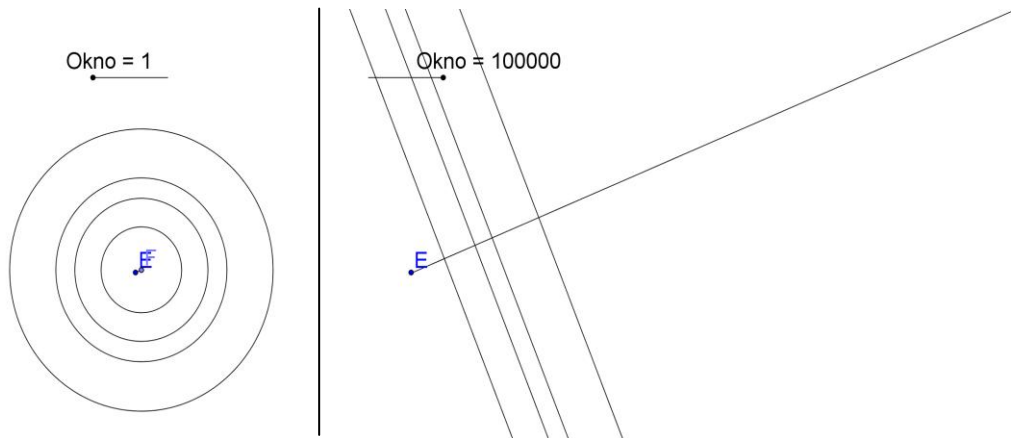


**Figura 16: Producción de un alumno que asoció un deslizador a varias figuras diferentes**

Del análisis del Protocolo de Construcción, pudimos determinar que para realizar esta construcción la alumna asoció el deslizador  $b$  a la longitud del segmento  $JK$ , luego estableció el punto fijo  $L$  y construyó el heptágono regular de lado  $KL$ . Por último, construyó el cuadrado de lado  $JQ$ , donde  $Q$  es un vértice del heptágono. De esta forma, asoció de manera indirecta el

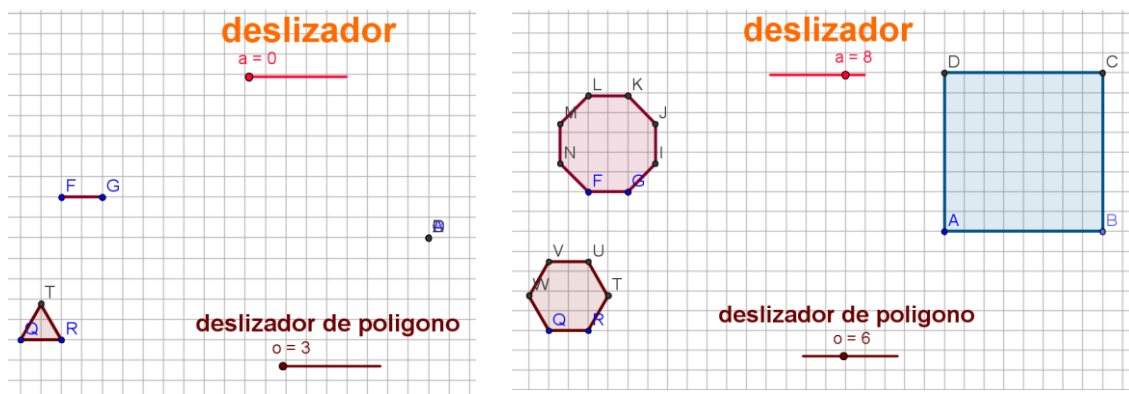
deslizador a estas dos figuras. El deslizador  $b$  se asocio también a la longitud del lado del cuadrado  $ABCD$ , al radio de las circunferencias de centro  $G$  y  $H$  y al segmento  $EF$ .

En segundo lugar, un grupo realizó un archivo con circunferencias concéntricas cuya longitud del radio estaba asociada al deslizador que llamaron “Okno” (ver Figura 17). Lo relevante de este último caso, radica en que los alumnos notaron que al incrementar el deslizador con un valor máximo extremo, las circunferencias concéntricas “se convertían” en rectas paralelas.



**Figura 17: Captura de dos pantallas del archivo realizado por los alumnos. A la derecha se observa el deslizador posicionado en el valor 1 y a la izquierda posicionado en el valor 100000**







Por último, un grupo de alumnos asoció el deslizador al número de lados de un polígono regular, diferenciándose así del resto de las producciones que tendieron a asociar el deslizador a medidas de longitud. En la Figura 18 se muestran dos capturas de pantalla donde puede apreciarse: el deslizador  $a$  asociado al número de lados de un polígono regular y a la longitud del lado de un cuadrado para valores  $a=0$  y  $a=8$ . Para  $a=0$ , no hay polígono regular ni cuadrado posibles y solo aparecen el segmento  $FG$  y cuatro puntos encimados  $A=B=C=D$ . Para  $a=8$ , aparece el octágono regular  $FGHIJKLMN$  y el cuadrado  $ABCD$  de lado 8. En la misma producción se introdujo el deslizador  $o$  asociado al número de lados de un polígono regular y en las capturas de pantalla que muestra la Figura 18 aparecen las figuras para valores  $o=3$  (triángulo equilátero  $QRT$ ) y  $o=6$  (hexágono regular  $QRTUVW$ ).



**Figura 18: Producción de un alumno que asocia deslizadores al número de lados de polígonos regulares**

#### 2.4.4. La tabla como herramienta para organizar la información recolectada

Durante las clases siguientes se profundizó la noción de tabla que había surgido, espontáneamente, a partir de la consigna propuesta en la Actividad 1. Para este cometido se presentó a los alumnos la *Tabla de los gatos*<sup>13</sup> (ver Figura 19).

	Nombre	Peso	Largo T.	Cola	Cuello	Cintura
	Hemotto	8 kg (aprox)	88 cm	31 cm	28 cm	52 cm
	Benita	4.5 kg (aprox)	78 cm	26 cm	18 cm	45 cm
	Alfonsino	5 Kg (aprox)	93 cm	33 cm	25 cm	40 cm
	Dalí	2.35 kg	73 cm	29 cm	16 cm	28 cm
	Luna	-	57 cm	23 cm	12 cm	24 cm
	Porota	2.85 kg	72 cm	27 cm	18 cm	31 cm

**Figura 19: Tabla de los gatos**

Pedimos a los alumnos que interpretaran los datos de esta tabla y, mediante preguntas, orientamos la formulación de una serie de críticas en torno a los encabezados y la ubicación de las unidades de medida en cada una de las celdas. Así, acordamos que las unidades de medida se colocan en los encabezados para que, de cierto modo, la tabla quede más “limpia”. Además se reflexionó sobre la importancia de redactar encabezados adecuados, para que comuniquen de forma clara, los datos contenidos en la tabla a fin de que cualquier persona pueda interpretarla.

Para poner en práctica estas convenciones en torno a la construcción de tablas, se dejó de tarea la siguiente actividad:

#### **Tarea: Actividad con tablas**

1. Analice la tabla de los gatos:
  - a. ¿Para qué sirve?
  - b. ¿Qué datos organizan las diferentes columnas?
  - c. ¿Qué datos organizan las diferentes filas?
  - d. ¿Qué podemos saber del Gato Dalí?
  - e. Rehaga esta tabla teniendo en cuenta las críticas realizadas en clase referidas a los encabezados.
2. Intente organizar los datos obtenidos de la actividad 1 en una tabla de Excel.
3. Busque un ejemplo en tu vida cotidiana o la de tus padres donde se utilice una tabla de datos.

<sup>13</sup> Imagen extraída del sitio web <http://5toh.wikispaces.com/GRUPO+5>, en Julio de 2013.

4. Analícela críticamente como hicimos en clase con la tabla de los gatos ¿Son suficientemente claros sus encabezados?, ¿Se puede mejorar esta tabla?, ¿cómo? Digitalice la tabla para que pueda mostrarla a sus compañeros en la pizarra digital.

El objetivo de esta actividad, era que los alumnos logren reconocer que la tabla sirve para organizar datos destacando su carácter eficiente y universal. Además, buscábamos que los estudiantes observen que cada columna organiza una cualidad particular para diferentes objetos (la columna *Peso* en la *Tabla de los gatos* organiza el peso para diferentes gatos), y una fila organiza datos de diferentes “tipos” referentes a un mismo objeto (la primer fila de la tabla organiza nombre, peso, largo total, etc. para el gato Hemotto). Fue importante también hacer notar que entre los datos de la tabla existen datos numéricos, datos de texto y datos visuales. Este análisis posibilitó la construcción o reformulación de una tabla para los datos recolectados en la Actividad 1: Cuadrados de contorno pintado.

A continuación se muestran algunas de las producciones realizadas por dos alumnos en torno a esta actividad. Las respuestas en los ítems 1a al 1d se muestran en letra itálica.

**Tarea: Actividad con tablas.**

1. Analice la tabla de los gatos:

- a. ¿Para qué sirve?

*Sirve para tener todos los datos de determinados gatos (nombre, peso, longitud, etc.) organizados en una tabla de manera tal que resulte cómodo para el que la emplea (un veterinario, dueño de algún gato, etc.).*

- b. ¿Qué datos organizan las diferentes columnas?

*Nombre, peso, largo total, cola, cuello, cintura.*

- c. ¿Qué datos organizan las diferentes filas?

*Los datos de cada gato*

- d. ¿Qué podemos saber del Gato Dalí?

*El Gato Dalí pesa 2.35, su longitud total es de 73 cm, la longitud de su cola es de 29 cm, el perímetro de su cuello es de 16 cm y la longitud de su cintura es de 28 cm.*

- e. Rehaga esta tabla teniendo en cuenta las críticas realizadas en clase referidas a los encabezados. (Hecha en Excel)

Nombre	Peso (kg aprox.)	Largo Total (cm)	Perímetro de la cola (cm)	Contorno del cuello (cm)	Perímetro de la cintura (cm)
Hemotto	8 (aprox)	88	31	28	52
Benita	4.5 (aprox)	78	26	18	45
Alfonsino	5 (aprox)	93	33	25	40
Dalí	2.35	73	29	16	28
Luna	-	57	23	12	24
Porota	2.85	72	27	18	31

2. Intente organizar los datos obtenidos de la actividad 1 (deslizador) en una tabla de Excel.

Edad del cuadrado	Longitud del cuadrado	Área del cuadrado	Perímetro del cuadrado	Cuadrados con dos lados pintados	Cuadrados con un lado pintado	Cuadrados sin lados pintados
B=2	2 cm	4 cm <sup>2</sup>	6 cm	4 cuadrados	0 cuadrados	0 cuadrados
B=3	3 cm	9 cm <sup>2</sup>	12 cm	4 cuadrados	4 cuadrados	1 cuadrados
B=4	4 cm	16 cm <sup>2</sup>	16 cm	4 cuadrados	8 cuadrados	4 cuadrados
B=5	5 cm	25 cm <sup>2</sup>	20 cm	4 cuadrados	12 cuadrados	9 cuadrados
B=7	7 cm	49 cm <sup>2</sup>	28 cm	4 cuadrados	20 cuadrados	25 cuadrados
B=15	15 cm	225 cm <sup>2</sup>	60 cm	4 cuadrados	52 cuadrados	169 cuadrados
B=55	55 cm	3025 cm <sup>2</sup>	220 cm	4 cuadrados	212 cuadrados	2809 cuadrados
E	L	A	P	c1p	c2p	c0p

A continuación se muestran las tablas realizadas por otro alumno para los ítems 2 y 3 de la Tarea: Actividad con tablas

ACTIVIDAD 1	L	A	P	C2	C1	C0
B2	2cm	4cm <sup>2</sup>	8cm	4	0	0
B3	3cm	9cm <sup>2</sup>	12cm	4	4	1
B5	5cm	25cm <sup>2</sup>	20cm	4	12	9
B7	7cm	49cm <sup>2</sup>	28cm	4	20	25
B15	15cm	225cm <sup>2</sup>	60cm	4	52	169
B55	55cm	3025cm <sup>2</sup>	220cm	4	212	2809
	L: longitud de un lado	A: área	P: perímetro	C2: 2 lados pintados	C1: 1 lado pintado	C0: ningún lado pintado

Tabla de mi vida cotidiana	Hermanos/as	Años que juega al basket en el equipo	Edad (años)	Número que usa
Juan Carlos	0	6 años	13	9
Manuel	1	5 años	12	12
Santiago	3	6 años	12	10
Sebastián	1	2 años	12	14
Javier	1	4 años	12	6
Ignacio	2	5 años y medio	13	7

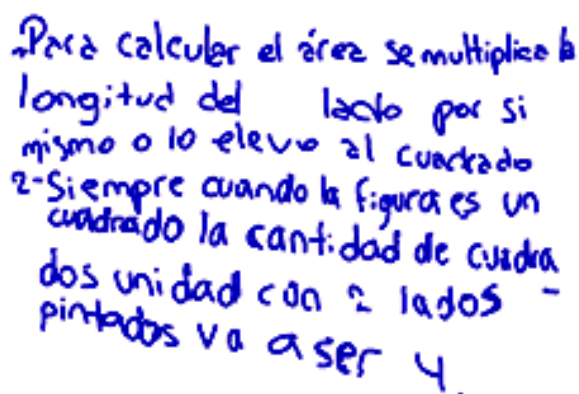
#### 2.4.5. Búsqueda y expresión de regularidades a partir de los datos sistematizados en la tabla: uso del lenguaje coloquial

A partir de la tabla para los datos de la Actividad 1, construida en la Tarea: Actividad con tablas, pedimos a los alumnos que completen el registro para un cuadrado de 15 y de 55 años de edad. Esta actividad tenía como finalidad, empezar a encontrar algunas regularidades puesto que para el cuadrado de 55 años el archivo de GeoGebra ya no constituía más un recurso para obtener los datos requeridos. Algunos alumnos incrementaron el valor máximo del deslizador e intentaron cuantificar la longitud del lado y el área a partir de las unidades de

medidas respectivas, así como también, contar la cantidad de cuadrados unidad con uno, dos o ningún lado pintado. Rápidamente este intento se vio frustrado por lo tedioso de la tarea, lo que obligó a pensar estrategias alternativas para la obtención de estos datos. Cabe destacar que muchos de los alumnos comenzaron a notar regularidades para el cuadrado de 15 años de edad, siendo las primeras obtenidas el perímetro, el área, la longitud del lado y la cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados, ya que esta última permanecía constantemente igual a cuatro a partir del cuadrado de dos años. En relación a ésta última regularidad los alumnos argumentaban que esta constante se debía a que el cuadrado tiene cuatro vértices y que los únicos cuadrados unidad con dos lados pintados se encuentran ubicados en las esquinas de la figura.

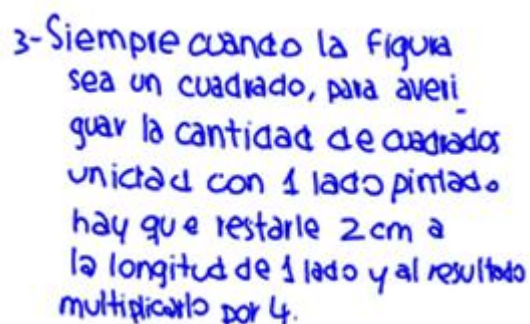
Posteriormente solicitamos que escriban las instrucciones para completar la tabla para algún cuadrado del cual se conoce la edad, o lo que es lo mismo, la longitud del lado. Esta tarea resultó confusa en una primera instancia, por lo cual sugerimos a los estudiantes que intentaran poner en palabras el razonamiento que habían hecho para el cuadrado de 55 años, pero ahora para un cuadrado de una edad cualquiera, partiendo del supuesto de que la edad es conocida. Las instrucciones que presentaron mayor dificultad en su redacción fueron aquellas que aludían a las regularidades en relación a la cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado y ningún lado pintado.

Seguidamente, en las Figura 20, Figura 21, Figura 22 y Figura 23, se muestran algunas de las instrucciones formuladas por los alumnos y socializadas en la pizarra digital.



Para calcular el área se multiplica la longitud del lado por si mismo o lo eleva al cuadrado  
 2- Siempre cuando la figura es un cuadrado la cantidad de cuadrados unidad con 2 lados pintados va a ser 4.

Figura 20: Instrucciones para calcular el área y la cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados (2) de un cuadrado cualquiera



3- Siempre cuando la figura sea un cuadrado, para averiguar la cantidad de cuadrados unidad con 1 lado pintado hay que restarle 2 cm a la longitud de 1 lado y al resultado multiplicarlo por 4.

Figura 21: Instrucción para calcular la cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado de un cuadrado cualquiera



4- Para obtener la cantidad de cuadrados unidad con 0 lados pintados, sumamos los cuadrados con 2 lados pintados más los cuadrados con 1 lado pintado y a este resultado hay que restárselo al área. En el caso de  $b=1$  y  $b=2$  es excepción porque no tienen ningún cuadrado sin pintar.

Figura 22: Instrucción para calcular la cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado de un cuadrado cualquiera

Para calcular el perímetro del \_\_\_\_\_ cuadrado, hay que multiplicar la longitud del lado del cuadrado por 4.

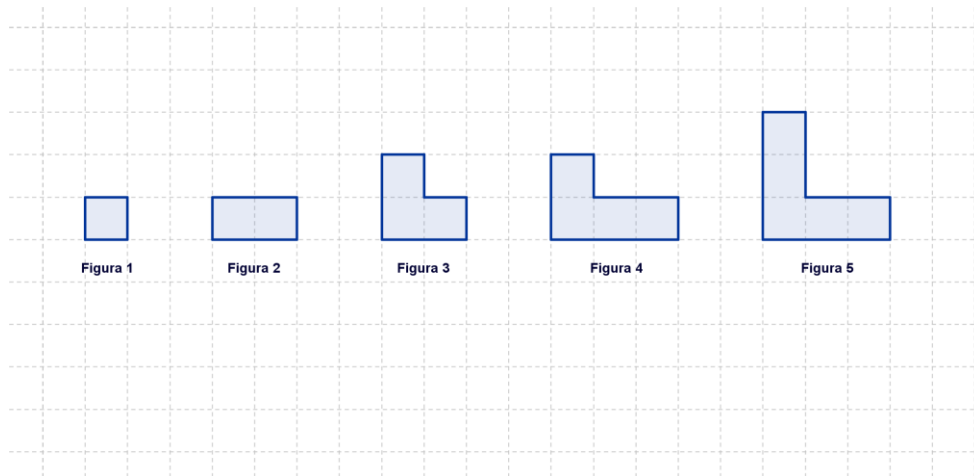
Figura 23: Instrucción para calcular el perímetro de un cuadrado cualquiera

Esta actividad se propuso con el objeto de explicar que a este tipo de formulaciones, formadas por palabras del idioma de uso común, que pueden transmitirse tanto de forma oral como escrita se las denomina expresiones en *Lenguaje coloquial*. Se hizo hincapié en el hecho de que esas instrucciones o expresiones, válidas para cualquier cuadrado, se denominan *regularidades*. Además se explicó que el proceso realizado para llegar a este tipo de formulaciones en Matemática se denomina *búsqueda de regularidades*.

En esta instancia se presentó la tarea que se muestra a continuación, para afianzar los conocimientos aprendidos hasta el momento, en relación a tabla y búsqueda de regularidades en sucesiones de figuras y cuerpos.

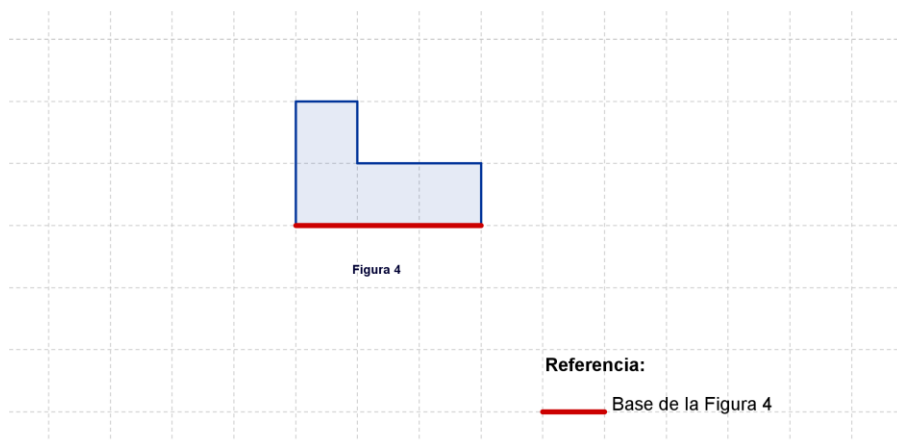
Tarea:

1. Observe las siguientes figuras:



a. Grafique las figuras 6 y 7 en un archivo de GeoGebra.

Llamamos base de la figura al segmento horizontal inferior. Ejemplo: en la imagen de abajo se representa una figura con su base pintada de rojo

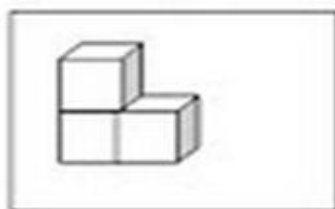


b. Construya una tabla que consigne la longitud de la base, el perímetro y el área para las figuras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Tenga en cuenta que la cuadrícula es de 1cmx1cm.

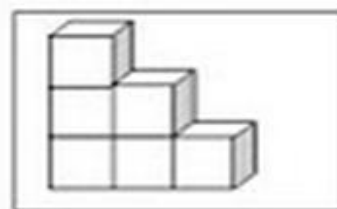
2. Observe los siguientes cuerpos:



**Cuerpo 1**



**Cuerpo 2**



**Cuerpo 3**

- Use el applet *Diseño de cuerpos geométricos en papel isométrico* (<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125>) de la plataforma para graficar el cuerpo 4.
- Construya una tabla que consigne los volúmenes que corresponden, respectivamente, a los cuerpos 1, 2, 3 y 4. Tenga en cuenta que el cuerpo 1 mide  $1\text{ cm}^3$ .

A continuación, en la Figura 24 se muestra material producido por los alumnos en torno al ítem 2 de esta actividad. Puede observarse la imagen del Cuerpo 4, producida usando el applet sugerido, y la tabla que consigna los volúmenes de los cuerpos considerados.



**Figura 24:** Producciones de los alumnos, en base al ítem 2 de la actividad antes mencionada

#### 2.4.6. Traducción del lenguaje coloquial al simbólico

Una vez finalizada la actividad anterior, se procedió a explicar que en matemática, en muchas ocasiones, se utiliza un lenguaje particular formado por números, letras y símbolos, y que a este lenguaje se lo denomina *lenguaje simbólico*. A partir de esta definición solicitamos a los alumnos que intenten traducir las regularidades ya encontradas y expresadas en lenguaje coloquial al lenguaje simbólico, es decir, que intenten escribir en una *expresión* con letras, números y símbolos, aquello que expresaron con palabras. Cabe destacar que antes de realizar dicha actividad, y a partir de la noción de variable introducida en la sección 2.4.1, se identificaron las variables intervinientes en la Actividad 1 y se establecieron referencias comunes para estas variables, como se muestra en la Figura 25.

$L$  = Longitud  
 $P$  = Perímetro  
 $A$  = Área  
 $C_1$  = Cuadraditos pintados de un lado  
 $C_2$  = " " dos lados  
 $C_0$  = ningún lado pintado (cuadraditos)  
 $E$  = edad del cuadrado

**Figura 25: Referencias elegidas para la identificación de variables de la Actividad 1**

En uno de los cursos, una alumna escribió espontáneamente en lenguaje simbólico la regularidad para el perímetro como  $4L = P$ , por lo que se propuso a los alumnos escribir el resto de las regularidades de igual manera. En otra de las divisiones, muchos alumnos interpretaban que el pasaje al lenguaje simbólico solo implicaba sustituir las variables por sus referencias en la explicación coloquial (ver Figura 26), por lo que fue necesario hacer un trabajo de guía para que pudieran representar las regularidades como igualdades.

Para calcular  $A$  podemos multiplicar  $L \cdot L$  o elevar  $L$  al cuadrado.

**Figura 26: Captura del trabajo realizado por un alumno en la pantalla digital**

Algunas de las regularidades escritas en lenguaje simbólico por los alumnos fueron:

- $A = L \times L = L^2$
- $C_2 = 4$
- $C_1 = (L - 2) \times 4$
- $P = L \times 4$ .

Las regularidades que referían a la cantidad de cuadrados unidad con un o ningún lado pintado, fueron las que mayores dificultades presentaron a la hora de expresarse en lenguaje simbólico.

Para determinar la cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado, se obtuvieron tres expresiones equivalentes que se muestran a continuación:

- $C_0 = (L - 2)^2$
- $C_0 = A - (C_1 + C_2)$
- $C_0 = A - C_1 - C_2$

Para demostrar la equivalencia entre estas expresiones, se recurrió a la verificación mediante los datos recolectados en la tabla de la Actividad 1.

Con los contenidos trabajados hasta aquí, se destinó la siguiente clase a actividades de repaso para la realización de un Trabajo Práctico Evaluable (TPE) que había sido anunciado a los alumnos con anticipación.

## 2.5. Una primera instancia de evaluación escrita

El Trabajo Práctico abordaría los siguientes contenidos:

- Recolección de datos
- Uso de tabla
- Búsqueda de regularidades
- Identificación de variables
- Lenguaje coloquial y simbólico

### 2.5.1. Repaso para el Trabajo Práctico Evaluable (TPE)

Al aproximarnos a la fecha de realización del TPE, se instrumentaron diversas actividades de repaso. Una primera actividad de repaso consistió en la ejercitación de búsqueda de regularidades en tablas. Esta actividad no estaba planificada, pero fue desarrollada debido a una sugerencia de la profesora tutora, que diagnosticó insuficiente las actividades realizadas en torno a este tema durante las clases. Además, también era necesario que los alumnos se desprendieran del contexto geométrico en el cuál había sido abordada, por primera vez, la construcción de tablas y la búsqueda de regularidades. A continuación, se muestran las tablas construidas para este fin.

#### Ejercitando búsqueda de regularidades

Observe detenidamente las siguientes tablas y determine regularidades para cada una de ellas (expréselas en lenguaje coloquial y/o simbólico).

**1.**

X	Y
1	2
2	3
3	4
4	5
5	6

**2.**

X	Y
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

3.

X	Y
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10

4.

X	Y
1	0
2	1
3	2
4	3
5	4

5.

X	Y
1	2
2	5
3	10
4	17
5	26

6.

X	Y
1	1
2	3
3	5
4	7
5	9

7.

X	Y
1	0
2	3
3	8
4	15
5	24

8.

X	Y
1	5

	2	6
	3	7
	4	8
	5	9

9.

X	Y
1	4
2	7
3	10
4	13
5	16

Esta actividad se planteó en el curso para que los alumnos la resolvieran en forma individual y luego se socializaron las regularidades halladas para las diferentes tablas. En la Figura 27 pueden verse algunas expresiones construidas por los estudiantes para las distintas regularidades encontradas en las tablas.

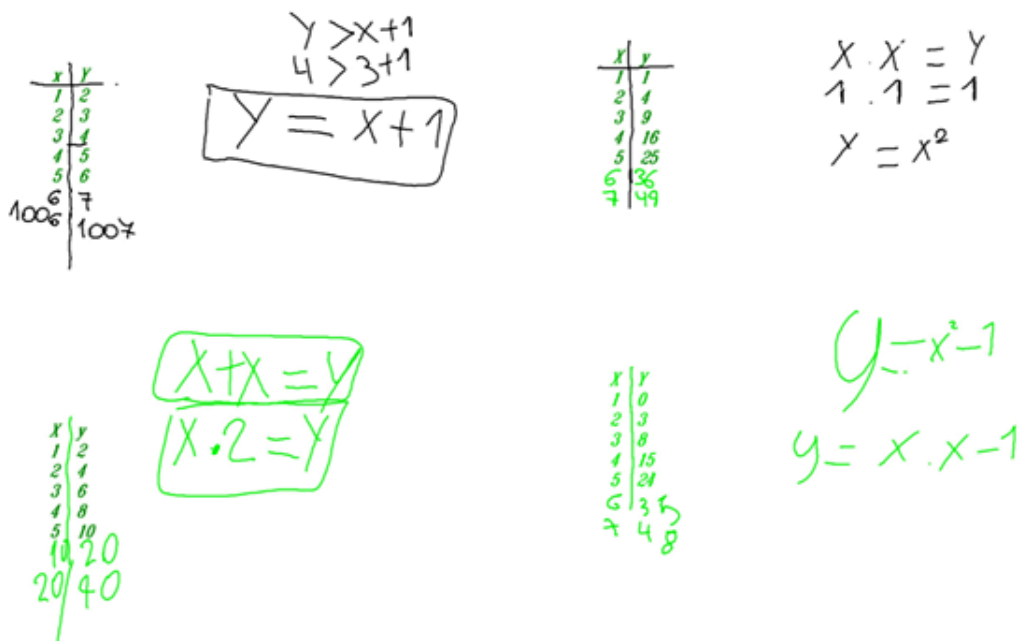


Figura 27: Producciones de los alumnos para algunas regularidades solicitadas en la actividad

Además de esta actividad de repaso, que se desarrolló en clases, se puso a disposición de los alumnos, a través de la plataforma, un material de estudio (Anexo 1) y una guía de ejercitación con su respectiva resolución (Anexo 2).

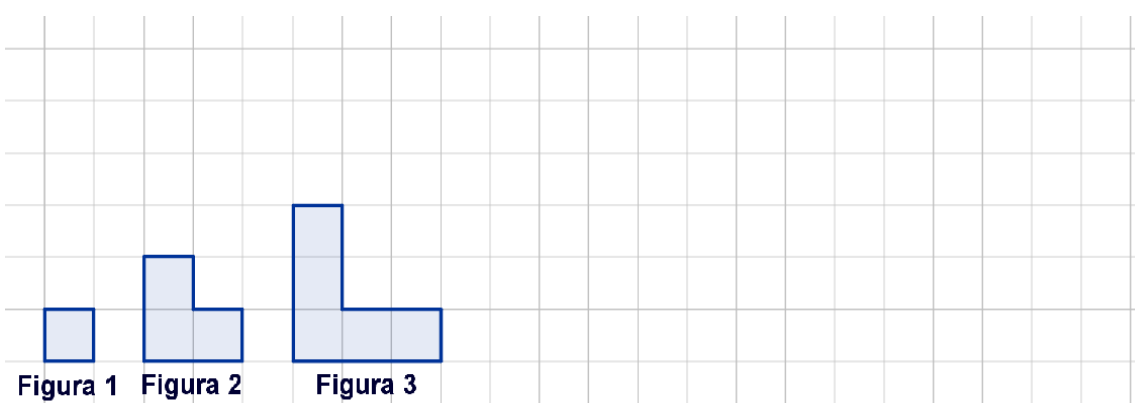
### 2.5.2. Trabajo Práctico Evaluable

Para la realización del TPE se entregaron las consignas en fotocopias individuales. A continuación se muestra el texto del TPE.

**Trabajo Práctico Evaluable.****Nombre y Apellido:****Curso:****División:****Lea atentamente el enunciado y resuelva las actividades en papel.**

Observa la secuencia de figuras que se presenta a continuación. La cuadrícula que se observa es de 1cmx1cm.

1. ¿Cómo será la figura 4 si seguimos la secuencia?, ¿y la figura 6? Grafícalas en el espacio disponible a continuación de la Figura 3.



2. Confecciona una tabla que contenga los datos de la *longitud de la base de la figura* y el *área*, correspondientes para las figuras 1, 2, 3, 4 y 6. Recuerda que en los encabezados de la tabla debes colocar las referencias y unidades de medida respectivas.
3. Completa la tabla para la figura 10 y para la figura 105. Explica tu procedimiento.
4. En la tabla que construiste busca una regularidad que relacione las variables *longitud de la base de la figura* y *área* y escríbela en lenguaje simbólico. Utiliza letras para representar las variables.

Una vez repartidas las fotocopias, se procedió a leer los diferentes enunciados y se preguntó si existían dudas en relación a las actividades propuestas. Asimismo, se aclaró mediante una proyección en la pantalla digital (ver Figura 28) a qué se refería el enunciado, al hablar de *base de la figura*.



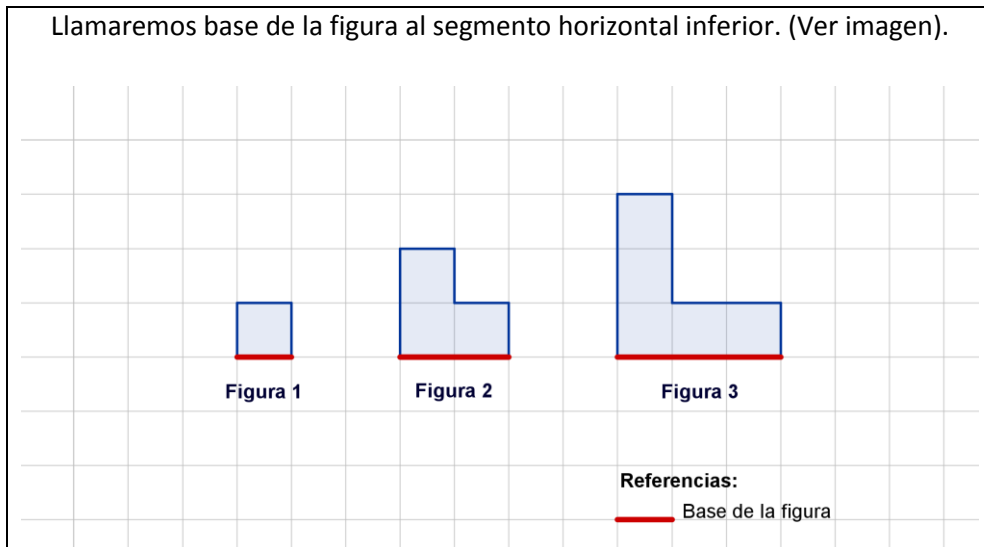


Figura 28: Referencia para TPE

2.5.3. Resoluciones y análisis de los resultados obtenidos en el TPE

A continuación, se muestran algunas producciones de alumnos y se señalan, en algunos casos, errores u omisiones detectados en la resolución de los diferentes apartados del TPE:

- Representación gráfica de la secuencia

No se presentaron dificultades en torno a esta actividad, la mayoría de los alumnos (99%) logró construir correctamente la sucesión de figuras (ver Figura 29), salvo un alumno que, quizás por distracción, cometió un error al realizar el gráfico de la figura 6 (Figura 30).

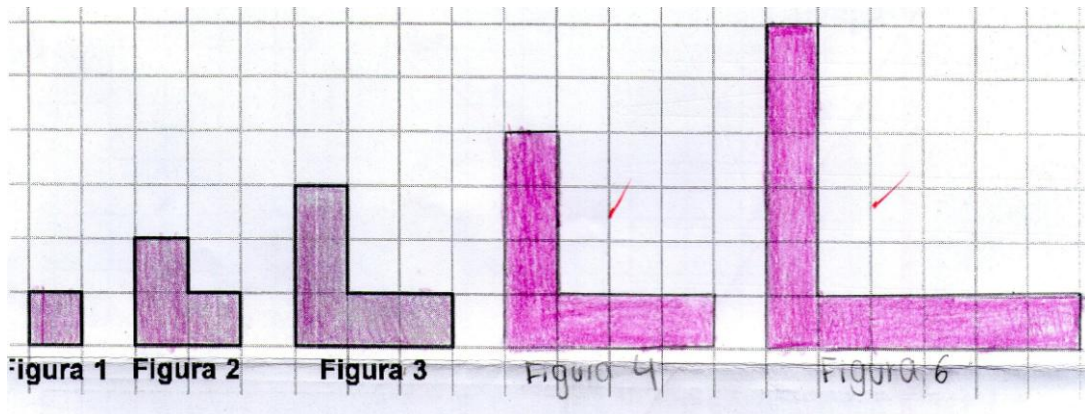


Figura 29: Dibujo de las Figuras 4 y 6

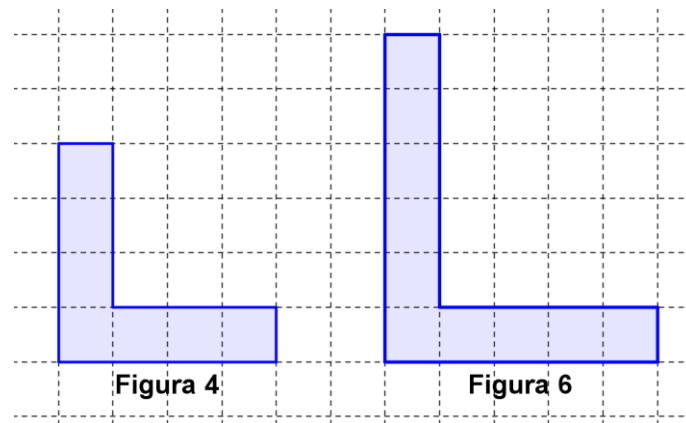


Figura 30: Reproducción de un trabajo que muestra error en la construcción de la Figura 6

- Registro de datos en tablas

Más del 60% de los alumnos realizó con éxito esta actividad, pudiendo medir y organizar correctamente los datos relacionados a la longitud de la base y el área para la secuencia de figuras. En muchos casos no se tuvieron en cuenta las observaciones realizadas en clase, en torno a la necesidad de los encabezados y especificación de unidades de medida (ver Figura 31) para la construcción de tablas. En términos generales, creemos que los alumnos que registraron datos incorrectos, lo hicieron porque asociaron el cálculo del área de la figura propuesta en esta actividad con el cálculo del área del *cuadrado que cumple años* (ver Figura 32). A continuación se muestran algunas producciones realizadas para esta actividad.

	Base	Área
Fig. 1	1	1
Fig. 2	2	3
Fig. 3	3	5
Fig. 4	4	7
Fig. 6	6	11
10	10	19
105	105	209

Figura 31: Tabla en la cual faltan el encabezado de la columna que identifica las figuras y las unidades de medida para la Base y el Área

	Longitud de la base	Área
Figura 1	1 cm	1 cm x 1 cm
Figura 2	2 cm	2 cm x 2 cm
Figura 3	3 cm	3 cm x 3 cm
Figura 4	4 cm	4 cm x 4 cm
Figura 6	6 cm	6 cm x 6 cm
Figura 10	10 cm	10 cm x 10 cm
Figura 105	105 cm	105 cm x 105 cm

Figura 32: Tabla que muestra el cálculo del área de la figura como si se tratara de un cuadrado

E	L	A
1	1	1 cm <sup>2</sup>
2	2	3 cm <sup>2</sup>
3	3	5 cm <sup>2</sup>

Figura 33: Fragmento de tabla donde se utilizan letras para identificar las variables sin establecer ningún tipo de referencias

2	Figura	1	2	3	4
	Longitud de la base (cm)	1	2	3	4
	Área (cm <sup>2</sup> )	1 cm <sup>2</sup>	3 cm <sup>2</sup>	5 cm <sup>2</sup>	7 cm <sup>2</sup>

Figura 34: Fragmento de tabla dispuesta horizontalmente

- Búsqueda de regularidades

Muchos alumnos encontraron dificultades para elaborar explicaciones referidas al procedimiento seguido para completar la tabla para las figuras 10 y 105, incluso en casos en

que estos datos estaban correctamente recolectados en la tabla. Un conjunto de alumnos presentó como explicación del procedimiento para completar la tabla, una definición recursiva de la secuencia (ver Figura 35) mientras que otros alumnos no arribaron a una regularidad que permitiera calcular la longitud de la base para una figura cualquiera (ver Figura 36).

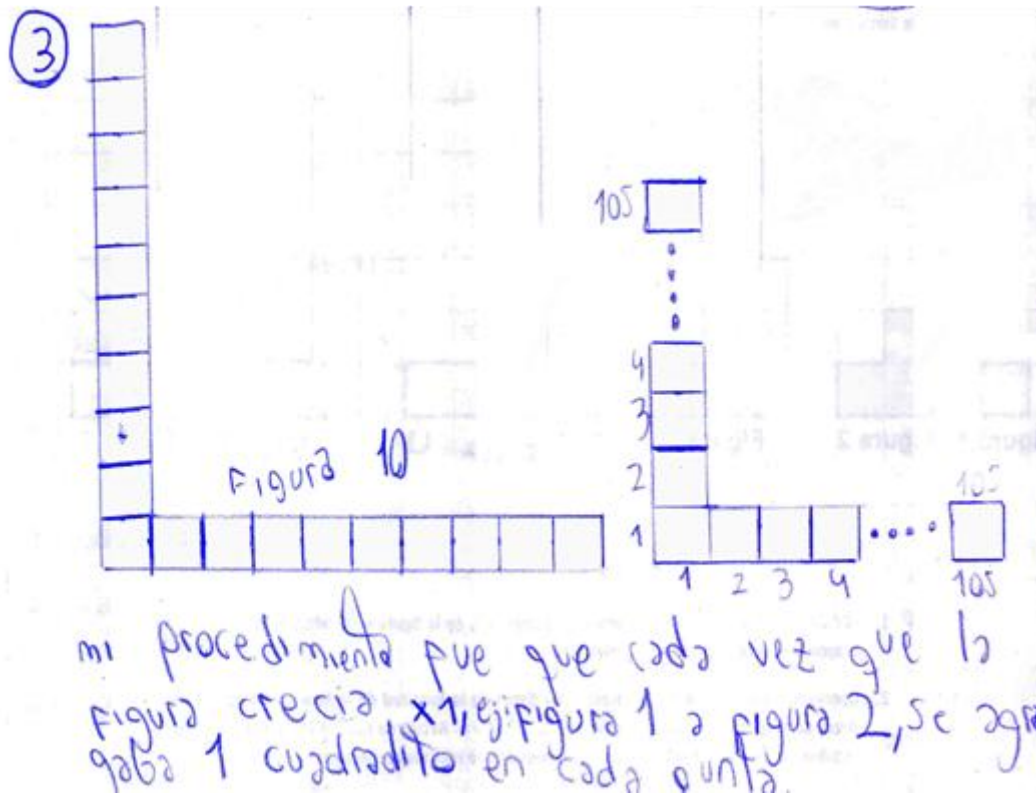


Figura 35: Definición recursiva de la regularidad

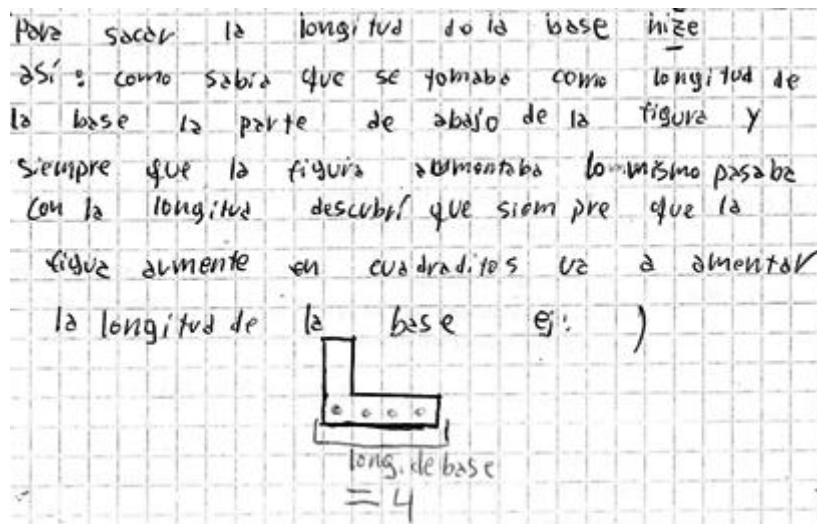


Figura 36: Producción de un alumno para el ítem 3 del TPE

- Expresiones simbólicas de regularidades

Muchos alumnos no realizaron esta actividad y fueron pocos los que arribaron a la regularidad correcta. En la mayoría de los casos en que los alumnos registraron datos usando las

regularidades encontradas para el *cuadrado que cumple años* (ver Figura 32), las expresiones simbólicas que representaban la relación entre la longitud de la base y el área de la figura se correspondían con el área de un cuadrado, es decir había coherencia con los datos de la tabla, pero no con la sucesión de figuras del TPE (ver Figura 37). Además, hubo alumnos que llegaron a expresiones simbólicas correctas pero incompletas, expresando solo un miembro de la igualdad (ver Figura 38<sup>14</sup>). Aquí también, se introdujeron nuevas denominaciones para las variables, sin explicitar las referencias.

$$L \cdot L = A$$

**Figura 37:** Expresión simbólica que vincula la longitud de la base (L) con el área de la figura (A) obtenida a partir de la tabla de la Figura 32

$$L \cdot 2 - 1 = (?)$$

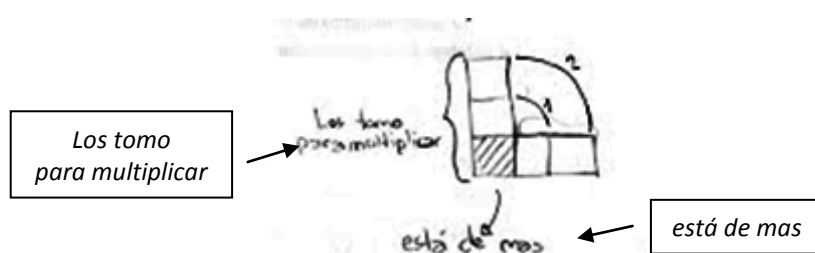
**Figura 38:** Expresión simbólica parcial que permitiría calcular el área de la figura en función de la longitud de la base

A continuación se exponen algunos de los procedimientos empleados por los alumnos para la resolución del TPE. Si bien en el enunciado del TPE no se hace mención a la edad de las figuras, esta asociación, heredada del problema del *cuadrado que cumple años*, aparece en algunas resoluciones (ver Figuras 39 y 41). Se aclara que en la Figura 39, dado que la calidad de la imagen escaneada no era adecuada, se ha transcrito lo escrito por el alumno.

*Para sacar la longitud de la figura 10 conte los cuadrados de la base para sacar el area conte los cuadraditos de la base y los multipliqué x2 y luego le resté 1. ( $10^2 \times 2 - 1^2 = 19 \text{ cm}^2$ )*

*Para sacar la longitud de la figura 105, me fije en las otras figuras y las longitudes coincidían con su edad (Fig. 2 LB.2cm) (Fig. 6 LB.6cm) entonces se que su longitud sería 105, para sacar el area mutipliqué la cantidad de cuadrados de la base x2 y luego le resté 1.*

*Le resto 1 porque al tomar todos los cuadrados de la base y al multiplicarlos hay 1 de más.*



**Figura 39:** Reproducción del procedimiento empleado por un alumno para realizar el ítem 3

<sup>14</sup>El signo de interrogación, corresponde a una corrección de la docente practicante.



En muchos casos, los alumnos partieron de determinar el área de figuras particulares, lo que les permitió discernir la regularidad aplicable a cualquier figura de la sucesión y escribirla en lenguaje simbólico (ver Figuras 40<sup>15</sup> y 41).

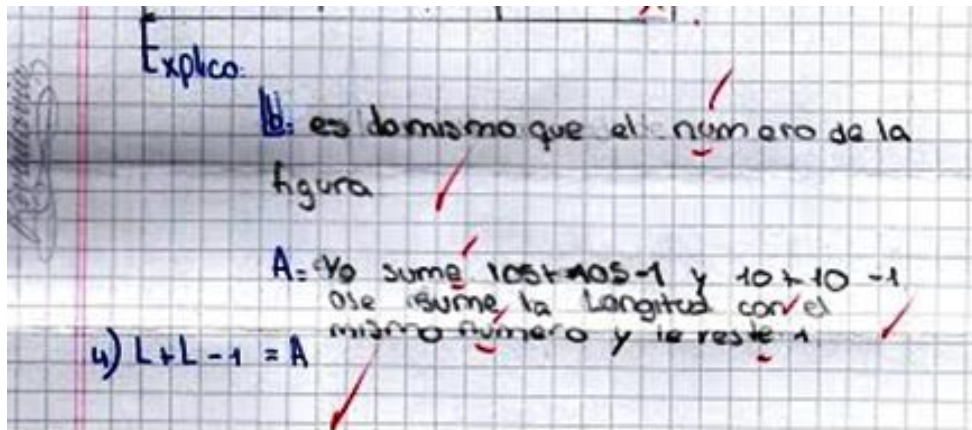


Figura 40: Procedimiento propuesto para calcular el área a partir de la longitud de la base de la figura

Algunos alumnos consiguieron hallar varias expresiones equivalentes para la relación entre área y longitud de la base (ver Figura 41<sup>16</sup>).

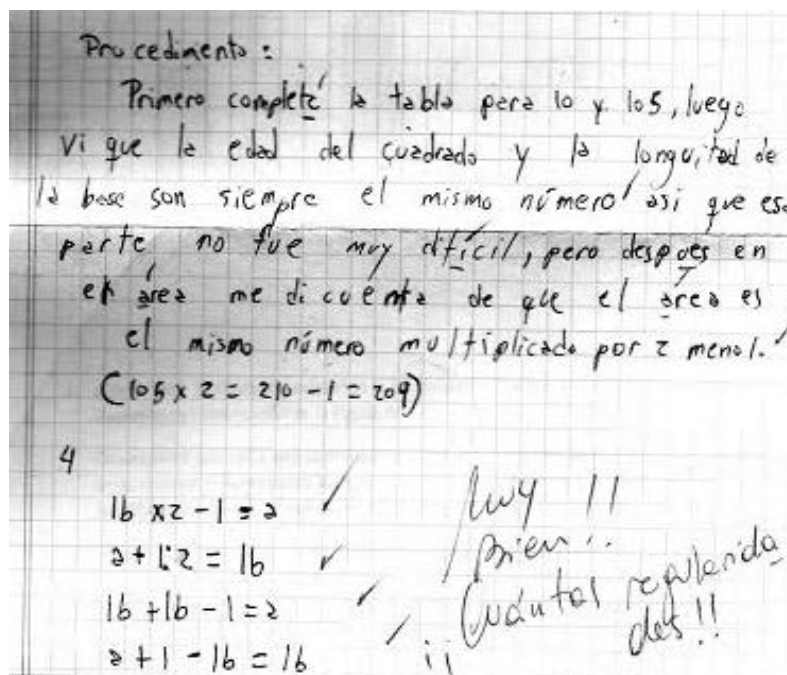


Figura 41: Expresiones equivalentes para determinar la relación entre longitud de la base ( $lb$ ) y el área (a)

<sup>15</sup> Cabe destacar que si bien la fórmula permite calcular el valor numérico del área, ésta plantea una igualdad entre una longitud y un área, es decir,  $L$  debería representar cantidad de cuadrados unidad de la base de la figura. Esta resolución, pone en evidencia una dificultad que estuvo presente a lo largo de la actividad del *cuadrado que cumple años*, donde para calcular la cantidad de cuadrados unidad con uno o ningún lado pintado se establecieron regularidades que planteaban igualdades entre longitud y cantidad de cuadrados unidad.

<sup>16</sup> Nótese que en la segunda expresión de esta figura debería haber un paréntesis, siendo la expresión correcta  $(a+1):2=lb$

2.5.4. Criterios de evaluación para el TPE**Criterios de evaluación de trabajo práctico evaluable:**

Puntaje máximo: 6 puntos.

Ítem 1: (Puntaje total: 1 punto)

- Correcta realización del gráfico de las figuras 4 y 6 de la sucesión (0,5 puntos cada figura).

Ítem 2: (Puntaje total: 2 puntos)

- Pertinencia de los encabezados y explicitación de las unidades de medida en los mismos (0,5 puntos):
  - Unidades de medida:
    - Se restan 0,1 puntos por cada unidad de medida incorrecta de los 0,5 puntos.
    - Si las unidades de medida aparecen en las líneas de datos o en los encabezados y en las líneas de datos se restan 0,05 puntos de los 0,5 puntos.
  - Encabezados:
    - En el caso de que un alumno no haya colocado la columna de la tabla donde se hace referencia al número de las figuras, se le restarán 0,2 puntos de los 0,5 puntos.
    - Se restarán 0,1 puntos por cada encabezado mal redactado de los 0,5 del primer apartado.
- Correcta medición de la longitud de la base y del área, para las figuras 1, 2, 3, 4 y 6 (1.5 puntos).
  - Tabla invertida: se le restarán 0,1 puntos de los 1,5 puntos.
  - Correcta medición de la longitud de la base 0,5 puntos de los 1,5 puntos (0,1 puntos cada dato de la tabla).
  - Correcta medición del área 1 punto de los 1,5 puntos (0,2 puntos cada dato de la tabla).

Ítem 3: (Puntaje total: 2 puntos)

- Correcta medición del área y de la longitud de la base, para las figuras 10 y 105 (1 punto).
  - 0,25 puntos cada dato de la tabla.
- Correcta explicación del procedimiento utilizado para completar la tabla para los valores antes mencionados (1 punto).
  - En el caso de que el alumno haya explicado solo el procedimiento para la figura 10 o para la figura 105, se le concederá al mismo el puntaje total.
  - Se considerarán posibles errores de redacción y gramática, evaluando en este punto, sólo el correcto razonamiento.

## Ítem 4 (1 punto):

- Referencias (0,15 puntos):
  - Utiliza las referencias acordadas en el curso: 0,15 puntos.
  - Introduce nuevas denominaciones para las variables y explicita referencias: 0,15 puntos.
  - Introduce nuevas denominaciones para las variables y no explicita referencias: 0,15 puntos.
  
- Correcta expresión en lenguaje simbólico para la regularidad hallada (0,85 puntos).
  - La expresión simbólica es incorrecta pero se corresponde con los datos recolectados en las tablas de los puntos 2 y 3: 0,5 puntos.
  - La expresión simbólica es correcta pero incompleta, escriben solo un miembro en la igualdad (ej:  $2l-1$ ): 0,65 puntos.
  - Si no realiza la expresión simbólica o ésta es incorrecta y no se corresponde con los datos de la tabla: 0 puntos.

2.5.5. Resultados obtenidos en el TPE

Las tablas e histogramas que se muestran a continuación (ver Figuras 42, 43 y 44), dan cuenta de los resultados obtenidos en el TPE, a través de frecuencia de notas para cada uno de los cursos.

- Frecuencia de notas para 1° Año "A"

Nota	Frecuencia de notas
1	0
2	0
3	4
4	3
5	5
6	24



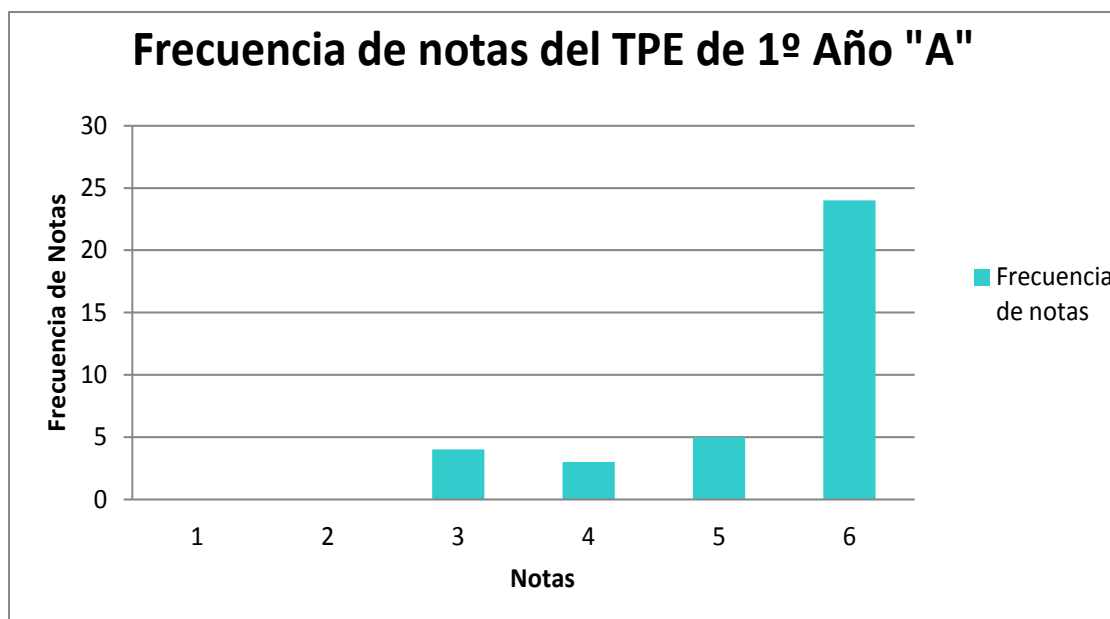


Figura 42: Histograma que muestra la frecuencia de notas de 1º Año "A"

- Frecuencia de notas para 1º Año "B"

Nota	Frecuencia de notas
1	0
2	0
3	2
4	7
5	5
6	18

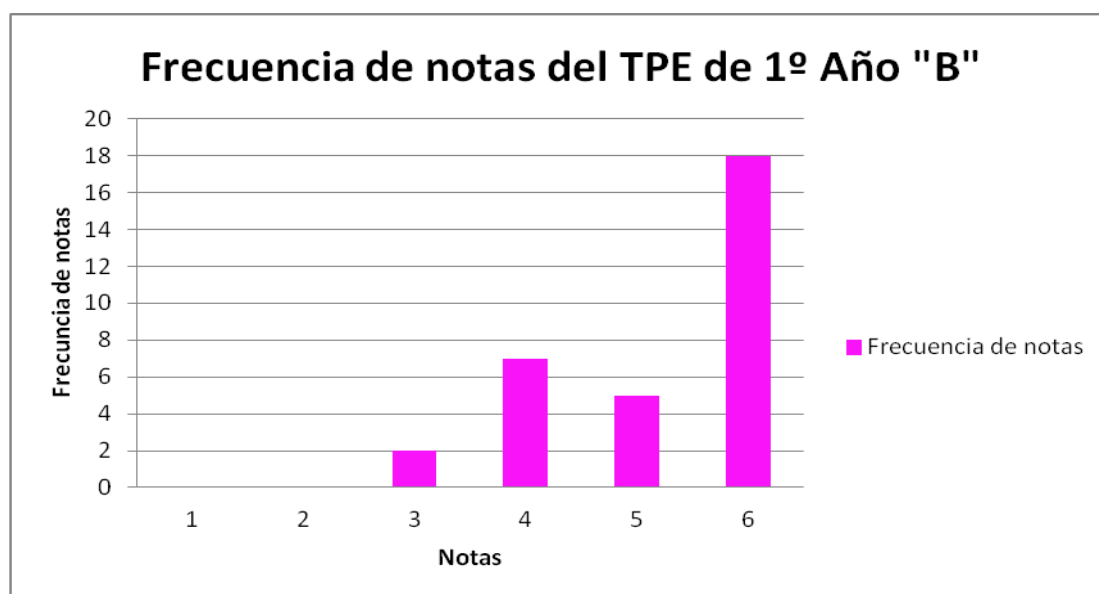


Figura 43: Histograma que muestra la frecuencia de notas de 1º Año "B"

- Frecuencia de notas para 1º Año "C"

Nota	Frecuencia de notas
1	0
2	2
3	4
4	8
5	9
6	13

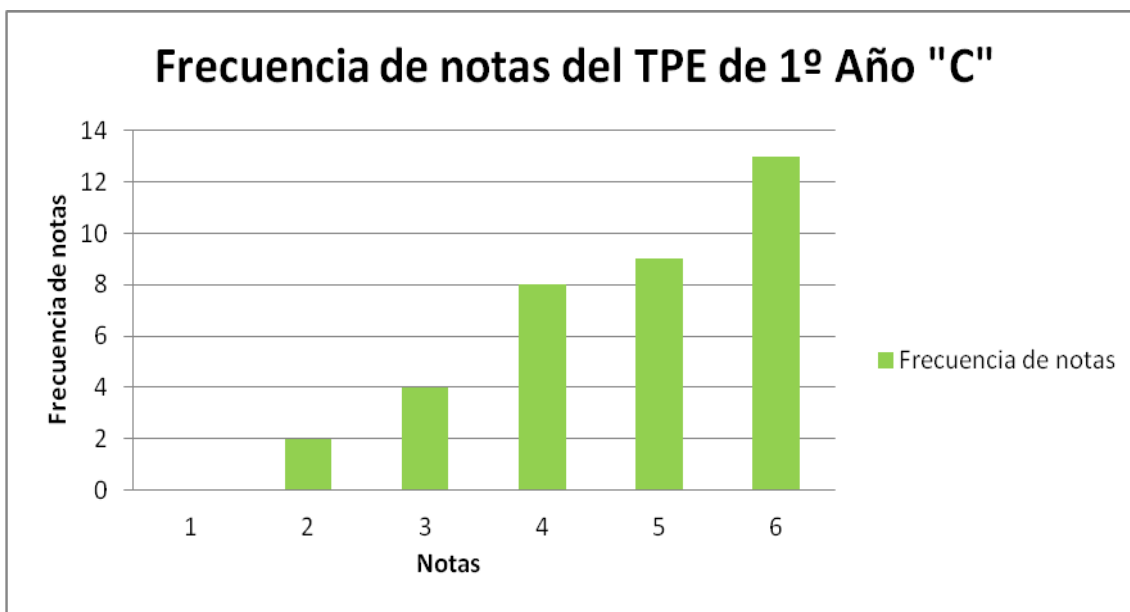


Figura 44: Histograma que muestra la frecuencia de notas de 1º Año "C"

## 2.6. Plano Cartesiano y Pares Ordenados

Después del TPE, se comenzó a abordar el tema *Plano Cartesiano*, por lo cual se pidió a los alumnos que abran el archivo de GeoGebra correspondiente a la Actividad 1: *Cuadrados de contorno pintado*, cuyo enunciado se encuentra en la sección 2.4.2. Seguidamente se les mostró, por medio de la pantalla digital, cómo insertar *Ejes Cartesianos* y activar la *Vista Algebraica*. Además se explicó, el uso de las herramientas *Nuevo Punto* y *Punto sobre Objeto*, para que los estudiantes, primero en forma individual y luego en forma conjunta con la docente practicante, pudieran explorarlas y sacar conclusiones acerca de qué ocurre en cada caso.

Luego, a través de la información encontrada en *propiedades del objeto* al desplegar el menú contextual sobre un punto en la Vista Gráfica, se estudió la relación entre la información que aparece en el campo denominado *Valor*<sup>17</sup> y la ubicación del punto en el plano (ver Figura 45), introduciendo así las nociones de par ordenado, plano cartesiano y los elementos que lo componen (eje x o de las abscisas, eje y o de las ordenadas y origen del plano cartesiano). Estas nociones fueron presentadas en detalle en el material de estudio realizado para los alumnos (Anexo 1).

<sup>17</sup> GeoGebra refiere con el término *valor* de un punto al par ordenado que lo representa.

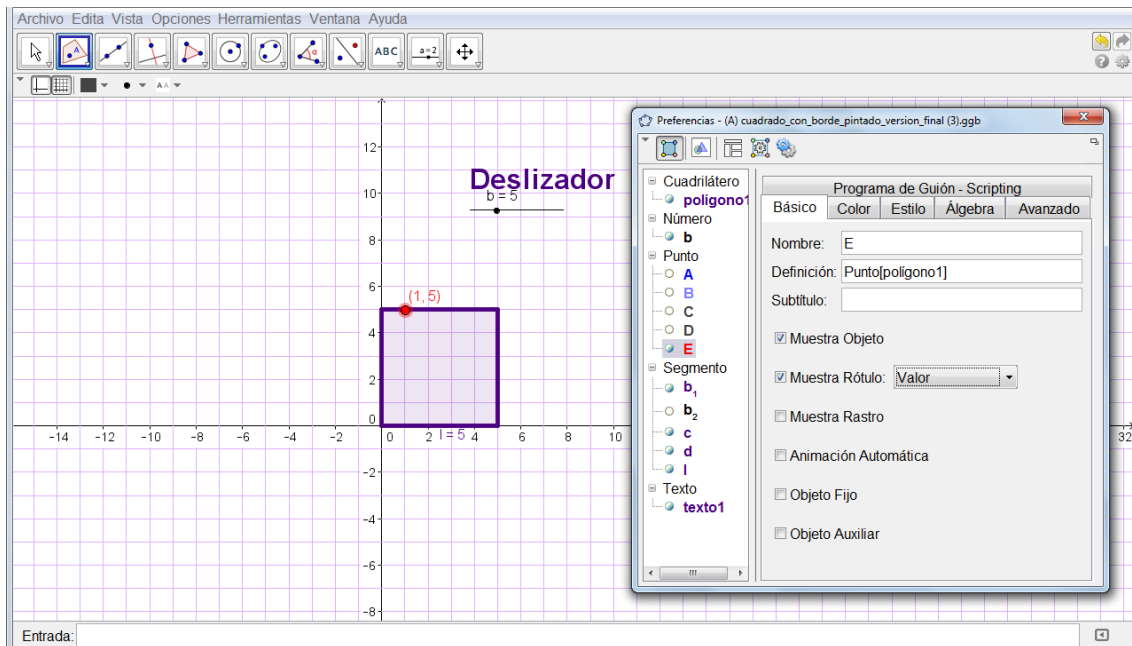


Figura 45: Captura de pantalla del archivo GeoGebra, con menú desplegable de *propiedades del objeto* para el punto  $E = (1, 5)$

Es importante destacar que en las divisiones A y B, algunos alumnos se dieron cuenta inmediatamente que, al analizar los diferentes elementos que aparecían en *propiedades del objeto*, el *Valor* del punto estaba constituido por dos números separados por una coma y encerrados entre paréntesis, donde el primero correspondía a la proyección ortogonal del punto sobre el eje x y el segundo a su proyección ortogonal sobre el eje y. A partir de esta situación, se introdujo la noción de par ordenado, mostrando a través de ejemplos la importancia del orden de los números que constituyen el par.

Asimismo en estos cursos fue necesario hacer una presentación multimedia que presentaba una síntesis de todo lo visto sobre plano cartesiano (Eje de las abscisas o Eje x, Eje de las ordenadas o Eje y, pares ordenados, origen del sistema cartesiano, cuadrantes) (ver Figura 46) y su utilización en otros campos como por ejemplo, las coordenadas geográficas (ver Figura 47), las direcciones postales (ver Figura 48); puesto que surgieron muchas dificultades en torno a estas nociones analizadas.

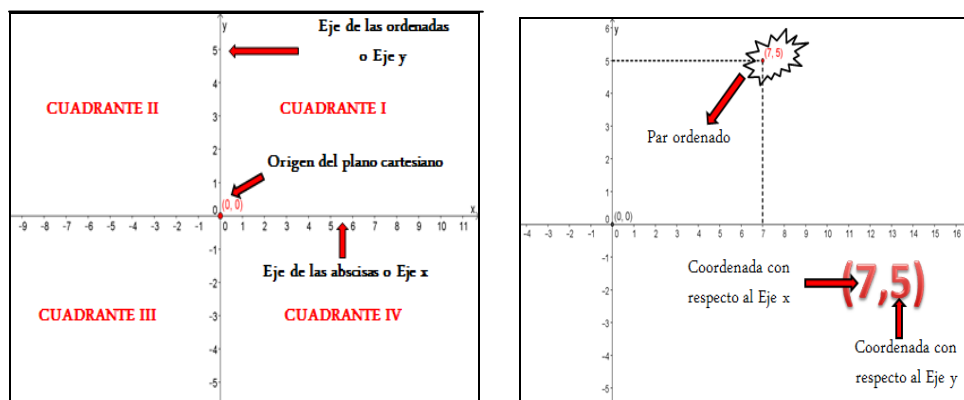
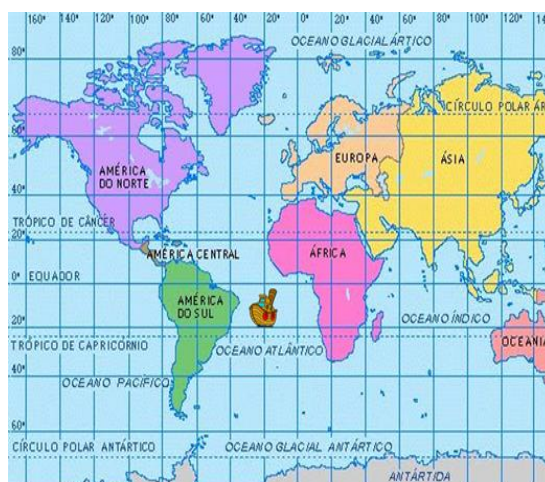


Figura 46: Captura de diapositivas de la presentación multimedia



**Figura 47: Planisferio con sistema de coordenadas geográficas**



**Figura 48: Direcciones postales**

En el caso de la división C, no se presentaron dificultades por lo que no fue necesario el uso de la síntesis, pero sí se utilizó un archivo de GeoGebra que mostraba un barco que se movía por acción de dos deslizadores sobre un planisferio para establecer analogías entre el par ordenado y las coordenadas geográficas (Anexo digital 2: Barco asociado a deslizadores sobre planisferio).

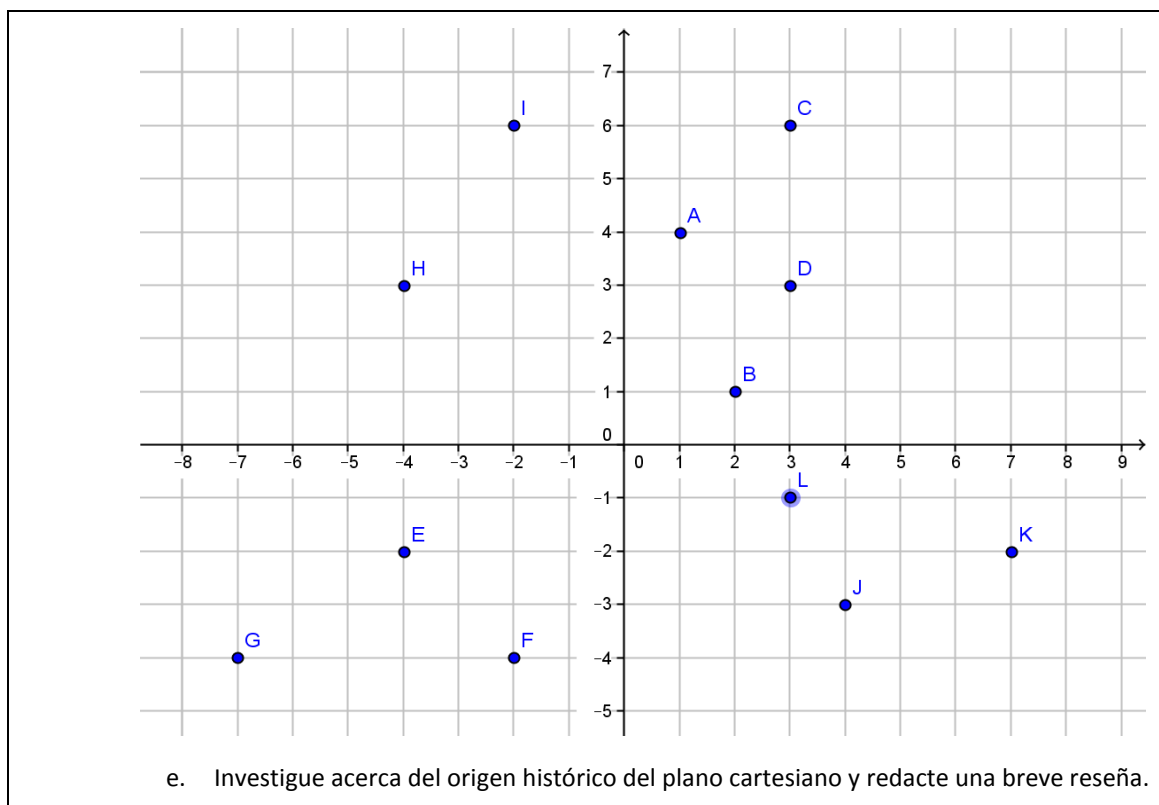
Posteriormente en todas las divisiones se procedió a realizar la siguiente Actividad:

### Actividad 2: Pares ordenados y plano cartesiano

En el archivo de GeoGebra<sup>18</sup> visualice los ejes cartesianos y los puntos del objeto *polígono*.

1. Conteste las siguientes preguntas por escrito en un archivo de Word, en la carpeta o en un cuadro de texto dentro del mismo archivo de GeoGebra:
  - a. ¿Por qué la primera coordenada del punto B es siempre cero cuando movemos el deslizador?
  - b. ¿Por qué la segunda coordenada del punto D es siempre cero cuando movemos el deslizador?
  - c. ¿Qué ocurre con el punto A cuando movemos el deslizador?
  - d. ¿Qué característica tienen las coordenadas del punto C? Para contestar esta pregunta mueva el deslizador y observe cómo son estas coordenadas.
2. Use la herramienta *Punto sobre Objeto* para ubicar un punto sobre el borde pintado del cuadrado.
  - a. ¿Qué ocurre cuando movemos este punto sobre el lado superior del cuadrado?, ¿Por qué?
  - b. Conteste la pregunta anterior para el lado inferior y los laterales.
  - c. Grafique en un nuevo archivo de GeoGebra los puntos (3,5), (2,1), (8,10) y (5,3).
  - d. Determine las coordenadas de los siguientes puntos y escríbalas como pares ordenados:

<sup>18</sup> Se refiere al archivo GeoGebra que corresponde a la Actividad 1 “Cuadrados de contorno pintado”.



El objetivo de esta actividad era que los alumnos se familiaricen con el tema pudiendo así, localizar puntos en el plano como también determinar pares ordenados a partir de representaciones gráficas de puntos.

Durante la socialización de las resoluciones realizadas por los alumnos, se observó que para el ítem 2, muchos estudiantes utilizaban la herramienta *Nuevo Punto* y luego cambiaban el *Valor* de éste por el par ordenado solicitado. En este momento, se explicó cómo ingresar pares ordenados a través de la *barra de entrada* para obtener sus respectivas representaciones en la *Vista Gráfica*.

A fin de proporcionar a los estudiantes materiales de estudio y práctica, subimos a la plataforma un video sobre plano cartesiano<sup>19</sup> y un applet interactivo<sup>20</sup> que permitía graficar puntos en el plano cartesiano a partir de pares ordenados dados, como así también, expresar pares ordenados a partir de un punto dado en el plano. Nos detendremos un momento para explicar con mayor precisión cada una de estas herramientas.

El video explica detalladamente, qué es el plano cartesiano, los cuadrantes que lo forman y los elementos que componen cada uno de estos cuadrantes, como así también la ubicación de un punto en el plano determinado por sus coordenadas. Luego introduce la definición de par ordenado, mostrando cómo se localiza el mismo en el plano, introduciendo también algunos ejemplos para lograr mayor entendimiento sobre lo que se está explicando, pero lo hace mostrando puntos en el plano para encontrar las coordenadas del par ordenado.

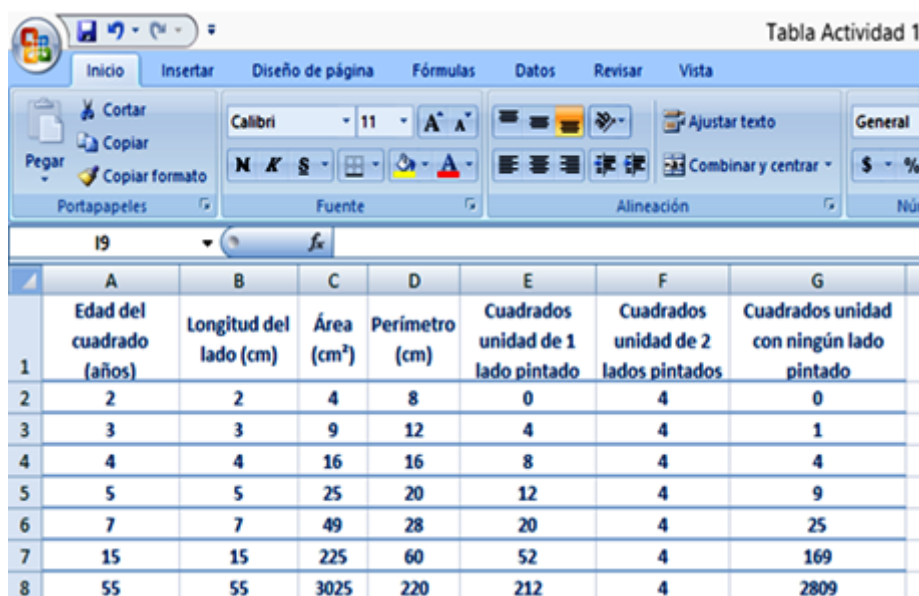
<sup>19</sup> Extraído de sitio web [http://www.youtube.com/watch?v=G\\_Oq4ma\\_cXY&feature=related](http://www.youtube.com/watch?v=G_Oq4ma_cXY&feature=related), Agosto 2013.

<sup>20</sup> Extraído del sitio web <http://www.thatquiz.org/es-7/matematicas/puntos/>, Agosto 2013.

El applet interactivo está organizado por niveles, se puede determinar la duración de cada nivel y el tiempo para completarlo. Además también se pueden visualizar distintas clases de ejercicios, como por ejemplo, identificar y/o marcar puntos en el plano cartesiano, determinar en qué cuadrante está cada punto propuesto, etc. Finalizado el tiempo o habiendo ejecutado todos los ejercicios del nivel, el programa informa la cantidad de respuestas correctas obtenidas y muestra los errores cometidos.

## 2.7. Introduciendo la noción de gráfico en el plano cartesiano

Una vez comprendidas las nociones del apartado anterior, se pidió a los alumnos que abran la tabla de Excel construida a partir de la Actividad 1 (ver Figura 49). Se indicó que inicialmente trabajaríamos con dos de las columnas de la tabla: longitud y perímetro y se solicitó que cada uno construyera la tabla que relaciona la longitud del lado y el perímetro (ver Figura 50).



	A	B	C	D	E	F	G
	Edad del cuadrado (años)	Longitud del lado (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Perímetro (cm)	Cuadrados unidad de 1 lado pintado	Cuadrados unidad de 2 lados pintados	Cuadrados unidad con ningún lado pintado
1	2	2	4	8	0	4	0
2	3	3	9	12	4	4	1
3	4	4	16	16	8	4	4
4	5	5	25	20	12	4	9
5	7	7	49	28	20	4	25
6	15	15	225	60	52	4	169
7	55	55	3025	220	212	4	2809

Figura 49: Tabla de Excel construida a partir de la Actividad 1

L	P
2cm	8cm
3cm	12cm
5cm	20cm
7cm	28cm
15cm	60cm
55cm	220cm

Figura 50: Tabla realizada por un alumno

Aquí nuevamente en las divisiones A y B, este apartado resultó confuso para los alumnos pues no lograban entender qué se estaba haciendo debido a que en ningún momento se les había dicho que ahora iban a empezar a representar los datos obtenidos en dicha tabla en un sistema de coordenadas cartesianas. La asociación de los valores de cada fila de la tabla con un par ordenado que luego puede representarse en un sistema de coordenadas cartesianas no resulta transparente y es necesario trabajar con cuidado para que esta asociación se produzca.

Así, se procedió a realizar una presentación usando PowerPoint con el objetivo de lograr que los alumnos construyan esta asociación y puedan visualizar que el gráfico es otra forma de representar la información que se tiene, siendo mucho más rica pues la cantidad de información que se puede mostrar y recolectar es mayor que en una tabla. En la presentación se mostraba un gráfico que representaba la relación del peso promedio de bebés con respecto a su edad y una tabla que contenía esos datos (ver Figura 51), para que los alumnos pudieran ver el proceso inverso de lo que se estaba haciendo con respecto a la tabla de la actividad 1.

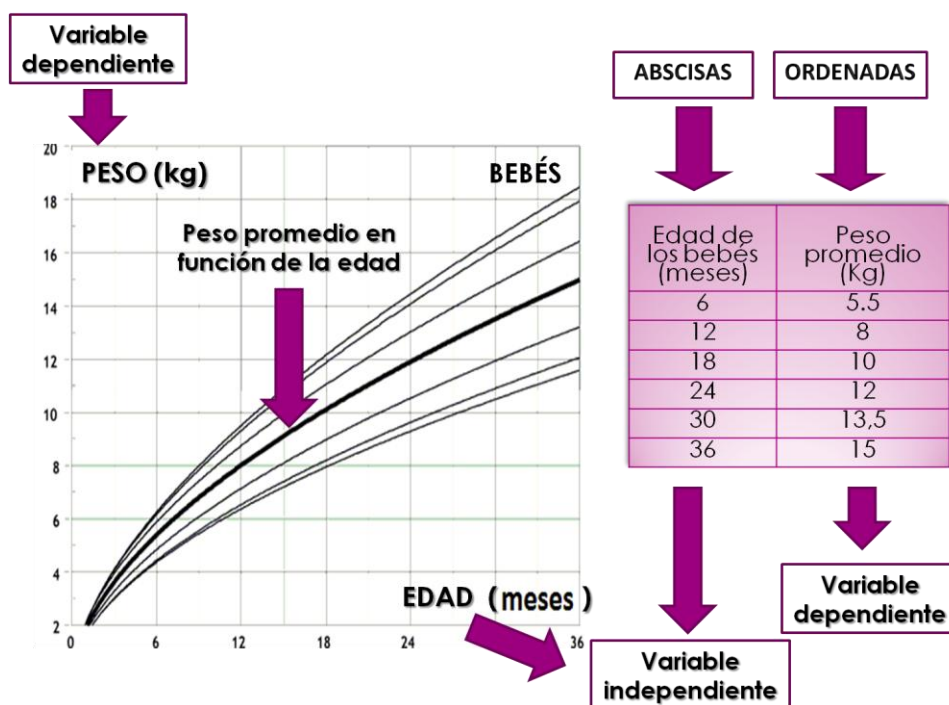


Figura 51: Gráfico y tabla empleados para la síntesis sobre el tema de los gráficos en el plano cartesiano

De esta manera los alumnos pudieron entender con claridad lo que se les había pedido en un principio. Y ellos mismos sacaron la conclusión que los datos de la primera columna se asociaban al *eje x* o *eje de las abscisas* y los datos de la segunda columna se asociaban al *eje y* o *eje de las ordenadas*.

En la división C, como no surgieron dificultades, la docente practicante a cargo del curso explicó la asociación de cada par de datos de la tabla con un par ordenado, obteniendo así la escritura de los pares (2,8), (3,12), (5,20), etc. correspondientes a cada fila de la tabla. Estos pares ordenados fueron escritos en la pizarra digital utilizando el ActivInspire, al costado de la tabla, tal como puede verse en la Figura 52. Luego, en todas las divisiones, las profesoras practicantes solicitaron a sus alumnos que grafiquen dichos puntos en un archivo de GeoGebra, explicando que los mismos representan gráficamente la relación entre la longitud del lado y el perímetro de un cuadrado, mostrándoles cómo insertar referencias en los ejes cartesianos.

L (cm)	P (cm)	
2	8	(2, 8)
3	12	(3, 12)
4	16	(4, 16)
5	20	(5, 20)
7	28	(7, 28)
15	60	(15, 60)
55	220	(55, 220)

**Figura 52: Determinación de pares ordenados a partir de los datos de la tabla**

Seguidamente se explicó que en este gráfico se representa *el perímetro en función de la longitud del lado del cuadrado*, es decir, que *el perímetro depende de la longitud*, acotando que el perímetro era la variable dependiente y la longitud del lado del cuadrado la variable independiente.

Esta actividad se desarrolló con el fin de que los alumnos representen relaciones entre los datos registrados en la tabla de la Actividad 1 mediante gráficos cartesianos, es decir, mostrarles que además de la representación de relaciones en lenguaje coloquial y simbólico se pueden representar de manera gráfica. Además sirvió para introducir las nociones de variables independiente y dependiente, detalladas en el material de estudio que se encuentra en el (Anexo 1).

Una vez realizado este gráfico con ayuda de las docentes practicantes se procedió a trabajar con la siguiente actividad:

**Actividad 3: Gráficos de las relaciones encontradas.**

Trabaje a partir de la tabla construida en la Actividad 1.

En GeoGebra grafique las siguientes relaciones a partir de los datos de esta tabla. Para cada relación genere un nuevo archivo.

- El área del cuadrado en función de la longitud del lado del cuadrado.
- El número de cuadrados unidad con un lado pintado en función de la longitud del lado del cuadrado.
- El número de cuadrados unidad con dos lados pintados en función de la longitud del lado del cuadrado.
- El número de cuadrados unidad con ningún lado pintado en función de la longitud del lado del cuadrado.
- La longitud del lado del cuadrado en función de su edad.

Esta actividad tenía como objetivo representar las diferentes relaciones entre las variables de la tabla construida a partir de la Actividad 1, para luego poder introducir el tema modelización matemática.



Las Figuras 53, 54, 55, 56 y 57 muestran distintos gráficos realizados por los alumnos para esta actividad. Obsérvese que en algunos casos (ítems a y e), también se representa la función que relaciona las variables. Para realizar el gráfico de estas funciones se explicó a los alumnos que podían ingresar las expresiones simbólicas halladas a través de la *Barra de Entrada*. En un primer intento los alumnos ingresaron las expresiones con las referencias establecidas por ellos (ver sección 2.4.6.), esto ocasionó que GeoGebra mostrará una ventana con la leyenda “GeoGebra – Error. Entrada no válida: variable no definida”. En esta instancia, se explicó a la clase que GeoGebra usa  $x$  para representar la variable independiente e  $y$  para la variable dependiente. Con esta información los alumnos pudieron reescribir las expresiones de modo que el programa pudiera interpretarlas y graficarlas.

Una vez realizados los gráficos, analizamos la representación de la función que relacionaba la longitud del lado y el perímetro ( $y = 4x$ ) para poner en evidencia que este gráfico aportaba más información que la tabla, puesto que a partir de él podía determinarse el perímetro para cualquier edad del cuadrado. Destacamos además que este tipo de representaciones continuas solo tenía sentido para las relaciones longitud del lado-perímetro y longitud del lado-área, pues la cantidad de cuadrados unidad con dos, uno y ningún lado pitado para cuadrados de edad no entera no se correspondía con las regularidades halladas.

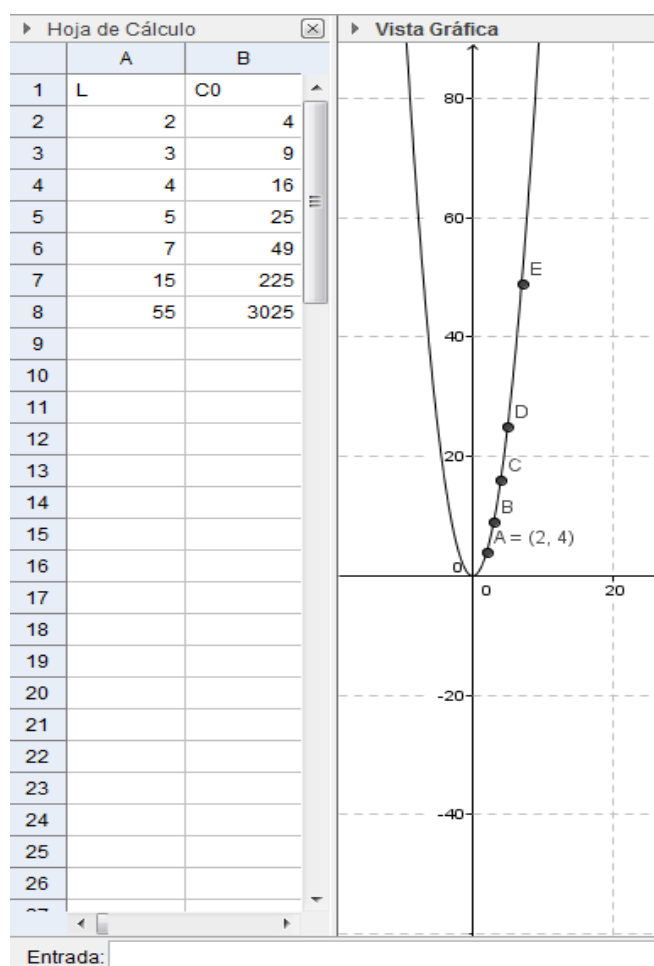


Figura 53: Gráfico correspondiente al ítem a<sup>21</sup>

<sup>21</sup> En la primera celda de la segunda columna de la hoja de cálculo, donde dice C0 debería decir A. Se ha respetado lo escrito por el estudiante en su resolución.

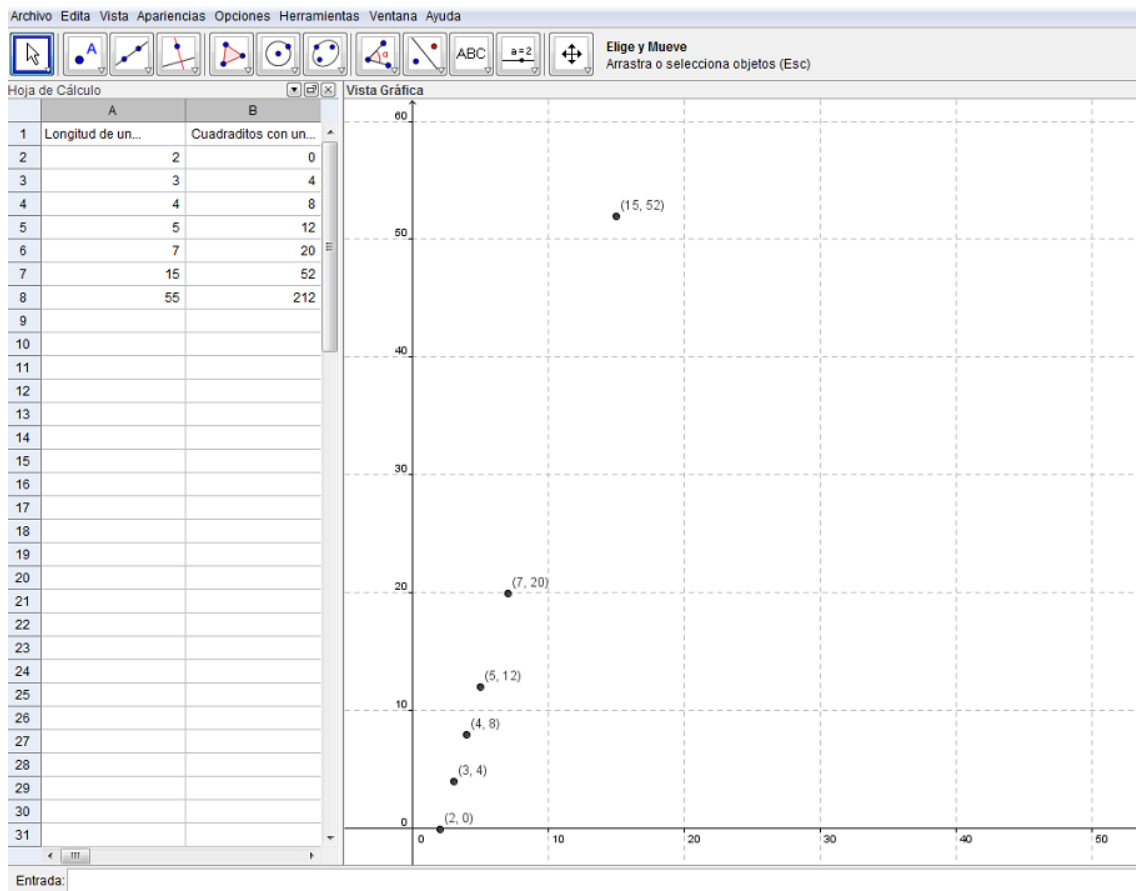


Figura 54: Gráfico correspondiente al ítem b

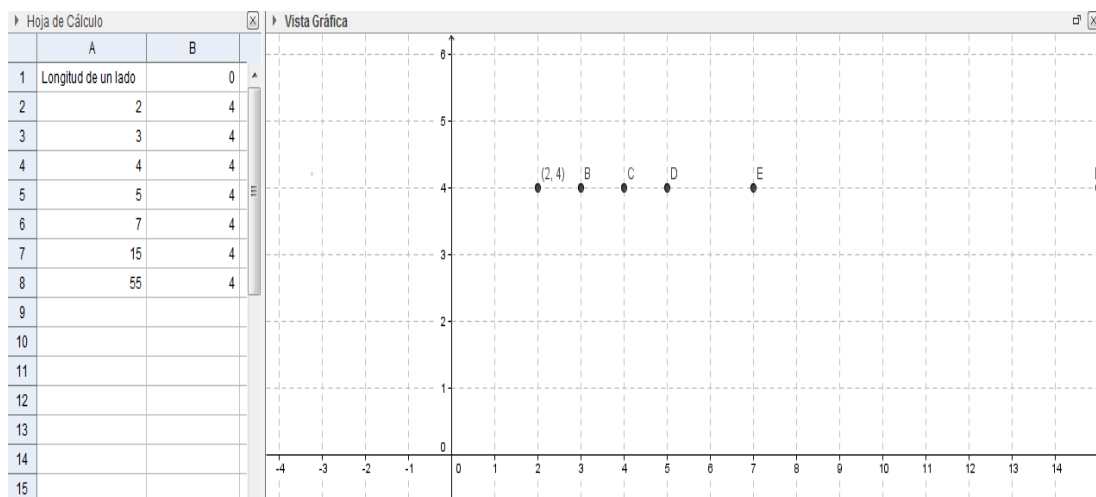


Figura 55: Gráfico correspondiente al ítem c<sup>22</sup>

<sup>22</sup> En la primera celda de la segunda columna de la hoja de cálculo, donde dice 0 corresponde C<sub>2</sub>.

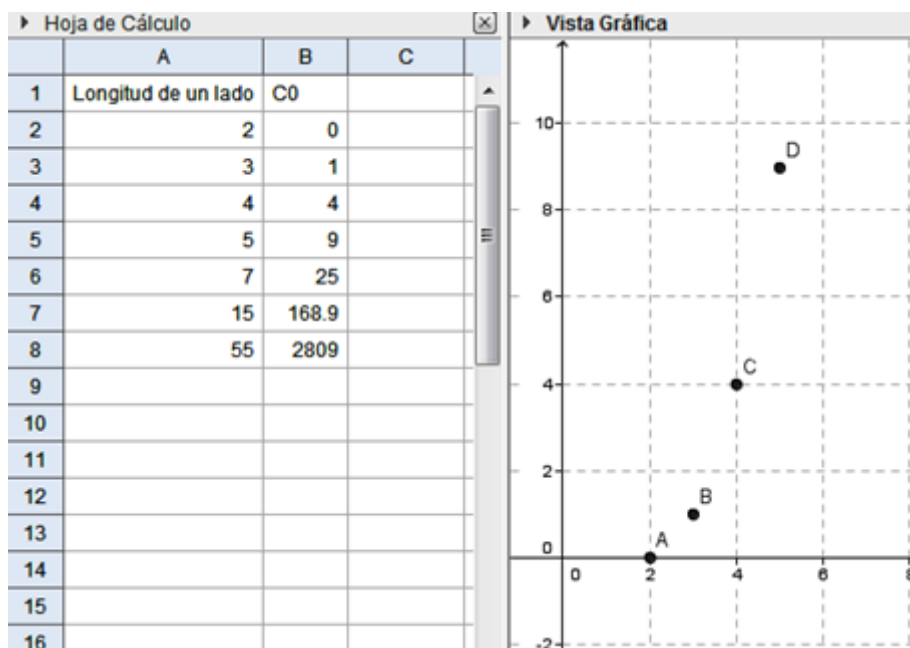


Figura 56: Gráfico correspondiente al ítem d

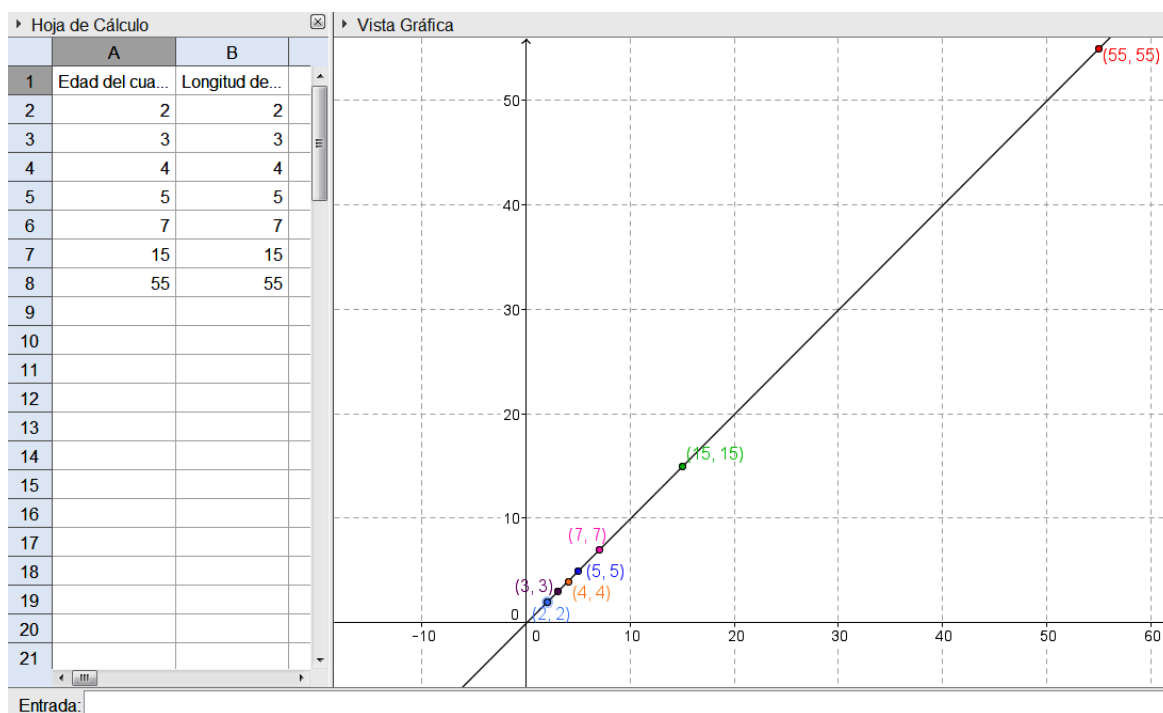


Figura 57: Gráfico correspondiente al ítem e

## 2.8. El cuadrado que cumple años como un contexto de modelización matemática

Para introducir la noción de modelización matemática se realizó un trabajo de reflexión con los alumnos, donde se retomaron las diferentes actividades realizadas desde el inicio de las prácticas. Así, para reconocer las actividades matemáticas realizadas en el aula como etapas de un proceso mayor, la modelización, en primera instancia se pidió a los alumnos que trataran de recordar todo lo trabajado en relación al *problema del cuadrado que cumple años*, sin

perder de vista el orden cronológico en el que se desarrollaron las diferentes actividades. Los alumnos pudieron responder a esta propuesta sin dificultad, reconociendo con claridad las diferentes actividades matemáticas implementadas.

Para sistematizar esta información y dar una idea más global del trabajo desarrollado, realizamos una clase expositiva presentando las diferentes etapas del trabajo que habíamos llevado adelante. Para este cometido, nos apoyamos en una presentación multimedia de PowerPoint que mostraba una adaptación del esquema propuesto por Bassanezi (2002) para el proceso de modelización matemática (ver Figura 58); intercalando ejemplos del trabajo realizado por los chicos en clase, que ilustraban las diferentes etapas.

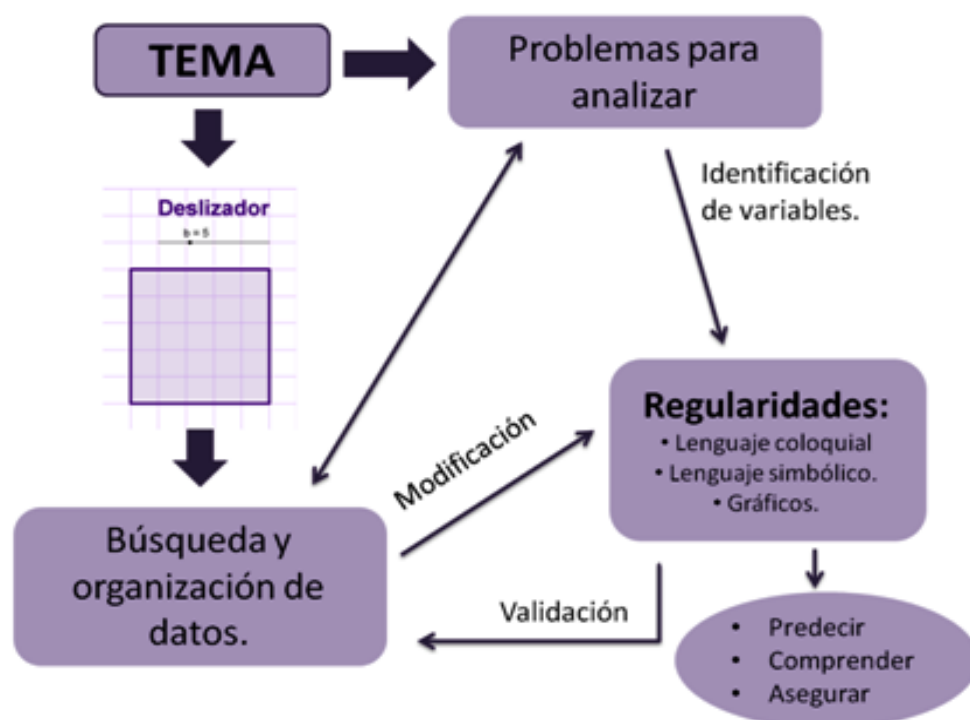


Figura 58: Esquema utilizado para sintetizar la actividad desarrollada hasta el momento

En esta presentación se explicaba que a partir de un contexto geométrico, *el cuadrado que cumple años*, se habían formulado una serie de problemas o preguntas: ¿Cuál es el perímetro del cuadrado a medida que cumple años? ¿Cuál es el área? ¿Cuántos cuadrados unidad con un lado pintado hay?, ¿Cuántos con dos lados pintados?, ¿Cuántos con ninguno? Para dar respuesta a estas preguntas se procedió a la recolección de datos que se organizaron en tablas.

Se explicó que existía una profunda vinculación entre la formulación del problema y la recolección y organización de los datos. En ocasiones, los datos hallados podían generar una reformulación del problema que suscitaba, a su vez, una nueva búsqueda de datos.

Con los datos organizados en tablas fue preciso reconocer las variables que presentaba el problema y que aparecían de manera implícita en las preguntas formuladas. Durante el trabajo hecho previamente por los alumnos en la clase de matemática, para este problema se habían identificado las siguientes variables:

L= longitud del lado

P= perímetro

A= área

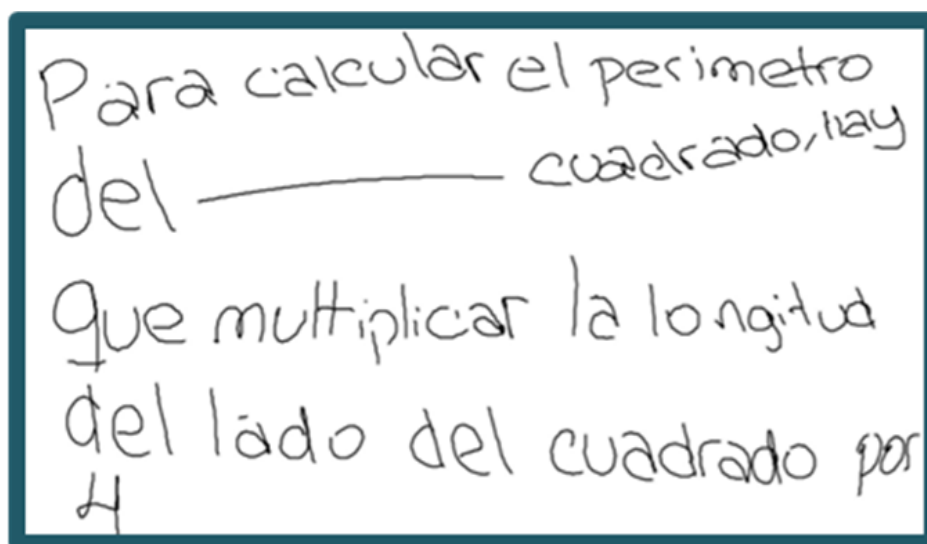
$C_1$  = cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado

$C_2$  = cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados

$C_0$  = cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado

La búsqueda de relaciones entre estas variables que dieran respuestas a las preguntas realizadas originalmente, nos había llevado a la formulación de regularidades que habían sido expresadas de diferentes formas: lenguaje coloquial, lenguaje simbólico y gráficos cartesianos.

Las Figura 59, 60 y 61 muestran ejemplos que ponen de manifiesto diferentes formas de expresión de las regularidades halladas.



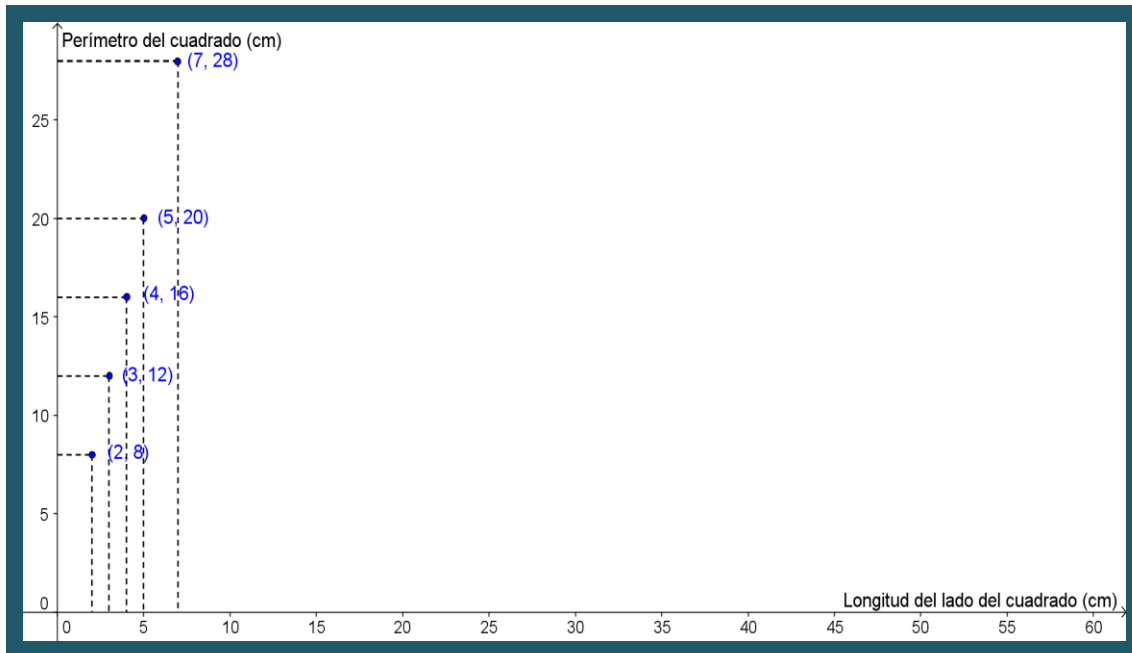
Para calcular el perímetro del \_\_\_\_\_ cuadrado, hay que multiplicar la longitud del lado del cuadrado por 4

Figura 59: Regularidad expresada en lenguaje coloquial


$$P = 4.l$$

P: Perímetro  
L: longitud del lado

Figura 60: Regularidad expresada en lenguaje simbólico



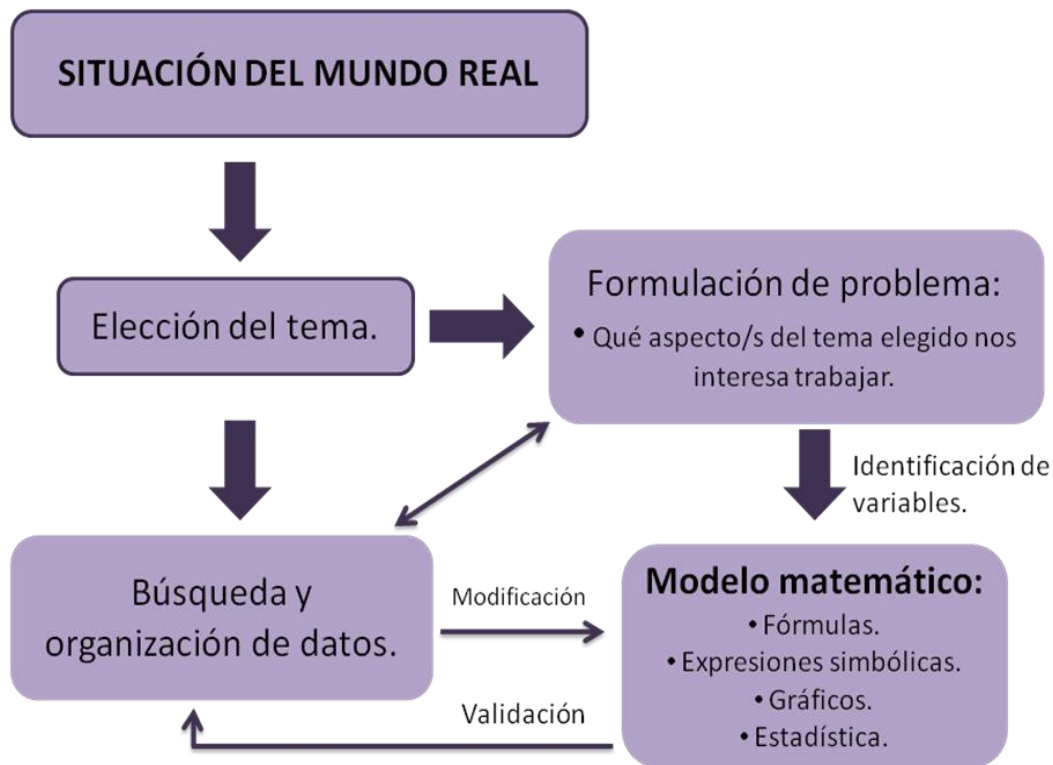
**Figura 61: Representación gráfica de la relación Longitud del lado del cuadrado - Perímetro**

Por último, se recordó que estas regularidades habían sido validadas con los datos previamente recogidos y organizados en las tablas y que, en algunas ocasiones, esta contrastación de las regularidades con los datos habían llevado a reformular las relaciones halladas entre las variables consideradas.

Se explicó a los alumnos que todos estos “pasos” formaban parte de un proceso que se denominaba *Modelización Matemática*; y que si bien, en el *problema del cuadrado que cumple años*, la referencia provenía de un contexto geométrico, también podían modelizarse situaciones o problemas provenientes de la realidad extramatemática. Así, la próxima actividad propuesta a los estudiantes sería el desarrollo de un proyecto de modelización extramatemática.

## 2.9. El salto a la realidad: proyectos de modelización extramatemática

Para orientar la formulación de proyectos de modelización extramatemática que los alumnos debían llevar adelante en grupos, se presentó el siguiente esquema-guía también basado en el modelo propuesto por Bassanezi (2002) (Ver Figura 62).



**Figura 62: Esquema guía propuesto para la realización de proyectos de modelización extramatemática**

Es importante destacar que para afrontar el desafío que significó llevar adelante la formulación de proyectos de modelización de temas provenientes de la realidad que resultaran de interés para los alumnos, se decidió orientar el proceso con actividades que se centraran en las diferentes etapas de la modelización. En cada clase se presentaba una nueva actividad que permitía a los alumnos realizar avances paulatinos en el proyecto, de forma organizada. Además, estas actividades posibilitaron garantizar un seguimiento continuo del desarrollo de los proyectos por parte de todas las docentes integrantes del equipo de prácticas. En total fueron cuatro las actividades que guiaron el proceso de modelización extramatemática. A continuación se muestra una breve descripción de cada una de ellas y el tiempo que insumieron:

- 1° Actividad: conformación de los grupos, definición del tema a modelizar y formulación de las primeras preguntas (1 hora cátedra).
- 2° Actividad: preparación de la primera presentación del proyecto (4 horas cátedra).
- 3° Actividad: organización de la información y búsqueda de regularidades entre variables (2 horas cátedra).
- 4° Actividad: preparación y exposición de la presentación final de los proyectos de modelización (5 horas cátedra).

En este punto, resulta significativo recordar que las condiciones físicas y materiales de las aulas de primer año no permitían una dinámica de trabajo grupal, pues los bancos individuales se encontraban atornillados al piso. Por este motivo, y para que los grupos pudieran trabajar en estas actividades durante el horario de clases, se realizaron las gestiones pertinentes con la institución para tener acceso a espacios físicos, como la biblioteca o el laboratorio, que posibilitaban el trabajo en grupo.

2.9.1. Elección del tema y formulación de problemas

La primera actividad que se presentó giraba en torno a la elección del tema y la formulación de las primeras preguntas. Los alumnos contaban con 20' para realizar esta actividad y entregarla por escrito. A continuación se muestra el enunciado de la actividad:

<p><b>PROYECTO DE MODELIZACIÓN</b> Trabajo grupal (4 integrantes)</p> <p>Elija con sus compañeros un nombre para el grupo.</p> <p>Determine con su grupo un tema de interés común, definiendo un problema que les gustaría abordar mediante el proceso de modelización.</p> <p><b>Entrega a la profesora una hoja conteniendo:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Nombre del grupo.</b></li> <li>• <b>Integrantes.</b></li> <li>• <b>Tema elegido.</b></li> <li>• <b>¿Por qué eligieron este tema?</b></li> <li>• <b>Preguntas que les gustaría responder sobre este tema.</b></li> </ul> <p>Trabjarán en este proyecto tanto en clase como en sus casas. Para dar cuenta del trabajo realizado deberán:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Exponer en forma grupal el trabajo realizado y los resultados obtenidos.</li> </ul>
--

Las siguientes tablas muestran los nombres, temas elegidos y preguntas o problemas planteados por los diferentes grupos<sup>23</sup>.

Nombre del grupo	Tema elegido	Preguntas que se realizaron/Problemas
<b>1° Año "A"</b>		
<i>T.I.P.J.</i>	Consumo promedio de agua por persona	¿Cuánta agua gasta una persona en la ciudad? ¿Cuál es la demanda de agua que consume una familia de 4 integrantes? ¿Cuál es la demanda de agua que consume una familia de 4 integrantes (en una casa)? ¿Y si fuera un edificio de 3 pisos y cada piso con dos departamentos y cada departamento con aproximadamente 4 integrantes?
<i>Super Mami!</i>	Supermercado	¿Cuánto recauda por mes? ¿Cuánto recauda por día?
<i>One Direction</i>	Cantidad de accidentes de tránsito que hubo en Argentina desde 1996 hasta 2008	No realizan preguntas.
<i>TTAP</i>	Las barras bravas argentinas	¿Qué es una barra brava? ¿Qué variables hay entre las barras de esta época con las de antes? ¿Cuáles son los partidos donde hay más violencia?

<sup>23</sup> El contenido de esta tabla transcribe las producciones realizadas por los alumnos a partir de la actividad propuesta.



		Violencia: ¿En qué lugar se produce el hecho? ¿En qué momento se produce en relación al partido?
<i>Exprefutbol</i>	Violencia en el fútbol	¿Qué hizo el gobierno con respecto a este tema? ¿Por qué ocurre esto? ¿Cuántos muertos ha dejado la violencia en el fútbol? ¿Cuál fue el último caso de violencia?
<i>Los chona</i>	Gastos del supermercado	¿Cuánto sale la comida que ingerimos en el desayuno? ¿Cuánto sale la comida que ingerimos en el almuerzo? ¿Cuánto sale la comida que ingerimos en la cena? ¿Cuánto cuestan los productos de limpieza diaria? ¿Cuánto cuesta la comida de copetín (doritos, papitas, chizitos, sándwiches, etc.)?
<i>WAKUNNA MATATA</i>	Promedio de vida de una persona	¿Cómo fue aumentando el desarrollo humano? ¿Cuánto tiempo se espera vivir? ¿Quién vive más, los hombres o las mujeres? ¿Cuál va a ser el promedio de vida en el 2010/2025? ¿Va a variar la esperanza de vida en 2100?
<i>Aaerp (Asociación Anónima de elaboración de respuestas y preguntas)</i>	Nafta de viaje	¿Cuánta nafta consume cada 1km? ¿Cuánto dinero gasto en total? ¿A cuánto está la nafta? ¿A cuántos km por hora iremos? ¿Cuánto tiempo dura el viaje?
<i>Las eléctricas</i>	La energía que gasta cada familia	Queremos saber la cantidad de energía que gasta cada familia de los integrantes del grupo, sabiendo cuantos son en la familia y cuantos aparatos eléctricos hay en cada casa. Familia 1 = 6 integrantes Familia 2 = 4 integrantes Familia 3 = 3 integrantes
<b>1° Año "B"</b>		
<i>Math</i>	Peso promedio de una persona	¿Cuál es el peso y estatura promedio de una persona?
<i>Año B</i>	Tabaquismo	Nos gustaría saber cuánto aumentó o disminuyó el consumo de tabaco (hace 10 años).
<i>Las Innombrables</i>	La Inflación en Argentina comparada con la de otros países	¿Por qué en las vacaciones aumentan más los precios? ¿Cómo se ve la situación con respecto a 2 años atrás? ¿Tiene alguna relación la oferta de los negocios con la inflación?
<i>CLAG</i>	Violencia en el Fútbol	¿Por qué por algunos hinchas que matan a otros, los demás no podemos ir a la cancha de visitantes? ¿Será necesario tomar más medidas de las actuales? ¿Por qué en vez de pelearse no lo disfrutan?
<i>LFXS</i>	Fútbol	¿Cuál es el mejor equipo del Torneo Final 2013 Argentino? ¿Cuál fue el peor?

		¿Y cuál fue el ganador?
<i>Poblacionistas</i>	Población Mundial	¿Cuánta población habrá aproximadamente en el 2100? Crecimiento de población mundial en los distintos años.
<i>Los Minions</i>	La estatura del curso	¿Cuánto mide cada uno de nosotros? ¿Cuál es la altura promedio? ¿Habrá alguien de igual estatura que otro?
<i>Las chicas del "B"</i>	Accidentes en Córdoba por día	¿Cuánta gente muere por año por accidente de tránsito? Comparación entre las provincias.
<b>1° Año "C"</b>		
<i>MLLM (Me llamo matemática)</i>	La basura	¿Cuánto contaminamos al medio ambiente? ¿Cuál será el porcentaje de basura que hay en el mundo? ¿Cuál es la cantidad de basura que hay en nuestro país?
<i>Greenpeace</i>	La luz y la electricidad	¿Cuánta luz se gasta por día? ¿Cómo hacer para prevenir el mal gasto de luz? ¿Qué diferencias hay entre lámparas de bajo consumo y alto consumo? ¿Cuáles son las diferencias entre un día común y un día ecológico con las luces prendidas?
<i>L.W.T.</i>	Muerte de animales por tapados de piel	¿Cuáles son los animales que se utilizan? ¿Cuántos se necesitan para hacer un tapado? Los animales que se utilizan para realizar los tapados ¿están en peligro de extinción? ¿Se podrían reemplazar estas pieles por sintéticas?
<i>M.T.T.C.</i>	La producción de papel	¿Un árbol, cuántas hojas de papel da? ¿Se plantan árboles luego de tallarlos? ¿Cómo se produce? ¿Daña al medio ambiente?
<i>Las Cuatrillizas</i>	Tala de árboles en relación a la producción de hojas	¿Cuántos árboles se talan para producir un block de hojas? ¿Cuántos bosques están afectados por la tala de los árboles?
<i>Los 4 Mosqueteros</i>	CandyCrush	No realizan preguntas.
<i>El problema de los alimentos del mundo</i>	La nutrición y desnutrición. Alimentos	¿Por qué hay gente que no come? ¿Qué porcentaje del mundo tiene sobrepeso? ¿Qué porcentaje del mundo no puede comer? ¿Qué porcentaje hay de gente desnutrida?
<i>Asociación Matemática de Niños</i>	Comida	¿Qué comida ingerimos? ¿Qué tipo de comida comemos? ¿Cuál de ellas es sana y cuál saludable?
<i>Las Pi</i>	Energía	¿Cuánto gasta una familia de 6? ¿Cuánto gasta una familia de 5? ¿Cuánto gasta una familia de 4? ¿Cuánto gasta una familia de 3?

Resulta evidente, a partir de los temas elegidos y las preguntas formuladas, y fue una constante en todos los trabajos entregados, que en esta primera etapa, el problema se presenta como algo muy amplio y de límites difusos. Para orientar la delimitación de la situación problemática a modelizar, la primera estrategia empleada, fue solicitar a los alumnos la búsqueda de información sobre el tema elegido por el grupo para trabajar la clase siguiente. Esperábamos que la confrontación con grandes cantidades de información variada y diversa sobre el tema elegido y la imposibilidad de abordar, en tan corto plazo, las diferentes aristas de la situación-problema que se plantearon originalmente, obligara a los alumnos a reformular y delimitar el problema a trabajar. De hecho, esto fue lo que ocurrió.

#### 2.9.2. Socialización del tema elegido, problema a modelizar y variables identificadas: primeras presentaciones de los proyectos

La segunda actividad propuesta, para avanzar con el proceso de modelización, se centró en la socialización del tema elegido, la definición del problema y las variables a trabajar, con el resto de la clase y el equipo de docentes de las prácticas. A continuación se muestra el enunciado de esta actividad<sup>24</sup>.

##### **PROYECTO DE MODELIZACIÓN: 1° presentación**

Reúnete con tu grupo. Comparte con tus compañeros la información que encuentres.

Organiza con ellos una breve y clara exposición de los siguientes puntos de tu proyecto de modelización:

- El tema elegido.
- El problema que definieron a partir de este tema.
- Las variables con las que trabajarán.
- La información con la que cuentan hasta el momento para abordar este problema.

Contarán con 5 minutos para transmitir al resto de la clase esta información, es muy importante que se organicen de forma tal que todos los miembros del grupo participen en la exposición de su proyecto.

Se destinaron los primeros 20' de la clase al trabajo en grupo para la preparación de la exposición. Los alumnos trabajaron integradamente y generaron, sin dificultades, presentaciones multimedia en el tiempo pautado para esta actividad. El resto de la clase se destinó a la socialización de las presentaciones realizadas por los diferentes grupos. Aquí, es importante remarcar que, en términos generales, la mayoría de los grupos excedió ampliamente el tiempo destinado a la presentación. Además, al tratarse de estudiantes altamente participativos, al finalizar las presentaciones se generaban debates en torno a cuestionamientos y preguntas que el resto de la clase realizaba al grupo expositor. Esta situación hizo que el tiempo previsto en la planificación para las presentaciones resultara insuficiente, obligándonos a reformular el cronograma, lo que tuvo como consecuencia directa la extensión del tiempo de prácticas<sup>25</sup>.

Más allá de los emergentes no previstos antes mencionados, esta actividad fue de una importancia radical pues permitió que el equipo de docentes realizara una serie de sugerencias para orientar y apuntalar el trabajo posterior en el proyecto.

<sup>24</sup> Como se explicará en la sección dedicada a la Evaluación, esta actividad fue considerada como componente parcial para la conformación de una nota final.

<sup>25</sup> Las prácticas, planificadas en un principio para desarrollarse en 20 horas cátedra, se extendieron a 31.

Además, se aclararon aspectos del proceso de modelización que no habían sido comprendidos cabalmente. En este sentido, es importante comentar que, durante las exposiciones, varios grupos presentaban el problema y una *solución encontrada* en las fuentes consultadas, como un proceso cerrado y acabado. Estas presentaciones permitieron reforzar la idea de que la formulación de un problema a modelizar debía ser abierta, y que las preguntas que se formularan sobre el tema, debían tener un carácter creativo y novedoso y no haber sido ya respondidas por otras personas. Este fue el caso del grupo *LXFS* que se preguntó ¿Cuál es el mejor equipo del Torneo Final 2013 Argentino? Pregunta que ya tenía respuesta pues dicho torneo ya había finalizado y tenía un campeón que daba respuesta a la pregunta.

Un caso que merece ser mencionado es el de la presentación del grupo *Las chicas del B*. Estas alumnas decidieron trabajar en torno a la problemática de los accidentes de tránsito en Córdoba, y centraron su análisis en la comparación de cuatro provincias (Santa Fe, Buenos Aires, Córdoba, Río Negro). Lo paradigmático de su producción giró en torno al hecho de que estas alumnas construyeran una tabla (ver Figura 63) con datos inventados que respondían a ciertas regularidades, ideadas también por ellas. Como pueden observarse en la tabla, la cantidad de accidentes en Buenos Aires aumentaba en 21 por cada año, en Córdoba aumentaba 14 por cada año, en Santa Fe se mostraba una disminución de 5 accidentes por cada año y en Río Negro aumentaba de 10 en 10. Rápidamente el equipo de docentes se percató de que los datos no eran reales y preguntó al grupo cuál era la fuente que habían consultado para la obtención de la información. El grupo explicó que ellas habían inventado los datos porque así, podrían generar expresiones simbólicas que les permitieran expresar las regularidades. En este punto, el equipo de docentes realizó una crítica constructiva, haciendo hincapié en la importancia de la ética científica y destacando la relevancia de trabajar con datos veraces provenientes de fuentes fiables.

Años	Buenos Aires	Córdoba	Santa Fe	Río Negro
2010	2856	541	653	159
2011	2877	555	648	169
2012	2898	569	643	179
2013	2919	583	638	189

**Figura 63: Tabla de datos del grupo *Las chicas del B***

Esta primera instancia de socialización permitió, también, una reflexión colectiva sobre cómo delimitar el problema y organizar la información que presentaban los diferentes grupos. Esta reflexión posibilitó que los grupos recibieran sugerencias no solo de las docentes sino también de sus compañeros de clases, quienes realizaron aportes, en ocasiones, realmente significativos.

### 2.9.3. Organización de la información y búsqueda de regularidades

La tercera actividad propuesta a los alumnos pretendía orientar el trabajo de los grupos hacia la matematización del problema, mediante la organización de la información hallada y la determinación de relaciones entre variables que dieran respuestas a las preguntas o problemas formulados originalmente. A continuación se muestran las pautas de trabajo con las que se presentó esta actividad:

**PROYECTO DE MODELIZACIÓN: organización de la información y búsqueda de relaciones entre variables.**

Junto a tu grupo busca una estrategia para organizar la información encontrada, analiza la posibilidad de construir una tabla (no siempre esto es posible).

A partir de las variables identificadas, determina distintos tipos de variables: independiente, dependiente y controlada.

Intenta determinar regularidades o relaciones entre estas variables.

Esta actividad fue la que presentó mayores dificultades, tanto a los estudiantes como a las docentes. Muchos grupos todavía tenían conflictos para delimitar el problema, por lo que las preguntas eran amplias y abordaban diversos aspectos del tema elegido. Esta situación tenía como consecuencia directa que los estudiantes no pudieran identificar las variables con las que debían trabajar, lo que dificultaba la organización de la información y, en consecuencia, la búsqueda de regularidades.

La clase que se destinó a esta actividad fue de un trabajo intenso, en el que todas las integrantes del equipo de prácticas recorrían las mesas donde se encontraban reunidos los distintos grupos para realizar aportes, contestar consultas y orientar el trabajo.

En la mayoría de los casos, los grupos se dedicaron a sistematizar y organizar información hallada en internet. Solo tres grupos realizaron una recolección experimental de datos. En la división C, los grupos *M.T.T.C.* y *Las Cuatrillizas* contaron la cantidad de hojas de papel utilizadas por los integrantes del grupo en una semana, y en la división B, el grupo *Los Minions* midieron la estatura de los alumnos del curso para ver quién era el más alto, el más bajo y si habían dos chicos de la misma altura.

Casi todos los grupos pudieron organizar los datos en tablas. A continuación se muestran cuatro de estas producciones. La primera tabla<sup>26</sup> (ver Figura 64<sup>27</sup>) pertenece al grupo *Los Minions* y registra los datos referentes a las estaturas de todos los alumnos del curso. La segunda tabla (ver Figura 65) organiza información referente al consumo de hojas de papel por día que realizan las integrantes del grupo *Las Cuatrillizas* que trabajaron con la temática de la tala de árboles para la producción de papel. La tercera tabla (ver Figura 66) pertenece al grupo *LWT* que trabajó en torno a la extinción de lince para la producción de abrigo de piel, ésta muestra la cantidad de especímenes de diferentes especies en vías de extinción necesarios para la realización de uno, veinte y cien abrigos de piel. La última tabla (ver Figura 67<sup>28</sup>), perteneciente al grupo *Las eléctricas*, organiza la información en torno a los gastos por consumo de energía eléctrica de cada familia, teniendo en cuenta si éstas se hallan constituidas por 3, 4 o 6 integrantes y la cantidad de artefactos eléctricos que cada una tiene, a partir de consumos promedios que aparecen en Internet.

<sup>26</sup> En la tabla se sustituyeron los nombres de los estudiantes por las iniciales para preservar las identidades.

<sup>27</sup> El dato de la última fila corresponde al promedio de estaturas de los estudiantes del curso.

<sup>28</sup> El total de gastos, correspondiente a una familia de 3 integrantes presenta un error de cálculo. El valor total que debería aparecer en el total es \$730.

ALUMNO	ALTURA (m)
MZ	1,60
LG	1,55
CA	1,66
AV	1,62
LD	1,55
CT	1,75
VF	1,69
CT	1,57
BF	1,66
VE	1,68
NS	1,60
MM	1,64
JF	1,52
RE	1,47
AC	1,52
MO	1,54
GC	1,58
CS	1,60
CE	1,55
SB	1,54
BP	1,61
GT	1,65
CT	1,52
PS	1,57
DG	1,54
CS	1,61
BA	1,73
SL	1,50
CJ	1,60
RJ	1,65
FG	1,46
BT	1,47
	1,4925

Figura 64: Tabla producida por el grupo *Los Minions*

Cuatrilliza	Jueves	Viernes	Sabado	Domingo	Lunes
Mile	3 hojas A4	3 hojas rivadavia y 1 A4	2 hojas A4	0 hojas utilizadas	2 hojas rivadavia
Agus	2 hojas A4 y una rivadavia	2hojas rivadavia	4 hojas A4	0 hojas utilizadas	1 hoja A4
Clari	2 hojas A4	2 hojas A4	2 hojas rivadavia	2 hojas rivadavia	2 hojas A4
Agos	4 hojas rivadavia	2 hojas rivadavia y 3 A4	0 hojas utilizadas	1 hoja A4	0 hojas utilizadas

Figura 65: Tabla producida por el grupo *Las Cuatrillizas*

Animal	Cantidad para 1 abrigo	Cantidad para 20 abrigos	Cantidad para 100 abrigos
Visonos	60	1200	6000
Martas	60	1200	6000
Zorros	20	400	2000
Marmotas	20	400	2000
Ocelotes	14	280	1400
Lobos	14	280	1400
Nutrias	20	400	2000
Linces	20	400	2000
Chinchillas	250	5000	25000
Focas	7	140	700
Yaguares	7	140	700
Leopardos	7	140	700
Castores	30	600	3000
Mapaches	3	60	300
Armiños	200	4000	20000
Zarigüeyas	25	500	2500

Figura 66: Tabla producida por el grupo *LWT*

Familia de... integrantes	Aparatos electronicos	Cantidad de gastos
3	2 televisores	\$100,00
	luz	\$200,00
	computadora	\$170,00
	heladera	\$160,00
	lavarropas	\$100,00
	TOTAL	\$690,00
4	2 televisores	\$150,00
	luz	\$300,00
	computadora	\$226,00
	heladera	\$160,00
	lavarropas	\$150,00
	TOTAL	\$986,00
6	2 televisores	\$200,00
	luz	\$400,00
	computadora	\$340,00
	heladera	\$160,00
	lavarropas	\$200,00
	TOTAL	\$1.300,00

Figura 67: Tabla producida por el grupo *Las Eléctricas*

#### 2.9.4. Representación de las regularidades halladas y ajustes finales: las presentaciones de la última etapa de los proyectos

La última actividad planificada para acompañar el proceso de modelización se centró en ayudar a los estudiantes a determinar de qué modo resultaba más conveniente comunicar los resultados hallados en cada grupo (construcción de gráficos, expresiones simbólicas, lenguaje coloquial, medias, promedios, etc.). A continuación se muestra el enunciado propuesto para esta actividad.

##### **PROYECTO DE MODELIZACIÓN: Ajustes finales**

Con tu grupo determina la mejor forma de comunicar las relaciones entre variables encontradas (construcción de gráficos cartesianos, expresiones simbólicas, lenguaje coloquial, medias, promedios, gráficos de barra, gráficos de torta, etc.) y los resultados del proceso de modelización realizado.

Realiza, si es posible, una validación o verificación de sus resultados.

Organiza una presentación que tenga las siguientes características:

- Presentarán una sola diapositiva que contenga las modificaciones que realizaron a partir de las recomendaciones realizadas por las profes junto con la representación de las relaciones encontradas
- La exposición no deberá superar los 5 minutos.

Debido a la especificidad de las situaciones-problema elegidas por los diferentes grupos, en esta etapa de trabajo muchos de ellos recurrieron a la utilización de herramientas matemáticas que no estaban contempladas dentro de la unidad trabajada y que pertenecían a otros ejes, como las representaciones en gráficos de torta o de barra, propias del eje *Estadística y probabilidad*. Tal fue el caso de los grupos *T.T.A.P* con el tema barras bravas, *Año B* con el tema tabaquismo y *LFXS* con el tema fútbol.

Además se pidió a los diferentes grupos que intentaran validar los modelos hallados, aclarando que la validación de los resultados encontrados no es siempre posible puesto que en muchos casos se requiere hacer experimentos o acceder a información que no siempre está disponible.

Para la presentación final de los proyectos de modelización se destinaron dos módulos y medio. 1ºA contó solo con un módulo y medio debido a que en este curso la primera socialización de los proyectos se extendió más que en el resto de los cursos, motivo por el cual se redujo el tiempo disponible para las presentaciones finales.

Aquí nuevamente sucedió que las presentaciones excedieron los cinco minutos pautados y que los debates posteriores insumieron mucho tiempo de clases.

En términos generales, la mayoría de los grupos dieron cuenta de un progreso en la definición y delimitación de la situación-problema en relación con las presentaciones correspondientes a la primer socialización del tema elegido. Tal es el caso del grupo *Me llamo matemática*. La primera formulación del problema realizada por este grupo era muy amplia y abordaba muchas aristas del tema *basura*, que iban desde la contaminación ambiental a la cuantificación de basura en el mundo y en Argentina. A continuación mostramos las preguntas que este grupo se planteó en un primer momento y cómo fueron reformuladas posteriormente.

¿Cuánto contaminamos al medio ambiente?, ¿Cuál será el porcentaje de basura que hay en el mundo?, ¿Cuál es la cantidad de basura que hay en nuestro país?



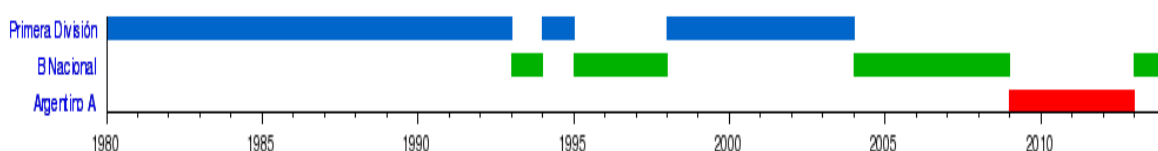
Luego de la interacción con el equipo de prácticas y el resto del curso a través de la socialización del proyecto, el grupo pudo reformular el problema, delimitándolo a la cantidad de basura que un individuo produce y contextualizándolo a la ciudad de Córdoba. Las preguntas que finalmente contestaron los alumnos, y que se muestran a continuación, dan cuenta de este avance.

¿Cuánta basura tira una persona por día?, ¿por semana?, ¿por mes?, ¿y en un año?, ¿en 70 años?, ¿en 80?

Otros trabajos que podemos mencionar son, por un lado, el de *Las chicas del B* que pretendían comparar las muertes por accidentes de tránsito en todas las provincias de Argentina, aunque luego, al ver la magnitud del problema, decidieron comparar solo cuatro provincias. Por otro lado, el grupo *LFXS* con el tema fútbol, se plantearon en un primer momento las siguientes preguntas:

¿Cuál es el mejor equipo del Torneo Final 2013 Argentino?  
¿Cuál fue el peor?  
¿Y cuál fue el ganador?

Al ver estas preguntas tan amplias, las docentes del equipo de prácticas sugirieron reformularlas limitándolas a un equipo de fútbol en particular. A partir de esa sugerencia decidieron estudiar al equipo de fútbol Talleres de Córdoba teniendo en cuenta, los partidos jugados, ganados y perdidos, durante los distintos campeonatos, mostrando luego, mediante un gráfico de Internet (Ver Figura 68<sup>29</sup>), el recorrido del equipo desde 1980. Si bien este gráfico no fue de producción propia, los alumnos fueron capaces de interpretarlo, analizando el desempeño del equipo a lo largo del tiempo.



**Figura 68: Gráfico empleado por el grupo LFXS, para estudiar el rendimiento del equipo de Talleres**

En relación con el tema fútbol, otro de los trabajos que cabe destacar es el realizado por el grupo *TTAP* sobre las barras bravas en Argentina. En un primer momento había formulado preguntas que podían responderse directamente por medio de la información encontrada en Internet, por lo cual el equipo docente les planteó que se podían centrar en la comparación de una barra brava argentina y una del exterior.

Cabe destacar, que casi todos los grupos pudieron organizar los datos recolectados en tablas y representar las variables gráficamente, pero la mayoría no pudo establecer regularidades.

Debemos reconocer que los Proyectos de Modelización fueron un trabajo enriquecedor tanto para los alumnos como para las practicantes y docentes y que a pesar del poco tiempo que tuvieron los alumnos para realizar sus producciones lograron buenas presentaciones y pudieron observar que no solo se hace matemática en el contexto del aula sino también se puede hacer matemática en la vida real.

<sup>29</sup> Gráfico extraído de [http://es.wikipedia.org/wiki/Club\\_Atletico\\_Talleres](http://es.wikipedia.org/wiki/Club_Atletico_Talleres), Noviembre de 2013.

Por último, para cerrar esta sección, se muestran, algunas reflexiones de la experiencia vivida desde la perspectiva de los alumnos<sup>30</sup>:

“Usamos la matemática con algo que nos gusta y nos divierte porque por ahí las materias aburren”.

“Conocimos una parte de la matemática”.

“Nos ayudó a atender más sobre las variables, a qué se refieren y sobre un tema que a nosotros nos gustó”.

“Nos ayudó para ver que podemos utilizar la materia en temas que no vemos generalmente y pudimos descubrir que podemos utilizar esta materia para temas que no solo son ecuaciones, entre otras cosas”.

“Nos gustó trabajar en grupo y nos organizamos para trabajar con la profesora”.

“A mí me gustó porque es como si hicimos matemática pero con otros temas que pueden ser importantes”.

“Lo que estuvo muy bueno es que no solo nos concentramos en la matemática sino también en otros temas y que además podíamos elegir nosotros temas que nos interesaban”.

Las palabras de los alumnos rescatan diversos aspectos del proceso vivido: el trabajo en grupo, la posibilidad de abordar temas no matemáticos en la clase de matemática, la oportunidad de elegir un tema de interés para estudiar aplicando la matemática, la comprensión de algunos conceptos matemáticos y la vivencia de una experiencia de aprendizaje que también puede ser divertida.

## 2.10. Evaluación

En nuestras prácticas se pueden visualizar dos etapas de evaluación. Cada etapa estaba constituida por un puntaje determinado. Con respecto a la primera, se propuso poner una nota que cerrara el trimestre en el cual se estaba trabajando; la nota, cuyo valor máximo fue 10 (diez), estaba compuesta de la siguiente manera:

- |   |          |
|---|----------|
| • Actividad con deslizador                              | 1 punto  |
| • Trabajo práctico evaluable (TPE)                      | 6 puntos |
| • Primera presentación de los proyectos de modelización | 3 puntos |

La actividad con deslizador, según descripta en la sección 2.4.3, constituía el 10% de esta primera nota. Para obtener el puntaje total (1 punto en este caso), solo bastaba que el alumno subiera su actividad al aula virtual en tiempo y forma. Aquellos estudiantes que subieron el archivo de GeoGebra posteriormente a la fecha solicitada no obtuvieron el puntaje establecido.

---

<sup>30</sup> Transcripción de las opiniones expresadas por los alumnos en el curso.

Con respecto al TPE, el puntaje máximo otorgado fue de 6 (seis) puntos, constituyendo así el 60% de la nota

Por último, para cerrar la nota, se asignó un valor máximo de 3 (tres) puntos a la primera exposición de los proyectos de modelización que se desarrolló según los lineamientos pautados en la Actividad que se muestra en la sección 2.9.2, cuyo enunciado reproducimos a continuación. Así, la realización de esta actividad contribuía con un 30% en la conformación de la nota correspondiente a la primera etapa.

**Organiza con tus compañeros una breve y clara exposición de los siguientes puntos de tu proyecto de modelización:**

- El tema elegido.
- El problema que definieron a partir de este tema.
- Las variables con las que trabajarán.
- La información con la que cuentan hasta el momento para abordar este problema.

Contarán con 5 minutos para transmitir al resto de la clase esta información, es muy importante que se organicen de forma tal que todos los miembros del grupo participen en la exposición de su proyecto.

La mayoría de los grupos realizó una buena presentación de sus proyectos respetando las consignas establecidas, pero el tiempo que se había propuesto para dicha actividad no fue respetado, por lo que tuvo como consecuencia directa la extensión de nuestras prácticas. A pesar de no respetar el tiempo establecido, no se bajó puntaje por este motivo, pues la socialización de cada trabajo resultó muy rica y enriquecedora para los grupos que exponían. Cabe aclarar que para esta exposición, se tuvo en cuenta el esfuerzo y dedicación puesto en los proyectos.

A continuación se pueden visualizar los resultados de las notas de la primera etapa en cada uno de los cursos donde realizamos las prácticas (ver Figuras 69, 70 y 71).

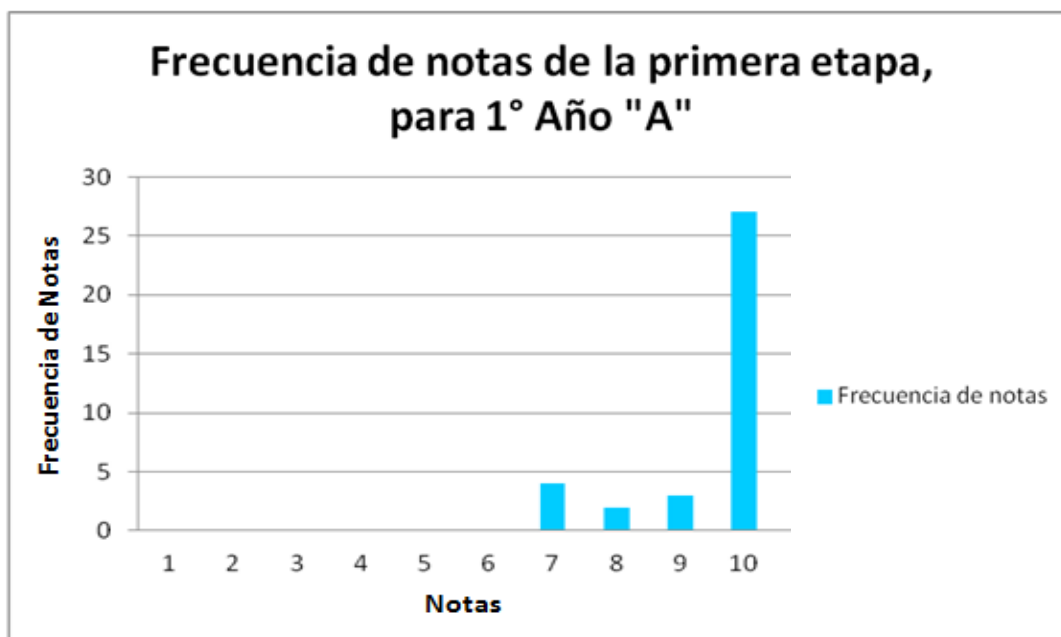


Figura 69: Histograma que muestra la frecuencia de notas finales de la 1ª Etapa, para 1º Año "A"

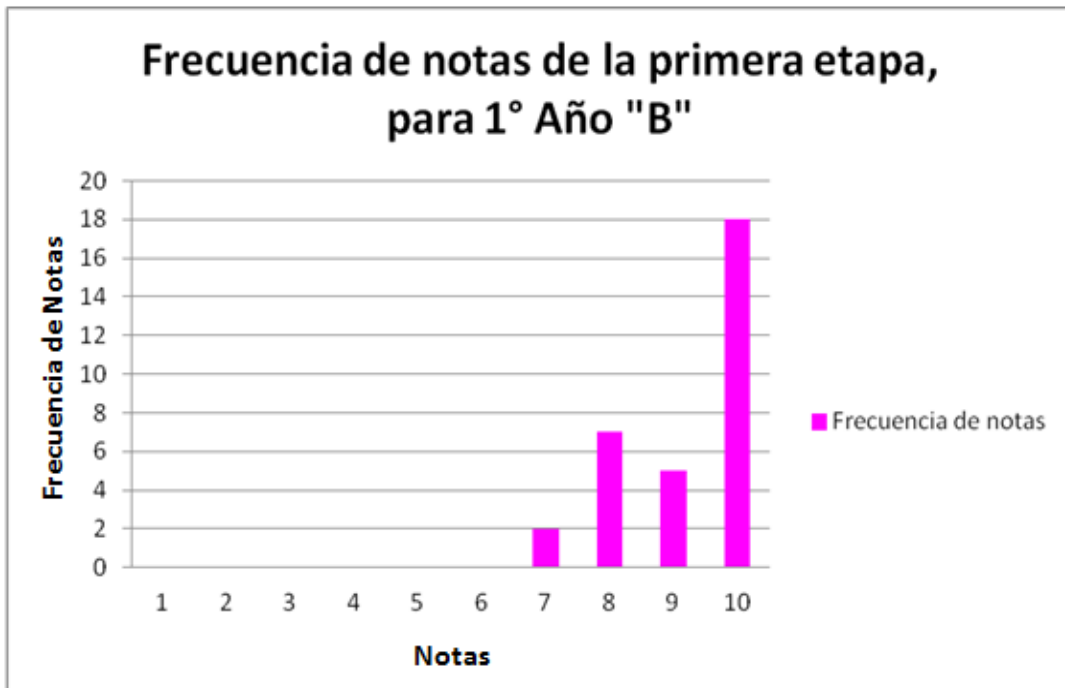


Figura 70: Histograma que muestra la frecuencia de notas finales de la 1ª Etapa, para 1º Año "B"

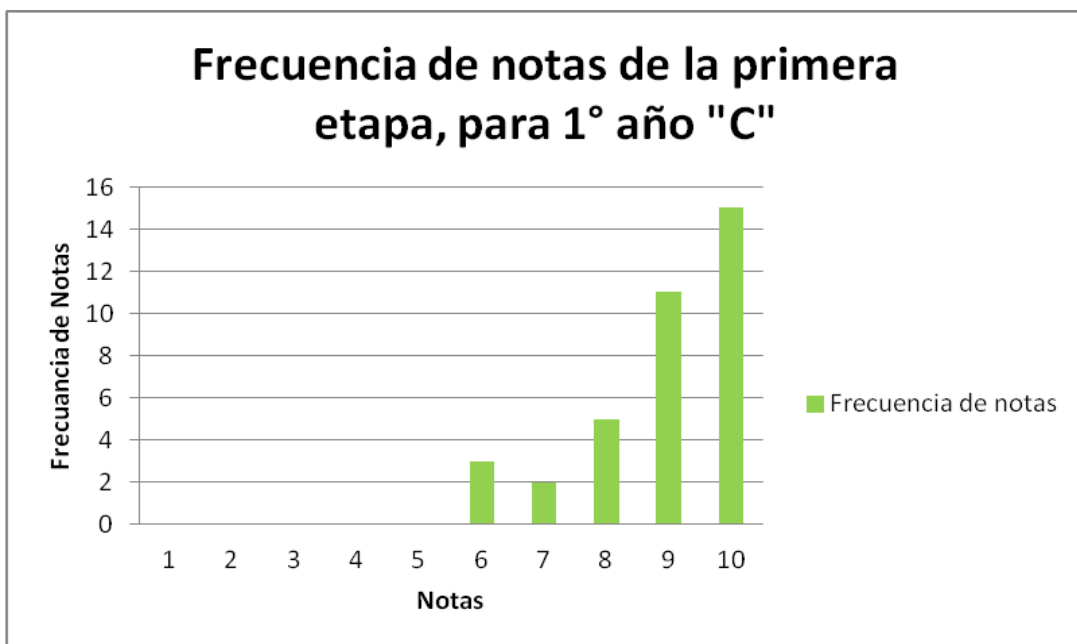


Figura 71: Histograma que muestra la frecuencia de notas finales de la 1ª Etapa, para 1º Año "C"

En la segunda etapa de evaluación se procedió de manera similar a la anterior, es decir, la nota cuyo valor máximo es de 10 (diez) puntos, se conformó a partir de dos instancias que contribuirían en un 50% cada una:

- Segunda presentación de los proyectos de modelización
- Actividad evaluable a ser propuesta por la profesora tutora del curso una vez que finalizarán nuestras prácticas

Es importante mencionar que este 50%, correspondiente a la segunda presentación de los proyectos de modelización, estaba constituido por una nota individual y una nota grupal. Los criterios utilizados para evaluar estas presentaciones se explicitan en el cuadro que sigue:

Criterios de evaluación para las presentaciones del proyecto de modelización

Puntaje máximo: 5 puntos

Esta evaluación consta de dos partes, por un lado se valorará el trabajo grupal realizado por los alumnos (tanto durante el proceso como en el momento de presentación) y por otro lado se ponderara individualmente la actitud de respeto, escucha e interiorización de cada alumno con los trabajos realizados por los distintos grupos.

- NOTA GRUPAL: (4,5 puntos) la nota grupal consta de dos partes la primera pondera el proceso realizado por el grupo durante el tiempo que se destinó en clase al proyecto de modelización y la segunda evalúa la presentación y comunicación al resto del curso del trabajo realizado y las conclusiones alcanzadas.

- Proceso de modelización (2, 5 puntos)

Actitud del grupo hacia el trabajo (0,75 puntos):

- El grupo no muestra ningún interés por el trabajo (0 puntos).
- Algunos miembros del grupo muestran interés por el trabajo (0,5 puntos).
- Todo los miembros del grupo trabajan de forma cooperativa, participan y realizan consultas a las docentes (0,75 puntos).

Recolección y organización de la información (0,75 puntos):

- El grupo no trae material para trabajar en las clases y no aprovecha el tiempo de clase para recolectar datos y organizarlos (0 puntos).
- El grupo trae material para trabajar en clases y realiza búsquedas o recolección de datos en los momentos de clase destinados para este fin pero organiza los datos de una manera que resulta inadecuada al problema (0,5 puntos).
- El grupo trae material para trabajar en clase y aprovecha el tiempo de clases para realizar búsquedas o recolección de datos y organizarlos de manera pertinente al problema (0,75 puntos).

Modificaciones realizadas en función de las sugerencias (1 punto):

- El grupo no atiende a las sugerencias realizadas por las docentes para orientar el proceso de modelización y no utiliza el foro para intercambiar información y socializar su trabajo (0 puntos).
- El grupo orienta su proceso de modelización de acuerdo a las sugerencias realizadas por las docentes pero no utiliza el foro para intercambiar información y socializar su trabajo (0,75puntos).
- El grupo orienta su proceso de modelización de acuerdo a las

sugerencias realizadas por las docentes y utiliza el foro para intercambiar información y socializar su trabajo (1 punto).

- **Presentación final del proyecto(2 puntos)**
  - El grupo respeta las pautas establecidas para la presentación (puntaje máximo: 0,3 puntos).
  - El grupo realiza un uso adecuado del tiempo y los recursos para comunicar el trabajo realizado (puntaje máximo: 0,5 puntos).
  - El grupo expone de forma clara y ordenada los avances realizados en base a las sugerencias (Puntaje máximo: 0,5 puntos).
  - El grupo formula adecuadamente el problema, identifica variables y elige una representación pertinente para comunicar las relaciones entre variables halladas (puntaje máximo: 0,7 puntos).
- **NOTA INDIVIDUAL: (0,5 puntos)** esta nota pondera la actitud personal del alumno durante los momentos de socialización del trabajo realizado por sus compañeros. Evaluaremos el respeto y la participación crítica que cada alumno muestra durante estos procesos de intercambio.
  - El alumno presta atención, muestra interés y hace silencio en los momentos en que los grupos exponen sus proyectos (puntaje máximo: 0,3 puntos).
  - El alumno participa de los momentos de debates con preguntas, comentarios o sugerencias pertinentes al tema que se está tratando (puntaje máximo: 0,1 puntos).
  - El alumno participa de los foros haciendo comentarios, preguntas o sugerencias a los proyectos que llevaron adelante sus compañeros (puntaje máximo: 0,1 puntos).

A continuación se pueden visualizar los resultados de las notas asignadas a partir de la evaluación de las presentaciones finales de los proyectos de modelización (ver Figuras 72, 73 y 74).

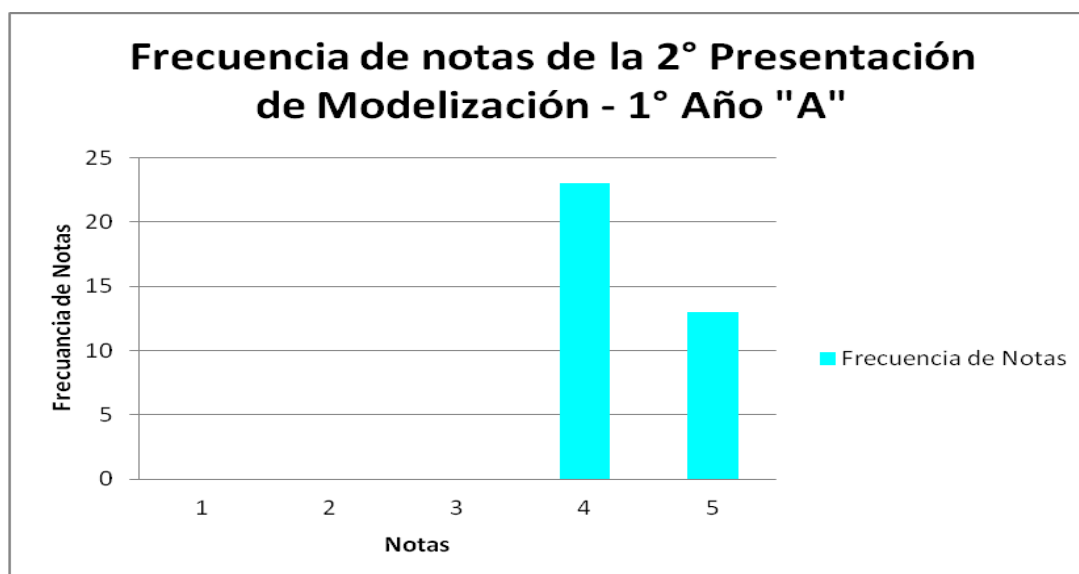
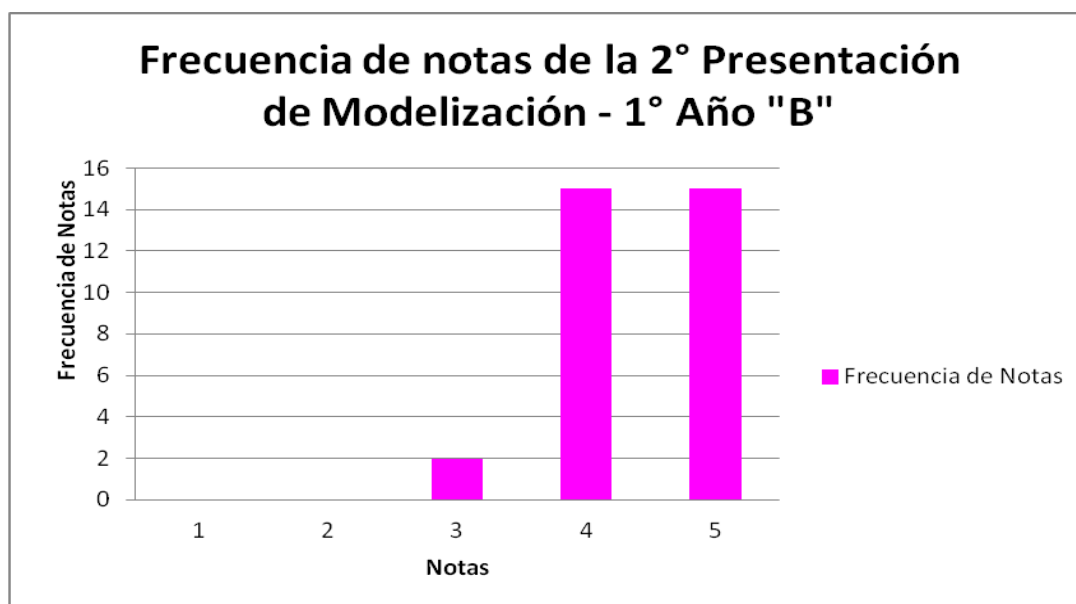
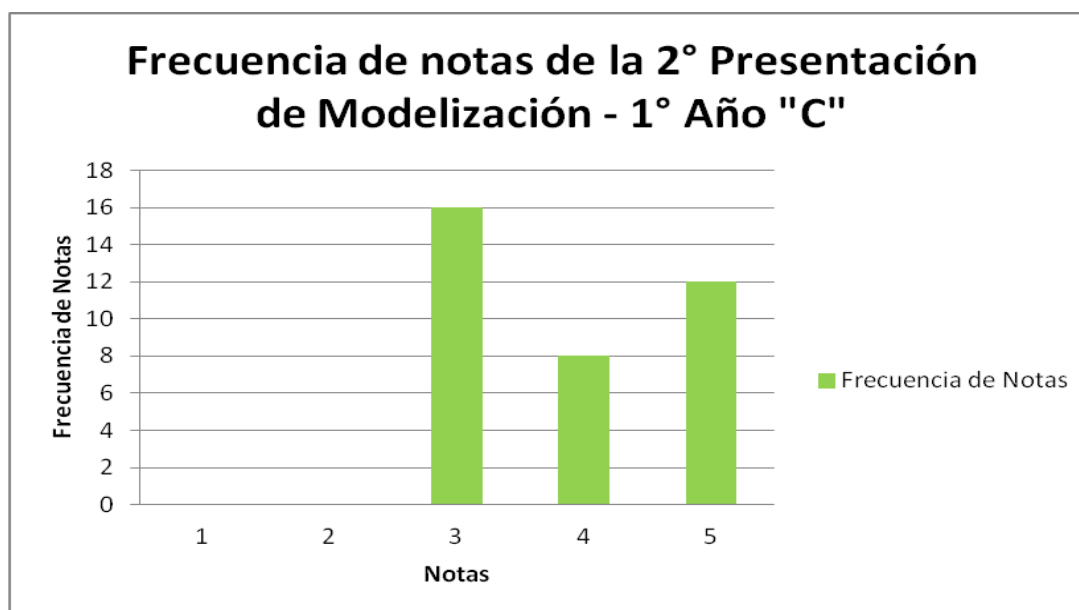


Figura 72: Histograma que muestra la frecuencia de notas de la 2° Presentación de Modelización, para 1° Año "A"



**Figura 73:** Histograma que muestra la frecuencia de notas de la 2° Presentación de Modelización, para 1° Año "B"



**Figura 74:** Histograma que muestra la frecuencia de notas de la 2° Presentación de Modelización, para 1° Año "C"

En esta instancia, hubo gran diversidad de notas, debido a que se tuvieron en cuenta muchos más aspectos que en la primera presentación, como por ejemplo, la actitud del grupo hacia el trabajo, la recolección y organización de la información, las modificaciones realizadas por el grupo a partir de las sugerencias propuestas por las docentes, entre otras. En general, los alumnos hicieron buenas presentaciones mostrando progresos en la definición y delimitación del problema, la recolección y organización de la información, la identificación de variables, la determinación de regularidades o relaciones entre estas variables y la representación de las regularidades o relaciones encontradas; mostrando apertura a las sugerencias de las docentes. La mayoría de los grupos consiguió discernir, a partir de la información recolectada, las variables y organizar los datos en tablas. Si bien en pocos casos se alcanzó una formalización

simbólica de las regularidades halladas, hay que tener en cuenta que estos alumnos recién comenzaban a abordar el proceso de construcción de tablas y la formulación simbólica de regularidades. En este sentido, consideramos que lograron un aprendizaje significativo del valor de la tabla y gráficos de diferente naturaleza como herramientas matemáticas para organizar y comunicar información.

### 2.11. Conclusiones

Las distintas instancias de este trabajo: planificación, formulación del material didáctico, puesta en práctica de la planificación, constante revisión y reformulación de la propuesta, evaluación y redacción del informe final; requirieron un gran esfuerzo y un permanente trabajo colaborativo y cooperativo por parte de todas las integrantes del grupo de prácticas.

Consideramos que dio sustento a nuestra práctica profesional la formación recibida a lo largo de la carrera, destacando fundamentalmente las *tendencias en educación matemática* estudiadas en la materia Didáctica Especial y Taller de Matemática. El abordaje que hicimos en esta materia en relación al *uso de tecnologías* como herramientas para enseñar y aprender contenidos, *modelización matemática y trabajo por proyectos*, nos dio la confianza necesaria para afrontar el gran desafío que implicaron nuestras prácticas. Nunca nos hubiéramos atrevido a llevar adelante una propuesta de prácticas tan amplia, abierta, flexible y llena de incertidumbres, que exigía el permanente trabajo sobre el emergente, si no hubiésemos contado con el respaldo de la experiencia profesional, en torno al trabajo con modelización matemática, de nuestras profesoras tutora y supervisora. Fue muy importante para nosotras contar con su contención, permanente dedicación y apoyo.

Al margen de las dificultades, angustias y frustraciones con las que nos encontramos en el desarrollo de las prácticas, y mirando globalmente todo el trabajo realizado, creemos que por ser nuestra primera experiencia, estuvimos a la altura que las circunstancias demandaban obteniendo, una excelente respuesta por parte de los alumnos y haciendo una práctica exitosa, que sin duda, superó ampliamente nuestras expectativas.

Las prácticas nos ayudaron a dimensionar que la formación nunca termina y que el trabajo colaborativo con otros colegas es imprescindible para el ejercicio profesional. Nos queda todo el camino por andar. Nos llevamos con nosotras lo aprendido en esta gratificante experiencia.



### 3. ¿Hicimos matemática?

A partir de la experiencia de nuestras prácticas, descrita en las secciones precedentes, decidimos definir como problemática a analizar, la sensación que tuvimos que *no se estaba haciendo matemática* cuando se trabajó sobre los proyectos de modelización extramatemática. Los temas elegidos por los alumnos para los proyectos eran muy diversos y en ocasiones no sabíamos cómo orientar los procesos de matematización para muchos de estos temas. Nos vimos obligadas, de un día para el otro, a investigar sobre los temas elegidos por los grupos, intentar hallar la matemática subyacente en estos temas y preparar material para que los alumnos trabajaran en los proyectos. En las clases que se destinaron a la realización de los proyectos de modelización extramatemática, no se hablaba solamente de matemática, insumían mucho tiempo de éstas, debates en torno a economía, consumo de energía y de agua, fútbol, medio ambiente, basura, juegos, entre otros. Nos ponía muy nerviosas que se dilataran tanto estas discusiones y que la matemática demorara en emerger.

En términos generales, sentimos que los alumnos quedaron muy “pegados” a la realidad y a los datos recolectados. Nuestra expectativa era que pudieran reproducir en un contexto extramatemático la experiencia realizada para *el cuadrado que cumple años*, llegando a la formulación de expresiones simbólicas. En las presentaciones finales se observaba que había etapas del proceso de modelización que no se habían abordado, y nos parecía que la mayoría de los grupos había quedado a mitad de camino entre el reconocimiento de variables y la construcción de una tabla. Pues bien, ante estas observaciones podemos cuestionarnos: ¿resulta fácil para los alumnos realizar, por primera vez, un proceso de modelización extramatemática, abarcando todas las etapas de dicho proceso?, ¿cómo los estudiantes interpretan y utilizan la noción de variable que habíamos introducido poco tiempo atrás?, ¿hasta qué punto los diferentes grupos comprendían qué variables estaban considerando al realizar una representación gráfica de los datos y relaciones halladas?, ¿hasta dónde podemos exigir a los alumnos en torno a la construcción de una tabla, si hacía muy poco tiempo se les habíamos enseñando a construir las y completarlas como medio para organizar datos?. Ante estos interrogantes, resulta importante destacar que cada uno de los grupos fue trabajando, a lo largo del proyecto de modelización, de diferentes formas y utilizando de diversas maneras las nociones que nosotras, como docentes practicantes, habíamos introducido. Consideramos que estos aspectos merecen ser destacados como logros de los alumnos.

Ahora bien, volviendo a nuestra sensación inicial, ¿qué significa la expresión *no se estaba haciendo matemática*?, reformulemos la pregunta y pensemos acerca de ¿qué es *hacer matemática*? Es curioso que arribemos a esta pregunta, esencial para nuestra formación como futuras docentes, en el último año de nuestra carrera y en el contexto de la práctica profesional, al enfrentarnos a resultados que no eran los imaginados.

Merece una detenida reflexión, el hecho de que esta interrogación se nos presenta como algo incómodo y perturbador. Nos enfrentamos a una pregunta sobre la que nunca habíamos pensado y para la cual, estando casi recibidas, no tenemos una posición definida.

#### 3.1. ¿Qué es hacer matemática?

Para intentar dar respuesta a esta compleja pregunta, nos apoyaremos en las producciones teóricas de diferentes autores que, posicionados en diversas perspectivas, reflexionan sobre el hacer matemático y las formas de enseñar y aprender matemática. En este sentido resulta interesante revisar las ideas propuestas por los enfoques de la Educación Matemática Realista de Hans Freudenthal y la Enculturación Matemática de Alan Bishop.

El estilo de las producciones modernas en matemática crean la ilusión de que, lo que es seguro y verdadero lo ha sido desde siempre. En oposición a esto, Freudenthal (1991), desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista, concibe la *matemática como una actividad*. En este sentido, para este autor la matemática no es más que una forma de sentido común, es decir, un conjunto de estrategias para explicar y comprender el mundo. Destacando, que el “sentido común da las cosas por sentadas,..., mientras que la matemática pide buenas razones” (Freudenthal, 1991, pág. 14). La búsqueda de estas “buenas razones”, conduce a “perseguir” la certeza, “y la forma en que esto se hace, caracteriza la matemática como una actividad, llevando incluso a superar versiones del sentido común” (Freudenthal, 1991, pág. 14). Para arribar a la certeza, todo investigador y productor de matemática, debe atravesar con su trabajo caminos errados y explorar callejones sin salida que eventualmente abandonará. Sin embargo, el producto final de esta labor, por lo general, omite el proceso de producción como en realidad tomó lugar (Freudenthal, 1991). Así, la concepción de matemática propuesta por Freudenthal, se posiciona en sentido contrario al abordaje que se hace de la matemática en las publicaciones científicas, a las formas de enseñar y aprender matemática centradas en el paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2000) y al componente cultural (Bishop, 1999) occidental de la matemática, es decir, a la creencia popular que se tiene del hacer matemático vinculándolo con la rapidez para el cálculo mental y restringiendo la matemática a la actividad aritmética (Schoenfeld, 2000).

Para explicar su punto de vista Freudenthal propone la metáfora de la búsqueda del tesoro. Hacer matemática, es ir tras un precioso tesoro de herramientas, precioso sólo si quién lo encuentra puede hacer un buen uso de ellas (Freudenthal, 1991). Ahora, ¿qué significa hacer un buen uso de estas herramientas? Esta capacidad se vincula a la noción de *discernimiento* abordada por este autor (Freudenthal, 1980). Discernir, según la Real Academia Española<sup>31</sup>, es la acción de “distinguir algo de otra cosa, señalando la diferencia que hay entre ellas”. El discernimiento permite así, distinguir en el hacer matemático, las buenas razones de las malas, el buen camino del camino errado, el buen uso de las herramientas de su uso erróneo.

En este sentido, la actividad individual del hacer matemático, no presenta para Freudenthal (1980), una gran distancia del hacer matemático de la humanidad, que constituye un acervo cultural, heredado a través de la historia de la matemática. Tanto la actividad individual como el desarrollo de la matemática en la historia significan, “conocimientos adquiridos por discernimiento, transformados por esquematización y memorización (o, digamos, codificación) mediante destrezas y discernimientos de orden más alto” (Freudenthal, 1980, pág. 9).

Detengámonos un momento sobre lo que el autor entiende por esquematización. Para ilustrar este concepto, Freudenthal (1980) analiza la historia de la aritmética, explicando que la primera esquematización del proceso de contar surge con la aparición del ábaco y la idea posicional. El ábaco constituye así, una abstracción, una primera representación material de los objetos a ser contados. Esta representación se desmaterializa cuando se la sustituye por una representación simbólica, el ábaco escrito; es decir, por un esquema de nivel superior. Por último, la aritmética da un nuevo salto con la aparición del número, representación simbólica aún más abstracta y compleja de lo que se quiere contar. Así, la historia de la aritmética ilustra la historia de la matemática como “el resultado de un proceso de aprendizaje de esquematización progresiva” (Freudenthal, 1980, pág. 10).

Ahora bien, la actividad matemática puede centrarse en sí misma, matemática pura, o establecer relaciones con la realidad a través de lo que se conoce como matemática aplicada.

<sup>31</sup> <http://lema.rae.es/drae/?val=discernimiento>, consultado en Noviembre de 2013.

Freudenthal sostiene, en relación al trabajo con la matemática y la realidad, que, “enfocar el contexto como un ruido, susceptible de perturbar el mensaje matemático, es un error; el contexto por sí mismo constituye el mensaje, siendo las matemáticas un medio para decodificarlo” (Bressan, 2005, pág. 76) a través nuevamente, de la capacidad de discernimiento.

Por otro lado, la perspectiva de la Enculturación Matemática, realiza también aportes que contribuyen a comprender qué significa hacer matemática. Los trabajos realizados desde esta línea de pensamiento, se basan en estudios transculturales que “nos dicen sobre las similitudes entre grupos culturales, desde el punto de vista de las ideas y las actividades matemáticas. Nos dicen algo del fenómeno cultural llamado “matemáticas” y nos permiten comprender mejor las raíces del pensamiento matemático.” (Bishop, 1999, pág. 41). Es importante destacar que este tipo de investigaciones no se centra en “temas” o “áreas de la matemática”, tales como número, medida, geometría y lenguaje/lógica, sino en actividades y procesos que conducen al desarrollo de las matemáticas (Bishop, 1999). En este sentido, Bishop (1999) plantea que el componente simbólico<sup>32</sup> de la matemática se organiza en torno a seis actividades universales: contar, localizar, medir, diseñar, jugar y explicar.

El enfoque de Enculturación Matemática también reflexiona sobre la relación entre la matemática y la realidad, sosteniendo que el componente simbólico de la matemática puede extenderse a otros contextos para ejemplificar y validar su poder explicativo.

### 3.2. ¿Qué es hacer matemática en el contexto escolar?, ¿Hicimos matemática durante el desarrollo de los proyectos de modelización extramatemática?

Para comprender qué significa hacer matemática en el contexto escolar, relacionaremos nuestra experiencia de prácticas con los lineamientos del Diseño Curricular 2011-2015 de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Básico de la Educación Secundaria. Analizaremos las actividades llevadas adelante durante las prácticas con las herramientas propias de los enfoques abordados en la sección anterior. Para reflexionar sobre las producciones en torno a los proyectos de modelización extramatemática serán de utilidad también, las nociones de ambientes de aprendizaje y alfabetización matemática aportadas por la perspectiva de la Educación Matemática Crítica introducida por Ole Skovsmose.

El Diseño Curricular 2011-2015 del Ciclo Básico de la Educación Secundaria para la Provincia de Córdoba, se encuentra en consonancia con las ideas anteriormente expresadas en relación al hacer matemático, pues sostiene que “la Matemática se presenta como una actividad de producción, por lo que *hacer matemática* implica dar la posibilidad de crearla, producirla” (pág. 35).

Ahora bien, ¿qué tipo de actividad matemática es pertinente, válida y valiosa en el contexto escolar? Hacer matemática en la escuela y hacer matemática como ciencia no tienen igual sentido, pues los procesos de enseñanza y aprendizaje, que involucra educadores y educandos, presentan características distintivas que les son propias. Así, el valor educativo de la matemática existe, “en la medida en que permite comprender y participar de los modos en que esta disciplina organiza distintas esferas de nuestro entorno social y natural” (Bressan, 2005, pág. 74).

---

<sup>32</sup> Bishop (1999, pág. 131) define el componente simbólico de la matemática como “conceptualizaciones explicativas significativas en la tecnología simbólica de las matemáticas, permitiendo básicamente que se exploren de una manera explícita los valores del “racionalismo” y el “objetismo””

En el contexto escolar hay que tener en cuenta que, el conjunto de estudiantes presenta intereses diversos y una disposición desigual hacia el trabajo en matemática. “No todos los estudiantes han de llegar a ser matemáticos (...) para una mayoría la matemática a utilizar será la que les ayude a resolver los problemas de la cotidianeidad” (Bressan, 2005, pág. 75). El Diseño Curricular de la Provincia de Córdoba para el Ciclo Básico concuerda con esta perspectiva abogando por “la posibilidad de acceso de los estudiantes al conocimiento matemático y (...) la democratización de un hacer matemático para todos” (pág. 35).

En esta línea, la propuesta del trabajo con proyectos de modelización extramatemática (PME<sup>33</sup>) en nuestras prácticas adhirió a este posicionamiento pues el trabajo con la realidad propició, en algunos grupos, el abordaje de problemas propios de la cotidianeidad de los alumnos.

El proyecto realizado por el grupo *Los 4 Mosqueteros* que trabajó en torno al juego Candy Crush, ejemplifica esta situación. La elaboración de este proyecto, permitió a los alumnos reflexionar sobre los usos y el consumo mundial de un juego con el que tienen contacto diariamente, extendiendo esta reflexión al uso de redes sociales y la preservación de la intimidad y privacidad en estos espacios virtuales.

Además el trabajo con PME en nuestras prácticas fue más allá de los lineamientos curriculares en relación a una democratización de la matemática. La libertad ofrecida a los estudiantes en relación a la elección del tema, les brindó la posibilidad de aunar la matemática y sus intereses personales, convirtiendo el hacer matemático en el aula en una actividad placentera para aquellos grupos que hicieron una elección consciente del tema a trabajar.

A continuación intentaremos mostrar que en el desarrollo de los proyectos de modelización extramatemática de los estudiantes hubo, efectivamente, actividad matemática. Para ello nos valdremos del análisis de diferentes trabajos de los alumnos mostrando evidencias de procesos de Alfabetización Matemática, según la acepción de Skovsmose (1999), Discernimiento Matemático, de acuerdo a Freudenthal y actividades reconocidas como matemáticas por Bishop en su trabajo Enculturación Matemática.

### 3.2.1. Alfabetización Matemática

Un proyecto muy interesante para analizar el trabajo realizado en las prácticas es “La inflación en Argentina comparada con la de otros países” llevado adelante por el grupo *Las innombrables*. Trabajar en torno a la inflación presentó un gran desafío pues, el tema incluye implícitamente una dimensión política que no es ascética de las ideologías de los alumnos y refleja las concepciones de sus familias.

En torno a este tema las alumnas formularon las siguientes preguntas:

¿Por qué en las vacaciones aumentan más los precios? ¿Cómo se ve la situación con respecto a dos años atrás? ¿Tiene alguna relación la oferta de los negocios con la inflación?
---

---

<sup>33</sup> A partir de ahora nos referiremos a los proyectos de modelización extramatemático con las siglas PME.

Durante la primera presentación del grupo, resultó evidente que éste abordaba el tema desde preconceptos propios de ciertos posicionamientos ideológicos. Aquí, resulta importante recuperar la tesis, trabajada por Freire y Skovsmose entre otros autores, de que una ideología esconde las crisis y los conflictos. En este sentido, el trabajo desde estas o cualquier otra concepción rígida y preformulada hacía necesario un trabajo educativo de poner en evidencia tales concepciones, pues es condición para todo proceso de modelización, tener una posición abierta, objetiva y crítica en relación al tema que se busca modelizar.

Para desmontar el sistema de creencias que se sostiene a través de la ideología, el equipo de prácticas sugirió a *Las Innombrables* detenerse en el análisis de la definición de *Inflación* y de *Porcentaje*. Haciendo notar que muchos aumentos que ellas asociaban a procesos inflacionarios, en realidad eran producto de procesos económicos relacionados a la ley de la oferta y demanda, como por ejemplo el aumento de precios en algunos bienes durante el período de vacaciones.

En base a las sugerencias del equipo docente, las alumnas trabajaron para la presentación final del proyecto (ver Figura 75) determinando las variables, buscando definiciones para inflación y porcentaje (ver Figura 76) e investigando acerca del porcentaje de inflación del 2011 y la proyección del porcentaje de inflación para 2013.

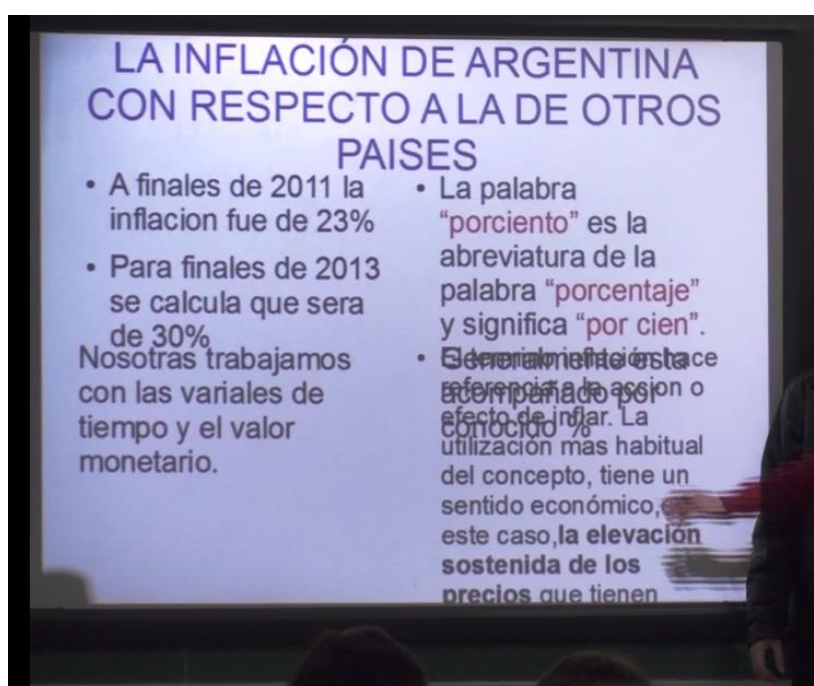


Figura 75: Captura de la presentación final del grupo *Las Innombrables*

El término de inflación hace referencia a la acción o efecto de inflar. La utilización más habitual de este concepto, tiene un sentido económico, en este caso, la elevación sostenida de los precios que tienen efectos negativos para la economía de un país.

La palabra “porcentaje” es la abreviatura de la palabra “porcentaje” que significa “por cien”. Generalmente está acompañado por conocido %.

Figura 76: Definiciones halladas por el grupo para los conceptos de inflación y porcentaje

Para que *Las Innombrables* y el resto de la clase pudieran relacionar estas dos definiciones y entender cabalmente en qué consiste el proceso inflacionario, la practicante le preguntó:

“¿Cómo explicarían a alguien que la inflación del 2011 fue del 23%?, ¿Qué significa, que la inflación fue del 23% relacionando los conceptos que ustedes estuvieron utilizando para inflación y porcentaje?”

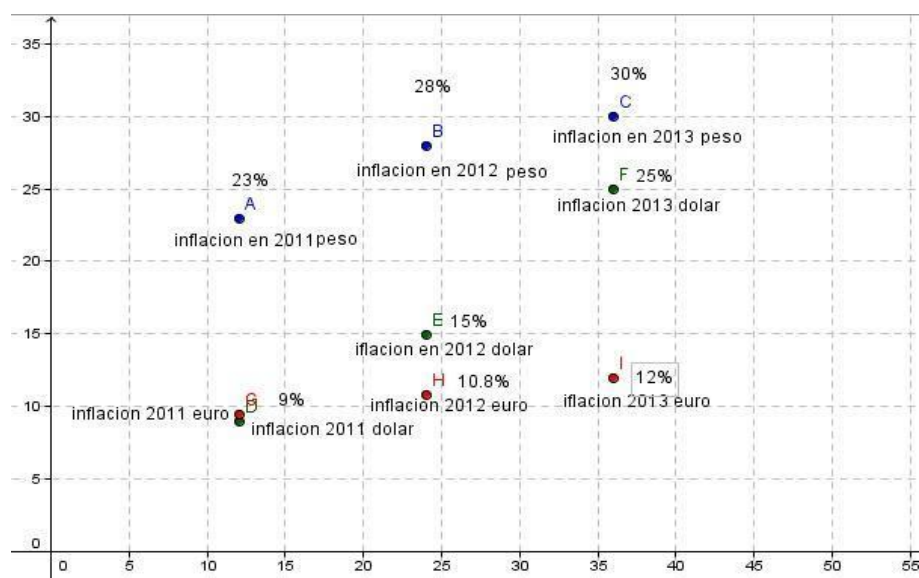
Ante la dificultad de la clase para responder a esta pregunta, el equipo de práctica interrogó:

“Por ejemplo, si vos comprás algo que a principio de año cuesta \$100 y la inflación del 2011 es del 23%, ¿Cuánto va a costar a fin de año?”

Así, revisando las definiciones y con ayuda del equipo docente, los estudiantes comprendieron que “de cada \$100 aumenta \$23”, por lo que el precio final de algo que sale \$100 después de un año con un 23% de inflación es de \$123.

Además, *Las innombrables* realizaron un gráfico (ver Figura 77) donde representaron “la inflación de distintos lugares” (Argentina, E.E.U.U. y un país de la Unión Europea) y explicaron:

“Nosotras elegimos estos tres por la diferencia, para mostrarles que Argentina está mucho más alto que los demás”.



**Figura 77: Gráfico realizado por el grupo *Las innombrables***

En este punto se desató una interesante discusión ante el análisis de las pendientes de la inflación para cada país por parte de un alumno que no pertenecía al grupo, quien comentó:

“el más alto es E.E.U.U., porque estaba aquí (ver punto D, Figura 77) y subió acá (ver punto F, Figura 77)”.

Un compañero intentó reforzar esta idea argumentando:

“Acá es lo que sube la inflación, cómo sube la inflación no cual está más inflado (risas). Del 2012 al 2013 el que más subió fue el dólar y después el peso”.

A pesar de que esta intervención causó risas entre los alumnos, también permitió reflexionar que si bien Argentina era el país con porcentaje de inflación más elevado la tasa inflacionaria de EE.UU de 2011 al 2013 es mucho mayor. Frente a estos comentarios contrarios al análisis del grupo, *Las innombrables* sostuvieron que:

“El dólar fue el que más aumentó y de golpe, pero lo que nosotras queríamos mostrarles era cómo el peso acá (ver punto A, Figura 77) vale 23% y acá 9% (ver punto D, Figura 77). Porque somos nosotros los que tenemos mayor inflación desde el 2011. Nosotras buscamos el mismo dato en distintas páginas y nos apareció en uno, que en el 2011 la inflación era del 23% en un diario Clarín, que decía que desde que entró el kirchnerismo...”

Esta argumentación se ve interrumpida por la intervención de un estudiante ajeno al grupo que discrepa diciendo “Porque Clarín está en contra del kirchnerismo”. En este punto se desató un interesante debate pues se reflexionó sobre la objetividad de las fuentes y cómo un mismo conjunto de datos aportan diferentes tipos de información (porcentaje de inflación, tasa inflacionaria) que puede ser manipulada para inducir lecturas diversas de la realidad.

La noción de alfabetización matemática, como constructo radical es de difícil abordaje, y no resulta de la mera extensión de la noción de alfabetización, entendida en consonancia con las ideas de Freire (1996). Como tampoco “es obvio que las competencias de la alfabetización y la alfabetización matemática jueguen papeles paralelos en la sociedad” (Skovsmose, 1999, pág. 29). Sin embargo, consideramos que las ideas trabajadas en este proyecto de modelización tendieron a la alfabetización matemática, en la medida en que, perpetraron un ataque a las diferentes ideologías presentes en el aula. Ataque que si bien no tuvo como consecuencia necesaria una transformación profunda<sup>34</sup> en la concepción que los alumnos tenían sobre el tema, sí fue disruptivo y permitió cierta apertura de los alumnos, promoviendo la emergencia y el intercambio de diferentes posiciones.

### 3.2.2. Discernimiento matemático

Como se expuso en la sección 2.8, la formulación de PME implicó la selección de un tema de interés, la recolección y discriminación de información relevante, la delimitación de un problema, la determinación y selección de variables a trabajar, la búsqueda de regularidades o relaciones entre estas variables y la definición de la mejor forma de comunicar las relaciones halladas. *Seleccionar, recolectar, discriminar, delimitar, determinar, buscar, relacionar y definir* son acciones que, en matemática, se encuentran estrechamente vinculadas a la capacidad de discernimiento, necesaria para el desarrollo de la actividad matemática (Freudenthal, 1980).

Es importante mencionar que en todas las actividades propuestas en las prácticas se estimuló el desarrollo de esta capacidad. Sin embargo, existe una diferencia entre el trabajo de modelización intramatemática, realizado a través del *cuadrado que cumple años*, y los proyectos de modelización extramatemática. El trabajo en contextos extramatemáticos agudiza esta capacidad debido a que es preciso discernir la matemática presente en la realidad; una realidad que es siempre caótica, diversa y compleja. De esta manera, el desarrollo de proyectos de modelización extramatemática exigió la formulación de los problemas y no solo su resolución. En este sentido, el trabajo realizado concuerda con el

<sup>34</sup> La Educación Matemática Crítica (Skovsmose, 1999) entiende a la alfabetización matemática en su acepción más radical, relacionada a las estructuras críticas de la sociedad, como un conjunto de competencias y habilidades emancipatorias, en la medida en que luchan contra las restricciones ideológicas que sostienen el *status quo*. Así la alfabetización propuesta por la Educación Matemática Crítica es vehículo de transformación de la estructura social y política.

Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria (2011-2015) para la Provincia de Córdoba, pues señala que “hacer matemática significa, entonces, “ocuparse de problemas”, lo que involucra tanto resolverlos como formularlos” (p. 36).

### 3.2.3. Actividades Universales: contar, localizar, medir y explicar

Revisando los proyectos de modelización extramatemática desde la perspectiva de la Enculturación Matemática y pensando las producciones de los alumnos como el desarrollo de algunas de las actividades universales propuestas por Bishop (1999) y no de temas o ejes, pudimos observar que estas producciones están impregnadas de matemática.

#### 3.2.3.1. Contar

Contar puede considerarse una de las actividades más elementales del hacer matemático. “Sin duda, contar y asociar objetos con números tiene una historia muy larga y muy bien documentada” (Bishop, 1999, p. 43).

*MTTC* y *Las Cuatrillizas* fueron dos grupos que trabajaron en torno a esta actividad, contando la cantidad de hojas de papel que consumen en una semana, para luego hacer proyecciones mensuales y anuales de este consumo, determinando el consumo total a lo largo de su paso por la secundaria y el impacto ambiental que la producción de esta cantidad de papel provoca.

Otro grupo que contó fue LWT, al trabajar con la población de lince en riesgo de extinción debido a la producción y consumo de abrigo de piel.

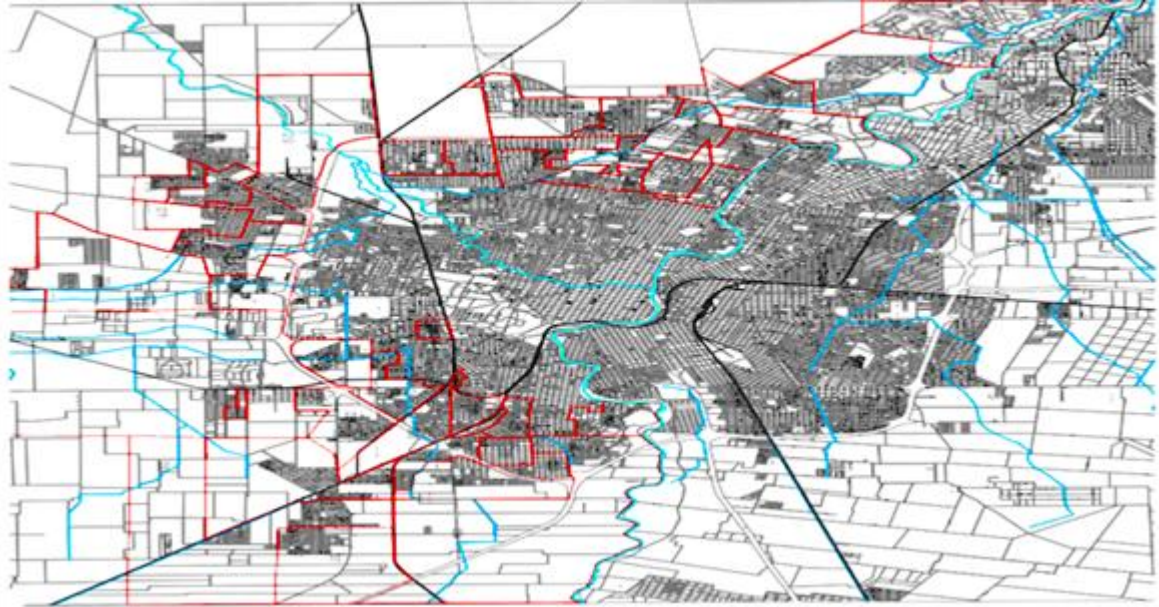
Bishop (1999) destaca además que “contar sucesos, en contraste a contar objetos, permite comprender en gran medida la predicción, la probabilidad y el azar (...)” (p. 133). Trabajaron en este sentido, las integrantes del grupo *One Direction* y *Las chicas del B* quienes abordaron las temáticas, cantidad de accidentes de tránsito en Argentina entre 1996 y 2008 y, muertes por año por accidentes de tránsito en cuatro provincias argentinas, respectivamente.

#### 3.2.3.2. Localizar

La actividad de localizar, según Bishop (1999, p.133), “enfatisa la geometría espacial de la posición y del movimiento controlado”. En este sentido, de las producciones de los estudiantes, se vincula a esta actividad, el proyecto *Nafta de Viaje* realizado por el grupo *Aaepr*, que trabajó en torno al consumo de combustible para un viaje de Córdoba a Salta. El trabajo con viajes implica el cálculo de distancias y la elección de recorridos o trayectorias en el espacio mediante el uso de mapas.

Otro proyecto relacionado con la actividad de localizar es *La Basura*, llevado adelante por el grupo *Me llamo Matemática*. Entre otras cosas, este grupo investigó el recorrido de la recolección diferencial de residuos (ver Figura 78), pues ésta se presentaba como una posible solución para el problema abordado. Además, este grupo intentó determinar el área de un basural a cielo abierto próximo a la escuela, recurriendo al uso de coordenadas geométricas para localizarlo en el Google Earth.





**Figura 78: Mapa de recorridos de la recolección diferencial de residuos, empelado por el grupo *Me llamo matemática***

En ambos grupos, la sugerencia del equipo de prácticas fue que midieran la distancia y el área respectivamente, a través de un trabajo a escala empleando los mapas de Google Earth y las diferentes herramientas de GeoGebra. El grupo *Aaepr* decidió no seguir esta sugerencia, mientras que *Me llamo Matemática*, intentó hacer esta medición pero no lo consiguió por falta de tiempo. A pesar de que estas actividades fueron concluidas, el realizar una primera exploración de los mapas y el programa GeoGebra, constituye un germen para actividades que la docente tutora podría proponer en un futuro.

### 3.2.3.3. Medir

“Medir se ocupa básicamente de comparar cosas en función de una cualidad compartida, y su desarrollo va de las comparaciones de pares a las comparaciones de muchos” (Bishop, 1999, p.134). Además, esta actividad es de vital relevancia pues incluye la noción de cualidad como cantidad continua. En relación a esta actividad, el proyecto *La estatura del curso* del grupo *Los Minions* trabajó con comparaciones de estaturas (el más alto y el más bajo), determinando el alumno más alto y el más bajo del curso. Además realizaron una recolección experimental de datos, a través de la medición de todos los estudiantes del curso, desarrollando estrategias de medición en búsqueda de la precisión para la obtención de las mismas.

Se vinculan a la actividad de medir conceptos como longitud, área, volumen, tiempo, temperatura, peso, así como también “conceptos más evidentes y significativos en el entorno inmediato del niño, como lo es el del “dinero”, el sistema de unidades que empleamos para medir la cualidad continua denominada “valor económico”” (Bishop, 1999, p.134). En relación al dinero, podemos mencionar el trabajo de los grupos *Las eléctricas*, y *Las Pi* que, mediante diferentes estrategias, estimaron el gasto en pesos del consumo eléctrico para una familia de 3, 4, 5 y 6 integrantes. Además, *Los chona* estimaron los gastos en el consumo de productos alimenticios y de limpieza para una familia de 5 integrantes, teniendo en cuenta la duración de los productos. Por último, en relación al trabajo con el dinero, podemos mencionar el proyecto del grupo *Super Mami!*, que se centró en el cálculo de la recaudación de un supermercado

ideal con un número muy reducido de productos, considerando la cantidad de personas que ingresan a un súper por día.

#### 3.2.3.4. Explicar

Bishop (1999) sostiene que explicar es,

“la actividad que eleva la cognición humana por encima del nivel asociado con la mera experiencia del entorno. Explicar centra la atención en las abstracciones y formalizaciones que se derivan de las otras actividades y, mientras que éstas tienen que ver con la respuesta a preguntas relativamente simples como “¿Cuántos?”, “¿Dónde?”, “¿Cuánto?”, “¿Qué?” y “¿Cómo?”, explicar se ocupa con responder a la compleja pregunta “¿Por qué?””(p. 71).

Hay que destacar que ésta es la actividad central del trabajo con proyectos de modelización. Toda la propuesta didáctica de nuestras prácticas se centró en el desarrollo de esta actividad en diferentes contextos: geométrico (intramatemático) y realidad (extramatemático). Revisando las producciones de los diferentes grupos, podemos destacar que todos consiguieron explicar, aunque las explicaciones a las que arribaron fueron diversas y heterogéneas. En este sentido, Bishop (1999) distingue diferentes tipos de explicación, entre los que nos interesa mencionar: explicaciones de relatos (coloquiales), explicaciones simbólicas y explicaciones figurativas.

- Explicaciones de relatos: todos los grupos pudieron expresar coloquialmente el abordaje del problema elegido, y dar cuenta de los avances en el proceso de modelización. En este sentido, todos los grupos evidenciaron un progreso entre la primera socialización del tema elegido y la presentación final de los proyectos. Un ejemplo de este tipo de explicaciones es la conclusión del grupo *LWT* que determinó que, “si se producen 40 tapados de lince se extinguiría la especie” (ver Figura 79).
- Explicaciones simbólicas: fueron pocos los grupos que alcanzaron y explicitaron este tipo de formalización. Nuevamente el trabajo del grupo *LWT* ejemplifica la producción de una explicación simbólica mediante el uso de referencias para las variables (ver Figura 79).

**Nuestros Cálculos**

.Linces (Población de 800)

.Sabiendo que para 1 tp (tapado) se utilizan 20 L (linces) fuimos averiguando aproximadamente así:

.25 tp = 500 L	. Conclusión: si se producen 40 tapados se extinguiría la especie
.30 tp = 600 L	
.40 tp = 800 L	

Figura 79: Captura de una diapositiva de presentación del grupo *LWT*

- Explicaciones figurativas: Bishop (1999) se refiere con explicaciones figurativas al uso de tablas, gráficos, diagramas y matrices. La gran mayoría de los grupos organizó los

datos mediante una tabla. Además, se recurrió al uso de gráficos para representar las regularidades o relaciones entre variables halladas. En este punto, es importante destacar que los gráficos, en su mayoría, fueron gráficos estadísticos, como gráficos de barra y de torta. Algunos alumnos representaron las relaciones entre variables mediante puntos en el plano cartesiano. A continuación, se muestran algunas de estas producciones (ver Figuras 80, 81 y 82)

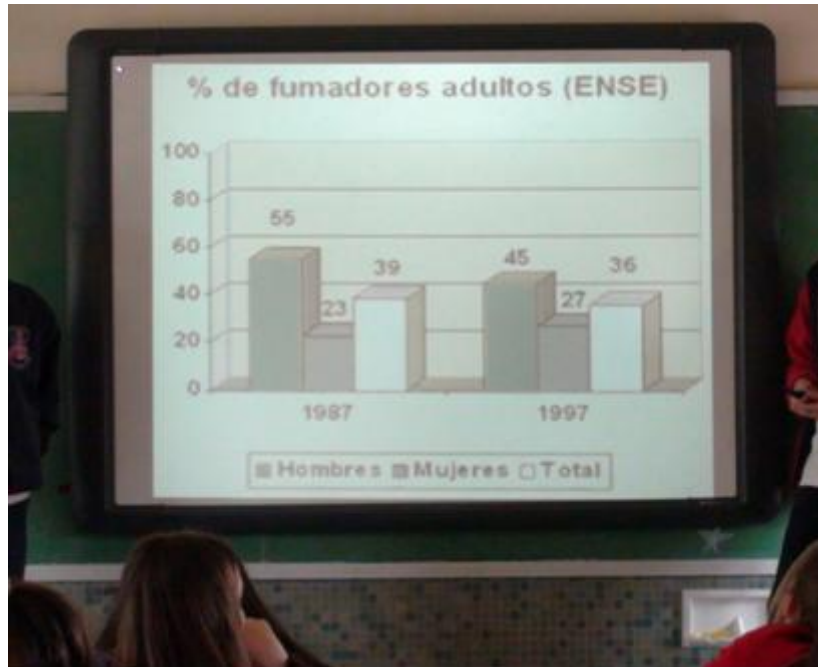


Figura 80: Captura de la presentación final de grupo Año B, donde se exhibe un gráfico de barra que representa el porcentaje de fumadores adultos.



Figura 81: Gráfico realizado en GeoGebra por el grupo Los 4 Mosqueteros, para representar las ganancias del juego Candy Crush, donde el eje de las abscisas representa el tiempo en días y el eje de las ordenadas la ganancia en dólares

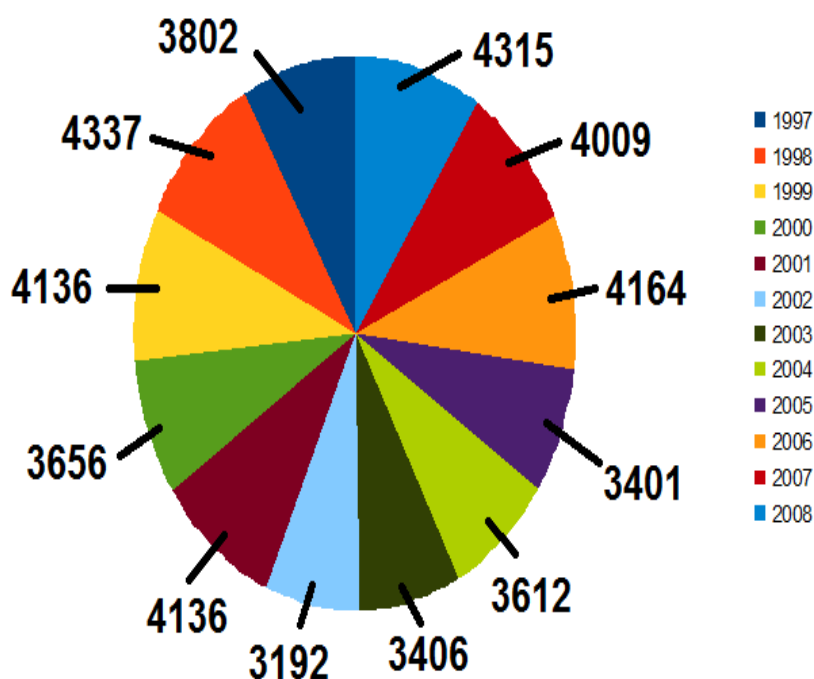


Figura 82: Gráfico realizado por el grupo *One Direction*, para representar los accidentes de tránsito entre 1997 y 2008 en Argentina

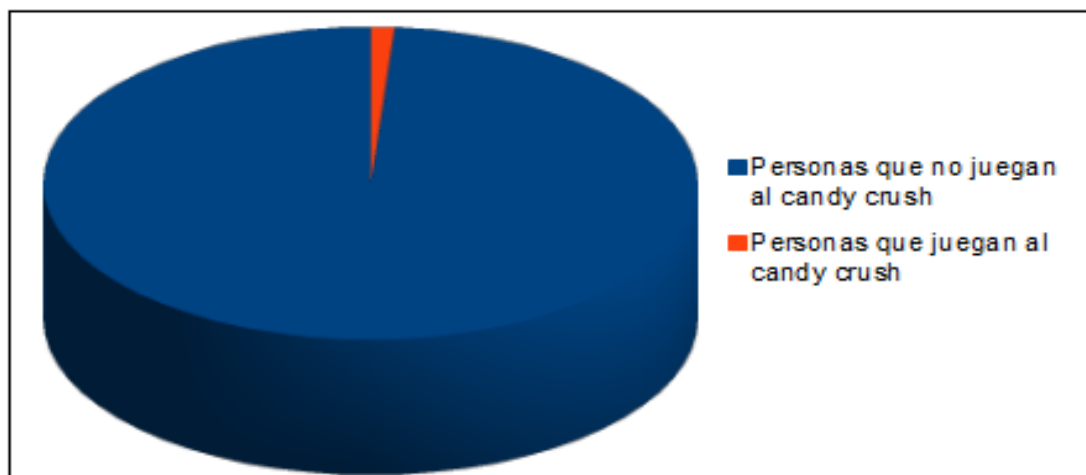
#### 4. Reflexiones finales

Al trabajar con proyectos de modelización basados en situaciones reales a elección, notamos que “el conocimiento disciplinar no favorece la comprensión de forma global y abarcativa de situaciones de la realidad (...)” (Tomaz, 2008, p.14). Fue necesario que, tanto los estudiantes como el equipo docente, investigaran y se interiorizaran con los temas elegidos por los alumnos. En este sentido, Tomaz (2008) señala que,

“La organización del trabajo escolar en los diversos niveles de enseñanza se basa hasta hoy en la construcción de disciplinas, que se estructuran con cierta independencia, y son ellas, en realidad, las que determinan la configuración curricular dominante que es, así, conflictiva con las propuestas interdisciplinarias” (p. 17).

Además, al interior de la matemática, los proyectos de modelización extramatemática proponen un abordaje por *tematización*, que organiza diferentes contenidos disciplinares. Ahora bien, los contenidos disciplinares a los que recurrieron los diferentes grupos para abordar las temáticas elegidas, no fueron necesariamente los contenidos trabajados durante nuestras prácticas. En muchos casos emergió la necesidad de trabajar, por ejemplo, con estadística y porcentaje; contenidos que los alumnos no habían visto con anterioridad. Un caso paradigmático es el trabajo realizado por el grupo *Los 4 Mosqueteros*. Éste se preguntó por el porcentaje mundial de personas que juegan al Candy Crush, entre otros interrogantes vinculados a este juego. Para determinar qué porcentaje representaban los jugadores de Candy Crush frente a la población mundial, desconociendo el contenido porcentaje, los alumnos realizaron divisiones sucesivas. Es decir, partiendo del dato población mundial ( $A$ ) y sabiendo que esta representa el 100%, los alumnos buscaron por divisiones sucesivas un divisor  $q$  tal que,  $\frac{A}{q} = B$ , donde  $B$  es la cantidad de jugadores de Candy Crush. De esta forma

obtuvieron que el porcentaje mundial de jugadores de Candy Crush es  $\frac{100\%}{q} = 1\%$  (ver Figura 83).



**Figura 83: Gráfico de torta para representar el porcentaje mundial de personas que juegan al Candy Crush, realizado por los alumnos del grupo *Los 4 Mosqueteros***

Con la distancia que ofrece la experiencia vivida y haciendo una mirada retrospectiva del trabajo realizado, nos damos cuenta que nuestras prácticas fueron poco convencionales, pues en todo momento estuvieron alejadas del formato tradicional. Además, la propuesta didáctica que llevamos adelante recorrió algunos de los diferentes ambientes de aprendizajes propuesto por Skovsmose (2000). Se formularon escenarios de investigación intra y extramatemática, trabajando también desde el paradigma del ejercicio con referencia a la matemática.

Como se explicó anteriormente, al trabajar con proyectos de modelización extramatemática, nos angustió tener la sensación que no se estaba haciendo matemática. Luego de haber estudiado y reflexionado en torno a esta problemática, consideramos que una de las posibles causas de esta sensación sea el tipo de formación disciplinar que recibimos. Una formación basada en una concepción bancaria de la educación (Freire, 2008) impregnada por la formalización de las ideas matemáticas. En este sentido, estábamos tan preocupadas porque los alumnos llegaran a formalizar el problema que no pudimos percibir la matematización que se estaba poniendo en juego en los diferentes proyectos.

Por otro lado y a partir de la experiencia realizada, consideramos que el abordaje por tematización que implica el trabajo con proyectos de modelización basados en situaciones de la realidad, pone en juego contenidos provenientes de diferentes campos disciplinares. Si bien la experiencia de las prácticas resultó enriquecedora, creemos que para recrear el trabajo en la interdisciplinariedad como futuras profesoras, sería conveniente trabajar colaborativa, cooperativa y coordinadamente con un docente de otra área que pueda contribuir con su perspectiva disciplinar.

Pudimos observar que no todos los grupos consiguieron matematizar el tema elegido con igual profundidad. Tal como lo indica Tomaz (2008):

“(…) no siempre se consigue crear efectivamente situaciones de aprendizaje que lleven a los alumnos a percibir y sistematizar nuevos conceptos matemáticos a partir de la discusión de un tema, desarrollo de un proyecto o resolución de una situación problema.” Esto “puede generar

la sensación de vaciamiento de contenido o incluso dificultar la movilización de los diferentes conocimientos disciplinares para la actividad propuesta” (p.25).

Sin embargo, podemos afirmar que las ideas desarrolladas en la sección 3 nos ayudaron a dimensionar toda la matemática presente en los proyectos de modelización extramatemática.



## 5. Bibliografía

- Bassanezi, R. (2002) *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto.
- Bishop, A. (1999) *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Traducción G. Sánchez Berberán. Buenos Aires: Paidós. Traducción de Mathematical enculturation.
- Bressan, A.(2005) Los principios de la educación matemática realista. En Sadovsky, P. (Ed.). *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. Buenos Aires: Libros del Zorzal. p. 69-98.
- Corini, A. & Giannone, M. (2012) *Proceso de Modelización Matemática*. Informe final de prácticas docentes. Facultad de Matemática, Astronomía y Física – Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba.
- Diseños Curriculares de Educación Secundaria – Tomos. Gobierno de la Provincia de Córdoba. Ministerio de Educación. Secretaría de Estado de Educación. Subsecretaría de Estado de Promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Disponible en:<<http://www.igualdadycalidadcoba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/Tomos2v.html>>. Acceso en: nov. 2013
- Freire, P. (1996) *La educación como práctica de la libertad*. D. F. México: 44ª. Edición. XXI - siglo veintiuno editores.
- Freire, P. (2008) *Pedagogía del oprimido*. Bs. As. Argentina: 3ra edición. XXI – siglo veintiuno editores.
- Freudental, H. (1994) *Revisiting mathematics education. China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Freudenthal, H. Problemas principales de la educación matemática. *Revista Conceptos*, Vol., N°, p. 6-15.
- Phillips, E. (1991) Investigation 5. Constant, linear, quadratic, and cubic growth (cube coloring). En Frances, R. (Ed.). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Addenda Series, grades 5-8. Patterns and functions*. Estados Unidos, Virginia: National council of teachers of mathematics. p. 17-20.
- Schoenfeld, A. (2000) *Aprender a pesar matemáticamente: resolución de problemas, metacognición y comprensión en matemática*. Traducción H. Alagia y D. Fregona. Córdoba, Argentina. Traducción de: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sens making in mathematics.
- Skovsmose, O. (1999) *Hacia un filosofía de la educación matemática crítica*. Traducción P. Valero. Bogota: Una empresa docente - Universidad de los Andes. Traducción de: Towards a philosophy of critical mathematics education.
- Skovsmose, O. (2000) Escenarios de investigación. *Revista EMA*, Vol. 6, N° 1, p. 3-26.

Tomaz, V. & David, M. (2008) *Interdisciplinaridade e aprendizagem da matemática em sala de aula*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica editorial.



## 6. Anexos

### 6.1. Anexo 1: Material de estudio

## RELACIONES ENTRE VARIABLES<sup>35</sup>

### ¿Qué es una variable?

Una **variable** es una magnitud (cualidad medible de alguna cosa) cuyo valor cambia en la medida que la situación donde se presenta esta variable también cambie.

### Recordemos lo trabajado con el problema del cuadrado que cumple años:

En un primer momento exploramos un archivo de GeoGebra que mostraba la secuencia de cuadrados de edad de uno a quince años mediante la herramienta deslizador (Ilustración 1).

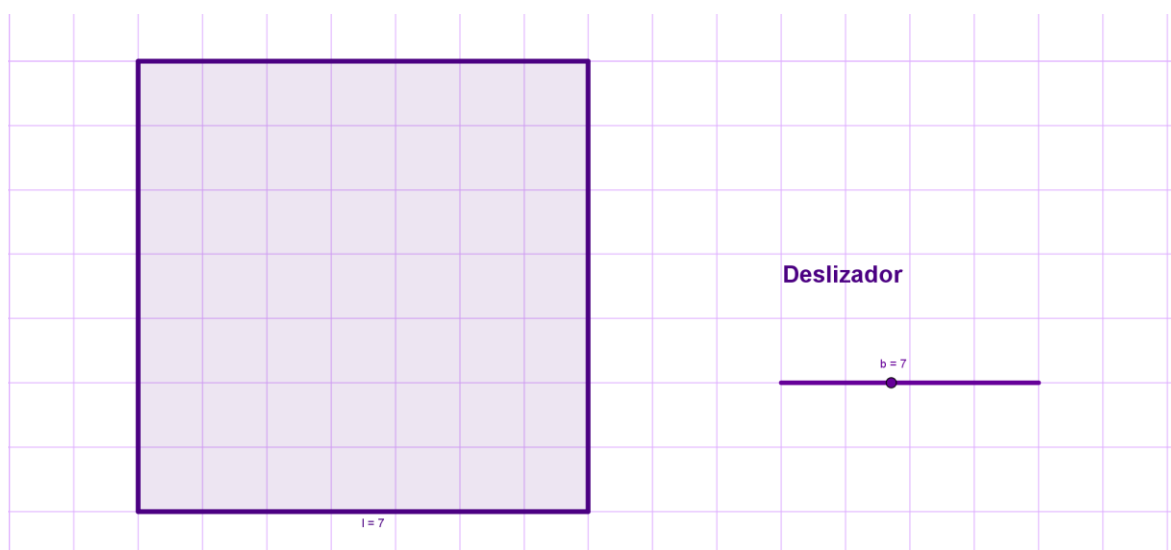


Ilustración 1

Analizamos lo ocurría con la longitud del lado, el perímetro, el área y la cantidad de cuadrados unidad con un lado, dos lados o ningún lado pintado a medida que el cuadrado cumplía años. Para ello, recolectamos estos datos para los cuadrados de 2, 3, 4, 5 y 7 años y los organizamos en una tabla cuidando que los encabezados de la misma fueran claros y que tuvieran entre paréntesis la unidad de medida correspondiente a cada magnitud (Ilustración 2).

<sup>35</sup> Este material de estudio contiene fragmentos de texto cuya autoría pertenece a la profesora tutora.

Tabla Actividad 1

	A	B	C	D	E	F	G
1	Edad del cuadrado (años)	Longitud del lado (cm)	Área (cm <sup>2</sup> )	Perímetro (cm)	Cuadrados unidad de 1 lado pintado	Cuadrados unidad de 2 lados pintados	Cuadrados unidad con ningún lado pintado
2	2	2	4	8	0	4	0
3	3	3	9	12	4	4	1
4	4	4	16	16	8	4	4
5	5	5	25	20	12	4	9
6	7	7	49	28	20	4	25

Ilustración 2

Notamos rápidamente que la longitud del lado, el perímetro, el área y la cantidad de cuadrados unidad con uno, dos o ningún lado pintado eran variables y que estas cambiaban a medida que la edad del cuadrado variaba.

Generalmente, las variables no tienen sentido si se analizan aisladas, sino en relación con otras variables. Por ejemplo, difícilmente hubiéramos podido analizar el área de los cuadrados de la secuencia si no teníamos en cuenta la forma en que variaba la longitud del lado de dichas figuras. Las dos variables de este ejemplo son la *longitud del lado* del cuadrado y el *área* del mismo y una de ellas varía según va variando la otra.

## Tipos de variables

En cualquier fenómeno de cambio, existen *tres tipos de variables*:

- **Variable independiente.**
- **Variable dependiente.**
- **Variable controlada o constante.**

### Variable Independiente

La **variable independiente** es la variable que cuya variación es manejada por quien estudia el fenómeno, cambiándole valores para ver qué ocurre.

### Variable dependiente

La **variable dependiente** es la que cambia su valor dependiendo del cambio que experimente la variable independiente.

## Variable controlada

La **variable controlada** es la que se deja constante para poder ver qué sucede con las otras dos.

Por ejemplo, en el problema del cuadrado que cumple años las variables eran:

- Variable independiente: La edad del cuadrado.
- Variables dependientes: Longitud del lado del cuadrado, perímetro del cuadrado, área del cuadrado, cantidad de cuadrados unidad de un lado pintado, cantidad de cuadrados unidad de dos lados pintados, cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado.
- Variable controlada: el número de lados del polígono regular (4).

## Búsqueda de regularidades

Una **regularidad** es una regla o ley que siempre se cumple en una determinada situación y sirve para comprender, asegurar y predecir lo que sucederá en dicho escenario.

La matemática se encarga de revelar regularidades ocultas.

En relación a la noción de regularidad no deben perder de vista lo trabajado en clase (Ilustración 3).

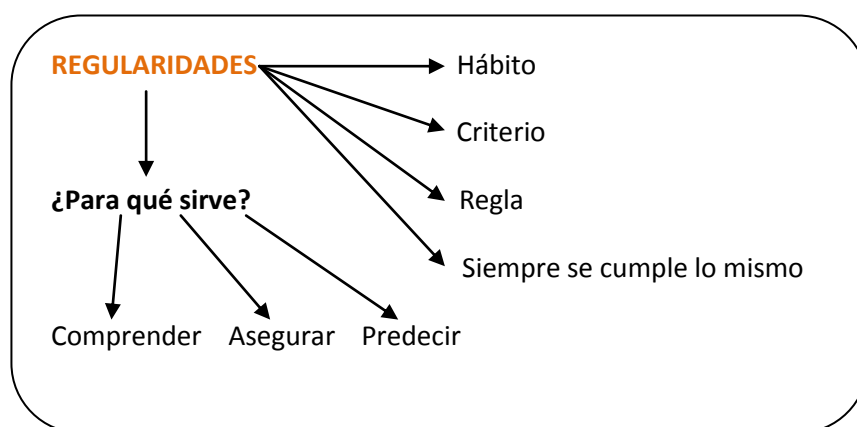


Ilustración 3

Retomando el ejemplo del cuadrado que cumple años, una vez construida la tabla para los cuadrados de 2, 3, 4, 5 y 7 años, nos preguntamos por los datos para el cuadrado de 15 años y luego para el de 55 años. En este punto, nos dimos cuenta que se dificultaba la tarea de medir cuantificando. Es decir, resultaba tedioso por ejemplo contar la cantidad de cuadrados unidad que contenía la figura para medir el área. Por lo tanto, ustedes notaron la necesidad de pensar nuevas estrategias que facilitarían la tarea y de este modo empezaron a buscar regularidades.

Aparecieron regularidades de varios tipos. Algunos alumnos, por ejemplo, notaron que el perímetro aumenta 4 cm de una figura a la siguiente. Si bien esta regularidad es válida, no nos sirve para calcular el perímetro de un cuadrado de edad conocida. Es decir, para calcular el perímetro de un cuadrado de 58 años necesitaría conocer el perímetro del cuadrado de 57 años, para así, sumarle 4 cm.

Otros compañeros observaron que el perímetro siempre es par, pero nuevamente esta regularidad no nos permite predecir el perímetro de un cuadrado de edad conocida.

Por otro lado, encontraron las siguientes regularidades que establecían *relaciones entre las variables* antes identificadas:

- La longitud del lado del cuadrado es igual a la edad del cuadrado<sup>36</sup>.
- El perímetro del cuadrado es cuatro veces la longitud de su lado.
- El área del cuadrado es el cuadrado de la longitud del lado.
- La cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados es siempre cuatro, sin importar la edad que el cuadrado tenga, excepto en el caso  $b=1$ , es decir, el cuadrado de un año.
- La cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado es cuatro veces, la longitud del lado del cuadrado disminuida en dos, excepto los casos  $b=1$  y  $b=2$ .
- La cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado es, la longitud del lado disminuida en dos, al cuadrado.
- Otra forma de encontrar la cantidad de cuadrados unidad sin ningún lado pintado es restándole al área la cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado y la cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados.

En este punto podemos reflexionar que estas regularidades sí nos permiten predecir, la longitud del lado, el perímetro, el área, etc. Para un cuadrado de edad conocida. Por ejemplo, para un cuadrado de 58 años sabemos que:

- La longitud de su lado mide 58 cm.
- Tiene un perímetro de  $4 \times 58 \text{ cm} = 232 \text{ cm}$ .
- Su área mide  $(58 \text{ cm})^2 = 3364 \text{ cm}^2$ .
- La cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados es 4.
- La cantidad de cuadrados unidad con un lado pintado es  $4 \times (58 - 2) = 224$ .
- La cantidad de cuadrados unidad sin ningún lado pintado es  $(58 - 2)^2 = 3136$ .
- Otra forma de predecir la cantidad de cuadrados unidad sin ningún lado pintado es calculando

$$3364 - 224 - 4 = 3136.$$

## Formas de representar las relaciones entre variables encontradas.

Una de las actividades principales en el estudio de una *relación entre variables* es la de representar esta relación de forma que pueda comunicarse a otros, entenderse e identificarse cuándo ciertos cambios están presentes, para poder hacer predicciones.

Vimos varias formas de comunicar las relaciones entre variables encontradas:

- **Tabla.**
- **Lenguaje coloquial.**
- **Lenguaje simbólico.**

<sup>36</sup> **ACLARACIÓN:** observe que esta regularidad establece que puede considerarse como variable independiente a la longitud del lado pues es igual a la edad.

- **Gráficos cartesianos.**

### Tabla

La **tabla** es una de las formas en que se puede representar una relación entre variables, y a su vez es una herramienta de recolección de datos.

Para nosotros, una tabla acomodará los pares de datos obtenidos sobre el valor de la variable independiente y su correspondiente valor de la variable dependiente, de forma que pueda verse el cambio “ordenado” de los valores de la variable independiente. Por ejemplo la tabla de la Ilustración 4 organiza los pares de datos *longitud del lado* (variable independiente) y *perímetro* (variable dependiente).

Longitud del lado (cm)	Perímetro (cm)
2	8
3	12
4	16
5	20
7	28
15	60
55	220

Ilustración 4

Cada par de datos puede leerse (2,8); (3,12); (4,16), etc. es decir, un valor de la variable independiente y su correspondiente valor de la variable dependiente, separados por una coma, y encerrados entre paréntesis. A una pareja de datos como (2,8), ordenados de modo que se distingue un primer (longitud del lado=2 cm) y segundo elemento (perímetro del cuadrado=8cm) se la denomina **par ordenado**.

### Lenguaje coloquial

El **lenguaje coloquial** es otra manera de representar la relación entre variables. Llamamos lenguaje coloquial a aquellas expresiones formadas por palabras del idioma de uso común y que puede transmitirse tanto de forma oral como escrita. Por ejemplo, la expresión “*el perímetro del cuadrado es cuatro veces la longitud de su lado*” expresa la relación entre la *longitud del lado* del cuadrado y el *perímetro* de esta figura de manera coloquial.

### Lenguaje simbólico

Vimos además que en matemática, en muchas ocasiones, se utiliza un lenguaje particular para expresar estas relaciones formado por números, letras y símbolos. A este tipo de expresiones se las denomina **lenguaje simbólico**.

Para poder recurrir a este lenguaje es necesario nombrar a las variables de una manera más “sintética” o “práctica”. Así, por ejemplo, para referirnos al perímetro del cuadrado acordamos usar la letra **P** y llamamos con la letra **l** a la longitud del lado del cuadrado. Arribamos así a la expresión  $P = 4l$  para representar la relación hallada entre la *longitud del lado* del cuadrado y el *perímetro* de ésta figura.

### Gráficos cartesianos

Por último, recurrimos al plano cartesiano para representar las relaciones estudiadas mediante gráficos.

El **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto, el cual se denomina **origen del plano cartesiano**. La recta numérica horizontal es llamada **eje de las abscisas o de las equis (x)**, y la recta numérica vertical se denomina **eje de las ordenadas o ejes de las yes (y)** (Ilustración 5).

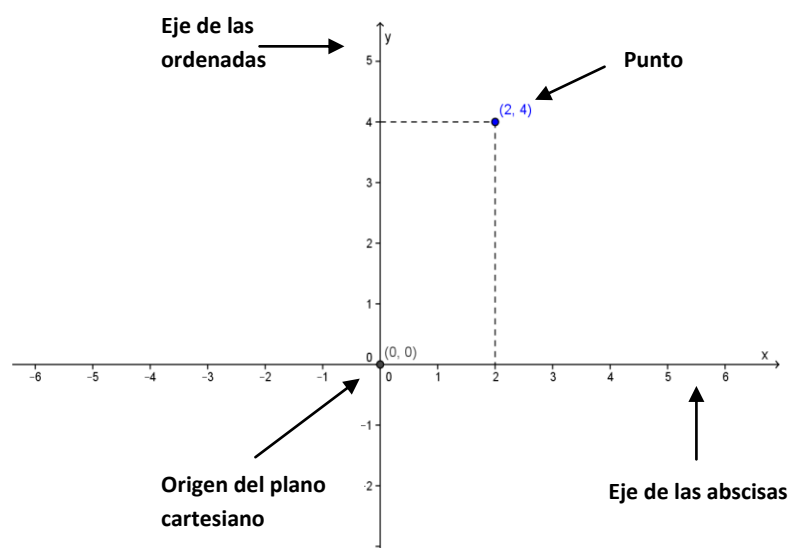


Ilustración 5

El plano cartesiano tiene por finalidad describir la posición de los puntos, es decir, sus coordenadas. Un punto del plano cartesiano puede representarse por un par ordenado cuyo primer elemento es la **coordenada x**, y el segundo la **coordenada y** (ver punto (2,4) en Ilustración 5).

El **gráfico cartesiano** representa una relación entre variables mediante un conjunto de puntos cuyas coordenadas son las parejas de datos inseparables de ésta relación, dibujados en un plano cartesiano.

La ilustración 6 muestra la representación de los pares de datos hallados correspondientes a la relación entre la *longitud del lado* del cuadrado y su *perímetro* (ver Ilustración 4).

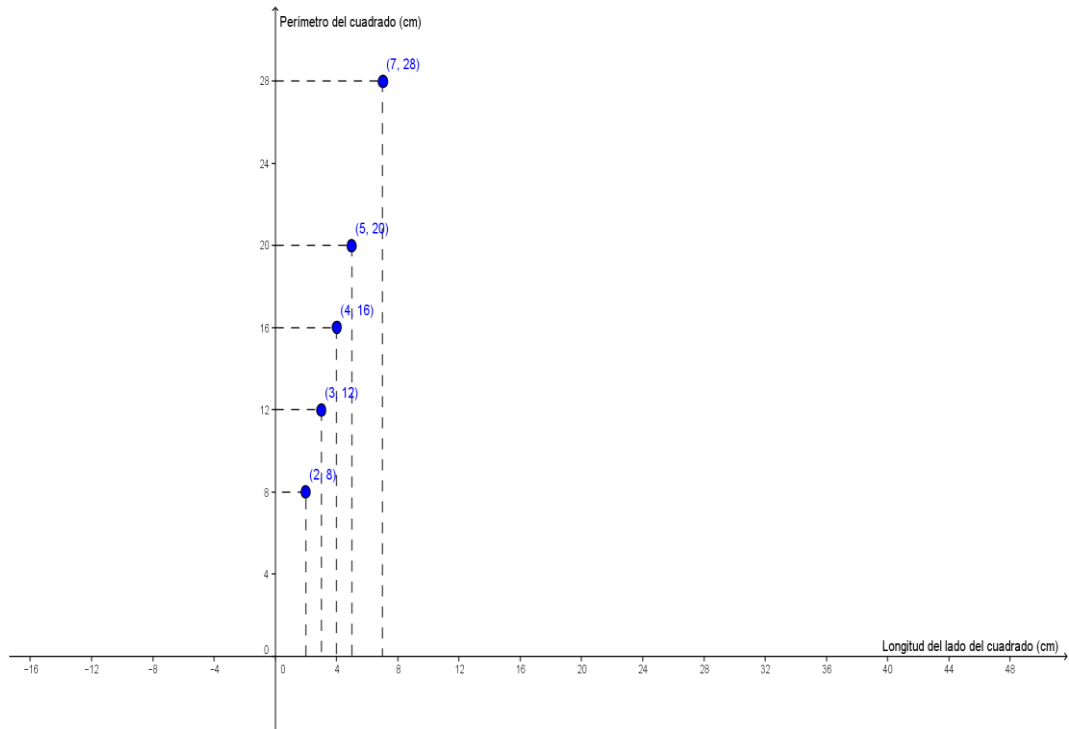


Ilustración 6

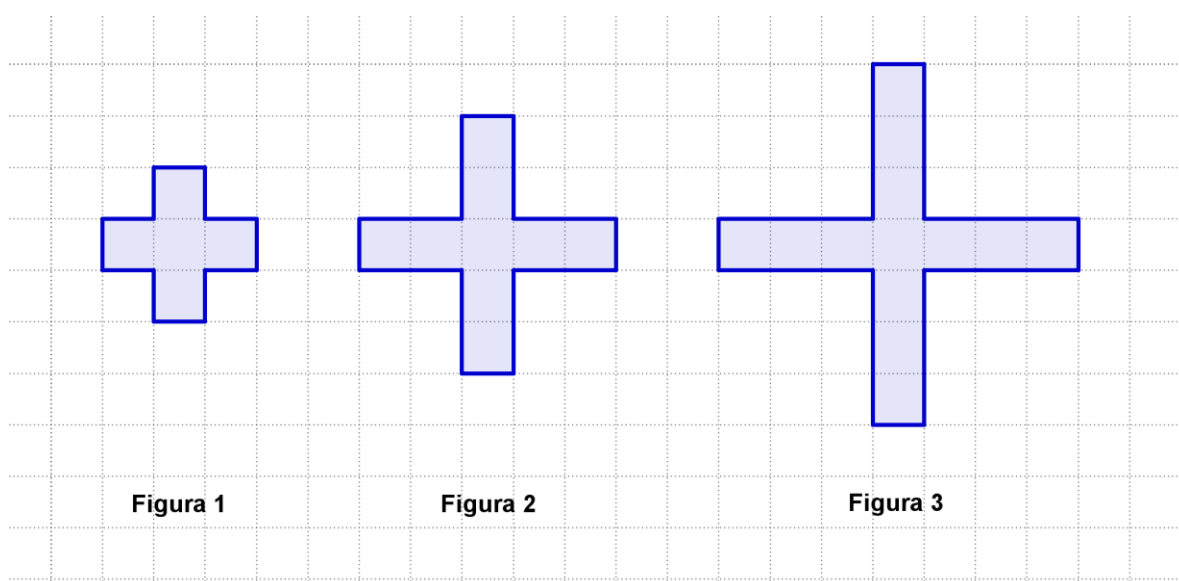
6.2. Anexo 2: Ejercitación para Trabajo Práctico Evaluable y soluciones**Ejercitación para Trabajo Práctico Evaluable**

Los temas que se abordaran en el trabajo práctico evaluable son:

- **Recolección de datos.**
- **Uso de tabla.**
- **Búsqueda de regularidades.**
- **Identificación de variables.**
- **Lenguaje coloquial y simbólico.**

**Actividad 1: Cruz con contorno pintado.**

Observe detenidamente la siguiente secuencia de figuras:



**Imagen 1**

1. Grafique en un archivo de GeoGebra las figuras 4 y 5 de esta secuencia.
2. Conteste las siguientes preguntas:
  - a. ¿Qué características tienen en común estas figuras?
  - b. Identifique variables que se presentan en esta secuencia de figuras.

Note que las figuras tienen el contorno pintado.

Tenga en cuenta que la cuadrícula de la imagen 1 es de 1cmx1cm.

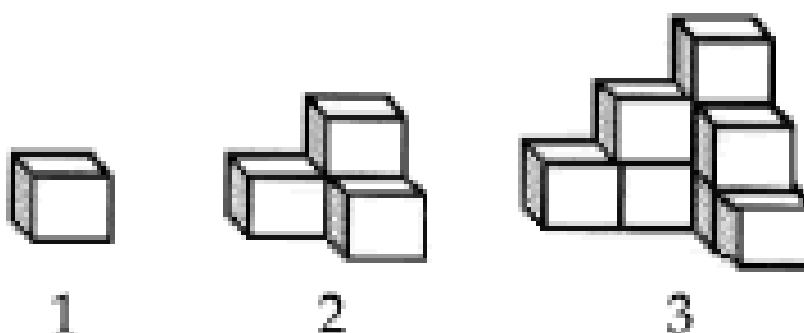
3. Organice los siguientes datos en una tabla para las figuras 1, 2, 3, 4 y 5 (Para esta actividad tenga que los encabezados deben ser claros y consignar las unidades de medida entre paréntesis):
  - a. El número de figura.
  - b. El área de la figura.
  - c. El perímetro de la figura.



- d. La cantidad de cuadrados unidad con 3 lados pintados que hay en la figura.
  - e. La cantidad de cuadrados unidad con 2 lados pintados que hay en la figura.
  - f. La cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado que hay en la figura.
4. Ahora complete la tabla para la figura 10.
  5. Ahora complete la tabla para la figura 53.
  6. Explique el procedimiento utilizado para completar la tabla para la figura 53 (utilice lenguaje simbólico y/o coloquial).
  7. Distinga variables dependientes e independientes.

### Actividad 2: Cuerpos

Observe detenidamente los siguientes cuerpos:



1. Use el applet *Diseño de cuerpos geométricos en papel isométrico* que se encuentra en la plataforma para graficar el cuerpo 4, el cuerpo 5 y el cuerpo 7. (<http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125>)
2. Construya una tabla que consigne los volúmenes que corresponden, respectivamente, a los cuerpos 1, 2, 3, 4, 5 y 7. Tenga en cuenta que el cuerpo 1 mide  $1 \text{ cm}^3$ .

### Actividad 3: Secuencias de figuras

Observe detenidamente las siguientes secuencias de figuras:

a.



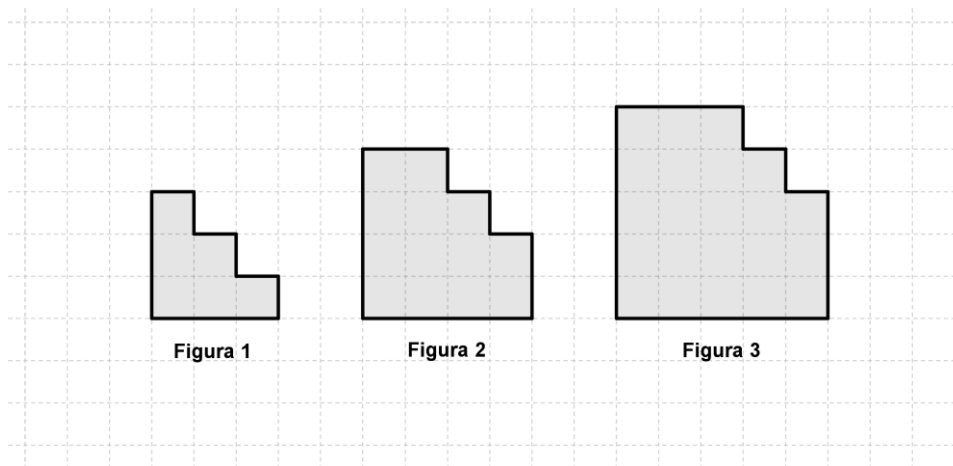
Grafique la figura 6 de esta secuencia.

b.



Grafique la figura 5 de esta secuencia.

c.

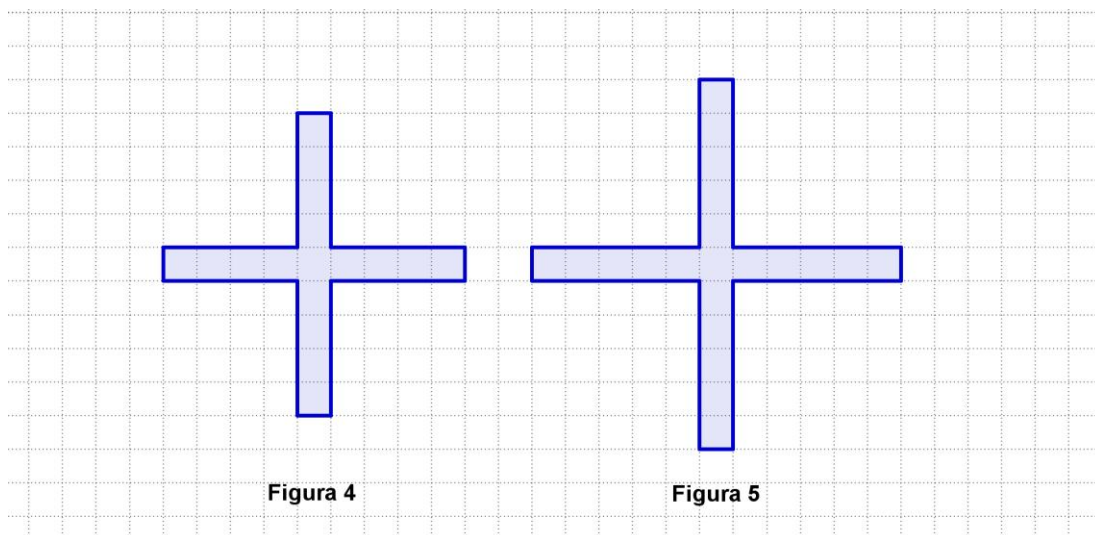


Grafique la figura 4 y 5 de esta secuencia.

## Ejercitación para Trabajo Práctico Evaluable (Soluciones)

### Actividad 1: Cruz con contorno pintado

1.



2.

- a. Todas son cruces de cuatro brazos iguales.
- b. El área, el perímetro, la cantidad de cuadrados unidad con dos lado pintado, la cantidad de cuadrados unidad con tres lados pintados y la cantidad de cuadrados unidad sin ningún lado pintado.

3., 4. Y 5. La siguiente tabla corresponde a los puntos 3, 4 y 5 de la actividad 1.

Número de Figura	Área (cm <sup>2</sup> )	Perímetro (cm)	Cantidad de cuadrados unidad con 3 lados pintados	Cantidad de cuadrados unidad con 2 lados pintados	Cantidad de cuadrados unidad sin ningún lado pintado
1	5	4	4	0	1
2	9	8	4	4	1
3	13	12	4	8	1
4	17	16	4	12	1
5	26	20	4	16	1
10	41	40	4	36	1
53	213	212	4	208	1

6.

Lenguaje coloquial:

- Para calcular el **área** de la cruz con contorno pintado, tengo que multiplicar el número de la figura por 4 y al resultado sumarle 1.

- Para calcular el **perímetro** de la cruz con contorno pintado, tengo que multiplicar el número de la figura por 8 y al resultado sumarle 4.
- Siempre la **cantidad de cuadrados unidad con tres lados pintados** es igual a 4.
- Para calcular la **cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados**, tengo que restarle 1 al número de la figura, y al resultado multiplicarlo por 4.
- Siempre la **cantidad de cuadrados unidad con ningún lado pintado** es igual a 1.

**ACLARACIÓN:** Otra forma de calcular la cantidad de cuadrados unidad con dos lados pintados es: al área restarle los cuadrados unidad con tres lados pintados y con ningún lado pintado o, lo que es lo mismo, al área restarle la suma de la cantidad de cuadrados unidad con tres lados pintados y ningún lado pintado.

**Lenguaje simbólico:**

Denominamos con las siguientes letras a las variables:

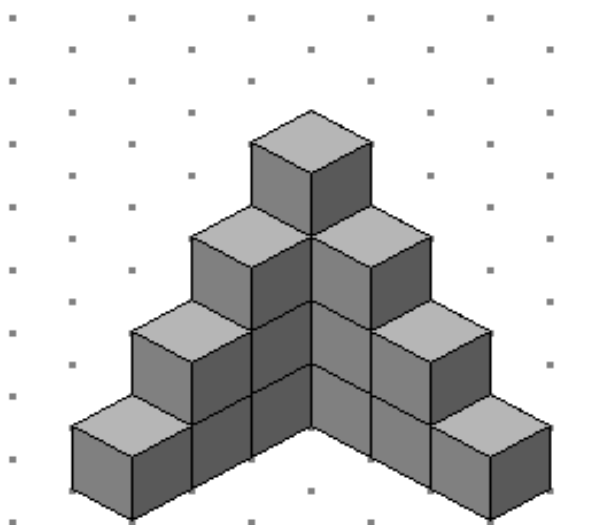
- **n** = Número de la figura.
- **A** = Área.
- **P** = Perímetro.
- **C<sub>3</sub>** = Cuadrados unidad con tres lados pintados.
- **C<sub>2</sub>** = Cuadrados unidad con dos lados pintados.
- **C<sub>0</sub>** = Cuadrados unidad con ningún lado pintado.

Expresiones simbólicas para las regularidades encontradas:

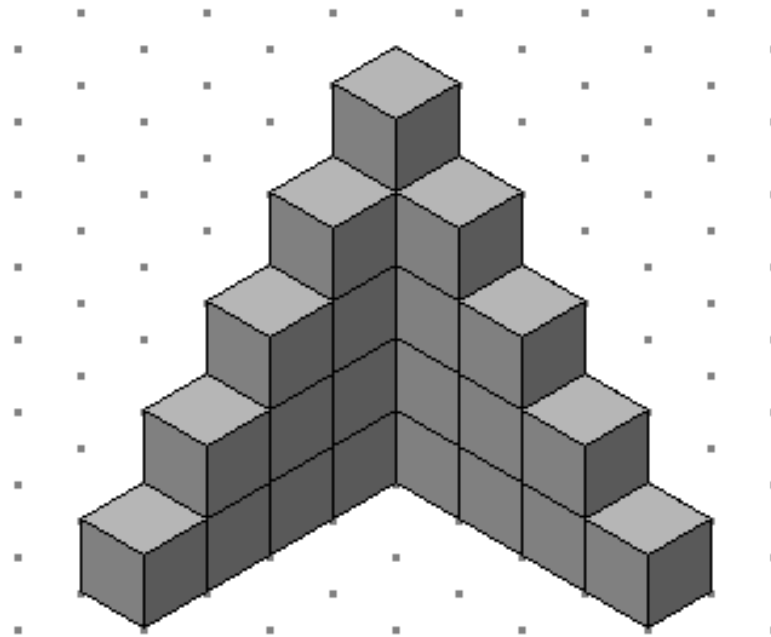
- $A = (4 \times n) + 1$
- $P = (8 \times n) + 4$
- $C_3 = 4$
- $C_2 = (n - 1) \times 4$     ó     $C_2 = A - C_3 - C_0$     ó     $C_2 = A - (C_3 + C_0)$
- $C_0 = 1$

**Actividad 2: Cuerpos**

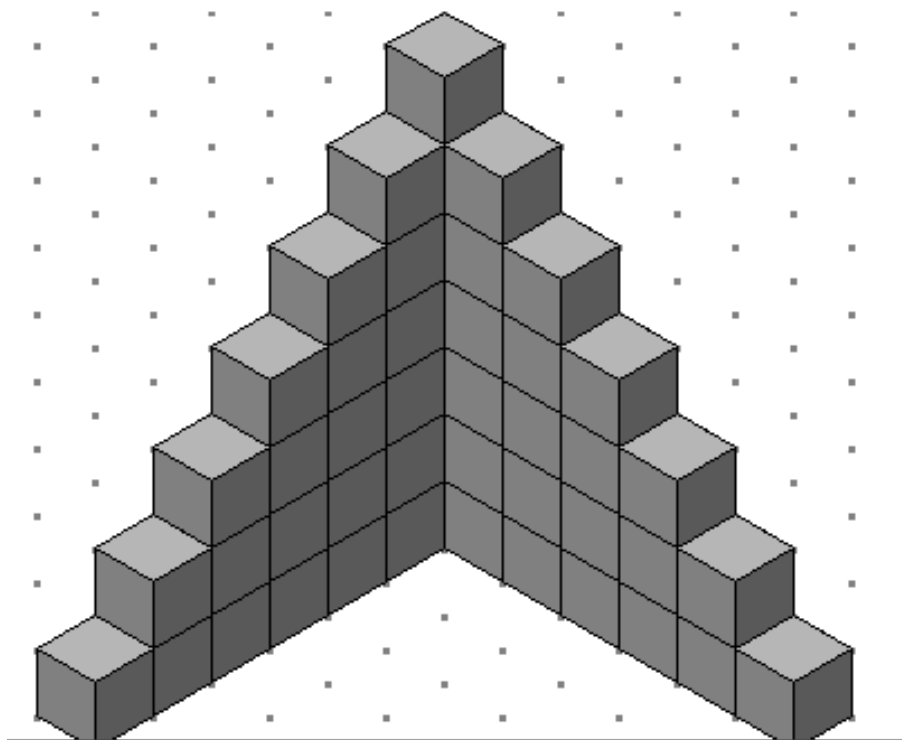
**1. Cuerpo 4:**



**Cuerpo 5:**



**Cuerpo 7:**

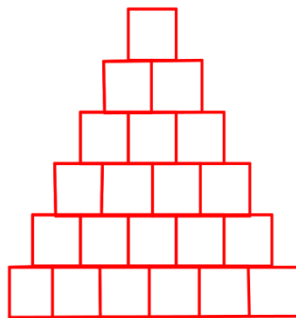


2. Tabla:

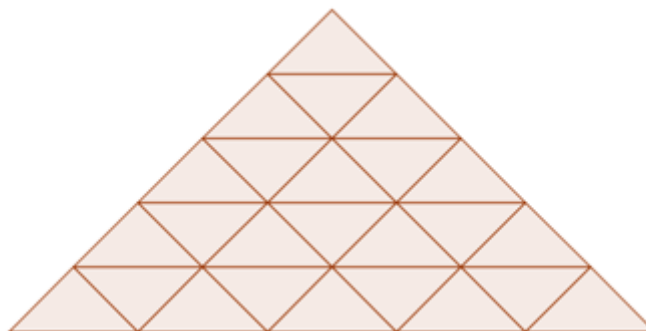
Cuerpo	Volumen (cm <sup>3</sup> )
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
7	49

**Actividad 3: Secuencias de figuras**

a. Figura 6:



b. Figura 5:



c. Figuras 4 y 5:

