

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA**  
**Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales**



Universidad  
Nacional  
de Córdoba



**Tesis Doctoral**

**UNA HERRAMIENTA DE CO-SIMULACIÓN PARA EL  
ESTUDIO DE INESTABILIDADES AEROELÁSTICAS  
NO LINEALES EN AERONAVES CON ALAS UNIDAS**

*Autor:* Martín Eduardo Pérez Segura

*Director:* Sergio Preidikman

Mayo de 2023



# UNA HERRAMIENTA DE CO-SIMULACIÓN PARA EL ESTUDIO DE INESTABILIDADES AEROELÁSTICAS NO LINEALES EN AERONAVES CON ALAS UNIDAS

*Por*

MSC. Ing. Martín Eduardo Pérez Segura  
FCEFYN, UNC; IDIT UNC-CONICET

*Director*

Prof. Dr. Ing. Sergio Preidikman  
FCEFYN, UNC; IDIT UNC-CONICET

*Comisión Asesora*

Prof. Dr. Ing. **Fernando Gabriel Flores**  
FCEFYN, UNC; IDIT UNC-CONICET

Prof. Dr. Ing. **Luis Ramón Ceballos**  
FI, UNRC

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba como requisito parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina  
Mayo de 2023





**ACTA DE EXAMEN**

Libro: E2023 Acta: 00024 Hoja 01/01  
LLAMADO: Llamado del Turno P10-(T209)\_TESIS 22/05/2023  
CATEDRA - MESA: 22-05-23 PEREZ SEGURA M. EDUARDO

(P10-DI002) TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NÚMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGR.	COND.	NOTA	FIRMA
35478113	PEREZ SEGURA, MARTÍN EDUARDO	DNI 35478113	2017		A (Aprobado)	

BREWER, ALEJANDRO - Nigro, Norberto Marcelo - KRAUSE, GUSTAVO JAVIER - STORTI, Mario -  
Observaciones:

Córdoba, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_\_\_-.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: \_\_\_\_\_

1	0	1	0	1
Inscriptos	Ausentes	Examinados	Reprobados (0-3)	Aprobados (4-10)

22/05/2023 11.54.27



*Mis sinceros agradecimientos a todos aquellos que dedicaron tiempo, esfuerzo, y ofrecieron su ayuda y apoyo durante este proceso.*

*A mi familia.*

*A mis compañeros y amigos de la oficina 106.*

*A mi director y comisión asesora.*



EDUARDO ANTONIO PEREZ  
ING. EN CONSTRUCCIONES  
MAT. C.P. N° 1924

*Al ingeniero Eduardo Antonio Pérez, mi padre, quien me enseñó a aprender.*

*A la Universidad Nacional de Córdoba y a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.*





# Una Herramienta de Co-Simulación para el Estudio de Inestabilidades Aeroelásticas No Lineales en Aeronaves con Alas Unidas

## Resumen

En este trabajo se desarrolla una herramienta computacional bajo el paradigma de la co-simulación destinada a resolver el problema multi-físico que se plantea al estudiar las inestabilidades aeroelásticas (principalmente flutter y pandeo aerodinámico) en aeronaves con alas unidas. Una aeronave con configuración de alas unidas se caracteriza por su diseño no convencional cuyo rasgo principal es contar con al menos dos superficies sustentadoras principales: i) un ala delantera con flecha y diedro positivos, y ii) un ala trasera con flecha y diedro negativos. El pandeo aerodinámico es un fenómeno aeroelástico casi exclusivo de las aeronaves con alas unidas y se define como una inestabilidad del equilibrio estructural que se alcanza producto de la combinación de cargas aerodinámicas, cargas elásticas, cargas inerciales y la configuración deformada de la estructura. Cuando el pandeo ocurre, la estructura pierde la capacidad de resistir los esfuerzos externos en la configuración actual y se produce un cambio repentino a una nueva configuración que, en general para este tipo de estructuras, implica el colapso. El flutter se define como una vibración auto-excitada e inestable en la que la estructura extrae energía de la corriente de aire, a través del trabajo de las cargas aerodinámicas, de modo que el movimiento resultante puede sostenerse en el tiempo en lo que habitualmente se denominan oscilaciones de ciclo límite. Por encima de la velocidad crítica (a la que ocurre el flutter) las oscilaciones se amplifican con resultados posiblemente catastróficos.

Desde el punto de vista multi-físico, se desarrollan un modelo estructural, un modelo aerodinámico y un modelo de interacción, que permite combinar los dos anteriores. Para cada modelo, a su vez, se desarrolla un componente de software encapsulado que se integra en un único sistema que controla el intercambio de información. Basado en el método de los elementos finitos, el modelo estructural se formula alrededor un elemento de viga con las hipótesis clásicas de la teoría de Timoshenko que incorporan de forma consistente las no linealidades geométricas de Von Kármán para construir un modelo enriquecido, que permite representar deformaciones moderadas. El modelo aerodinámico tiene sus bases en el método de red de vórtices inestacionario y no lineal. Considera un flujo a elevado número de Reynolds, lo que permite asumir un flujo no viscoso e incompresible (barotrópico), donde se distribuyen singularidades (vórtices). El modelo de interacción es de tipo fuerte ya que, si bien admite el uso de distintos intervalos temporales para el modelo estructural y el aerodinámico, la comunicación entre ambos es bidireccional y fuerza la compatibilidad entre las soluciones en todos los pasos. La integración de las ecuaciones gobernantes resultantes se realiza en forma numérica, simultánea e interactiva en el dominio del tiempo mediante un esquema iterativo basado en el método de Hamming modificado. Para determinar la aparición de inestabilidades aeroelásticas se realizan simulaciones a partir de arranques impulsivos y se evalúa la respuesta. Finalmente, se concluye que la herramienta implementada es capaz de analizar de forma eficiente numerosos casos de estudio referidos a la interacción entre fluido y estructura en sistemas que incluyen aeronaves con alas unidas.

**Palabras Claves:** Aeronaves con configuración de alas unidas, inestabilidades aeroelásticas, pandeo aerodinámico, flutter, aeroelasticidad, co-simulación, herramienta computacional.



# A Co-Simulation Tool to Assess Nonlinear Aeroelastic Instabilities of Joined-Wing Aircrafts

## Abstract

In this work a computational tool for solving the multi-physics problem related to aeroelastic instabilities (namely, flutter and aerodynamic buckling) of joined-wing aircrafts is developed under the co-simulation paradigm. A joined-wing aircraft is a nonconventional design that includes at least two main lifting surfaces: i) a swept front wing with positive dihedral angle; and ii) a swept-forward back wing with negative dihedral angle. The aerodynamic buckling is an aeroelastic phenomenon that almost exclusively affects joined wings aircrafts. It is defined as a structural instability that occurs as a combination of aerodynamic, elastic, and inertial loads acting on a deformed configuration. The aerodynamic buckling of a structure implies the sudden loss of its ability to resist external loads in the current state and produces an abrupt configuration change that in most cases entails the structure collapse. On the other hand, flutter is defined as an unstable self-induced vibration of the structure that persist over time as limit cycle oscillations. At the flutter speed the structure sustainably extracts energy from the free stream due to the work of aerodynamic loads, if the speed increases, the oscillations amplify leading to possibly catastrophic results.

With a multi-physics approach, a structural and an aerodynamical model are developed along with a interaction scheme to combine both. For each model, an encapsulated software component is built and integrated into a main system that performs communication. The structural model is based on the finite element method and consists on a beam element with Timoshenko's hypothesis that consistently includes Von Kármán's geometric nonlinearities, allowing one to represent moderate strains. The aerodynamic model is based on the nonlinear unsteady vortex lattice method and assumes a high Reynolds number, inviscid, and incompressible (barotropic) flow, where singularities (vortices) are distributed. Despite the fact that the interaction scheme allows one to use different time steps for the structural and the aerodynamical simulations, it is classified as strong since communication between models is performed bidirectionally and the solutions are forced to match on every step. The integration of the governing equations is achieved interactive, simultaneous, and numerically in the time domain with a predictor-corrector fourth order scheme, the modified Hamming method. In order to determine aeroelastic instabilities, simulations are performed from impulsive starts and the system response is evaluated. As a conclusion, the developed tool is suitable for efficiently studying multiple case studies that involve fluid-structure interaction in systems with joined wing aircrafts.

**Key words:** Joined-wing aircrafts, aeroelastic instabilities, aerodynamic buckling, flutter, aeroelasticity, co-simulation, computational tool.



# Uma Ferramenta de Co-Simulação para o Estudo de Instabilidades Aeroelásticas Não Lineares em Aeronaves de Asas Unidas

## Resumo

Neste trabalho, uma ferramenta computacional é desenvolvida sob o paradigma de co-simulação visando resolver o problema multifísico que surge ao estudar instabilidades aeroelásticas (principalmente flutter e flambagem aerodinâmica) em aeronaves com asas unidas. Uma aeronave com configuração de asa unida é caracterizada por seu projeto não convencional cuja principal característica é ter pelo menos duas superfícies principais de sustentação: i) uma asa dianteira com enflechamento positivo e diedro e ii) uma asa traseira com enflechamento negativo e diedro. A flambagem aerodinâmica é um fenômeno aeroelástico quase exclusivo de aeronaves com asas unidas e é definida como uma instabilidade do equilíbrio estrutural que é alcançado como resultado da combinação de cargas aerodinâmicas, cargas elásticas, cargas inerciais e a configuração deformada da estrutura. Quando ocorre a flambagem, a estrutura perde a capacidade de resistir aos esforços externos na sua configuração atual e ocorre uma mudança brusca para uma nova configuração que, em geral para este tipo de estrutura, implica em colapso. O flutter é definido como uma vibração auto-excitada e instável na qual a estrutura extrai energia da corrente de ar, por meio do trabalho de cargas aerodinâmicas, de forma que o movimento resultante possa ser sustentado ao longo do tempo no que se costuma chamar de oscilações de ciclo limite. Acima da velocidade crítica (na qual ocorre o flutter) as oscilações são amplificadas com resultados possivelmente catastróficos.

Do ponto de vista multifísico, são desenvolvidos um modelo estrutural, um modelo aerodinâmico e um modelo de interação, que permite combinar os dois anteriores. Para cada modelo, por sua vez, é desenvolvido um componente de software encapsulado que é integrado a um único sistema que controla a troca de informações. Com base no método dos elementos finitos, o modelo estrutural é formulado em torno de um elemento de viga com as hipóteses clássicas da teoria de Timoshenko que incorporam consistentemente as não linearidades geométricas de Von Kármán para construir um modelo enriquecido, que permite representar deformações moderadas. O modelo aerodinâmico é baseado no método de rede de vórtices não estacionário e não linear. Considere um escoamento de alto número de Reynolds, não viscoso e incompressível (barotrópico), onde se distribuem singularidades (vórtices). O modelo de interação é do tipo forte pois, embora admita a utilização de diferentes intervalos de tempo para a simulação estrutural e aerodinâmica, a comunicação entre ambos é bidirecional e obriga a compatibilização entre as soluções em todas as etapas. A integração das equações governantes resultantes é realizada numericamente, simultaneamente e interativamente no domínio do tempo usando um esquema preditor-corretor de quarta ordem, o método de Hamming modificado. Para determinar o aparecimento de instabilidades aeroelásticas, são realizadas simulações a partir de partidas impulsivas e é avaliada a resposta do sistema. Por fim, conclui-se que a ferramenta implementada é capaz de analisar com eficiência inúmeros estudos de caso relacionados à interação entre fluido e estrutura em sistemas que incluem aeronaves com asas unidas.

**Palavras-chave:** Aeronave com configuração de asa unida, instabilidades aeroelásticas, flambagem aerodinâmica, flutter, aeroelasticidade, co-simulação, ferramenta computacional.



# Índice General

CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN.....	1
I. 1 Contexto y motivación.....	1
I. 2 Antecedentes y revisión bibliográfica.....	7
I. 3 Alcance, objetivos y contribuciones.....	15
I. 3. 1 Alcance.....	15
I. 3. 2 Objetivos.....	16
I. 3. 3 Contribuciones.....	17
I. 4 Contenidos de esta tesis.....	18
CAPÍTULO II: MODELO ESTRUCTURAL-DINÁMICO.....	19
II. 1 Bases Cinemáticas.....	19
II. 2 Medidas de Deformación.....	23
II. 3 Aproximaciones Cinemáticas.....	25
II. 3. 2 Aproximación de las rotaciones.....	26
II. 3. 3 Aproximación de las deformaciones.....	28
II. 3. 4 Aprox. de las deform. del eje elástico y las no linealidades de Von Kármán..	29
II. 3. 5 Deformación por alabeo.....	31
II. 3. 6 El tensor de deformaciones de Green-Lagrange.....	33
II. 4 Medidas de Tensión.....	34
II. 5 Relaciones Constitutivas.....	36
II. 6 Medidas Energéticas.....	38
II. 6. 1 Energía cinética.....	39
II. 6. 2 Energía interna de deformación.....	40
II. 6. 3 Trabajo de fuerzas externas.....	41
II. 7 Ecuaciones de Movimiento.....	46
II. 7. 1 Variaciones de variables cinemáticas.....	47
II. 7. 2 Variaciones de las medidas energéticas.....	47
II. 7. 3 Forma diferencial de las ecuaciones de movimiento.....	51

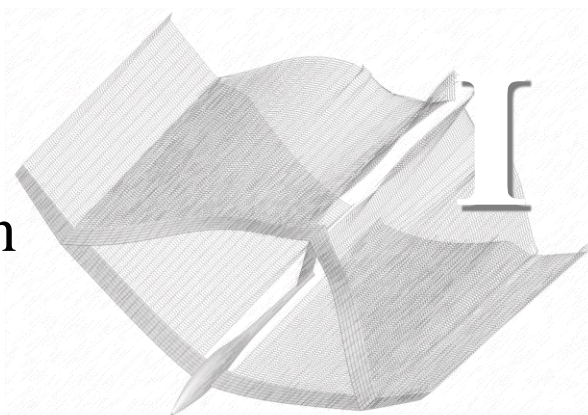
APÉNDICES DEL CAPÍTULO II.....	54
CAPÍTULO III: APROXIMACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS DEL MODELO ESTRUCTURAL-DINÁMICO .....	75
III. 1    Forma débil de las ecuaciones de movimiento .....	76
III. 2    Aproximación de funciones con el método de Galerkin .....	79
III. 3    El punto de vista del elemento .....	82
III. 3. 1    Discretización del dominio .....	83
III. 3. 2    Variables nodales: grados de libertad del elemento .....	85
III. 3. 3    Funciones de forma del elemento .....	86
III. 3. 4    Interpolación vinculada en el dominio del elemento .....	87
III. 4    Representación matricial de las ecuaciones de movimiento sobre el elemento ....	90
APÉNDICES DEL CAPÍTULO III.....	96
CAPÍTULO IV: MODELO AERODINÁMICO .....	113
IV. 1    Ecuaciones Básicas .....	113
IV. 1. 2    El campo de vorticidad .....	115
IV. 1. 3    Cinemática del flujo.....	116
IV. 2    Configuración del Modelo .....	123
IV. 3    Formulación Matemática del Modelo .....	125
IV. 3. 1    Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Contorno.....	126
IV. 3. 2    Discretización .....	127
IV. 3. 3    Solución numérica del modelo .....	131
IV. 3. 4    Campo de presiones y cargas aerodinámicas.....	135
APÉNDICES DEL CAPÍTULO IV .....	139
CAPÍTULO V: MODELO DE INTERACCIÓN Y ASPECTOS DE IMPLEMENTACIÓN.....	147
V. 1    Relación entre modelos.....	147
V. 2    Transferencia de información entre modelos .....	148
V. 2. 1    Transferencia de desplazamientos a las grillas aerodinámicas .....	149
V. 2. 2    Transferencia de cargas aerodinámicas a las mallas estructurales .....	151
V. 2. 3    Conservación en los esquemas de transferencia .....	152
V. 3    Esquema de co-simulación del sistema combinado .....	153
V. 4    Particularidades de la implementación.....	157
V. 4. 1    Versión incremental de la ecuación de movimiento .....	157
V. 4. 2    Reducción de orden del modelo estructural .....	158
V. 4. 3    Determinación del paso de tiempo de la simulación.....	159
V. 5    Estudio de fenómenos aeroelásticos.....	161
V. 5. 1    Análisis para la predicción del pando aerodinámico.....	161



V. 5. 2	Análisis para la predicción de flutter .....	163
APÉNDICES DEL CAPÍTULO V .....		164
CAPÍTULO VI: APLICACIONES Y RESULTADOS .....		167
VI. 1	Verificación del modelo estructural .....	167
VI. 1. 1	Viga “L” .....	168
VI. 1. 2	Viga “JWA” .....	172
VI. 2	Verificación y validación de la predicción de flutter .....	176
VI. 2. 1	Ala simple SW-UAV 1 .....	176
VI. 2. 2	Placa cantiléver CPW .....	182
VI. 3	Verificación de la predicción de pandeo aerodinámico .....	187
VI. 3. 1	Modelo de Alas Unidas “PrP40” .....	187
VI. 3. 2	Modelo de Alas Unidas “JW70” .....	192
VI. 4	Casos de estudio de interés .....	197
VI. 4. 1	Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1” .....	197
VI. 4. 2	Modelo de Alas Unidas “Glider JWA” .....	204
APÉNDICES DEL CAPÍTULO VI .....		211
CAPÍTULO VII: COMENTARIOS FINALES .....		219
VII. 1	Síntesis de desarrollos .....	219
VII. 2	Conclusiones .....	221
VII. 3	Trabajos futuros .....	222
VII. 4	Publicaciones realizadas a partir de este trabajo .....	223
BIBLIOGRAFÍA .....		227



# Capítulo I: Introducción



En su patente publicada el 9 de marzo de 1976 J. Wolkovitch escribe: “El objetivo más general de la presente invención es proveer una aeronave (flexible) de tipo canard que sea fuerte y robusta, pero aun así liviana en peso” [1]. Este documento representó la introducción “formal” de las aeronaves con alas unidas (JWA, por sus siglas en inglés: *Joined-Wing Aircraft*) en el campo de la ingeniería aeroespacial. Si bien, el objetivo de una aeronave flexible, que sea fuerte y robusta, pero a la vez liviana puede parecer ambicioso, ha sido una de las metas perseguida por los diseñadores de aviones durante décadas. En la actualidad, el desarrollo de herramientas de análisis y simulación computacional y su posterior aplicación en la evaluación de diseños no convencionales ha permitido refinar estos diseños y avanzar en el proceso de convertirlos en aplicaciones viables. El presente trabajo de tesis se basa en el desarrollo de una herramienta computacional para el estudio de las JWAs y los fenómenos aeroelásticos que éstas tienen asociados.

Este primer capítulo introductorio describe el contexto que da lugar a la motivación para el desarrollo del presente trabajo de tesis. Luego se describen los antecedentes referidos a los temas centrales a tratar, recorriendo las principales referencias bibliográficas que los abordan para caracterizar el estado del arte de cada uno e identificar los intersticios de investigación en los que el presente desarrollo se ubica. Seguidamente, se detalla el alcance, los objetivos y las contribuciones que fijan los límites generales del trabajo. Por último, el capítulo concluye con un detalle sobre la organización de esta tesis y recomendaciones generales para su lectura.

## I. 1 Contexto y motivación

Actualmente, la industria aeroespacial se encuentra en la búsqueda de nuevos diseños que permitan sostener en el tiempo la tasa de desarrollo lograda en las últimas décadas. La creciente demanda de aviones más livianos, más eficientes y más amigables con el medio ambiente, está llevando a las configuraciones convencionales hasta sus límites. Estas exigencias atraviesan de forma horizontal a la industria dado que se extienden al desarrollo de prácticamente todo tipo de aeronaves, por ejemplo: vehículos aéreos no tripulados (UAV, por sus siglas en inglés: *Unmanned Aerial Vehicle*) que van desde micro UAV biomiméticos hasta grandes drones de combate, incluyendo aeronaves de vigilancia; aeronaves civiles, desde ultralivianos y aviones monoplaza hasta grandes aviones de pasajeros y de carga; y aeronaves militares tanto tácticas como estratégicas. En este contexto, el diseño patentado por J. Wolkovitch en 1976 y las variantes que de éste se desarrollaron representan una base prometedora para dar soluciones, al menos parciales, a los nuevos problemas planteados al desarrollo de aeronaves. Sin embargo, estas configuraciones deben ser exhaustivamente puestas a prueba para reivindicar sus potencialidades, identificar sus puntos débiles y, eventualmente, reforzarlos. En esta tarea, las

herramientas de simulación computacional cumplen un rol preponderante, siempre y cuando sean capaces de brindar información precisa, consistente, y en plazos de tiempo razonables.

## Las aeronaves con configuración de alas unidas

Una aeronave con configuración de alas unidas se caracteriza por su diseño no convencional cuyo rasgo principal es contar con al menos dos superficies sustentadoras principales: i) un ala delantera con flecha y diedro positivos, y ii) un ala trasera con flecha y diedro negativos. El ala delantera suele unirse a la parte frontal o central del fuselaje, pudiendo adoptar las configuraciones de ala alta, baja o media. Por su parte, el ala trasera se une a la parte posterior del fuselaje, de forma directa o a través del empenaje vertical. En general, el ala trasera se encuentra por encima del ala delantera, pero existen configuraciones que invierten esta disposición y otras en las que ambas se encuentran en el mismo plano. Las superficies se unen en un punto común, no obstante, existen alternativas para la unión que pueden incluir montantes, alas verticales o carenados, entre otros. Para introducir algunos ejemplos, en la Figura I-1 se muestran conceptos y modelos de este tipo de aeronaves que representan algunas de las distintas variaciones surgidas a lo largo de la historia. Asimismo, en la Figura I-2 se presentan ciertas alternativas evaluadas para el tipo de unión entre el ala delantera y el ala trasera.

Con el objetivo de resaltar sus principales diferencias, en la Figura I-3 se compara un modelo de planeador con configuración de alas unidas con un modelo de planeador con configuración tradicional de ala-empenajes. Desde el punto de vista estructural, la unión entre las alas crea una estructura tipo pórtico que contrasta con el ala en voladizo de la configuración convencional. De este modo, un ala unida cuenta con cierta rigidez geométrica adicional y redefine la posición del eje de flexión global [2]. Desde la perspectiva aerodinámica, existe una interacción mutua entre ambas superficies sustentadoras que debe ser correctamente evaluada. El ala trasera de la JWA es sensiblemente mayor que los empenajes de la configuración convencional por lo que genera efectos aerodinámicos del mismo orden que los del ala delantera. Además de los aspectos estructurales y aerodinámicos, desde el punto de vista de la mecánica del vuelo y el control, el ala trasera de una JWA debe cumplir con los requisitos de estabilidad que en una configuración convencional son satisfechos por los empenajes. En conjunto, lo anterior influye en los efectos aeroelásticos producidos por la interacción fluido-estructura (FSI, por sus siglas en inglés: *Fluid-Structure Interaction*) que se manifiestan sobre una JWA que pueden diferir de aquellos que se encuentran en las configuraciones convencionales.

Aunque potencialmente aplicable a diversos campos de desarrollo aeroespacial, últimamente, la configuración de alas unidas ha sido evaluada para su aplicación en vehículos no tripulados para misiones de gran altitud y larga duración (HALE, por sus siglas en inglés: *High-Altitude Long-Endurance*) con numerosos fines ([3], [4]). Estas misiones se desarrollan a altitudes estratosféricas (por encima de 20 Km), en régimen de vuelo subsónico (números de Mach entre 0.3 y 0.5) y por tiempos prolongados (desde algunos días hasta incluso meses) [5], dando lugar al concepto de *pseudo-satélite* o *satélite atmosférico* ([6], [7]). Las misiones HALE requieren vehículos sumamente livianos que, operando a baja velocidad, desarrollen gran sustentación y baja resistencia. Estos requerimientos hacen necesario que los vehículos cuenten con alas de gran envergadura (superiores a 60 m) y de gran alargamiento que resultan extremadamente flexibles. En este sentido, los diseños con alas unidas podrían ser buenos candidatos para misiones HALE, sin embargo, son diversos los factores que deben tenerse en cuenta. En la Tabla I-1 se exponen algunas de las ventajas y desventajas que se mencionan en la literatura especializada, destacadas por Z. Sotoudeh [8], respecto a la aplicabilidad de JWAs en este tipo de misiones.

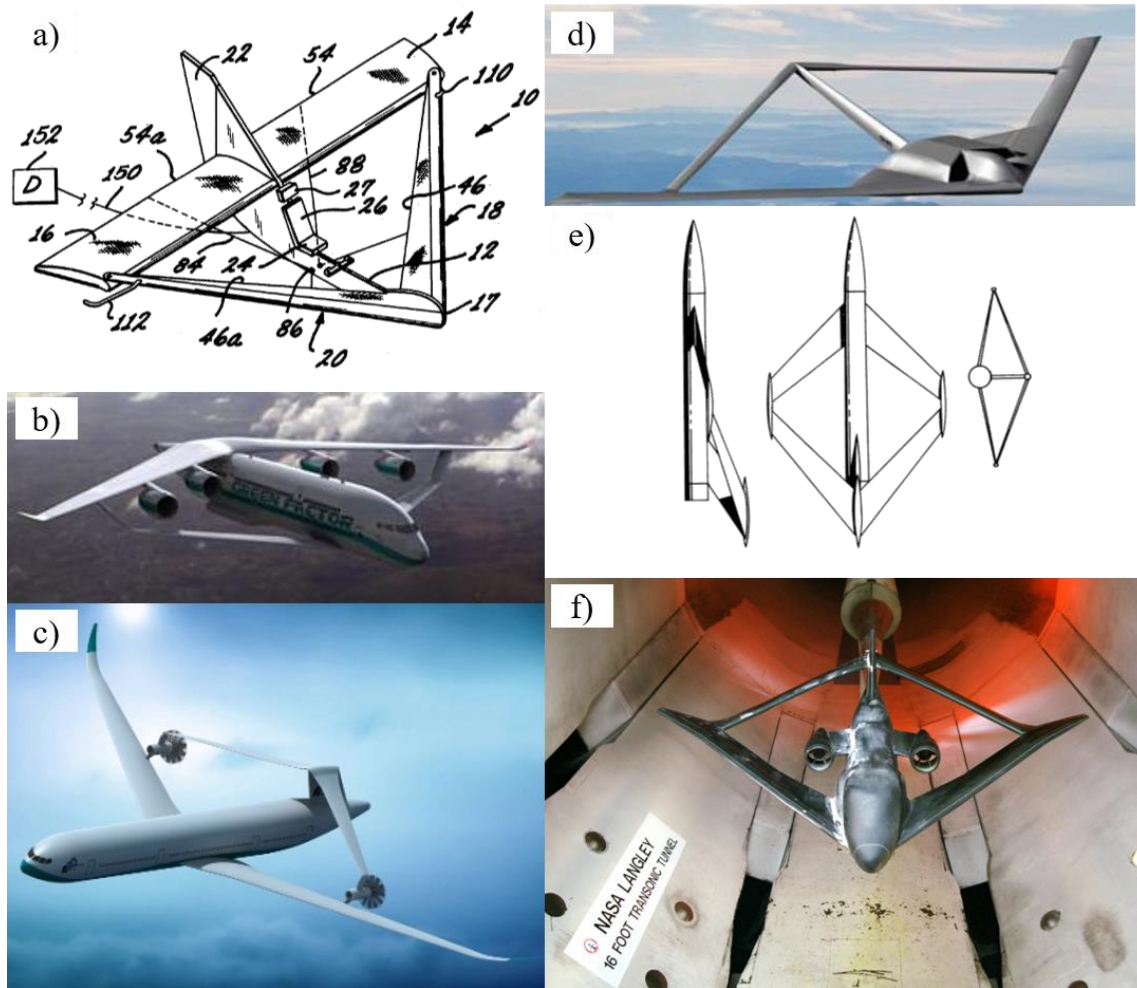


Figura I-1: Conceptos y modelos de JWAs. a) Diseño de patente J. Wolkovitch [1]. b) Forward Swept Joined Wing, \*Advanced Aircraft Configurations Ein Studentenprojekt der FH Aachen University of Applied Sciences (<http://www.advanced-ac.de/EN/konzepte/>). c) Jointed Wing Concept, \*. d) Jointed-Wing Sensor Craft Configuration [6]. e) Modelo de túnel de viento transónico Rockwell [2]. f) Modelo de túnel de viento, NASA Langley/Sean Smith (<https://www.nasa.gov/centers/langley/multimedia/iotw-tdt-wing.html>).

## Inestabilidades aeroelásticas en las aeronaves con alas unidas

El éxito en el diseño de una aeronave, en general, y de UAVs para misiones HALE, en particular, puede verse comprometido por diversos factores, algunos de los cuales se mencionan en la Tabla I-1. De entre ellos, las inestabilidades aeroelásticas son quizás los más complejos de estimar, predecir y/o controlar. De hecho, las aeronaves con estructuras alares flexibles que se conciben para el vuelo eficiente durante misiones HALE son particularmente susceptibles de sufrir inestabilidades aeroelásticas. Estas inestabilidades, que pueden ser destructivas, ocurren como resultado del acoplamiento entre fuerzas aerodinámicas, fuerzas estructurales (elásticas) y fuerzas inerciales, tal como lo indica el ampliamente difundido triángulo de fuerzas descrito por el Profesor A. R. Collar en 1978 [9]. En este trabajo, se consideran las inestabilidades aeroelásticas que más desafían los diseños de JWA: el *flutter* y el *pandeo aerodinámico*. Para su estudio, cada aeronave en análisis debe considerarse como un único sistema dinámico que incluye la estructura, el fluido circundante, las cargas (de todo tipo) y las condiciones del entorno.

El *flutter* es quizás el fenómeno aeroelástico más importante e, históricamente, el más complejo de predecir ([9], [10]). Se define como una vibración auto-excitada e inestable en la que la estructura

extrae energía de la corriente de aire, a través del trabajo de las cargas aerodinámicas, de modo que el movimiento resultante puede sostenerse en el tiempo en lo que habitualmente se denominan oscilaciones de ciclo límite (LCO, por sus siglas en inglés: *Limit Cycle Oscillations*). Esto es, a la velocidad crítica de *flutter* la cantidad de energía que la estructura extrae del fluido circundante es igual a la suma de la energía disipada internamente por la estructura y la disipada por el amortiguamiento aerodinámico, lo que se traduce en un intercambio continuado entre el movimiento y las cargas. Si el sistema se encuentra por debajo de la velocidad crítica las oscilaciones se amortiguan debido a la disipación, pero si la velocidad crítica se sobrepasa las oscilaciones se amplifican con resultados posiblemente catastróficos [11].

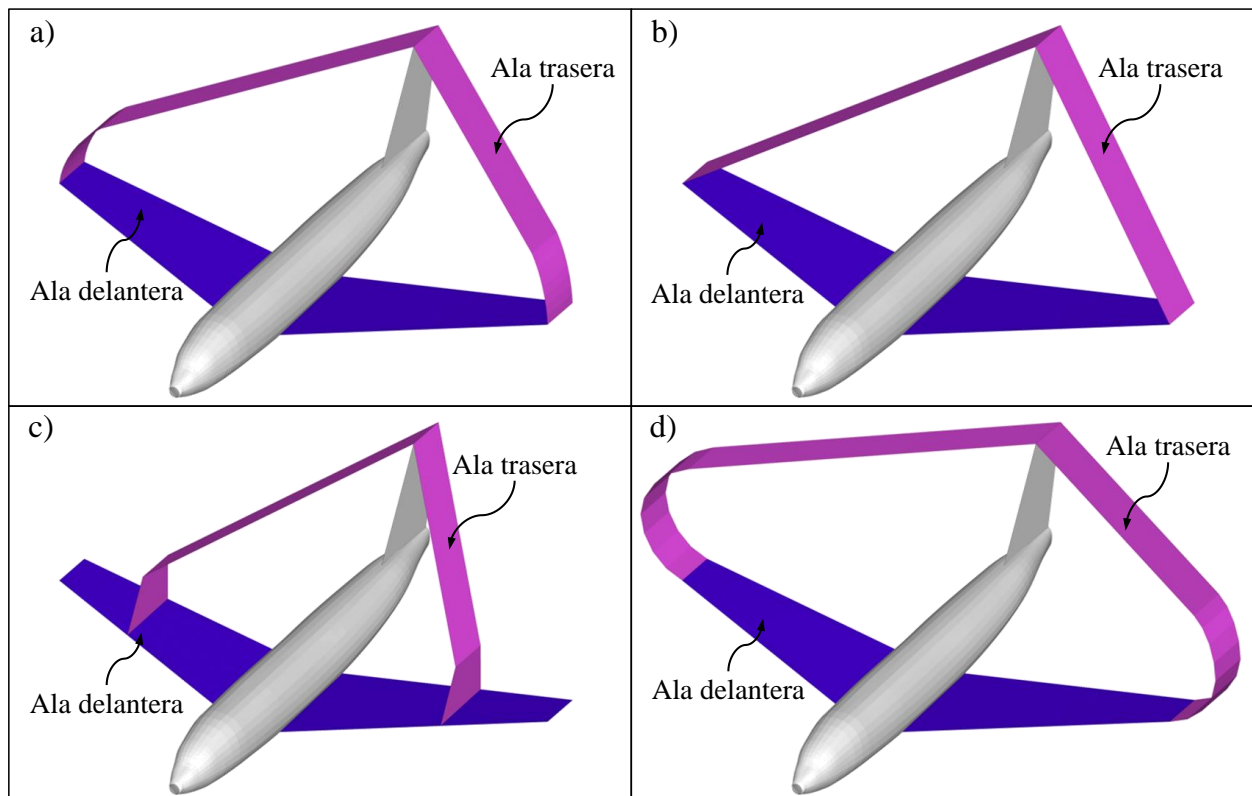


Figura I-2: Alternativas del tipo de unión entre el ala delantera y el ala trasera, modelos extraídos de [12]. a) Unión circular semicontinua al 100%. b) Unión directa al 100%. c) Unión con ala vertical al 80%. d) Unión circular continua.

En el ala cantiléver de una configuración convencional, el *flutter*, en su forma más clásica, se caracteriza por combinar desplazamientos por flexión, ángulos de torsión y los cambios en la sustentación asociados. A la velocidad crítica, en cada estación a lo largo de la envergadura, el desplazamiento vertical producto de la flexión y el cambio en el ángulo de incidencia producto de la torsión se acoplan en un movimiento de flameo sostenido. A diferencia del ala convencional, al considerar un ala unida como la representada en la Figura I-3 a), por ejemplo, la flexión en el plano vertical y la torsión de un tramo del ala delantera pueden ocasionar compresión, flexión en otro plano y torsión adversa en el ala trasera, y viceversa. Este aumento en la complejidad, producto de la geometría característica de las JWAs, excede los mecanismos clásicos del *flutter* y requiere particular atención a la hora de su análisis, al respecto E. Livne expresa: “dependiendo de su estructura y diseño aerodinámico, las configuraciones con alas unidas pueden mostrar modos de comportamiento aeroelástico complejos y presentar un considerable desafío de diseño” [13].

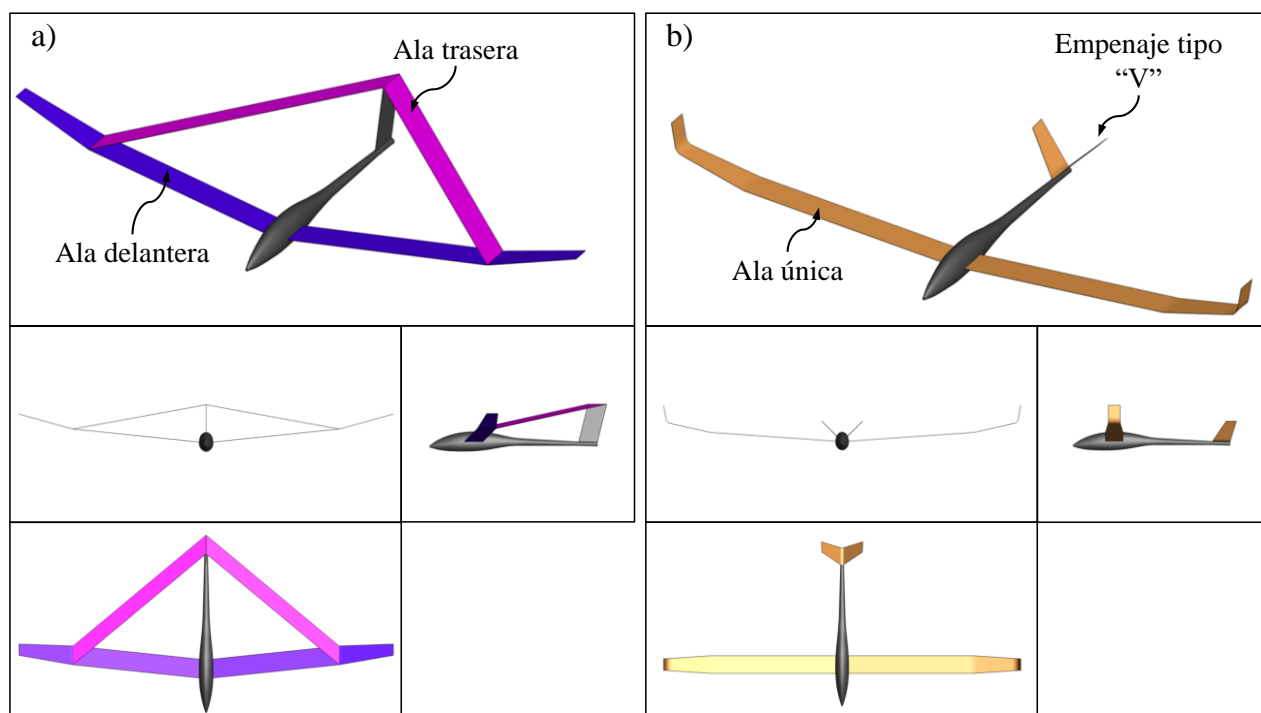


Figura I-3: Comparación entre modelos. a) Modelo de planeador con configuración de alas unidas. b) Modelo de planeador con configuración convencional.

Tabla I-1: Ventajas y desventajas de las JWAs para misiones HALE [8].

Ventajas	Desventajas
Menor peso estructural	Tendencia a bajar la nariz
Mayor rigidez	Dificultades para realizar diseños integrados
Baja resistencia inducida	Instalación de tren de aterrizaje
Reducción en resistencia parásita	Integración de grupo propulsor
Mayor sustentación	Costos de fabricación
Habilidad de control de fuerza lateral	Costos de mantenimiento
Velocidades de <i>flutter</i> más elevadas	Instalación de dispositivos hipersustentadores
Mayor efectividad de alerones	Dificultad para diseñar una familia de aeronaves
Ascenso y aterrizajes más suaves	Inestabilidades estructurales del ala trasera

El *pandeo aerodinámico* (también referido como pandeo aeroelástico, divergencia repentina o pandeo de alas unidas) es una inestabilidad aeroelástica casi exclusiva de las JWAs y tiene origen en su particular geometría. Entendido como una variante del fenómeno de pandeo dinámico global [14], el *pandeo aerodinámico* es una inestabilidad del equilibrio estructural que se alcanza producto de la combinación de cargas aerodinámicas, cargas elásticas, cargas inerciales y la configuración deformada de la estructura. Cuando el pandeo ocurre, la estructura pierde la capacidad de resistir los esfuerzos provenientes del sistema de cargas externo en la configuración actual y se produce un cambio repentino a una nueva configuración que, en general para este tipo de estructuras, implica el colapso.

Como se esquematiza en la Figura I-4, la sustentación generada por el ala delantera de la JWA produce flexión y hace que ésta se desplace hacia arriba. Este efecto, a su vez, genera compresión sobre el ala trasera, debido a la componente de la resultante de sustentación en la dirección del eje elástico del ala trasera. El ala trasera genera también sustentación por sí misma lo que adiciona una carga

transversal que favorece la inestabilidad. En este punto, el comportamiento del sistema podría analizarse como un caso de pandeo global clásico (estático) en el que una viga/columna esbelta se encuentra sometida a compresión. Sin embargo, deben considerarse además los efectos aerodinámicos y aeroelásticos del sistema, superpuestos a los efectos inerciales de la estructura que, en conjunto, alejan el fenómeno del pandeo global clásico.

De los efectos aerodinámicos que participan en el *pandeo aerodinámico*, la interacción mutua entre el ala delantera y el ala trasera es quizás el más importante. Naturalmente, las cargas aerodinámicas de ambas superficies sustentadoras difieren de aquellas que tendrían si se encontraran aisladas. En efecto, la estela del ala delantera tiende a interferir sobre el ala trasera y se produce una influencia aguas arriba en el otro sentido. Además, en una configuración como la de la Figura I-4, sobre el punto de unión entre las alas se genera un vórtice que, dependiendo de las condiciones, puede incluso ser más intenso que el de la puntera.

Desde el punto de vista aeroelástico, la FSI es dominante en el comportamiento del sistema y, por ende, determinante para el *pandeo aerodinámico*: siendo las cargas aerodinámicas cargas del tipo seguidoras, cualquier deformación que sufra la estructura traerá aparejada una redistribución de cargas que, nuevamente, alterará el estado de deformación de la estructura. En este sentido, la distribución de sustentación en la dirección de la cuerda de las alas produce una torsión distribuida que altera el ángulo de incidencia local de las superficies. Por otro lado, las velocidades del movimiento de la estructura alteran la velocidad relativa con el fluido circundante produciendo cambios en las cargas actuantes.

A pesar de tener naturalezas disímiles, tanto el *flutter* como el *pandeo aerodinámico* pueden afectar a un sistema de forma simultánea e incluso interactuar entre ambos. Ante esta situación, comúnmente, pueden encontrarse dos escenarios: i) el *flutter* ocurre como una consecuencia de los efectos del *pandeo aerodinámico*; o ii) el *flutter* genera las condiciones para que se produzca el *pandeo aerodinámico*. Para ilustrar el primer escenario considérese el ejemplo de la Figura I-4 donde la estructura, por acción de las cargas aerodinámicas, pasa de su configuración indeformada a la configuración (inestable) donde ocurre el *pandeo aerodinámico*. Durante esta transición la rigidez de la estructura, entendida como la capacidad de oponerse a las deformaciones, varía hasta eventualmente “anularse” en el punto crítico. Si esta variación se realiza de forma progresiva, como por ejemplo a causa de un incremento suficientemente lento en la velocidad de vuelo, en algún punto la rigidez puede ser tal que, en esa configuración, el sistema encuentre su velocidad crítica de *flutter* y se produzcan LCO. Entonces, serán las LCO las que, retroalimentando la deformación estructural, lleven al sistema a la inestabilidad.

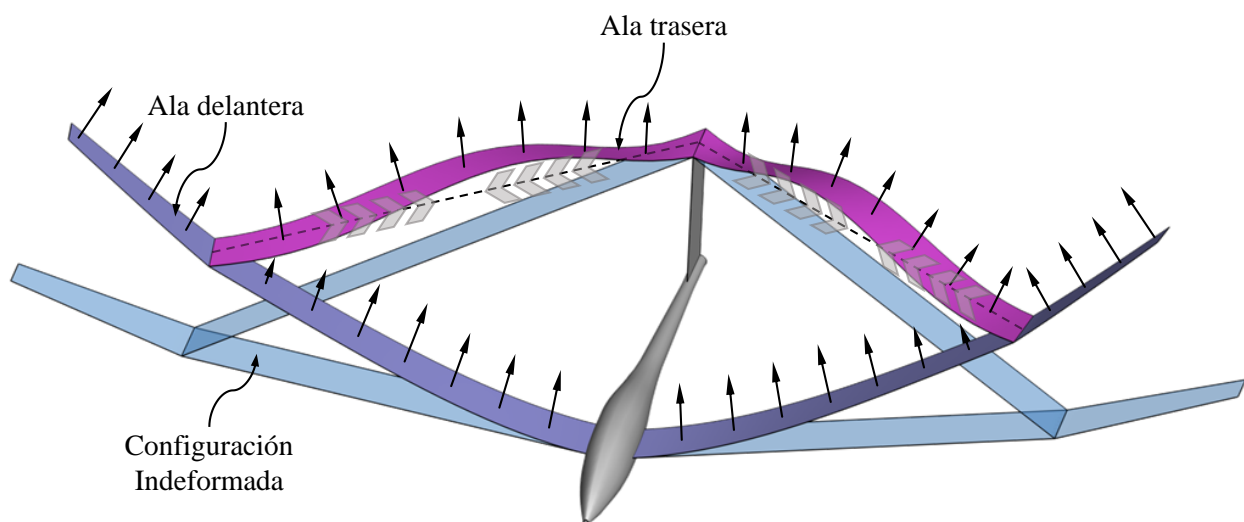


Figura I-4: Esquema del fenómeno de pandeo aerodinámico en una JWA.



El segundo escenario es el caso inverso, considérese que la aeronave representada en la Figura I-4 se encuentra volando a una velocidad superior a la velocidad crítica de *flutter*. En estas condiciones el sistema desarrollará LCO cuyas amplitudes, si la velocidad aumenta, pueden volverse importantes hasta llevar al sistema a la condición de *pandeo aerodinámico*, eventualmente. Luego, el *pandeo aerodinámico* del sistema no sucede de forma habitual, sino que son los efectos dinámicos asociados al *flutter* los que lo producen.

### La simulación computacional como herramienta de análisis

Actualmente, la investigación y el desarrollo en el ámbito de la ingeniería y la tecnología han incorporado la simulación computacional como práctica habitual para lograr sus objetivos. Las distintas áreas se han impuesto metas cada vez más ambiciosas en cuanto a la representatividad de los modelos computacionales, impulsando la sofisticación de las técnicas de análisis en virtud del detalle en la descripción de los fenómenos estudiados. En este contexto, el diseño de aeronaves, en general, y de JWAs, en particular, no son excepción. Luego, para describir el comportamiento de una JWA en relación a las inestabilidades aeroelásticas, contar con una herramienta de simulación computacional que sea al mismo tiempo eficiente y confiable se vuelve imprescindible.

La evidente complejidad de los sistemas que incluyen aeronaves con configuración de alas unidas requiere la inclusión de diversas áreas de la física en su estudio, dando lugar a un problema multi-físico. La multi-física es la disciplina computacional que ha permitido la implementación de un enfoque particionado de fenómenos complejos, involucrando diversos campos en un proceso de co-simulación [15], basado en la combinación de modelos disímiles altamente especializados. En lo que concierne a las JWAs, la co-simulación se enmarca en la aeroelasticidad computacional (CAE, por sus siglas en inglés: *Computational Aeroelasticity*) como método de análisis de la interacción entre fluido y estructuras aplicado al estudio de la respuestas de determinados sistemas frente a inestabilidades aeroelásticas. Conceptualmente, el problema aerodinámico y el problema estructural-dinámico se abordan por separado con modelos apropiados para cada uno de ellos, requiriendo de la incorporación de un método de interacción entre ambos. Finalmente, una herramienta para estudiar inestabilidades aeroelásticas en un sistema que incluya aeronaves con configuración de alas unidas debe enmarcarse en el paradigma de la co-simulación y ser capaz de resolver un problema multi-físico de forma eficiente y confiable.

## I. 2      Antecedentes y revisión bibliográfica

En esta sección, se presenta una recorrida por los antecedentes de relevancia que están relacionados con el tópico principal del presente trabajo de tesis. Asimismo, se realiza una revisión de la bibliografía especializada en estos temas para identificar los aportes realizados por otros autores y diferenciarlos de aquellos que son originales del presente trabajo. Lo anterior se realiza en tres apartados que abarcan: i) una reseña histórica de las configuraciones de alas unidas, desde su aparición como un concepto innovador hasta los primeros estudios e investigaciones realizadas sobre este diseño; ii) las principales líneas de investigación abocadas específicamente a los análisis aeroelásticos sobre sistemas que incluyen aeronaves con configuración de alas unidas; y iii) los trabajos más recientes que tratan temas análogos o plantean objetivos similares a los del presente trabajo.

### Aeronaves con configuración de alas unidas

Aunque la primer patente registrada del diseño de una aeronave con configuración de alas unidas es la atribuida a J. Wolkovitch en 1976 [1], el concepto se remonta a los inicios de la aviación, con las alas anulares y de tipo cajón. En el año 1906, dos pioneros franceses Louis Blériot y Gabriel Voisin colaboraron en el diseño y construcción del *Blériot III*, un prototipo de aeronave que poseía dos alas anulares en tándem, que luego fue rediseñado con un ala anular y otra en forma de biplano. Las invenciones de Blériot y Voisin no lograron desarrollar el vuelo sostenido, pero fijaron un concepto que luego sería revisitado.

En el año 1924, el célebre investigador Ludwig Prandtl publicó un reporte referido a la resistencia inducida en alas múltiples [16], donde describió el concepto de ala cajón (*box wing*) que representa una evolución del diseño de ala anular desarrollado por los pioneros. En su obra, Prandtl indicó que bajo ciertas condiciones una configuración de alas cerradas desarrollaría la mínima resistencia inducida para un valor de sustentación y envergadura determinados. Alrededor de dos décadas después, durante la Segunda Guerra mundial, la compañía desarrolladora de aeronaves Heinkel confeccionó una serie de proyectos de aviones de combate de despegue vertical con alas anulares denominada *Heinkel Lerche*, aunque nunca fueron construidos. Durante las décadas de 1950 y 1960, se diseñaron algunos prototipos de aeronaves con alas cerradas y anulares, pero al no mostrar desempeños aceptables fueron descartados.

La patente de J. Wolkovitch de 1976 marcó el inicio de una serie de investigaciones más profundas de las configuraciones de alas unidas, que trascendieron los conceptos y el desarrollo de prototipos para poner un enfoque científico crítico sobre este tipo de diseños. En efecto, entre 1977 y 1988 se registraron varias publicaciones de su autoría referidas a las JWAs, entre las cuales se destacan dos en particular: i) en 1984 [17], un estudio de factibilidad de un avión con alas unidas que evaluó las características de esta configuración contra configuraciones convencionales; y ii) en 1986 [2], una revisión general del diseño que describió aspectos estructurales, aerodinámicos, de estabilidad y control, de integración de diseño, y de aplicaciones.

En la década de 1990, los términos avión de Prandtl (*Prandtl plane*) y ala de Prandtl (*Prandtl wing*), que dan merecido crédito al aerodinamicista alemán, comenzaron a utilizarse en referencia a algunos diseños de JWAs que poseen alas verticales para unir el ala trasera con la delantera. Específicamente, la línea de investigación desarrollada por Aldo Frediani [18] dio fuerza a estos términos e introdujo plenamente los estudios aeroelásticos sobre diseños con alas unidas. Contemporáneamente al trabajo de A. Ferdiani, entre 1988 y 1996, un grupo de investigación de la *Universidad de Stanford* y del *NASA Ames Research Center* en California incorporó técnicas de optimización al diseño de JWAs. De entre estos esfuerzos se destaca el trabajo de I. Kroo y J. Gallman en 1991 [19] y de J. Gallman y S. Smith en 1993 [20]. En su artículo I. Kroo y J. Gallman presentaron un método para evaluar rápidamente las características aerodinámicas y estructurales de JWAs y lo aplicaron para identificar el rango de parámetros de diseño que resultan en la mejor performance de crucero. Mientras que J. Gallman y S. Smith compararon una variedad de diseños “óptimos” de JWAs con configuraciones convencionales en términos de costos directos de operación, peso total, y resistencia de crucero. Además, incluyeron la máxima sustentación y el pandeo del ala trasera como puntos críticos en el diseño de las configuraciones con alas unidas.

## Análisis aeroelásticos en configuraciones con alas unidas

El estudio aeroelástico de un sistema requiere, en general, modelos multi-físicos no lineales que sean capaces de capturar los complejos movimientos y grandes deflexiones en las que incurren las estructuras flexibles cuando interactúan con un fluido. Dada su complejidad, el tratamiento de este tipo de sistemas se relega casi exclusivamente a análisis numéricos que incorporan alguna teoría o técnica de co-simulación como las detalladas por T. Kalmar-Nagy y I. Stanculescu o Gomes y otros ([21], [22]). En este contexto, se destaca el aporte de S. Preidikman [11] quien presentó una técnica robusta

para simulaciones numéricas del comportamiento aeroelástico de diversas estructuras y sentó las bases para la línea de investigación que sigue el presente trabajo.

A pesar de que son numerosas las publicaciones de los últimos años relacionadas a estudios aeroelásticos de diversos sistemas, cuando se trata con inestabilidades aeroelásticas en configuraciones de alas unidas, la cantidad se reduce considerablemente. En la década de 2000, E. Livne y L. Demasi de la *Universidad de Washington* iniciaron una exhaustiva investigación en este tópico que produjo alrededor de diez publicaciones. En el año 2001, E. Livne [13] presentó un recorrido general por los análisis aeroelásticos, aeroservoelásticos y de optimización de diseño de las configuraciones de alas unidas realizados hasta el momento, discutiendo los problemas de dinámica estructural y aeroelasticidad relacionados, y la relevancia de los efectos aeroelásticos en estas configuraciones. Este artículo describió los desafíos de las futuras investigaciones sobre el tema y los desarrollos necesarios para afrontarlos, entre ellos, naturalmente, se mencionan las inestabilidades aeroelásticas.

En el año 2005, L. Demasi y E. Livne [23] presentaron en su artículo una serie de estudios exploratorios sobre aeroelasticidad de alas unidas. El tema principal de este trabajo fue la predicción de divergencia y *flutter* (linealizado) en diseños preliminares de estas configuraciones, utilizando una teoría lineal para la parte aerodinámica y una formulación lagrangiana actualizada no lineal, formulada a partir del método de perturbación de cargas para la parte estructural. Con este enfoque, los autores presentaron una herramienta para la predicción de divergencia y estabilidad dinámica local de JWAs, así como también una metodología de aplicación relativamente amplia para este tipo de problemas. En su artículo de 2007, L. Demasi y E. Livne [24] analizaron fenómenos aeroelásticos dinámicos en aeronaves con alas unidas. En este trabajo, utilizaron una teoría lineal reducida modalmente en el dominio de la frecuencia basada en el método de la red de dobletes para predecir cargas aerodinámicas, acoplándola con un modelo de elementos finitos geoméricamente no lineal de orden completo, que aplica un método de perturbación de cargas para construir las rigideces geométricas no lineales de la estructura.

En el año 2008, los autores de la *Universidad de Washington* [25] extendieron las formulaciones anteriores dejando de lado el modelo aerodinámico de orden reducido para introducir uno de orden completo, aunque manteniendo la teoría lineal. Además, la principal característica de ese estudio fue estudiar la aeroelasticidad dinámica como una perturbación alrededor de soluciones de estado estacionario. L. Demasi y E. Livne concluyeron que su metodología representa una herramienta útil para el estudio de nuevas configuraciones geoméricamente no lineales y no planas, cuando las cargas aerodinámicas inestacionarias son lineales. Al año siguiente, los autores utilizaron los modelos desarrollados para estudiar configuraciones con alas planas y no planas, describiendo el comportamiento de estos sistemas frente a la aparición de *flutter* [26].

A partir del año 2009, los esfuerzos de L. Demasi y E. Livne se abocaron a la aplicación de sus modelos numéricos al estudio configuraciones con alas unidas, haciendo énfasis en el *flutter* y el *pandeo aerodinámico*. Sobre este nuevo enfoque se destacan tres artículos uno de 2009 y dos de 2013. El primero de ellos [27], aunque retornó al uso de un modelo aerodinámico de orden reducido, analizó el comportamiento aeroelástico de dos configuraciones de alas unidas, estudiando los efectos de la posición de la unión y calculando la velocidad crítica de *flutter*. Respecto a la velocidad de *flutter*, en este artículo se definieron la velocidad de *flutter* lineal y la velocidad de *flutter* consistente. La primera de ellas se calcula utilizando el procedimiento del lugar de las raíces basado en un invariante temporal del espacio de estado del modelo. La segunda se calcula teniendo en cuenta la estabilidad local del sistema imponiendo perturbaciones alrededor de configuraciones de equilibrio no lineales. En sus conclusiones, los autores destacaron que en ambos casos analizados la velocidad de *flutter* consistente es mayor que su contraparte lineal y, a su vez, subrayaron la importancia de una descripción adecuada del fenómeno estudiado para no caer en predicciones incorrectas.

A comienzos de 2013, L. Demasi *et al.* [28] presentaron un análisis aeroelástico postcrítico de aviones de Prandtl (con configuración de alas unidas). Este trabajo investigó el fenómeno de *pandeo aerodinámico* y patrones postcríticos, adoptando una técnica de longitud de arco para recorrer las trayectorias secundarias (inestables), aplicando cargas conservativas no aerodinámicas. El aporte más importante de este esfuerzo fue la comparación de la predicción del pandeo a partir del análisis de autovalores con la obtenida con el método que propusieron. Luego de analizar tres configuraciones con geometrías diferentes, los autores expresaron conclusiones sobre la incidencia de la altura de la unión y el ángulo de flecha en la inestabilidad del sistema. Asimismo, indicaron que el análisis de autovalores lineal no es confiable para este tipo de estudios y, más importante, que es extremadamente difícil el diseño de modelos de orden reducido en el dominio de la frecuencia, que podrían reducir significativamente el costo computacional de las simulaciones, debido a la alta complejidad no lineal del problema. En todos los casos, utilizaron el software NASTRAN para verificar sus resultados.

En el segundo artículo de 2013, L. Demasi *et al.* [29] continuaron con su investigación analizando otros ejemplos y haciendo énfasis en dos puntos: i) la interpretación física de la aparición del *pandeo aerodinámico* en un sistema a partir de la relación sustentación-desplazamiento; y ii) la posibilidad de usar cargas mecánicas para imitar las cargas aerodinámicas y los resultados de este proceso. A diferencia de su artículo anterior, en este caso utilizaron cargas aerodinámicas estacionarias calculadas con el método de red de vórtices. Los autores destacaron el efecto de endurecimiento y ablandamiento que ocurre en este tipo de sistemas y cómo es posible a partir de éste definir la ocurrencia de una inestabilidad. Respecto a las cargas mecánicas, la conclusión de los autores apuntó a no recomendar su uso dado que puede arrojar resultados no confiables.

Continuando con la línea de investigación de L. Demasi y E. Livne, en 2014 R. Cavallaro *et al.* [30] presentaron un extenso artículo sobre el comportamiento aeroelástico dinámico de alas unidas estructuralmente no lineales. Primeramente, los autores analizaron la respuesta de tres configuraciones ante el *pandeo aerodinámico* desde una perspectiva dinámica. En segundo lugar, el foco fue puesto en el *flutter* y en los estados postcríticos de los sistemas. En ambos casos, se compararon métodos en el dominio del tiempo y en el dominio de la frecuencia, tanto para casos lineales como no lineales. El modelo estructural que utilizaron los autores corresponde a una versión geoméricamente no lineal de elementos finitos triangulares de membrana con deformación constante y de placa bajo las hipótesis de Kirchhoff. Por su parte, el modelo aerodinámico implementado es una variante del UVLM con la técnica de estela fija con forma prescrita. En sus conclusiones, R. Cavallaro y sus colegas indicaron que, al estudiar el fenómeno de *flutter*, las no linealidades estructurales de su modelo capturan LCO, bifurcaciones de Hopf y la presencia del fenómeno del doblamiento de período. Mientras que, al estudiar el fenómeno de *pandeo aerodinámico*, sostienen que las predicciones realizadas con un modelo estático son aceptables al compararlas con las predicciones realizadas con un modelo dinámico.

En los años posteriores, las investigaciones de L. Demasi, E. Livne, R. Cavallaro, y sus colegas se orientaron a estudios sobre la mecánica del vuelo y la optimización de diseños de aeronaves con diversas configuraciones, incluidas las alas unidas. De este modo, abandonaron el *pandeo aerodinámico* como tema central de sus trabajos, aunque mantuvieron a la aeroelasticidad como un aspecto importante a considerar.

Los trabajos liderados por L. Demasi, E. Livne, R. Cavallaro sobre configuraciones unidas son sumamente valiosos no solo por la cantidad de conceptos y descripciones que expusieron, sino también por la gran variedad de casos de estudio que presentaron, los cuales constituyen una base para la validación de otros modelos y, de hecho, algunos son utilizados en este trabajo de tesis. Sin embargo, existen dos aspectos en los que estas investigaciones que pueden expandirse, y es ahí donde encuentra lugar el enfoque adoptado en este trabajo: i) los métodos para la estimación de cargas aerodinámicas; y ii) los métodos de determinación de inestabilidades.

Respecto a los métodos para calcular cargas aerodinámicas, los trabajos presentados hasta el año 2009 no incluyeron efectos no lineales y no estacionarios. En algunos casos, se utilizaron modelos de orden reducido en el dominio de la frecuencia y, en otros, modelos de orden completo pero lineales. En los dos trabajos del año 2013, en cambio, los autores utilizaron cargas conservativas (no aerodinámicas) y cargas aerodinámicas estacionarias para sus estudios, respectivamente. Fue recién en 2014 donde se incorporó un método inestacionario y no lineal para el cálculo de cargas aerodinámicas, pero utilizando una configuración de estela preestablecida. Aunque todas las alternativas son adecuadas para estimaciones preliminares, aplicar un modelo aerodinámico completamente inestacionario, no lineal y que utilice un modelo dinámico de estela sería superador.

En cuanto a la determinación de inestabilidades, los métodos aplicados en los trabajos de L. Demasi, E. Livne, R. Cavallaro, y sus colegas se basan en la estabilidad local del sistema. Esto es, analizan la respuesta del sistema ante perturbaciones alrededor de configuraciones de equilibrio no lineales. A pesar de dar un buen indicio de la condición del equilibrio del sistema, estos métodos pueden ser reemplazados por análisis de estabilidad globales que no solo incluyan la singularidad matemática en la matriz de rigidez como parámetro de evaluación de la estabilidad, sino que también contemplen la energía elástica interna de la configuración y sus variaciones.

Otra línea de investigación que merece ser mencionada, ya que produjo numerosas publicaciones y contempla análisis aeroelásticos de configuraciones con alas unidas, es la encabezada por C. Cesnik y W. Su iniciada en 2003 con el artículo de C. Cesnik y E. Borwn [31]. Aunque en este artículo los autores evaluaron el uso de materiales piezoeléctricos para controlar el alabeo de las superficies alares, introdujeron algunos conceptos y métodos al análisis de JWAs. El modelo presentado representa las estructuras con elementos de viga especializados con grados de libertad de deformaciones y las cargas aerodinámicas se estiman con la formulación inestacionaria de estado finito propuesta por D. A. Peters [32]. Entre los resultados presentados, el artículo presenta una aeronave con alas unidas para la cual se calculan condiciones de diseño basadas en la velocidad de *flutter* y la posible aparición de una divergencia (identificable con el *pandeo aerodinámico*). Dos años más tarde, en 2005, C. Cesnik y W. Su [33] extendieron el artículo anterior utilizando la misma formulación para analizar aeronaves flexibles, enfocándose en la estabilidad y el control.

En 2008, W. Su presentó su disertación doctoral [34] que reunió los avances de su investigación. El modelo aeroelástico utilizado fue similar a los anteriores: una formulación en elementos finitos de viga basados en deformación, no lineales y de orden reducido para representar las estructuras, y un modelo aerodinámico subsónico, inestacionario y de estado finito para calcular cargas aerodinámicas. Nuevamente, el autor analizó diversos casos de estudio discutiendo sus respuestas ante una maniobra de rolado, las características de control y estabilidad, y la respuesta ante ráfagas. En esta disertación, W. Su incorporó un estudio sobre la estabilidad estática ante la compresión del ala trasera en una configuración con alas unidas y discutió las condiciones en la que su modelo predice el *pandeo aerodinámico*. A pesar de la simplicidad de los modelos utilizados para representar los fenómenos aeroelásticos, el trabajo de W. Su presentó dos aportes sumamente importantes: i) la incorporación del *pandeo aerodinámico* como un factor a tener en cuenta en el análisis y diseño de JWAs; y ii) la detallada descripción de los casos de estudio que representan una base de verificación interesante para otros desarrollos y, de hecho, son utilizados en el presente trabajo de tesis. Estas contribuciones fueron ampliadas en el artículo presentado en 2011 [35], que se especializa en las respuestas dinámicas de aeronaves sumamente flexibles ante distintas perturbaciones.

El artículo presentado por C. de Souza, R. Annes da Silva y C. Cesnik en 2012 [36] expone un formulación más compleja para analizar fenómenos aeroelásticos no lineales. Los autores utilizaron un modelo estructural de elementos finitos implementado para el análisis de placas de materiales compuestos con diferentes orientaciones, en conjunto con un modelo aerodinámico basado en una versión del UVLM para realizar su estudio. El modelo de interacción implementado puede clasificarse como de tipo débil ya que incorpora en una biblioteca externa el modelo numérico que simula la

estructura y realiza subiteraciones independientes sin comunicación constante con el modelo aerodinámico. De este modo, los modelos anteriores basados en deformaciones estructurales y aerodinámica de estado finito [32] fueron superados en complejidad y representatividad. La formulación aeroelástica resultante proporcionó un marco para análisis no lineales que es propicio para estudios del comportamiento de estructuras flexibles. Los resultados y conclusiones expuestos por los autores apuntan a la determinación del *flutter* y a la verificación de un modelo de pérdida de sustentación.

En el año 2013, Z. Wan y C. Cesnik [37] revisitaron la formulación aeroelástica de los artículos anteriores (de 2005 y 2011) y presentaron, con base en ésta, una metodología para el escalado de modelos de aeronaves altamente flexibles basada en la aeroelasticidad no lineal. Basándose en demostraciones teóricas y verificaciones numéricas, los autores concluyen que es necesario representar completamente las matrices de rigidez geométricas que dependen de las cargas internas en la estructura deformada para capturar eficientemente el *pandeo aerodinámico* en configuraciones con alas unidas.

Las contribuciones de las publicaciones realizadas por C. Cesnik, W. Su y sus colegas son sumamente valorables y exponen conceptos sobre las inestabilidades aeroelásticas de configuraciones de alas unidas que no habían sido tratados con profundidad suficiente. Sin embargo, algunos aspectos pueden reenfocarse implementando otro tipo de modelos. Este es el caso de las publicaciones anteriores al año 2011 y la presentada en 2013 [37], que utilizan un modelo aerodinámico de estado finito. Este método para calcular cargas aerodinámicas no es capaz de capturar la interacción aerodinámica entre superficies sustentadoras que, como se expuso, es un aspecto fundamental en el análisis de JWA. El artículo del año 2012 [36], sin embargo, presentó una formulación más compleja, con la capacidad de capturar correctamente los efectos aerodinámicos involucrados en el estudio de JWA. Asimismo, el modelo de placas utilizado para simular las estructuras flexibles es adecuado dado el tipo de cuerpos que se estudiaron. No obstante, la interacción entre modelos de tipo débil, que no compatibiliza las soluciones en todos los pasos de tiempo, podría perjudicar la generalidad de la aplicación de la herramienta. Luego, sería interesante reformular esos modelos en un esquema de interacción fuerte.

Siguiendo esta línea de investigación, el artículo más destacable fue el presentado en 2017 por W. Su *et al.* [38] en el que los autores estudiaron las características aeroelásticas dinámicas de una JWA. El estudio fue realizado utilizando una versión del UVLM (la presentada por C. de Souza *et al.* [36]) acoplada a un modelo de vigas no lineal basado en deformaciones donde las restricciones a los desplazamientos fueron impuestas usando el método de multiplicadores de Lagrange, que es similar al utilizado por C. Cesnik y W. Su [33]. El modelo de interacción implementado puede clasificarse como de tipo débil ya que incorpora en una biblioteca externa el modelo numérico que simula la estructura y realiza subiteraciones independientes sin comunicación constante con el modelo aerodinámico. La formulación incorpora, además, un modelo de cuerpo rígido para la aeronave completa que permite simular maniobras y estudiar aspectos de la mecánica del vuelo de todo el sistema.

A pesar de que el modelo presentado por W. Su y sus colegas [38] es representativo y adecuado para el tratamiento de inestabilidades aeroelásticas, los resultados presentados trataron casi exclusivamente a la respuesta aeroelástica no lineal (como por ejemplo ante una maniobra de rolado) de aeronaves con configuraciones con alas unidas. En este sentido, resultaría interesante utilizar las ventajas de la formulación para investigar inestabilidades puntuales como el *pandeo aerodinámico* y, adicionalmente, incorporar el modelo estructural y el modelo aerodinámico en un esquema de interacción de tipo fuerte para obtener conclusiones comparativas.

### Otros trabajos recientes con similares características

En este apartado se revisan trabajos publicados recientemente que comparten algunos aspectos con el presente trabajo de tesis. Todos ellos desarrollaron o implementaron herramientas

computacionales para simulaciones aeroelásticas que, o bien fueron aplicadas o podrían aplicarse, al estudio de inestabilidades en JWAs.

El primer trabajo considerado es la tesis doctoral de L. Ceballos presentada en 2017 [39]. En este esfuerzo, el autor presentó una herramienta computacional robusta y de fácil configuración basada en la co-simulación para el estudio aeroelástico de vehículos aéreos no tripulados con configuración de alas unidas. Esta herramienta combinó, en un esquema de interacción fuerte, un modelo aerodinámico inestacionario y no lineal con un modelo estructural de elementos finitos. Utilizado para calcular las cargas provenientes del fluido circundante, el modelo aerodinámico se construyó alrededor del método de red de vórtices inestacionario y no lineal, siguiendo el trabajo de S. Preidikman [11]. Por su parte, el modelo estructural fue formulado utilizando elementos finitos de viga de primer orden con las hipótesis de Euler-Bernoulli. Además, el modelo incorporó un método de reducción de orden basado en la descomposición modal utilizando los modos de vibrar naturales (lineales) de la estructura. Los resultados presentados estuvieron orientados a dos aspectos, por un lado, validar la herramienta presentada y, por otro, utilizarla para predecir inestabilidades dinámicas (*flutter*) en JWAs.

La tesis de L. Ceballos realizó aportes valorables relacionados a las inestabilidades aeroelásticas de las JWAs, especialmente en la determinación de *flutter*, y en muchos aspectos el software desarrollado es análogo al presentado en este trabajo. Sin embargo, la principal diferencia recae en el modelo estructural y en la interacción de éste con el modelo aerodinámico. Respecto al modelo estructural, la representatividad de la formulación de primer orden (lineal) resulta insuficiente para capturar fenómenos de inestabilidades estructurales que son inherentemente no lineales como es el caso del *pandeo aerodinámico*. Además, la incorporación de un método de reducción de orden, aunque permite reducir notablemente el costo computacional, implica una pérdida de información que puede ser fundamental para la correcta descripción de estos fenómenos.

En cuanto al método de interacción, el esquema presentado por L. Ceballos utiliza un paso de tiempo idéntico para el modelo estructural y para el modelo aerodinámico. Esto es posible debido al método de reducción de orden que permite, variando la dimensión del subespacio de modos naturales, adaptar el tiempo característico de la estructura. De este modo, la interacción fuerte se realiza en un único paso de tiempo en el que se compatibilizan las soluciones de ambos modelos.

Presentado en 2019, el segundo trabajo a considerar en este apartado es la tesis doctoral de M. Maza [40]. En el resumen de su tesis M. Maza expresó: “El objetivo general de este trabajo es desarrollar un método numérico que permita en forma robusta, confiable y eficiente simular el comportamiento no lineal e inestacionario de estructuras flexibles sumergidas en un medio fluido a elevado número de Reynolds”. El autor abordó el paradigma de la co-simulación para incorporar en una herramienta computacional orientada al análisis de turbinas eólicas de eje horizontal un componente para simulaciones estructurales y un componente para simulaciones aerodinámicas. El componente aerodinámico se basó en una versión inestacionaria del método de red de vórtices, bastante similar a las antes mencionadas y a la utilizada en el presente trabajo, pero orientada al análisis de aerogeneradores de tres palas. El componente estructural, por su parte, es un código de propósito general algo más complejo ya que, aunque fue basado en el método de los elementos finitos, permite representar tres tipos de elementos: cuerpos rígidos, vigas con una formulación de tipo geoméricamente exacta y láminas sin grados de libertad rotacionales. En cuanto a la interacción entre los componentes, la implementación presentada por el autor utilizó un algoritmo de tipo débil, ya que las soluciones de los componentes evolucionan de forma independiente y se comunican cada intervalos prefijados, sin forzar la compatibilización en todos los pasos de tiempo.

Evidentemente, los sistemas que incluyen aeronaves con configuración de alas unidas pueden ser perfectamente analizados con la implementación realizada por M. Maza que, además, tiene la particularidad de admitir el reemplazo o adición de módulos sin modificar la estructura general del código, dándole una versatilidad notable. En particular, la no linealidad del modelo estructural es

apropiada para la determinación de inestabilidades aeroelásticas y, de hecho, los resultados obtenidos a partir de su aplicación demuestran sus cualidades para predecir el *flutter*.

Un aspecto importante a considerar de la herramienta desarrollada en el trabajo de M. Maza es el esquema de interacción débil. Esto se debe a que, tal como expuso en sus conclusiones, la comunicación diferida entre modelos que no fuerza la compatibilidad de las soluciones puede, en algunos casos, generar inestabilidades de naturaleza numérica que se manifiestan como vibraciones de alta frecuencia. Una alternativa, propuesta por el autor, para evitar estas inestabilidades consiste en incorporar cierto amortiguamiento numérico al sistema con el objetivo de filtrar las oscilaciones espurias que genera el esquema de interacción. Ciertamente, una solución definitiva sería cambiar el esquema utilizado por uno de tipo fuerte, pero esto incrementaría sensiblemente el costo computacional de las simulaciones haciendo que el análisis de casos complejos se vuelva prohibitivo.

Otro trabajo que reviste interés es la disertación doctoral presentada en 2021 por A. B. Kebbie-Anthony [41], orientada al estudio de inestabilidades aeroelásticas en sistemas que incluyen UAVs para misiones HALE con configuración de alas unidas. En su trabajo el autor resaltó la necesidad de contar con modelos aeroelásticos no lineales que sean capaces de simular inestabilidades y el comportamiento de los sistemas luego de las inestabilidades. En este sentido, la implementación computacional presentada por A. B. Kebbie-Anthony se desarrolló dentro del paradigma de la co-simulación y se compone de un modelo aerodinámico basado en el UVLM, un modelo estructural basado en elementos finitos y un modelo de interacción entre ambos. A pesar de que la formulación que utilizó el autor es análoga a la utilizada por L. Ceballos en su trabajo [39], su gran contribución es la incorporación del método de multipolo rápido (FMM, por sus siglas en inglés: *Fast Multipole Method*) para acelerar los cálculos y reducir el costo computacional asociado al modelo aerodinámico. Por otro lado, A. B. Kebbie-Anthony incorporó en su implementación un modelo para representar los efectos de degradación estructural causados por las inestabilidades aeroelásticas, permitiendo identificar daño en los componentes estructurales en estados post-críticos.

Las contribuciones del trabajo de A. B. Kebbie-Anthony son valiosas y abren un gran abanico de posibilidades para profundizar los estudios aeroelásticos en JWAs. No obstante, la linealidad del modelo estructural y la incorporación de un método de reducción de orden también lineal representan limitaciones a la hora de modelar el *pandeo aerodinámico* y otros comportamientos aeroelásticos que son inherentemente no lineales.

El último trabajo resaltado en esta sección es el artículo presentado en 2022 por J. Liang y sus colegas [42]. Los autores propusieron un método de modelado eficiente para aeronaves con alas unidas que incluye una fuerza de empuje (debida a una planta motriz) sobre las alas. El modelo estructural utilizado se basó en el modelo de vigas geoméricamente exacto el presentado por D. H. Hodges [43] incluyendo una condición de compatibilidad en la orientación para garantizar la existencia y unicidad de las rotaciones. Las cargas provenientes del fluido circundante que actúan sobre el sistema se calculan con la formulación aerodinámica de estado finito [32] lo que reduce el costo computacional de las simulaciones.

De entre todos los aportes del trabajo encabezado por J. Liang, el más significativo radicó en la incorporación de una carga externa, en este caso debida al empuje, en la formulación. Esta implementación permite interpretar cómo este tipo de cargas afectan el desempeño de las configuraciones de alas unidas frente a las inestabilidades aeroelásticas como el *pandeo aerodinámico*. Si bien las conclusiones de los autores fijaron bases sólidas sobre las cuales es posible continuar investigando, las antes mencionadas limitaciones del modelo aerodinámico utilizado hacen necesario visitar los resultados un modelo con más representatividad.



## I. 3 Alcance, objetivos y contribuciones

Luego de haber introducido el contexto general en el que este trabajo se sitúa y haber recorrido los antecedentes bibliográficos relacionados al mismo, se describen el alcance, los objetivos y las contribuciones. El alcance refiere a los límites que encasillan el trabajo de investigación, los objetivos exponen las metas perseguidas por el mismo, y las contribuciones reseñan los aportes que se realizaron durante el proceso.

### I. 3. 1 Alcance

En esta tesis, se desarrolla una herramienta computacional bajo el paradigma de la co-simulación destinada a resolver el problema multi-físico que se plantea al estudiar las inestabilidades aeroelásticas (principalmente *flutter* y *pandeo aerodinámico*) en aeronaves con alas unidas. Esta herramienta es utilizada para analizar la respuesta de diversos sistemas que representan casos de estudio de interés y permiten evaluar sus potencialidades y desempeño.

Desde el punto de vista multi-físico, se desarrollan un modelo estructural, un modelo aerodinámico y un modelo de interacción, que permite combinar los dos anteriores. Para cada modelo, a su vez, se desarrolla un componente de software encapsulado que se integra en un único sistema que controla el intercambio de información. Aunque los detalles sobre las técnicas y procesos de implementación computacional exceden el alcance de este trabajo y no se exponen aquí, todo el desarrollo se realiza bajo el paradigma de la programación orientada a objetos (OOP, por sus siglas en inglés: *Object Oriented Programming*) e incorporando técnicas de computación de alto desempeño (HPC, por sus siglas en inglés: *High Performance Computing*) ([44], [45]). La herramienta computacional se desarrolla favoreciendo la generalidad en su aplicación, por lo que permite acomodar diversos cuerpos con características geométricas, cinemáticas y constitutivas diferentes.

El modelo estructural se basa en el método de los elementos finitos (FEM, por sus siglas en inglés: *Finite Element Method*) y consiste en un modelo de elementos de viga no lineales. En el desarrollo se utilizan las hipótesis clásicas de la teoría de Timoshenko y se incorporan las no linealidades geométricas de Von Kármán para construir un modelo enriquecido, que permite representar deformaciones moderadas. Además, se utilizan funciones de forma vinculadas, que permiten suprimir los efectos de bloqueo membranar y por corte, dando lugar a elementos tridimensionales de dos nodos y seis grados de libertad por nodo.

El modelo aerodinámico tiene sus bases en el método de red de vórtices inestacionario y no lineal (NLUVLM, por sus siglas en inglés: *Non-Linear Unsteady Vortex Lattice Method*). El mismo considera un flujo a elevado número de Reynolds, no viscoso e incompresible (barotrópico), donde se distribuyen singularidades (vórtices). Este tipo de modelos se denominan dominados por vorticidad y permiten captar adecuadamente las cargas de sustentación sobre superficies portantes. Además, permiten simular la interacción aerodinámica entre los cuerpos rígidos y flexibles que componen un sistema. Como contrapartida, el método presenta ciertas limitaciones para la determinación de la resistencia aerodinámica y para la representación algunos fenómenos de difusión. Los cuerpos sustentadores (partes del sistema sobre los que se calculan cargas aerodinámicas) se representan a partir de su superficie media, mientras que el resto de los cuerpos se describen considerando su superficie exterior. Las estelas de los cuerpos se modelan como sábanas vorticosas libres de fuerza que evolucionan con la velocidad local del flujo.

El modelo de interacción es de tipo fuerte [40] ya que, si bien admite el uso de distintos intervalos temporales para la simulación estructural y la aerodinámica, la comunicación entre ambos es bidireccional y fuerza la compatibilidad entre las soluciones en todos los pasos [15]. Este tipo de

interacción favorece la estabilidad de la simulación, aunque fija ciertas restricciones a la hora de definir los intervalos de tiempo utilizados. El procedimiento para la transferencia de variables entre los modelos se basa en conceptos cinemáticos y de equilibrio, y garantiza los principios de conservación, dando lugar así a un sistema dinámico acoplado. Por último, las ecuaciones de gobierno del sistema dinámico resultante se integran en el tiempo con el método predictor corrector de cuarto orden desarrollado por J. W. Hamming [46].

Para determinar la aparición de inestabilidades aeroelásticas se realizan simulaciones a partir de arranques impulsivos y se evalúa la respuesta del sistema en el dominio del tiempo. En el caso del *flutter*, se identifican velocidades críticas a partir de las cuales se desarrollan LCO sostenidas. Para identificar el *pandeo aerodinámico*, se investiga la singularidad matemática de la matriz de rigidez global del sistema y el comportamiento de la energía elástica del mismo.

En cuanto a la obtención de resultados, se realizan simulaciones que permiten validar y verificar la herramienta desarrollada, para luego dar lugar a estudios más específicos. El foco está puesto en evaluar la aplicabilidad, confiabilidad y versatilidad de la herramienta, para demostrar su potencialidad para los análisis que se pretenden. En definitiva, se establece que, a lo sumo con mínimas modificaciones y/o adaptaciones, la herramienta implementada es capaz de analizar de forma eficiente numerosos casos de estudio referidos a la FSI, en general, y a las JWAs, en particular.

### I. 3. 2      Objetivos

El objetivo más general de este trabajo es desarrollar íntegramente una herramienta computacional de co-simulación que permita analizar inestabilidades aeroelásticas, representando adecuadamente el fenómeno de *pandeo aerodinámico*, en aeronaves con configuración de alas unidas. La herramienta debe, a su vez, ser robusta, confiable, eficiente y de aplicación general.

A partir del objetivo general se identifican los siguientes objetivos específicos:

- Desarrollar y formular consistentemente un modelo estructural de elementos finitos de viga no lineales que combine las hipótesis básicas de la teoría de Timoshenko con las no linealidades de Von Kármán, que incluya, además, deformaciones por alabeo y evite bloques por corte y por efectos membranales.
- Evaluar la posibilidad de aplicar métodos de reducción de orden en el modelo estructural que permitan reducir el costo computacional y adaptar, si fuese necesario, los pasos de tiempo de simulación.
- Verificar y validar los resultados obtenidos de la aplicación de la herramienta desarrollada en casos de estudio donde se predigan inestabilidades aeroelásticas.
- Analizar adecuadamente casos de estudio representativos de sistemas que incluyan JWA y evaluar la respuesta de los mismos frente a la aparición del *pandeo aerodinámico* y su posible interacción con el *flutter*.
- Desarrollar métodos para la interacción de tipo fuerte y compatibilización entre el componente estructural y el componente aerodinámico que eviten incurrir en tiempos de simulación excesivos.
- Completar la formación del doctorando como recurso humano y confeccionar esta tesis conducente al grado de doctor.

### I. 3. 3 Contribuciones

En esta sección se detallan las contribuciones que surgen del desarrollo del presente trabajo y en la persecución de los objetivos antes mencionados. Evidentemente, la contribución más importante es la herramienta en sí misma que, dadas sus características, representa una base robusta y confiable para estudios relacionados al *pandeo aerodinámico* en aeronaves con configuración de alas unidas.

A continuación, se exponen los puntos que también representan aportes considerables, a saber:

- Una implementación computacional desarrollada bajo el OOP, incorporando técnicas de HPC y favoreciendo la generalidad en su aplicación. La estructura modular del código permite utilizar, ya sea el código en su totalidad o cualquiera de sus componentes, en diversas aplicaciones con modificaciones mínimas.
- La formulación completa del modelo estructural basada íntegramente en el álgebra de tensores que, siguiendo un método de desarrollo semi-inverso, describe desde las bases cinemáticas hasta la construcción de las matrices elementales asociadas al FEM, incluyendo detalles sobre las relaciones constitutivas y los procesos de aproximación y discretización involucrados. Además de su utilidad directa en la implementación computacional, la formulación presentada constituye una base procedimental para otros desarrollos, ya que detalla un mecanismo consistente de construcción de un modelo de elementos finitos que puede extenderse a otras hipótesis.
- La descripción de los principios de discretización que constituyen la base del UVLM, dentro del modelo aerodinámico. Esta descripción permite interpretar el esquema numérico detrás del método de red de vórtices y las bases que sustentan su implementación.
- Un conjunto de resultados que verifican y validan la herramienta desarrollada. Los detalles aportados en todos los casos analizados son tales que permiten su completa reproducción, constituyendo así una referencia sólida para verificar otros modelos.
- Un procedimiento general para la interacción fuerte entre el modelo estructural y el modelo aerodinámico que no solo permite la utilización de pasos de tiempo distintos en cada modelo, sino que también compatibiliza de forma exitosa el intercambio de información. Este procedimiento de interacción favorece la estabilidad de la simulación sin la necesidad de incorporar mecanismos de estabilización adicionales como amortiguamiento numérico.
- Un conjunto de resultados en casos de estudio de interés asociados al pandeo aerodinámico de JWAs. Los casos de estudio se presentan con todos los datos necesarios para su reproducción, incluyendo detalles sobre las mallas utilizadas, las propiedades constitutivas y geométricas, entre otros.
- Un procedimiento general para la incorporación de métodos de reducción de orden al modelo estructural. Este procedimiento fija las bases para la construcción de sistemas de orden reducido que no sólo minimizan el costo computacional de las simulaciones, sino que favorecen los algoritmos de interacción entre modelos. Al respecto, se presenta un ejemplo numérico que permite evaluar la aplicabilidad de la reducción de orden.

- Una descripción generalizada del *pandeo aerodinámico* que abarca sus bases físicas, las estrategias para su modelado y recomendaciones generales a la hora de incorporarlo en los análisis aeroelásticos.

## I. 4      Contenidos de esta tesis

Luego de este capítulo introductorio donde se presentaron el contexto y la motivación para el desarrollo del presente trabajo de tesis, los antecedentes y las referencias bibliográficas, el alcance, los objetivos y las contribuciones, los contenidos restantes se organizan en otros seis capítulos, a saber:

- El Capítulo 2 presenta la formulación del modelo estructural utilizado, en él se describe el proceso de obtención de las ecuaciones de gobierno del modelo partiendo de las hipótesis cinemáticas y aplicando un método semi-inverso.
- El Capítulo 3 se encuentra íntimamente relacionado al anterior ya que trata el método de aproximación aplicado al modelo estructural que permite, a partir de las ecuaciones de gobierno obtenidas, construir la versión basada en el método de elementos finitos del mismo.
- El Capítulo 4 refiere al modelo aerodinámico. Aquí se describen los principios y fundamentos teóricos que sustentan el método de red de vórtices inestacionario y no lineal utilizado. Asimismo, se exponen los procedimientos de aproximación asociados y los conceptos involucrados en la construcción del modelo numérico que se implementa.
- En el Capítulo 5 se define el modelo de interacción que acopla el modelo estructural con el modelo aerodinámico. Además, se describen algunos conceptos relacionados con la implementación que son indispensables para el desarrollo del modelo computacional global utilizado en la herramienta desarrollada.
- Luego de presentar los modelos en los capítulos anteriores, en el Capítulo 6 se presentan los resultados. Éstos se dividen en cuatro grupos dependiendo de los objetivos que persiguen y las discusiones que de ellos surgen.
- Por último, se presenta un capítulo final con conclusiones, reflexiones y posibles trabajos futuros que se desprenden de este esfuerzo.

Debe mencionarse que algunos de los capítulos mencionados anteriormente cuentan con una serie de apéndices que los preceden. Estos apéndices tratan temas complementarios que contribuyen a los desarrollos e ideas expuestos, pero pueden obviarse para una lectura más fluida. Del mismo modo, si el lector está familiarizado con la construcción de modelos de elementos finitos con las características descriptas y/o con la formulación del método de red de vórtices inestacionario y no lineal, los capítulos 2, 3 y 4 pueden ser excluidos de la lectura.



## Capítulo II: Modelo Estructural-Dinámico

En este capítulo se aborda la descripción y formulación de las ecuaciones de gobierno del sistema estructural-dinámico en estudio desde el punto de vista de un método semi-inverso. Los métodos semi-inversos [47] se caracterizan por desarrollar a priori un enfoque geométrico y cinemático del campo de interés para luego deducir a partir de ese enfoque las ecuaciones de gobierno de manera heurística. De este modo, se logra un proceso sistemático coherente que permite describir el problema en términos de un sistema de ecuaciones consistente.

A continuación, se describe la cinemática del modelo estructural-dinámico que constituye la base para la formulación de las ecuaciones de movimiento y la aproximación por elementos finitos que se utilizará en la implementación. En las expresiones utilizadas aquí, por simplicidad, se omite la dependencia explícita con el parámetro de evolución temporal y, dadas las características del modelo, se asume un espacio euclídeo de tres dimensiones  $\mathbb{R}^3$ . Además, en todos los casos los subíndices con letras griegas ( $\alpha, \beta, \dots$ ) varían entre 2 y 3, mientras que los subíndices latinos ( $i, j, k, \dots$ ) varían de 1 a 3. Por último, salvo que se indique expresamente lo contrario, se asume la notación indexada (notación de Einstein).

### II. 1 Bases Cinemáticas

La viga se concibe como un cuerpo tridimensional continuo cuyo dominio material consiste en una línea  $\mathcal{S}_0 \in \mathbb{R}^3$ , identificada como eje elástico, que posee unida a cada punto un dominio plano  $\mathcal{A}_0$ , llamado sección transversal. Sin perder generalidad, se considera que en una configuración  $\mathcal{B}_0$ , que se asume como referencia, la viga se encuentra en una condición indeformada y sin tensiones, posee eje recto y sección transversal plana y uniforme. La línea  $\mathcal{S}_0$  se asume normal al plano de cada sección transversal y la intersección entre ambos se posiciona en el centro de corte de  $\mathcal{A}_0$ . Por lo tanto, la configuración de referencia de la viga puede describirse en términos de la línea recta  $\mathcal{S}_0$  parametrizada por un mapa  $\boldsymbol{\varphi}_0(s): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3$ , y está constituida por todos los puntos  $\mathbf{X}_0$  físicos ocupados por partículas materiales, es decir

$$\mathcal{S}_0 = \{\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{X}_0 = \boldsymbol{\varphi}_0(s) \quad \forall s \in [0, L]\} \quad (\text{II-1})$$

Donde  $L$  es la longitud de la viga, y  $s$  es la posición de la partícula ubicada en el centro de corte medida sobre la curva (longitud de arco).

Para la descripción de la configuración de referencia (Figura II-1) se introduce un marco de referencia dextrógiro y ortonormal  $\mathcal{E} = \{\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_2, \hat{\mathbf{E}}_3\}$ , con su origen sobre el eje de la viga y orientado de tal manera que  $\hat{\mathbf{E}}_1$  sea tangente al eje de la viga y  $\hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\hat{\mathbf{E}}_3$  estén contenidos en la sección transversal en dirección de los ejes principales de inercia. Además, se introduce un marco de referencia global,

$\mathcal{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  que posee asociado un sistema de coordenadas  $\{X_1, X_2, X_3\}$ , y se relaciona con el marco de referencia  $\mathcal{E}$  a través de una rotación descrita por el tensor  $\varpi$ ,  $\hat{\mathbf{E}}_i = \varpi \hat{\mathbf{n}}_i$ . Por simplicidad, en esta formulación se asume que  $\mathcal{N}$  coincide con  $\mathcal{E}$ , implicando que  $\varpi = \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es el tensor identidad. La configuración de referencia de la viga se describe, entonces, por el campo vectorial  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3$ , que indica la posición de un punto arbitrario  $p$  sobre la configuración de referencia.

$$\mathcal{B}_0 = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{X} = X_i \hat{\mathbf{E}}_i = \mathbf{R}_0(X_1) + \mathbf{R}(X_2, X_3)\} \quad (\text{II-2})$$

Donde, por tratarse de la configuración de referencia  $s = X_1$ . Además,

$$\mathbf{R}_0(X_1) = X_1 \hat{\mathbf{E}}_1, \quad \mathbf{R}(X_2, X_3) = X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II-3})$$

$\mathbf{R}_0(X_1)$  describe la posición de un punto  $\mathbf{X}_0$  a lo largo del eje de la viga, mientras que  $\mathbf{R}(X_2, X_3)$  representa la posición relativa del punto  $p$  respecto al centro de corte  $o$  (intersección con el eje de la viga) en la sección transversal. Luego,  $\hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\hat{\mathbf{E}}_3$  describen el plano de la sección transversal  $\mathcal{A}_0$ .

A partir de la configuración de referencia, se describe la configuración deformada cuyo dominio  $\mathcal{B}$  se compone de todos los puntos que previo al proceso de deformación pertenecían a  $\mathcal{B}_0$ . En  $\mathcal{B}$ , una sección arbitraria  $\mathcal{A}$  se define como los puntos que en la configuración de referencia ocupaban la sección  $\mathcal{A}_0$  unida a un punto particular sobre el eje elástico  $\mathcal{S}_0$ , identificado con la coordenada  $X_1$ . Además, la curva que describe el eje elástico en la configuración de referencia se denomina  $\mathcal{S}$ .

La deformación, entendida como el paso de la viga de la configuración de referencia a la configuración actual, puede describirse como una transformación que mapea los puntos en el dominio de referencia en aquellos en el dominio actual, esto es

$$\chi: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}, \quad \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}) \quad (\text{II-4})$$

Donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  representa el campo vectorial asociado a los puntos de la configuración actual. Además, existe la transformación inversa dada por

$$\chi^{-1}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_0, \quad \mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}) \quad (\text{II-5})$$

La existencia de la transformación (II-4) y de su inversa (II-5) aseguran que todas las cantidades (vectores y tensores) que se utilizan en la formulación del presente modelo puedan definirse ya sea en la configuración de referencia  $\mathcal{B}_0$ , o en la configuración actual  $\mathcal{B}$ . Las primeras suelen llamarse cantidades *materiales* dado que  $\mathcal{B}_0$  es independiente de las transformaciones de observación [48], mientras que aquellas definidas en  $\mathcal{B}$  son llamadas *espaciales*.

La cinemática del modelo propuesto dependerá de la caracterización de la transformación  $\chi$  dada en (II-4). Para ello, se asumen las siguientes hipótesis:

### H1. SOBRE LOS EFECTOS QUE SE CONSIDERAN EN LA DEFORMACIÓN.

La posición de un punto sobre la sección transversal  $\mathcal{A}$  en la configuración actual se compone de tres efectos superpuestos y relativos a la configuración de referencia: i) la traslación pura de la sección; ii) la rotación pura de la sección; y iii) la deformación por alabeo de la sección en dirección de su normal.

### H2. SOBRE LA TRASLACIÓN DE LA SECCIÓN.

Durante la traslación, la sección se desplaza como un cuerpo rígido siguiendo el movimiento de su centro de corte.

### H3. SOBRE LA ROTACIÓN DE LA SECCIÓN.

La rotación de la sección equivale a un movimiento de cuerpo rígido. Esto es, la sección transversal no modifica su forma o tamaño durante la rotación, debido a que los efectos de Poisson son despreciables.

### H4. SOBRE EL ALABEO DE LA SECCIÓN.

El alabeo de la sección se produce únicamente en dirección normal a la misma, y se mide a partir de la sección transversal proyectada (STP). La STP describe la posición de la sección luego de la traslación y la rotación mencionadas en **H1** como i) y ii), respectivamente, es decir sin considerar la deformación por alabeo. El desplazamiento por alabeo en el centro de corte de la sección se asume nulo.

Durante el movimiento, la viga pasa de la configuración de referencia  $\mathcal{B}_0$  a la configuración deformada o actual  $\mathcal{B}$ . En la descripción de la configuración actual (Figura II-1), se introduce otro marco de referencia dextrógiro y ortonormal  $e = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , denominado el marco móvil o local. El origen de  $e$  se fija localmente a un punto sobre el eje de la viga, posee un sistema de coordenadas asociado  $\{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$  respectivamente a cada uno de los versores  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , y está orientado de manera tal que  $\hat{e}_1$  es normal al plano de la STP, mientras que  $\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_3$  están contenidos en la STP en dirección de sus ejes principales de inercia.

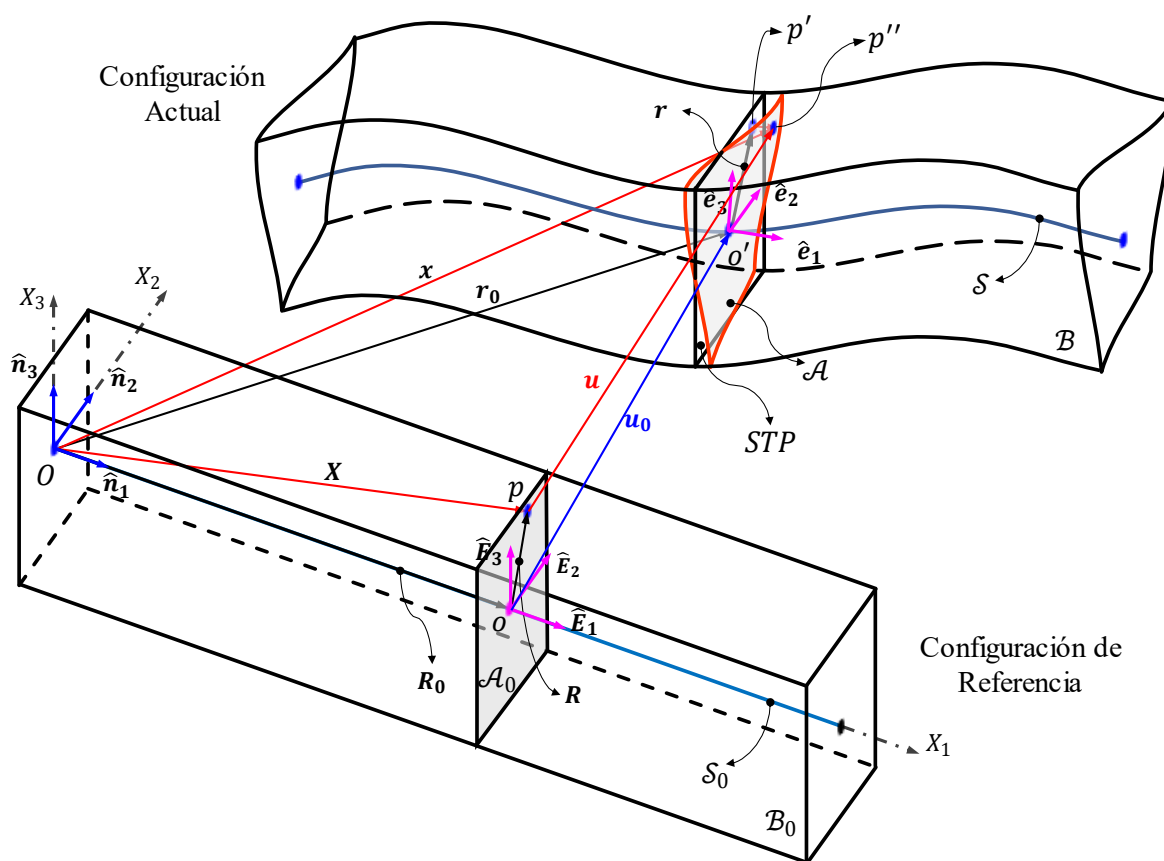


Figura II-1: Descripción geométrica del modelo de viga, configuración de referencia y actual (deformada).

De acuerdo con **H1**, la primer componente del movimiento de un punto arbitrario en el interior de la viga es producto de una traslación de la sección trasversal que lo contiene. Además, como lo indica la hipótesis **H2**, la traslación se produce considerando a la sección como un cuerpo rígido. Por lo tanto, dada una sección arbitraria identificada a partir de su posición sobre el eje de la viga con  $X_1$ , este movimiento se describe con el desplazamiento del centro de corte de dicha sección que, luego de la

deformación, pasa del punto  $o$  en la configuración de referencia al punto  $o'$  en la configuración actual. Siguiendo la Figura II-1, se tiene

$$\mathbf{u}_0(X_1) = \overline{oo'} = \mathbf{r}_0(X_1) - \mathbf{R}_0(X_1) = \mathbf{r}_0(X_1) - X_1 \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-6})$$

Donde el vector  $\mathbf{r}_0(X_1)$  representa la posición del centro de corte de la sección transversal en la configuración deformada.

Además de la traslación, para alcanzar la configuración actual, una sección transversal arbitraria de la viga que inicialmente se encuentra en un plano normal a  $\hat{\mathbf{E}}_1$  y que contiene a  $\hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\hat{\mathbf{E}}_3$ , experimenta una rotación. La rotación, mencionada en **H3**, define la orientación del sistema móvil  $e$  asociado a la STP y se describe introduciendo un tensor ortogonal  $\Lambda$  que la representa. De este modo, para cada sección sobre el eje elástico de la configuración de referencia, el operador  $\Lambda$  mapea el sistema de referencia cartesiano  $\mathcal{E}$  en el sistema móvil  $e$ . Consecuentemente,  $\Lambda$  resulta un tensor de rotación ortogonal de parámetro único ya que será función solamente de la coordenada  $X_1$ . Puede expresarse entonces que  $\Lambda: X_1 \rightarrow SO(3)$ , donde  $SO(3)$  representa el grupo especial ortogonal en  $\mathbb{R}^3$ , y

$$\hat{\mathbf{e}}_i(X_1) = \Lambda(X_1) \hat{\mathbf{E}}_i, \quad \Lambda(X_1) = \hat{\mathbf{e}}_i(X_1) \otimes \hat{\mathbf{E}}_i, \quad i = 1,2,3 \quad (\text{II-7})$$

Donde  $\otimes$  indica producto tensorial.

Luego de la traslación y la rotación de la sección, se define un nuevo vector  $\mathbf{r}$  contenido en la STP que representa la posición relativa del punto  $p'$  respecto al centroide  $o'$ . Bajo las consideraciones anteriores, se tiene

$$\mathbf{r}(X) = \eta_\alpha \hat{\mathbf{e}}_\alpha(X_1) = \Lambda(X_1) \mathbf{R}(X_2, X_3) \quad (\text{II-8})$$

Siguiendo **H4**, el efecto de la deformación por alabeo de la sección se considera a partir de la STP y se asume en dirección normal a la misma (ver Figura II-2 a)). Esto significa que la geometría de la STP no se verá afectada por la deformación por alabeo y seguirá representando la proyección de la sección en la configuración actual sobre el plano normal a  $\hat{\mathbf{e}}_1$ . En este sentido, y como se muestra en las Figura II-2 a) y en la Figura II-2 c), un punto  $p'$  sobre la STP ubicará la posición  $p''$  luego de la deformación por alabeo, permitiendo definir el desplazamiento por alabeo a partir de un vector  $\mathbf{r}_\omega$  que tendrá su punto de origen sobre la STP.

$$\mathbf{r}_\omega(X) = \overline{p'p''} = r_\omega \hat{\mathbf{e}}_1 = r_\omega \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1, \quad r_\omega = \|\mathbf{r}_\omega\| \quad (\text{II-9})$$

Donde  $r_\omega$  representa el campo escalar que caracteriza el desplazamiento por alabeo cuyos detalles serán expuestos más adelante.

Habiendo definido los tres efectos mencionados en **H1**, se describe a partir de ellos la transformación asociada a la configuración actual de la viga presentada en (II-4).

$$\chi(X) = \mathbf{x}(X) = \mathbf{r}_0(X_1) + \mathbf{r}(X) + \mathbf{r}_\omega(X) = \mathbf{r}_0(X_1) + \Lambda \mathbf{R}(X_2, X_3) + r_\omega(X) \Lambda(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-10})$$

Donde y se utilizaron las expresiones (II-8) y (II-9) y el campo vectorial  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  indica la posición de un punto arbitrario  $p''$  sobre la configuración deformada utilizando como referencia el origen del sistema  $\mathcal{N}$ .

En este punto se introduce el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$  como un campo vectorial que relaciona la posición de un punto en la configuración de referencia y la posición del mismo punto en la configuración deformada. Esto es,



$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \chi(\mathbf{X}) - \mathbf{X} = \mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X} \quad (\text{II-11})$$

De donde, a partir de (II-2) y (II-10), resulta

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{r}_0(X_1) + \Lambda(X_1)\mathbf{R}(X_2, X_3) + r_\omega(\mathbf{X})\Lambda(X_1)\widehat{\mathbf{E}}_1 - (\mathbf{R}_0(X_1) + \mathbf{R}(X_2, X_3)) \quad (\text{II-12})$$

Reordenando e introduciendo (II-6),

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(X_1) + [\Lambda(X_1) - \mathbf{I}]\mathbf{R}(X_2, X_3) + r_\omega(\mathbf{X})\Lambda(X_1)\widehat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-13})$$

La expresión (II-13) es válida para todos los puntos de la viga y, en particular, sobre la configuración de referencia se verifica que  $\mathbf{u}(\mathbf{X})|_{\mathcal{B}_0} = \mathbf{0}$ .

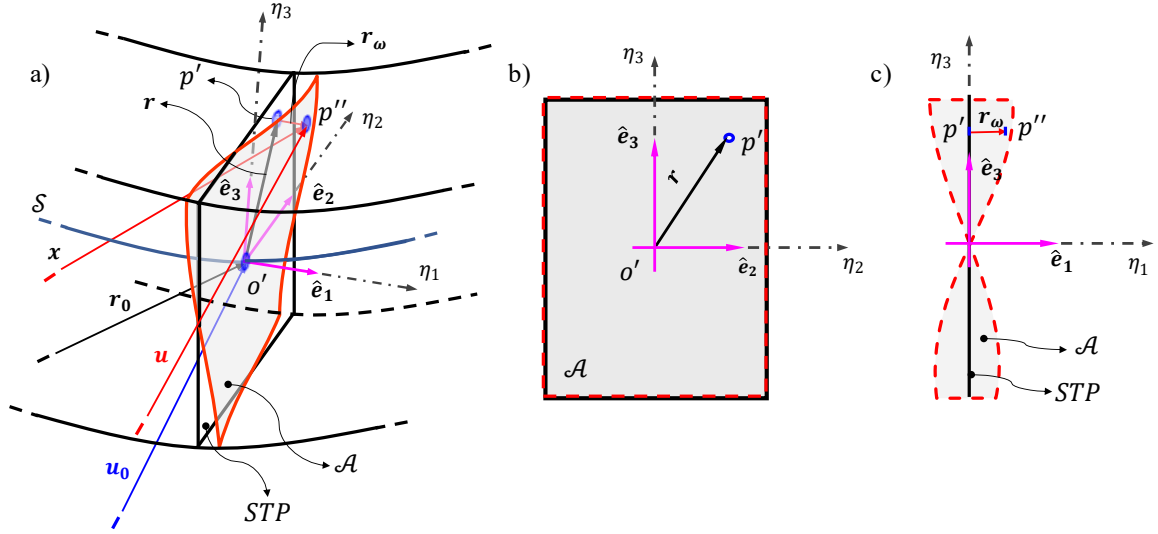


Figura II-2: Deformación por alabeo, desplazamiento del punto  $p'$ . a) Perspectiva. b) Vista frontal. c) Vista lateral.

## II. 2 Medidas de Deformación

La siguiente etapa en la formulación del modelo estructural-dinámico es la definición de las medidas de deformación estándares de la viga bajo las consideraciones cinemáticas expuestas. En particular, el tensor gradiente de deformación y el tensor gradiente de desplazamiento serán utilizados en los desarrollos. Por otro lado, con el objetivo de utilizar la configuración de referencia como base de la formulación, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange será necesario para plantear ecuaciones de equilibrio y de balance.

La teoría tridimensional de la mecánica de medios continuos no lineal define al gradiente de deformación como el gradiente del mapa  $\chi(\mathbf{X})$  respecto a las componentes del campo  $\mathbf{X}$ , es decir

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \chi(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{x}(\mathbf{X}) \quad (\text{II-14})$$

Donde,  $\partial(\cdot)$  indica derivada parcial y el operador gradiente se define como

$$\nabla(\cdot) \equiv \frac{\partial(\cdot)}{\partial X_i} \otimes \hat{\mathbf{E}}_i \quad (\text{II-15})$$

excepto que se indique expresamente lo contrario.

Por su parte, el gradiente de desplazamientos se define como el gradiente del campo de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{X})$  respecto a las componentes del campo  $\mathbf{X}$ , es decir

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) \quad (\text{II-16})$$

La relación entre  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{H}$  es directa y está dada a través de (II-13) como sigue

$$\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\mathbf{x}(\mathbf{X}) - \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} - \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{F} - \mathbf{I} \quad (\text{II-17})$$

Para calcular el tensor gradiente de desplazamientos, la expresión (II-17) debe evaluarse a partir del campo de desplazamientos obtenido con las hipótesis cinemáticas del modelo. Esto es, teniendo en cuenta (II-13),

$$\mathbf{H} = \frac{\partial(\mathbf{u}_0(X_1) + [\Lambda(X_1) - \mathbf{I}]\mathbf{R}(X_2, X_3) + r_\omega(\mathbf{X})\Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1)}{\partial \mathbf{X}} \quad (\text{II-18})$$

Luego de operar con los términos de la expresión (II-18), de acuerdo a lo mostrado en el Apéndice II. A, el tensor gradiente de desplazamientos resulta

$$\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I} + \mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C} \quad (\text{II-19})$$

Donde  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X})$  es el vector de medida de la deformación axial y resulta (ver Apéndice II. A),

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_1} + \hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}_0(X_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial \Lambda(X_1)}{\partial X_1} X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_1 - \Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-20})$$

Mientras que  $\mathbf{a}_\omega = \mathbf{a}_\omega(\mathbf{X})$  es el vector de medida de la deformación axial por alabeo y, según el Apéndice II. A, resulta

$$\mathbf{a}_\omega(\mathbf{X}) = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_1} = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_1} \Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega(\mathbf{X}) \frac{\partial \Lambda(X_1)}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-21})$$

Por último,  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{X})$  se encuentra descrito en el Apéndice II. A y es el tensor de medida de la deformación transversal por alabeo,

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_\alpha} \Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II-22})$$

En este punto, comparando la definición del tensor gradiente de desplazamientos (II-17) con su expresión obtenida en esta formulación (II-19), se deduce que el tensor gradiente de deformación resulta

$$\mathbf{F} = \mathbf{H} + \mathbf{I} = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda + \mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C} \quad (\text{II-23})$$

Como se mencionó, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange será utilizado en la obtención de ecuaciones de equilibrio y de balance. Por lo tanto, su expresión general debe ser

introducida en este punto. Teniendo en cuenta lo anterior, resulta conveniente expresar al tensor de Green-Lagrange como una función del tensor gradiente de desplazamiento, esto es

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}) \quad (\text{II-24})$$

Finalmente, introduciendo (II-19) en (II-24) y siguiendo el desarrollo propuesto en el Apéndice II. B, se tiene

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{E}_\omega \right) \quad (\text{II-25})$$

Donde  $\mathbf{E}_\omega$  es un tensor que contiene los efectos de deformación por alabeo y se encuentra explicitado en la expresión (II. B.15) del Apéndice II. B.

Un concepto importante que merece una discusión particular surge de analizar la expresión (II-25) y su deducción a partir de (II-24). Generalmente, se denomina como “parte lineal” del tensor de Green-Lagrange a los primeros dos términos de la expresión (II-24) y, por consiguiente, como “parte no lineal” al último término de dicha expresión. Sin embargo, tal como se expone en el Apéndice II. B (expresiones (II. B.14) y (II. B.15)) los términos  $\mathbf{H} + \mathbf{H}^T$  del tensor de Green-Lagrange se cancelan cuando se expande el último término ( $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ ). Este hecho requiere una atención particular a la hora de formular modelos que se aproximan al primer orden (orden lineal) para no incurrir errores de coherencia en la deducción de las ecuaciones de gobierno.

## II. 3 Aproximaciones Cinemáticas

Introducir aproximaciones en la formulación cinemática implica adaptar la versión más general de un modelo a un análisis particular cuando el elevado nivel de detalle en la representación va en desmedro del análisis mismo. En este caso, se incorporan ciertas hipótesis significativas que tienen validez suficiente como para no afectar sensiblemente los resultados y predicciones que se desean obtener.

Las bases cinemáticas expuestas en las secciones anteriores se reducen a las expresiones (II-13) y (II-25), para el campo de desplazamientos y para el campo de deformaciones, respectivamente. No obstante, las hipótesis planteadas responden a un modelo geoméricamente exacto y que admite deformaciones finitas. La exactitud geométrica hace referencia a la consideración de un tensor de rotación válido para la representación de rotaciones finitas, recordando que

$$\Lambda: X_1 \rightarrow SO(3) \quad (\text{II-26})$$

puede escribirse al tensor de rotación  $\Lambda$  como sigue [49],

$$\Lambda = \exp[\tilde{\Psi}] = I + \tilde{\Psi} + \frac{1}{2!} \tilde{\Psi}^2 + \frac{1}{3!} \tilde{\Psi}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{\Psi}^n + \dots \quad (\text{II-27})$$

Donde  $\exp[\cdot]$  representa la función exponencial matricial. Además,  $\tilde{\Psi}$  es un tensor antisimétrico [49] que se define a partir de su vector axial  $\boldsymbol{\psi}$ , es decir

$$\tilde{\Psi} = \text{skew}[\boldsymbol{\psi}] = \begin{bmatrix} 0 & -\psi_3 & \psi_2 \\ \psi_3 & 0 & -\psi_1 \\ -\psi_2 & \psi_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi} \times \boldsymbol{v} = \tilde{\Psi} \boldsymbol{v}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3 \quad (\text{II-28})$$

En este caso,  $\boldsymbol{\psi} \in \mathbb{R}^3$  representa el vector de rotación instantánea y  $\psi_i$  es cada una de sus componentes.

Por otro lado, admitir deformaciones finitas significa asumir que los términos de orden superior (funciones de las deformaciones) en el tensor de deformaciones de Green-Lagrange son suficientemente importantes como para conservarlos en la formulación. En general, esta asunción involucra relaciones no lineales complejas entre las deformaciones que sufre la viga y producen una carga de cómputo significativa que, bajo ciertas condiciones, es deseable reducir.

A partir de lo anterior, se incluyen a las bases cinemáticas del modelo las siguientes hipótesis adicionales:

**H5. SOBRE LAS ROTACIONES.**

Las rotaciones se asumen pequeñas y se aproximan hasta el primer orden.

**H6. SOBRE LAS DEFORMACIONES.**

Las deformaciones se asumen moderadas y, aunque en general se aproximan hasta el primer orden, se conservan algunos términos no lineales.

Ambas consideraciones se analizan con un poco más de detalle a continuación, para luego ser aplicadas a las expresiones deducidas con anterioridad.

## II. 3. 2 Aproximación de las rotaciones

Asumir que las rotaciones a las cuales se somete el cuerpo en análisis son, de algún modo, pequeñas tiene varias implicancias en la formulación. En otras palabras, incorporar la hipótesis **H5** supone modificaciones a las bases cinemáticas expuestas. El primer paso consiste en definir qué se entiende por una “rotación pequeña” y cómo se traduce tal definición en las expresiones utilizadas. En este sentido, S. Hassanpour y G. R. Heppler [50] proponen un método consistente para analizar rotaciones infinitesimales y definir los límites y los efectos de aproximarlas hasta el primer orden. En efecto, en lo que sigue se considerará que las rotaciones son lo suficientemente pequeñas como para despreciar cualquier término de orden cuadrático o superior.

Dado que, como se mencionó, las rotaciones se definen a partir del tensor de rotación  $\Lambda$ , las aproximaciones mencionadas deben aplicarse sobre su definición. Esto es, considerando (II-27), el tensor de rotación puede escribirse como

$$\Lambda = \exp[\tilde{\Psi}] = \boldsymbol{I} + \tilde{\Psi} + g(\boldsymbol{\psi}), \quad g(\boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2!} \tilde{\Psi}^2 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{\Psi}^n + \dots = O(|\boldsymbol{\psi}|^2) \quad (\text{II-29})$$

Donde se omitió la dependencia de la coordenada espacial, los términos de orden cuadrático en adelante se agruparon en la función tensorial  $g(\boldsymbol{\psi})$  y  $O(\cdot)$  indica la notación de orden de Bachmann-Landau [51]. Luego, la aproximación hasta el primer orden resulta

$$\Lambda \cong \Lambda_{\text{lin}} = \boldsymbol{I} + \tilde{\Psi} = O(|\boldsymbol{\psi}|) \quad (\text{II-30})$$

Donde se desprecian todos los términos de orden cuadrático (o superior) en las rotaciones.

Además del tensor de rotaciones, el tensor de curvaturas figura como un parámetro importante en la descripción cinemática del modelo. Este tensor representa la derivada parcial respecto a la

coordenada espacial del tensor de rotaciones [52], y debe aproximarse en base a las hipótesis propuestas. De manera resumida, el tensor de curvaturas se aproxima como sigue

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = \frac{\partial \Lambda_{\text{lin}}}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial \Lambda_{\text{lin}}}{\partial X_1} = O(|\psi|) \quad (\text{II-31})$$

Con lo cual, hasta el primer orden, la derivada del tensor de rotación es igual a aquella de su aproximación lineal, y puede concluirse que las curvaturas se aproximan de igual modo que las rotaciones. Los detalles sobre este proceso de aproximación se exponen en el Apéndice II. C.

Un corolario del proceso de aproximación del tensor de curvaturas, dado en la ecuación (II. C.8) del Apéndice II. C, indica que los términos que impliquen el producto entre el tensor antisimétrico  $\tilde{\Psi}$  y su derivada respecto a la coordenada espacial son de orden cuadrático en las rotaciones. Luego, serán despreciados en la formulación, a saber

$$\frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} \tilde{\Psi} = O(|\psi|^2), \quad \tilde{\Psi} \frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} = O(|\psi|^2) \quad (\text{II-32})$$

### Características del tensor de rotación aproximado

La aproximación dada por (II-30) genera condiciones que deben considerarse. En primer lugar, se analiza la ortogonalidad de las rotaciones luego de la aproximación, esto es verifica si  $\Lambda_{\text{lin}} \Lambda_{\text{lin}}^T = \Lambda_{\text{lin}}^T \Lambda_{\text{lin}} = \mathbf{I}$ . Se tiene entonces

$$\Lambda_{\text{lin}} \Lambda_{\text{lin}}^T = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi})(\mathbf{I} + \tilde{\Psi})^T = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi})(\mathbf{I} + \tilde{\Psi}^T) = \mathbf{I} + \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^T + \tilde{\Psi} \tilde{\Psi}^T \quad (\text{II-33})$$

$$\Lambda_{\text{lin}}^T \Lambda_{\text{lin}} = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi})^T (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}) = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}^T)(\mathbf{I} + \tilde{\Psi}) = \mathbf{I} + \tilde{\Psi}^T + \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} \quad (\text{II-34})$$

Considerando la condición de antisimetría del tensor  $\tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^T = \mathbf{0}$ . Por otro lado, debe tenerse en cuenta que  $\tilde{\Psi} \tilde{\Psi}^T = O(|\psi|^2)$ ,  $\tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} = O(|\psi|^2)$ . De esta manera, la ortogonalidad del tensor de rotaciones linealizado se verifica hasta el primer orden, lo cual es consistente con el análisis propuesto.

Otra característica importante del tensor linealizado, y quizás la más relevante en lo que refiere al modelo presentado aquí, es la conmutatividad en rotaciones sucesivas. En condiciones normales (sin linealización) una sucesión de rotaciones se representa a partir del producto de los tensores asociados a cada una de ellas y, como es sabido, no admite conmutatividad. No obstante, cuando se trabaja con tensores linealizados esta condición se relaja. En efecto, supóngase sin pérdida de generalidad que se tienen dos rotaciones sucesivas representadas por tensores linealizados  $\Lambda_{\text{lin}_A}$  y  $\Lambda_{\text{lin}_B}$ , luego la rotación total para el primer ordenamiento en la secuencia es

$$\Lambda_{AB} = \Lambda_{\text{lin}_A} \Lambda_{\text{lin}_B} = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}_A)(\mathbf{I} + \tilde{\Psi}_B) = \mathbf{I} + \tilde{\Psi}_A + \tilde{\Psi}_B + \tilde{\Psi}_A \tilde{\Psi}_B \quad (\text{II-35})$$

Mientras que para el segundo ordenamiento resulta

$$\Lambda_{BA} = \Lambda_{\text{lin}_B} \Lambda_{\text{lin}_A} = (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}_B)(\mathbf{I} + \tilde{\Psi}_A) = \mathbf{I} + \tilde{\Psi}_B + \tilde{\Psi}_A + \tilde{\Psi}_B \tilde{\Psi}_A \quad (\text{II-36})$$

En (II-35) y (II-36) se observa que si se desprecian los términos de orden cuadrático ( $\tilde{\Psi}_A \tilde{\Psi}_B$  y  $\tilde{\Psi}_B \tilde{\Psi}_A$ , respectivamente) la sucesión de rotaciones es independiente del orden, es conmutativa,  $\Lambda_{AB} = \Lambda_{BA}$ . Con base en esta conclusión, cada componente de rotación puede tratarse de forma independiente y aquellas rotaciones que se realicen sobre el mismo eje pueden, simplemente, sumarse.

### II. 3. 3 Aproximación de las deformaciones

La introducción de aproximaciones en las deformaciones implica reducir la complejidad del tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Sin embargo, simplificar excesivamente el tensor de deformaciones, sumado a las aproximaciones ya introducidas a las rotaciones, puede ocultar efectos o fenómenos que suelen ser de interés. Por lo tanto, imponer a priori una aproximación al primer orden (lineal) tal y como se hizo con las rotaciones no es adecuado. De ahí que la hipótesis **H6** hace mención a deformaciones “moderadas”, permitiendo realizar consideraciones adicionales de acuerdo con el método semi-inverso de formulación.

En primer lugar, debe considerarse el campo de desplazamientos expuesto en la expresión (II-13), sobre el cual se aplican las aproximaciones propuestas para las rotaciones. En este caso, dejando por un momento de lado el término correspondiente al alabeo que será analizado más adelante, se tiene

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \cong \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0 + \tilde{\Psi} \mathbf{R} \quad (\text{II-37})$$

Seguidamente, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange obtenido para la viga bajo las hipótesis cinemáticas propuestas es la expresión a analizar. Se parte entonces de (II-25), que se repite aquí por comodidad

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{E}_\omega \right) \quad (\text{II-38})$$

Cabe aclarar que el término asociado con la deformación por alabeo  $\mathbf{E}_\omega$  se omite en este desarrollo puesto que será analizado por separado a continuación.

Luego, aplicando las hipótesis de aproximación según el procedimiento detallado en el Apéndice II. D, el tensor de deformaciones de Green-Lagrange aproximado resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cong \bar{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} & \left( \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^T + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & + \left[ \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^T + \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \\ & \left. + \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-39})$$

Mientras que, si se separan sus componentes, teniendo en cuenta que  $\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_j$ , se tiene

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \quad (\text{II-40})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{12} = \bar{\mathbf{E}}_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} - \tilde{\Psi}_{21} - \tilde{\Psi}_{2i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \right) \quad (\text{II-41})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{13} = \bar{\mathbf{E}}_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} - \tilde{\Psi}_{31} - \tilde{\Psi}_{3i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \right) \quad (\text{II-42})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{23} = \bar{\mathbf{E}}_{32} = \bar{\mathbf{E}}_{33} = \bar{\mathbf{E}}_{22} = 0 \quad (\text{II-43})$$

Donde  $\bar{u}_i = \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i$ ,  $u_{0i} = \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_i$ ,  $\tilde{\Psi}_{ij} = \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_j$ .

Un detalle adicional surge de considerar (II-37) y relacionarla con las componentes del tensor de Green-Lagrange aproximado. En efecto, si se derivan las componentes del campo de desplazamientos aproximado respecto de las coordenadas espaciales transversales, se tiene

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_\alpha} = \tilde{\Psi}_{i\alpha} = -\tilde{\Psi}_{\alpha i} = O(|\psi|) \quad (\text{II-44})$$

Lo cual relaciona directamente las componentes de rotación con las de deformación. Además, reemplazando (II-44) en las componentes del tensor de deformaciones se recuperan las expresiones clásicas de la literatura de mecánica del continuo [53].

La introducción de (II-44) en las componentes del tensor de deformaciones aproximado deja a la vista que las expresiones (II-40), (II-41), (II-42) y (II-43) poseen términos no lineales en las deformaciones a pesar de las hipótesis de aproximación utilizadas. Como se mencionó, en esta formulación las deformaciones serán consideradas en general como “moderadas”, de forma que no todos los términos no lineales serán despreciados, caso contrario se obtendría un modelo de primer orden clásico donde se pierde la representación de efectos de interés. La conservación de estos términos está asociada al análisis de las deformaciones del eje elástico de la viga y se trata a continuación.

## II. 3. 4 Aproximación de las deformaciones del eje elástico y las no linealidades de Von Kármán

En secciones anteriores se introdujo el vector  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(X_1)$  que representa el desplazamiento de los puntos sobre el eje elástico de la viga como una función de la coordenada espacial  $X_1$  (II-6). La representación cinemática de la viga como un continuo se basa en la geometría de su eje elástico y se pueden arribar a conclusiones e hipótesis interesantes a partir de su vector de desplazamientos. En este sentido, considérese la derivada parcial de  $\mathbf{u}_0$  respecto a  $X_1$ , que es una medida de la deformación del eje elástico y reviste particular interés en la presente formulación.

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} = \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_i \quad (\text{II-45})$$

Cada una de las componentes de (II-45) está asociada a una clase de deformación. La componente en  $\hat{\mathbf{E}}_1$  puede identificarse con la deformación axial, mientras que las componentes en  $\hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\hat{\mathbf{E}}_3$  con las deformaciones transversales en los planos respectivos. De acuerdo con S. Hassanpour y G. R. Heppler [50] la hipótesis de rotaciones pequeñas (aproximadas hasta el orden lineal) permite conmutar el orden de rotación. Luego, cada una de las deformaciones transversales del eje elástico puede interpretarse a partir de la deformada del eje elástico proyectada sobre el plano perpendicular al versor  $\hat{\mathbf{E}}_\alpha$  correspondiente, sin importar en qué orden se realicen las proyecciones.

Para aproximar las deformaciones del eje elástico se asume que a medida que la esbeltez de la viga crece, los efectos transversales son dominantes frente a los efectos axiales. Esto significa que, a partir de una esbeltez moderada, las deformaciones transversales del eje elástico tendrán una implicancia mayor en la cinemática global de la viga que sus contrapartes axiales. Esta suposición puede respaldarse desde dos puntos de vista: i) el del método semi-inverso, y ii) el de la representatividad del modelo.

La construcción de un modelo a partir de un método semi-inverso implica el entendimiento cualitativo de las características del problema [53]. Con este enfoque, la deformación del eje elástico

de una viga relativamente esbelta bajo las hipótesis cinemáticas del modelo tendrá ciertas particularidades. En primer lugar, ninguna deformación debería ser suficientemente grande dado que, de ser así, la descripción de la configuración deformada requerirá de rotaciones finitas, contradiciendo las hipótesis ya establecidas (**H5**). Por otro lado, suponer que una viga esbelta sufre acortamientos significativos implica que los efectos de Poisson serán también significativos para mantener el volumen de la viga, lo cual también contradice las hipótesis planteadas (**H3**). Son, entonces, las deformaciones transversales del eje elástico de la viga las que pueden considerarse “moderadas”, esto es, suficientemente pequeñas como para no incurrir en grandes rotaciones y con efectos dominantes por sobre las deformaciones axiales.

El punto de vista de la representatividad del modelo hace referencia a incorporar la mayor cantidad de efectos o fenómenos posibles sin incurrir en una complejidad excesiva. En relación a las componentes de deformación, esto implica, considerar tanto las deformaciones axiales como las transversales hasta el mínimo orden posible. En este sentido, expandiendo (II-40) se tiene

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \right) \quad (\text{II-46})$$

e incorporando (II-37) y teniendo en cuenta que  $\bar{u}_1 = \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1$ ,

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \frac{\partial (u_{01} + \tilde{\Psi} \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1)}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \right) \quad (\text{II-47})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} + \frac{\partial (\tilde{\Psi} \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1)}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \right) \quad (\text{II-48})$$

En (II-48) pueden identificarse dos términos asociados a las deformaciones axiales, uno lineal y uno cuadrático; un término asociado a las deformaciones por rotación, el segundo; y dos términos asociados a las rotaciones transversales, ambos cuadráticos. Así, el único efecto que se encuentra en dos órdenes distintos es el proveniente de las deformaciones axiales. Luego, el tercer término de (II-48) puede ser despreciado conservando los efectos axiales, al menos hasta el primer orden, lo cual no ocurre con los efectos asociados a las deformaciones transversales.

Ambos enfoques permiten concluir que las deformaciones axiales del eje elástico son suficientemente pequeñas como para conservarlas solo hasta el primer orden, mientras que las deformaciones transversales del eje elástico son de un orden intermedio para el cual, los términos cuadráticos pueden conservarse. Al relacionar esto con las aproximaciones en las rotaciones, donde se fijó como orden de referencia  $O(|\boldsymbol{\psi}|)$ , resulta

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|), \quad \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{02}}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|), \quad \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{03}}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|) \quad (\text{II-49})$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|^2) \quad (\text{II-50})$$

y debe despreciarse.

Del mismo modo, en (II-41) y (II-42), los términos



$$\tilde{\Psi}_{i2} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_2} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = o\left(|\boldsymbol{\psi}|^{\frac{3}{2}}\right) > o(|\boldsymbol{\psi}|) \quad (\text{II-51})$$

$$\tilde{\Psi}_{i3} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial X_3} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = o\left(|\boldsymbol{\psi}|^{\frac{3}{2}}\right) > o(|\boldsymbol{\psi}|) \quad (\text{II-52})$$

pueden despreciarse.

Las conclusiones anteriores permiten enriquecer el modelo lineal clásico con algunos efectos de interés bajo la premisa de que existe una diferencia en el orden entre las deformaciones axiales y las transversales. Estos términos adicionales son conocidos como no linealidades de Von Kármán [54] y suelen aplicarse a modelos de vigas, placas y cáscaras.

Finalmente, el tensor de Green-Lagrange con las no linealidades de Von Kármán resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cong \bar{\mathbf{E}}^{VK} = \frac{1}{2} & \left( \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^T + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-53})$$

y sus componentes

$$\bar{\mathbf{E}}_{11}^{VK} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \quad (\text{II-54})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{12}^{VK} = \bar{\mathbf{E}}_{21}^{VK} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} - \tilde{\Psi}_{21} \right) \quad (\text{II-55})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{13}^{VK} = \bar{\mathbf{E}}_{31}^{VK} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} - \tilde{\Psi}_{31} \right) \quad (\text{II-56})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{23}^{VK} = \bar{\mathbf{E}}_{32}^{VK} = \bar{\mathbf{E}}_{33}^{VK} = \bar{\mathbf{E}}_{22}^{VK} = 0 \quad (\text{II-57})$$

## II. 3. 5 Deformación por alabeo

Los efectos provenientes del alabeo de la sección merecen un tratamiento particular, especialmente luego de haber introducido las aproximaciones a las rotaciones y a las deformaciones, por lo que fueron relegados a esta Sección. Tal tratamiento implica incorporar hipótesis sobre los desplazamientos y las deformaciones, y adoptar una teoría que permita describirlos dentro del modelo. En otras palabras, debe definirse en detalle al vector  $\mathbf{r}_\omega(\mathbf{X})$  dado en (II-9) e introducir esa definición en las expresiones de las bases cinemáticas.

Al presentar el tensor de deformaciones de Green-Lagrange (II-25), las deformaciones provenientes de los efectos del alabeo fueron agrupadas a un término general que, de acuerdo a lo propuesto en el Apéndice II. B (expresión (II. B.15)) responde a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega = & \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \mathbf{C}^T \Lambda + (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \Lambda + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\ & + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} + \Lambda^T \mathbf{C} + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a}_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\ & + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} + \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{II-58})$$

A partir de aquí, se incorporan las hipótesis de aproximación de las rotaciones **H5** y de las deformaciones **H6** a la expresión (II-58). Con lo cual, luego de manipular convenientemente los términos, se obtiene una versión aproximada (linealizada) del término de deformación por alabeo  $\mathbf{E}_\omega$ . Los detalles de este proceso se exponen en el Apéndice II. E y el resultado final se encuentra en la expresión (II. E.11) y se repite aquí por comodidad

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega^{lin} = & 2 \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\ & + r_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \tilde{\Psi}^T}{\partial X_1} \end{aligned} \quad (\text{II-59})$$

La expresión (II-59) muestra al término de deformación por alabeo linealizado como una función del vector desplazamiento por alabeo (linealizado)  $\mathbf{r}_\omega(\mathbf{X}) = r_\omega \hat{\mathbf{E}}_1$ , del tensor  $\tilde{\Psi}$  y de sus derivadas. Dado que  $\tilde{\Psi}$  fue expuesto oportunamente, resta entonces definir las características de  $r_\omega$ .

El desplazamiento por alabeo puede analizarse nuevamente desde el punto de vista del método semi-inverso. En este caso, la teoría utilizada para tal fin es la desarrollada por Saint-Venant [55] que deriva las ecuaciones de gobierno del problema de torsión a partir de principios básicos que provienen de una descripción cualitativa del fenómeno. Más específicamente, el problema a partir del cual las ecuaciones de Saint-Venant se desarrollan se conoce como torsión homogénea debido a que las variables involucradas se asumen constantes a lo largo de toda la viga. El modelo de torsión homogénea parecería ser una simplificación comparativamente excesiva para el modelo cinemático. Sin embargo, permite describir una porción del campo de deformación sin perder la generalidad del resto del modelo, y sus conclusiones pueden extenderse a casos donde las hipótesis sean menos restrictivas [56].

La teoría de Saint-Venant describe al desplazamiento por alabeo como una función que depende de dos variables: i) la curvatura por torsión  $\theta(X_1)$ , y ii) la función de alabeo  $\omega(X_\alpha)$ . La curvatura por torsión se define como la variación de la rotación por torsión a lo largo de la viga que, de acuerdo al modelo propuesto en la presente formulación y a (II-28), es

$$\theta(X_1) = \frac{\partial \tilde{\Psi}_{13}}{\partial X_1} = \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \quad (\text{II-60})$$

Por su parte, la función de alabeo representa la distribución del desplazamiento por alabeo sobre la sección transversal de la viga, puede entenderse como una función de forma de tal desplazamiento [55]. La determinación de  $\omega(X_\alpha)$  requiere la solución del problema de torsión homogénea que, dadas las características geométricas, el material y las condiciones de contorno, se reduce a resolver la ecuación de Laplace con la función de alabeo como incógnita y condiciones de contorno de Neumann [57]. A excepción de algunas geometrías sencillas, en general, no es posible obtener una expresión analítica cerrada para la función de alabeo y debe recurrirse a métodos discretos para obtenerla. Además, por las características del problema la función  $\omega(X_\alpha)$  está definida salvo por una constante aditiva. Se asumirá, entonces, en la presente formulación que  $\omega(\mathbf{0}) = 0$ , sin perder generalidad.

Como se mencionó, la función de alabeo obtenida del problema de torsión homogénea continúa siendo una buena aproximación para otros casos donde las hipótesis generales no se satisfacen. Luego, se adopta la descripción y la función de alabeo del problema de Saint-Venant para definir el desplazamiento por alabeo en la presente formulación, es decir

$$r_\omega(\mathbf{X}) = \theta(X_1)\omega(X_\alpha) = \frac{\partial \tilde{\Psi}_{13}}{\partial X_1} \omega(X_\alpha) = \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega(X_\alpha) \quad (\text{II-61})$$

Bajo estas condiciones, la versión aproximada del campo de desplazamientos (II-37) se completa con el término de desplazamiento por alabeo,

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) \cong \bar{\mathbf{u}}_* = \bar{\mathbf{u}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{u}_0 + \tilde{\Psi} \mathbf{R} + r_\omega \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{u}_0 + \tilde{\Psi} \mathbf{R} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega(X_\alpha) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-62})$$

Reemplazando (II-61) en (II-59) y simplificando los términos de orden cuadrático en las rotaciones, a partir de (II-31), el término de deformación por alabeo resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega^{lin} = & 2 \frac{\partial(\theta(X_1)\omega(X_\alpha))}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial(\theta(X_1)\omega(X_\alpha))}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \\ & + \frac{\partial(\theta(X_1)\omega(X_\alpha))}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \end{aligned} \quad (\text{II-63})$$

$$\mathbf{E}_\omega^{lin} = 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega(\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \quad (\text{II-64})$$

### II. 3. 6 El tensor de deformaciones de Green-Lagrange

Teniendo en cuenta las consideraciones, hipótesis y aproximaciones incorporadas, se presenta la expresión resultante del tensor de deformaciones de Green-Lagrange que será utilizada de aquí en adelante. Esto es, combinando (II-53) y (II-64), se tiene

$$\mathbf{E}^{GL} = \bar{\mathbf{E}}^{VK} + \frac{1}{2} \mathbf{E}_\omega^{lin} \quad (\text{II-65})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{GL} = & \frac{1}{2} \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \tilde{\Psi}^T + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & + \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \\ & \left. + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-66})$$

Mientras que, extrayendo sus componentes se tiene

$$\mathbf{E}_{11}^{GL} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \quad (\text{II-67})$$

$$\mathbf{E}_{12}^{GL} = \mathbf{E}_{21}^{GL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} + \tilde{\Psi}_{12} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_2} \right) \quad (\text{II-68})$$

$$\mathbf{E}_{13}^{GL} = \mathbf{E}_{31}^{GL} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} + \tilde{\Psi}_{13} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_3} \right) \quad (\text{II-69})$$

$$\mathbf{E}_{23}^{GL} = \mathbf{E}_{32}^{GL} = \mathbf{E}_{22}^{GL} = \mathbf{E}_{33}^{GL} = 0 \quad (\text{II-70})$$

## II. 4 Medidas de Tensión

El concepto de tensión cobra un particular interés en los sistemas materiales, especialmente si éstos están concebidos para aplicaciones ingenieriles. Una fuerza por unidad de área, una tensión, se relaciona directamente con la capacidad de un material o medio continuo para resistir cargas de trabajo. Los estados tensionales de un cuerpo se definen a partir de las componentes de tensores de segundo orden, y hacerlo correctamente resulta imprescindible para la formulación del modelo estructural-dinámico.

En términos generales, la primera medida de tensión a introducir es la *tensión verdadera*, es decir la tensión que actúa en la configuración deformada y describe el estado tensional real del cuerpo. Siguiendo la Figura II-3, considérese la configuración de referencia  $\Omega_0$ , en el tiempo  $t = 0$ , de un cuerpo arbitrario, el cual es intersecado por un plano que pasa por un punto interno  $\mathbf{X}$ . El plano divide al cuerpo deformable en dos porciones que interactúan entre sí al transmitir cargas distribuidas a través de la superficie interna. Las cargas distribuidas se representan como fuerzas y momentos (cuplas) diferenciales que actúan sobre la superficie. Luego de la deformación  $\chi(\mathbf{X})$ , el cuerpo ocupa la configuración actual o deformada  $\Omega$  y el plano de intersección pasa por el punto interno  $\mathbf{x}$ . La fuerza diferencial  $d\mathbf{f}$  real que actúa en el interior del cuerpo en la configuración deformada se define a partir de una fuerza distribuida finita  $\Delta\mathbf{f}$  y elemento de superficie  $\Delta s$ , es decir

$$d\mathbf{f} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{f}}{\Delta s} \quad (\text{II-71})$$

En el caso de los momentos, en la presente formulación se toma por hipótesis que los materiales involucrados son no polares. Esta asunción se desprende de la teoría conocida como mecánica del continuo monopolar [53] e implica que no existen momentos (cuplas) distribuidos en el interior del material por lo que,

$$d\mathbf{m} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{m}}{\Delta s} \equiv \mathbf{0} \quad (\text{II-72})$$

Donde  $\Delta\mathbf{m}$  es el momento finito actuando sobre el elemento de superficie  $\Delta s$  y  $d\mathbf{m}$  es el momento diferencial.

A partir de (II-71) se define el *vector tensión verdadera*  $\mathbf{t}$  que actúa sobre una superficie elemental cuya normal saliente es  $\hat{\mathbf{n}}$  en la configuración actual. Además, se introduce el *tensor de tensión verdadera* o *el tensor de tensiones de Cauchy*  $\boldsymbol{\sigma}$  que mapea un vector de área diferencial  $d\mathbf{s} = \hat{\mathbf{n}} ds$  en un vector de fuerza diferencial  $d\mathbf{f}$ , ambos en la configuración actual, a través del vector tensión. Esto es,

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}}) ds = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}} ds = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{s}, \quad \mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \hat{\mathbf{n}}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{II-73})$$

Para referir (II-73) a la configuración de referencia, se introduce la fórmula de Nanson [58] que, basándose en la definición del gradiente de deformación (II-14), establece la relación entre un elemento diferencial de volumen  $dv$  en la configuración actual con su contraparte en la configuración de referencia  $dV$ .

$$dv = (\det \mathbf{F}(\mathbf{X}, t)) dV = J(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{II-74})$$

Donde  $J = \det \mathbf{F}$  es el determinante del gradiente de deformación, llamado *determinante jacobiano*, que se asume positivo  $J(\mathbf{X}, t) > 0$ .

Además, la fórmula de Nanson relaciona el vector de área diferencial  $d\mathbf{s}$  en la configuración actual con el vector de área diferencial en la configuración de referencia  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} ds$ , es decir

$$d\mathbf{s} = \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S} \quad (\text{II-75})$$

Donde  $(\cdot)^{-T}$  indica el transpuesto del inverso de un tensor y se omitieron las dependencias explícitas.

Introduciendo (II-75) en (II-73), se tiene

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{J} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{S} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \hat{\mathbf{N}} ds \quad (\text{II-76})$$

A partir de (II-76) se define una segunda medida de tensión, *el primer tensor de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{P}$  y, análogamente a (II-73), *el primer vector tensión de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{T}$  asociado.

$$\mathbf{P} = \mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{N}} ds = \mathbf{P} d\mathbf{S} \quad (\text{II-77})$$

Combinando (II-73) y (II-77) se obtiene la expresión general del Teorema de Cauchy que combina los tensores de tensiones con los vectores de tensión. Esto es,

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{s} = \mathbf{P} d\mathbf{S} = \mathbf{T} ds \quad (\text{II-78})$$

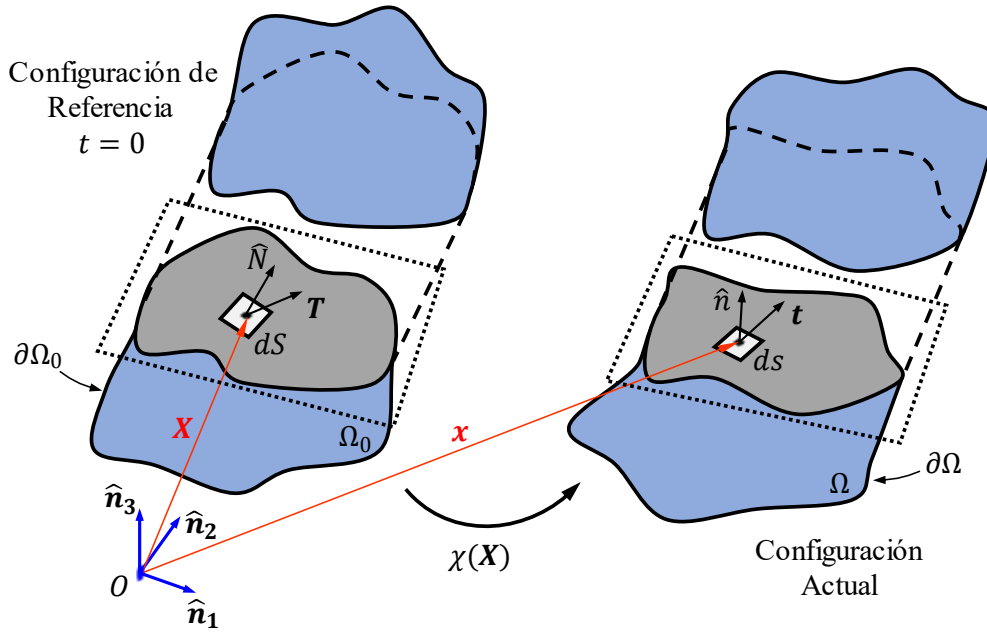


Figura II-3: Definición de tensión, el vector tensión en el interior de un cuerpo continuo.

El tensor  $\mathbf{P}$  es un tensor *de dos puntos* dado que mapea un vector de área diferencial en la configuración de referencia  $d\mathbf{S}$  en un vector de fuerza diferencial en la configuración actual  $d\mathbf{f}$ . Mientras que el vector tensión  $\mathbf{T}$  es tal que actuando sobre el elemento de área  $d\mathbf{S}$  con normal  $\hat{\mathbf{N}}$ , produce la misma fuerza que su contraparte  $\mathbf{t}$  actuando sobre  $ds$ . Cabe destacar aquí que bajo la hipótesis de materiales no polares se asegura la simetría del tensor de tensiones de Cauchy. Sin embargo, dado que en general el gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  no posee simetría, el primer tensor de Piola-Kirchhoff no es simétrico.

Una tercera medida de deformación de interés la representa *el segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ . El tensor  $\mathbf{S}$  no admite una interpretación física en términos de vectores de tensión asociados a superficies, sin embargo, resulta útil en la formulación del modelo basada en la configuración de referencia. El segundo tensor de Piola-Kirchhoff se obtiene a partir de relacionar a

través del tensor gradiente de deformación al vector diferencial de fuerza en la configuración actual  $d\mathbf{f}$  con un vector diferencial de fuerza en la configuración de referencia, representando la fuerza real transformada a la configuración de referencia actuando por unidad de área indeformada [53]. El tensor  $\mathbf{S}$  es simétrico (dada la simetría de  $\sigma$ ) y se relaciona con los tensores ya introducidos como sigue,

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1}\mathbf{P} = \mathbb{J} \mathbf{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\mathbf{F}^{-T} = \mathbf{S}^T, \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbb{J}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \quad (\text{II-79})$$

## II. 5 Relaciones Constitutivas

Las relaciones cinemáticas y las medidas de tensión antes descritas fueron desarrolladas independientemente de la descripción física del continuo, de su constitución, por lo que es necesario definirla. Las relaciones constitutivas se traducen en un grupo de ecuaciones que involucran propiedades físicas intrínsecas del continuo y, matemáticamente, tienen el propósito de establecer conexiones entre variables cinemáticas y dinámicas. Físicamente hablando, las ecuaciones constitutivas representan diferentes formas de idealizar la respuesta del material que compone el continuo. En general, las ecuaciones constitutivas no pueden derivarse de principios físicos, y de hecho no lo hacen, aunque pueden estar sujetas a la satisfacción de ciertas reglas [53]. Además, deben guardar coherencia con las hipótesis del caso al que se aplican para no generar inconsistencias en la formulación. Esencialmente, son modelos matemáticos del comportamiento real del material que se validan o desprenden de observaciones experimentales.

En esta sección, la descripción constitutiva se centra en adoptar un modelo que permita idealizar la relación entre las tensiones que afectan al material y las deformaciones que éstas producen. En este caso, tales relaciones deben entenderse como biyectivas entre medidas de tensión y de deformación que guardan entre sí la característica de objetividad [59]. Luego, la relación constitutiva estará dada entre el tensor de deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}^{GL}$  y el segundo tensor de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ , ambos de acuerdo a las hipótesis de la formulación ya introducidas.

Siguiendo con la línea de la formulación, se asumirá que el material que forma el continuo es elástico, isótropo y homogéneo, bajo las siguientes definiciones:

- Un material es *elástico* si su modelo constitutivo depende únicamente del estado actual de deformación y, por lo tanto, es independiente de la historia cinemática del cuerpo. En este sentido, se asume que en su configuración de referencia el cuerpo está libre de tensiones y deformaciones.
- Un material es *isótropo* si sus propiedades son idénticas medidas en todas las direcciones a partir de un punto.
- Un material es *homogéneo* si sus propiedades son las mismas en toda su extensión.

Bajo estas condiciones, un material se define como hookeano (o de Hooke) debido a que su modelo constitutivo puede representarse con la Ley de Hook Generalizada (LHG). Luego, la ecuación constitutiva adoptada para la presente formulación responde a la LHG y es

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} : \mathbf{E}^{GL} \quad (\text{II-80})$$

Donde  $\mathbb{C}$  es un tensor de cuarto orden denominado tensor constitutivo o de elasticidad del material, y  $:$  denota doble contracción.

El tensor constitutivo se encuentra descrito en detalle en la bibliografía especializada ([54], [59]–[61]) y, en su forma más general, posee 81 componentes escalares. Esto es, en una base cartesiana en  $\mathbb{R}^3$  se tiene

$$\mathbb{C} = C_{ijkl} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_l \quad (\text{II-81})$$

Donde  $C_{ijkl}$  son las componentes de  $\mathbb{C}$ . Sin embargo, dadas las hipótesis asumidas la cantidad de componentes de  $\mathbb{C}$  se reduce sensiblemente permitiendo obtener una expresión más simple. Para un material isótropo que posee infinitos planos de simetría material, el tensor constitutivo posee sólo 12 componentes no nulas y satisface, además, las condiciones de simetría mayor y menor [61] que se escriben, respectivamente

$$C_{ijkl} = C_{klij}, \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{jilk} \quad (\text{II-82})$$

Las componentes no nulas de  $\mathbb{C}$  pueden expresarse en términos de dos constantes independientes, conocidas como *constantes de Lamé*. Estos dos parámetros caracterizan las propiedades elásticas de materiales isótropos y se relacionan, a su vez, con las constantes experimentales (también llamadas ingenieriles) del material: *el módulo de elasticidad* (o de Young)  $E$  y *el coeficiente de Poisson*  $\nu$ . Esto es,

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (\text{II-83})$$

Donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé.

Teniendo en cuenta (II-81), (II-82) y (II-83) el tensor constitutivo para un material isótropo se escribe como

$$\mathbb{C} = \lambda \bar{\mathbb{I}} + \mu(\mathbb{I} + \bar{\mathbb{I}}) \quad (\text{II-84})$$

Donde  $\mathbb{I}$ ,  $\bar{\mathbb{I}}$  y  $\bar{\bar{\mathbb{I}}}$  son los tensores identidad de cuarto orden que se definen a partir del tensor identidad de segundo orden  $\mathbf{I}$  y una base cartesiana en  $\mathbb{R}^3$  como sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{I} &= \mathbf{I} \bar{\otimes} \mathbf{I} = \delta_{ik} \delta_{jl} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_l \\ \bar{\mathbb{I}} &= \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} = \delta_{il} \delta_{jk} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_l \\ \bar{\bar{\mathbb{I}}} &= \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} = \delta_{ij} \delta_{kl} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \otimes \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_l \end{aligned} \quad (\text{II-85})$$

Donde  $\delta_{ij}$  y sus análogos representan deltas de Kronecker (nótese la variación entre los subíndices de cada caso),  $\otimes$  representa el producto tensorial habitual, y  $\bar{\otimes}$  y  $\underline{\otimes}$  representan los productos tensoriales alternativos de segundo orden. Por otro lado, con base en (II-85) los tensores identidad de cuarto orden satisfacen las siguientes relaciones cuando actúan sobre un tensor de segundo orden arbitrario  $\mathbf{A}$

$$\mathbb{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \bar{\mathbb{I}} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^T, \quad \bar{\bar{\mathbb{I}}} : \mathbf{A} = \text{tr}(\mathbf{A})\mathbf{I} \quad (\text{II-86})$$

Donde  $\text{tr}(\mathbf{A})$  indica la traza del tensor  $\mathbf{A}$ .

Luego de estas definiciones, las componentes del tensor constitutivo para un material isótropo resultan

$$C_{ijkl} = \lambda \delta_{ik} \delta_{jl} + \mu (\delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \quad (\text{II-87})$$

Como se mencionó, las relaciones constitutivas deben adecuarse a las hipótesis asumidas para la formulación para no generar inconsistencias. Es por esto que, teniendo en cuenta la hipótesis **H3** que establece que los efectos de Poisson son despreciables (alargamientos y acortamientos en direcciones transversales a la deformación), debe asumirse que el coeficiente de Poisson del material es nulo,  $\nu \equiv 0$ . Luego, a partir de (II-83) se tiene  $\lambda = 0$  y  $\mu = E/2$ , y la expresión final para el tensor constitutivo resulta

$$\mathbb{C} = \mu(\mathbb{I} + \bar{\mathbb{I}}) \quad (\text{II-88})$$

Reemplazando (II-88) en la relación constitutiva (II-80), distribuyendo la doble contracción y considerando (II-86), se tiene

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbb{I} + \bar{\mathbb{I}}) : \mathbf{E}^{GL} = \mu(\mathbb{I} : \mathbf{E}^{GL} + \bar{\mathbb{I}} : \mathbf{E}^{GL}) = \mu(\mathbf{E}^{GL} + \mathbf{E}^{GLT}) \quad (\text{II-89})$$

Finalmente, considerando la simetría que caracteriza al tensor de Green-Lagrange, la ecuación constitutiva para la formulación es

$$\mathbf{S} = 2\mu \mathbf{E}^{GL} = E \mathbf{E}^{GL} \quad (\text{II-90})$$

## II. 6 Medidas Energéticas

Generalmente, cualquier fenómeno natural puede ser descrito en términos de relaciones matemáticas entre ciertas cantidades que son responsables de tal fenómeno. Estas relaciones constituyen los principios de la mecánica y vinculan las variables del sistema (desplazamientos, velocidades, tensiones, deformaciones, etcétera) de forma algebraica, diferencial o integral. La presente sección se focaliza en las medidas energéticas, entendidas como expresiones integrales que cuantifican los tipos de energía presentes en el sistema continuo en análisis y que involucran ciertos principios o ecuaciones de balance. Debido a su fuerte contenido fenomenológico las medidas energéticas se definen sobre la configuración actual o deformada del sistema permitiendo una interpretación física directa. No obstante, son transformadas a la configuración de referencia donde, si bien su significado físico pierde claridad, el desarrollo de la formulación se vuelve más conveniente.

Previo a la descripción de las medidas energéticas es necesario establecer un principio básico y general sobre el modelo: la conservación de masa. La descripción matemática de este principio se conoce como *ecuación de continuidad* y, en términos generales, establece que ningún movimiento modifica la masa total del cuerpo o de cualquiera de sus partes. La expresión analítica de la ecuación de continuidad considera que un cuerpo que en el tiempo  $t = 0$  se encuentra en la configuración de referencia  $\mathcal{B}_0$  y posee una densidad  $\rho_0$ , luego del movimiento se encuentra en la configuración actual  $\mathcal{B}$  y su densidad es  $\rho$ . Para tal cuerpo, la masa total en ambas configuraciones deberá permanecer inalterada, entonces

$$\int_{\mathcal{B}_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{B}} \rho(\mathbf{x}, t) dv \quad (\text{II-91})$$

Donde  $dV$  y  $dv$  indican elementos de volumen en la configuración de referencia y actual, respectivamente.



Introduciendo (II-74) en (II-91) ambas integrales se realizan sobre la configuración de referencia y pueden agruparse, luego

$$\int_{B_0} (\rho_0(\mathbf{X}) - J(\mathbf{X}, t)\rho(\mathbf{x}, t)) dV = 0 \quad (\text{II-92})$$

La expresión anterior representa la forma global de la ecuación de continuidad y, dado que es válida para todo el cuerpo o arbitrariamente cualquiera de sus partes, permite obtener la forma local. Esto es, omitiendo las dependencias explícitas,

$$\rho_0 = J\rho \quad (\text{II-93})$$

Utilizando las relaciones anteriores, se describen a continuación tres medidas energéticas básicas del modelo: la energía cinética, la energía potencial elástica y el trabajo de fuerzas externas.

## II. 6. 1 Energía cinética

La energía cinética de un cuerpo es aquella que posee debido a su movimiento, esto es, el trabajo necesario para acelerar su masa desde el reposo a su velocidad actual. En términos generales, para una unidad de volumen del cuerpo en la configuración actual, la expresión que describe la energía cinética local está dada por

$$\Delta T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II-94})$$

Donde  $(\dot{\cdot})$  indica derivada temporal y  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  es el campo de desplazamientos que describe la cinemática del cuerpo.

Considerando (II-94), la energía cinética total del cuerpo en la configuración actual se obtiene como una integral en todo su volumen, es decir

$$T = \int_B \Delta T dv = \frac{1}{2} \int_B \rho(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) dv \quad (\text{II-95})$$

Luego, al introducir (II-74) y (II-93) la energía cinética total del cuerpo calculada a partir de su configuración de referencia resulta

$$T = \int_{B_0} \Delta T(\mathbf{X}, t) J dV = \frac{1}{2} \int_{B_0} \rho_0(\mathbf{X})\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{II-96})$$

Por último, la expresión adecuada para utilizar en la presente formulación deberá estar acorde a las aproximaciones cinemáticas introducidas en el modelo. Por lo tanto, considerando el campo de desplazamientos aproximado dado por (II-62), la energía cinética del cuerpo bajo las hipótesis del modelo y calculada en su configuración de referencia es

$$T \cong \bar{T} = \frac{1}{2} \int_{B_0} \rho_0(\mathbf{X})\dot{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) \cdot \dot{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{II-97})$$

## II. 6. 2 Energía interna de deformación

Todo cuerpo (deformable) sometido a un cambio de configuración que produce deformaciones posee energía proveniente del trabajo producido por el sistema de cargas que produjeron tales deformaciones. Esta energía se conoce de forma general como *energía interna de deformación* y se descompone en varias energías asociadas a los distintos mecanismos de deformación interna del material del cuerpo. Luego, deberán aplicarse ciertas hipótesis al modelo que permitan describir apropiadamente la energía interna del cuerpo deformable.

El modelo estructural presentado, considera a las fuerzas elásticas dentro del continuo como el único mecanismo de deformación interna del material (elástico y bajo procesos isotérmicos). El estado tensional asociado a las fuerzas elásticas produce deformaciones en el material que se asumen reversibles cuando el sistema de cargas externa cesa. Esta combinación tiene asociada una medida energética que relaciona el estado tensional y el estado de deformación internos del cuerpo, y que podrá ser devuelta al ambiente en un proceso reversible. En términos generales, para una unidad de volumen del cuerpo en la configuración actual, la expresión que describe la energía potencial elástica local está dada por

$$\Delta V(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \quad (\text{II-98})$$

Donde  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$  es el tensor de tensiones de Cauchy,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  es el tensor de deformaciones de Euler-Almansi (también llamado Almansi-Hamel o simplemente euleriano), y  $:$  indica doble contracción entre tensores.

La expresión (II-98) se define bajo ciertas condiciones que deben mencionarse. En primer lugar, al considerar la configuración deformada los tensores involucrados deben ser consistentes y satisfacer el requerimiento de objetividad [59]. El tensor de tensiones debe relacionar fuerzas en la configuración actual aplicadas sobre elementos de área deformados. Mientras que, el tensor de deformaciones debe estar definido a partir de los desplazamientos expresados en la configuración actual y referenciados a las coordenadas de esta configuración. Por lo tanto, se utiliza el tensor de tensiones de Cauchy presentado en (II-73) y se introduce el tensor de deformaciones de Euler-Almansi [53].

El tensor de Euler-Almansi se define respecto a las coordenadas de la configuración actual a partir del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  introducido en (II-14) como

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{II-99})$$

Además, el tensor  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  se relaciona con el tensor de deformaciones de Green-Lagrange dado en (II-24) a través de una transformación *hacia adelante*, es decir

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (\text{II-100})$$

Donde se omitieron las dependencias explícitas.

Introduciendo (II-100) en (II-98), la energía potencial elástica local resulta

$$\Delta V = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}) \quad (\text{II-101})$$

Luego, la energía potencial elástica total del cuerpo en la configuración actual se obtiene como una integral en todo su volumen, es decir

$$V = \int_{\mathcal{B}} \Delta V \, dv = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \sigma : (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}) \, dv \quad (\text{II-102})$$

Al trasladar la expresión integral a la configuración de referencia utilizando (II-74), se tiene

$$V = \int_{\mathcal{B}_0} \frac{1}{2} \sigma : (\mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1}) \, J \, dV \quad (\text{II-103})$$

Para reordenar (II-103) se utiliza una propiedad del álgebra tensorial que involucra la doble contracción y establece que  $\mathbf{A} : (\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C} = (\mathbf{A}\mathbf{C}^T) : \mathbf{B}$ , donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  son tensores de segundo orden. Se tiene entonces

$$V = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} (J \mathbf{F}^{-1} \sigma \mathbf{F}^{-T}) : \mathbf{E} \, dV = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S} : \mathbf{E} \, dV \quad (\text{II-104})$$

Donde se tuvo en cuenta la definición del segundo tensor de Piola-Kirchhoff (II-79).

La derivación de (II-104) pone en evidencia que el segundo tensor de Piola-Kirchhoff es consistente con el tensor de deformación de Green Lagrange. Además, ambos satisfacen los requisitos de objetividad necesarios para definir las fuerzas elásticas y la energía proveniente de ellas.

Por último, la expresión adecuada para utilizar en la presente formulación deberá estar acorde a las aproximaciones cinemáticas introducidas en el modelo. Por lo tanto, considerando el tensor de deformaciones aproximado dado en (II-66), la energía potencial elástica del cuerpo bajo las hipótesis del modelo y calculada en su configuración de referencia es

$$V \cong \bar{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} \mathbf{S}(\mathbf{E}^{GL}) : \mathbf{E}^{GL} \, dV \quad (\text{II-105})$$

En este punto, y como se expone en (II-105), la expresión de la energía potencial elástica debe completarse introduciendo la relación constitutiva que vincula las tensiones y las deformaciones de forma consistente y objetiva, es decir  $\mathbf{S} = \mathbf{S}(\mathbf{E})$ . Tal relación fue introducida en (II-90) y al incorporarla en la expresión de  $\bar{V}$ , resulta

$$\bar{V} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu (\mathbf{E}^{GL} : \mathbf{E}^{GL}) \, dV \quad (\text{II-106})$$

## II. 6. 3 Trabajo de fuerzas externas

El proceso a través del cual un cuerpo cambia de configuración a través del tiempo es producido por un sistema de cargas o fuerzas que actúa sobre el cuerpo en cuestión y los efectos que éstas producen sobre él. Naturalmente, las fuerzas actuantes sobre el cuerpo que se mueve y deforma producirán energía en forma de trabajo que deberá cuantificarse en el sistema.

Las fuerzas provienen de la interacción del cuerpo continuo con su entorno y pueden subdividirse en dos tipos: *fuerzas de contacto* y *fuerzas cuerpo*. Las fuerzas de contacto son aquellas que actúan sobre el contorno exterior del cuerpo y representan la interacción de contacto entre la superficie del cuerpo y su entorno. En este grupo se encuentran, por ejemplo, las fuerzas por presión hidrostática, las cargas aerodinámicas (resistencia y sustentación), las fuerzas por contacto con otros cuerpos, entre otras. Por otro lado, las fuerzas cuerpo son aquellas que actúan sobre los puntos interiores del cuerpo continuo con un efecto a distancia. Los ejemplos más comunes de fuerzas remotas son

aquellas producidas por efectos gravitatorios, por campos electrostáticos y por efectos electromagnéticos. Luego, la resultante total de fuerzas sobre el cuerpo en la configuración de referencia  $\mathcal{F}$  puede expresarse como

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, t) = \int_{\bar{\mathcal{B}}} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) ds \quad (\text{II-107})$$

Donde el dominio del cuerpo en la configuración de referencia fue dividido en su superficie  $\partial\mathcal{B}$  y en sus puntos interiores  $\bar{\mathcal{B}}$  de manera que

$$\mathcal{B} = \partial\mathcal{B} \cup \bar{\mathcal{B}}, \quad \partial\mathcal{B} \cap \bar{\mathcal{B}} = \emptyset \quad (\text{II-108})$$

Además,  $\mathbf{b}$  es la fuerza cuerpo por unidad de volumen que actúa en el punto interior del cuerpo definido por  $\mathbf{x}$ ;  $dv$  es un elemento diferencial de volumen en la configuración actual;  $\mathbf{t}$  es la fuerza de contacto por unidad de superficie que actúa en el punto sobre la superficie del cuerpo definido por  $\mathbf{x}$ ;  $ds$  es un elemento diferencial de superficie del cuerpo en la configuración actual.

A partir de (II-107) y considerando el campo de desplazamientos del cuerpo, el trabajo total de las cargas externas actuantes se calcula como

$$W_e = \int_{\bar{\mathcal{B}}} \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) ds \quad (\text{II-109})$$

Para expresar (II-109) en términos de las variables de la configuración de referencia se define el vector fuerza cuerpo por unidad de volumen en la configuración de referencia como  $\mathbf{B} = \mathbf{J}\mathbf{b}$  y el vector fuerza de contacto por unidad de superficie indeformada  $\mathbf{T}$ . Además, teniendo en cuenta (II-74) y expresando las variables involucradas en la configuración de referencia, se tiene

$$W_e = \int_{\bar{\mathcal{B}}_0} \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) dS \quad (\text{II-110})$$

Donde  $\bar{\mathcal{B}}_0$  y  $\partial\mathcal{B}_0$  son el volumen y el contorno del dominio indeformado (configuración de referencia), respectivamente.

La expresión adecuada para utilizar en la presente formulación deberá estar acorde a las aproximaciones cinemáticas introducidas en el modelo. Por lo tanto, considerando el tensor de deformaciones aproximado dado en (II-62), el trabajo de las cargas externas sobre cuerpo bajo las hipótesis del modelo y calculado en su configuración de referencia es

$$W_e \cong \bar{W}_e = \int_{\bar{\mathcal{B}}_0} \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dV + \int_{\partial\mathcal{B}_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS \quad (\text{II-111})$$

El primer término de (II-111) no reviste complejidad ni requiere mayor análisis. En efecto, como en muchas formulaciones basadas en la mecánica del continuo, las fuerzas cuerpo y sus efectos se asumen nulos en la presente formulación, ya que no representan un aspecto de interés del modelo. Por lo tanto,

$$\int_{\bar{\mathcal{B}}_0} \mathbf{B}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dV \equiv 0 \quad (\text{II-112})$$

Las fuerzas de contacto que actúan sobre el cuerpo, el segundo término de (II-111), deben definirse con más detalle ya que serán las que gobiernen la dinámica del modelo presentado. Siguiendo

la Figura II-4, la superficie exterior del cuerpo en la configuración de referencia puede subdividirse en tres porciones disjuntas: la superficie lateral  $A_0$ , y las dos superficies extremas  $A_1$  y  $A_2$ . Luego, el segundo término de (II-111) se expresa

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS \\ = \int_{A_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS + \int_{A_1} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS \\ + \int_{A_2} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS \end{aligned} \quad (\text{II-113})$$

Además, la superficie lateral  $A_0$  (ver Figura II-4 b)) puede considerarse como el producto cartesiano entre la curva de contorno  $c$  del área transversal  $\mathcal{A}_0$  y la línea del eje elástico  $\mathcal{S}_0$ . El teorema de Fubini [62] permite entonces expresar al primer término de (II-113) como

$$\int_{A_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS = \int_{\mathcal{S}_0} \left( \oint_c \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dc \right) dL \quad (\text{II-114})$$

Reemplazando (II-62), omitiendo las dependencias explícitas y reordenando, se tiene

$$\begin{aligned} \int_{A_0} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( \oint_c \mathbf{T} \cdot \left( \mathbf{u}_0 + \tilde{\Psi} \mathbf{R} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dc \right) dL \\ &= \int_{\mathcal{S}_0} \left( \oint_c \left( \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_0 + \mathbf{T} \cdot \tilde{\Psi} \mathbf{R} + \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dc \right) dL \end{aligned} \quad (\text{II-115})$$

Introduciendo (II-28), aplicando propiedades del producto entre vectores y distribuyendo la integración,

$$\int_{A_0} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \int_{\mathcal{S}_0} \left( \oint_c \mathbf{T} \cdot \mathbf{u}_0 dc + \oint_c \boldsymbol{\psi} \cdot (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dc + \oint_c T_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega dc \right) dL \quad (\text{II-116})$$

Donde  $T_1 = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1$ .

A partir de aquí, al tener en cuenta la descripción cinemática de la viga queda en evidencia que  $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}_0(X_1)$ ,  $\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\psi}(X_1)$ ,  $\partial \psi_1 / \partial X_1 = \partial \psi_1 / \partial X_1(X_1)$ , es decir que el desplazamiento del eje elástico, el vector de rotaciones y la derivada de su primer componente dependen sólo de la coordenada sobre el eje elástico de la viga  $X_1$ . Luego, estas variables son uniformes sobre la sección transversal y, en particular, sobre la línea  $c$  por lo que pueden extraerse de las integrales en (II-116).

$$\int_{A_0} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \int_{\mathcal{S}_0} \left( \mathbf{u}_0 \cdot \oint_c \mathbf{T} dc + \boldsymbol{\psi} \cdot \oint_c (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dc + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \oint_c T_1 \omega dc \right) dL \quad (\text{II-117})$$

Tomando en consideración la representación de las integrales de línea sobre la curva  $c$ , a partir de (II-117) se definen algunas cantidades que son de interés para el modelo. En primer lugar,  $\bar{\mathbf{f}}$  representa la resultante de las fuerzas de contacto por unidad de longitud que actúan sobre el contorno de la sección transversal asociada a la coordenada  $X_1$  y está dada por

$$\bar{\mathbf{f}} = \bar{\mathbf{f}}(X_1) = \oint_c \mathbf{T} dc \quad (\text{II-118})$$

En segundo lugar,  $\bar{\mathbf{m}}$  representa el momento resultante de las fuerzas de contacto por unidad de longitud que actúan sobre el contorno de la misma sección identificada con  $X_1$ , referidos a su centro de corte. Esto es,

$$\bar{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{m}}(X_1) = \oint_c (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dc \quad (\text{II-119})$$

Por último,  $\bar{c}$  representa la resultante de los esfuerzos asociados a la variación del ángulo de torsión ( $\psi_1$ ) de la viga. Siendo

$$\bar{c} = \bar{c}(X_1) = \oint_c T_1 \omega dc \quad (\text{II-120})$$

Finalmente, se tiene

$$\int_{A_0} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \int_{S_0} \left( \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} \right) dL \quad (\text{II-121})$$

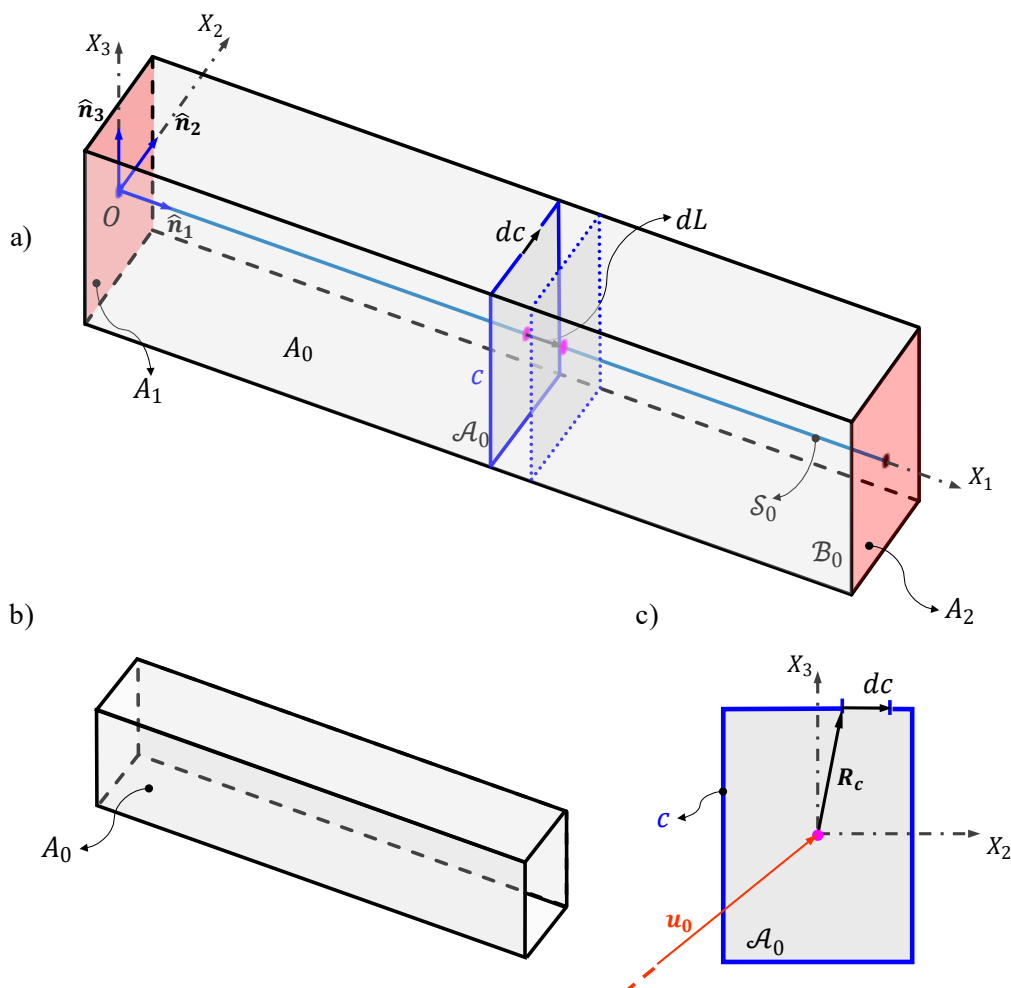


Figura II-4: Descomposición del cuerpo en la configuración de referencia. a) Subdivisiones. b) Superficie lateral. c) Sección interna y contorno.

Resulta interesante destacar que en (II-121) todo el sistema de cargas se encuentra condensado estáticamente sobre el centro de corte de cada sección. Por lo tanto, las cargas que actúan sobre la viga

en el modelo propuesto podrán trasladarse estáticamente al eje elástico concordando con los modelos convencionales de vigas que se encuentran en la mecánica del continuo. Un razonamiento análogo podría aplicarse a las fuerzas cuerpo, obteniendo expresiones integrales sobre la sección transversal que permiten condensar los esfuerzos en el eje elástico.

Los términos asociados a las secciones extremas de la viga en (II-113) se analizan de forma similar. En el caso de  $A_1$ , se tiene

$$\int_{A_1} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \mathbf{u}_0 \cdot \int_{A_1} \mathbf{T} dS + \boldsymbol{\psi} \cdot \int_{A_1} (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dS + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \int_{A_1} T_1 \omega dS \quad (\text{II-122})$$

Donde las variables deben evaluarse en  $X_1 = 0$ . Análogamente, se definen cantidades integrales para las cargas sobre el extremo de la viga a partir de las fuerzas de contacto sobre la superficie. Esto es,

$$\bar{\mathbf{f}}|_0 = \bar{\mathbf{f}}(0) = \int_{A_1} \mathbf{T} dS, \quad \bar{\mathbf{m}}|_0 = \bar{\mathbf{m}}(0) = \int_{A_1} (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dS, \quad \bar{c}|_0 = \bar{c}(0) = \int_{A_1} T_1 \omega dS \quad (\text{II-123})$$

Luego,

$$\int_{A_1} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}}_0 + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}}_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c}_0 \quad (\text{II-124})$$

Mientras que para  $A_2$ ,

$$\int_{A_2} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \mathbf{u}_0 \cdot \int_{A_2} \mathbf{T} dS + \boldsymbol{\psi} \cdot \int_{A_2} (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dS + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \int_{A_2} T_1 \omega dS \quad (\text{II-125})$$

Donde las variables deben evaluarse en  $X_1 = L$  y se define

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{f}}|_L = \bar{\mathbf{f}}(L) &= \int_{A_2} \mathbf{T} dS, & \bar{\mathbf{m}}|_L = \bar{\mathbf{m}}(L) &= \int_{A_2} (\mathbf{R} \times \mathbf{T}) dS, \\ \bar{c}|_L = \bar{c}(L) &= \int_{A_2} T_1 \omega dS \end{aligned} \quad (\text{II-126})$$

Luego,

$$\int_{A_2} \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{u}}_* dS = \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}}_L + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}}_L + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c}_L \quad (\text{II-127})$$

Reemplazando (II-121), (II-124), (II-127) en (II-113), se tiene

$$\begin{aligned} \bar{W}_e &= \int_{\partial \mathcal{B}_0} \mathbf{T}(\mathbf{X}, t) \cdot \bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dS \\ &= \int_{S_0} \left( \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} \right) dL + \left[ \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{II-128})$$

Donde se agruparon los términos provenientes de  $A_1$  y  $A_2$ .

## II. 7 Ecuaciones de Movimiento

Las ecuaciones dinámicas del modelo presentado en este capítulo corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange para un sólido continuo elástico. Tales ecuaciones se derivan a partir de la forma general del Principio de Hamilton (o Principio de Hamilton Generalizado, PHG). De acuerdo al PHG el sistema en consideración se asume caracterizado por dos funciones de energía que pueden expresarse en términos de las variables dependientes del problema que son, a su vez, funciones del espacio y del tiempo: la energía cinética  $K$  y la energía potencial  $\Pi$ .

El PHG establece que la trayectoria real de una partícula (o porción) que integra el cuerpo continuo entre dos instantes de tiempo arbitrarios  $t_1$  y  $t_2$  es tal que la integral de la función Lagrangiana del sistema  $\mathcal{L}$  es un extremal [63], es decir

$$\delta \mathcal{J} = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt = \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} dt = 0 \quad (\text{II-129})$$

Donde  $\mathcal{L} = T - \Pi$  y  $\delta$  es el operador variacional. En (II-129) está implícita la asunción de que el sistema es holónomo que posibilita intercambiar el operador variacional con el signo de integración [64].

De acuerdo a las características mecánicas del modelo expuesto, la energía potencial  $\Pi$  se compone de dos partes, por un lado, la energía elástica interna  $V$  y, por otro, el trabajo de las fuerzas externas. Se expresa entonces,

$$\Pi = V - W_e \quad (\text{II-130})$$

Luego, la expresión del PHG resulta

$$\delta \mathcal{J} = \int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V + W_e) dt = 0 \quad (\text{II-131})$$

Lo cual, utilizando las funciones que incluyen las hipótesis de aproximación, es

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(\bar{T} - \bar{V} + \bar{W}_e) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta\bar{T} - \delta\bar{V} + \delta\bar{W}_e) dt = 0 \quad (\text{II-132})$$

Para calcular la variación de la función Lagrangiana primero deben expresarse las energías del sistema en términos de la función de trayectoria que, en este caso, es el campo de desplazamientos aproximado  $\bar{\mathbf{u}}_*$ . Luego, se define la variación de la función de trayectoria  $\delta\bar{\mathbf{u}}_*$  en términos de las coordenadas generalizadas del sistema (variables dependientes del problema) y de sus variaciones. En particular, la variación en la trayectoria  $\delta\bar{\mathbf{u}}_*$  es arbitraria en cada instante  $t$  y se asume nula en los instantes  $t_1$  y  $t_2$ . Es decir,

$$\delta\bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{x}, t_1) = \delta\bar{\mathbf{u}}_*(\mathbf{x}, t_2) \equiv \mathbf{0} \quad (\text{II-133})$$

Además,  $\delta\bar{\mathbf{u}}_*$  será admisible mientras satisfaga las condiciones de contorno cinemáticas (esenciales).

Los términos involucrados en (II-132) fueron oportunamente definidos en la Sección II. 6, por lo que resta analizar sus variaciones. A continuación, y con el objetivo de obtener las ecuaciones de movimiento del sistema a partir del PHG, se dan las expresiones variacionales de las medidas energéticas presentadas.



## II. 7. 1 Variaciones de variables cinemáticas

Las funciones de energía que integran el Principio de Hamilton Generalizado dependen de las variables cinemáticas del modelo. Por lo tanto, antes de involucrar sus variaciones es necesario definir expresiones variacionales del campo de desplazamientos y del campo de deformaciones.

En primer lugar, se analiza la variación del campo de desplazamiento aproximado  $\bar{\mathbf{u}}_*$  dado por (II-62). Se tiene, entonces,

$$\delta \bar{\mathbf{u}}_* = \delta \mathbf{u}_0 + \delta \bar{\Psi} \mathbf{R} + \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 = \delta \mathbf{u}_0 + (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \mathbf{R} + \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-134})$$

Donde se incluyó la definición (II-28). Además, se tuvo en cuenta que el vector  $\mathbf{R}$  no admite variaciones por su definición cinemática (representa una rotación rígida de la sección) y que la función de alabeo  $\omega$  es una característica de la sección que se asume conocida, por lo que  $\delta \omega \equiv 0$ .

Considerando (II-134), la variación del campo de desplazamientos se expresa en términos de la variación del desplazamiento del eje elástico de la viga  $\delta \mathbf{u}_0$  y la variación del vector de rotaciones  $\delta \boldsymbol{\psi}$ . En consecuencia, ambas funciones serán utilizadas como coordenadas generalizadas del sistema.

En cuanto al campo de deformaciones, se calcula la variación del tensor de deformaciones de Green-Lagrange (II-66). Luego,

$$\begin{aligned} \delta E^{GL} = & \left[ \left( \delta \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \delta \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \delta \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^s \\ & + \frac{1}{2} \left( \delta \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2\delta \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \end{aligned} \quad (\text{II-135})$$

Donde  $[\cdot]^s = 1/2((\cdot) + (\cdot)^T)$  refiere a la parte simétrica de un tensor. Introduciendo (II-37) y (II-28), y haciendo las mismas consideraciones anteriores, se tiene

$$\begin{aligned} \delta E^{GL} = & \left[ \left( \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^s \\ & + \left( \delta \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + \left( \delta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \right) \omega \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \end{aligned} \quad (\text{II-136})$$

## II. 7. 2 Variaciones de las medidas energéticas

La energía cinética, la energía potencial elástica y el trabajo de fuerzas externas componen la función Lagrangiana del modelo. Luego, sus variaciones deben obtenerse para desarrollar la expresión del PGH y obtener las ecuaciones de movimiento.

Para comenzar, considérese la energía cinética del sistema dada en (II-97) y su variación que está dada por

$$\delta \bar{T} = \int_{B_0} \rho(\mathbf{X}) \left( \delta \dot{\bar{\mathbf{u}}}_*(\mathbf{X}, t) \right) \cdot \dot{\bar{\mathbf{u}}}_*(\mathbf{X}, t) dV \quad (\text{II-137})$$

Analizando el primer término de (II-132) y la integración temporal de la variación de la energía cinética, se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{T} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{B}_0} \rho(\mathbf{X}) \left( \delta \dot{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) \right) \cdot \dot{\mathbf{u}}_*(\mathbf{X}, t) dV \right) dt \quad (\text{II-138})$$

Intercambiando el orden de integración, integrando por partes respecto del tiempo y a partir de las propiedades del operador variacional, resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{T} dt = \int_{\mathcal{B}_0} \left( \left[ \dot{\mathbf{u}}_* \delta \bar{\mathbf{u}}_* \right]_{t_1}^{t_2} - \rho \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{u}}_* \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_* dt \right) dV = \int_{\mathcal{B}_0} \left( -\rho \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{u}}_* \cdot \delta \bar{\mathbf{u}}_* dt \right) dV \quad (\text{II-139})$$

Donde se omitieron las dependencias explícitas y el término evaluado en los extremos se anula por la consideración (II-133).

A partir de aquí, se reemplaza la variación del campo de desplazamiento aproximado por (II-134), y se introduce la derivada segunda respecto al tiempo del campo de desplazamiento, la aceleración,

$$\ddot{\mathbf{u}}_* = \ddot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R} + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-140})$$

Con esto, siguiendo el arduo proceso descrito en el Apéndice II. F, se obtiene la expresión final para la variación de la energía cinética del sistema, es decir

$$\begin{aligned} \delta \bar{T} = & - \int_{\mathcal{S}_0} \left[ \left( \dot{\mathbf{u}}_0 M_{\mathbf{u}} + I_{\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} + M_{\omega} \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \left( I_{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right. \\ & \cdot \delta \boldsymbol{\psi} - \left. \left( \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_{\omega} + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_{\omega} + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} \right) \delta \psi_1 \right] dL \\ & + \left. \left( \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_{\omega} + \ddot{u}_{01} M_{\omega} + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \right) \delta \psi_1 \right|_0^L \end{aligned} \quad (\text{II-141})$$

Donde los coeficientes introducidos se encuentran definidos en el Apéndice II. F, pero se repiten aquí por conveniencia.

$$M_{\mathbf{u}} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho dS = \rho \mathcal{A}_0 \quad (\text{II-142})$$

$$M_{\omega} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega dS = \rho S_{\omega} \quad (\text{II-143})$$

$$I_{\omega} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega^2 dS = \rho S_{\omega^2} \quad (\text{II-144})$$

$$\int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS = I_{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (\text{II-145})$$

$$\int_{\mathcal{A}_0} \rho (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS = I_{\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (\text{II-146})$$

$$\int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times \dot{\mathbf{u}}_0 dS = I_{\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{II-147})$$

$$\mathbf{I}_{\omega R} = \int_{\mathcal{A}_0} (\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{E}}_1) \rho \omega dS \quad (\text{II-148})$$

En el caso de la variación de la energía potencial elástica, a partir de (II-106), se tiene

$$\delta \bar{V} = \frac{1}{2} \int_{B_0} 2\mu \delta(\mathbf{E}^{GL} : \mathbf{E}^{GL}) dV = \int_{B_0} 2\mu (\mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL}) dV \quad (\text{II-149})$$

Donde  $\delta$  nuevamente es el operador variacional y se introdujo que  $\delta(\mathbf{E}^{GL} : \mathbf{E}^{GL}) = 2(\mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL})$ .

Para calcular la variación en el segundo miembro de (II-149) debe trabajarse con la doble contracción. Con este objetivo se utiliza la propiedad del álgebra tensorial que indica que para un tensor de segundo orden simétrico  $\mathbf{A}$  la doble contracción con un tensor de segundo orden arbitrario  $\mathbf{B}$  cumple

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A} : [\mathbf{B}]^s \quad (\text{II-150})$$

Donde  $[\cdot]^s$  indica la parte simétrica del tensor. Además, para dos vectores cualesquiera  $\mathbf{z}_1$  y  $\mathbf{z}_2$  otra relación del algebra entre tensores indica que

$$\mathbf{A} : (\mathbf{z}_1 \otimes \mathbf{z}_2) = \mathbf{A} \mathbf{z}_2 \cdot \mathbf{z}_1 \quad (\text{II-151})$$

Aplicando (II-150) y (II-151) a la doble contracción de (II-149), considerando que  $\mathbf{S}$  es simétrico, y teniendo en cuenta la expresión del tensor de deformaciones de Green-Lagrange (II-66), se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL} &= \left( \left[ \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^s \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \\ &\quad : \delta \left( \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \end{aligned} \quad (\text{II-152})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} + \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \\ &\quad \cdot \delta \left( \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{II-153})$$

Donde se consideró que

$$\begin{aligned}
& \left( \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \\
& = \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) \hat{\mathbf{E}}_1
\end{aligned} \tag{II-154}$$

Entonces,

$$\mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL} = \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \left( \bar{\mathbf{e}} - \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) = \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \delta \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \tag{II-155}$$

Donde se definió

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{e}} = \mathbf{E}^{GL} \hat{\mathbf{E}}_1 & = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} + \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 - \bar{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \\
& \quad + \frac{1}{2} \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + 2 \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \\
& = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \mathbf{R} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \left( \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) + \left( \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right)
\end{aligned} \tag{II-156}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{GL} : \delta \mathbf{E}^{GL} & = \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right)
\end{aligned} \tag{II-157}$$

Los detalles sobre los siguientes pasos para obtener la expresión de la variación de la energía potencial elástica se encuentran en el Apéndice II. F, y tal procedimiento permite obtener

$$\begin{aligned}
\delta \bar{V} & = \int_{s_0} \left[ -\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \left( -\frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \left( -\frac{\partial g_0}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \right) \delta \psi_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \right) \delta u_{0\alpha} \right] dL \\
& \quad + \left[ \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + g_1 \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + \left( g_0 - \frac{\partial g_1}{\partial X_1} \right) \delta \psi_1 \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \delta u_{0\alpha} \right]_L^0
\end{aligned} \tag{II-158}$$

Donde los coeficientes introducidos se encuentran definidos en el Apéndice II. F, pero se repiten aquí por conveniencia. Es importante, a su vez, tener en cuenta que tales coeficientes son funciones de  $\mathbf{u}_0$ ,  $\boldsymbol{\psi}$  y sus derivadas, que se encuentran dentro de los términos de  $\bar{\mathbf{e}}$ .

$$\mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} = \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \quad (\text{II-159})$$

$$\mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} = \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{e}} dS \quad (\text{II-160})$$

$$F_{\mathcal{A}_{01}} = \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II-161})$$

$$g_0 = \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}} dS \quad (\text{II-162})$$

$$g_1 = \int_{\mathcal{A}_0} \omega \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 dS \quad (\text{II-163})$$

Por último, la variación del trabajo de las fuerzas externas se obtiene a partir de (II-128) donde, aplicando el operador variacional, resulta

$$\delta \bar{W}_e = \int_{S_0} \delta \left( \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} \right) dL + \delta \left[ \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} \right]_0^L \quad (\text{II-164})$$

Esta expresión es más simple que las anteriores, sin embargo, también requiere de ciertas manipulaciones. Siguiendo lo expuesto en el Apéndice II. F, se obtiene

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_e = & \int_{S_0} \left( \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \delta \psi_1 \right) dL \\ & + \left[ \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \bar{c} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + \bar{c} \delta \psi_1 \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{II-165})$$

## II. 7. 3 Forma diferencial de las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de equilibrio dinámico que gobiernan el sistema, como se mencionó, pueden obtenerse a partir del PHG. Para ello, se utilizan las variaciones de las medidas energéticas, calculadas en (II-141), (II-158) y (II-165), en la expresión (II-132). Este proceso, luego de agrupar convenientemente los términos, permite expresar

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \left[ \int_{S_0} \left[ - \left( \ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} - \bar{\mathbf{f}} \right) \cdot \delta \mathbf{u}_0 \right. \right. \\ - \left( I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot - \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \bar{\mathbf{m}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \\ + \left( \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \frac{\partial g_0}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \right) \delta \psi_1 \\ \left. \left. - \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial F_{\mathcal{A}_{01}}}{\partial X_1} + F_{\mathcal{A}_{01}} \frac{\partial^2 u_{0\alpha}}{\partial X_1^2} \right) \delta u_{0\alpha} \right] dL + BCT \right] dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{II-166})$$

Donde para no ofuscar excesivamente la expresión, los términos evaluados en el contorno se encuentran agrupados en el término  $BCT$ .

Dada la arbitrariedad asumida en las variaciones, cada uno de los coeficientes de (II-166) que multiplican escalarmente a las variaciones de las coordenadas generalizadas ( $\delta \mathbf{u}_0$  y  $\delta \boldsymbol{\psi}$ ) deben ser nulos. Es decir,

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \delta \mathbf{u}_0 \quad (\text{II-167})$$

$$I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{I}_{\omega R} - \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{0}, \quad \text{en } \delta \boldsymbol{\psi} \quad (\text{II-168})$$

$$\frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega + \mathbf{I}_{\omega R} \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} - \frac{\partial g_0}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} = 0, \quad \text{en } \delta \psi_1 \quad (\text{II-169})$$

$$\frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial F_{\mathcal{A}_0\alpha}}{\partial X_1} + F_{\mathcal{A}_0\alpha} \frac{\partial^2 u_{0\alpha}}{\partial X_1^2} = 0, \quad \text{en } \delta u_{0\alpha} \quad (\text{II-170})$$

Además, teniendo en cuenta que

$$\delta \psi_1 = \delta \boldsymbol{\psi} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1, \quad \delta u_{0\alpha} = \delta \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II-171})$$

Puede reescribirse

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_0\alpha} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \bar{\mathbf{f}} \quad (\text{II-172})$$

$$I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{I}_{\omega R} - \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega + \mathbf{I}_{\omega R} \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \frac{\partial g_0}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{m}} \quad (\text{II-173})$$

Las expresiones (II-172) y (II-173) representan las ecuaciones de movimiento del sistema en su forma diferencial y, naturalmente, deben completarse con la definición del dominio de aplicación y las condiciones de contorno. El dominio de aplicación de las ecuaciones de movimiento se corresponde con el dominio del sólido continuo (viga) definido en el planteo cinemático, sin embargo, al haber condensado las integrales sobre el área transversal, el dominio se reduce a la línea del eje elástico  $\mathcal{S}_0$ . Luego,

$$X_1 \in \mathcal{S}_0, \quad 0 < X_1 < L \quad (\text{II-174})$$

En cuanto a las condiciones de contorno, éstas están definidas en el término  $BTC$  de (II-166) y, separando los términos en función de las variaciones de las coordenadas generalizadas, resultan en las siguientes relaciones

$$\bar{\mathbf{f}} - \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} - \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_0\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \mathbf{0} \quad (\text{II-175})$$

$$\bar{\mathbf{m}} - \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} - \left( \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_\omega + \ddot{u}_{01} M_\omega + \mathbf{I}_{\omega R} \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}} - g_0 + \frac{\partial g_1}{\partial X_1} + \bar{c} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{0} \quad (\text{II-176})$$

Las relaciones (II-175) y (II-176) serán válidas en los extremos de la viga donde no se hayan establecido condiciones de contorno cinemáticas (o esenciales), de acuerdo a las condiciones fijadas para las variaciones de la trayectoria mencionadas. Luego, la aplicación de estas relaciones al modelo estará fuertemente relacionada con las condiciones que existan en los extremos de la viga, las cuales serán del tipo

$$\mathbf{u}_0(0) = \mathbf{U}_0, \quad \boldsymbol{\psi}(0) = \boldsymbol{\Psi}_0, \quad \text{en } X_1 = 0 \quad (\text{II-177})$$

$$\mathbf{u}_0(L) = \mathbf{U}_L, \quad \boldsymbol{\psi}(L) = \boldsymbol{\Psi}_L, \quad \text{en } X_1 = L \quad (\text{II-178})$$

Donde  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_L$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_0$ ,  $\boldsymbol{\Psi}_L$  son constantes o, a lo sumo, funciones del tiempo conocidas que completan la definición del problema de valores en la frontera (BVP, por sus siglas en inglés). Las condiciones de contorno pueden definirse como en (II-177) y (II-178), o bien sólo en uno de los extremos y/o combinadas con condiciones de contorno naturales, es decir, en términos de las derivadas temporales de  $\mathbf{u}_0$  y  $\boldsymbol{\psi}$ .

## Apéndices del Capítulo II

### Apéndice II. A : Obtención del Tensor Gradiente de Desplazamientos

En esta sección adicional se expone de forma más detallada el proceso de obtención del Tensor Gradiente de Desplazamientos. Teniendo en cuenta su definición general,

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial (\mathbf{u}(\mathbf{X}))}{\partial X_i} \otimes \hat{\mathbf{E}}_i \quad (\text{II. A.1})$$

y que el campo de desplazamientos es

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \mathbf{u}_0(X_1) + [\Lambda(X_1) - \mathbf{I}]\mathbf{R}(X_2, X_3) + r_\omega(\mathbf{X})\Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.2})$$

se tiene

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{u}_0(X_1) + \nabla([\Lambda(X_1) - \mathbf{I}]\mathbf{R}(X_2, X_3)) + \nabla(r_\omega(\mathbf{X})\Lambda(X_1)\hat{\mathbf{E}}_1) \quad (\text{II. A.3})$$

Donde cada uno de los términos involucrados se analizará por separado.

Para desarrollar el primer término de (II. A.3) debe tenerse en cuenta que  $\mathbf{u}_0$  es sólo función de  $X_1$ , por lo que  $\partial \mathbf{u}_0 / \partial X_2 = \partial \mathbf{u}_0 / \partial X_3 = \mathbf{0}$ . Luego, teniendo en cuenta (II-6),

$$\nabla \mathbf{u}_0(X_1) = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{\partial (\mathbf{r}_0 - X_1 \hat{\mathbf{E}}_1)}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 = \left( \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.4})$$

En cuanto al segundo término de (II. A.3), se tiene

$$\nabla([\Lambda(X_1) - \mathbf{I}]\mathbf{R}(X_2, X_3)) = \nabla(\Lambda(X_1)\mathbf{R}(X_2, X_3)) - \nabla \mathbf{R}(X_2, X_3) \quad (\text{II. A.5})$$

Para simplificar la expresión anterior, se recurre a una identidad para el gradiente de la aplicación de un tensor sobre un vector, esto es

$$\nabla(\Lambda \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \nabla(\Lambda^T) + \Lambda \nabla \mathbf{R} \quad (\text{II. A.6})$$

Considerando la definición del gradiente de un tensor de segundo orden suave y expresando a  $\mathbf{R}$  en componentes, se escribe

$$\mathbf{R} \cdot \nabla(\Lambda^T) = (X_m \hat{\mathbf{E}}_m) \cdot \left( \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} \hat{\mathbf{E}}_k \otimes \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \right) \quad (\text{II. A.7})$$

Donde  $\Lambda_{ik}$  son las componentes del tensor  $\Lambda$ . Aplicando la contracción con el producto punto en (II. A.7), se tiene



$$\mathbf{R} \cdot \nabla(\Lambda^T) = X_m (\hat{\mathbf{E}}_m \cdot \hat{\mathbf{E}}_k) \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j = X_m \delta_{mk} \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j = X_k \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j \quad (\text{II. A.8})$$

Donde  $\delta_{mk}$  representa el Delta de Kronecker  $\delta_{mk} = 1 \Leftrightarrow m = k, \delta_{mk} = 0 \forall m \neq k$ .

Teniendo en cuenta que, en este caso particular, el tensor de rotación es solo función de la coordenada  $X_1$  puede inferirse lo siguiente

$$\frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} = 0 \forall j \neq 1 \Rightarrow \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} = \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_1} \delta_{j1} \quad (\text{II. A.9})$$

Reemplazando en (II. A.8) y reordenando,

$$\mathbf{R} \cdot \nabla(\Lambda^T) = X_k \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_j} \delta_{j1} \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_j = \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_1} X_k \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.10})$$

Por último, en (II. A.10) puede reconocerse que

$$\frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_1} X_k \hat{\mathbf{E}}_i = \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \mathbf{R}, \quad \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{\partial \Lambda_{ik}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_k) \quad (\text{II. A.11})$$

Entonces, reemplazando (II. A.11) en (II. A.10),

$$\mathbf{R} \cdot \nabla(\Lambda^T) = \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \mathbf{R} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.12})$$

Por otro lado, debe considerarse el término  $\Lambda \nabla \mathbf{R}$  de (II. A.6), en el cual se tiene que

$$\nabla \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_i} \otimes \hat{\mathbf{E}}_i = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_\alpha} \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II. A.13})$$

Donde se tuvo en cuenta que por (II-3)

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_1} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_2} = \hat{\mathbf{E}}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial X_3} = \hat{\mathbf{E}}_3 \quad (\text{II. A.14})$$

Teniendo en cuenta que  $\mathbf{I} = \hat{\mathbf{E}}_i \otimes \hat{\mathbf{E}}_i$ , de acuerdo a (II. A.13) puede escribirse

$$\nabla \mathbf{R} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.15})$$

Luego, el segundo término de (II. A.6) resulta

$$\Lambda \nabla \mathbf{R} = \Lambda (\mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \Lambda - \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.16})$$

De este modo, introduciendo (II. A.12), (II. A.15) y (II. A.16) en (II. A.6), el segundo término de (II. A.3) es

$$\nabla([\Lambda - \mathbf{I}]\mathbf{R}) = \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \mathbf{R} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{I} + \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.17})$$

Donde se omitieron por simplicidad las dependencias explícitas.

Para considerar el tercer y último término de (II. A.3), se recurre a la identidad presentada en (II. A.6), ya que en este caso se tiene

$$\nabla(r_\omega \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1) = r_\omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \nabla(\Lambda^T) + \Lambda \nabla(r_\omega \hat{\mathbf{E}}_1) \quad (\text{II. A.18})$$

Repetiendo el mismo proceso utilizado anteriormente, la expresión (II. A.18) puede escribirse como

$$\nabla(r_\omega \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1) = r_\omega \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda \left( \frac{\partial r_\omega}{\partial X_i} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_i \right) \quad (\text{II. A.19})$$

Finalmente, utilizando (II. A.4), (II. A.17) y (II. A.19) en (II. A.3) se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha - \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{I} + \Lambda + \left( \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \\ & + \Lambda \left( \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \end{aligned} \quad (\text{II. A.20})$$

Donde se agruparon convenientemente los términos que incluyen productos tensoriales con  $\hat{\mathbf{E}}_1$ .

Ahora bien, para simplificar (II. A.20) se define a  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{X})$  como el vector de medida de la deformación axial

$$\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{X})}{\partial X_1} + \hat{\mathbf{E}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_1 = \frac{\partial \mathbf{u}_0(X_1)}{\partial X_1} + \frac{\partial \Lambda(X_1)}{\partial X_1} X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \hat{\mathbf{E}}_1 - \Lambda(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.21})$$

Del mismo modo, se define a  $\mathbf{a}_\omega = \mathbf{a}_\omega(\mathbf{X})$  como el vector de medida de la deformación axial por alabeo

$$\mathbf{a}_\omega(\mathbf{X}) = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_1} = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_1} \Lambda(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega(\mathbf{X}) \frac{\partial \Lambda(X_1)}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. A.22})$$

Por último, se define a  $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{X})$  como el tensor de medida de la deformación transversal por alabeo

$$\mathbf{C}(\mathbf{X}) = \frac{\partial r_\omega(\mathbf{X})}{\partial X_\alpha} \Lambda(X_1) \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II. A.23})$$

Con estas definiciones, la expresión del tensor gradiente de desplazamiento resulta

$$\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I} + \mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C} \quad (\text{II. A.24})$$

## Apéndice II. B : Obtención del Tensor de Deformaciones de Green-Lagrange

En el presente apéndice se detalla el proceso de obtención del tensor de deformación de Green-Lagrange a partir del tensor gradiente de desplazamientos. Para ello, considérese la expresión (II-19), o bien (II. A.24), y discriminando los efectos provenientes de la deformación por alabeo se tiene

$$\mathbf{H} = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I} + \mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (\text{II. B.1})$$

Donde  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{a}_\omega$  y  $\mathbf{C}$  fueron definidos en (II. A.21), (II. A.22) y (II. A.23) respectivamente, y

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I}, \quad \mathbf{H}_\omega = \mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C} \quad (\text{II. B.2})$$

Segregar los efectos de este modo tiene por objetivo principal simplificar la omisión de los efectos asociados al alabeo si fuera necesario.

Utilizando (II. B.1) y (II. B.2) en (II-24), el tensor de Green-Lagrange resulta

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega + \mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_\omega^T + (\mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_\omega^T)(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega) \right) \quad (\text{II. B.3})$$

En este punto, el análisis se concentra en el último término de (II. B.3) y cada uno de los términos adicionales que de él surgen.

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = (\mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_\omega^T)(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega) = \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_\omega + \mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_\omega \quad (\text{II. B.4})$$

Donde puede notarse que  $\mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_0 = (\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_\omega)^T$ .

El primer término de (II. B.4) contiene efectos de deformación exclusivamente provenientes de la rotación y la traslación de la sección: este término no incluye los efectos del alabeo. Expandiendo, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 &= (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I})^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I}) \\ &= (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a} + \Lambda^T - \mathbf{I}) (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I}) \end{aligned} \quad (\text{II. B.5})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 &= (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda - (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \Lambda^T \Lambda - \Lambda^T \\ &\quad - (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) - \Lambda + \mathbf{I} \end{aligned} \quad (\text{II. B.6})$$

Teniendo en cuenta que  $\Lambda^T \Lambda = \mathbf{I}$  y de acuerdo a (II. B.2), (II. B.6) puede escribirse como sigue

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) - \mathbf{H}_0^T - \mathbf{H}_0 \quad (\text{II. B.7})$$

Donde se aplicó que  $(\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a})(\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1)$ .

Los términos segundo y tercero de (II. B.4) pueden analizarse de forma conjunta. En este caso, para el primero de ellos se tiene

$$\mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_0 = (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C})^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I}) = (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega + \mathbf{C}^T) (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \Lambda - \mathbf{I}) \quad (\text{II. B.8})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_0 &= (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda - (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) + \mathbf{C}^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \Lambda \\ &\quad - \mathbf{C}^T \end{aligned} \quad (\text{II. B.9})$$

Considerando (II. B.2) y sabiendo que  $(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega)(\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1)$ , (II. B.9) resulta

$$\mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_0 = \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \mathbf{C}^T (\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \Lambda - \mathbf{H}_\omega^T \quad (\text{II. B.10})$$

Por consiguiente, el tercer término de (II. B.4) se obtiene de transponer (II. B.10), es decir

$$\mathbf{H}_0^T \mathbf{H}_\omega = \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} + \Lambda^T \mathbf{C} - \mathbf{H}_\omega \quad (\text{II. B.11})$$

En cuanto al cuarto y último término de (II. B.4), se tiene

$$\mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_\omega = (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C})^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C}) = (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega + \mathbf{C}^T) (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1 + \mathbf{C}) \quad (\text{II. B.12})$$

$$\mathbf{H}_\omega^T \mathbf{H}_\omega = \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a}_\omega (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} + \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \quad (\text{II. B.13})$$

Finalmente, reemplazando (II. B.7), (II. B.10), (II. B.11) y (II. B.13) en (II. B.3), el tensor de deformaciones de Green-Lagrange, se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{1}{2} & (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega + \mathbf{H}_0^T + \mathbf{H}_\omega^T + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) - \mathbf{H}_0^T \\ & - \mathbf{H}_0 + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \mathbf{C}^T (\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \Lambda \\ & - \mathbf{H}_\omega^T + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} + \Lambda^T \mathbf{C} \\ & - \mathbf{H}_\omega + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a}_\omega (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} + \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \\ & + \mathbf{C}^T \mathbf{C}) \end{aligned} \quad (\text{II. B.14})$$

Haciendo las cancelaciones correspondientes y definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega = & \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \mathbf{C}^T (\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \Lambda - \mathbf{H}_\omega^T + \mathbf{a}_\omega \\ & \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} + \Lambda^T \mathbf{C} - \mathbf{H}_\omega + \mathbf{a}_\omega \\ & \cdot \mathbf{a}_\omega (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} + \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{II. B.15})$$

La versión final del tensor de Green-Lagrange resulta

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a} \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{E}_\omega \right) \quad (\text{II. B.16})$$

## Apéndice II. C : Aproximación del tensor de curvaturas

Dada la naturaleza del tensor de rotación, es necesario analizar el orden de su derivada parcial respecto a las coordenadas espaciales en la configuración de referencia, es decir, el tensor de curvaturas [52]. Teniendo en cuenta (II-26) y (II-29), esto es

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{\partial(\exp[\tilde{\Psi}])}{\partial X_1} = \frac{\partial(I + \tilde{\Psi} + g(\psi))}{\partial X_1} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} + \frac{\partial g(\psi)}{\partial X_1} \quad (\text{II. C.1})$$

Con el objetivo de guardar consistencia con el análisis precedente, la derivada del tensor de rotación deberá aproximarse hasta el primer orden. El primer término de (II. C.1), considerando (II-29), será un factor común en todos los términos de la derivada del tensor de rotación, por lo que definirá las condiciones a aplicar. Luego, deben investigarse las posibles alternativas respecto a su orden, a saber

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = \mathbf{C}_0 = O(1) \quad (\text{II. C.2})$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = f_1(\psi) = O(|\psi|) \quad (\text{II. C.3})$$

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = f_2(\psi) = O(|\psi|^2) \quad (\text{II. C.4})$$

Donde  $\mathbf{C}_0$  es un tensor constante,  $f_1(\psi)$  y  $f_2(\psi)$  son funciones tensoriales de primer y segundo orden en las rotaciones, respectivamente.

La condición dada por (II. C.2) considera que la derivada del tensor  $\tilde{\Psi}$  es una constante y, por lo tanto, es de orden 1. Esta condición implica una deformación específica y, en términos fenomenológicos, restrictiva. Por ejemplo, deberán aplicarse esfuerzos (que generen curvaturas) constantes en toda la extensión de la viga, evitando cargas concentradas o variaciones arbitrarias. En este sentido, asumir que  $\partial \tilde{\Psi} / \partial X_1 = O(1)$  condiciona fuertemente la dinámica global del modelo, por lo que no podría considerarse como una circunstancia general.

Un caso particular lo constituye el movimiento de cuerpo rígido para el cual  $\partial \tilde{\Psi} / \partial X_1 = \mathbf{0}$ . Si bien este caso reviste un interés particular en los problemas de dinámica, la imposición de condiciones de contorno anula tal posibilidad.

La segunda alternativa, expuesta en (II. C.3), representa el caso en que la derivada del tensor  $\tilde{\Psi}$  es de primer orden ( $O(|\psi|)$ ). Por lo tanto, la derivada parcial respecto a la coordenada espacial no reduce el orden en términos de las rotaciones, es decir, el tensor  $\tilde{\Psi}$  y el tensor  $\partial \tilde{\Psi} / \partial X_1$  son del mismo orden. Esta condición no implica restricciones significativas sobre la dinámica del modelo más que solo aquellas satisfechas por las condiciones de continuidad asumidas sobre la viga.

El caso en que  $\partial \tilde{\Psi} / \partial X_1$  sea de segundo orden, como en (II. C.4), resulta controversial dado que, bajo las consideraciones de aproximación introducidas, debería despreciarse. En este sentido, la derivada del tensor de rotación sería en su totalidad de segundo orden y las curvaturas no podrían ser consideradas en el modelo. Por lo tanto, en lo que sigue se asume que el primer término de (II. C.1) es de primer orden en las rotaciones, esto es

$$\frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = O(|\psi|) \quad (\text{II. C.5})$$

Al cambiar el foco al segundo término de (II. C.1), considerando (II-29), puede escribirse

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\boldsymbol{\psi})}{\partial X_1} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{2!} \tilde{\Psi}^2 + \frac{1}{3!} \tilde{\Psi}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{\Psi}^n + \dots \right)}{\partial X_1} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial(\tilde{\Psi}^2)}{\partial X_1} + \frac{\partial \left( \frac{1}{3!} \tilde{\Psi}^3 + \dots + \frac{1}{n!} \tilde{\Psi}^n + \dots \right)}{\partial X_1} \end{aligned} \quad (\text{II. C.6})$$

Donde se expuso el término de menor orden de  $g(\boldsymbol{\psi})$ , y

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(\tilde{\Psi}^2)}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \frac{\partial(\tilde{\Psi}\tilde{\Psi})}{\partial X_1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} \tilde{\Psi} + \tilde{\Psi} \frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} \right] = O(|\boldsymbol{\psi}|^2) \quad (\text{II. C.7})$$

Donde se consideró que tanto el tensor  $\tilde{\Psi}$  y el tensor  $\partial\tilde{\Psi}/\partial X_1$  son de primer orden en las rotaciones.

De (II. C.7) se concluye que los siguientes términos son de segundo orden y por lo tanto, en adelante, serán despreciados en la formulación,

$$\frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} \tilde{\Psi} = O(|\boldsymbol{\psi}|^2), \quad \tilde{\Psi} \frac{\partial(\tilde{\Psi})}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|^2) \quad (\text{II. C.8})$$

Finalmente, con (II. C.6) y (II. C.7), es posible inferir que la derivada parcial respecto a  $X_1$  no alterará el orden del segundo término de (II. C.1), por lo que

$$\frac{\partial g(\boldsymbol{\psi})}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|^2) \quad (\text{II. C.9})$$

Entonces, despreciando los términos de orden cuadrático o superior, resulta

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} = \frac{\partial \Lambda_{\text{lin}}}{\partial X_1}, \quad \frac{\partial \Lambda_{\text{lin}}}{\partial X_1} = O(|\boldsymbol{\psi}|) \quad (\text{II. C.10})$$

La aproximación dada en (II. C.10) guarda coherencia con las características de la derivada de un mapa exponencial en  $SO(3)$ . Diversos autores ([65]–[67]) exponen que la derivada parcial del tensor  $\Lambda$  descrito en (II-26) puede escribirse como

$$\Lambda' = \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \tilde{\mathcal{K}} \Lambda \quad (\text{II. C.11})$$

Donde  $\tilde{\mathcal{K}}$  es un tensor antisimétrico. Reemplazando (II-29) y (II. C.1) en la expresión anterior, se tiene

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \frac{\partial(\exp[\tilde{\Psi}])}{\partial X_1} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} + \frac{\partial g(\boldsymbol{\psi})}{\partial X_1} = \tilde{\mathcal{K}} \left( \mathbf{I} + \tilde{\Psi} + g(\boldsymbol{\psi}) \right) = \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{K}} \tilde{\Psi} + \tilde{\mathcal{K}} g(\boldsymbol{\psi}) \quad (\text{II. C.12})$$

Luego, aproximando (II. C.12) al primer orden resulta

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} = \tilde{\mathcal{K}} + \tilde{\mathcal{K}} \tilde{\Psi} + \tilde{\mathcal{K}} g(\boldsymbol{\psi}) \cong \tilde{\mathcal{K}} = \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} \quad (\text{II. C.13})$$

## Apéndice II. D : Aproximación del tensor de deformaciones de Green-Lagrange

En este apéndice se analiza el tensor de deformaciones de Green-Lagrange obtenido, bajo las hipótesis de aproximación expuestas. En lo que sigue, se omite el término asociado a las deformaciones de alabeo ya que será analizado particularmente en secciones próximas.

Partiendo de (II-25) y aplicando la aproximación de las rotaciones (II-30) se tiene, omitiendo el último término,

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{2} \left( (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a})(\mathbf{I} + \tilde{\Psi}) + (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}^T)(\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \quad (\text{II. D.1})$$

Reordenando,

$$\mathbf{E} \cong \frac{1}{2} \left( (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a})\tilde{\Psi} + \tilde{\Psi}^T(\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right) \quad (\text{II. D.2})$$

Luego, considerando (II-20), el vector medida de deformación axial se aproxima como sigue

$$\mathbf{a} \cong \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.3})$$

Donde,  $\bar{\mathbf{a}}$  es la aproximación del vector medida de deformación axial y

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \quad (\text{II. D.4})$$

Teniendo en cuenta (II. D.3) se expanden las aproximaciones de cada uno de los términos de (II. D.2). En primer lugar,

$$(\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a})^T \cong (\bar{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.5})$$

En segundo lugar,

$$\tilde{\Psi}^T(\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = [(\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a})\tilde{\Psi}]^T \cong \tilde{\Psi}^T(\bar{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = [(\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}})\tilde{\Psi}]^T \quad (\text{II. D.6})$$

$$\tilde{\Psi}^T(\bar{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (X_\alpha \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) - \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.7})$$

Donde, por la hipótesis **H5** sobre la aproximación de las rotaciones, los dos últimos términos deben despreciarse, es decir,

$$\tilde{\Psi}^T(\bar{\mathbf{a}} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = [(\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \bar{\mathbf{a}})\tilde{\Psi}]^T = \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.8})$$

Por último, se aproxima

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \cong \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \quad (\text{II. D.9})$$

Donde, de acuerdo a (II. D.3),

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} + \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 - 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.10})$$

Aproximando las rotaciones con **H5**,

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \quad (\text{II. D.11})$$

Habiendo desarrollado sus términos, se reconstruye (II. D.2) con (II. D.5), (II. D.8) y (II. D.11), obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \cong 2\bar{\mathbf{E}} = & \left[ \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^T + \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 - \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \left[ \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right]^T \\ & + \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - 2 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \end{aligned} \quad (\text{II. D.12})$$

Una manera de profundizar en el desarrollo de (II. D.12) consiste en analizar sus componentes. Para ello, dado el tensor  $\bar{\mathbf{E}}$  cada una de sus componentes puede calcularse como  $\bar{\mathbf{E}}_{ij} = \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_j$ . Luego, aplicando algunas propiedades del producto tensorial, la componente  $\bar{\mathbf{E}}_{11}$  resulta

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \tilde{\Psi}_{i1} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} - \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \tilde{\Psi}_{i1} \quad (\text{II. D.13})$$

$$\bar{\mathbf{E}}_{11} = \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \quad (\text{II. D.14})$$

Donde  $\bar{u}_i = \bar{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i$ ,  $\bar{u}_{0i} = \mathbf{u}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_i$ ,  $\tilde{\Psi}_{ij} = \hat{\mathbf{E}}_i \cdot \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_j$ .

De manera similar, la componente  $\bar{\mathbf{E}}_{12}$  es

$$\bar{\mathbf{E}}_{12} = \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_2 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{21} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{2i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \quad (\text{II. D.15})$$

Mientras que,

$$\bar{\mathbf{E}}_{21} = \hat{\mathbf{E}}_2 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{21} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{2i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = \bar{\mathbf{E}}_{12} \quad (\text{II. D.16})$$

Lo cual es consistente con la simetría esperada del tensor.

Por su parte, la componente  $\bar{\mathbf{E}}_{13}$  resulta

$$\bar{\mathbf{E}}_{13} = \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_3 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{31} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{3i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} \quad (\text{II. D.17})$$

y nuevamente en concordancia con la simetría del tensor,

$$\bar{\mathbf{E}}_{31} = \hat{\mathbf{E}}_3 \cdot \bar{\mathbf{E}} \hat{\mathbf{E}}_1 = \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} - \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{31} + \frac{1}{2} \tilde{\Psi}_{3i} \frac{\partial u_{0i}}{\partial X_1} = \bar{\mathbf{E}}_{13} \quad (\text{II. D.18})$$

Por último, es sencillamente verificable que las componentes restantes son nulas, esto es



$$\bar{\mathbf{E}}_{23} = \bar{\mathbf{E}}_{32} = \bar{\mathbf{E}}_{33} = \bar{\mathbf{E}}_{22} = 0 \quad (\text{II. D.19})$$

## Apéndice II. E : Aproximación de los términos relacionados con el alabeo

A continuación, se exponen las condiciones y resultados de aplicar las hipótesis de aproximación **H5** y **H6** a los términos asociados a la deformación y el desplazamiento por alabeo. Comenzando por la deformación, teniendo en cuenta (II. B.15) el término del tensor de Green-Lagrange proveniente del alabeo es

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega = & \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \mathbf{C}^T \Lambda + (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \Lambda + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\ & + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} + \Lambda^T \mathbf{C} + \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a}_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\ & + (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} + \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \mathbf{C}^T \mathbf{C} \end{aligned} \quad (\text{II. E.1})$$

Con el objetivo de aproximar las deformaciones, deberán despreciarse aquellos términos que contengan el producto entre las medidas de deformación  $\mathbf{a}_\omega$ ,  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}^T$ . A saber,

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = & \mathbf{C}^T (\mathbf{a} \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}) \mathbf{C} \\ = & \mathbf{a}_\omega \cdot \mathbf{a}_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \mathbf{C} = \mathbf{C}^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) = \mathbf{C}^T \mathbf{C} \cong \mathbf{0} \end{aligned} \quad (\text{II. E.2})$$

Luego, se tiene

$$\mathbf{E}_\omega \cong (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{a}_\omega) \Lambda + \Lambda^T (\mathbf{a}_\omega \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \Lambda^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \Lambda \quad (\text{II. E.3})$$

El siguiente paso consiste incorporar a la expresión anterior la aproximación del tensor de rotaciones de acuerdo a (II-30). Considerando  $\mathbf{a}_\omega$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\omega = & \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \Lambda \hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega \frac{\partial \Lambda}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \cong \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}) \hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega \frac{\partial (\mathbf{I} + \tilde{\Psi})}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \\ = & \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \quad (\text{II. E.4})$$

De igual modo, para  $\mathbf{C}$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = & \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \Lambda (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \cong \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\mathbf{I} + \tilde{\Psi}) (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \\ = & \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \end{aligned} \quad (\text{II. E.5})$$

Reemplazando (II. E.4) y (II. E.5) en (II. E.3), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega \cong & 2 \left[ \Lambda^T \left( \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \Lambda^T \left( \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \Lambda^T \left( r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right]^s \\ & + 2 \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \Lambda^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \Lambda^T \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \right]^s \end{aligned} \quad (\text{II. E.6})$$

Donde  $[\cdot]^s = 1/2((\cdot) + (\cdot)^T)$  refiere a la parte simétrica de un tensor. Dado que  $\Lambda^T = \mathbf{I} + \tilde{\Psi}^T$ , al expandir (II. E.6) se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\omega \cong & 2 \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right. \\
 & + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\
 & \left. + r_\omega \tilde{\Psi}^T \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right]^s \tag{II. E.7} \\
 & + 2 \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \right. \\
 & \left. + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \right]^s
 \end{aligned}$$

De acuerdo con la hipótesis **H5** aquellos términos de segundo orden en las rotaciones deben despreciarse, esto es, aquellos que contengan  $\tilde{\Psi}^T \tilde{\Psi}$  y  $\tilde{\Psi}^T \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1}$ . Además, por la condición de antisimetría del tensor  $\tilde{\Psi}$

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right]^s \\
 & = \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} \tilde{\Psi} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \right]^s = \mathbf{0} \tag{II. E.8}
 \end{aligned}$$

Con lo cual, resulta

$$\mathbf{E}_\omega \cong 2 \left[ \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \right]^s \tag{II. E.9}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\omega \cong & 2 \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\
 & + r_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \tilde{\Psi}^T}{\partial X_1} \tag{II. E.10}
 \end{aligned}$$

Finalmente, se define

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_\omega^{lin} = & 2 \frac{\partial r_\omega}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) + \frac{\partial r_\omega}{\partial X_\alpha} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) + r_\omega \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \\
 & + r_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \tilde{\Psi}^T}{\partial X_1} \tag{II. E.11}
 \end{aligned}$$

## Apéndice II. F : Expresiones auxiliares de variaciones de las medidas energéticas

En esta sección adicional se exponen algunos desarrollos adicionales necesarios para obtener las variaciones de las medidas energéticas que completan las secciones anteriores.

### Variación de la energía cinética

En primer lugar, considerando la variación de la energía cinética (II-139), la aceleración (II-140) y la variación del campo de desplazamientos (II-134), se tiene

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \bar{T} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_{\mathcal{B}_0} \rho \left( \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R} + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \left( \delta \mathbf{u}_0 + (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \mathbf{R} + \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \right) dt \quad (\text{II. F.1})$$

Omitiendo la integral respecto al tiempo por simplicidad, distribuyendo y reordenando

$$\delta \bar{T} = - \int_{\mathcal{B}_0} \rho \left( \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) \right) dV \quad (\text{II. F.2})$$

Como se mencionó oportunamente, el dominio del cuerpo  $\mathcal{B}_0$  puede considerarse como el producto cartesiano entre el área transversal  $\mathcal{A}_0$  y la línea del eje elástico  $\mathcal{S}_0$ . El teorema de Fubini [62] permite entonces expresar la integral en el volumen como una integral doble en  $\mathcal{A}_0$  y en  $\mathcal{S}_0$ , es decir

$$\delta \bar{T} = - \int_{\mathcal{S}_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \left( \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_0 + (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) \right) dS dL \quad (\text{II. F.3})$$

A partir de distribuir las integrales, se analizan cada uno de los nueve términos resultantes.

El primer término de (II. F.3) resulta

$$\int_{\mathcal{S}_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \mathbf{u}_0 dS dL = \int_{\mathcal{S}_0} \dot{\mathbf{u}}_0 \int_{\mathcal{A}_0} \rho dS \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL = \int_{\mathcal{S}_0} \dot{\mathbf{u}}_0 M_u \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL \quad (\text{II. F.4})$$

Donde se definió la masa por unidad de longitud asociada a la sección transversal como

$$M_{\mathbf{u}} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho dS = \rho \mathcal{A}_0 \quad (\text{II. F.5})$$

El segundo término de (II. F.3), aplicando algunas propiedades del álgebra entre vectores, resulta

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) dS dL &= \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL \\ &= \int_{S_0} I_{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.6})$$

Donde  $I_{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}}$  es el tensor de inercia de la sección transversal y, de acuerdo a las expresiones clásicas de la dinámica rotacional, el término integrado en el área transversal representa la variación temporal del momento angular de la sección  $H_D$  [68], luego

$$\frac{\partial H_D}{\partial t} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS = I_{\boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} \quad (\text{II. F.7})$$

Para el tercer término de (II. F.3) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 dS dL &= \int_{S_0} \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega^2 dS \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL \\ &= \int_{S_0} \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_{\omega} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL = \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_{\omega} \delta \psi_1 \Big|_0^L - \int_{S_0} \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_{\omega} \delta \psi_1 dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.8})$$

Donde se integró por partes y se definió la inercia de la sección asociada al alabeo como

$$I_{\omega} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega^2 dS = \rho S_{\omega^2}, \quad S_{\omega^2} = \int_{\mathcal{A}_0} \omega^2 dS \quad (\text{II. F.9})$$

El cuarto término de (II. F.3) resulta

$$\int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \ddot{\mathbf{u}}_0 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) dS dL = \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{u}}_0 dS \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL = \int_{S_0} I_{\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}} \ddot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL \quad (\text{II. F.10})$$

Donde  $I_{\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}}$  es el tensor de acoplamiento inercial entre rotación y traslación de la sección transversal, y se define según

$$\int_{\mathcal{A}_0} \rho \mathbf{R} \times \ddot{\mathbf{u}}_0 dS = I_{\boldsymbol{\psi}\mathbf{u}} \ddot{\mathbf{u}}_0 \quad (\text{II. F.11})$$

El quinto término de (II. F.3) es similar al anterior, se tiene

$$\int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \mathbf{u}_0 dS dL = \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL = \int_{S_0} I_{\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}} \dot{\boldsymbol{\psi}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL \quad (\text{II. F.12})$$

Donde  $I_{\mathbf{u}\boldsymbol{\psi}}$  es el tensor de acoplamiento inercial entre traslación y rotación de la sección transversal, y se define según

$$\int_{\mathcal{A}_0} \rho (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) dS = I_{\omega\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} \quad (\text{II. F.13})$$

Para el sexto término de (II. F.3) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 dS dL &= \int_{S_0} \dot{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega^2 dS \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL \\ &= \int_{S_0} \ddot{u}_{01} M_\omega \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL = \ddot{u}_{01} M_\omega \delta \psi_1 \Big|_0^L - \int_{S_0} \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega \delta \psi_1 dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.14})$$

Donde se integró por partes y se definió la masa de la sección asociada al alabeo como

$$M_\omega = \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega dS = \rho S_\omega, \quad S_\omega = \int_{\mathcal{A}_0} \omega dS \quad (\text{II. F.15})$$

El séptimo término de (II. F.3) resulta

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_0 dS dL &= \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega dS \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL \\ &= \int_{S_0} M_\omega \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.16})$$

Donde se incorporó (II. F.15).

En el octavo término de (II. F.3) se tiene

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} (\dot{\boldsymbol{\psi}} \times \mathbf{R}) \cdot \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 dS dL &= \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega (\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{E}}_1) dS \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL \\ &= \int_{S_0} \mathbf{S}_{\omega\mathbf{R}} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} dL \\ &= \mathbf{S}_{\omega\mathbf{R}} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \dot{\boldsymbol{\psi}} \delta \psi_1 \Big|_0^L - \int_{S_0} \mathbf{S}_{\omega\mathbf{R}} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} \delta \psi_1 dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.17})$$

Donde se integró por partes y se definió el vector de inercia de la sección asociado al alabeo como

$$\mathbf{S}_{\omega\mathbf{R}} = \text{skew} \left[ \int_{\mathcal{A}_0} \rho \omega \mathbf{R} dS \right] \quad (\text{II. F.18})$$

El noveno y último término de (II. F.3) resulta

$$\begin{aligned} \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \omega \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot (\delta \boldsymbol{\psi} \times \mathbf{R}) dS dL &= \int_{S_0} \int_{\mathcal{A}_0} (\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{E}}_1) \rho \omega dS \cdot \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \delta \boldsymbol{\psi} dL \\ &= \int_{S_0} \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{S}_{\omega\mathbf{R}} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.19})$$

Donde se utilizó (II. F.18).

Utilizando las expresiones anteriores para reconstruir (II. F.3) y agrupando convenientemente, se tiene

$$\begin{aligned} \delta \bar{T} = & - \int_{\mathcal{S}_0} \left[ \left( \ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \left( I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right. \\ & \cdot \delta \boldsymbol{\psi} - \left. \left( \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} \right) \delta \psi_1 \right] dL \\ & + \left. \left( \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_\omega + \ddot{u}_{01} M_\omega + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}} \right) \delta \psi_1 \right|_0^L \end{aligned} \quad (\text{II. F.20})$$

### Variación de la energía potencial elástica

Para obtener la expresión final de la variación de la energía cinética se parte de (II-149) y (II-154), y considerando (II-37) y (II-156), (II-157) resulta

$$\begin{aligned} \delta \bar{V} = & \int_{\mathcal{B}_0} \delta(\mathbf{S} : \mathbf{E}^{GL}) dV = \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu \mathbf{E}^{GL} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \delta \left( \bar{\mathbf{e}} - \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \\ = & \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \left( \bar{\mathbf{e}} - \left( \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \\ = & \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - \boldsymbol{\psi} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \right. \\ & + \left. \left. \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \right. \\ & + \left. \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \\ & \cdot \left( \left( \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \delta \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \end{aligned} \quad (\text{II. F.21})$$

Donde se distribuyó el operador variacional. Operando, se tiene

$$\begin{aligned} \delta \bar{V} = & \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu \bar{\mathbf{e}} \cdot \left( \left( \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \right. \\ & \left. + \left( \left( \delta \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2\delta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \end{aligned} \quad (\text{II. F.22})$$

$$\begin{aligned} \delta \bar{V} = & \int_{\mathcal{B}_0} 2\mu \left( \left( \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \bar{\mathbf{e}} \cdot \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} - \bar{\mathbf{e}} \cdot (\delta \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \bar{\mathbf{e}} \cdot \left( \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right) \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \right. \\ & \left. + \bar{\mathbf{e}} \cdot \left( \left( \delta \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2\delta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dV \end{aligned} \quad (\text{II. F.23})$$

Nuevamente, el teorema de Fubini [62] permite expresar la integral en el volumen como una integral doble en  $\mathcal{A}_0$  y en  $\mathcal{S}_0$ . Luego, distribuyendo la integral de área en (II. F.23) y extrayendo de ésta las variables que no dependen de la posición sobre la sección transversal, resulta

$$\begin{aligned} \delta \bar{V} = & \int_{S_0} 2\mu \left( \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{e}} dS \cdot \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \hat{\mathbf{E}}_1 \times \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \right. \\ & + \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}} dS + 2\delta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \cdot \int_{\mathcal{A}_0} \omega \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 dS \\ & \left. + \left( \delta \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \right) dL \end{aligned} \quad (\text{II. F.24})$$

A partir de distribuir la integral en  $S_0$ , se analizan cada uno de los seis términos resultantes.

El primer término de (II. F.24) resulta

$$\int_{S_0} 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \cdot \delta \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} dL = \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \mathbf{u}_0 \Big|_0^L - \int_{S_0} \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} \cdot \delta \mathbf{u}_0 dL \quad (\text{II. F.25})$$

Donde se integró por partes y se definió la fuerza por unidad de longitud integrada en la sección transversal, es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} = & 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \\ = & 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \right. \\ & \left. - \boldsymbol{\psi} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + 2 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dS \\ = & 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_0 \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi} + \mathcal{S}_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + 2\mathcal{S}_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{II. F.26})$$

Donde además se definió

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{23} = \text{skew} \left[ \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} dS \right] = & \begin{bmatrix} 0 & -s_2 & s_3 \\ s_2 & 0 & 0 \\ -s_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \int_{\mathcal{A}_0} X_3 dS, \\ s_3 = \int_{\mathcal{A}_0} X_2 dS, \quad \mathcal{S}_{\omega\alpha'} = & \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} dS, \quad \mathcal{S}_\omega = \int_{\mathcal{A}_0} \omega dS \end{aligned} \quad (\text{II. F.27})$$

De manera similar, para el segundo término de (II. F.24) se tiene

$$\int_{S_0} 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{e}} dS \cdot \delta \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} dL = \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \Big|_0^L - \int_{S_0} \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} dL \quad (\text{II. F.28})$$

Donde se integró por partes y se definió el momento por unidad de longitud integrado en la sección transversal, es decir



$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{e}} \, dS \\
 &= 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathbf{S}_{23} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2\mathbf{I}_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} + \left( \mathbf{I}_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\
 &\quad + \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) + \mathbf{S}_{R\omega'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \\
 &\quad \left. + \mathbf{S}_{23} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right)
 \end{aligned} \tag{II. F.29}$$

Donde se definió, además,

$$\int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \left( \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \right) dS = \mathbf{I}_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1}, \quad \mathbf{S}_{R\omega'} = \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \text{skew}[\mathbf{R}] dS \tag{II. F.30}$$

Siendo  $\mathbf{I}_{\mathcal{A}_0}$  el tensor de segundos momentos de área.

El tercer término de (II. F.24) resulta

$$\begin{aligned}
 - \int_{\mathcal{S}_0} 2\mu \hat{\mathbf{E}}_1 \times \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} \, dS \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \, dL &= \int_{\mathcal{S}_0} (\mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \, dL \\
 &= \int_{\mathcal{S}_0} 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\
 &\quad \left. + \mathcal{A}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2\mu \frac{1}{2} \left( S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} \, dL
 \end{aligned} \tag{II. F.31}$$

Donde se utilizaron las definiciones dadas en (II. F.26) y (II. F.27).

Para el cuarto término de (II. F.24), se tiene

$$\int_{\mathcal{S}_0} 2\mu \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}} \, dS \, dL = g_0 \delta \psi_1 \Big|_0^L - \int_{\mathcal{S}_0} \frac{\partial g_0}{\partial X_1} \delta \psi_1 \, dL \tag{II. F.32}$$

Donde se definió la siguiente función integral sobre la sección

$$\begin{aligned}
 g_0 &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \cdot \bar{\mathbf{e}} \, dS \\
 &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha - \boldsymbol{\psi} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \frac{\partial \omega}{\partial X_\alpha} \right) dS
 \end{aligned} \tag{II. F.33}$$

El quinto término de (II. F.24) resulta

$$\int_{\mathcal{S}_0} 2\mu \delta \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \int_{\mathcal{A}_0} \omega \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \, dS \, dL = \left[ g_1 \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} - \frac{\partial g_1}{\partial X_1} \delta \psi_1 \right]_0^L + \int_{\mathcal{S}_0} \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \delta \psi_1 \, dL \tag{II. F.34}$$

Donde se definió la siguiente función integral sobre la sección

$$\begin{aligned}
 g_1 &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \omega \bar{\mathbf{e}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 dS \\
 &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \omega \left( \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + 2 \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \omega \right) dS \quad (\text{II. F.35})
 \end{aligned}$$

El sexto y último término de (II. F.24) es

$$\begin{aligned}
 \int_{S_0} 2\mu \left( \delta \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS dL \\
 = \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \delta u_{0\alpha} \Big|_0^L - \int_{S_0} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \right) \delta u_{0\alpha} dL \quad (\text{II. F.36})
 \end{aligned}$$

Donde se integró por partes y se definió

$$F_{\mathcal{A}_{01}} = \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 = 2\mu \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} - \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \right) \quad (\text{II. F.37})$$

Utilizando las expresiones anteriores para reconstruir (II. F.24) y agrupando convenientemente, se tiene

$$\begin{aligned}
 \delta \bar{V} &= \int_{S_0} \left[ -\frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \left( -\frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \left( -\frac{\partial g_0}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \right) \delta \psi_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \right) \delta u_{0\alpha} \right] dL \\
 &\quad + \left[ \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + g_1 \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + \left( g_0 - \frac{\partial g_1}{\partial X_1} \right) \delta \psi_1 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} F_{\mathcal{A}_{01}} \delta u_{0\alpha} \right]_L^0 \quad (\text{II. F.38})
 \end{aligned}$$

### Variación del trabajo de las cargas externas

En este caso, para la variación del trabajo de las cargas externas se parte de (II-128), luego

$$\delta \bar{W}_e = \int_{S_0} \delta \left( \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{\mathbf{c}} \right) dL + \delta \left[ \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{f}} + \boldsymbol{\psi} \cdot \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{\mathbf{c}} \right]_0^L \quad (\text{II. F.39})$$

Distribuyendo el operador variacional, se tiene

$$\delta \bar{W}_e = \int_{S_0} \left( \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{\mathbf{c}} \right) dL + \left[ \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \bar{\mathbf{c}} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \right]_0^L \quad (\text{II. F.40})$$

Al distribuir la integral sobre los términos de (II. F.40), sólo el último de ellos requiere integración por partes. Resulta, entonces,

$$\int_{s_0} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \bar{c} dL = \bar{c} \delta \psi_1 \Big|_0^L - \int_{s_0} \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \delta \psi_1 dL \quad (\text{II. F.41})$$

Llevando (II. F.41) a (II. F.40), se tiene finalmente

$$\begin{aligned} \delta \bar{W}_e = \int_{s_0} \left( \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} - \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \delta \psi_1 \right) dL \\ + \left[ \bar{\mathbf{f}} \cdot \delta \mathbf{u}_0 + \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\psi} + \bar{c} \delta \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} + \bar{c} \delta \psi_1 \right]_0^L \end{aligned} \quad (\text{II. F.42})$$





## Capítulo III: Aproximación por Elementos Finitos del Modelo Estructural-Dinámico

En el capítulo precedente la teoría general que describe la mecánica del continuo en el modelo utilizado fue presentada. El carácter continuo de los desarrollos anteriores imposibilita su aplicación práctica en casos de interés, por lo que una versión de dimensión finita (discreta) debe ser desarrollada. Las ecuaciones diferenciales de movimiento del modelo deben reescribirse como ecuaciones algebraicas a través de un método de aproximación para dar lugar a su posterior resolución. En este caso, el método de aproximación es el método de los elementos finitos (FEM).

El FEM se sustenta en la idea de que cualquier sistema físico se compone de diferentes partes y, por ende, la solución de un problema que describe su comportamiento puede ser representada también por partes. Sobre cada parte, la solución responde a una combinación lineal de parámetros a determinar y funciones conocidas de la coordenada espacial. En este contexto, generalmente una aproximación basada en el FEM consta de tres características fundamentales: i) la discretización del dominio; ii) la aproximación de las variables incógnitas dentro del dominio de cada elemento; iii) consideraciones de continuidad y balance que permiten reconstruir la solución.

El proceso a transitar desde la formulación presentada hasta la formulación en elementos finitos, apta para su implementación computacional se compone de varias etapas. T. R. Hughes postula que los constituyentes principales de este proceso aplicado a la solución de un problema de valores en la frontera (BVP) son: i) la formulación débil o variacional del problema; y ii) la solución aproximada de las ecuaciones variacionales a través de funciones en los elementos finitos. Por consiguiente, en este capítulo se presenta el proceso de obtención de la forma débil de las ecuaciones de movimiento y, sobre ella, la aproximación a través del método de Galerkin. Además, se introduce brevemente el proceso de discretización clásico del FEM, para luego abordar el análisis de las características de los elementos utilizados.

En términos generales, el método de los elementos finitos es un caso particular del procedimiento de aproximación de Galerkin. Sin embargo, lo que le da interés y sus particulares características al FEM es la selección de funciones que se utilizan para aproximar las variables incógnitas en el dominio del BVP, las denominadas funciones de base. No solo la calidad de la solución aproximada depende fuertemente de las funciones que se escojan, sino que el uso de un grupo inadecuado de funciones puede acarrear problemas numéricos que alteren la representatividad del modelo desarrollado. Un ejemplo de estos problemas numéricos, que será considerado más adelante, lo constituye el incremento espurio de la rigidez transversal de la viga conocido como bloqueo por corte. Es por esto que resulta fundamental seleccionar apropiadamente el tipo de elementos y sus atributos.

## III. 1 Forma débil de las ecuaciones de movimiento

La versión débil de un BVP es aquella definida bajo ciertas condiciones de tal manera que admite una solución débil al problema original, entendida como una versión relajada o aproximada de la solución exacta del BVP. La solución débil está definida en el dominio del problema, satisface exactamente las condiciones de contorno esenciales. Sin embargo, sólo satisface las condiciones de contorno naturales y las ecuaciones diferenciales del BVP en un sentido integral sobre el dominio más que en todos sus puntos.

El procedimiento para “debilitar” el problema descrito por el modelo estructural-dinámico consiste en el ampliamente difundido método de residuos ponderados, para el cual es necesaria la introducción de funciones de peso o de ponderación que cumplan determinadas características [60]. De manera general, se exigirá que las funciones de peso estén definidas en el dominio del continuo (eje elástico de la viga) y sean suficientemente suaves, esto es, que sean diferenciables hasta el orden requerido en el problema. Además, las funciones de peso deberán anularse en los extremos del dominio donde se definan condiciones de contorno esenciales (o cinemáticas). Luego, se define el siguiente subespacio de funciones que cumple con las características de un subespacio de Sobolev [69]

$$H^1 = \left\{ \vartheta \mid \vartheta(X_1): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}, \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \vartheta}{\partial X_1} \right)^2 + \vartheta^2 \right] dL < \infty \right\} \quad (\text{III-1})$$

Donde  $\vartheta$  representa las funciones del subespacio  $H^1$  y  $L$  es la longitud de la viga. Por otro lado, y a partir de  $H^1$ , se define un segundo subespacio en concordancia con la condiciones de contorno esenciales del problema

$$H_0^1 = \{ \vartheta \mid \vartheta \in H^1, \vartheta(0) = 0, \vartheta(L) = 0 \} \quad (\text{III-2})$$

Donde se supuso que en ambos extremos de la viga existen condiciones de contorno esenciales.

Relacionados con (III-1) y (III-2) se definen dos subespacios de funciones vectoriales de peso, aptos para aplicar el método de residuos ponderados a ecuaciones vectoriales. Es decir,

$$\bar{H}^1 = \left\{ \boldsymbol{\vartheta} \mid \boldsymbol{\vartheta}(X_1): [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^3, \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\vartheta}}{\partial X_1} \right) + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta} \right] dL < \infty \right\} \quad (\text{III-3})$$

$$\bar{H}_0^1 = \{ \boldsymbol{\vartheta} \mid \boldsymbol{\vartheta} \in \bar{H}^1, \boldsymbol{\vartheta}(0) = 0, \boldsymbol{\vartheta}(L) = 0 \} \quad (\text{III-4})$$

Donde  $\boldsymbol{\vartheta}$  representa las funciones vectoriales del subespacio  $\bar{H}^1$  y  $L$  es la longitud de la viga.

En el Capítulo 2 se derivaron las ecuaciones de movimiento (II-172) (II-173) que gobiernan el modelo estructural-dinámico bajo las hipótesis introducidas durante la formulación. Tales ecuaciones son ecuaciones diferenciales a derivadas parciales con el desplazamiento del eje elástico  $\mathbf{u}_0(X_1, t)$  y las rotaciones de la sección transversal  $\boldsymbol{\psi}(X_1, t)$  como variables principales, y se repiten aquí por completitud

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \dot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( F_{\mathcal{A}_{01}} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \bar{\mathbf{f}} \quad (\text{III-5})$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_2(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) &= I_{\psi\psi}\dot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u}\ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial\dot{\boldsymbol{\psi}}_1}{\partial X_1}\mathbf{S}_{\omega R}\hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial\mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 \\
 &+ \left( \frac{\partial^2\dot{\boldsymbol{\psi}}_1}{\partial X_1^2}I_\omega + \frac{\partial\ddot{u}_{01}}{\partial X_1}M_\omega + \mathbf{S}_{\omega R}\hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial\dot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \frac{\partial g_0}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \\
 &= \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial\bar{c}}{\partial X_1}\hat{\mathbf{E}}_1
 \end{aligned} \tag{III-6}$$

Donde se introdujeron los operadores  $\mathcal{L}_1(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  y  $\mathcal{L}_2(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  con el objetivo de representar a las ecuaciones de movimiento de forma compacta.

Luego de manipular convenientemente los términos de (II-172) y de (II-173) de acuerdo a lo expuesto en el Apéndice III. A, las ecuaciones de movimiento pueden expresarse como

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) + \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) + \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \bar{\mathbf{f}} \tag{III-7}$$

$$\mathcal{L}_2(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) + \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) + \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial\bar{c}}{\partial X_1}\hat{\mathbf{E}}_1 \tag{III-8}$$

Donde  $\mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$ ,  $\mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$ ,  $\mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$ ,  $\mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$ ,  $\mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  y  $\mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  se encuentran definidos en el Apéndice III. A (expresiones (III. A.10) a (III. A.17)) y tienen por objetivo agrupar los términos lineales (indicados con  $(\cdot)^L$ ), asociados al alabeo (indicados con  $(\cdot)^\omega$ ), y no lineales (indicados con  $(\cdot)^{NL}$ ).

El siguiente paso en la obtención de la formulación débil del problema consiste en multiplicar escalarmente ambos miembros de las ecuaciones de movimiento por funciones de peso e integrarlas en el dominio  $[0, L]$ . Esto es, teniendo en cuenta (III-7) y (III-8)

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL &= \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL + \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &+ \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \bar{\mathbf{f}} dL
 \end{aligned} \tag{III-9}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL &= \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL + \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &+ \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \left( \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial\bar{c}}{\partial X_1}\hat{\mathbf{E}}_1 \right) dL
 \end{aligned} \tag{III-10}$$

Donde  $\boldsymbol{\phi}^*, \boldsymbol{\theta}^* \in \bar{H}_0^1$ .

El proceso de manipulación algebraica que es necesario aplicar sobre (III-9) y (III-10) es voluminoso e implica distribuir los productos escalares, e integrar por partes aquellos términos que posean derivadas de órdenes superiores. Es oportuno destacar que, como es habitual, la integración por partes generará términos adicionales en los contornos del dominio. Sin embargo, debido a la condición fijada sobre el subespacio de funciones vectoriales en (III-4) estos términos serán nulos, ya que dichas funciones satisfacen las condiciones de contorno esenciales homogéneas. Tomando por ejemplo el cuarto término de (II-172) que, luego de ser considerado en (III-9), requiere integración por partes, es decir

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \frac{\partial\mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} dL = \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial\boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} dL = - \int_0^L \frac{\partial\boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} dL \tag{III-11}$$

Donde se tuvo en cuenta que

$$\boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \Big|_0^L = \boldsymbol{\phi}^*(L) \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}(L) - \boldsymbol{\phi}^*(0) \cdot \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}(0) = 0, \quad \boldsymbol{\phi}^*(L) = \boldsymbol{\phi}^*(0) = \mathbf{0} \quad (\text{III-12})$$

Aplicando el mismo procedimiento a cada uno de los términos de (III-9), éstos resultan

$$\begin{aligned} & \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\ &= \int_0^L \left[ \boldsymbol{\phi}^* \cdot \ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + \boldsymbol{\phi}^* \cdot I_{u\boldsymbol{\psi}} \ddot{\boldsymbol{\psi}} \right. \\ &+ 2\mu \left( \mathcal{A}_0 \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \right. \\ &\left. \left. \cdot \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} + \mathcal{A}_0 \frac{1}{2} \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi} \right) \right] dL \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\ &= \int_0^L \left[ M_\omega \boldsymbol{\phi}^* \cdot (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} \right. \\ &+ 2\mu \left( \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot S_{\omega\alpha'} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \boldsymbol{\phi}^* \\ &\left. \cdot S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right] dL \end{aligned} \quad (\text{III-14})$$

$$\begin{aligned} & \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\ &= \int_0^L 2\mu \left( \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \right. \\ &\cdot \left( \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \\ &\left. + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right) dL \end{aligned} \quad (\text{III-15})$$

Donde se tuvo en cuenta que  $(\mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1}$ .

Haciendo lo propio con (III-10), se tiene



$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &= \int_0^L \left[ \boldsymbol{\theta}^* \cdot I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{\theta}^* \cdot I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 \right. \\
 &+ 2\mu \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \cdot \mathbf{S}_{23} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \cdot 2I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \right. \\
 &\cdot I_{\mathcal{A}_0} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \cdot \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \left. \right) \\
 &+ 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \boldsymbol{\theta}^* \cdot \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathbf{S}_{23} \hat{\mathbf{E}}_1 \times \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \mathcal{A}_0 \boldsymbol{\theta}^* \right. \\
 &\cdot (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \left. \right) \Big] dL \tag{III-16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &= \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathbf{S}_{\omega R} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \\
 &\cdot \left( \frac{\partial \ddot{\psi}_1}{\partial X_1} I_\omega + \ddot{u}_{01} M_\omega + \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \ddot{\boldsymbol{\psi}} + g_0 - \frac{\partial g_1}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 + 2\mu \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \\
 &\cdot \left( \mathbf{S}_{R\omega'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \mathbf{S}_{23} S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2\mu \boldsymbol{\theta}^* \cdot \left( S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dL \tag{III-17}
 \end{aligned}$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \int_0^L \frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \cdot 2\mu \mathbf{S}_{23} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dL \tag{III-18}$$

Donde se tuvo en cuenta que  $(I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \hat{\mathbf{E}}_1 = I_{\mathcal{A}_0} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1}$ .

Las expresiones (III-9) y (III-10), cuyos términos se desarrollan en (III-13) hasta (III-18), junto con la definición de  $\bar{H}_0^1$  en (III-4) constituyen la forma débil del BVP asociado a la formulación del modelo estructural-dinámico.

## III. 2 Aproximación de funciones con el método de Galerkin

La formulación caracterizada en (III-9) y (III-10) (junto al desarrollo de sus términos) aunque fue debilitada, continúa siendo continua y por lo tanto no admite el tratamiento de un problema de dimensión finita. En consecuencia, debe recurrirse a una aproximación discreta que, más adelante, dará lugar a la formulación en elementos finitos. La discretización del problema debe realizarse sobre los dos grupos de funciones presentes: las funciones de peso introducidas y las funciones de base que representan las coordenadas generalizadas o variables principales del problema. El método de Galerkin propone utilizar las mismas aproximaciones para ambos grupos de funciones dando así un conveniente equilibrio a la estructura interna de las expresiones.

Con vista en el desarrollo numérico, se definen subconjuntos de dimensión finita de los subespacios de funciones definidos en (III-1), (III-2), (III-3) y (III-4), es decir

$$\bar{H}_0^{1n} \subset \bar{H}_0^1, \quad H_0^{1n} \subset H_0^1 \quad (\text{III-19})$$

Donde el superíndice  $(\cdot)^n$  indica un subespacio n-dimensional del subespacio  $(\cdot)$ . A partir de estos subespacios y con la intención de trabajar sobre las ecuaciones de movimiento debilitadas, se introduce un tercer subespacio n-dimensional de tensores como sigue,

$$\bar{H}_0^{1n} = \left\{ \mathcal{N}: \bar{H}_0^{1n} \rightarrow \bar{H}_0^{1n} \mid \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial X_1} : \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial X_1} \right) + \mathcal{N} : \mathcal{N} \right] dL < \infty \right\} \quad (\text{III-20})$$

Donde  $\mathcal{N}$  representa un tensor de segundo orden, cuyas componentes son las funciones del subespacio  $H_0^{1n}$ .

Luego, las funciones de peso se aproximan a su versión discreta n-dimensional como una combinación lineal entre elementos del subespacio  $\bar{H}_0^{1n}$  y  $n$  vectores constantes

$$\boldsymbol{\phi}^* \cong \bar{\boldsymbol{\phi}} = N_c^u(X_1) \boldsymbol{\phi}_c, \quad c = 1, \dots, n \quad (\text{III-21})$$

$$\boldsymbol{\theta}^* \cong \bar{\boldsymbol{\theta}} = N_d^\psi(X_1) \boldsymbol{\theta}_d, \quad d = 1, \dots, m \quad (\text{III-22})$$

Donde el índice repetido implica sumatoria,  $\boldsymbol{\phi}$  y  $\boldsymbol{\theta}$  son constantes a determinar, y  $N^u \in \bar{H}_0^{1n}$ ,  $N^\psi \in \bar{H}_0^{1m}$ . Del mismo modo, para las variables principales del problema, se proponen aproximaciones n-dimensionales,

$$\mathbf{u}_0 \cong \bar{\mathbf{u}}_0 = N_a^u(X_1) \mathbf{u}_{0a}^*(t), \quad a = 1, \dots, n \quad (\text{III-23})$$

$$\boldsymbol{\psi} \cong \bar{\boldsymbol{\psi}} = N_b^\psi(X_1) \boldsymbol{\psi}_b^*(t), \quad b = 1, \dots, m \quad (\text{III-24})$$

Donde, nuevamente, el índice repetido implica sumatoria,  $\mathbf{u}_0^*$  y  $\boldsymbol{\psi}^*$  son funciones del tiempo, y  $N^u \in \bar{H}_0^{1n}$ ,  $N^\psi \in \bar{H}_0^{1m}$ . Debe notarse aquí que, siguiendo el método de Galerkin, se utiliza el mismo conjunto de tensores en las expansiones finitas de  $\bar{\mathbf{u}}_0$  y  $\bar{\boldsymbol{\phi}}$  (en (III-21) y (III-23)), y lo propio ocurre entre  $\bar{\boldsymbol{\psi}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\theta}}$  (en (III-22) y (III-24)). Además, aunque los subespacios de dimensión finita  $\bar{H}_0^{1n}$  y  $\bar{H}_0^{1m}$  responden ambos a la definición dada en (III-20), sus dimensiones (dadas por  $n$  y  $m$ , respectivamente) podrían ser diferentes de acuerdo al tipo de aproximación que se asuma en el modelo.

En las ecuaciones de movimiento (III-9) y (III-10) las funciones involucradas se encuentran derivadas respecto al espacio (coordenada  $X_1$ ) y respecto al tiempo  $t$ . Por lo tanto, es necesario definir tales derivadas a partir de las aproximaciones finitas (III-21), (III-22), (III-23) y (III-24),

$$\frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}_0}{\partial X_1} = \frac{\partial N_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \quad (\text{III-25})$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 \cong \ddot{\bar{\mathbf{u}}_0} = N_a^u \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* \quad (\text{III-26})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} = \frac{\partial N_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \quad (\text{III-27})$$

$$\dot{\boldsymbol{\psi}} \cong \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}} = N_b^\psi \dot{\boldsymbol{\psi}}_b^* \quad (\text{III-28})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\phi}^*}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\phi}}}{\partial X_1} = \frac{\partial \mathbf{N}_c^u}{\partial X_1} \boldsymbol{\phi}_c \quad (\text{III-29})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\theta}^*}{\partial X_1} \cong \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\theta}}}{\partial X_1} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\theta}_d \quad (\text{III-30})$$

Lo propio ocurre para derivadas de orden superior y para las componentes de  $\mathbf{u}_0$  y  $\boldsymbol{\psi}$  que figuran en las ecuaciones de movimiento.

El proceso de reemplazar las expresiones (III-21) a (III-30) en cada uno de los términos de las ecuaciones de movimiento da lugar a lo que se conoce como la aproximación de Galerkin del problema. Evidentemente, esto requiere manipular convenientemente los términos involucrados en un proceso que puede resultar engorroso por lo que solo algunos de sus pasos se exponen en el Apéndice III. B. Luego de estos pasos, los términos de la aproximación de Galerkin de las ecuaciones de movimiento se expresan de manera compacta tal y como lo muestran las expresiones (III. B.15) a (III. B.20) que se repiten aquí por comodidad

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{m}_{1ca}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{1ca}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1ca}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III-31})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{m}_{1cb}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III-32})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] \quad (\text{III-33})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{m}_{2da}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III-34})$$

$$\begin{aligned} \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\ = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{m}_{2da}^{u\omega} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{u\omega} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{p}_{2da}^{u\omega} \right] \end{aligned} \quad (\text{III-35})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{k}_{2da}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] \quad (\text{III-36})$$

Donde los tensores coeficientes son funciones de  $\mathbf{N}^u$  y  $\mathbf{N}^\psi$ , y de sus derivadas.

Continuando con el procedimiento de aproximación, los términos anteriores (dados en las expresiones (III-31) a (III-36)) deben restituirse en (III-9) y (III-10) de donde se obtiene

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{m}_{1ca}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{1ca}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1ca}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{m}_{1cb}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* \right. \\ \left. + \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \int_0^L \mathbf{N}_c^u \bar{\mathbf{f}} dL \end{aligned} \quad (\text{III-37})$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{m}_{2da}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{m}_{2da}^{u\omega} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* \right. \\
 \left. + \mathbf{k}_{2da}^{u\omega} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{p}_{2da}^{u\omega} + \mathbf{k}_{2da}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] \\
 = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \int_0^L \mathbf{N}_d^{\psi} \left( \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dL
 \end{aligned} \tag{III-38}$$

Debido a que, luego de ser aproximadas, (III-9) y (III-10) son válidas para todas las funciones  $\bar{\boldsymbol{\phi}}, \bar{\boldsymbol{\theta}} \in H_0^{1n}$ , cualquier conjunto de vectores  $\boldsymbol{\phi}_c$  y  $\boldsymbol{\theta}_d$  que se seleccionen deberán satisfacer (III-37) y (III-38). En este sentido, se cumplirá que

$$\left[ \mathbf{m}_{1ca}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{1ca}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1ca}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{m}_{1cb}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] = \mathbf{F}_c \tag{III-39}$$

$$\left[ \mathbf{m}_{2da}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{uL} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{m}_{2da}^{u\omega} \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{u\omega} \mathbf{u}_{0a}^* \right. \\
 \left. + \mathbf{k}_{2db}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{p}_{2da}^{u\omega} + \mathbf{k}_{2da}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \right] = \mathbf{M}_d \tag{III-40}$$

Donde

$$\mathbf{F}_c = \int_0^L \mathbf{N}_c^u \bar{\mathbf{f}} dL \tag{III-41}$$

$$\mathbf{M}_d = \int_0^L \mathbf{N}_d^{\psi} \left( \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) dL \tag{III-42}$$

### III. 3 El punto de vista del elemento

La formulación débil del problema y su aproximación a través del método de Galerkin se obtienen desde un análisis matemático global del BVP. En este enfoque se considera el dominio continuo de toda la viga y se formulan sobre él las ecuaciones de gobierno y sus aproximaciones. Sin embargo, el enfoque que compete y caracteriza al FEM tiene un carácter local, es decir, se sustenta en la partición del dominio y de la definición de parámetros locales sobre cada parte o elemento. La discusión enfocada en el elemento busca describir una unidad básica del dominio del BVP sobre la cual puedan establecerse de manera aproximada las relaciones entre las variables del problema para, luego de su determinación, ser ensambladas convenientemente en una solución global. En este sentido, cada uno de los términos de la expresiones (III-39) y (III-40) será expresado como el resultado del ensamble de los aportes de versiones definidas localmente. Esto es, sobre cada elemento se tendrá una serie de ecuaciones algebraicas formadas por funciones de la coordenada espacial dentro del elemento y parámetros locales para representar a cada término que compone las ecuaciones de gobierno.

Lo anterior indica que para la definición de un elemento finito como unidad básica para construir la solución aproximada de un BVP es necesario definir sus atributos, esto es: dominio, grados de libertad y funciones de forma. El dominio del elemento hace referencia a la porción del dominio global que se reserva para su definición. Los grados de libertad, por su parte, son los antes mencionados parámetros locales y representan las variables del problema sobre puntos especialmente seleccionados dentro del elemento. Por último, las funciones de forma son aquellas funciones de la coordenada espacial local que serán utilizadas como factor interpolante para las variables del problema dentro del

dominio de cada elemento. A continuación, se detallan estos aspectos para los elementos que serán utilizados en la aproximación del modelo estructural.

### III. 3. 1 Discretización del dominio

Continuar la formulación de la aproximación por elementos finitos del modelo implica definir los parámetros de la discretización para poder así caracterizar los elementos a utilizar. Como es habitual, el proceso de discretización consiste en dividir el dominio del problema, que en este caso y luego de lo presentado en los capítulos precedentes coincide con el eje elástico de la viga  $\mathcal{S}_0$ , en una cantidad finita de subdominios disjuntos que se identifican como  $\Omega_i$ : los elementos. Para esto, sobre la línea que describe el eje elástico de la viga en la configuración indeformada, se definen una serie de puntos denominados nodos. En principio, el dominio de cada elemento  $\bar{\Omega}_i$  será aquella porción de la línea  $\mathcal{S}_0$  que abarca tres nodos sucesivos, sin solapamientos, y su contorno  $\partial\Omega_i$  estará dado por los dos nodos extremos. De este modo, se definen elementos de línea clásicos conformados por tres nodos que cumplen las siguientes relaciones

$$\mathcal{S}_0 = \bigcup_{i=1}^{n_{el}} \Omega_i, \quad \Omega_i = \bar{\Omega}_i \cup \partial\Omega_i \quad (\text{III-43})$$

$$\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3 \dots, n_{el}$$

Donde  $n_{el}$  es la cantidad de elementos en los que se divide el dominio,  $\bigcup_{i=1}^{n_{el}}$  indica unión entre los subdominios,  $\cup$  indica unión,  $\cap$  indica intersección y  $\emptyset$  es el conjunto vacío. A partir de este punto, el conjunto de elementos y nodos utilizados para discretizar el dominio será denominado malla de elementos finitos. Una consecuencia importante de la construcción de la malla recae en la posibilidad de particionar los operadores integrales que originalmente afectan al dominio de la viga en las contribuciones de cada elemento, esto es

$$\int_0^L (\cdot) dL = \sum_{i=1}^{n_{el}} \int_{\Omega_i} (\cdot) dL \quad (\text{III-44})$$

Donde  $(\cdot)$  indica una función arbitraria de la coordenada espacial y  $\Omega_i$  al pie del signo integral indica que la integración se realiza sobre el dominio del elemento  $i$ .

Una alternativa para la definición de elementos que resulta simple, sistemática y de fácil implementación es a través de un elemento maestro. Este mecanismo consiste en utilizar una transformación afín para mapear el dominio de cada elemento a partir de un dominio de origen correspondiente a un elemento estándar. El dominio de origen es un elemento unidimensional definido por una coordenada natural  $\xi$ , de longitud  $l_0 = 2$  y centrado en el origen, es decir que sus extremos inicial y final se encuentran respectivamente en  $\xi = \xi_1 = -1$  y  $\xi = \xi_2 = 1$ , mientras que su nodo central se ubica en  $\xi = \xi_0 = 0$ . La transformación afín, por su parte, relaciona lineal y biunívocamente ambos dominios y se representa como sigue

$$\xi(X_1): [{}^iX_1^i, {}^iX_1^k] \rightarrow [\xi_1, \xi_2] \quad (\text{III-45})$$

$$X_1(\xi): [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [{}^iX_1^i, {}^iX_1^k] \quad (\text{III-46})$$

Donde debe tenerse en cuenta que  $X_1(\xi)$  representa el mapeo y debe ser distinguido de la coordenada  $X_1$ . Además,  ${}^iX_1^i$  corresponde al valor de la coordenada  $X_1$  del nodo inicial del elemento  $i$  y  ${}^iX_1^k$  hace lo propio para el nodo final, de acuerdo a lo mostrado en la Figura III-1.

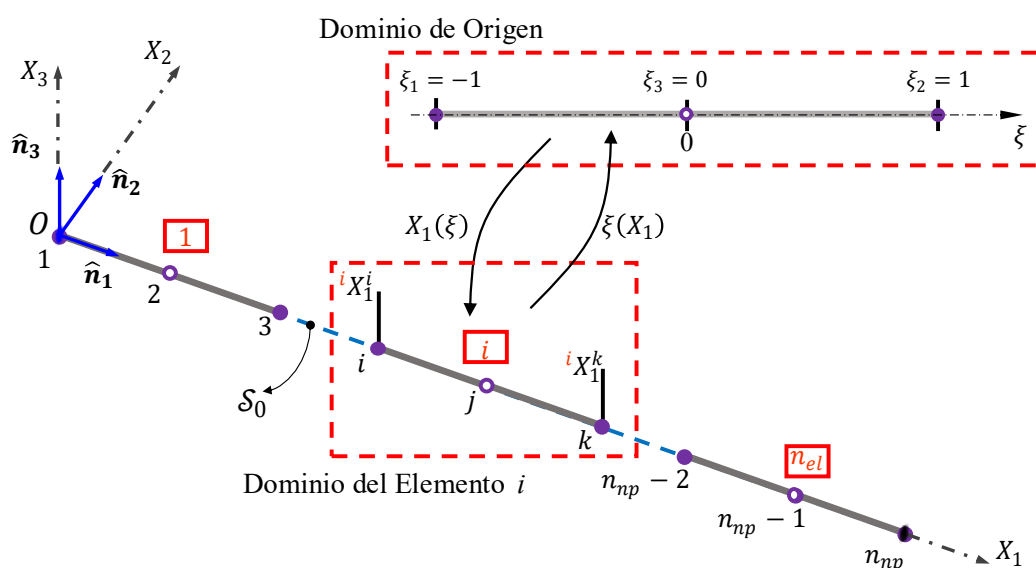


Figura III-1: Representación de un elemento finito a partir del dominio maestro.

Para garantizar la continuidad del dominio real de la viga, los mapeos de (III-45) y (III-46) deben garantizar que los extremos de ambos elementos coincidan, es decir

$$\xi({}^iX_1^i) = \xi_1, \quad \xi({}^iX_1^k) = \xi_2, \quad X_1(\xi_1) = {}^iX_1^i, \quad X_1(\xi_2) = {}^iX_1^k \quad (\text{III-47})$$

Con lo cual, se deduce que la transformación lineal y su inversa resultan

$$\xi(X_1) = \frac{2X_1 - {}^iX_1^i - {}^iX_1^k}{{}^iX_1^k - {}^iX_1^i} = \frac{2X_1 - {}^iX_1^i - {}^iX_1^k}{l_e} \quad (\text{III-48})$$

$$X_1(\xi) = \frac{({}^iX_1^k - {}^iX_1^i)\xi + {}^iX_1^i + {}^iX_1^k}{2} = \frac{l_e\xi + {}^iX_1^i + {}^iX_1^k}{2} \quad (\text{III-49})$$

Donde  $l_e = {}^iX_1^k - {}^iX_1^i$  es la longitud del elemento. En particular, y para referencia futura, es importante definir el jacobiano  $J_\xi$  de la transformación afín presentada, es decir, considerando que

$$dX_1(\xi) = J_\xi d\xi, \quad dX_1(\xi) = \frac{dX_1(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{l_e}{2} d\xi \quad (\text{III-50})$$

Resulta

$$J_\xi = \frac{dX_1(\xi)}{d\xi} = \frac{l_e}{2} \quad (\text{III-51})$$

Donde, si se tiene en cuenta que la longitud del elemento maestro es  $\xi_2 - \xi_1 = 2$ , el jacobiano de la transformación lineal representa el ratio entre esta longitud y la del elemento real  $l_e$ .

Además de su utilidad en la generación de la malla, el uso de un elemento maestro resulta ventajoso a la hora de evaluar expresiones integrales sobre el dominio de la viga. Esto quiere decir que

utilizando (III-49) y (III-50) la integral de una función arbitraria  $f$  de la coordenada espacial  $X_1$  sobre el dominio real del elemento  $i$  de la viga puede escribirse

$$\int_{\Omega_i} f(X_1) dL = \int_{\Omega_M} f(X_1(\xi)) J_\xi d\xi \quad (III-52)$$

Donde  $\Omega_M$  indica el dominio del elemento maestro. En consecuencia, se tiene que aquellas integrales sobre el dominio de la viga pueden resolverse convenientemente utilizando el dominio de origen [70], lo cual a partir de (III-44) resulta

$$\int_0^L f(X_1) dL = \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega_i} f(X_1) dL = \sum_{i=1}^{nel} \int_{\Omega_M} f(X_1(\xi)) J_\xi d\xi \quad (III-53)$$

En algunas aplicaciones suele ser necesario definir elementos que permitan modificar (incrementar o disminuir) el orden de interpolación a partir de sus funciones de base. Esto se logra incorporando nodos adicionales en los elementos de la malla o, alternativamente, eliminando el nodo central del elemento de tres nodos. Sin embargo, agregar o eliminar nodos dentro de los elementos definidos a partir de (III-45) y (III-46) no reviste mayores inconvenientes dado que cualquier punto interior en el dominio maestro tiene su correlación en el dominio real y viceversa a través de las funciones lineales (III-48) y (III-49) que solo dependen de los nodos extremos y, por ende, no se verán afectadas por la cantidad de nodos que se definan sobre puntos interiores. De ahí, deberán adecuarse los sistemas de numeración de nodos para considerar nodos interiores.

### III. 3. 2 Variables nodales: grados de libertad del elemento

Con base en el objetivo de obtener una formulación discreta del BVP, sobre cada uno de los nodos del elemento deben definirse aquellas cantidades incógnitas que luego serán interpoladas en la construcción de la solución. Tales variables se definen como grados de libertad y deberán ser tantos como sean necesarios para definir correctamente el estado o la configuración mecánica del elemento. La construcción de una aproximación a partir de la formulación débil del problema cumple un papel crucial en la selección de las variables nodales de cada elemento. Como se mencionó, las variables principales son el desplazamiento del eje elástico  $\mathbf{u}_0(X_1, t)$  y las rotaciones de la sección transversal  $\boldsymbol{\psi}(X_1, t)$ , luego los grados de libertad del elemento serán las representaciones locales de ellas construidas a partir de las aproximaciones que se obtuvieron oportunamente.

Un elemento como el mostrado en la Figura III-1 tendrá, en principio, un total de seis grados de libertad sobre cada uno de sus nodos: tres de traslación asociados a las componentes de  $\mathbf{u}_0$  y tres de rotación asociados a las de  $\boldsymbol{\psi}$ . Esto quiere decir que cada una de las componentes de desplazamiento y rotación se interpolará sobre el dominio del elemento a partir de los tres valores incógnitas correspondientes a cada uno de los nodos. En la Figura III-2 se muestra un elemento genérico  $i$  y los grados de libertad asociados a cada uno de sus nodos, según el enfoque global.

Cabe aclarar nuevamente que al considerar el enfoque local o del elemento los grados de libertad nodales modifican únicamente su representación y se identifican en función de la numeración local de los nodos. Esto es, el nodo global  $i$  será el nodo local 1, el  $k$  será el 2 y el  $j$  será el 3. Luego, el desplazamiento axial del nodo global  $i$ , por ejemplo, que en el enfoque global se identifica con  $u_{i1}$ , en el enfoque local será referido como  $u_{11}$ , y análogamente para los restantes.

Los dieciocho grados de libertad del elemento mostrado en la Figura III-2 pueden reducirse si se aplica algún proceso de condensación que sea acorde a la formulación del problema original. De

hecho, en el presente modelo se reducirá la cantidad de grados de libertad del elemento, a partir de procurar que la solución aproximada no presente el fenómeno de bloqueo por corte.

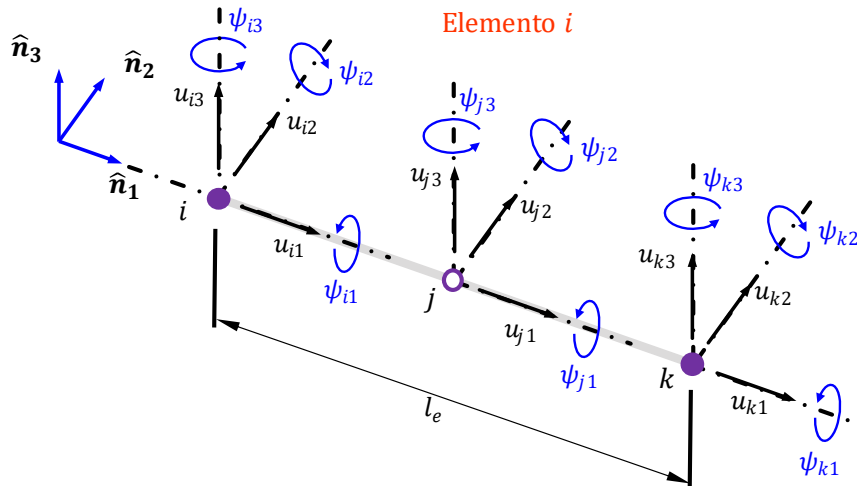


Figura III-2: Grados de libertad nodales de un elemento genérico  $i$ .

### III. 3. 3 Funciones de forma del elemento

La discretización del dominio y la malla generada a través de ésta darán lugar a la definición de las funciones de base a utilizar para la aproximación, es decir aquellas que conforman el subespacio  $H_0^{1n}$ . Idealmente, a medida que se refine la malla (se incremente el número de elementos), es deseable que la solución aproximada que se obtenga mejore y, eventualmente, converja a la solución exacta del BVP. Luego, el conjunto de funciones de base a utilizar deberá satisfacer los requisitos mínimos para la convergencia, a saber [70]:

**Suavidad en el interior de cada elemento.** Las funciones de base deben ser continuas y poseer tantas derivadas como sea necesario para satisfacer las ecuaciones de gobierno del BVP.

**Continuidad.** Las funciones de base deben ser continuas a través de los extremos de cada elemento.

**Complejidad.** Las funciones de base deben ser capaces de representar, a través de una combinación lineal, polinomios arbitrarios de todos los órdenes menores o iguales al máximo orden que posean [60].

Para satisfacer estas condiciones, las funciones de base se definen por tramos sobre cada uno de los elementos que conforman la malla de elementos finitos y se construyen a partir del producto de polinomios simples. Además, y como es habitual, se exige que cada función de base esté asociada a un nodo de la malla donde, al evaluarla, tome un valor unitario y se anule en los nodos restantes, lo que se conoce como soporte compacto. Estas características de las funciones de base, y en particular su definición de acuerdo a la malla de elementos finitos, permite restringir el análisis de tales funciones al dominio de cada elemento a cuyos nodos están asociadas. Las funciones de base que fueron restringidas para su análisis a un elemento se denominan funciones de forma y constituyen el tercer atributo de los elementos finitos.

Obtenidas a partir de las funciones de base, las funciones de forma son piezas clave para calcular los coeficientes de las expresiones (III-39), (III-40), (III-41) y (III-42) a partir de su integración en el dominio de cada elemento siguiendo el razonamiento dado en (III-53) y (III-54). Luego, las



funciones de forma se definen con la coordenada natural  $\xi$  (correspondiente al dominio de origen) ya que la integración se realizará en el dominio maestro.

Además de las propiedades ya mencionadas que caracterizan a las funciones de forma de los elementos, un aspecto fundamental para su definición es garantizar que no se produzcan efectos no realistas que alteren los resultados obtenidos por la aproximación. Los elementos que consideran deformaciones transversales de corte en general, y los elementos de viga con estas características en particular, son susceptibles al fenómeno de bloqueo por corte y, por consiguiente, las funciones de forma deben definirse con el objetivo de evitarlo. Así, y de acuerdo a lo presentado en el Apéndice III. C, para un elemento genérico  $i$ , se define un conjunto de funciones cuadráticas y un conjunto de funciones lineales utilizando polinomios de Lagrange de segundo y primer orden respectivamente. (ver Figura III-3), a saber

$$N_1^u = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi, \quad N_2^u = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi, \quad N_3^u = 1 - \xi^2 \quad (\text{III-54})$$

$$N_1^\psi = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2^\psi = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (\text{III-55})$$

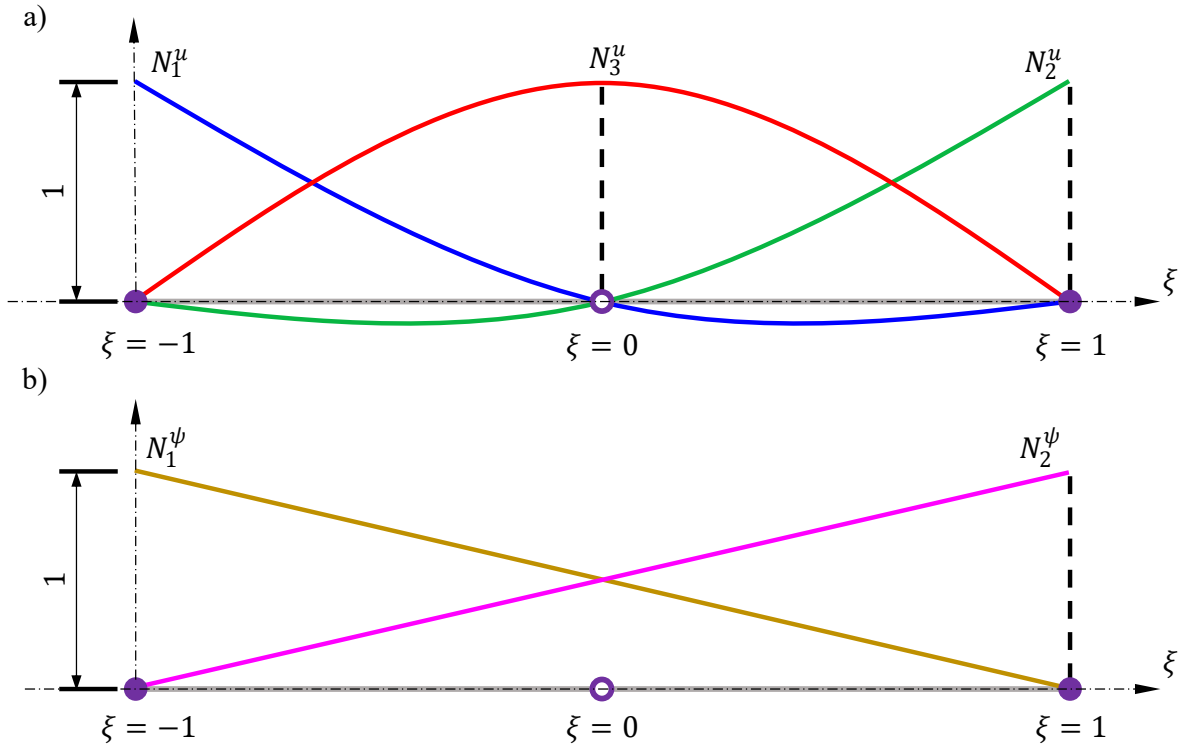


Figura III-3: Funciones de forma del elemento. a) Polinomios de Lagrange cuadráticos. b) Polinomios de Lagrange lineales.

### III. 3. 4 Interpolación vinculada en el dominio del elemento

La combinación entre los grados de libertad nodales del elemento y las funciones de forma se utiliza para interpolar las variables principales en los restantes puntos del dominio del elemento. La interpolación en el dominio del elemento representa la versión local de las aproximaciones (III-23) y (III-24), donde las funciones de base definidas en el dominio global de la viga pertenecientes al subespacio  $H_0^{1n}$  son reemplazadas por las funciones de forma y las constantes o parámetros utilizados

como coeficientes son reemplazados por los grados de libertad del elemento. En principio, teniendo en cuenta la discusión presentada en el Apéndice III. C respecto al bloqueo por corte y las expresiones (III-54) y (III-55) las variables principales dentro del elemento se interpolan como sigue

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = \sum_{a=1}^3 N_a^u \mathbf{u}_{0a}^* = N_1^u \mathbf{u}_{01}^* + N_2^u \mathbf{u}_{02}^* + N_3^u \mathbf{u}_{03}^* \quad (\text{III-56})$$

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \sum_{b=1}^2 N_b^\psi \boldsymbol{\psi}_b^* = N_1^\psi \boldsymbol{\psi}_1^* + N_2^\psi \boldsymbol{\psi}_2^* \quad (\text{III-57})$$

Donde los grados de libertad locales se relacionan con los grados de libertad globales del elemento presentado en la Figura III-2 como sigue:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{01}^* = \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{0i}^* = \begin{Bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ u_{i3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_{02}^* = \begin{Bmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{0k}^* = \begin{Bmatrix} u_{k1} \\ u_{k2} \\ u_{k3} \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{u}_{03}^* = \begin{Bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_{0j}^* = \begin{Bmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{III-58})$$

$$\boldsymbol{\psi}_1^* = \begin{Bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}_i^* = \begin{Bmatrix} \psi_{i1} \\ \psi_{i2} \\ \psi_{i3} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\psi}_2^* = \begin{Bmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi}_k^* = \begin{Bmatrix} \psi_{k1} \\ \psi_{k2} \\ \psi_{k3} \end{Bmatrix} \quad (\text{III-59})$$

Además, las matrices  $N_a^u$  y  $N_b^\psi$  se construyen a partir de las funciones dadas en (III-54) y (III-55), es decir

$$\begin{aligned} N_a^u &= N_a^u \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad a = 1, 2, 3 \\ N_b^\psi &= N_b^\psi \mathbf{I}_{3 \times 3}, \quad b = 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{III-60})$$

Donde  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  es el tensor identidad en  $\mathbb{R}^3$ .

Las interpolaciones (III-56) y (III-57) son generales para los modelos basados en interpolaciones desiguales [54] ya que se proponen funciones de forma de mayor orden (cuadráticas) para los desplazamientos, y de un orden menor (lineales) para los giros o rotaciones. Sin embargo, como indica E. Oñate [56] y se expone en el Apéndice III. C esto no es suficiente para evitar el bloqueo por corte y, como alternativa, se recurre a la interpolación vinculada. Luego, se utilizan las versiones locales o sobre el dominio del elemento de las expresiones (III. C.23) y (III. C.24) para las interpolaciones de los desplazamientos transversales, esto es

$$\bar{u}_{02} = u_{12} \frac{1}{2} (1 - \xi) + u_{22} \frac{1}{2} (1 + \xi) + (1 - \xi^2) \frac{l_e}{8} (\psi_{13} - \psi_{23}) \quad (\text{III-61})$$

$$\bar{u}_{03} = u_{13} \frac{1}{2} (1 - \xi) + u_{23} \frac{1}{2} (1 + \xi) + (1 - \xi^2) \frac{l_e}{8} (\psi_{22} - \psi_{12}) \quad (\text{III-62})$$

Donde se utilizaron (III-58) y (III-59) y  $\bar{u}_{02} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\bar{u}_{03} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_3$

Como se observa, (III-61) y (III-62) prescinden del grado de libertad del nodo central del elemento y, en su lugar utilizan las componentes de giro de los nodos extremos, de ahí la denominación de interpolación vinculada. Esto es importante debido a que para estas interpolaciones sería posible reducir el número de nodos de la malla, ya que sólo serían necesarios elementos de dos nodos y se

tendrían las ventajas asociadas a la reducción de grados de libertad del problema. Aunque en (III-57) tampoco son necesarios los grados de libertad del nodo central para las interpolaciones de los giros, un análisis detallado de (III-56) muestra que la componente axial de desplazamiento  $\bar{u}_{01}$  sí requiere de los grados de libertad del nodo central (nodo 3 en la numeración local). No obstante, no existen motivos para que una interpolación lineal que contemple sólo los nodos 1 y 2 no satisfaga las condiciones requeridas en la formulación, luego, se propone

$$\bar{u}_{01} = u_{11} \frac{1}{2}(1 - \xi) + u_{21} \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{(III-63)}$$

Mientras que, las componentes de los giros resultan

$$\bar{\psi}_1 = \psi_{11} \frac{1}{2}(1 - \xi) + \psi_{21} \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{(III-64)}$$

$$\bar{\psi}_2 = \psi_{12} \frac{1}{2}(1 - \xi) + \psi_{22} \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{(III-65)}$$

$$\bar{\psi}_3 = \psi_{13} \frac{1}{2}(1 - \xi) + \psi_{23} \frac{1}{2}(\xi + 1) \quad \text{(III-66)}$$

Bajo estas consideraciones, lo que originalmente se planteó como un elemento de tres nodos se reduce a un elemento de dos nodos conservando una función cuadrática para la interpolación de los desplazamientos transversales sin necesidad de incorporar un nodo adicional. En la Figura III-4 se muestran los grados de libertad del elemento utilizados en la interpolación vinculada, siguiendo la numeración local.

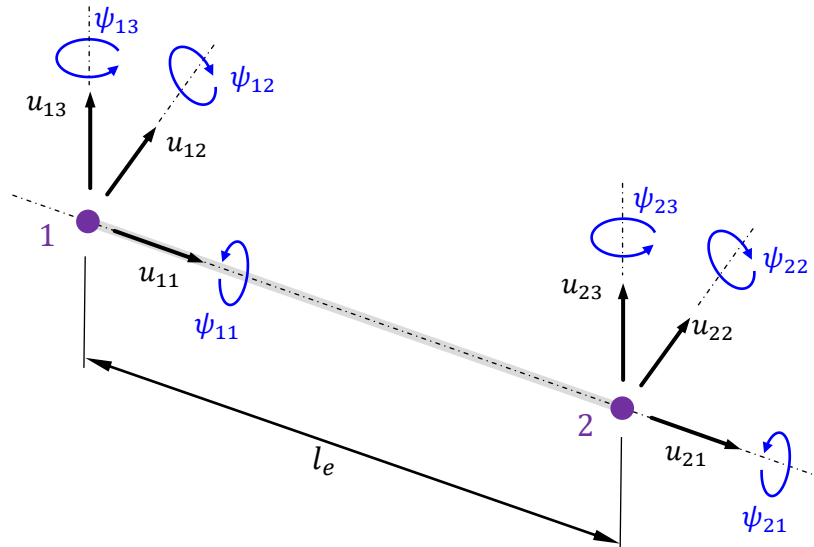


Figura III-4: Grados de libertad del elemento utilizando interpolación vinculada.

Adoptar la interpolación vinculada como base para la interpolación en el dominio del elemento presenta una ventaja debido a la reducción del orden del problema en cuanto a la cantidad de grados de libertad necesarios, además de su justificación respecto al bloqueo por corte. Sin embargo, las expresiones (III-61) y (III-62) no son formalmente compatibles con (III-23) y (III-56) dado que estas últimas no poseen términos que dependan de los grados de libertad rotacionales de los nodos en las sumatorias. En este sentido, la interpolación dada en (III-56) debe modificarse de acuerdo a las nuevas características del elemento y, para ello, se definen

$$N_1^{iv} = \frac{l_e}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^u \\ 0 & -N_3^u & 0 \end{bmatrix}, \quad N_2^{iv} = \frac{l_e}{8} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -N_3^u \\ 0 & N_3^u & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-67})$$

Con lo cual,

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = N_1^\psi \mathbf{u}_{0_1}^* + N_1^{iv} \boldsymbol{\psi}_1^* + N_2^\psi \mathbf{u}_{0_2}^* + N_2^{iv} \boldsymbol{\psi}_2^* \quad (\text{III-68})$$

Donde  $N_1^\psi$  y  $N_2^\psi$  se definieron en (III-60).

## III. 4 Representación matricial de las ecuaciones de movimiento sobre el elemento

Analizar las variables y parámetros del BVP desde el punto de vista del elemento conduce a proponer su formulación y la obtención de una solución en base al Método de Rigidez Directa (MRD) [71], también llamado Método de Rigidez Matricial, aunque se extiende para matrices que no representan rigideces (masa, amortiguamiento, acoplamientos, etcétera). Este método consiste en representar al sistema de ecuaciones obtenido en la aproximación de Galerkin como una ecuación matricial que suma los aportes de cada elemento luego de considerar las interpolaciones descritas. El proceso de construcción de la ecuación matricial es lo que comúnmente se conoce como ensamblado.

El MRD requiere la correcta definición de las matrices que representan al BVP dentro de cada elemento. Para ello, cada término de las ecuaciones (III-39) y (III-40), identificadas respectivamente como ecuación de fuerzas y ecuación de momentos, debe ser expresado en el dominio del elemento a través de la transformación (III-49), y deben incorporarse, luego, las funciones de forma a través de las interpolaciones de los grados de libertad elementales (III-68) y (III-57). Con esto, sobre cada elemento las ecuaciones de movimiento serán representadas como una única ecuación matricial que no sólo elimina la necesidad de recurrir a sumatorias (debido al álgebra de matrices y vectores), sino que también es sumamente adecuada para la implementación computacional.

La forma habitual de proceder para la representación matricial de las ecuaciones de movimiento consiste en agrupar a los grados de libertad del elemento en un vector de doce componentes, es decir

$$\mathbf{v}_e = \{ \mathbf{u}_{0_1}^{*T} \quad \boldsymbol{\psi}_1^{*T} \quad \mathbf{u}_{0_2}^{*T} \quad \boldsymbol{\psi}_2^{*T} \}^T \quad (\text{III-69})$$

Donde  $\mathbf{u}_{0_1}^*$ ,  $\mathbf{u}_{0_2}^*$ ,  $\boldsymbol{\psi}_1^*$  y  $\boldsymbol{\psi}_2^*$  son, respectivamente, los desplazamientos y rotaciones del nodo 1 y del nodo 2 del elemento que fueron expresados en componentes en (III-58) y (III-59). El vector  $\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_e(\mathbf{t})$  y sus derivadas temporales aparecerán en los términos de la ecuación de movimiento premultiplicados por matrices convenientemente construidas para representar los términos que, hasta aquí, se postularon como sumatorias de operaciones tensoriales.

Teniendo en cuenta a  $\mathbf{v}_e$ , la interpolación de los desplazamientos dada en (III-68) puede escribirse como

$$\bar{\mathbf{u}}_0 = N_u \mathbf{v}_e \quad (\text{III-70})$$

Donde,

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & \frac{l_e}{8} N_3^u & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_e}{8} N_3^u \\ 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & -\frac{l_e}{8} N_3^u & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & \frac{l_e}{8} N_3^u & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-71})$$

De igual modo, la interpolación de los giros dada en (III-57) resulta

$$\bar{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{N}_\psi \mathbf{v}_e \quad (\text{III-72})$$

Siendo,

$$\mathbf{N}_\psi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi \end{bmatrix} \quad (\text{III-73})$$

Naturalmente, y con vista en la implementación computacional, las expresiones (III-70) y (III-72) pueden componerse en una única expresión que apile ambas interpolaciones en un único vector, es decir, definiendo

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_0 \\ \bar{\boldsymbol{\psi}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{01} \\ \bar{u}_{02} \\ \bar{u}_{03} \\ \bar{\psi}_1 \\ \bar{\psi}_2 \\ \bar{\psi}_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{III-74})$$

Puede escribirse

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \mathbf{v}_e \quad (\text{III-75})$$

Siendo,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & \frac{l_e}{8} N_3^u & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_e}{8} N_3^u \\ 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & -\frac{l_e}{8} N_3^u & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & \frac{l_e}{8} N_3^u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_1^\psi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_2^\psi \end{bmatrix} \quad (\text{III-76})$$

Teniendo en cuenta (III-70) y (III-72) las derivadas (espaciales y temporales) de los grados de libertad se calculan de forma directa, es decir

$$\dot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = \mathbf{N}_u \dot{\mathbf{v}}_e, \quad \dot{\bar{\boldsymbol{\psi}}} = \mathbf{N}_\psi \dot{\mathbf{v}}_e \quad (\text{III-77})$$

$$\ddot{\bar{\mathbf{u}}}_0 = \mathbf{N}_u \ddot{\mathbf{v}}_e, \quad \ddot{\bar{\boldsymbol{\psi}}} = \mathbf{N}_\psi \ddot{\mathbf{v}}_e \quad (\text{III-78})$$

$$\frac{\partial^n}{\partial X_1^n} \bar{\mathbf{u}}_0 = \left( \frac{\partial^n}{\partial X_1^n} \mathbf{N}_u \right) \mathbf{v}_e = \frac{1}{J_\xi^n} \left( \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \mathbf{N}_u \right) \mathbf{v}_e \quad (\text{III-79})$$

$$\frac{\partial^n}{\partial X_1^n} \bar{\boldsymbol{\psi}} = \left( \frac{\partial^n}{\partial X_1^n} \mathbf{N}_\psi \right) \mathbf{v}_e = \frac{1}{J_\xi^n} \left( \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \mathbf{N}_\psi \right) \mathbf{v}_e \quad (\text{III-80})$$

Donde  $n$  indica el orden de derivación respecto a la coordenada espacial y  $J_\xi$  es el jacobiano de la transformación definido en (III-51).

Para ilustrar el proceso del MRD, tómesese como ejemplo el término relacionado con las matrices de rigidez no lineales de la ecuación de fuerzas, es decir el último término de (III-39). Este término proviene de la ecuación (III-15) y fue expresado como

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* \quad (\text{III-81})$$

Luego, considerando un único elemento y transformando la integral a su dominio, introduciendo las expresiones (III-69), (III-70), (III-71), (III-72) y (III-73), y manipulando convenientemente los términos, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* = \int_{-1}^1 & \left[ 2\mu \mathcal{A}_0 (\mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e) \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \right. \\ & + (2\mu \mathcal{S}_{23} \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \\ & + \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e) (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \\ & \left. + \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 \mathbf{N}'_u{}^T (\mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha)^2 (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \right] J_\xi d\xi \end{aligned} \quad (\text{III-82})$$

Donde,  $\mathbf{N}'_u = \frac{\partial}{\partial X_1} \mathbf{N}_u$  y se utilizaron las funciones de peso para la interpolación vinculada descritas en el Apéndice III. D.

Cada término de (III-82), luego de ser integrado, podrá expresarse como una matriz que multiplicará al vector de grados de libertad  $\mathbf{v}_e$ , es decir

$$\mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0a}^* = \mathbf{K}_{gA}^e \mathbf{v}_e + \mathbf{K}_{gB}^e \mathbf{v}_e + \mathbf{K}_{gC}^e \mathbf{v}_e + \mathbf{K}_{gD}^e \mathbf{v}_e = \mathbf{K}_{g1}^e \mathbf{v}_e \quad (\text{III-83})$$

Siendo  $\mathbf{K}_{g1}^e = \mathbf{K}_{gA}^e + \mathbf{K}_{gB}^e + \mathbf{K}_{gC}^e + \mathbf{K}_{gD}^e$ , y

$$\mathbf{K}_{gA}^e = \int_{-1}^1 2\mu \mathcal{A}_0 (\mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u J_\xi d\xi \quad (\text{III-84})$$

$$\mathbf{K}_{gB}^e = \int_{-1}^1 (2\mu \mathcal{S}_{23} \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u J_\xi d\xi \quad (\text{III-85})$$

$$\mathbf{K}_{gC}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 \mathbf{N}'_u{}^T (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e) (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u J_\xi d\xi \quad (\text{III-86})$$

$$\mathbf{K}_{gD}^e = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 \mathbf{N}'_u{}^T (\mathbf{N}'_u \mathbf{v}_e \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha)^2 (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}'_u J_\xi d\xi \quad (\text{III-87})$$

Luego, se escribe

$$\mathbf{K}_{gA}^e = \frac{EA_0}{l_e} (u_{12} - u_{11}) \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gA} & -\mathbf{k}_{gA} \\ -\mathbf{k}_{gA} & \mathbf{k}_{gA} \end{bmatrix} \quad (\text{III-88})$$

Donde se introdujo el módulo de Young definido como  $E = 2\mu$ , y

$$\mathbf{k}_{gA} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_e} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_e} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_e}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{l_e}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{III-89})$$

Por otro lado,

$$\mathbf{K}_{gB}^e = -\frac{E}{l_e} (\psi_{12}s_2 - \psi_{13}s_3 - \psi_{22}s_2 + \psi_{23}s_3) \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gA} & -\mathbf{k}_{gA} \\ -\mathbf{k}_{gA} & \mathbf{k}_{gA} \end{bmatrix} \quad (\text{III-90})$$

También,

$$\mathbf{K}_{gC}^e = \frac{EA_0}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gC} & -\mathbf{k}_{gC} \\ -\mathbf{k}_{gC} & \mathbf{k}_{gC} \end{bmatrix} \quad (\text{III-91})$$

Donde,

$$\mathbf{k}_{gC} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{u_{22} - u_{12}}{l_e^2} & \frac{u_{23} - u_{13}}{l_e^2} & 0 & \frac{\psi_{22} - \psi_{12}}{12} & \frac{\psi_{23} - \psi_{13}}{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III-92})$$

Por último,

$$\mathbf{K}_{gD}^e = \frac{EA_0}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{gD} & -\mathbf{k}_{gD} \\ -\mathbf{k}_{gD} & \mathbf{k}_{gD} \end{bmatrix} \quad (\text{III-93})$$

Donde

$$\mathbf{k}_{gD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{uu} + A_{\phi\phi} & 0 & 0 & 0 & A_{u\phi} - B_{u\phi} \\ 0 & 0 & A_{uu} + A_{\phi\phi} & 0 & B_{u\phi} - A_{u\phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{u\phi} - A_{u\phi} & 0 & B_{uu} + B_{\phi\phi} & 0 \\ 0 & A_{u\phi} - B_{u\phi} & 0 & 0 & 0 & B_{uu} + B_{\phi\phi} \end{bmatrix} \quad (\text{III-94})$$

Siendo,

$$\begin{aligned} A_{uu} &= \frac{(u_{12} - u_{22})^2 + (u_{13} - u_{23})^2}{l_e^3}, \\ A_{\phi\phi} &= \frac{(\psi_{12} - \psi_{22})^2 + (\psi_{13} - \psi_{23})^2}{6l_e}, \\ A_{u\phi} &= \frac{(u_{12} - u_{22})(\psi_{13} - \psi_{23})}{6l_e}, \quad B_{u\phi} = \frac{(u_{13} - u_{23})(\psi_{12} - \psi_{22})}{6l_e}, \\ B_{uu} &= \frac{\left(\frac{u_{12}}{l_e} - \frac{u_{22}}{l_e}\right)^2 + \left(\frac{u_{13}}{l_e} - \frac{u_{23}}{l_e}\right)^2}{\frac{12}{l_e}}, \\ B_{\phi\phi} &= \frac{\left(\frac{\psi_{12}}{2} - \frac{\psi_{22}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\psi_{13}}{2} - \frac{\psi_{23}}{2}\right)^2}{\frac{40}{l_e}} \end{aligned} \quad (\text{III-95})$$

Aplicando un procedimiento análogo a los restantes términos de las ecuaciones de movimiento restringidas a un elemento se obtiene su representación matricial. Luego, la ecuación de movimiento para un elemento en su forma matricial tiene la forma

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{K}_e^e \mathbf{v}_e + \mathbf{K}_g^e \mathbf{v}_e = \mathbf{F}^e \quad (\text{III-96})$$

Donde el superíndice  $e$  indica que las matrices corresponden al elemento,  $\mathbf{M}^e$  es la matriz de masa,  $\mathbf{K}_e^e$  es la matriz de rigidez elástica,  $\mathbf{K}_g^e$  es la matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{F}^e$  es el vector de cargas generalizadas, y  $\mathbf{v}_e$  es el vector de grados de libertad del elemento introducido en (III-69). Todas las matrices son cuadradas de dimensión  $12 \times 12$  y los vectores tienen dimensión  $12 \times 1$ . Las matrices involucradas en la ecuación (III-96) pueden descomponerse convenientemente en la suma de matrices que engloben distintos efectos, como se expone en el Apéndice III. E.

Finalmente, el procedimiento de ensamblaje estándar del FEM permite obtener, a partir de (III-96), la ecuación matricial de gobierno global del sistema estructural completo, esto es

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_e\mathbf{q} + \mathbf{K}_g\mathbf{q} = \mathbf{F} \quad (\text{III-97})$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa global del sistema y tiene dimensión  $n \times n$ , donde  $n$  es la cantidad de grados de libertad del sistema. También de dimensión  $n \times n$ ,  $\mathbf{K}_e$  y  $\mathbf{K}_g$  son las matrices de rigidez elástica y de rigidez geométrica del sistema, respectivamente. Los vectores de  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{F}$  son de dimensión  $n \times 1$  y representan, respectivamente, los grados de libertad globales del sistema y las cargas generalizadas globales del mismo. Cabe destacar aquí que, previo al ensamblado, las matrices y vectores



elementales presentes en (III-96) deben rotarse apropiadamente al sistema de referencia global de la estructura.

## Apéndices del Capítulo III

### Apéndice III. A : Expresiones auxiliares de las ecuaciones de movimiento

En esta sección adicional se exponen algunos desarrollos adicionales necesarios para expresar convenientemente las ecuaciones de movimiento que completan las secciones anteriores. Partiendo de las ecuaciones (II-172) y (II-173) que se repiten aquí por comodidad

$$\ddot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + M_\omega \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_1} \left( F_{\mathcal{A}_0 1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \bar{\mathbf{f}} \quad (\text{III. A.1})$$

$$\begin{aligned} I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 + \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial X_1} \mathbf{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 - \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} + \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \left( \frac{\partial^2 \dot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega \right. \\ \left. + \mathbf{I}_{\omega R} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \frac{\partial g_0}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 = \bar{\mathbf{m}} + \frac{\partial \bar{c}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \end{aligned} \quad (\text{III. A.2})$$

y teniendo en cuenta (II. F.26) y (II. F.29), también repetidas a continuación,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \bar{\mathbf{e}} dS \\ &= 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{A}_0 \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi} + S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + 2S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.3})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0} &= 2\mu \int_{\mathcal{A}_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{e}} dS \\ &= 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathbf{S}_{23} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) + S_{R\omega'} \frac{\partial \dot{\psi}_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{S}_{23} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.4})$$

Se analizan los términos de (III. A.1) y (III. A.2) que involucran a  $\mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}$  y  $\mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}$ .

El cuarto término de (III. A.1) se expresa como sigue

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} = & 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_0 \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi} + \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \\ & + 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1}{2} S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.5})$$

El quinto término de (III. A.1) representa las no-linealidades de las ecuaciones de movimiento, y desarrollando resulta

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \left( \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \quad (\text{III. A.6})$$

En (III. A.6), se tiene

$$\mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 = 2\mu \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \right) \quad (\text{III. A.7})$$

Donde se eliminaron aquellos términos que se anulan por las propiedades del producto escalar. Mientras que, por las propiedades del producto tensorial, del segundo factor de (III. A.6) se desarrolla

$$\left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha = \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \quad (\text{III. A.8})$$

Luego, combinando (III. A.7) y (III. A.8) se tiene

$$\begin{aligned} & \left( \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \hat{\mathbf{E}}_\alpha \\ & = 2\mu \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right. \\ & \left. + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.9})$$

Finalmente, los términos obtenidos a partir de (III. A.1) se agrupan como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = & \dot{\mathbf{u}}_0 M_u + I_{u\boldsymbol{\psi}} \ddot{\boldsymbol{\psi}} \\ & + 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) - \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_0 \hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi} \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.10})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = & M_\omega \left( \hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1}{2} S_{\omega\alpha'} \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \\ & + S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \left( \hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \end{aligned} \quad (\text{III. A.11})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} - \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 + \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.12})$$

Donde  $\mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  representa un operador diferencial que agrupa los términos lineales en las coordenadas generalizadas y sus derivadas,  $\mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  hace lo propio con los términos asociados al alabeo, mientras que  $\mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  agrupa los términos no lineales de la ecuación diferencial.

Procediendo análogamente con (III. A.2) se desarrollan a continuación su cuarto y quinto términos, esto es

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{M}_{\mathcal{A}_0}}{\partial X_1} = 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{S}_{23} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ \left. + \mathcal{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) + \mathcal{S}_{23} \left( \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right) \\ + 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{S}_{R\omega'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + 2\mathcal{S}_{23} S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.13})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{A}_0} \times \hat{\mathbf{E}}_1 = 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 + \mathcal{A}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \\ + 2\mu \left( S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.14})$$

Donde se eliminaron aquellos términos que se anulan por las propiedades del producto vectorial.

Finalmente, los términos obtenidos a partir de (III. A.2) se agrupan como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = I_{\psi\psi} \ddot{\boldsymbol{\psi}} + I_{\psi u} \ddot{\mathbf{u}}_0 \\ + 2\mu \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{S}_{23} \left( \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} + \frac{\partial u_{01}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) + 2I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} - \left( I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \hat{\mathbf{E}}_1 \right. \\ \left. + \mathcal{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \right) \\ + 2\mu \frac{1}{2} \left( \mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \boldsymbol{\psi}}{\partial X_1} \times \hat{\mathbf{E}}_1 - \mathcal{A}_0 \hat{\mathbf{E}}_1 \times (\hat{\mathbf{E}}_1 \times \boldsymbol{\psi}) \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = \mathcal{S}_{\omega R} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} + \left( \frac{\partial^2 \ddot{\psi}_1}{\partial X_1^2} I_\omega + \frac{\partial \ddot{u}_{01}}{\partial X_1} M_\omega + \mathcal{S}_{\omega R} \hat{\mathbf{E}}_1 \cdot \frac{\partial \ddot{\boldsymbol{\psi}}}{\partial X_1} \right. \\ \left. + \frac{\partial g_0}{\partial X_1} - \frac{\partial^2 g_1}{\partial X_1^2} \right) \hat{\mathbf{E}}_1 + 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{S}_{R\omega'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha + \mathcal{S}_{23} S_\omega \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial X_1^2} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \\ + 2\mu \left( S_{\omega\alpha'} \frac{\partial \psi_1}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_\alpha \times \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \end{aligned} \quad (\text{III. A.16})$$

$$\mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) = 2\mu \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \mathcal{S}_{23} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \frac{\partial u_{0\alpha}}{\partial X_1} \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \right) \quad (\text{III. A.17})$$

Donde  $\mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  representa un operador diferencial que agrupa los términos lineales en las coordenadas generalizadas y sus derivadas,  $\mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  hace lo propio con los términos asociados al alabeo, mientras que  $\mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi})$  agrupa los términos no lineales de la ecuación diferencial.

## Apéndice III. B : Aproximación de Galerkin de las ecuaciones de movimiento

En esta sección anexa se exponen algunos desarrollos adicionales necesarios para obtener la aproximación de Galerkin de las ecuaciones de movimiento introducida en las secciones anteriores. El proceso consiste en reemplazar las expresiones (III-21) a (III-30) en cada uno de los términos de las ecuaciones de movimiento dados en (III-13) a (III-18) para, luego de agruparlos convenientemente, obtener términos en función de los tensores  $\mathbf{N}^u \in \bar{H}_0^{1n}$ ,  $\mathbf{N}^\psi \in \bar{H}_0^{1m}$ .

En primer lugar, considérese (III-13) de donde resulta

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &= \int_0^L \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{N}_c^{uT} M_u \mathbf{N}_a^u \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \mathbf{N}_c^{uT} I_{u\psi} \mathbf{N}_b^\psi \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* - \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \right. \\
 & \quad - \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{S}_{23} \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & \quad \left. + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* - \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{N}_b^\psi \boldsymbol{\psi}_b^* \right] dL
 \end{aligned} \tag{III. B.1}$$

Donde se aplicaron propiedades del álgebra tensorial, se sacó factor común el producto escalar, y  $\tilde{\mathbf{E}}_1 = \text{skew}[\hat{\mathbf{E}}_1]$ .

De manera similar, de (III-14) resulta

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL &= \int_0^L \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{N}_c^{uT} M_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* \right. \\
 & \quad + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu S_{\omega\alpha'} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & \quad + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu S_\omega (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1^2} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & \quad \left. + 2\mu S_\omega (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \otimes \hat{\mathbf{E}}_1 \right) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1^2} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] dL
 \end{aligned} \tag{III. B.2}$$

En cuanto a (III-15), se tiene

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &= \int_0^L \boldsymbol{\phi}_c \\
 & \cdot \left[ -\frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \right. \\
 & + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} 2\mu \left( \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \cdot \hat{\mathbf{E}}_1 \right) (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \\
 & - \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \mathbf{u}_{0a}^*) \frac{\partial \mathbf{N}_a^{uT}}{\partial X_1} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \\
 & \left. + \frac{\partial \mathbf{N}_c^{uT}}{\partial X_1} \frac{1}{2} 2\mu \mathcal{A}_0 \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \cdot \hat{\mathbf{E}}_\alpha \right)^2 (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \right] dL
 \end{aligned} \tag{III. B.3}$$

En el caso de (III-16), es

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
 &= \int_0^L \boldsymbol{\theta}_d \\
 & \cdot \left[ \mathbf{N}_d^{\psi T} I_{\psi\psi} \mathbf{N}_b^\psi \dot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{N}_d^{\psi T} I_{\psi u} \mathbf{N}_a^u \ddot{\mathbf{u}}_{0a}^* - \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \right. \\
 & - \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} (\hat{\mathbf{E}}_1 \otimes \hat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* - \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu I_{\mathcal{A}_0} \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu I_{\mathcal{A}_0} (\hat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \hat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* - \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{N}_b^\psi \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & - \mathbf{N}_d^{\psi T} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \tilde{\mathbf{E}}_1 \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{N}_d^{\psi T} 2\mu \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23} \tilde{\mathbf{E}}_1 \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
 & \left. - \mathbf{N}_d^{\psi T} 2\mu \frac{1}{2} \mathcal{A}_0 \tilde{\mathbf{E}}_1 \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{N}_b^\psi \boldsymbol{\psi}_b^* \right] dL
 \end{aligned} \tag{III. B.4}$$

De manera similar, de (III-17) resulta

$$\begin{aligned}
& \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\
&= \int_0^L \boldsymbol{\theta}_d \\
& \cdot \left[ \mathbf{N}_d^{\psi T} \mathbf{S}_{\omega R}(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \dot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} I_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \right. \\
& + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} M_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{N}_a^u \dot{\mathbf{u}}_{0a}^* + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{S}_{\omega R}^T \mathbf{N}_b^\psi \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* \\
& + \mathbf{G}_{0u'} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{G}_{0\psi'} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{G}_{0\psi} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{G}_{1u''} \mathbf{u}_{0a}^* + \mathbf{G}_{1\psi''} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{G}_{1u^{NL}} \mathbf{u}_{0a}^* \\
& + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \mathbf{S}_{R\omega'}(\widehat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
& + \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \mathbf{S}_{23} S_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1^2} \boldsymbol{\psi}_b^* \\
& \left. - \mathbf{N}_d^{\psi T} 2\mu S_{\omega\alpha'} \widetilde{\mathbf{E}}_1(\widehat{\mathbf{E}}_\alpha \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] dL \tag{III. B.5}
\end{aligned}$$

Donde

$$\mathbf{G}_{0u'} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu S_{\omega\alpha'}(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \tag{III. B.6}$$

$$\mathbf{G}_{0\psi'} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \mathbf{S}_{R\omega'}(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \frac{\partial \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1} \tag{III. B.7}$$

$$\mathbf{G}_{0\psi} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu S_{\omega\alpha'}(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widetilde{\mathbf{E}}_1 \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \mathbf{N}_b^\psi \boldsymbol{\psi}_b^* \tag{III. B.8}$$

$$\mathbf{G}_{1u''} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu S_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1^2} \tag{III. B.9}$$

$$\mathbf{G}_{1\psi''} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu (S_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) - (\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_1) \mathbf{S}_{\omega R}) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_b^\psi}{\partial X_1^2} \tag{III. B.10}$$

$$\mathbf{G}_{1u^{NL}} = \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu S_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0a}^* \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1^2} \tag{III. B.11}$$

Considerando (III-18), se tiene



$$\begin{aligned} \int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL \\ = \int_0^L \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ -\frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu \frac{1}{2} \mathbf{S}_{23}(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0_a}^* \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0_a}^* \right] dL \end{aligned} \quad (\text{III. B.12})$$

Dadas las características de las aproximaciones definidas en (III-21) a (III-24) las expresiones anteriores pueden reescribirse de manera compacta extrayendo de las integrales los vectores que no son función de la coordenada espacial y agrupando sus coeficientes. A modo de ejemplo, considérese el primer término de (III. B.1), del cual, luego de distribuir la integral y el producto escalar, puede expresarse

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}_c \cdot \mathbf{N}_c^{uT} M_u \mathbf{N}_a^u \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \int_0^L \mathbf{N}_c^{uT} M_u \mathbf{N}_a^u dL \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \mathbf{m}_{1ca}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* \quad (\text{III. B.13})$$

Donde se definió el tensor

$$\mathbf{m}_{1ca}^{uL} = \int_0^L \mathbf{N}_c^{uT} M_u \mathbf{N}_a^u dL \quad (\text{III. B.14})$$

Siguiendo el mismo proceso con las expresiones restantes luego de agrupar los términos apropiadamente, éstas pueden compactarse como sigue

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{m}_{1ca}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* + \mathbf{m}_{1ca}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1ca}^{uL} \mathbf{u}_{0_a}^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III. B.15})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{m}_{1cb}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{1cb}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III. B.16})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\phi}^* \cdot \mathcal{L}_1^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\phi}_c \cdot \left[ \mathbf{k}_{1ca}^{uNL} \mathbf{u}_{0_a}^* \right] \quad (\text{III. B.17})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^L(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{m}_{2da}^{uL} \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi L} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{uL} \mathbf{u}_{0_a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi L} \boldsymbol{\psi}_b^* \right] \quad (\text{III. B.18})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^\omega(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{m}_{2da}^{u\omega} \ddot{\mathbf{u}}_{0_a}^* + \mathbf{m}_{2db}^{\psi\omega} \ddot{\boldsymbol{\psi}}_b^* + \mathbf{k}_{2da}^{u\omega} \mathbf{u}_{0_a}^* + \mathbf{k}_{2db}^{\psi\omega} \boldsymbol{\psi}_b^* + \mathbf{p}_{2da}^{u\omega} \right] \quad (\text{III. B.19})$$

$$\int_0^L \boldsymbol{\theta}^* \cdot \mathcal{L}_2^{NL}(\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\psi}) dL = \boldsymbol{\theta}_d \cdot \left[ \mathbf{k}_{2da}^{uNL} \mathbf{u}_{0_a}^* \right] \quad (\text{III. B.20})$$

Donde

$$\mathbf{p}_{2da}^{u\omega} = \mathbf{G}_{1uNL} \mathbf{u}_{0_a}^* = \int_0^L \frac{\partial \mathbf{N}_d^{\psi T}}{\partial X_1} 2\mu S_\omega(\widehat{\mathbf{E}}_1 \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha) \left( \frac{\partial \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1} \mathbf{u}_{0_a}^* \otimes \widehat{\mathbf{E}}_\alpha \right) \frac{\partial^2 \mathbf{N}_a^u}{\partial X_1^2} dL \mathbf{u}_{0_a}^* \quad (\text{III. B.21})$$

### Apéndice III. C : Obtención de funciones de forma vinculadas que impiden el bloqueo por corte

En esta sección anexa se presenta el proceso que, con base en evitar el fenómeno de bloqueo por corte, deriva en la obtención de las funciones de forma que se utilizan en la formulación del modelo estructural. El bloqueo por corte es un problema numérico que ha sido ampliamente analizado, se encuentra en la formulación de elementos de viga que admiten deformaciones por corte, y su efecto se acentúa cuando se trata con vigas esbeltas. Varias explicaciones sobre las causas del bloqueo han sido propuestas, entre ellas se destacan la gran diferencia en la magnitud de la rigidez al corte respecto a la rigidez a flexión [72], el acoplamiento entre las deformaciones de corte y las deformaciones de flexión [73], y las inconsistencias en las deformaciones desarrolladas por la asunción de funciones de desplazamiento ([74], [75]). Asimismo, algunas de las soluciones para evitar el bloqueo se sustentan en la integración reducida [70], en el método de deformación asumida [76], o en el método del campo mixto [77], entre otros. Evidentemente, el bloqueo por corte está asociado a las deformaciones que sobrevienen de los desplazamientos transversales y de las rotaciones alrededor de ejes perpendiculares al eje de la viga (direcciones  $\hat{\mathbf{E}}_\alpha$  de la configuración de referencia), por lo que los efectos axiales (giro y desplazamiento según  $\hat{\mathbf{E}}_1$ ) no serán tenidos en cuenta en el siguiente razonamiento.

Siguiendo a E. Oñate [56], una inspección detallada de los elementos de viga con deformación por corte (usualmente denominados de Timoshenko) muestran que utilizar el mismo orden de funciones de forma en la aproximación de los desplazamientos transversales y de las rotaciones conduce a una condición de deformación por corte que deriva en el bloqueo. Bajo esta premisa, se proponen funciones de forma de mayor orden (cuadráticas) para los desplazamientos transversales, y de un orden menor (lineales) para los giros o rotaciones. Luego, utilizando polinomios de Lagrange en la coordenada natural del dominio maestro y con base a la Figura III-2 resulta, para los desplazamientos transversales

$$\bar{u}_{02} = u_{i2}N_1^u + u_{j2}N_2^u + u_{k2}N_3^u \quad (\text{III. C.1})$$

$$\bar{u}_{03} = u_{i3}N_1^u + u_{j3}N_2^u + u_{k3}N_3^u \quad (\text{III. C.2})$$

Donde  $\bar{u}_{02} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\bar{u}_{03} = \bar{\mathbf{u}}_0 \cdot \hat{\mathbf{E}}_3$  son los desplazamientos transversales aproximados, y las funciones de forma son

$$N_1^u = \frac{1}{2}(\xi - 1)\xi, \quad N_2^u = 1 - \xi^2, \quad N_3^u = \frac{1}{2}(\xi + 1)\xi \quad (\text{III. C.3})$$

Similarmente, para las rotaciones se tiene

$$\bar{\psi}_2 = \psi_{i3}N_1^\psi + \psi_{k3}N_2^\psi \quad (\text{III. C.4})$$

$$\bar{\psi}_3 = \psi_{i3}N_1^\psi + \psi_{k3}N_2^\psi \quad (\text{III. C.5})$$

Donde  $\bar{\psi}_2 = \bar{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_2$  y  $\bar{\psi}_3 = \bar{\boldsymbol{\psi}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_3$  son los desplazamientos transversales aproximados, y las funciones de forma son

$$N_1^\psi = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad N_2^\psi = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (\text{III. C.6})$$

En este punto, la atención debe fijarse en las deformaciones por corte de la viga, es decir, dos veces las componentes del tensor de tensiones asociadas al corte dadas en (II-56) y (II-57), esto es

$$2\bar{\mathbf{E}}_{12}^{VK} = 2\bar{\mathbf{E}}_{21}^{VK} = \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial X_1} - \bar{\Psi}_{21} \quad (\text{III. C.7})$$

$$2\bar{\mathbf{E}}_{13}^{VK} = 2\bar{\mathbf{E}}_{31}^{VK} = \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial X_1} - \bar{\Psi}_{31} \quad (\text{III. C.8})$$

Donde  $\bar{\Psi}_{12} = -\psi_3$  y  $\bar{\Psi}_{13} = \psi_2$ . Además, si se tiene en cuenta (II-37) y las aproximaciones dadas en (II-55) y (II-56) resulta

$$2\bar{\mathbf{E}}_{12}^{VK} = \frac{\partial \bar{u}_{02}}{\partial X_1} - \psi_3^* \quad (\text{III. C.9})$$

$$2\bar{\mathbf{E}}_{13}^{VK} = \frac{\partial \bar{u}_{03}}{\partial X_1} + \psi_2^* \quad (\text{III. C.10})$$

Donde, como se mencionó no se consideran los efectos axiales, luego  $\bar{\psi}_1 = \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial X_1} = 0$  para este análisis. Además, considerando las expresiones (III. C.1) a (III. C.6) se tiene

$$\frac{\partial \bar{u}_{02}}{\partial X_1} = \frac{\partial \bar{u}_{02}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} = \frac{2}{l_e} \left( \frac{1}{2} (u_{k2} - u_{i2}) + \xi (u_{k2} + u_{i2} - 2u_{j2}) \right) \quad (\text{III. C.11})$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{03}}{\partial X_1} = \frac{\partial \bar{u}_{03}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial X_1} = \frac{2}{l_e} \left( \frac{1}{2} (u_{k3} - u_{i3}) + \xi (u_{k3} + u_{i3} - 2u_{j3}) \right) \quad (\text{III. C.12})$$

$$\bar{\psi}_2 = \frac{1}{2} \psi_{i2} + \xi \left( \frac{\psi_{k2} - \psi_{i2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{k2} \quad (\text{III. C.13})$$

$$\bar{\psi}_3 = \frac{1}{2} \psi_{i3} + \xi \left( \frac{\psi_{k3} - \psi_{i3}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{k3} \quad (\text{III. C.14})$$

Donde  $l_e$  es la longitud del elemento y  $\frac{\partial \xi}{\partial X_1} = \frac{1}{J_\xi} = \frac{2}{l_e}$ .

Reemplazando (III. C.11) a (III. C.14) en (III. C.9) y (III. C.10) resulta

$$2\bar{\mathbf{E}}_{12}^{VK} = \frac{2}{l_e} \left( \frac{1}{2} (u_{k2} - u_{i2}) + \xi (u_{k2} + u_{i2} - 2u_{j2}) \right) - \frac{1}{2} \psi_{i3} - \xi \left( \frac{\psi_{k3} - \psi_{i3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \psi_{k3} \quad (\text{III. C.15})$$

$$2\bar{\mathbf{E}}_{13}^{VK} = \frac{2}{l_e} \left( \frac{1}{2} (u_{k3} - u_{i3}) + \xi (u_{k3} + u_{i3} - 2u_{j3}) \right) + \frac{1}{2} \psi_{i2} + \xi \left( \frac{\psi_{k2} - \psi_{i2}}{2} \right) + \frac{1}{2} \psi_{k2} \quad (\text{III. C.16})$$

El bloqueo por corte puede ser evitado si las deformaciones de corte tienden a cero a medida que se incrementa la esbeltez de la viga y, en la condición límite, sean nulas. Esto se logra imponiendo que la pendiente promedio de los desplazamientos transversales sea igual al valor medio del giro alrededor de los ejes correspondientes y que, en consecuencia, las deformaciones por corte se anulen. Este comportamiento es propio de los modelos libres de deformaciones de corte como el modelo de Euler-Bernoulli, por ejemplo. Matemáticamente, la condición mencionada se escribe

$$\frac{u_{k2} - u_{i2}}{l_e} = \frac{\psi_{i3} + \psi_{k3}}{2} \Rightarrow 2\bar{\mathbf{E}}_{12}^{VK} = 0 \quad (\text{III. C.17})$$

$$\frac{u_{i3} - u_{k3}}{l_e} = \frac{\psi_{i2} + \psi_{k2}}{2} \Rightarrow 2\bar{E}_{13}^{VK} = 0 \quad (\text{III. C.18})$$

A partir de (III. C.15) y (III. C.16), se infiere que los términos lineales en  $\xi$  de ambas expresiones deben ser nulos para que se satisfagan (III. C.17) y (III. C.18), luego

$$\frac{2}{l_e}(u_{k2} + u_{i2} - 2u_{j2}) = \frac{\psi_{k3} - \psi_{i3}}{2} \quad (\text{III. C.19})$$

$$\frac{2}{l_e}(u_{k3} + u_{i3} - 2u_{j3}) = \frac{\psi_{i2} - \psi_{k2}}{2} \quad (\text{III. C.20})$$

Las expresiones (III. C.19) y (III. C.20) permiten obtener relaciones entre los desplazamientos transversales del nodo central ( $u_{j2}$  y  $u_{j3}$ ) y los restantes grados de libertad, es decir

$$u_{j2} = \frac{l_e}{8}(\psi_{i3} - \psi_{k3}) + \frac{u_{k2} + u_{i2}}{2} \quad (\text{III. C.21})$$

$$u_{j3} = \frac{l_e}{8}(\psi_{k2} - \psi_{i2}) + \frac{u_{k3} + u_{i3}}{2} \quad (\text{III. C.22})$$

Luego,  $u_{j2}$  y  $u_{j3}$  pueden reemplazarse en las expresiones de  $\bar{u}_{02}$  y  $\bar{u}_{03}$  las expresiones “vinculadas” dadas en (III. C.21) y (III. C.22), lo cual, operando convenientemente, resulta

$$\bar{u}_{02} = u_{i2} \frac{1}{2}(1 - \xi) + u_{k2} \frac{1}{2}(1 + \xi) + (1 - \xi^2) \frac{l_e}{8}(\psi_{i3} - \psi_{k3}) \quad (\text{III. C.23})$$

$$\bar{u}_{03} = u_{i3} \frac{1}{2}(1 - \xi) + u_{k3} \frac{1}{2}(1 + \xi) + (1 - \xi^2) \frac{l_e}{8}(\psi_{k2} - \psi_{i2}) \quad (\text{III. C.24})$$

Evidentemente, las expresiones anteriores muestran que adoptar el método de funciones vinculadas permite no considerar el nodo interior del elemento de segundo orden presentado en la Figura III-2. Una consecuencia directa de esta conclusión recae en la posibilidad de formar una malla con elementos lineales de solo dos nodos y conservar las características de una formulación de segundo orden, lo cual resulta ventajoso.

### *Apéndice III. D : Funciones de peso elementales para interpolación vinculada*

En esta sección anexa se presenta el proceso de construcción de las funciones de peso que deben introducirse al reducir las ecuaciones de movimiento obtenidas con la aproximación de Galerkin al dominio del elemento. Este proceso responde a la necesidad de utilizar la misma aproximación en las funciones incógnitas (grados de libertad del elemento) que en las funciones de peso para conservar así la premisa del método de Galerkin. En este sentido, al haber modificado las funciones de la interpolación de los grados de libertad elementales al aplicar la interpolación vinculada (expresiones (III-56) y (III-68)) las funciones de peso deben modificarse acordemente para poder representar los términos de (III-39) y (III-40).

El primer paso es considerar las expresiones propuestas para las funciones de peso, (III-21) y (III-22), que se repiten aquí por completitud

$$\boldsymbol{\phi}^* \cong \bar{\boldsymbol{\phi}} = N_c^u(X_1)\boldsymbol{\phi}_c, \quad c = 1, \dots, n \quad (\text{III. D.1})$$

$$\boldsymbol{\theta}^* \cong \bar{\boldsymbol{\theta}} = N_d^\psi(X_1)\boldsymbol{\theta}_d, \quad d = 1, \dots, m \quad (\text{III. D.2})$$

Luego, se requiere una nueva función de peso que tenga la forma de la función de interpolación vinculada utilizada para los grados de libertad del elemento como las dadas en (III-70) y (III-72). Se propone entonces

$$\bar{\boldsymbol{\phi}} = N_u \boldsymbol{\phi}_e \quad (\text{III. D.3})$$

$$\bar{\boldsymbol{\theta}} = N_\psi \boldsymbol{\theta}_e \quad (\text{III. D.4})$$

Donde  $N_u$  y  $N_\psi$  se definieron en (III-71) y (III-73), y

$$\boldsymbol{\phi}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\phi}_2 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_1 \\ \boldsymbol{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{III. D.5})$$

Donde  $\boldsymbol{\phi}_i, \boldsymbol{\theta}_i, i = 1,2$  son constantes a determinar.

Por otro lado, y análogamente a lo propuesto en (III-74), (III-75) y (III-76), puede escribirse de manera compacta

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} = N \boldsymbol{\Psi}_e \quad (\text{III. D.6})$$

Donde

$$\bar{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{Bmatrix} \bar{\boldsymbol{\phi}} \\ \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Psi}_e = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_e \\ \boldsymbol{\theta}_e \end{Bmatrix} \quad (\text{III. D.7})$$

### Apéndice III. E : Matrices de masa y rigidez para un elemento

En este apéndice se presentan algunas de las matrices que conforman la representación matricial de las ecuaciones de movimiento para un elemento finito de la formulación presentada. Cada una de ellas se obtiene a partir de los términos de (III-39) y (III-40) luego de considerar un único elemento, transformar la integral a su dominio, introducir las expresiones (III-69), (III-70), (III-71), (III-72) y (III-73), y manipular convenientemente los términos.

De forma general, la ecuación de movimiento para un elemento en su forma matricial tiene la forma

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{K}_e^e \dot{\mathbf{v}}_e + \mathbf{K}_g^e \mathbf{v}_e = \mathbf{F}^e \quad (\text{III. E.1})$$

Donde el superíndice  $e$  indica que las matrices corresponden al elemento,  $\mathbf{M}^e$  es la matriz de masa,  $\mathbf{K}_e^e$  es la matriz de rigidez elástica,  $\mathbf{K}_g^e$  es la matriz de rigidez geométrica,  $\mathbf{F}^e$  es el vector de cargas generalizadas, y  $\mathbf{v}_e$  es el vector de grados de libertad del elemento introducido en (III-69). Todas las matrices son cuadradas de dimensión  $12 \times 12$  y los vectores tienen dimensión  $12 \times 1$ .

Cada una de las matrices involucradas en la ecuación (III. E.1) puede descomponerse convenientemente, y en concordancia con los desarrollos anteriores, en la suma de matrices que engloben distintos efectos. En particular, se analizarán por separado los efectos asociados a la traslación y rotación de la sección transversal y los efectos asociados al alabeo de la sección.

#### Matriz de masa del elemento

La matriz de masa  $\mathbf{M}^e$  se expresa como la suma de dos matrices, es decir

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{M}_0^e + \mathbf{M}_\omega^e \quad (\text{III. E.2})$$

Donde  $\mathbf{M}_0^e$  está asociada a los efectos de rotación y traslación de la sección transversal de la viga, provenientes de las ecuaciones (III-13) y (III-16), y  $\mathbf{M}_\omega^e$  está asociada a los efectos del alabeo de la sección, provenientes de las ecuaciones (III-14) y (III-17).  $\mathbf{M}_0^e$ , es una matriz simétrica de la forma

$$\mathbf{M}_0^e = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_0^{11} & \mathbf{M}_0^{12} \\ \mathbf{M}_0^{21} & \mathbf{M}_0^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.3})$$

Siendo  $\mathbf{M}_0^{12} = \mathbf{M}_0^{21T}$ , y

$$\mathbf{M}_0^{11} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l_e}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{S_2 l_e}{3} & -\frac{S_3 l_e}{3} \\ & \frac{\rho A l_e}{3} & 0 & -\frac{S_2 l_e}{3} & 0 & \frac{\rho A l_e^2}{24} \\ & & \frac{\rho A l_e}{3} & \frac{S_3 l_e}{3} & -\frac{\rho A l_e^2}{24} & 0 \\ & & & \frac{I_1 l_e}{3} & -\frac{S_3 l_e^2}{24} & -\frac{S_2 l_e^2}{24} \\ & & & & \frac{\rho A l_e^3}{120} + \frac{I_2 l_e}{3} & -\frac{I_{23} l_e}{3} \\ & sim & & & & \frac{\rho A l_e^3}{120} + \frac{I_3 l_e}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.4})$$

$$\mathbf{M}_0^{12} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l_e}{6} & 0 & 0 & 0 & \frac{S_2 l_e}{6} & -\frac{S_3 l_e}{6} \\ 0 & \frac{\rho A l_e}{6} & 0 & \frac{S_2 l_e}{6} & 0 & -\frac{\rho A l_e^2}{24} \\ 0 & 0 & \frac{\rho A l_e}{6} & \frac{S_3 l_e}{6} & \frac{\rho A l_e^2}{24} & 0 \\ 0 & -\frac{S_2 l_e}{6} & \frac{S_3 l_e}{6} & \frac{I_1 l_e}{6} & \frac{S_3 l_e^2}{24} & \frac{S_2 l_e^2}{24} \\ \frac{S_2 l_e}{6} & 0 & -\frac{\rho A l_e^2}{24} & -\frac{S_3 l_e^2}{24} & \frac{I_2 l_e}{6} - \frac{\rho A l_e^3}{120} & -\frac{I_{23} l_e}{6} \\ -\frac{S_3 l_e}{6} & \frac{\rho A l_e^2}{24} & 0 & -\frac{S_2 l_e^2}{24} & -\frac{I_{23} l_e}{6} & \frac{I_3 l_e}{6} - \frac{\rho A l_e^3}{120} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.5})$$

$$\mathbf{M}_0^{22} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A l_e}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{S_2 l_e}{3} & -\frac{S_3 l_e}{3} \\ & \frac{\rho A l_e}{3} & 0 & -\frac{S_2 l_e}{3} & 0 & -\frac{\rho A l_e^2}{24} \\ & & \frac{\rho A l_e}{3} & \frac{S_3 l_e}{3} & \frac{\rho A l_e^2}{24} & 0 \\ & & & \frac{I_1 l_e}{3} & \frac{S_3 l_e^2}{24} & \frac{S_2 l_e^2}{24} \\ & sim & & & \frac{\rho A l_e^3}{120} + \frac{I_2 l_e}{3} & -\frac{I_{23} l_e}{3} \\ & & & & & \frac{\rho A l_e^3}{120} + \frac{I_3 l_e}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.6})$$

Donde  $A$  es el área de la sección transversal de la viga,  $\rho$  es la densidad másica del material,  $l_e$  es la longitud del elemento, y los momentos de inercia y estáticos de la sección se definen como

$$I_1 = \int_{\mathcal{A}_0} \rho (X_2^2 + X_3^2) dS, \quad I_2 = \int_{\mathcal{A}_0} \rho X_2^2 dS, \quad I_3 = \int_{\mathcal{A}_0} \rho X_3^2 dS, \quad I_{23} = \int_{\mathcal{A}_0} \rho X_2 X_3 dS \quad (\text{III. E.7})$$

$$S_2 = \int_{\mathcal{A}_0} \rho X_3 dS, \quad S_3 = \int_{\mathcal{A}_0} \rho X_2 dS \quad (\text{III. E.8})$$

La matriz de masa asociada a los efectos del alabeo  $\mathbf{M}_\omega^e$  puede obtenerse de manera similar, aunque no se expone aquí.

### Matriz de rigidez elástica del elemento

La matriz rigidez elástica  $\mathbf{K}_e^e$  se expresa como la suma de dos matrices, es decir

$$\mathbf{K}_e^e = \mathbf{K}_{e0}^e + \mathbf{K}_{e\omega}^e \quad (\text{III. E.9})$$

Donde  $\mathbf{K}_{e0}^e$  está asociada a los efectos de rotación y traslación de la sección transversal de la viga, provenientes de las ecuaciones (III-13) y (III-16), y  $\mathbf{K}_{e\omega}^e$  está asociada a los efectos del alabeo de la sección, provenientes de las ecuaciones (III-14) y (III-17).  $\mathbf{K}_{e0}^e$  es una matriz simétrica de la forma

$$\mathbf{K}_{e0}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{11} & \mathbf{K}_e^{12} \\ \mathbf{K}_e^{21} & \mathbf{K}_e^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.10})$$

Siendo  $\mathbf{K}_e^{12} = \mathbf{K}_e^{21T}$ , y

$$\mathbf{K}_e^{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{Es_2}{l_e} & -\frac{Es_3}{l_e} \\ & \frac{GA_2}{l_e} & 0 & -\frac{Es_2}{l_e} & 0 & \frac{GA_2}{2} \\ & & \frac{GA_3}{l_e} & \frac{Es_3}{l_e} & -\frac{GA_3}{2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{l_e} & -\frac{Gs_3}{2} & -\frac{Gs_2}{2} \\ & \text{sim} & & & \frac{GA_3 l_e}{4} + \frac{Eh_2}{l_e} & -\frac{Eh_{23}}{l_e} \\ & & & & & \frac{GA_2 l_e}{4} + \frac{Eh_3}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.11})$$

$$\mathbf{K}_e^{12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & 0 & -\frac{Es_2}{l_e} & \frac{Es_3}{l_e} \\ 0 & -\frac{GA_2}{l_e} & 0 & \frac{Es_2}{l_e} & 0 & \frac{GA_2}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{GA_3}{l_e} & -\frac{Es_3}{l_e} & -\frac{GA_3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{Es_2}{l_e} & -\frac{Es_3}{l_e} & -\frac{GJ}{l_e} & -\frac{Gs_3}{2} & -\frac{Gs_2}{2} \\ -\frac{Es_2}{l_e} & 0 & \frac{GA_3}{2} & \frac{Gs_3}{2} & \frac{GA_3 l_e}{4} - \frac{Eh_2}{l_e} & \frac{Eh_{23}}{l_e} \\ \frac{Es_3}{l_e} & -\frac{GA_2}{2} & 0 & \frac{Gs_2}{2} & \frac{Eh_{23}}{l_e} & \frac{GA_2 l_e}{4} - \frac{Eh_3}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.12})$$

$$\mathbf{K}_e^{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} & 0 & 0 & 0 & \frac{Es_2}{l_e} & -\frac{Es_3}{l_e} \\ & \frac{GA_2}{l_e} & 0 & -\frac{Es_2}{l_e} & 0 & -\frac{GA_2}{2} \\ & & \frac{GA_3}{l_e} & \frac{Es_3}{l_e} & \frac{GA_3}{2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{l_e} & \frac{Gs_3}{2} & \frac{Gs_2}{2} \\ & \text{sim} & & & \frac{GA_3 l_e}{4} + \frac{Eh_2}{l_e} & -\frac{Eh_{23}}{l_e} \\ & & & & & \frac{GA_2 l_e}{4} + \frac{Eh_3}{l_e} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.13})$$

Donde  $E = 2\mu$  es el módulo de elasticidad del material, y los momentos de primer y segundo orden de la sección son



$$s_2 = \int_{\mathcal{A}_0} X_3 dS, \quad s_3 = \int_{\mathcal{A}_0} X_2 dS \quad (\text{III. E.14})$$

$$J = \int_{\mathcal{A}_0} (X_2^2 + X_3^2) dS, \quad h_2 = \int_{\mathcal{A}_0} X_2^2 dS, \quad h_3 = \int_{\mathcal{A}_0} X_3^2 dS, \quad h_{23} = \int_{\mathcal{A}_0} X_2 X_3 dS \quad (\text{III. E.15})$$

Además, en las matrices de rigidez se introdujeron los parámetros de corrección por corte [56] para definir las áreas modificadas  $A_2$  y  $A_3$ , y de acuerdo con el modelo constitutivo propuesto en la formulación, el módulo de elasticidad de corte es  $G = E/2$ .

La matriz de rigidez elástica asociada a los efectos del alabeo  $\mathbf{K}_\omega^e$  puede obtenerse de manera similar, aunque no se expone aquí.

### Matriz de rigidez geométrica del elemento

La matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g^e$  se expresa como la suma de dos matrices, es decir

$$\mathbf{K}_g^e = \mathbf{K}_{g_1}^e + \mathbf{K}_{g_2}^e \quad (\text{III. E.16})$$

Donde  $\mathbf{K}_{g_1}^e$  proviene de los términos no lineales de la ecuación de fuerza (III-15) y se encuentra descrita en las expresiones (III-83) a (III-92). Por su parte,  $\mathbf{K}_{g_2}^e$  proviene de los términos no lineales de la ecuación de momentos (III-18), tiene la forma

$$\mathbf{K}_{g_2}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{g_2}^{11} & \mathbf{K}_{g_2}^{12} \\ \mathbf{K}_{g_2}^{21} & \mathbf{K}_{g_2}^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.17})$$

Siendo,

$$\mathbf{K}_{g_2}^{11} = \mathbf{K}_{g_2}^{22} = -\mathbf{K}_{g_2}^{12} = -\mathbf{K}_{g_2}^{21} \quad (\text{III. E.18})$$

$$\mathbf{K}_{g_2}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ES_2}{2l_e^2}(u_{22} - u_{12}) & \frac{ES_2}{2l_e^2}(u_{23} - u_{13}) & 0 & \frac{ES_2}{24}(\psi_{22} - \psi_{12}) & \frac{ES_2}{24}(\psi_{23} - \psi_{13}) \\ 0 & \frac{ES_3}{2l_e^2}(u_{12} - u_{22}) & \frac{ES_3}{2l_e^2}(u_{13} - u_{23}) & 0 & \frac{ES_3}{24}(\psi_{12} - \psi_{22}) & \frac{ES_3}{24}(\psi_{13} - \psi_{23}) \end{bmatrix} \quad (\text{III. E.19})$$

### Vector de cargas generalizadas del elemento

El vector de cargas  $\mathbf{F}^e$  se expresa como la suma de dos componentes, es decir

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}_f^e + \mathbf{F}_m^e \quad (\text{III. E.20})$$

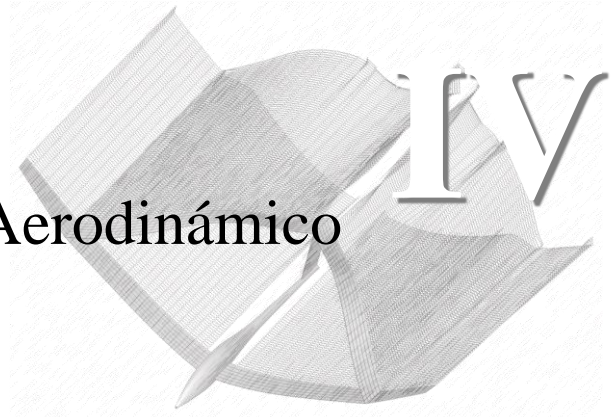
Donde  $\mathbf{F}_f^e$  está asociado a los efectos de las fuerzas que actúan sobre el elemento y proviene del lado derecho de la expresión (III-9), mientras que  $\mathbf{F}_m^e$  está asociado a los efectos de los momentos que actúan sobre el elemento y proviene del lado derecho de la expresión (III-10).

$$\mathbf{F}_f^e = \left\{ \frac{\bar{f}_1 l_e}{2} \quad \frac{\bar{f}_2 l_e}{2} \quad \frac{\bar{f}_3 l_e}{2} \quad 0 \quad \frac{\bar{f}_3 l_e^2}{12} \quad -\frac{\bar{f}_2 l_e^2}{12} \quad \frac{\bar{f}_1 l_e}{2} \quad \frac{\bar{f}_2 l_e}{2} \quad \frac{\bar{f}_3 l_e}{2} \quad 0 \quad -\frac{\bar{f}_3 l_e^2}{12} \quad \frac{\bar{f}_2 l_e^2}{12} \right\}^T \quad (\text{III. E.21})$$

$$\mathbf{F}_m^e = \left\{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l_e(\bar{c} + \bar{m}_1)}{2} \quad \frac{l_e \bar{m}_2}{2} \quad \frac{l_e \bar{m}_3}{2} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{l_e(\bar{c} + \bar{m}_1)}{2} \quad \frac{l_e \bar{m}_2}{2} \quad \frac{l_e \bar{m}_3}{2} \right\}^T \quad (\text{III. E.22})$$

$$\text{Con } \bar{f}_i = \bar{\mathbf{f}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i \text{ y } \bar{m}_i = \bar{\mathbf{m}} \cdot \hat{\mathbf{E}}_i.$$

# Capítulo IV: Modelo Aerodinámico



El modelo aerodinámico tiene por objetivo simular un cuerpo (o cuerpos) en movimiento sumergido en una corriente fluida y estimar las cargas que surgen de la interacción mutua entre ambos. En este capítulo se aborda la descripción de la porción aerodinámica del sistema en estudio. En primer lugar, se exponen algunas bases conceptuales que contextualizan el marco de principios sobre los que se sustenta el modelo. Luego, se describe la configuración general del modelo numérico que dará lugar al esquema de simulación. Por último, se aborda la formulación de las ecuaciones de gobierno.

Toda el desarrollo presentado en este capítulo se basa en los principios del Método de Red de Vórtices Inestacionario y No Lineal (NLUVLM, por sus siglas en inglés). En esta versión se incorporaron modificaciones tanto en la formulación como en la implementación que permiten diversificar los análisis y ampliar el campo de aplicación del método, respecto a las versiones tradicionales del mismo.

## IV. 1 Ecuaciones Básicas

El modelo aerodinámico que da origen al UVLM, al igual que la mayoría de los modelos físico-matemáticos que describen la mecánica de fluidos, se construye en torno a las ecuaciones de Navier-Stokes. Concebidas a partir del equilibrio dinámico de un fluido con densidad  $\rho(\mathbf{X}, t)$ , viscosidad cinemática constante  $\nu$  y sujeto a fuerzas de cuerpo por unidad de volumen  $\mathbf{F}_\rho(\mathbf{X}, t)$ , estas ecuaciones se expresan en términos de la velocidad local del fluido  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y la presión mecánica del fluido  $\bar{p}(\mathbf{X}, t)$  como sigue

$$\rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\nabla \bar{p} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F}_\rho \quad (\text{IV-1})$$

Donde  $\mathbf{X}$  indica la posición espacial en el dominio fluido y  $t$  es el tiempo. Además,  $\nabla$  es el operador nabla (o gradiente), y  $\frac{D}{Dt}$  indica derivación sustancial que aplicada al vector velocidad resulta

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (\text{IV-2})$$

Las ecuaciones anteriores forman un sistema de tres ecuaciones diferenciales escalares cuyas incógnitas son la presión del fluido  $\bar{p}$ , su densidad  $\rho$  y las tres componentes de la velocidad local  $\mathbf{V}$ . Luego, (IV-1) debe combinarse con la ecuación de continuidad y una ecuación de conservación energética adecuada para determinar las cinco incógnitas escalares, dadas condiciones iniciales y de contorno conocidas.

El número de soluciones exactas de las ecuaciones (IV-1) es reducido debido a las no linealidades presentes en las ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la aplicación de hipótesis simplificativas permite, en general, obtener soluciones en determinados casos de interés y, en particular, formular los principios del UVLM. Tales hipótesis se presentan a continuación.

### H1. INCOMPRESIBILIDAD

En primer lugar, se asume que el fluido es incompresible por lo que su densidad se considera constante. Bajo esta conjetura y considerando la forma general de la ecuación de continuidad

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{IV-3})$$

resulta

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{IV-4})$$

Tratar a un fluido como incompresible afecta en cierto punto la aplicabilidad del modelo, no obstante, es una hipótesis generalmente válida para números de Mach del flujo relativamente bajos. En particular, al considerar la variación isoentrópica de la densidad de un fluido en movimiento [78] si el número de Mach alcanza  $M = 0.3$  la variación en la densidad es menor al 5% respecto al reposo, es decir

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} = 1.045 \quad (\text{IV-5})$$

Donde  $\gamma = 1.4$  es el coeficiente de dilatación adiabática del aire y  $\rho_0$  es la densidad de estancamiento (para  $V = 0$ ).

### H2. VISCOSIDAD NULA

En segundo lugar, se asume que el fluido es no viscoso, lo cual supone despreciables a los fenómenos de transporte molecular que incluyen fricción, conductividad térmica y difusión. Un fluido estrictamente no viscoso posee viscosidad cinemática nula  $\nu = 0$  y, en el límite, el número de Reynolds del flujo tiende a infinito. Esto es,

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} Re = \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{VL}{\nu} = \infty \quad (\text{IV-6})$$

Donde  $V$  es el módulo de la velocidad local del flujo y  $L$  es una longitud de referencia.

Aplicando las hipótesis anteriores dadas por (IV-4) y (IV-6) a la expresión (IV-1), las ecuaciones de Navier-Stokes se simplifican como sigue

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{F}_\rho \quad (\text{IV-7})$$

La ecuación (IV-7) representa una versión de las ecuaciones de Euler, donde se asume que la presión mecánica del fluido  $\bar{p}$  es igual a la presión termodinámica del fluido  $p$  y, para no perder generalidad, se conserva el término de fuerzas cuerpo.

## IV. 1. 2 El campo de vorticidad

La formulación matemática del modelo admite la coexistencia de dos campos vectoriales para describir el comportamiento del fluido: el ya mencionado campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y el campo de vorticidad  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$ . La introducción de la vorticidad como un campo adicional en la formulación del problema resulta conveniente debido a varias razones. En primer lugar, las ecuaciones que describen el problema pueden separarse convenientemente de manera tal que se obtiene una representación integral del campo de velocidades en términos del campo de vorticidad y de las condiciones de contorno. De esta separación surgen dos aspectos del problema conceptualmente asociados a cada uno de los campos: la parte cinética del problema que describe el cambio en el campo de vorticidad  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  con el tiempo, y la parte cinemática del problema que asocia el campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  al de vorticidad  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  en cada instante de tiempo. En segundo lugar, todo el campo de velocidad  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  puede calcularse a partir del uso del vector vorticidad que, por estar íntimamente relacionado a los efectos viscosos, se encuentra confinado en zonas determinadas. Por último, la teoría de la circulación para la sustentación [79] sugiere que la vorticidad, al estar relacionada con la circulación, es responsable de las fuerzas producidas por el fluido sobre los cuerpos sólidos que en él se encuentran inmersos.

El campo de vorticidad del flujo  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  queda definido por el rotor del campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ , es decir

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = 2\boldsymbol{\omega} \quad (\text{IV-8})$$

Donde  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{X}, t)$  es el campo de velocidad angular del fluido. Por otro lado, el cambio del campo de vorticidad con el tiempo puede describirse con la ecuación de transporte de vorticidad que, tomando el rotor de ambos miembros de (IV-7) y considerando (IV-2) para un fluido sujeto solo a fuerzas cuerpo irrotacionales ( $\nabla \times \mathbf{F}_\rho = \mathbf{0}$ ), resulta

$$\frac{D\mathbf{\Omega}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{\Omega}) = \mathbf{\Omega} \cdot (\nabla \mathbf{V}) \quad (\text{IV-9})$$

Donde se aplicaron algunas identidades vectoriales [80].

El aspecto cinético del problema concierne al desarrollo del campo de vorticidad con el tiempo. Esto es, a la tasa de cambio de  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  representada en (IV-9) donde el término  $\mathbf{V} \cdot (\nabla \mathbf{\Omega})$  representa la tasa de cambio de vorticidad debida a la convección del fluido, mientras que el término  $\mathbf{\Omega} \cdot (\nabla \mathbf{V})$  representa la tasa de deformación de las líneas vorticosas que sólo se encuentra en flujos tridimensionales. Las ecuaciones (IV-8) y (IV-9), en las cuales  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  son las variables dependientes, reemplazan a las ecuaciones (IV-2) y (IV-7) como ecuaciones de gobierno del problema, de acuerdo a lo que se expone a continuación.

En general, para un fluido incompresible (o, más estrictamente, uno barotrópico), donde los fenómenos de difusión sean despreciables y las fuerzas externas sean conservativas, se satisfacen las leyes de conservación de Helmholtz que, también conocidas como Teoremas de Vórtices de Helmholtz, se resumen en el Apéndice IV. A. De acuerdo con estas leyes, si el fluido es además homogéneo, la vorticidad es una propiedad cinemática de sus partículas lo cual impide que pueda crearse o destruirse en el seno del flujo. De este modo, las líneas del campo de vorticidad se comportan como líneas materiales que solo pueden sufrir convección y/o deformación tal como lo indican los términos presentes en (IV-9). La vorticidad puede originarse únicamente en aquellas zonas del dominio donde existen tensiones de corte como contornos o zonas donde se combinan dos corrientes con velocidades distintas, por ejemplo. Luego, la condición de no deslizamiento sobre las superficies sólidas inmersas en el fluido provee un mecanismo de generación de vorticidad. Bajo estas condiciones, la generación y

la evolución del campo de vorticidad gobiernan todo el campo de movimiento fluido y su descripción constituye las bases del modelo aerodinámico.

Evidentemente, el concepto de fluido no viscoso restringe el mecanismo de difusión de vorticidad que de otro modo se extendería al flujo en simultáneo con la convección, formando capas límites y estelas de gran tamaño. Sin embargo, como expone M. Maza [81] para números de Reynolds elevados pero finitos, la distribución de vorticidad se vuelve lo suficientemente compacta ya que los efectos de convección son dominantes. Entonces, el dominio fluido puede suponerse dividido en dos zonas: una gran región hacia adelante y hacia los lados de la superficie sólida donde el flujo está libre de vorticidad, y una pequeña zona donde la vorticidad se encuentra confinada. En particular, estos flujos suelen llamarse dominados por vorticidad. En este punto, asumir la hipótesis de viscosidad nula (número de Reynolds que tiende a infinito) permite idealizar a las zonas con vorticidad como superficies sin espesor dando sustento a la aproximación numérica del modelo que se describirá más adelante.

El carácter parabólico de la ecuación (IV-9) permite calcular el estado del campo de vorticidad en un instante subsiguiente en todo el dominio a partir de conocer  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$  en el instante actual sólo dentro de la zona con vorticidad. Entonces, por la relación cinemática que existe entre ambos campos, la evaluación de  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  en cada paso de tiempo y la evolución del campo de vorticidad resulta de analizar una pequeña región del dominio donde se encuentran los efectos viscosos.

### IV. 1. 3 Cinemática del flujo

El segundo aspecto del problema a considerar lo constituye la cinemática del flujo y concierne a cómo se relacionan los campos de velocidad y vorticidad para cada instante de tiempo. Esta relación se representa por dos ecuaciones que se repiten a continuación por comodidad: la ecuación de continuidad (IV-4) y la definición del campo de vorticidad (IV-8).

$$\nabla \cdot \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = 0, \quad \mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t) = \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{IV-10})$$

Al analizar las expresiones repetidas en (IV-10), que describen la relación entre  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y  $\mathbf{\Omega}(\mathbf{X}, t)$ , es posible identificar características presentes en otros campos de la física. En efecto, existe una analogía directa entre estas ecuaciones y las que componen el conjunto de ecuaciones de Maxwell para fenómenos electromagnéticos. Las leyes de Gauss y Ampere (que relacionan el flujo de corriente eléctrica y el campo magnético) poseen la misma estructura que la ecuación de continuidad y la definición del campo de vorticidad, respectivamente, lo cual permite aplicar las técnicas ya establecidas en el campo de la magnetostática a los aspectos cinemáticos del problema considerado.

Al satisfacerse la ecuación de continuidad (IV-4), el campo de velocidades resulta solenoidal [82]. Luego, es posible expresar a  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  como el rotor de un campo vectorial potencial  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, t)$ , es decir

$$\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{\Pi} \quad (\text{IV-11})$$

Con lo que la ecuación que define al campo de vorticidad (IV-8) resulta,

$$\mathbf{\Omega} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{\Pi}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) - \nabla^2 \mathbf{\Pi} \quad (\text{IV-12})$$

Dado que el rotor de cualquier gradiente es nulo,  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{X}, t)$  en (IV-11) se encuentra indeterminado por el gradiente de una función escalar de la posición  $\mathbf{X}$  y el tiempo  $t$ . Esto permite postular al campo vectorial potencial tal que

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = 0 \quad (\text{IV-13})$$

Así, considerando (IV-11) y (IV-13), (IV-12) se reduce a

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V} = -\nabla^2 \boldsymbol{\Pi} \quad (\text{IV-14})$$

La expresión anterior representa la ecuación de Poisson para el campo vectorial potencial  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}, t)$  cuya solución permite deducir el campo de velocidades a partir de (IV-11). Siguiendo a K. Karamcheti [83], la solución de la ecuación (IV-14) puede expresarse como

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} d\mathcal{V} \quad (\text{IV-15})$$

Donde  $|\cdot|$  indica norma euclídea de un vector,  $\mathcal{V}$  es la región donde la vorticidad se encuentra distribuida,  $d\mathcal{V}$  es un elemento de dicha región cuya posición está dada por  $\mathbf{X}_0$ , de acuerdo a lo mostrado en la Figura IV-1. Además,  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}, t)$  está evaluado en un punto  $P$  cuya posición está dada por  $\mathbf{X}$  y la integración se realiza en las coordenadas del campo de vorticidad ( $\mathbf{X}_0$ ).

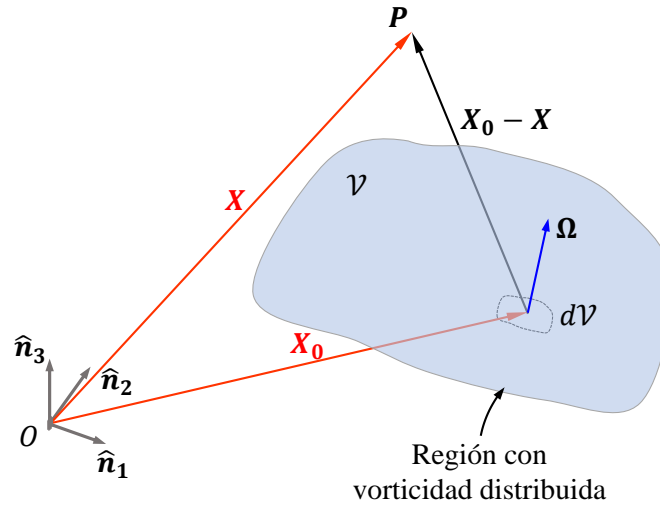


Figura IV-1: Configuración del espacio con una región de vorticidad distribuida.

Llevando (IV-15) a (IV-11), el campo de velocidades se calcula como

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \nabla \times \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla \times \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} d\mathcal{V} \quad (\text{IV-16})$$

Donde el rotor se toma respecto a las coordenadas del punto  $\mathbf{X}_0$ . Con lo cual, en tres dimensiones puede escribirse ([84], [85]) que

$$\nabla \times \frac{1}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} = -\frac{\mathbf{X} - \mathbf{X}_0}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} \quad (\text{IV-17})$$

Luego,

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} d\mathcal{V} \quad (\text{IV-18})$$

Interpretando (IV-16) se infiere que la contribución de un elemento de vorticidad  $\boldsymbol{\Omega}d\mathcal{V}$  al potencial  $\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{X}, t)$  es

$$\Delta\Pi = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} d\mathcal{V} \quad (\text{IV-19})$$

Mientras que la contribución al campo de velocidad del mismo elemento resulta

$$\Delta\mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t) = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} d\mathcal{V} = \frac{1}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} d\mathcal{V} \quad (\text{IV-20})$$

Asimismo, debe notarse que el integrando de (IV-16) es nulo siempre que  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)$  sea nulo. Por lo tanto, las regiones del dominio que no posean vorticidad no contribuirán al campo de velocidad de ninguna manera. La velocidad, entonces, se calcula explícitamente en cada punto  $\mathbf{X}$  del dominio para un tiempo  $t$  dado, independientemente de los puntos en el entorno de  $\mathbf{X}$  y sólo teniendo en cuenta las regiones con vorticidad.

La representación integral de  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  en términos de  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)$  dada en (IV-16) o (IV-18) es una extensión de la conocida ley de Biot-Savart, formulada en la década de 1820, para determinar la intensidad de un campo magnético (cuyo papel es desempeñado, en este caso, por la velocidad) inducido por una corriente eléctrica (en este caso representada por la vorticidad). A pesar de la aplicabilidad de la ley de Biot-Savart, es importante aclarar que no existe una relación causa-efecto entre los campos  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  y  $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t)$  como el término “inducir” proveniente de la magneto-dinámica indica. Aquí, ambos campos vectoriales simplemente coexisten y se representa uno en términos del otro.

Finalmente, determinar el campo de velocidad se reduce a evaluar la expresión (IV-16) o (IV-18) considerando las distintas regiones de vorticidad presentes en el dominio fluido. Luego, deberá prestarse particular atención a la definición de dichas regiones a los fines de poder integrar la contribución definida en (IV-20). En el presente modelo, y como se expondrá más adelante, las regiones con vorticidad se representan por sábanas o superficies vorticosas y por filamentos o segmentos vorticosos, por lo cual se analizará la expresión (IV-18) para estos tipos de configuraciones.

### Campo de velocidad asociado a un segmento vorticoso

Para definir la velocidad asociada a un segmento vorticoso debe considerarse, en primera instancia, un filamento vorticoso como el representado en la Figura IV-2. Un filamento vorticoso es el resultado del proceso límite aplicado a un tubo vorticoso [86] en el cual su sección transversal es llevada a cero mientras su intensidad se mantiene constante. A su vez, la intensidad del filamento se define a partir de la circulación  $\Gamma$  calculada alrededor de una curva cerrada  $c$  que lo circunda sólo una vez, es decir

$$\Gamma(t) = \oint \mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t) \cdot d\mathbf{c} = \int_{\Sigma} \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t) \cdot d\boldsymbol{\Sigma} \quad (\text{IV-21})$$

Donde se aplicó el teorema de Stokes (ver Apéndice IV. A o [87]) y  $\Sigma$  representa la superficie encerrada por  $c$ .

Siguiendo la Figura IV-2, se identifica un elemento de volumen  $d\mathcal{V}$  del filamento, formado por la sección transversal  $d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{n}} dS$  y un elemento de longitud  $d\mathbf{l}$  a lo largo del filamento. Luego, teniendo en cuenta (IV-20) la contribución al campo de velocidades del filamento resulta

$$\Delta\mathbf{V}(\mathbf{X}_0, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \nabla \times \frac{d\mathbf{l}}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} \quad (\text{IV-22})$$



Donde se tuvo en cuenta que  $\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \Gamma$  y que  $d\mathbf{l} \times |\boldsymbol{\Omega}| = \boldsymbol{\Omega} dl$  y se tomó el rotor considerando que  $d\mathbf{l}$  y  $\mathbf{X}$  son constantes, y que  $d\mathbf{l}$  y  $\boldsymbol{\Omega}$  son paralelos. Finalmente, la velocidad asociada a todo el filamento se obtiene integrando la expresión (IV-22) a lo largo de su longitud, es decir

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \int \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} \quad (\text{IV-23})$$

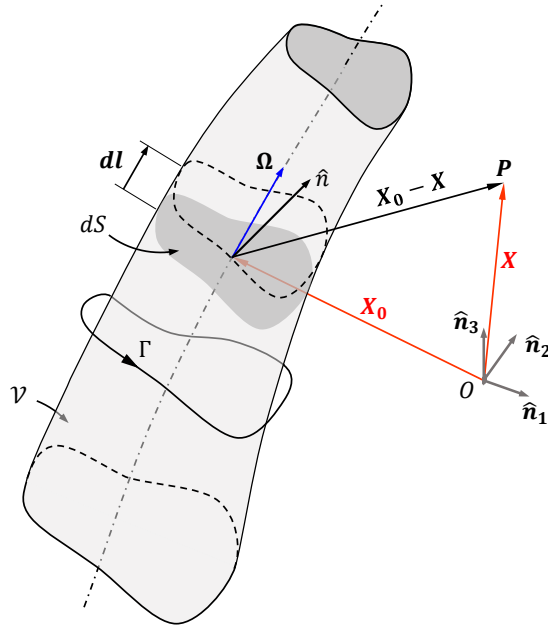


Figura IV-2: Filamento vorticoso.

En este punto, la existencia de un segmento vorticoso de longitud finita en el dominio fluido contradice las conclusiones de los teoremas básicos sobre vorticidad, en especial de aquellos que describen la continuidad de líneas vorticosas. Sin embargo, el objetivo de este análisis es fijar un concepto clave para la discretización de regiones vorticosas más complejas. Dicho esto, al considerar un segmento vorticoso, la integral en (IV-23) debe calcularse sobre una porción recta de longitud finita del filamento lo cual permite obtener una expresión algebraica cerrada para la velocidad asociada. Para este caso y de acuerdo a la Figura IV-3, Phillips y Snyder propusieron una expresión alternativa que favorece la implementación computacional y elimina algunas singularidades que ocurren con las versiones convencionales ([83], [86], [87]),

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|(|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2| + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2)} \quad (\text{IV-24})$$

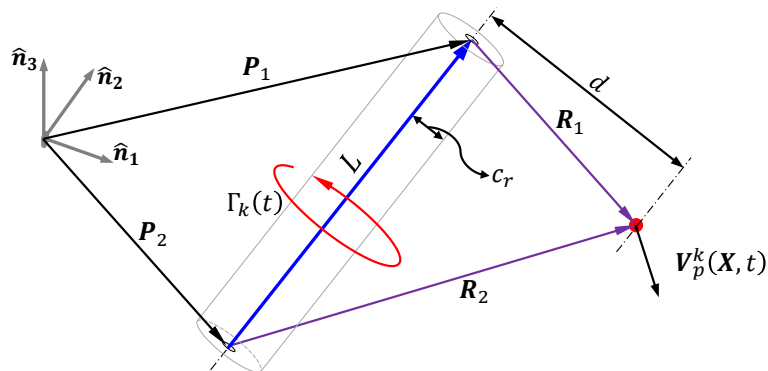


Figura IV-3: Velocidad asociada a un segmento vorticoso.

A pesar de las ventajas de la expresión (IV-24), la misma tiene un comportamiento singular si el punto de evaluación  $\mathbf{P}$  se aproxima al segmento mismo. Para evitar este comportamiento indeseado, A. Van Garrel [88] propone introducir un suavizado numérico a partir de una modificación a la expresión anterior. Esta versión adiciona un término no nulo al denominador de (IV-24) que es una función de la longitud del segmento  $L$  y un factor denominado radio de “cut off”,  $c_r$ . Esto es,

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|(|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2| + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2) + (c_r L)^2} \quad (\text{IV-25})$$

La introducción del radio de “cut off” en la expresión (IV-25) genera un bulbo de suavizado alrededor del segmento vorticoso que altera el valor de velocidad asociada (ver Figura IV-3). Luego, a medida que el punto de evaluación  $\mathbf{P}$  se aproxima al segmento, la velocidad disminuye suavemente hasta volverse nula sobre éste. Debido a que su definición es estrictamente numérica, la asignación de un valor adecuado de  $c_r$  normalmente depende de cada caso en particular, e incluso puede variar en una misma simulación con base en distintas consideraciones. No obstante, la expresión propuesta por A. Van Garrel garantiza que, dentro de los rangos usuales, la perturbación en el campo de velocidades generada por el bulbo de suavizado pierda su influencia a una distancia aproximadamente superior a un tercio de la longitud del segmento. Este efecto se muestra en la Figura IV-4 donde se calculó la velocidad asociada a un segmento vorticoso de longitud unitaria ( $L = 1$ ) e intensidad  $\Gamma = 4\pi$  en función de la distancia  $d$  al punto de evaluación para distintos valores de  $c_r$ .

### Sábanas vorticosas

La definición de las sábanas vorticosas es conceptualmente similar a la de los filamentos vorticosos. En este caso, la región de vorticidad  $\mathcal{V}$  es una zona angosta que se encuentra encerrada por dos superficies de vorticidad colindantes,  $S_1$  y  $S_2$ , de acuerdo a lo mostrado en la Figura IV-5. La posición  $\mathbf{X}_0$  está dada por un punto situado sobre la superficie media de la región vorticoso, denominada  $S$ . El elemento de volumen  $d\mathcal{V}$  cuyo aporte estará dado por (IV-20) corresponde a un cilindro elemental de sección transversal  $\hat{\mathbf{n}} dS$  y de altura igual a la distancia entre  $S_1$  y  $S_2$ , llamada en este esquema  $\varepsilon$ . Se tiene entonces que

$$\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t) d\mathcal{V} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{X}_0, t) \varepsilon dS \quad (\text{IV-26})$$

Seguidamente, se considera el proceso límite en el que la distancia entre las superficies  $\varepsilon$  tiende a cero y la vorticidad en la posición  $\mathbf{X}_0$  tiende a infinito, de manera tal que el producto entre ambas se mantenga constante, es decir

$$\lim_{\substack{|\boldsymbol{\Omega}| \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \boldsymbol{\Omega} \varepsilon = \boldsymbol{\gamma} \quad (\text{IV-27})$$

De este modo, la región con vorticidad colapsa en una superficie o sábana de vorticidad concentrada cuya intensidad es  $\boldsymbol{\gamma}$ . Luego, para obtener la velocidad asociada a una sábana vorticoso, se reemplazan (IV-26) y (IV-27) en (IV-18) lo que resulta en

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{S_v} \frac{\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{X}_0, t) \times (\mathbf{X} - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X} - \mathbf{X}_0|^3} dS \quad (\text{IV-28})$$

Donde, en este caso la integral se realiza sobre la sábana vorticoso  $S_v$ .

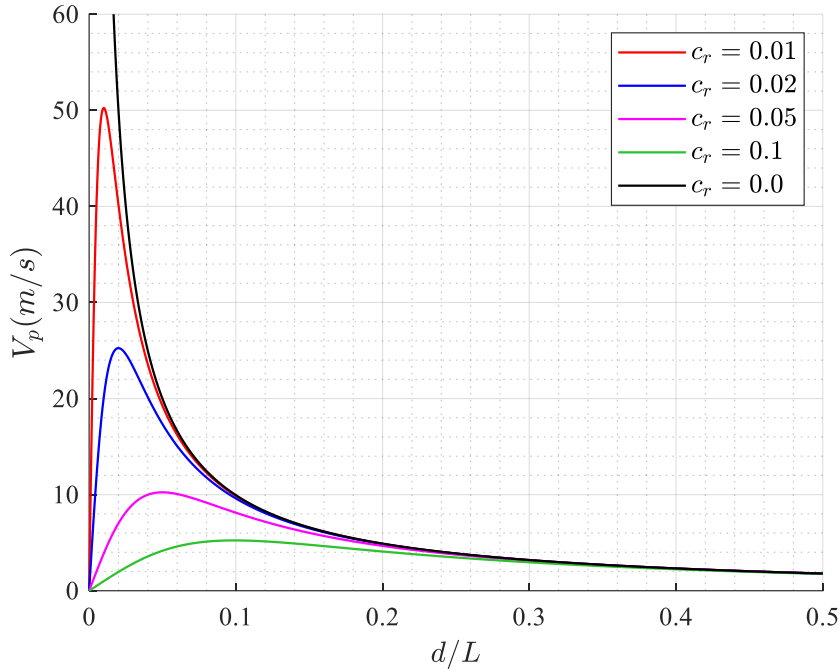


Figura IV-4: Velocidad asociada a un segmento vorticoso de longitud unitaria e intensidad  $\Gamma = 4\pi$  en función de la distancia al punto de evaluación.

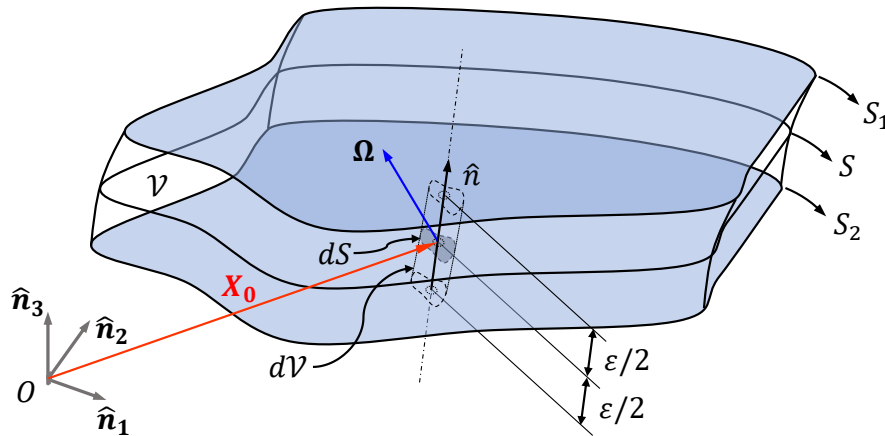


Figura IV-5: Descripción de una sábana vorticiosa.

Sobre las sábanas vorticosas, la propiedad solenoidal del campo de vorticidad, que surge al tomar la divergencia de (IV-8), se satisface sobre las dos dimensiones características de la superficie de manera tal que las líneas vorticosas son cerradas, o bien, terminan en los contornos. Esto es, considerando el operador bidimensional  $\nabla_{2d}$ ,

$$\nabla_{2d} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0 \quad (\text{IV-29})$$

En cuanto al campo de velocidades asociado a la sábana vorticiosa, la expresión (IV-28) muestra que  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  está definida y posee un valor finito fuera de la sábana misma (para todo  $\mathbf{X} \neq \mathbf{X}_0$ ). Sin embargo, su comportamiento es particular cuando el punto de evaluación  $\mathbf{X}$  se aproxima a la sábana. En este caso, resulta de interés analizar qué ocurre con  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  cuando  $\mathbf{X}$  tiende a  $\mathbf{X}_0$ . Para ello considérese una sábana vorticiosa  $S_v$  como la de la Figura IV-6, que posee una vorticidad distribuida uniforme en el instante de tiempo de análisis  $\boldsymbol{\gamma}$ . Sobre  $S_v$ , se define un punto  $\mathbf{P}$  indistinguible con el vector  $\mathbf{X}_0$ , donde la normal a la sábana es  $\hat{\mathbf{n}}$ , y dos puntos de evaluación para el campo de velocidad  $\mathbf{P}_u$  y  $\mathbf{P}_l$ , uno por encima y otro por debajo de la sábana, identificados con  $\mathbf{X}_u$  y  $\mathbf{X}_l$ , respectivamente. Con

esta configuración, se calcula la velocidad sobre  $\mathbf{P}_u$  y  $\mathbf{P}_l$ , a medida que ambos se aproximan a  $\mathbf{P}$  y el resultado obtenido se descompone en una componente normal a la sábana, en la dirección de  $\hat{\mathbf{n}}$ , y en una componente tangencial a ésta. La evaluación numérica de este proceso para una sábana suficientemente grande con vorticidad uniforme  $|\boldsymbol{\gamma}| = 4\pi \text{ [m/s]}$ , se presenta en la Figura IV-7. Aquí, en el límite cuando  $\mathbf{P}_u$  y  $\mathbf{P}_l$  tienden a  $\mathbf{P}$ , la integral de (IV-28) debe evaluarse en el sentido de su valor principal de Cauchy [89], esto es, excluyendo el punto de singularidad  $\mathbf{P}$  de la misma.

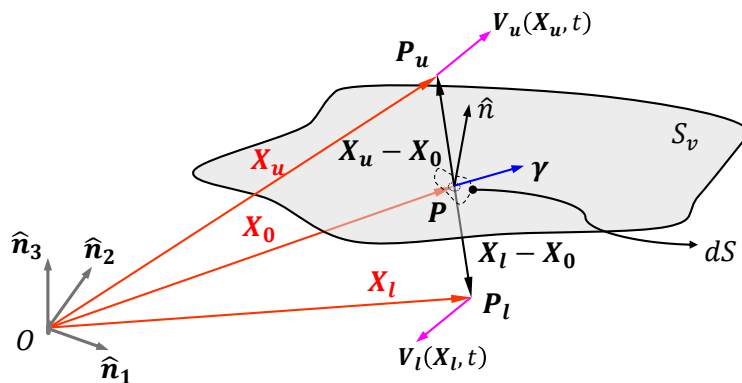


Figura IV-6: Velocidad asociada a una sábana vorticiosa en un punto cercano a la sábana misma.

La Figura IV-7 a) muestra que la componente normal de velocidad a través de la sábana es finita y constante, pero la componente tangencial, aunque también es finita, presenta una discontinuidad a través de la sábana, como lo muestra la Figura IV-7 b). En efecto, es posible arribar a este resultado directamente a partir de (IV-28) como lo hacen S. Preidikman, B. K. Batchelor o K. Karamcheti ([11], [80], [83]), quienes concluyen, además, que el salto en la velocidad tangencial  $\Delta \mathbf{V}_t$  a través de la sábana es

$$\lim_{\substack{P_u \rightarrow P \\ P_l \rightarrow P}} \Delta \mathbf{V}_t = \lim_{\substack{P_u \rightarrow P \\ P_l \rightarrow P}} (\mathbf{V}_{u,t} - \mathbf{V}_{l,t}) = \boldsymbol{\gamma} \times \hat{\mathbf{n}} \quad (\text{IV-30})$$

Donde  $\mathbf{V}_{u,t}$  y  $\mathbf{V}_{l,t}$  son las componentes tangenciales de velocidad evaluadas en  $\mathbf{P}_u$  y  $\mathbf{P}_l$ , respectivamente. El resultado de (IV-30) se reproduce en la Figura IV-8, donde  $d$  es la distancia entre el punto de evaluación y  $\mathbf{X}_0$ , al igual que en las anteriores.

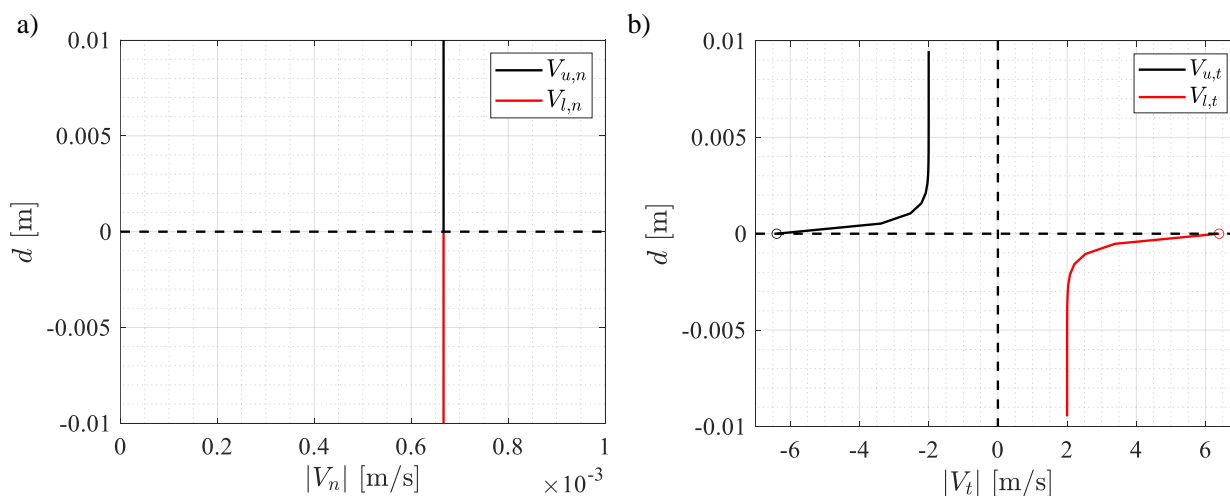


Figura IV-7: Velocidad asociada a una sábana de intensidad  $\gamma = 4\pi \text{ [m/s]}$ . a) Componente normal. b) Componente tangencial.

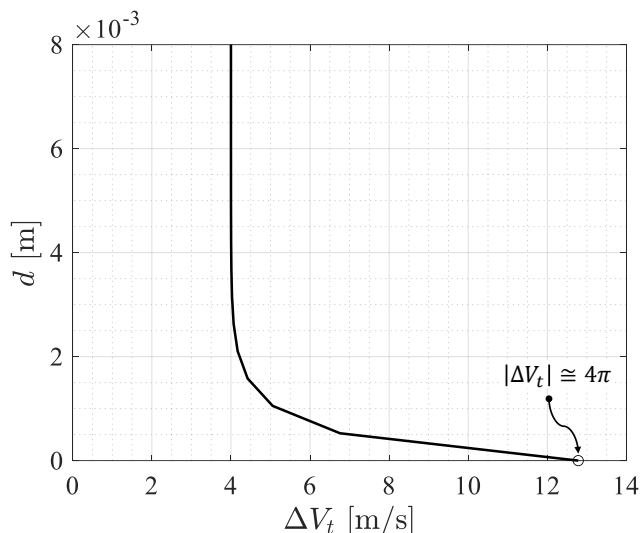


Figura IV-8: Velocidad asociada a una sábana de intensidad  $\gamma = 4\pi$  [m/s], diferencia en la velocidad tangencial a través de la sábana.

## IV. 2 Configuración del Modelo

Cuando se analizan fluidos reales, el movimiento relativo entre éstos y las superficies sólidas de los cuerpos inmersos producen tensiones tangenciales que, a su vez, generan vorticidad. La vorticidad generada es capaz de modificar la velocidad del fluido de manera tal que no se produzca deslizamiento sobre la superficie sólida. Luego, producto de la viscosidad de un fluido real, la vorticidad se difunde en forma de capas límites en las zonas adyacentes a la superficies sólidas. Con el desarrollo del flujo, las capas límites se trasladan por convección y forman estelas aguas abajo de los cuerpos. Este fenómeno está fuertemente relacionado con el número de Reynolds del flujo y, a medida que éste se incrementa, los efectos de difusión disminuyen, resultando en capas límites y estelas más angostas.

Aplicar la hipótesis de viscosidad nula equivale a la situación límite en la que la progresiva reducción de los efectos viscosos lleva a las capas límites y las estelas a un espesor infinitesimal. De ahí que cuando el número de Reynolds tiende a infinito, las superficies de los cuerpos sumergidos se suponen cubiertas por sábanas vorticosas que se caracterizan por su intensidad  $\gamma$  y modelan la discontinuidad en la velocidad tangencial sobre la superficie. En este sentido, utilizar sábanas vorticosas para representar la vorticidad superficial resulta una aproximación suficientemente precisa del fenómeno físico de formación de capas límites cuando el flujo posee un número de Reynolds suficientemente elevado.

La aproximación con sábanas vorticosas adheridas a las superficies sólidas no contempla adecuadamente los fenómenos de desprendimiento o inestabilidades de capas límites que pueden presentarse a grandes números de Reynolds. En relación a este punto, se introduce en el modelo la *condición de Kutta* que fue establecida por primera vez en 1902 por el matemático alemán W. M. Kutta para el análisis de casos estacionarios bidimensionales a partir de un punto de vista fenomenológico. En su versión original, esta condición establece que el flujo se desprende suavemente de los bordes de fuga de los perfiles y la velocidad en esos puntos es finita; por lo tanto, el borde de fuga es un punto de estancamiento donde la diferencia de presión es nula. A pesar de que matemáticamente la *condición de Kutta* fija la cantidad de circulación requerida para obtener resultados aceptables, su extensión a casos tridimensionales de flujos no estacionarios ha sido fuente de diversas discusiones. El modelo implementado aquí sigue las conclusiones obtenidas por J. Katz y A. Plotkin y por J. Katz y D. Weihs

([86], [90]) que establecen que la extensión automática de la *condición de Kutta* original produce resultados suficientemente buenos en la mayoría de los casos de interés bajo ciertas restricciones cinemáticas (ángulos de ataque moderados, velocidades verticales moderadas, entre otras). Luego, se asume que a lo largo de los bordes filosos de los cuerpos la diferencia de presiones entre la superficie superior e inferior sea nula, lo cual produce que el flujo deje dichos bordes de manera suave, pero, en general, con vorticidad. Asimismo, la vorticidad creada en los bordes debe convectarse con el flujo a la velocidad local de la corriente lo cual forma las estelas que se encontrarán adheridas a los bordes desde los cuales fueron generadas. Este proceso elimina la discontinuidad en la presión sobre las estelas construyéndolas como sábanas libres de fuerza que alcanzan su posición a partir de la cinemática del flujo.

En base a lo anterior, el modelo se configura con dos tipos de sábanas vorticosas que concentran toda la vorticidad del flujo: sábanas vorticosas adheridas (SVA) y sábanas vorticosas libres (SVL). Mientras que, el resto del flujo se considera irrotacional. Las SVA copian las superficies sólidas de los cuerpos inmersos en el flujo y representan las capas límites, se dicen adheridas dado que su posición es conocida y especificada a priori en base a la dinámica de las estructuras que forman los cuerpos. Las SVL, por su parte, representan las estelas y, como se mencionó, se deforman libremente para adquirir posiciones libres de fuerza. Ambos tipos de sábanas se conectan entre sí a través de los bordes filosos desde donde se originan las estelas. Esta configuración se muestra en la Figura IV-9 con dos ejemplos de simulaciones realizadas con el modelo aquí implementado [45], donde se identifican los tipos de sábanas vorticosas. En primer lugar, se presenta un dron cuadricóptero en vuelo sostenido (Figura IV-9 a)) y, en segundo lugar, un insecto con alas batientes (Figura IV-9 b)).

Desde el punto de vista aerodinámico, un cuerpo sumergido en una corriente puede estar compuesto por superficies sustentadoras y por superficies que no tienen como principal objetivo generar sustentación. Si bien ambas superficies se representan con SVAs, se tratan levemente diferente. Las superficies no sustentadoras, en primer lugar, suelen formar cuerpos romos que alteran el flujo por su presencia como por ejemplo algunos fuselajes, cubos de hélices, barquillas de motores, entre otros. Por lo tanto, las superficies no sustentadoras no producen estelas, en el sentido considerado en el modelo, y su principal función es limitar el dominio dando un contorno donde imponer la condición de no penetración. Los cuerpos formados por superficies sustentadoras suelen ser esbeltos y de espesores suficientemente reducidos. Los ejemplos más comunes los constituyen las alas de aeronaves, palas de rotores, aspas de hélices, entre otros. En estos casos, es posible colapsar las superficies exteriores que componen estos cuerpos en una única sábana que siga su línea media, sin sacrificar la representatividad del modelo.

Otro aspecto importante en la configuración del modelo aerodinámico lo constituye el arranque impulsivo. Este método permite modelar correctamente el flujo alrededor de los cuerpos sumergidos garantizando el cumplimiento de las hipótesis de vorticidad establecidas. Esto es, al desarrollar la vorticidad en el flujo a partir de un arranque impulsivo se asegura que la mayor parte del dominio fluido sea irrotacional y que la vorticidad se mantenga concentrada en zonas específicas. Luego, cualquier flujo representado con el modelo aerodinámico deberá haber evolucionado de un arranque impulsivo.

Con el objetivo de esclarecer este aspecto esencial del modelo aerodinámico, el esquema del desarrollo de la vorticidad en un flujo incompresible y no viscoso se muestra en la Figura IV-10. En este caso, el fluido inicialmente se encuentra en reposo ( $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \equiv \mathbf{0}$ ) y ocupa un dominio infinito internamente acotado por una superficie sólida que, por ejemplo, está formada por las superficies externas de un cuerpo sustentador. En un momento determinado, sea  $t = 0$ , la superficie sólida incrementa repentinamente (o “impulsivamente”) su velocidad  $\mathbf{V}_p(t)$  desde cero hasta un valor finito, que se mantiene constante. Para  $t < 0$ , es decir previamente al incremento en  $\mathbf{V}_p(t)$ , la vorticidad en todo el dominio es nula (el fluido se encuentra en reposo). En  $t = 0$ , el movimiento de la superficie produce una velocidad tangencial relativa al fluido no nula y, a su vez, por la condición de no

deslizamiento, sobre la superficie sólida se produce una discontinuidad en dicha velocidad tangencial. Esta discontinuidad en la velocidad tangencial es un mecanismo para la creación de vorticidad  $\gamma$  sobre la sábana vorticosa adherida a la superficie sólida. Para  $t > 0$ , la vorticidad que en  $t = 0$  se encontraba concentrada en la SVA, se transporta al seno del fluido. El transporte de vorticidad está representado en la ecuación (IV-9) y, dado que no se consideran efectos de difusión, sólo puede realizarse por medio de la convección que traslada la vorticidad lejos de los contornos sólidos por el efecto de la velocidad del flujo formando una SVL que constituye la estela del cuerpo. Finalmente, a medida que el tiempo transcurre, idealmente para  $t \rightarrow \infty$ , la distribución de vorticidad tiende a un estado estacionario. Desde un punto de vista estrictamente cinemático, es posible asumir que es el fluido el que se desplaza respecto a los cuerpos sólidos adquiriendo de manera impulsiva una velocidad  $V_\infty = -V_p$ .

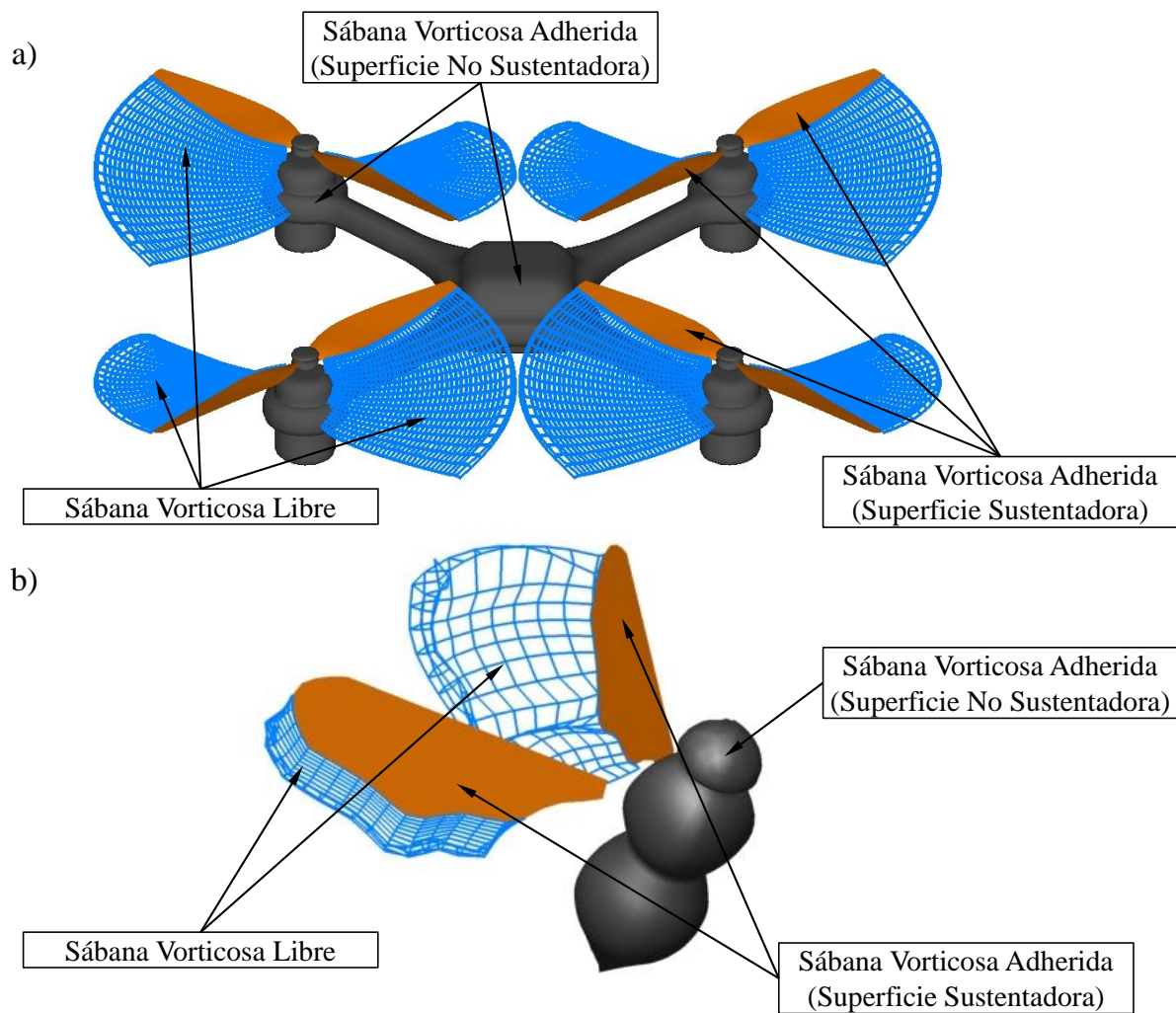


Figura IV-9: Sábanas vorticosas libres y adheridas. a) Simulación cuadricóptero. b) Simulación insecto.

### IV. 3 Formulación Matemática del Modelo

En esta sección se describen los fundamentos matemáticos que sustentan el modelo aerodinámico implementado. A su vez, se analizan los aspectos necesarios para el esquema de discretización que da lugar al modelo numérico/computacional.

## IV. 3. 1 Ecuaciones de Gobierno y Condiciones de Contorno

Desde el punto de vista matemático, el modelo considera un problema gobernado por las expresiones (IV-7) y (IV-4). Tal y como se expuso oportunamente, estas ecuaciones son válidas en la zona exterior del flujo, es decir fuera de las capas límites y estelas donde se asume concentrada la vorticidad. Así, para un fluido incompresible y con un elevado número de Reynolds se tiene

$$\rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{IV-31})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (\text{IV-32})$$

Donde las fuerzas cuerpo se asumen conservativas y su potencial se absorbe en la presión  $p$ , además se introduce (IV-2).

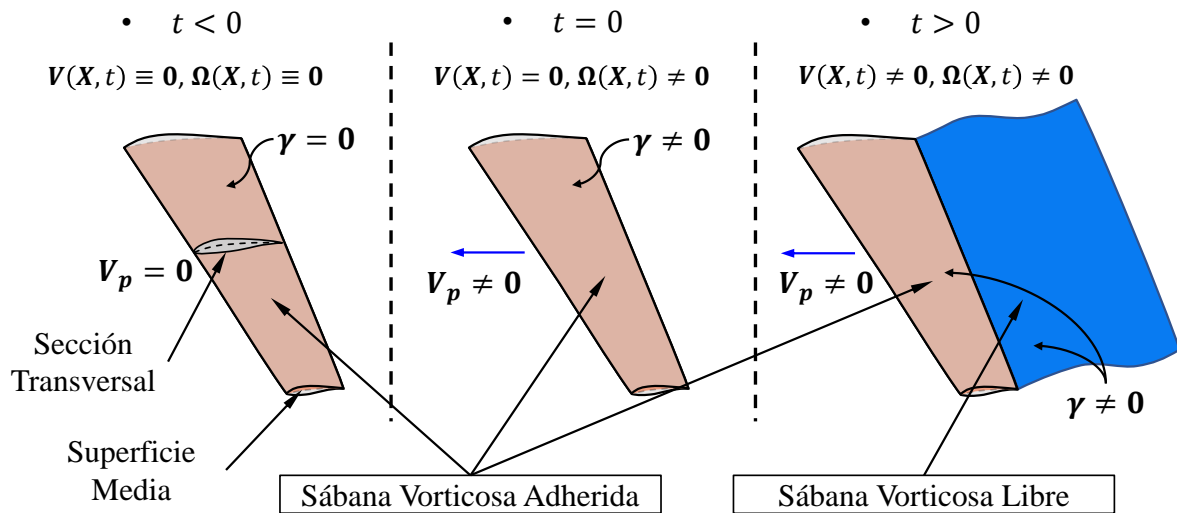


Figura IV-10: Desarrollo de la vorticidad en un flujo incompresible y no viscoso.

Partiendo de la hipótesis de irrotacionalidad, el campo de velocidades  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  puede expresarse como el gradiente de un potencial. Por su definición,  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  es irrotacional en cualquier punto del dominio que se encuentre por fuera de las sábanas vorticosas, ya que representa la velocidad proveniente de las perturbaciones que generan los cuerpos sumergidos y, naturalmente, está asociada a la vorticidad presente en capas límites y estelas. Luego, siendo  $\Psi(\mathbf{X}, t)$  una función potencial, se tiene

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \nabla \Psi(\mathbf{X}, t) \quad (\text{IV-33})$$

Por otro lado, y de acuerdo a lo expuesto anteriormente, se incorpora al flujo una velocidad uniforme  $\mathbf{V}_\infty$  que representa la velocidad de la corriente libre, es decir, la velocidad que tendría el flujo si no existieran contornos sólidos sumergidos. Dado que  $\mathbf{V}_\infty$  representa la velocidad constante de un flujo incompresible, satisface la ecuación de continuidad (IV-32)

$$\nabla \cdot \mathbf{V}_\infty = 0 \quad (\text{IV-34})$$

Así, puede adicionarse  $\mathbf{V}_\infty$  al campo  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  para formar el campo de velocidades total, esto es

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{IV-35})$$



Teniendo en cuenta (IV-32), (IV-33) y (IV-34) se arriba a que el potencial  $\Psi(\mathbf{X}, t)$  satisface la ecuación de Laplace en la región ocupada por el fluido fuera de las capas límites y estelas,

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{X}, t) = 0 \quad (\text{IV-36})$$

Además de las ecuaciones (IV-31) a (IV-36), el problema debe completarse con condiciones de contorno apropiadas, para lo cual se consideran dos circunstancias. En primer lugar, se prescribe el valor de la componente normal de la velocidad relativa a las superficies sólidas. Se asume, entonces, que la velocidad de tales superficies  $\mathbf{V}_s$  es conocida al menos como una función del tiempo y formalmente se plantea

$$(\mathbf{U}(\mathbf{X}_s, t) - \mathbf{V}_s(\mathbf{X}_s, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s(\mathbf{X}_s, t) = 0, \quad \mathbf{X} = \mathbf{X}_s, \forall t \quad (\text{IV-37})$$

Donde  $\mathbf{X}_s$  es el vector posición de los puntos sobre las superficie sólidas que es, en general, una función del tiempo. Además,  $\hat{\mathbf{n}}_s$  es el versor normal en cada punto de la superficie sólida. Teniendo en cuenta (IV-33) y (IV-35), puede escribirse a (IV-37) como

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \nabla \Psi \cdot \hat{\mathbf{n}}_s = \left. \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{\mathbf{n}}} \right|_{\mathbf{X}=\mathbf{X}_s} = (\mathbf{V}_s - \mathbf{V}_\infty) \cdot \hat{\mathbf{n}}_s \quad (\text{IV-38})$$

La ecuación (IV-37) y (IV-38) representan la comúnmente denominada condición de no penetración y, tal como se encuentra expresada, exige la no existencia de flujo a través de las superficies sólidas. No obstante, si el problema así lo requiere, es posible prescribir un valor de velocidad no nulo a través de determinadas superficies introduciendo en el lado derecho de (IV-37) lo que se conoce como velocidad de transpiración. De este modo, se contempla la posibilidad de representar tomas de aire, bocas de entrada y toberas de salida de motores, discos de hélices, entre otros.

La segunda condición de contorno que se debe imponer está asociada al problema fuera de las capas límites y estelas. Esta condición exige que suficientemente lejos de los cuerpos sumergidos, las perturbaciones que estos generan disminuyan de tal modo que se anulen en el infinito. Se escribe entonces que

$$\lim_{|\mathbf{X}-\mathbf{X}_s| \rightarrow \infty} |\mathbf{V}| = \lim_{|\mathbf{X}-\mathbf{X}_s| \rightarrow \infty} |\nabla \Psi| = 0 \quad (\text{IV-39})$$

La expresión (IV-39) comúnmente se denomina condición de regularidad y, dado que  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  se calcula con la ley de Biot-Savart (IV-18), se satisface idénticamente.

A partir de los resultados previos, se concluye que el campo de velocidades del flujo potencial incompresible se determina a partir de la ecuación de Laplace (IV-36), sin necesidad de utilizar la ecuación de movimiento. Esto significa que la velocidad puede calcularse independientemente de la presión del fluido. Además, dado que la velocidad del sonido se considera infinita, la influencia de las condiciones de contorno se propaga instantáneamente en todo el dominio fluido lo que permite calcular en cada instante el campo de velocidades. De esta manera, una vez conocido el campo de velocidades, puede integrarse la ecuación de movimiento (IV-31) para obtener el campo de presiones con la ecuación de Bernoulli.

### IV. 3. 2 Discretización

La aproximación numérica del modelo aerodinámico requiere un proceso de discretización que sea consistente con la formulación matemática antes descrita. El proceso consiste principalmente en la representación discreta de la vorticidad distribuida en sábanas vorticosas adheridas, que representan las

capas límites, y en sábanas vorticosas libres, que hacen lo propio con las estelas. El tratamiento de cada tipo de sábana es algo diferente por lo que se describen por separado a continuación.

### Sábanas vorticosas adheridas

El mecanismo de discretización de las sábanas adheridas parte de la geometría de aquellos cuerpos que se deseen representar como inmersos en el flujo. Luego, se “extraen” de dichos cuerpos las superficies que constituirán los contornos sólidos del dominio. Dado que en general los cuerpos considerados poseen espesores reducidos, las superficies externas, que se encuentran próximas, se colapsan en una única superficie media sobre la cual se genera una sábana vorticososa adherida. A modo de ejemplo, considérese el planeador de la Figura IV-11, donde se identifica la semi-ala izquierda como el cuerpo a modelar, se representa su geometría y se extrae la superficie media como una superficie sustentadora. Naturalmente, para el correcto modelado de la aeronave, el mismo proceso debe repetirse con la semi-ala derecha y los empenajes como superficies sustentadoras, y con el fuselaje, como superficie no sustentadora.

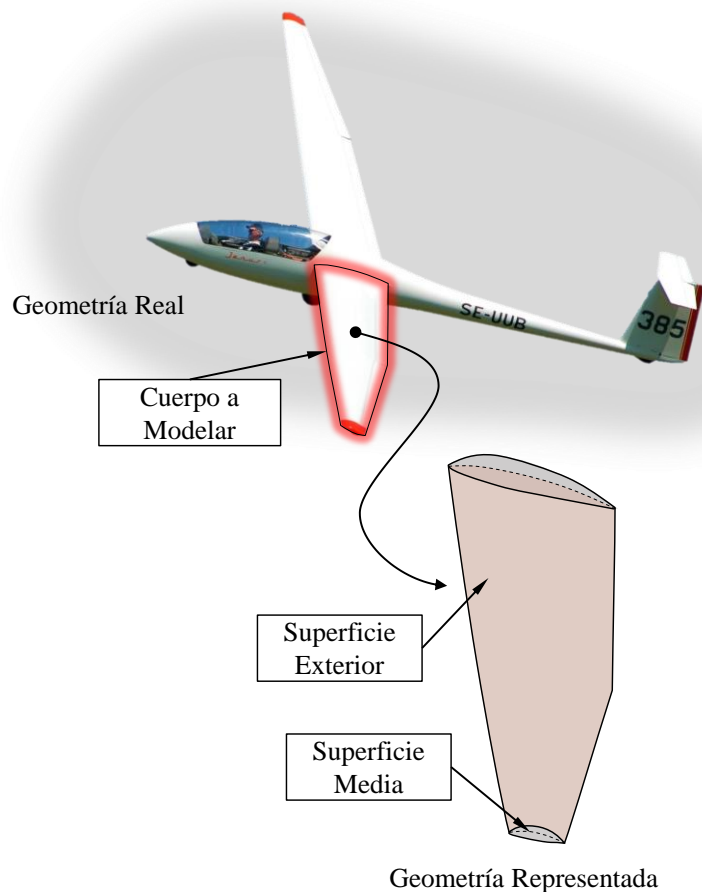


Figura IV-11: Construcción de superficie media para sábana vorticososa adherida. Imagen original: Henk van Capelle [www.Airport-Data.com](http://www.Airport-Data.com).

El siguiente paso consiste en mallar la superficie media del cuerpo para construir una grilla que representará de manera discreta la vorticidad distribuida sobre la sábana, de acuerdo a lo presentado en la Figura IV-12. Esta malla se denomina grilla aerodinámica (GA) y se compone de nodos, segmentos y paneles. Los paneles de la GA son, en general, cuadriláteros formados por cuatro nodos, posicionados en sus vértices, y cuatro segmentos rectos. Además, cuentan con un nodo central, denominado punto de control, y un versor sobre éste que indica la dirección normal a la superficie en dicho punto. Por otro

lado, cada uno de los segmentos de la grilla cuenta con un nodo inicial y un nodo final (correspondientes a vértices consecutivos de un panel), y concentra una porción de la vorticidad distribuida sobre la sábana adherida que se caracteriza por un valor de circulación  $\Gamma$  que es constante a lo largo de su longitud y, en general, función del tiempo. Los detalles sobre el proceso de discretización que da lugar a la circulación asociada a cada segmento de la GA se resumen en el Apéndice IV. B. Alternativamente, consideraciones similares pueden aplicarse a paneles de forma triangular (formados por tres nodos y tres segmentos) [44].

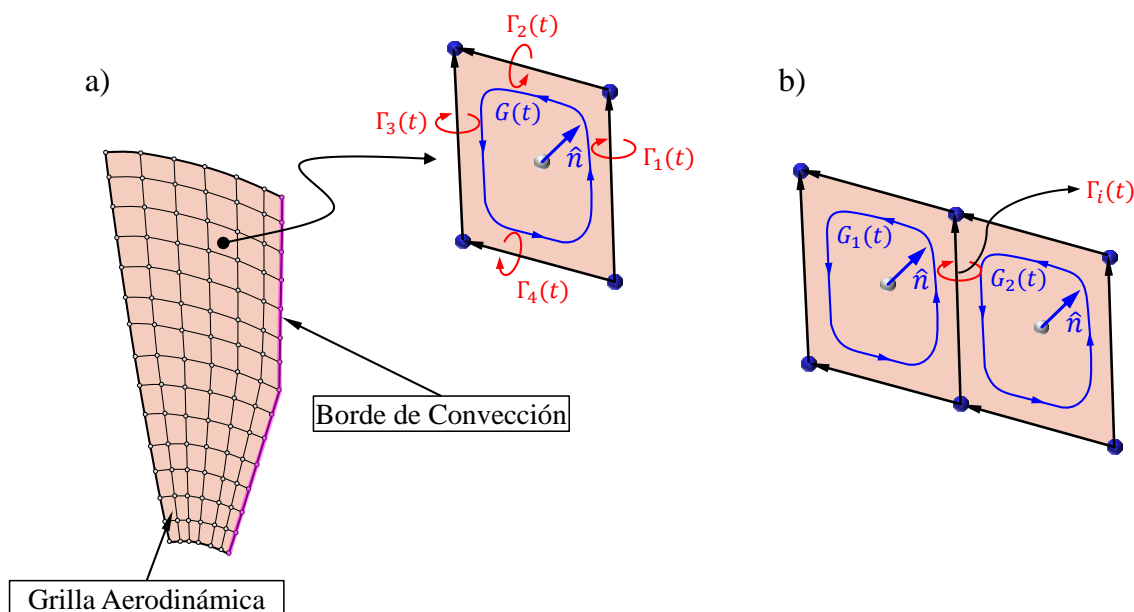


Figura IV-12: Construcción de una grilla aerodinámica, mallado de la superficie. a) Detalle circulación de anillo. b) Aporte de dos anillos colindantes a un segmento.

Sobre cada grilla aerodinámica deben identificarse los bordes de convección. Estos bordes generalmente corresponden a los bordes de fuga (extremos filosos aguas abajo de las superficies) y las punteras libres, y se caracterizan por ser los lugares desde donde se prevé que se generen (o convecten) estelas, dando lugar a la condición de Kutta discutida anteriormente. La identificación de un borde en el modelo discreto consiste en listar los nodos o los segmentos que lo forman construyendo así una entidad adicional de la GA: la línea de convección [44].

Un aspecto fundamental de los paneles que forman las GA que representan sábanas vorticosas adheridas es lo que se denomina circulación de anillo [11]. También representada en la Figura IV-12 a), la circulación de anillo de un panel surge de considerar que los segmentos que lo componen se orientan formando un bucle cerrado (se unen inicios con extremos de manera continua) y que todos poseen la misma circulación. De esta manera, se satisface intrínsecamente la condición de continuidad de las líneas de vorticidad y, desde el punto de vista numérico se reduce la cantidad de incógnitas del problema como se expondrá más adelante. Luego, y de acuerdo a la Figura IV-12 a), la circulación de cada segmento se relaciona con la circulación del anillo del panel como sigue

$$\Gamma_1(t) = \Gamma_2(t) = G(t), \quad \Gamma_3(t) = \Gamma_4(t) = -G(t) \quad (IV-40)$$

Donde se asumió que los segmentos sólo contemplan el aporte de un único panel. En el caso en el que se consideren paneles colindantes (Figura IV-12 b)), el aporte de la circulación de anillo de cada panel debe sumarse a la circulación del segmento que comparten de acuerdo a la convención representada en (IV-40), es decir

$$\Gamma_i(t) = G_1(t) - G_2(t) \quad (\text{IV-41})$$

### Sábanas vorticosas libres

La discretización de las sábanas vorticosas libres, que representan las estelas, se realiza también a través de grillas, pero con algunas particularidades. Dado que se trata de superficies libres de fuerza, las estelas se construyen paso a paso a partir de la condición de arranque impulsivo a medida que el tiempo avanza, en el proceso que se define como convección. De esta manera, la posición de la estela depende de las condiciones locales del flujo en cada paso de tiempo y su vorticidad de aquella presente en el borde de convección. La Figura IV-13 muestra un esquema de este proceso donde en el paso inicial sólo se encuentra la GA correspondiente a la sábana adherida en el dominio fluido y, luego de algunos pasos de tiempo ( $t > 0$ ), se forma una estela asociada a la grilla en cuestión. Debe notarse que, en todo momento, la GA y la estela se encuentran unidas a través de la línea de convección, sin importar a qué movimientos o deformaciones se encuentren sometidas.

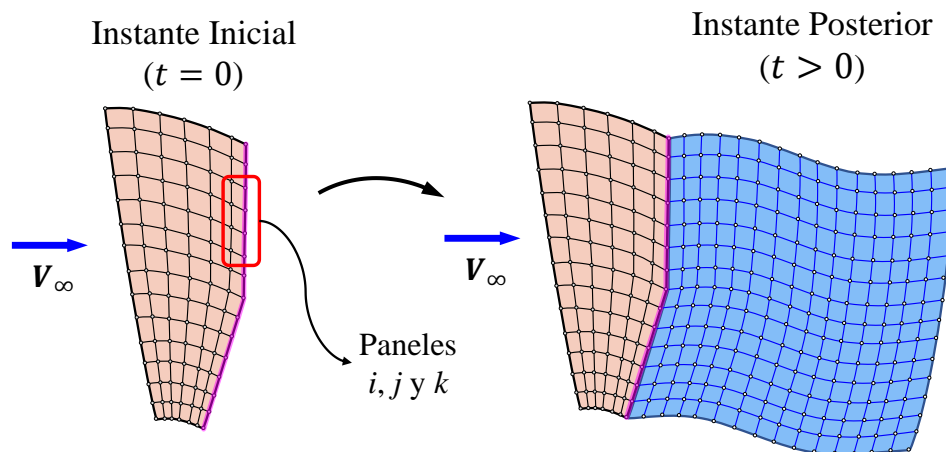


Figura IV-13: Proceso de convección de SVL como estelas.

En la Figura IV-14 se representan en detalle tres de los paneles de la GA. En el paso inicial ( $t = 0$ ) la estela cuenta solo con una línea de segmentos idéntica a la línea de convección y que, debido al contacto permanente entre grilla y estela, se encuentra sobre ésta. En el paso siguiente ( $t = \Delta t$ ), los segmentos creados en el paso inicial se desplazan con la velocidad local del flujo y se generan nuevos segmentos (indicados en rojo en la Figura IV-14). Este desplazamiento se aproxima con una diferencia finita de primer orden hacia adelante aplicada a cada uno de los nodos de la estela, es decir

$$\mathbf{X}_i(t + \Delta t) = \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{U}_i(t) \Delta t \quad (\text{IV-42})$$

Donde  $\mathbf{X}_i$  representa la posición de un nodo genérico  $i$  de la estela,  $\mathbf{U}_i$  es la velocidad local del flujo sobre ese nodo y  $\Delta t$  es el paso de tiempo de la simulación.

La relación entre la circulación de los segmentos creados en la estela y la de aquellos presentes en la GA es tal que cada nuevo bucle de segmentos introducidos en la estela posea la misma circulación de anillo que el panel posicionado en el borde de fuga desde donde se generó, en cada paso de tiempo. Una vez conveccionado a la estela, cada segmento conserva su circulación constante a lo largo del tiempo y sólo se desplaza como un conjunto de partículas materiales con el flujo. De este modo, toda la información necesaria para construir nuevos segmentos en la estela se encuentra en los segmentos posicionados sobre el borde de convección [44]. Para pasos subsiguientes, como por ejemplo  $t = 2\Delta t$ , se genera un nuevo conjunto de segmentos como los indicados en rojo en la figura y, luego de actualizar las posiciones de todos los nodos de la estela con (IV-42), se adicionan a la misma.

En términos generales, el proceso de convección de estelas resulta intrincado, especialmente desde el punto de vista de la implementación computacional del modelo. Sin embargo, bajo estas condiciones se satisfacen las leyes de conservación de vorticidad de Helmholtz y Kelvin presentadas en el Apéndice IV. A.

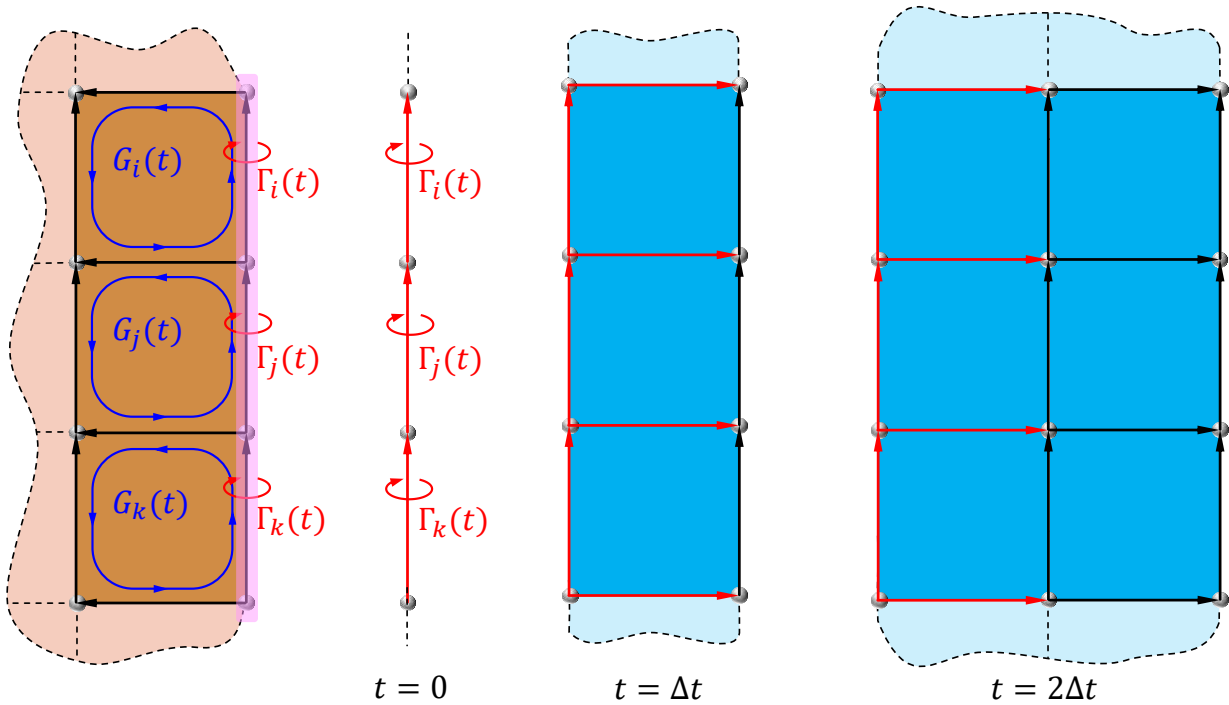


Figura IV-14: Detalle de convección de estelas.

### Entidades del modelo

Poniendo en conjunción la discretización de GA y estelas, el modelo aerodinámico cuenta con entidades bien definidas que se relacionan e interactúan entre sí. Si bien, el uso del término entidades concierne a los aspectos de la implementación computacional que se describen en [44], presentar de esta manera la construcción del modelo aerodinámico facilita el entendimiento de los procesos necesarios para calcular circulaciones y carga aerodinámicas sobre los cuerpos sumergidos. Con esto en perspectiva, la Figura IV-15 muestra las entidades presentes en la implementación del modelo aerodinámico aplicado al caso ejemplo de un cuadricóptero mencionado anteriormente.

### IV. 3. 3 Solución numérica del modelo

Habiendo expuesto el proceso de discretización de la vorticidad presente en las sábanas vorticosas, el problema se reduce a determinar las circulaciones de todos los segmentos que forman las GAs en cada punto del dominio temporal discretizado. Para ello se recurre a la condición de contorno de no penetración dada por (IV-37). La versión discretizada de la condición de no penetración se plantea sobre cada uno de los puntos de control de los paneles de las GAs que representan superficies sólidas. Entonces, para un panel genérico  $i$  se tiene

$$\left( \mathbf{U}(\mathbf{X}_i, t) - \mathbf{V}_{s_i}(t) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(t) = 0 \tag{IV-43}$$

Donde el subíndice  $i$  indica un panel genérico de la grilla. Luego,  $\mathbf{X}_i$ ,  $\mathbf{V}_{s_i}$  y  $\hat{\mathbf{n}}_i$  son la posición, velocidad de la superficie sólida y versor normal del punto de control del panel  $i$ , mientras que  $\mathbf{U}(\mathbf{X}_i, t)$  representa la velocidad local del fluido sobre el punto en cuestión.

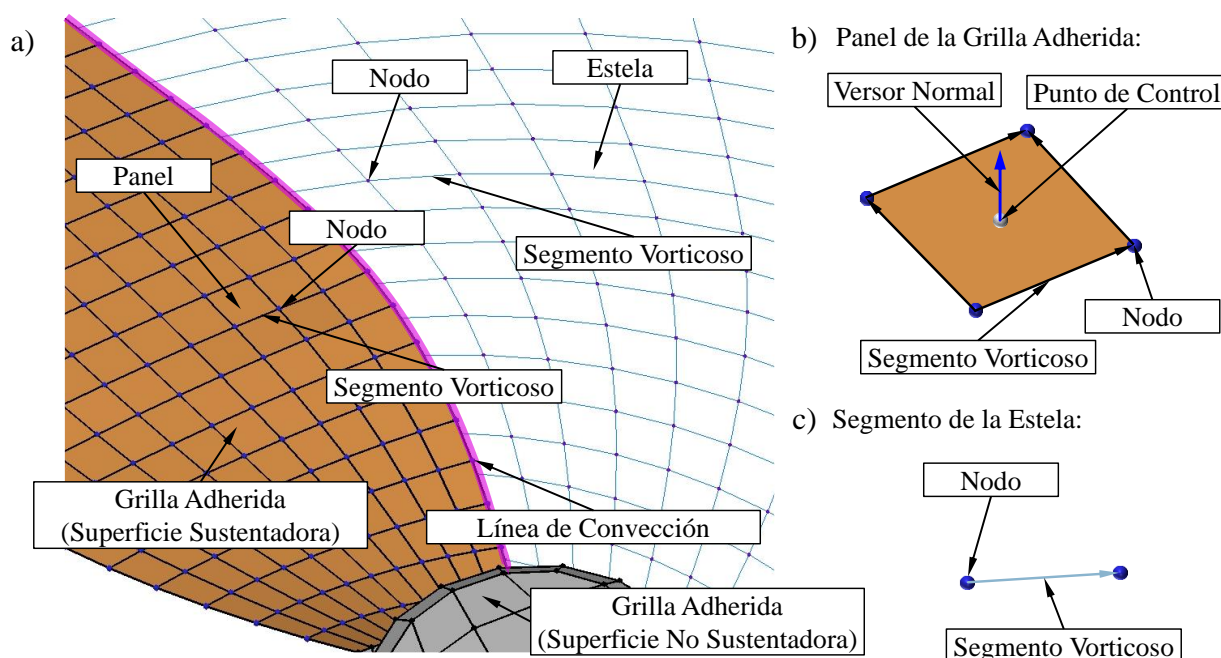


Figura IV-15: Entidades presentes en la implementación del modelo aerodinámico. a) Grilla adherida y estela. b) Panel. c) Segmento.

Teniendo en cuenta (IV-35),  $\mathbf{U}(\mathbf{X}_i, t)$  se considera formada por tres componentes de velocidad. La primera es la velocidad de la corriente libre  $\mathbf{V}_\infty$  que fue oportunamente descrita y no reviste mayor interés, ya que puede asumirse como conocida. Las dos componentes restantes son las que forman el campo de velocidades proveniente de las perturbaciones producidas por los cuerpos sumergidos,  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ . A pesar de que, como se dijo,  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$  responde a la ley de Biot-Savart aplicada a todos los segmentos vorticosos presentes en el dominio, es conveniente separar su efecto en dos partes con base en la naturaleza de las sábanas vorticosas introducidas. Luego, se define  $\mathbf{V}_G(\mathbf{X}, t)$  como la velocidad asociada a la vorticidad presente en las grillas aerodinámicas (sábanas vorticosas adheridas) y  $\mathbf{V}_W(\mathbf{X}, t)$  como la velocidad asociada a la vorticidad presente en las estelas (sábanas vorticosas libres). Resulta, entonces, a partir de reordenar términos desde (IV-43)

$$\mathbf{V}_G(\mathbf{X}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(t) = \left( \mathbf{V}_{s_i}(t) - \mathbf{V}_\infty - \mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, t) \right) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(t) \quad (\text{IV-44})$$

Desde el punto de vista del modelo aerodinámico  $\mathbf{V}_{s_i}(t)$  se asume conocida dado que, en cada paso de tiempo, estará dada por la dinámica (o cinemática) de los cuerpos sólidos descrita por el modelo correspondiente. Algo similar ocurre con los versores normales  $\hat{\mathbf{n}}_i(t)$  ya que acompañan el movimiento de las grillas adheridas a las superficies sólidas.

La determinación del campo de velocidades asociado a la vorticidad presente en las estelas,  $\mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, t)$ , recae en el concepto del arranque impulsivo. Plantear el desarrollo del flujo desde el reposo permite conocer en cada paso de tiempo la posición y la intensidad ( $\Gamma$ ) de todos los segmentos presentes en las estelas. Siguiendo la Figura IV-14 en el instante inicial ( $t = 0$ ) cuando el cuerpo comienza impulsivamente su movimiento aún no se han generado estelas en el dominio, por lo que  $\mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, t) \equiv 0$ . Luego, (IV-44) resulta

$$\mathbf{V}_G(\mathbf{X}_i, t) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(t) = (\mathbf{V}_{s_i}(t) - \mathbf{V}_\infty) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i(t), \quad t = 0 \quad (\text{IV-45})$$

En el siguiente paso de tiempo ( $t = \Delta t$ ), la relación antes mencionada entre los segmentos de la estela y de la grilla adherida permite conocer la intensidad de los segmentos de la estela, y su posición se calcula con (IV-42). Entonces, la velocidad asociada a la vorticidad presente en las estelas sobre cada punto de control se calcula de forma directa con la ley de Biot-Savart (IV-23) o (IV-25) aplicada a todos los segmentos de la estela. Para el punto de control cuya posición es  $\mathbf{X}_i$ , se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, \Delta t) &= \sum_{j=1}^{n_{ws}} \frac{\Gamma_j}{4\pi} \int \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0)}{|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_0|^3} \\ &= \sum_{j=1}^{n_{ws}} \frac{\Gamma_j}{4\pi} \left[ \frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|(|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2| + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2) + (c_r L)^2} \right]_j \end{aligned} \quad (\text{IV-46})$$

Donde  $n_{ws}$  es la cantidad de segmentos presentes en la estela en  $t = \Delta t$ ,  $\Gamma_j$  es la circulación conocida del segmento  $j$ , y los parámetros  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  y  $L$  deben calcularse en función de la posición del segmento  $j$  que es también conocida.

Lo anterior es válido para todos los pasos de tiempo subsiguientes, de manera tal que  $\mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, t)$  será siempre conocida. Evidentemente a medida que el tiempo avanza la cantidad de segmentos en la estela se incrementa y la posiciones de todos ellos deben actualizarse progresivamente con (IV-42). De ahí que suele decirse que la estela almacena la historia del movimiento de los cuerpos y del fluido a través del tiempo.

Volviendo a (IV-44), lo que resta por determinar es el término de la velocidad asociada a la vorticidad presente en las grillas aerodinámicas. El valor del campo  $\mathbf{V}_G(\mathbf{X}, t)$  está directamente relacionado con la intensidad de los segmentos de las grillas adheridas que son desconocidas en cada paso de tiempo. Luego, el problema consiste en calcular los valores de circulación de los segmentos para que la velocidad asociada a ellos cumpla con la condición de no penetración en todos los puntos de control definidos sobre los paneles. En este proceso existe una influencia cruzada entre paneles y cobra importancia la circulación de anillo definida sobre cada uno de ellos.

De acuerdo a lo ilustrado en la Figura IV-16, considérese un panel genérico  $i$  sobre cuyo punto de control se calcula la velocidad asociada a los segmentos de otro panel genérico  $j$ , denominada  $\mathbf{V}_{ij}$ . En este caso, considerando individualmente cada uno de los cuatro segmentos del panel  $j$  se tiene

$$\mathbf{V}_{ij} = \sum_{k=1}^4 \frac{\Gamma_k}{4\pi} \left[ \frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2)}{|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2|(|\mathbf{R}_1||\mathbf{R}_2| + \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{R}_2) + (c_r L)^2} \right]_k = \sum_{k=1}^4 \Gamma_k \mathbf{B}_k \quad (\text{IV-47})$$

Donde el subíndice  $k$  corresponde a cada uno de los segmentos, se adoptó la expresión (IV-25) para la ley de Biot-Savart y se agruparon los factores dependientes de  $\mathbf{R}_1$  y  $\mathbf{R}_2$  en  $\mathbf{B}_k$ .

Ahora bien, si en lugar de calcular la influencia individual de cada segmento del panel  $j$  se recurre a la circulación de anillo, la ecuación (IV-47) puede escribirse como

$$\mathbf{V}_{ij} = \sum_{k=1}^4 \Gamma_k \mathbf{B}_k = G_j \sum_{k=1}^4 \mathbf{B}_k = G_j \mathbf{a}_{ij} \quad (\text{IV-48})$$

Donde según la definición de circulación de anillo se tiene  $G_j = \Gamma_k$  para todo  $k$ , y la sumatoria de los términos  $\mathbf{B}_k$  se agrupó en  $\mathbf{a}_{ij}$ , donde no aplica la notación indicial. Luego, al considerar la influencia de todos los paneles presentes en el dominio, la velocidad sobre el punto de control del panel  $i$  será

$$\mathbf{V}_G(\mathbf{X}_i) = \sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{V}_{ij} \quad (\text{IV-49})$$

Donde  $n_p$  es la cantidad total de paneles.

Llevando (IV-48) y (IV-49) a (IV-44), se tiene

$$\sum_{j=1}^{n_p} \mathbf{V}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i = (\mathbf{V}_{s_i} - \mathbf{V}_{\infty} - \mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i, t)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (\text{IV-50})$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} G_j \mathbf{a}_{ij} \cdot \hat{\mathbf{n}}_i = (\mathbf{V}_{s_i} - \mathbf{V}_{\infty} - \mathbf{V}_W(\mathbf{X}_i)) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i \quad (\text{IV-51})$$

$$\sum_{j=1}^{n_p} G_j A_{ij} = RHS_i \quad (\text{IV-52})$$

Donde se omitió la dependencia explícita con el tiempo y todo el término del lado derecho se agrupó en  $RHS_i$ . Además, se definió el coeficiente de influencia  $A_{ij}$  que representa la velocidad sobre el punto de control del panel  $i$  proyectada sobre su normal, asociada a la circulación del panel  $j$  para  $G_j = 1$ .

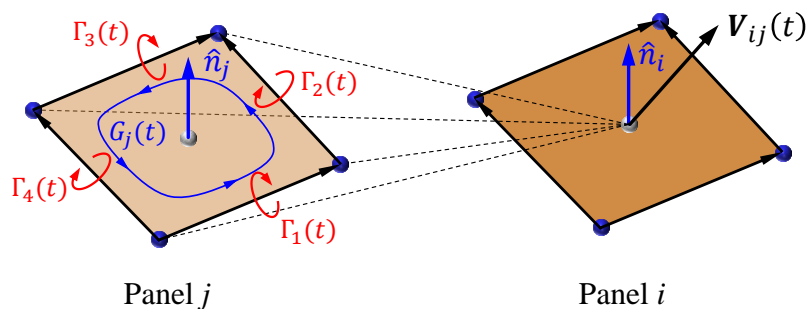


Figura IV-16: Influencia de la circulación asociada al panel  $j$  sobre el panel  $i$ .

La ecuación (IV-52) representa la condición de no penetración sobre el punto de control del panel  $i$  y, por lo tanto, una ecuación análoga debe plantearse sobre todos los paneles presentes en el dominio, esto es para todas las grillas que se consideren en la simulación. De este modo, se genera un sistema de  $n_p$  ecuaciones (una por cada punto de control) y  $n_p$  incógnitas (una por cada  $G_j$ ) que, por estar basado en la ley de Biot-Savart, resulta lineal. Puede expresarse entonces,



$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^{n_p} G_j A_{1j} &= RHS_1 \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=1}^{n_p} G_j A_{ij} &= RHS_i \\
 &\vdots \\
 \sum_{j=1}^{n_p} G_j A_{n_p j} &= RHS_{n_p}
 \end{aligned} \tag{IV-53}$$

O bien, en forma matricial

$$\mathbf{A} \mathbf{G} = \mathbf{RHS} \tag{IV-54}$$

Donde  $\mathbf{A}$  se denomina matriz de coeficientes de influencia y es

$$\mathbf{A} = [A_{ij}] = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1i} & \cdots & A_{1n_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ii} & \cdots & A_{in_p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n_p 1} & \cdots & A_{n_p i} & \cdots & A_{n_p n_p} \end{bmatrix} \tag{IV-55}$$

Además, se tienen los vectores

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_j \\ \vdots \\ G_{n_p} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{RHS} = \begin{Bmatrix} RHS_1 \\ \vdots \\ RHS_i \\ \vdots \\ RHS_{n_p} \end{Bmatrix} \tag{IV-56}$$

La solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales dado en (IV-54) arroja los valores de circulación de anillo de los  $n_p$  paneles para que la condición de no penetración en los  $n_p$  puntos de control se satisfaga, en el paso de tiempo actual. El paso siguiente consiste en determinar las intensidades de los segmentos que forman el panel y para eso se emplean de forma directa relaciones (IV-40) y (IV-41). Por último, conociendo los valores de intensidad de los segmentos de las grillas adheridas en el paso de tiempo actual, se realiza la convección de estela como se describió anteriormente y se inicia el paso de tiempo siguiente.

### IV. 3. 4 Campo de presiones y cargas aerodinámicas

Como se expuso durante la descripción de las ecuaciones de gobierno, el modelo aerodinámico no utiliza de forma directa la ecuación de movimiento de Euler (IV-31) para describir el flujo. Sin embargo, para calcular el campo de presiones y las cargas aerodinámicas sobre los cuerpos sumergidos, se recurre a una ley de conservación dada por la primera integral de la ecuación de Euler: la ecuación de Bernoulli.

La versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli (basada en (IV-31)) se escribe como ([11], [87])

$$\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + \frac{1}{2} \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) + \frac{p(\mathbf{X}, t)}{\rho} = H(t) \quad (\text{IV-57})$$

Donde, a diferencia de (IV-31), se utilizó el potencial del campo de velocidades total, es decir

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{V}_{\infty} + \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \quad (\text{IV-58})$$

Por otro lado,  $H(t)$  es una función del tiempo espacialmente uniforme que se define en función de la condición de regularidad impuesta al problema. De manera similar a la ya introducida velocidad de la corriente libre  $\mathbf{V}_{\infty}$ , se fijan los valores estándares (o regulares) que toman los campos involucrados en (IV-57) suficientemente lejos de las perturbaciones introducidas por los cuerpos al flujo,

$$\begin{aligned} \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{X}, t) &= \Phi_{\infty}, & \forall t \\ \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} p(\mathbf{X}, t) &= p_{\infty}, & \forall t \end{aligned} \quad (\text{IV-59})$$

Luego, se define

$$H(t) = \frac{1}{2} \mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{V}_{\infty} + \frac{p_{\infty}}{\rho}, \quad \forall t \quad (\text{IV-60})$$

Reemplazando (IV-60) y (IV-58) en (IV-57) y reordenado resulta

$$\frac{p - p_{\infty}}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{U}{V_{\infty}} \right)^2 - \frac{2}{V_{\infty}^2} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{IV-61})$$

Donde se omitieron las dependencias explícitas y se tuvo en cuenta que

$$\mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{V}_{\infty} = |\mathbf{V}_{\infty}|^2 = V_{\infty}^2, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = |\mathbf{U}|^2 = U^2 \quad (\text{IV-62})$$

A partir de (IV-61) se introduce un coeficiente adimensional que relaciona la presión relativa en un punto con la presión dinámica en el infinito: el coeficiente de presión;

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\rho \frac{1}{2} V_{\infty}^2} = 1 - \left( \frac{U}{V_{\infty}} \right)^2 - \frac{2}{V_{\infty}^2} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (\text{IV-63})$$

El objetivo ahora es conocer el salto o diferencia en la presión a través de las sábanas vorticosas adheridas lo cual conducirá a determinar las cargas aerodinámicas que actúan sobre los cuerpos sumergidos. Para eso se consideran dos puntos infinitamente próximos a una sábana vorticosa, uno apenas por encima (identificado con el subíndice  $U$ ) y otro apenas por debajo (identificado con el subíndice  $L$ ). Luego, evaluando (IV-63) en ambos puntos y calculando la diferencia se obtiene

$$\Delta C_p = C_{p_L} - C_{p_U} = \frac{1}{V_{\infty}^2} \left( U_U^2 - U_L^2 + 2 \left( \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_U} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}_L} \right) \right) \quad (\text{IV-64})$$

La evaluación de (IV-64) deberá realizarse a partir de la formulación discreta del problema, es decir, sobre cada punto de control y en función de la vorticidad discretizada en cada panel de las grillas aerodinámicas. Esto se logra analizando cada uno de los términos que componen el  $\Delta C_p$  para

transformarlos adecuadamente en funciones de las circulaciones de anillo de los paneles y de las intensidades de los segmentos, evaluadas en cada punto de control.

Al considerar los primeros dos términos, puede escribirse

$$U_U^2 - U_L^2 = \mathbf{U}_U \cdot \mathbf{U}_U - \mathbf{U}_L \cdot \mathbf{U}_L = (\mathbf{U}_U + \mathbf{U}_L) \cdot (\mathbf{U}_U - \mathbf{U}_L) \quad (\text{IV-65})$$

Por otro lado, introduciendo el salto en la velocidad tangencial  $\Delta \mathbf{V}_t$  que caracteriza las sábanas vorticosas descrito oportunamente, la velocidad por encima y por debajo de una sábana pueden escribirse como [11]

$$\mathbf{U}_U = \mathbf{V}_m + \frac{\Delta \mathbf{V}_t}{2}, \quad \mathbf{U}_L = \mathbf{V}_m - \frac{\Delta \mathbf{V}_t}{2} \quad (\text{IV-66})$$

Donde  $\mathbf{V}_m$  se define como el valor de velocidad sobre el punto medio entre  $\mathbf{X}_L$  y  $\mathbf{X}_U$  que se encuentra sobre la sábana vorticiosa y no considera la vorticidad local. Luego, reemplazando (IV-66) en (IV-65) resulta

$$U_U^2 - U_L^2 = 2\mathbf{V}_m \cdot \Delta \mathbf{V}_t \quad (\text{IV-67})$$

Naturalmente, (IV-67) debe evaluarse sobre cada punto de control, lo cual no reviste mayores complicaciones para  $\mathbf{V}_m$ . Sin embargo, para el cálculo del salto en la velocidad tangencial, debe considerarse (IV-30) en conjunción con lo expuesto en el Apéndice IV. B. Luego, el salto en la velocidad tangencial a través de la sábana vorticiosa adherida sobre un punto de control genérico resulta

$$\Delta \mathbf{V}_t = \boldsymbol{\gamma} \times \hat{\mathbf{n}} \cong -\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\gamma}_{cp} = -\hat{\mathbf{n}} \times \sum_{k=1}^4 \frac{2\alpha_k \Gamma_k L_k \hat{\mathbf{e}}_k}{A_{shk}} \quad (\text{IV-68})$$

Donde  $\hat{\mathbf{n}}$  es la normal al panel en el punto de control, el signo  $\cong$  indica que se introdujo la aproximación proveniente de la discretización de la vorticidad distribuida y se tuvo en cuenta (IV. B.6). Además, la sumatoria recorre con el índice  $k$  los cuatro segmentos que forman un panel,  $A_{shk}$  es el área de los paneles que comparten el segmento  $k$ ,  $\Gamma_k$  es su intensidad,  $L_k$  es su longitud,  $\hat{\mathbf{e}}_k$  es el versor que apunta en la dirección del segmento, y  $\alpha_k$  es la relación entre el área del panel y  $A_{shk}$ .

Para calcular los últimos términos de (IV-64) debe analizarse la derivada temporal del potencial de velocidades y su variación a través de la sábana vorticiosa. Este proceso se describe en el Apéndice IV. C y, para un punto de control genérico resulta

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_U} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{\mathbf{X}_L} \right) = \frac{\mathcal{D}G(t)}{\mathcal{D}t} - \Delta \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{V}_s \quad (\text{IV-69})$$

Donde  $\Delta \mathbf{V}_t$  es el salto en la velocidad tangencial a través de la sábana en el punto de control y  $\mathbf{V}_s$  es la velocidad que tiene la superficie sólida adherida a la sábana vorticiosa en el punto de control, respecto a una referencia inercial. Por otro lado, el primer término en (IV-69) representa la derivada sustancial de la vorticidad de anillo del panel en consideración  $G(t)$  y, en el esquema numérico, se aproxima por una diferencia finita de primer orden hacia atrás, es decir

$$\frac{\mathcal{D}G(t)}{\mathcal{D}t} \cong \frac{G(t) - G(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad (\text{IV-70})$$

Finalmente, utilizando (IV-69) y (IV-67) en (IV-64) resulta

$$\Delta C_p = \frac{2}{V_\infty^2} \left( \mathbf{V}_m \cdot \Delta \mathbf{V}_t + \frac{\mathcal{D}G(t)}{\mathcal{D}t} - \Delta \mathbf{V}_t \cdot \mathbf{V}_s \right) \quad (\text{IV-71})$$

Donde deben utilizarse las expresiones obtenidas para cada uno de los términos.

# Apéndices del Capítulo IV

## Apéndice IV. A : Teoremas sobre vorticidad

En esta sección anexa se resumen algunos de los teoremas básicos sobre vorticidad que respaldan las ecuaciones básicas del modelo aerodinámico desarrollado: el Teorema de Circulación de Kelvin y los Teoremas de Vorticidad de Helmholtz. Es importante destacar que estos teoremas son válidos en las regiones del flujo donde los efectos viscosos son despreciables y la relación entre presión y densidad es simplemente valuada.

### Teorema de Circulación de Kelvin:

También conocido como *Teorema de Vorticidad de Thomson*, parte de la definición de circulación alrededor de una línea material cerrada  $c(t)$ , es decir

$$\Gamma = \oint_{c(t)} \mathbf{V}(\mathbf{X}, t) \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{IV. A.1})$$

Para calcular la tasa de cambio de la circulación se aplica a (IV. A.1) el concepto de derivación sustancial dado en (IV-2). Esto es,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \frac{D}{Dt} \oint_{c(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = \oint_{c(t)} \frac{D\mathbf{V}}{Dt} \cdot d\mathbf{X} + \oint_{c(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} \quad (\text{IV. A.2})$$

Donde se distribuyó la derivación sustancial y se omitieron las dependencias explícitas en el integrando.

Analizando el segundo término del último miembro de (IV. A.2) se escribe

$$\oint_{c(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{V} = \oint_{c(t)} d\left(\frac{1}{2}\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}\right) = 0 \quad (\text{IV. A.3})$$

Donde se evalúa la integral sobre una curva cerrada (cuyo punto inicial y final coinciden) del diferencial total de una función simplemente valuada.

En el término restante de (IV. A.2) se aplica (IV-7), lo que resulta en

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = \oint_{c(t)} \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}_\rho\right) \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{IV. A.4})$$

El objetivo es establecer las condiciones para las cuales la derivada sustancial de la circulación se anula. Esto ocurre, en primer lugar, para un fluido de densidad homogénea y barotrópico para el cual [87]

$$-\frac{1}{\rho}\nabla p \cdot d\mathbf{X} = dp \quad (\text{IV. A.5})$$

En segundo lugar, si las fuerzas cuerpo que actúan sobre el fluido son irrotacionales, es decir, existe una función potencial  $F$  tal que

$$\mathbf{F}_\rho = -\nabla F \quad (\text{IV. A.6})$$

Luego,

$$\oint_{c(t)} \left( -\frac{1}{\rho}\nabla p + \mathbf{F}_\rho \right) \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (\text{IV. A.7})$$

Lo que, finalmente, permite inferir que para un fluido no viscoso y barotrópico, la circulación alrededor de una línea material se mantiene constante para todo tiempo si las fuerzas cuerpo por unidad de masa que sobre él actúan derivan de un potencial. Siendo, entonces,

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (\text{IV. A.8})$$

### Primer Teorema de Helmholtz:

Teniendo en cuenta (IV. A.1) y aplicando el teorema de Stokes, resulta

$$\Gamma = \oint_{c(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = \iint_{S(t)} (\nabla \times \mathbf{V}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \iint_{S(t)} \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (\text{IV. A.9})$$

Donde  $S(t)$  es una superficie de forma arbitraria encerrada por la curva  $c(t)$ , se introdujo que  $\nabla \times \mathbf{V} = \boldsymbol{\Omega}$ , y  $\hat{\mathbf{n}}$  es el versor normal a la superficie en cada punto.

Considérese un tubo vorticoso (formado por líneas tangentes al campo de vorticidad en cada punto encerradas por una curva  $c(t)$ ) como el de la Figura IV. A-1, sobre el cual se calcula la integral sobre la curva cerrada representada. Dado que por definición  $\boldsymbol{\Omega}$  es perpendicular a  $\hat{\mathbf{n}}$  en cada punto, la integral proveniente del teorema de Stokes de (IV. A.9) se anula, con lo cual y de acuerdo a la Figura IV. A-1

$$\Gamma = \oint_{c(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = \int_{c_1(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} + \int_{c_2(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} + \int_{c_3(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} + \int_{c_4(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (\text{IV. A.10})$$

Donde  $C = c_1 \cup c_2 \cup c_3 \cup c_4$ .

Asumiendo que existe una distancia infinitesimal entre  $c_3$  y  $c_4$ , sus contribuciones se cancelan mutuamente y,  $c_1$  y  $c_2$  pueden considerarse curvas cerradas. Luego, si se invierte la dirección de la curva  $c_2$ , lo que implica un cambio en el signo de la integral correspondiente, se arriba al Primer Teorema de Helmholtz

$$\oint_{c_1(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = \oint_{c_2(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} \quad (\text{IV. A.11})$$

(IV. A.11) indica que la circulación alrededor de un tubo vorticoso es constante a lo largo de toda su longitud. Esto implica, además, que un tubo vorticoso no puede iniciar o finalizar en el seno del flujo, al igual que ocurre con los tubos de corriente.

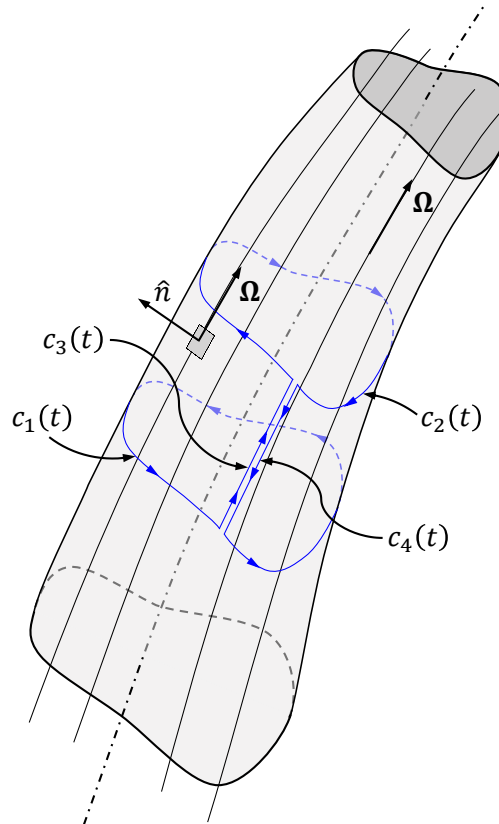


Figura IV. A-1: Tubo vorticoso.

### Segundo Teorema de Helmholtz

Tomando como referencia el esquema de la Figura IV. A-2, considérese un tubo vorticoso en un instante de tiempo  $t = t_0$  y una curva cerrada sobre su superficie  $c$ . Por el teorema de Stokes, como se mencionó anteriormente, la circulación alrededor de dicha curva es nula. Es decir,

$$\Gamma = \oint_{c(t_0)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{X} = 0 \quad (\text{IV. A.12})$$

En otro instante de tiempo, sea  $t = t_1$ , la circulación sobre la curva  $c$  deberá mantenerse constante e igual a cero, de acuerdo al teorema de circulación de Kelvin (IV. A.8). Dado que las partículas que componen a la curva  $c$  serán exactamente las mismas en ambos instantes, se concluye que deberán estar en la superficie del tubo vorticoso.

Finalmente, el segundo teorema de Helmholtz afirma que un tubo vorticoso es un tubo material, es decir, que siempre se compone de las mismas partículas materiales.

### Tercer Teorema de Helmholtz

Este teorema enuncia que la circulación alrededor de un tubo vorticoso se mantiene constante en el tiempo y su deducción es directa a partir de los anteriores. Una línea cerrada que genera un tubo

vorticoso es, por el segundo teorema de Helmholtz, una línea material cuya circulación, por el teorema de Kelvin, se mantiene constante.

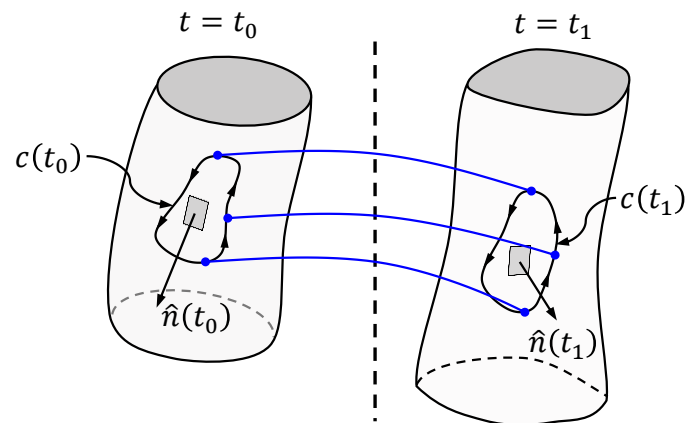


Figura IV. A-2: Evolución temporal de un tubo vorticoso.



## Apéndice IV. B : Discretización de Sábanas Vorticosas

En este apéndice se describe el proceso de construcción de una grilla aerodinámica de segmentos a partir de una sábana vorticosa con vorticidad distribuida y cómo se discretiza tal vorticidad en la circulación de cada segmento. Para ello, considérese una sábana vorticosa  $S_V$  con vorticidad distribuida  $\boldsymbol{\gamma}$  a la cual se le adhiere un sistema de referencia coordenado bidimensional  $\mathcal{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$ , como se representa en la Figura IV. B-1. Sobre  $S_V$  se traza una grilla de segmentos formando paneles rectangulares tan regulares como sea posible y siguiendo las direcciones de  $\mathcal{E}$ . Además, perpendicular a  $S_V$  se define una superficie  $\Sigma$  de ancho  $L_1$  y de alto  $\varepsilon$ . De acuerdo a (IV. A.9), la circulación a través de  $\Sigma$  resulta

$$\Gamma = \iint_{\Sigma} \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, d\Sigma = \int_{L_1} \int_{\varepsilon} \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \, d\varepsilon \, dL_1 \quad (\text{IV. B.1})$$

Donde, por construcción,  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_2$  y la integral sobre la superficie puede dividirse en integrales sobre los lados.

Como la vorticidad sólo se encuentra sobre la sábana, la integral en  $\varepsilon$  puede extraerse quedando

$$\Gamma = \int_{L_1} \boldsymbol{\Omega} \varepsilon \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \, dL_1 \quad (\text{IV. B.2})$$

Ahora, teniendo en cuenta la definición de sábana vorticosa dada en (IV-27) y debido a la arbitrariedad de  $\varepsilon$ , se tiene

$$\Gamma = \int_{L_1} \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 \, dL_1 = \int_{L_1} \gamma_2 \, dL_1 \quad (\text{IV. B.3})$$

Donde se definió  $\gamma_2 = \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$  como la vorticidad proyectada según la dirección de  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Debido a que  $\gamma_2$  no es en general uniforme, pero si es continua, la longitud  $L_1$  puede considerarse como aquel valor para el cual se obtiene de la integral un valor medio  $\bar{\gamma}_2$ , es decir

$$\Gamma = \int_{L_1} \gamma_2 \, dL_1 = \bar{\gamma}_2 L_1 \quad (\text{IV. B.4})$$

Con lo que, para una distribución de vorticidad más o menos uniforme puede aproximarse

$$L_1 = \frac{A_{sh}}{2L_2}, \quad A_{sh} = \sum_i A_i = A_1 + A_2 \quad (\text{IV. B.5})$$

Donde  $A_{sh}$  es la suma de las áreas de los paneles que comparten el segmento de intensidad  $\Gamma$  y  $L_2$  es la longitud del segmento.

A partir de lo anterior, se infiere que cada segmento vorticoso concentra una porción de la vorticidad distribuida en cada uno de los paneles que lo colindan, proyectada en su dirección. En particular, si dichos paneles son geoméricamente idénticos, la longitud  $L_1$  será igual a su ancho. En el caso de que se traten segmentos que se encuentran en los bordes de las grillas (esto es que son adyacentes a un único panel),  $\Gamma$  concentrará la porción de vorticidad de un único panel y tal reducción

debe considerarse. Un proceso análogo puede aplicarse en la dirección de  $\hat{e}_1$  para conformar segmentos perpendiculares.

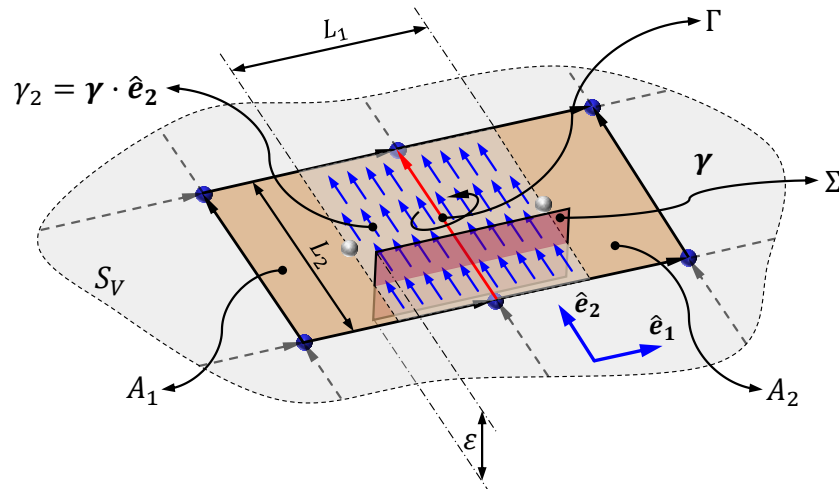


Figura IV. B-1: Discretización de la vorticidad distribuida sobre una sábana vorticosa.

Por otro lado, si bien el valor de  $\Gamma$  de cada segmento es la incógnita del problema numérico, la representación de la vorticidad distribuida reviste importancia en el cálculo de cargas aerodinámicas. En este sentido, es necesario definir un vector  $\boldsymbol{\gamma}_{cp}$  que represente la vorticidad distribuida sobre el panel y se ubique sobre su punto de control. Siguiendo la Figura IV. B-1, se plantea

$$\boldsymbol{\gamma}_{cp} = \sum_{k=1}^4 \frac{2\alpha_k \Gamma_k L_k \hat{e}_k}{A_{sh_k}} \quad (\text{IV. B.6})$$

Donde la sumatoria recorre con el índice  $k$  los cuatro segmentos que forman un panel,  $A_{sh_k}$  es el área de los paneles que comparten el segmento  $k$ ,  $\Gamma_k$  es su intensidad,  $L_k$  es su longitud,  $\hat{e}_k$  es el versor que apunta en la dirección del segmento, y  $\alpha_k$  es la relación de áreas del segmento. Esta última definida a partir del área del panel  $A_k$  como

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A_{sh_k}} \quad (\text{IV. B.7})$$

Cada término de la sumatoria en (IV. B.6) representa el aporte de la vorticidad concentrada que cada segmento hace al panel del que forma parte. Puede notarse que la relación de áreas  $\alpha_k = 1/2$  para paneles colindantes idénticos y es una buena aproximación para mallas más o menos regulares.

## Apéndice IV. C : El término inestacionario en la ecuación de Bernoulli

En esta sección anexa se exponen los pasos para calcular el último término de (IV-64) que corresponde a la porción inestacionaria de la ecuación de Bernoulli,

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{X_U} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{X_L} \quad (IV. C.1)$$

Considérese la expansión en serie del Taylor truncada al primer orden de la función potencial  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  alrededor de un punto  $(\mathbf{X}_p, t_p)$ , es decir

$$\Phi(\mathbf{X}_p, t_p) \cong \Phi(\mathbf{X}, t) + \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot (\mathbf{X}_p - \mathbf{X}) + \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) (t_p - t) \quad (IV. C.2)$$

Sin pérdida de generalidad puede asumirse que tanto  $\mathbf{X}_p$  y  $\mathbf{X}$  como  $t_p$  y  $t$  están próximos entre sí, de forma tal que

$$\mathbf{X}_p - \mathbf{X} = \Delta \mathbf{X}, \quad t_p - t = \Delta t \quad (IV. C.3)$$

Donde  $\Delta \mathbf{X}$  y  $\Delta t$  son pequeños. En efecto, puede considerarse que  $\mathbf{X}$  y  $\mathbf{X}_p$  son dos posiciones sucesivas de un punto fijo sobre la superficie sólida adherida a una sábana vorticosa en los tiempos  $t$  y  $t_p$  respectivamente, como se indica en la Figura IV. C-1.

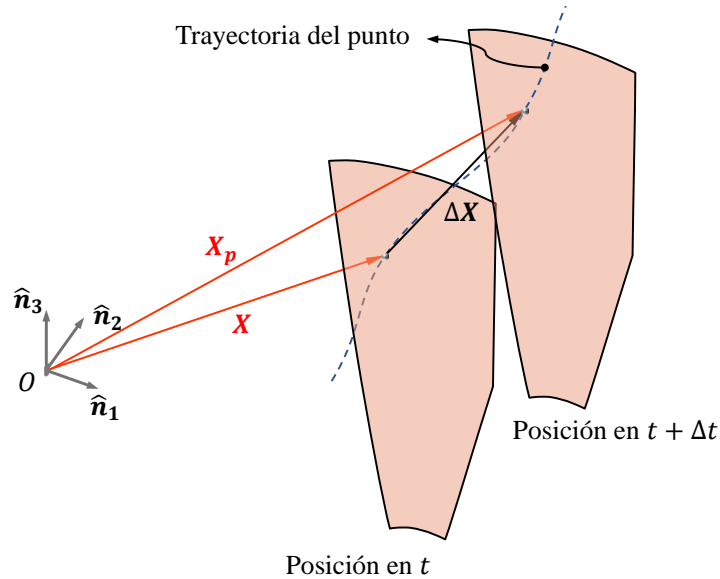


Figura IV. C-1: Desplazamiento de un punto fijo sobre una SVA en un intervalo de tiempo.

Reemplazando (IV. C.3) en (IV. C.2), la derivada del potencial resulta

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{\Phi(\mathbf{X}_p, t_p) - \Phi(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} - \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta t} \quad (IV. C.4)$$

En el límite en el que  $\Delta t$  tiende a cero, de (IV. C.4) puede escribirse que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{X}}{\Delta t} = \mathbf{V}_s \quad (IV. C.5)$$

Donde  $\mathbf{V}_s$  velocidad que tiene la superficie sólida adherida a la sábana vorticiosa en el punto. Además,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Phi(\mathbf{X}_p, t_p) - \Phi(\mathbf{X}, t)}{\Delta t} = \frac{D\Phi(\mathbf{X}, t)}{Dt} \quad (\text{IV. C.6})$$

Donde  $\frac{D\Phi(\mathbf{X}, t)}{Dt}$  es la derivada sustancial del potencial  $\Phi(\mathbf{X}, t)$  siguiendo un punto fijo en la superficie sólida en movimiento. Resulta entonces

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) = \frac{D\Phi(\mathbf{X}, t)}{Dt} - \nabla \Phi(\mathbf{X}, t) \cdot \mathbf{V}_s \quad (\text{IV. C.7})$$

Volviendo a (IV. C.1) se tiene

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_U} - \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}_L} = \frac{D}{Dt} (\Phi(\mathbf{X}_U, t) - \Phi(\mathbf{X}_L, t)) - (\nabla \Phi(\mathbf{X}_U, t) - \nabla \Phi(\mathbf{X}_L, t)) \cdot \mathbf{V}_s \quad (\text{IV. C.8})$$

Donde se asumió que debido a su proximidad ambos puntos poseen la misma velocidad  $\mathbf{V}_s$ .

Teniendo en cuenta la definición del potencial de velocidad y recurriendo a (IV-66), del último término de (IV. C.8) se tiene

$$\nabla \Phi(\mathbf{X}_U, t) - \nabla \Phi(\mathbf{X}_L, t) = \mathbf{U}_U - \mathbf{U}_L = \Delta \mathbf{V}_t \quad (\text{IV. C.9})$$

Por otro lado, y siguiendo la Figura IV. C-2, la diferencia entre los potenciales puede calcularse como

$$\Phi(\mathbf{X}_U, t) - \Phi(\mathbf{X}_L, t) = \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = \Gamma(t) \quad (\text{IV. C.10})$$

Donde  $C(t)$  es una curva que va desde el punto en  $\mathbf{X}_L$  hasta el punto en  $\mathbf{X}_U$  alrededor del borde de ataque. Surge entonces, por el teorema de Stokes, que  $\Gamma(t)$  tiene el mismo valor de circulación que la circulación de anillo  $G(t)$  del panel que contiene al punto de control. Cabe destacar que este procedimiento puede realizarse siempre y cuando la superficie posea un borde libre del que no se convecten estelas.

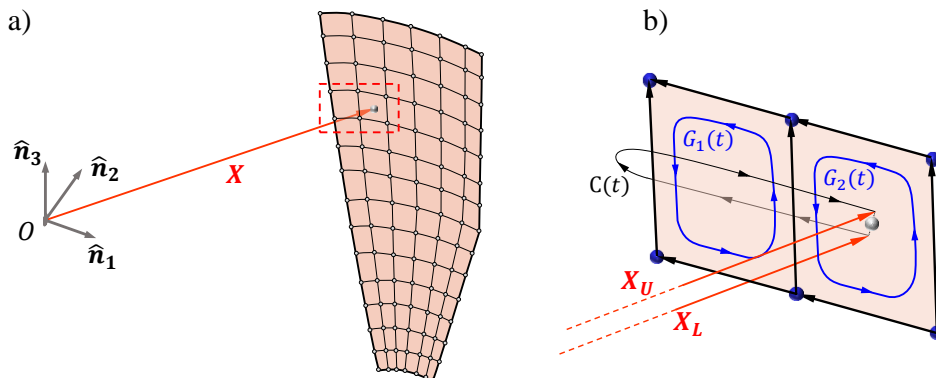


Figura IV. C-2: Trayectoria de integración para el cálculo de la circulación.

# Capítulo V: Modelo de Interacción y Aspectos de Implementación



La estrategia de co-simulación adoptada en este trabajo permite la implementación de un enfoque particionado que divide el sistema dinámico en dos subsistemas representados por modelos distintos y con entornos de simulación propios. En este contexto, un componente fundamental, y quizás el más importante, para resolver un problema aeroelástico lo constituye el modelo de interacción. El modelo de interacción comprende todos los mecanismos y estrategias que permiten transferir información entre el componente que modela la dinámica estructural y el componente que modela la dinámica del fluido. Asimismo, el modelo de interacción debe ser capaz de capturar los efectos que surgen de la interacción mutua entre fluido y estructura, dando lugar, junto con el modelo estructural y el modelo aerodinámico, a un único sistema dinámico que describa adecuadamente los fenómenos aeroelásticos.

Con esto en perspectiva, en el presente capítulo se exponen los fundamentos generales que describen el modelo de interacción adoptado, indicando cómo se concibe el mismo a partir de la relación entre el modelo aerodinámico y el estructural. Además, se describe el proceso de transferencia de información implementado y cómo este da cierre al esquema de co-simulación.

Seguidamente, el foco se pone en la implementación computacional de la estrategia de co-simulación, haciendo énfasis en los puntos fundamentales que caracterizan la herramienta computacional desarrollada. Finalmente, se describe brevemente cómo se utiliza la herramienta para realizar simulaciones que permitan analizar fenómenos aeroelásticos.

## V. 1 Relación entre modelos

Las naturalezas disímiles del modelo estructural y del modelo aerodinámico adoptados, presentados en los capítulos precedentes, requieren un proceso de adecuación de la información a comunicar para que la interacción sea exitosa. En términos generales, el esquema para la transferencia de información debe considerar tres aspectos básicos: aptitud para funcionar en ambos sentidos, relaciones coherentes entre topologías de discretización diferentes, y leyes de conservación.

La aptitud para funcionar en ambos sentidos hace referencia a que la relación entre modelos es bidireccional: el modelo aerodinámico predice cargas que dependen del movimiento de la estructura, pero, a su vez, el movimiento de la estructura se obtiene de la respuesta del modelo estructural a las cargas aerodinámicas. Luego, la interacción involucrará la transferencia de variables cinemáticas desde el modelo estructural hacia el aerodinámico y la transferencia de cargas aerodinámicas en el sentido

contrario. Esta retroalimentación puede resultar problemática al analizar el sistema dinámico completo en el dominio del tiempo y requiere de un esquema iterativo para describirla.

Tanto las mallas estructurales (ME) de elementos finitos como las grillas aerodinámicas (GA) del método de red de vórtices constituyen topologías de discretización que surgen de aproximar los mismos cuerpos continuos, aunque con distintos enfoques. Existe, entonces, una relación entre ambas topologías que se basa en el hecho de que las superficies sustentadoras forman parte de cuerpos sólidos flexibles: la malla estructural que representa un cuerpo flexible tendrá asociada una (al menos una) grilla aerodinámica con su estela correspondiente, tal como se ilustra en la Figura V-1 a). Entonces, las cargas aerodinámicas obtenidas sobre los puntos de control de la grilla aerodinámica deben transferirse adecuadamente a los nodos de los elementos estructurales. Del mismo modo, los nodos de la malla estructural deberán “arrastrar” en su movimiento a los nodos y puntos de control de la grilla aerodinámica a partir de los desplazamientos, rotaciones y velocidades calculados. De ahí que debe existir una relación coherente para evitar discontinuidades o inconsistencias que, además, contemple el posible desfase geométrico entre ambas discretizaciones a la hora de efectuar la transferencia (Figura V-1 b)).

Dado que el sistema dinámico que se pretende construir representa fenómenos físicos, las leyes de conservación deben satisfacerse para garantizar la correcta representación de tales fenómenos. En este sentido, el método de interacción debe conservar la energía total del sistema, la cantidad de movimiento lineal, la cantidad de movimiento angular y la masa.

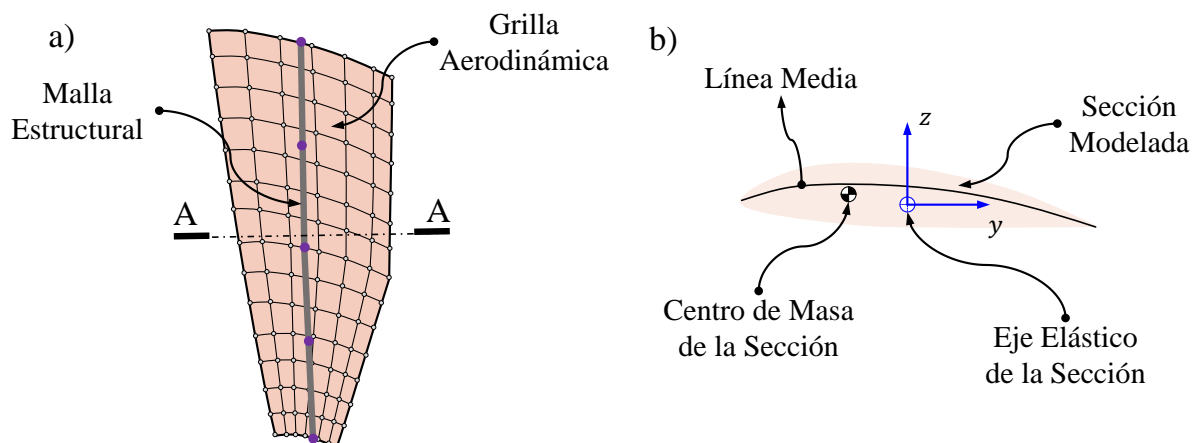


Figura V-1: Relación entre la malla estructural y la grilla aerodinámica provenientes de la discretización de un cuerpo continuo. a) Configuración del cuerpo. b) Configuración de la sección.

## V. 2 Transferencia de información entre modelos

La comunicación bidireccional entre los modelos estructural y aerodinámico consiste en: i) transferir los desplazamientos, rotaciones y velocidades de los nodos de las mallas estructurales de elementos finitos hacia los nodos y puntos de control de las grillas aerodinámicas; y ii) trasladar las cargas aerodinámicas calculadas en los puntos de control de las grillas aerodinámicas a los nodos estructurales. Ambos procesos de comunicación se basan en establecer un esquema de relación entre los nodos de grillas y mallas que resulta netamente cinemático. A continuación, se expone el esquema adoptado en este trabajo a partir de la relación entre una única malla estructural y una única grilla aerodinámica asociada, aunque los lineamientos son fácilmente extensibles a múltiples cuerpos conectados de manera arbitraria.

El primer paso consiste en asociar cada punto de la grilla aerodinámica, ya sea un nodo o un punto de control, con un elemento de la malla estructural correspondiente. El criterio de asociación consiste en definir un vector contenido en un plano perpendicular al eje de la malla estructural (eje elástico de la viga que representa) que una un punto interior de un elemento estructural con el punto de la grilla aerodinámica. Así, el punto de la grilla aerodinámica será asociado al elemento cuyo punto interior construya el vector definido. Este principio se esquematiza en la Figura V-2 donde los puntos de un panel genérico  $M$  de la grilla aerodinámica se vinculan con dos elementos de una malla estructural. Se observa que los nodos  $A$  y  $B$  del panel están asociados a través de los vectores  $\mathbf{r}_A$  y  $\mathbf{r}_B$  con el elemento  $p$  de la viga, mientras que el nodo  $C$ , el nodo  $D$  y el punto de control corresponden al elemento  $q$  a través de  $\mathbf{r}_C$ ,  $\mathbf{r}_D$  y  $\mathbf{r}_{cp}$ , respectivamente. Adicionalmente, sobre el nodo inicial de cada elemento estructural se define un sistema local de coordenadas  $\{x, y, z\}$ , de manera tal que la coordenada sobre el eje del elemento ubique los puntos interiores con los que se vinculan los puntos de la grilla aerodinámica. Esto corresponde, en el ejemplo de la Figura V-2, a las coordenadas  $x_A^p$  y  $x_B^p$  asociadas a los nodos aerodinámicos  $A$  y  $B$  respecto al elemento  $p$ . En general, el esquema de vinculación puede considerarse como un sistema maestro-esclavo en el cual los roles dependerán del sentido en el que se transfiera información.

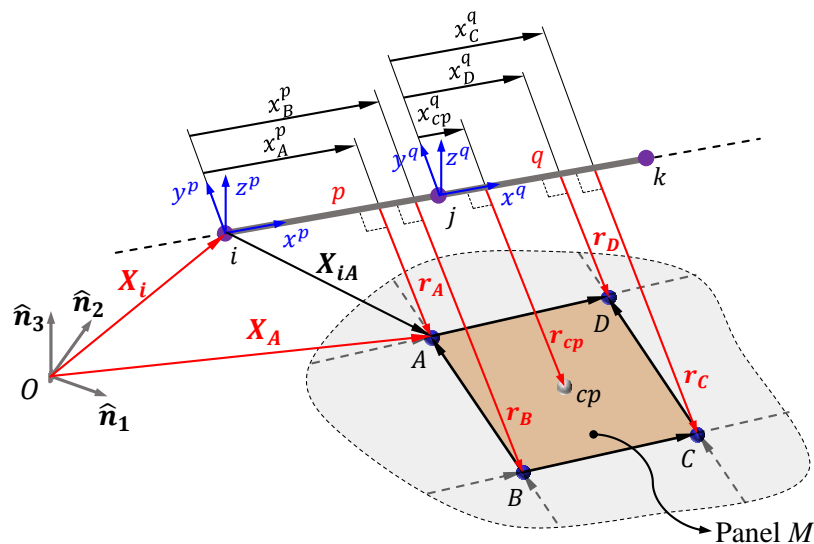


Figura V-2: Asociación entre un panel de la grilla aerodinámica y un elemento de la malla estructural.

## V. 2. 1 Transferencia de desplazamientos a las grillas aerodinámicas

Para ilustrar la relación que dará lugar a la transferencia de desplazamientos desde la malla estructural hacia la grilla aerodinámica, considérese un punto genérico  $P$  de ésta última que, en este caso, puede coincidir con un nodo o con un punto de control y será considerado como nodo esclavo. Siguiendo la Figura V-3 a), el punto  $P$  está contenido en un plano perpendicular al elemento estructural  $k$  que pasa por el punto interior  $p$ , cuya coordenada local es  $x_p^k$ , y entre ambos se define el vector  $\mathbf{r}_p$ . En este caso, el vector  $\mathbf{r}_p$  se considera rígido y será el nexo entre el elemento estructural y el punto  $P$ .

Los nodos maestros en este esquema son los nodos estructurales  $i$  y  $j$  que poseen la información a transferir en sus grados de libertad calculados por el modelo estructural. Recurriendo a la expresión (III-69) que se repite aquí por comodidad, el vector de grados de libertad del elemento es

$$\mathbf{v}_e = \left\{ \mathbf{u}_{0_i}^{*T} \quad \boldsymbol{\psi}_i^{*T} \quad \mathbf{u}_{0_j}^{*T} \quad \boldsymbol{\psi}_j^{*T} \right\}^T \quad (\text{V-1})$$

Donde  $\mathbf{u}_{0_i}^*$ ,  $\mathbf{u}_{0_j}^*$ ,  $\boldsymbol{\psi}_i^*$  y  $\boldsymbol{\psi}_j^*$  son, respectivamente, los desplazamientos y rotaciones del nodo  $i$  y del nodo  $j$  del elemento estructural.

Para definir el desplazamiento del punto de la grilla aerodinámica  $P$  deben calcularse los desplazamientos y rotaciones del punto interior al elemento estructural  $p$ . De acuerdo con el modelo estructural utilizado, los desplazamientos y rotaciones del punto  $p$  están dados por la interpolación expuesta en (III-75), es decir

$$\bar{\mathbf{v}}_p = \mathbf{N}(\xi_p) \mathbf{v}_e \quad (\text{V-2})$$

Donde  $\bar{\mathbf{v}}_p$  es un vector de seis componentes que posee las tres componentes de desplazamiento y las tres componentes de rotación del punto  $p$  de acuerdo a la interpolación utilizada en el modelo estructural. Además,  $\mathbf{N}(\xi_p)$  es la matriz de funciones de forma del elemento dada en (III-76) para la coordenada en el dominio maestro  $\xi_p$ , que es

$$\xi_p = 2 \frac{x_p^k}{l_e} - 1 \quad (\text{V-3})$$

Donde  $l_e$  es la longitud del elemento.

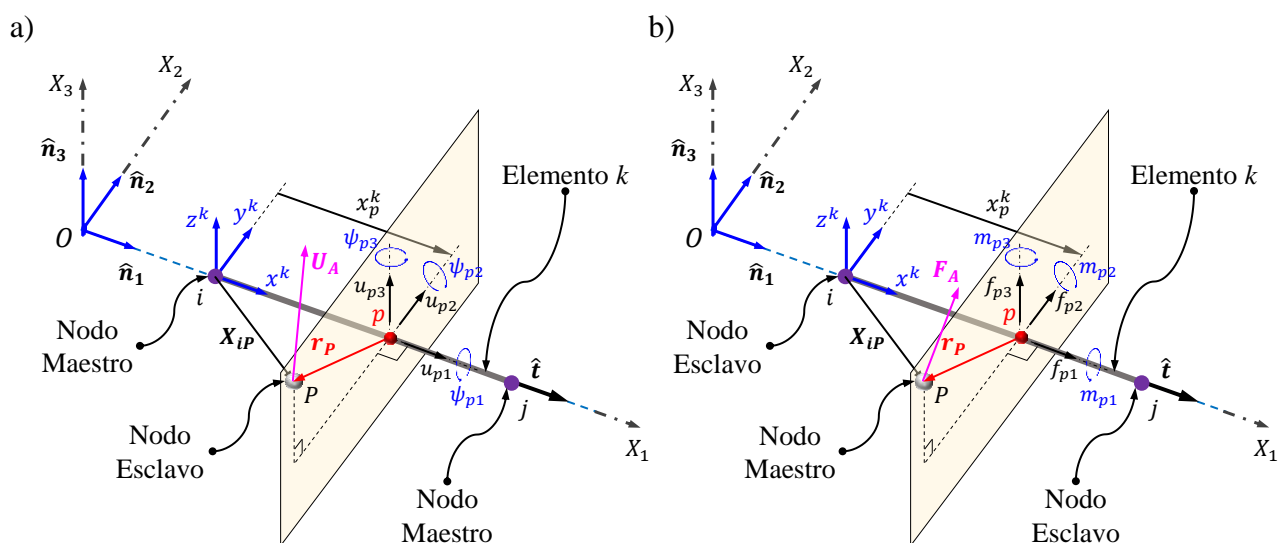


Figura V-3: Transferencia de información entre grillas y mallas. a) Transferencia de desplazamientos y giros. b) Transferencia de fuerzas y momentos.

El nexo rígido entre  $p$  y  $P$  dado por el vector  $\mathbf{r}_p$  permite completar la relación cinemática entre el nodo esclavo y los nodos maestros. Recurriendo nuevamente a la Figura V-3 a), se tiene

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{u}_p + \mathbf{r}_p \times \boldsymbol{\psi}_p \quad (\text{V-4})$$

Donde  $\mathbf{U}_A$  es el desplazamiento del punto aerodinámico  $P$ ,  $\mathbf{u}_p$  y  $\boldsymbol{\psi}_p$  son los desplazamientos y rotaciones del nodo interior del elemento estructural  $p$ , es decir que



$$\bar{\mathbf{v}}_p = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_p \\ \boldsymbol{\psi}_p \end{Bmatrix} \quad (\text{V-5})$$

Luego, de manera más compacta puede expresarse

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{T}_p \bar{\mathbf{v}}_p \quad (\text{V-6})$$

siendo

$$\mathbf{T}_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -r_3^P & r_2^P \\ 0 & 1 & 0 & r_3^P & 0 & -r_1^P \\ 0 & 0 & 1 & -r_2^P & r_1^P & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-7})$$

Donde  $\mathbf{r}_p = \{r_1^P, r_2^P, r_3^P\}$ .

Finalmente, reemplazando (V-6) en (V-2), la relación cinemática entre nodos maestros y el punto esclavo se expresa como

$$\mathbf{U}_A = \mathbf{T}_p \mathbf{N}(\xi_p) \mathbf{v}_e = \mathbf{G}_{Ae} \mathbf{v}_e \quad (\text{V-8})$$

Cabe aclarar que un procedimiento análogo es aplicable a la transferencia de velocidades, la cual es requerida sobre los puntos de control de la grilla aerodinámica. En este sentido, se tiene

$$\dot{\mathbf{U}}_A = \mathbf{T}_p \mathbf{N}(\xi_p) \dot{\mathbf{v}}_e = \mathbf{G}_{Ae} \dot{\mathbf{v}}_e \quad (\text{V-9})$$

Donde  $\dot{\mathbf{U}}_p$  es la velocidad del punto esclavo y  $\dot{\mathbf{v}}_e$  es el vector de las derivadas temporales de los grados de libertad.

## V. 2. 2 Transferencia de cargas aerodinámicas a las mallas estructurales

Las cargas aerodinámicas son el resultado principal del componente de simulación aerodinámico y deben darse como dato al componente de simulación estructural para predecir la respuesta de la estructura dentro del esquema iterativo de solución. Este proceso responde a los mismos principios planteados en la sección anterior, aunque siguiendo el esquema de la Figura V-3 b).

El nodo maestro, en este caso, es un punto de control de la grilla aerodinámica representado por el punto  $P$ , donde se obtienen las cargas aerodinámicas  $\mathbf{F}_A$ . El traslado del vector de carga aerodinámica al punto interior  $p$  sobre el elemento estructural se realiza de manera estática con el vector rígido antes definido  $\mathbf{r}_p$ , es decir

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_p &= \mathbf{F}_A \\ \mathbf{m}_p &= \mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_A \end{aligned} \quad (\text{V-10})$$

Donde  $\mathbf{f}_p$  es el vector de fuerza aerodinámicas trasladado al punto  $p$  y  $\mathbf{m}_p$  es el vector de momentos sobre el punto  $p$  que surge del traslado de las cargas. Además,  $\mathbf{f}_p = \{f_{p1}, f_{p2}, f_{p3}\}$ ,  $\mathbf{m}_p = \{m_{p1}, m_{p2}, m_{p3}\}$ .

A partir de (V-10) puede definirse una única expresión matricial similar a (V-6), es decir

$$\bar{\mathbf{f}}_p = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_p \\ \mathbf{m}_p \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_p^T \mathbf{F}_A \quad (\text{V-11})$$

Donde

$$\mathbf{T}_p^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -r_3^P & r_2^P \\ r_3^P & 0 & -r_1^P \\ -r_2^P & r_1^P & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V-12})$$

La formulación del modelo estructural exige aplicar cargas y momentos únicamente sobre los nodos estructurales, por lo que el vector  $\bar{\mathbf{f}}_p$  debe extrapolarse a los extremos del elemento estructural. Para ello, se utilizan las mismas funciones de forma aplicadas a los grados de libertad. Luego, se tiene

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{N}(\xi_p)^T \bar{\mathbf{f}}_p \quad (\text{V-13})$$

Con

$$\mathbf{f}_e = \{\mathbf{f}_i^T \quad \mathbf{m}_i^T \quad \mathbf{f}_j^T \quad \mathbf{m}_j^T\}^T \quad (\text{V-14})$$

Donde  $\mathbf{f}_i^T$ ,  $\mathbf{f}_j^T$ ,  $\mathbf{m}_i^T$  y  $\mathbf{m}_j^T$  son, respectivamente, los vectores de fuerzas y momentos sobre el nodo  $i$  y el nodo  $j$  del elemento estructural

Finalmente, reemplazando (V-11) en (V-13), la relación entre la carga aerodinámica en el punto de control de la grilla aerodinámica y las fuerzas y momentos en los nodos estructurales se expresa como

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{N}(\xi_p)^T \mathbf{T}_p^T \mathbf{F}_A = \mathbf{G}_{eA} \mathbf{F}_A \quad (\text{V-15})$$

### V. 2. 3 Conservación en los esquemas de transferencia

Para garantizar que no existan alteraciones durante el proceso de transferencia de información entre modelos se requiere que en el esquema utilizado los sistemas de carga sean estructuralmente equivalentes. Esto quiere decir que ambos sistemas de fuerzas, el proveniente del modelo aerodinámico y el aplicado al modelo estructural, realicen el mismo trabajo ante desplazamientos virtuales arbitrarios. Se tiene entonces

$$\delta \bar{W}_A = \delta \bar{W}_e \quad (\text{V-16})$$

Donde  $\delta \bar{W}_A$  es el trabajo virtual del sistema de cargas obtenido con el modelo aerodinámico y  $\delta \bar{W}_e$  es el sistema de cargas aplicado en el modelo estructural, en ambos casos se trata con incrementos infinitesimales y no con variaciones. Introduciendo vectores de desplazamientos virtuales correspondientes, de (V-16) se escribe

$$\delta \bar{W}_A = (\delta \mathbf{u}_A)^T \mathbf{F}_A, \quad \delta \bar{W}_e = (\delta \mathbf{u}_e)^T \mathbf{f}_e \quad (\text{V-17})$$

Siendo  $\delta \mathbf{u}_A$  el desplazamiento virtual asociado a las cargas aerodinámicas y  $\delta \mathbf{u}_e$  su equivalente en el sistema de cargas sobre la estructura.

Habiendo descrito en (V-8) cómo se relacionan los desplazamientos de la malla estructural y de la grilla aerodinámica, se utiliza la misma relación para el desplazamiento virtual

$$\delta \mathbf{u}_A = \mathbf{G}_{Ae} \delta \mathbf{u}_e \quad (\text{V-18})$$

Utilizando (V-18) en (V-17) y (V-16) se tiene

$$\delta \bar{W}_A = (\delta \mathbf{u}_A)^T \mathbf{F}_A = (\delta \mathbf{u}_e)^T (\mathbf{G}_{Ae})^T \mathbf{F}_A = \delta \bar{W}_e = (\delta \mathbf{u}_e)^T \mathbf{f}_e \quad (\text{V-19})$$

Debido a la arbitrariedad del desplazamiento virtual  $\delta \mathbf{u}_e$ , de la expresión anterior resulta

$$\mathbf{f}_e = (\mathbf{G}_{Ae})^T \mathbf{F}_A \quad (\text{V-20})$$

Finalmente, al comparar (V-20) con (V-15) se obtiene

$$\mathbf{G}_{eA} = (\mathbf{G}_{Ae})^T \quad (\text{V-21})$$

Lo que indica que al satisfacerse (V-21), se satisface (V-16) y, por lo tanto, se conserva la energía total del sistema. Un análisis similar puede realizarse para verificar la conservación de cantidades de movimiento lineal y angular [81].

## V. 3 Esquema de co-simulación del sistema combinado

La estrategia de co-simulación permite construir un sistema dinámico interactivo cuyas ecuaciones de gobierno se integran numéricamente de manera simultánea en el dominio del tiempo. A pesar de que el flujo y las estructuras sumergidas son campos físicos que se modelan de manera independiente, en este esquema la interacción entre ambos se considera fuerte debido a que no solo el intercambio de información es bidireccional, sino que, a pesar de que se admite el uso de pasos de tiempo distintos en cada modelo, la comunicación entre ambos se realiza en todos los pasos de simulación. En contrapartida, un ejemplo de interacción débil entre modelos puede encontrarse en el trabajo de M. Maza [81].

Para describir el proceso se realizan dos consideraciones que no afectan a la generalidad del mismo. En primer lugar, considérese un problema con múltiples (una cantidad finita  $N$ ) cuerpos flexibles sumergidos en una corriente fluida. La representación de cada cuerpo consiste en al menos una viga y una grilla aerodinámica con su estela asociada, como en el ejemplo de la Figura V-4. En esta descripción, se considera que no existe una conexión a nivel estructural entre dos cuerpos distintos ya que, de ser así, todo el conjunto puede ser considerado como un único cuerpo.

En segundo lugar, aunque la definición de los pasos de tiempo adecuados para cada modelo no es trivial y se detalla más adelante, en este punto, se asume que los pasos de tiempo utilizados en cada modelo son diferentes. En particular, se considera que el paso de tiempo aerodinámico  $\Delta t_a$  es una cantidad entera de veces mayor que el paso estructural  $\Delta t_s$ , esto es

$$\Delta t_a = n \Delta t_s, \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{V-22})$$

Donde  $\mathbb{N}$  representa los números naturales sin el cero. Este requisito implica restricciones a la hora de seleccionar los pasos de tiempo involucrados en la simulación, pero como se verá más adelante puede satisfacerse fácilmente.

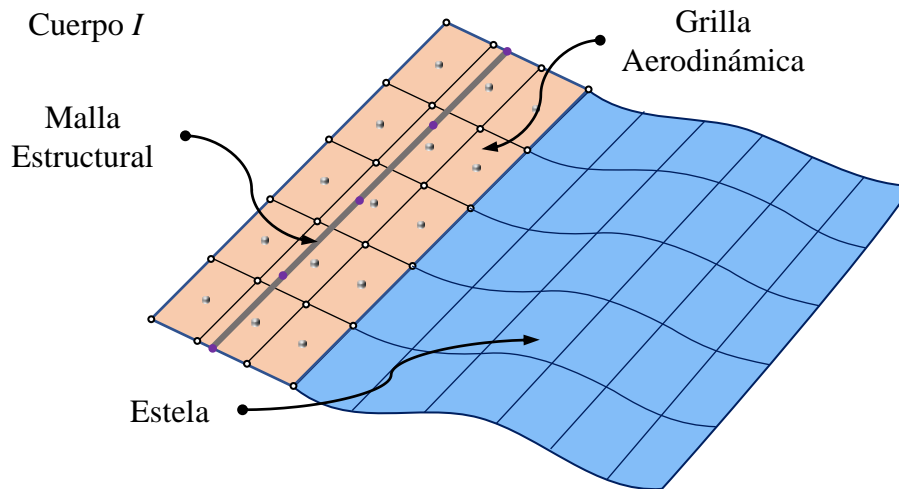


Figura V-4: Representación de un cuerpo conformado por una malla estructural, una grilla aerodinámica asociada y su estela.

La relación entre los pasos de tiempo utilizados en cada modelo se esquematiza en la Figura V-5. El paso de tiempo aerodinámico  $j$  inicia con la convección de las estelas de los cuerpos presentes en la simulación y, a lo largo de su duración, transcurre una cantidad entera de pasos de tiempo estructurales definida como  $\Delta S_{str}$ . De este modo, para los pasos de tiempo estructurales se tiene un contador parcial  $k$  que va desde 1 hasta  $\Delta S_{str}$  y se reinicia con cada paso aerodinámico, y un contador total  $i$  que recorre todos los pasos estructurales de la simulación.

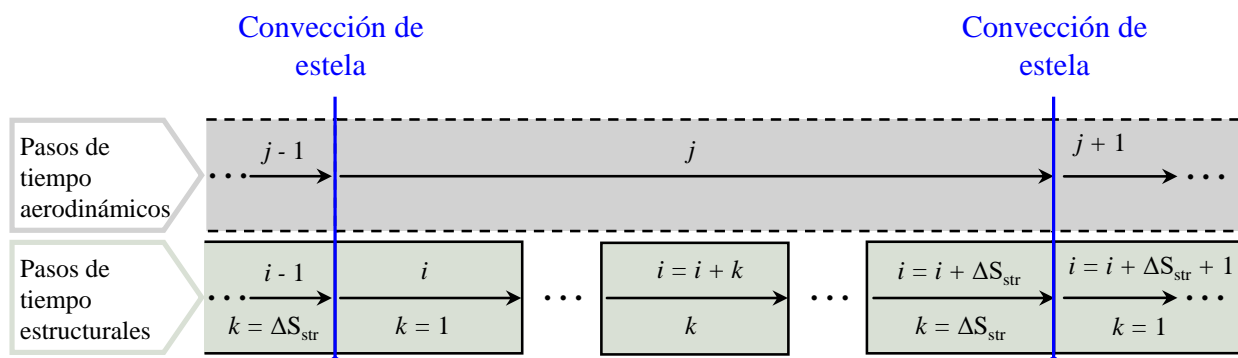


Figura V-5: Relación entre los pasos de tiempo estructurales y aerodinámicos

Durante un paso de tiempo aerodinámico la configuración de la estela permanece inalterada ya que se asume que el orden de la escala temporal de la estructura es menor. En este sentido, durante un paso de tiempo estructural, las posiciones y velocidades de la estructura son actualizadas y con ellas las posiciones y velocidades de las grillas aerodinámicas. Esto implica que en cada paso de tiempo estructural se recalculan las cargas aerodinámicas sobre las estructuras considerando dos efectos: i) la influencia de las estelas que se mantienen inalteradas sobre la grillas aerodinámicas que actualizan sus posiciones en cada paso estructural, y ii) la influencia de la grillas aerodinámicas sobre sí mismas que en cada paso estructural actualizan sus posiciones.

En la Figura V-6 se muestra un diagrama de la solución numérica para el paso de tiempo aerodinámico  $j$  de la simulación. La solución en este paso es el resultado de la interacción global entre

todos los cuerpos que surge del efecto de las perturbaciones aerodinámicas que cada uno introduce en el flujo. Debido a las características del modelo aerodinámico, el proceso de convección descrito en el Sección IV. 3 permite almacenar la historia de estas perturbaciones en las estelas. Luego, son las estelas con sus posiciones e intensidades las que transmiten la información de un paso de tiempo aerodinámico al siguiente, mientras que para el resto de los procesos cada paso de tiempo se considera independiente. También en la Figura V-6, se muestra el intercambio que ocurre entre las mallas estructurales y las grillas aerodinámicas que forman cada uno de los cuerpos.

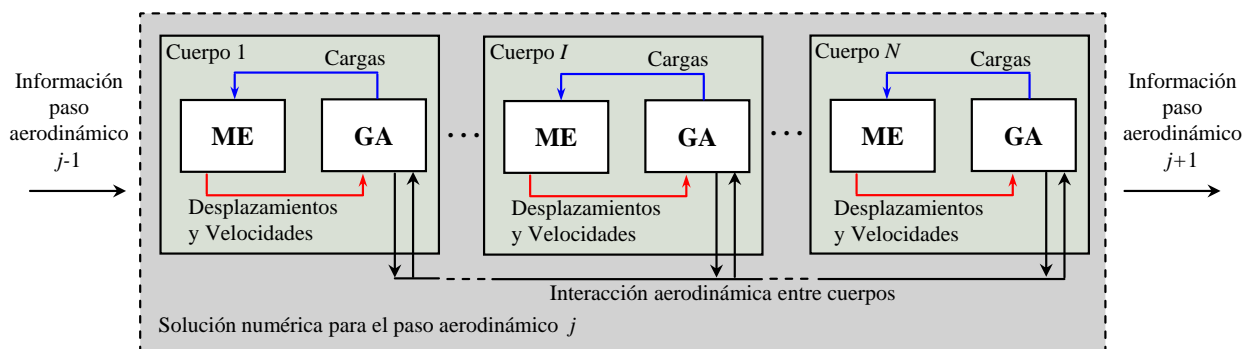


Figura V-6: Esquema de solución numérica para el paso de tiempo aerodinámico  $j$ .

Como se mencionó, para considerar la interacción entre cargas aerodinámicas y la respuesta estructural es necesario un esquema iterativo. Este esquema está basado en el método predictor-corrector de cuarto orden de Hamming [91] debido a que presenta algunas ventajas frente a los integradores del tipo Runge-Kutta. En primer lugar, el método predictor-corrector no requiere evaluaciones de cargas en fracciones del paso de tiempo lo que resultaría inconsistente con el modelo de predicción de cargas aerodinámicas. En segundo lugar, el método de Hamming permite tratar aceleraciones en ambos miembros de las ecuaciones de movimiento lo cual es adecuado dado que las cargas aerodinámicas poseen contribuciones que son proporcionales a aceleraciones.

Con lo antes expuesto, en cada paso de tiempo estructural se realiza el proceso esquematizado en la Figura V-7 para obtener la solución que describe el comportamiento del sistema dinámico completo antes de avanzar al paso siguiente:

- **CONVECCIÓN DE ESTELAS**

Sólo al inicio de un paso de tiempo aerodinámico la configuración de las estelas de todos los cuerpos es actualizada. La actualización se realiza calculando nuevas posiciones para los nodos que forman los segmentos vorticosos de las estelas de acuerdo al proceso descrito en el modelo aerodinámico. Luego de la actualización, las estelas permanecen inalteradas mientras los pasos de tiempo estructurales avanzan.

- **CÁLCULO DE CARGAS AERODINÁMICAS**

En cada paso de tiempo estructural, se calculan las cargas sobre las grillas aerodinámicas. Para esto se utiliza el procedimiento descrito en el modelo aerodinámico y, como resultado, se obtiene un vector de fuerza sobre cada uno de los puntos de control de todas las grillas (ver Figura V-7).

- **TRANSFERENCIA DE CARGAS**

Las cargas aerodinámicas obtenidas sobre los puntos de control de las grillas aerodinámicas se transfieren a los nodos de las mallas estructurales asociadas. Este procedimiento responde a lo descrito en la Sección V. 2. 2 y para obtener el sistema de cargas equivalente como lo indica la Figura V-7 se utiliza la matriz  $G_{eA}$ .

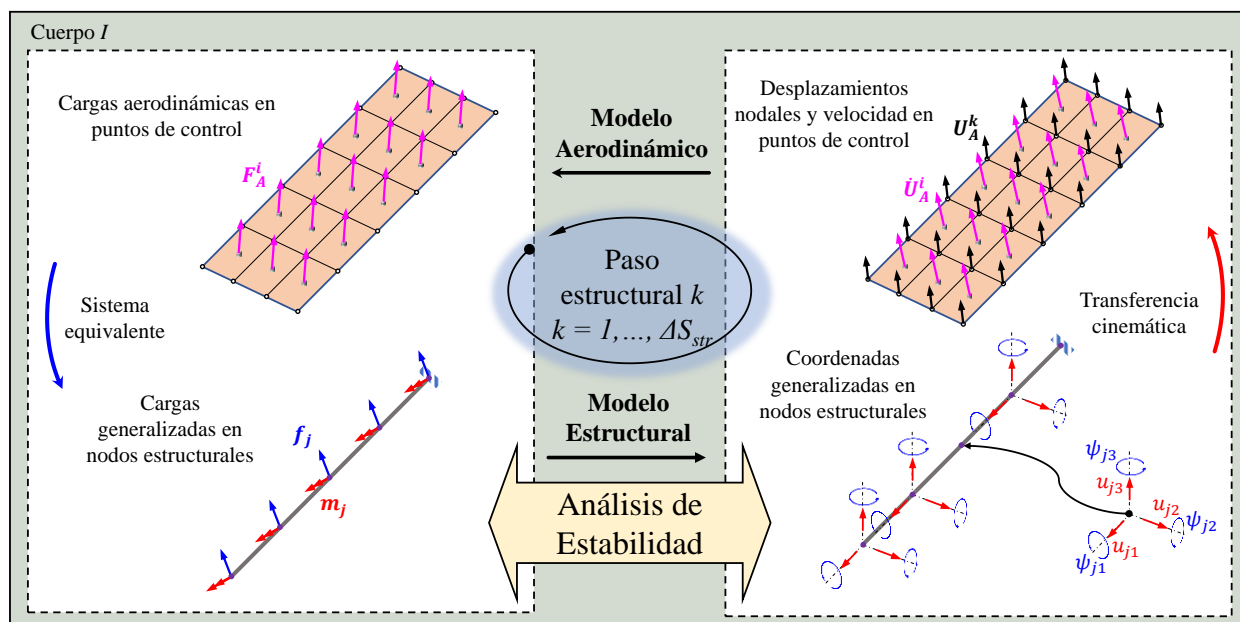


Figura V-7: Esquema de iteración en cada paso de tiempo estructural.

#### ▪ RESPUESTA DE LA ESTRUCTURA

Con las cargas aplicadas en los nodos estructurales, la ecuación de movimiento de cada viga se integra con el método de Hamming para computar su respuesta frente a dichas cargas. El resultado se obtiene como coordenadas generalizadas (giros y desplazamientos indicados en la Figura V-7) en los nodos estructurales.

#### ▪ TRANSFERENCIA DE DESPLAZAMIENTOS Y VELOCIDADES

La respuesta de la estructura (desplazamientos y velocidades nodales) se transfiere a la grilla aerodinámica: los desplazamientos a nodos y puntos de control y las velocidades a los puntos de control. Este procedimiento actualiza la posición de la grilla aerodinámica, responde a lo descrito en la Sección V. 2. 1 y utiliza la matriz  $G_{Ae}$ .

#### ▪ ITERACIONES SUCESIVAS

Los ítems 2, 3, 4 y 5 se repiten dentro de un paso estructural hasta que se alcanza un criterio de convergencia prefijado. En general, el criterio se fija respecto al error relativo entre los desplazamientos calculados en iteraciones sucesivas y la cantidad de iteraciones para alcanzar la convergencia depende de las condiciones generales de la simulación, aunque, para parámetros habituales, no se superan las diez iteraciones.

#### ▪ ACTUALIZACIÓN FINAL Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

Una vez alcanzada la convergencia se realiza una iteración adicional para obtener el estado final (convergiendo) de la grilla aerodinámica y de la estructura. En este estado se evalúa la estabilidad de las estructuras para verificar si se produce el fenómeno de pandeo aerodinámico, como se describe más adelante, y si la estructura permanece estable se continúa con la simulación.

Como es de esperarse, cada simulación cuenta con una etapa inicial de preprocesamiento y una etapa final de postprocesamiento. Durante el preproceso se define la configuración general de cada caso, esto incluye la determinación de todos los parámetros globales, la definición de geometrías y el mallado, entre otros. Mientras que, una vez concluida la simulación debe realizarse el postproceso de los resultados para su ordenamiento, visualización y posterior interpretación.

## V. 4 Particularidades de la implementación

La implementación de un modelo computacional trae aparejados diversos aspectos que deben tenerse en cuenta para que la herramienta desarrollada resulte exitosa. Estos aspectos estrictamente no forman parte de la descripción de las formulaciones de los modelos presentadas, pero son igualmente importantes para completar el esquema de co-simulación, y afectan directamente la performance, precisión y aplicabilidad del mismo. A continuación, se discuten los más influyentes.

### V. 4. 1 Versión incremental de la ecuación de movimiento

En la Sección III. 4 se presentó la ecuación de movimiento matricial global del sistema estructural que se repite aquí por conveniencia

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_e\mathbf{q}(t) + \mathbf{K}_g\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (\text{V-23})$$

Donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa global del sistema,  $\mathbf{K}_e$  y  $\mathbf{K}_g$  son las matrices de rigidez elástica y geométrica del sistema, respectivamente, los vectores  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{F}$  representan los grados de libertad globales del sistema y las cargas generalizadas que actúan sobre el mismo. En la ecuación (V-23) los vectores tienen dimensión  $1 \times n$  y las matrices  $n \times n$ , donde  $n$  es la cantidad de grados de libertad del sistema.

Para favorecer el proceso de integración numérica de la ecuación (V-23) se construye una versión incremental con respecto a la posición deformada del sistema en el tiempo  $t = t_0$  definida como  $\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0$ . Esta versión se obtiene expandiendo en serie de Taylor en un entorno de  $\mathbf{q}_0$  el término de fuerzas elásticas de la ecuación de movimiento y conservando sólo los términos de primer orden en el vector de grados de libertad, esto es [92]

$$\mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q} = \mathbf{K}(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0 + \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \Delta \mathbf{q} \quad (\text{V-24})$$

Donde  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q})$  y  $\Delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{q}(t) - \mathbf{q}_0$ . De la ecuación (V-24) se define la matriz de rigidez tangente del sistema que resulta

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q})\mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{V-25})$$

Donde  $\mathbf{K}_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y su versión elemental se encuentra en el Apéndice V. A.

Luego, teniendo en cuenta (V-24) y (V-25), la versión incremental de la ecuación con respecto a la posición deformada del sistema  $\mathbf{q}_0$  se escribe

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0)\Delta \mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0)\mathbf{q}_0 \quad (\text{V-26})$$

Donde  $\ddot{\mathbf{q}}(t) = \ddot{\Delta \mathbf{q}}(t)$ , ya que  $\mathbf{q}_0$  se mantiene constante en cada paso de tiempo.

Evidentemente, las ecuaciones (V-23) y (V-26) convergen a medida que se reduce el incremento  $\Delta \mathbf{q}(t)$ . De hecho, para la mayoría de los pasos de tiempo estructurales utilizados los resultados de la simulación no se ven afectados al utilizar la versión incremental de la ecuación de movimiento.

## V. 4. 2 Reducción de orden del modelo estructural

La adecuada representación de sistemas compuestos por diversas estructuras combinadas requiere, en general, el uso de un gran número de elementos finitos lo que, en consecuencia, conduce a un gran número de variables nodales y grados de libertad. Evidentemente, a medida que la cantidad de grados de libertad presentes en el modelo estructural se incrementa, la carga de cómputo requerida para su simulación también se incrementa, y debe adicionarse a los recursos de cálculo necesarios para la porción aerodinámica del modelo combinado. Con esta premisa, la reducción de orden del modelo estructural resulta conveniente a la hora de encarar una simulación.

La idea básica de los métodos de reducción de orden, de acuerdo con A. K. Noor [93] es condensar un gran sistema de ecuaciones (diferenciales o algebraicas) en un sistema reducido que sea similar en cierto sentido. En este trabajo, la reducción de orden del modelo estructural se realiza aplicando el método de descomposición en un subespacio de modos tangentes. Esto es, se utiliza una variación del método de superposición modal [94], también conocido como método de desplazamiento modal o síntesis de componente modal [95]. En este caso, se expande o descompone el vector de estado del sistema estructural sobre un subespacio de vectores ortogonales convenientemente calculados.

El subespacio de vectores se obtiene al resolver el problema de autovalores generalizado asociado a la versión homogénea de la ecuación (V-26) [92] es decir,

$$(\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) - \omega_i^2 \mathbf{M})\boldsymbol{\phi}_i = \mathbf{0} \quad (\text{V-27})$$

Donde, para un sistema de  $n$  grados de libertad, se obtienen los  $n$  modos tangentes de la estructura (autovectores)  $\boldsymbol{\phi}_i$  y sus  $n$  frecuencias asociadas (autovalores)  $\omega_i$ .

Aproximando a  $\Delta \mathbf{q}(t)$  como una combinación lineal de  $N_m$  vectores,  $\Delta \mathbf{q}(t) = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}(t)$ , el sistema de ecuaciones reducido resulta

$$\boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\Phi} \ddot{\boldsymbol{\eta}}(t) + \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\eta}(t) = \boldsymbol{\Phi}^T [\mathbf{F}(t) - \mathbf{K}(\mathbf{q}_0) \mathbf{q}_0] \quad (\text{V-28})$$

La ecuación (V-28) fue premultiplicada por la matriz de autovectores traspuesta  $\boldsymbol{\Phi}^T$  que se obtiene de encolumnar los  $N_m$  modos tangentes seleccionados de manera que

$$\boldsymbol{\Phi} = [\boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_i \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_{N_m}] \quad (\text{V-29})$$

Además,  $\boldsymbol{\eta}(t) \in \mathbb{R}^{N_m \times 1}$  es el nuevo vector reducido de incógnitas.

Es importante destacar que, en virtud de la no linealidad presente en la matriz de rigidez, la base vectorial utilizada en la reducción de orden no puede mantenerse constante para todo el intervalo de tiempo de la simulación. Por consiguiente, la matriz modal será recalculada al inicio de cada paso del proceso de integración numérica.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias expresado en (V-28) presenta una significativa disminución en su dimensión dado que la cantidad de grados de libertad presentes se redujo de  $n$  a  $N_m$ . A pesar de las ventajas de trabajar con un sistema reducido, existe indefectiblemente una pérdida de información a la hora de representar la estructura en la nuevas coordenadas, lo que puede repercutir en mayor o menor medida en las respuestas o soluciones obtenidas. Luego, es necesario conocer qué tan acertada es dicha aproximación para los objetivos que se persiguen en cada simulación, así como también fijar parámetros que permitan comparar resultados obtenidos con distintos métodos de reducción de orden. Al respecto se presenta un ejemplo práctico en el Capítulo VI, más adelante.



### V. 4. 3 Determinación del paso de tiempo de la simulación

Un aspecto fundamental en los modelos numéricos que representan evoluciones temporales de sistemas es el paso o intervalo con el cual se discretiza el tiempo de la simulación. En general, la elección de un intervalo de tiempo depende tanto del problema físico que se analiza como de la representación numérica del mismo y, en los problemas multi-físicos, las consideraciones a realizar a la hora de definir el paso de tiempo apropiado suelen ser variadas. El modelo utilizado en el presente trabajo, como se mencionó, admite el uso de pasos de tiempo distintos para cada modelo involucrado. En este sentido, el paso de tiempo definido para cada modelo debe satisfacer los requerimientos del mismo para garantizar, entre otras cosas, la estabilidad de la solución.

Desde el punto de vista del modelo estructural, la consideración básica en la selección de un paso de tiempo apropiado para un problema de dinámica está dada por el rango de frecuencias presente en la respuesta. Como lo expone K. Bathe [96], en general en un sistema dinámico sólo los modos más bajos y algunos modos intermedios son excitados por las cargas externas. Luego, si se aplica el método de descomposición basada en modos para representar la respuesta de la estructura, el problema se reduce a decidir qué cantidad de modos se incluyen en la representación para definir el rango de frecuencias y en función de éste el intervalo temporal.

Naturalmente, la correcta definición de la resolución temporal de la integración es muy importante y requiere un análisis particular, sin embargo, como regla general puede establecerse una relación entre la máxima frecuencia incluida en la representación a través del subespacio de modos tangentes y el intervalo de tiempo fijado para la simulación. Por lo tanto, si se consideran  $m$  modos tangentes cuyas frecuencias asociadas son  $\omega_i$  con  $i = 1, \dots, m$ , y sea  $\omega_m$  la más elevada de ellas que corresponde al modo  $m$ , el paso de tiempo de la simulación debe ser suficientemente pequeño como para capturarla, esto es:

$$\Delta t_s \leq \frac{1}{r} \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{T_m}{r} \quad (\text{V-30})$$

Donde  $\Delta t_s$  es el paso de tiempo apropiado para el modelo estructural,  $T_m = \frac{2\pi}{\omega_m}$  es el período asociado a la máxima frecuencia incluida en la representación de la respuesta, y  $r$  es la cantidad de puntos que se desean obtener dentro de cada período  $T_m$ . El valor del parámetro  $r$  que permite obtener soluciones válidas puede variar en función de las características del sistema, aunque K. Bathe [96] propone un límite inferior de  $r > \pi$ . En general, adoptar  $r = 10$  ha mostrado buenos resultados en las simulaciones realizadas.

La característica no lineal del modelo estructural presentado genera cierta incertidumbre a la hora de aplicar el criterio dado por (V-30). Esto se debe a que a medida que el sistema evoluciona la matriz de rigidez tangente varía y con ella el subespacio de modos tangentes. Dicho esto, al fijar un paso de tiempo estructural basado en los primeros  $m$  modos tangentes del sistema, debe evaluarse la sensibilidad de la máxima frecuencia incluida para procurar que el criterio dado por (V-30) conserve su validez durante toda la simulación. Por otro lado, si se prevén grandes variaciones de las frecuencias del sistema el paso de tiempo estructural deberá ser definido en consecuencia. En situaciones límites en las que el sistema analizado no permita estimar a priori un rango de frecuencias durante la simulación deberá evaluarse obviar la reducción de orden y trabajar con el sistema completo incluyendo en el cálculo del paso de tiempo estructural a la máxima frecuencia natural con un margen razonable.

El modelo aerodinámico, por su parte, impone otra naturaleza de condiciones a la discretización temporal de la simulación. En el UVLM existe un requisito de regularidad que da estabilidad y mejora los resultados de la simulación. En general, debe procurarse que los anillos vorticosos de la estela, que

se convectan en cada paso de tiempo, sean geoméricamente similares a aquellos que se encuentran sobre las grillas adheridas. Esto quiere decir que, tomando en cuenta la Figura V-8, los resultados de la simulación aerodinámica mejorarán en la medida que se asegure que

$$c_a \cong c_e \quad (\text{V-31})$$

Donde  $c_a$  es el ancho característico de los paneles de la grilla aerodinámica en el sentido de la cuerda y  $c_e$  es el ancho del anillo vorticoso convectado en la estela también en el sentido de la cuerda.

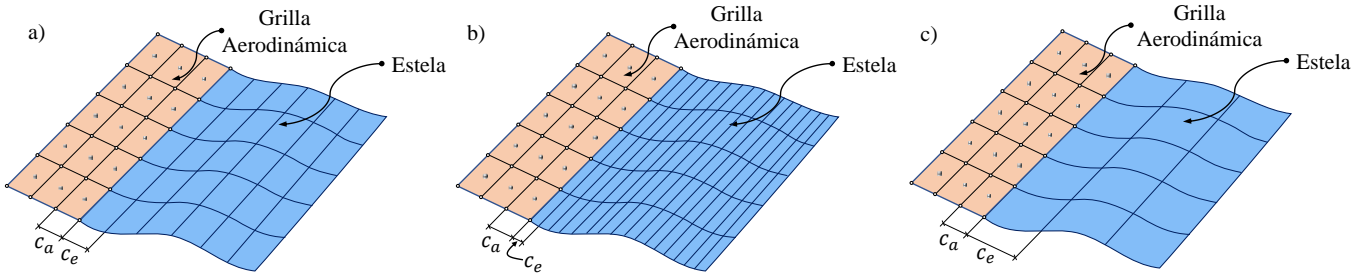


Figura V-8: Tamaño de anillos en la estela en función del paso de tiempo aerodinámico.

Idealmente, el paso de tiempo debe definirse para que  $c_a = c_e$ , como se muestra en la Figura V-8 a). En contrapartida, los casos como los de la Figura V-8 b) y c) deben evitarse.

La convección de la estela se realiza actualizando la posición de cada nodo  $\mathbf{X}_i(t)$  con la velocidad local del flujo  $\mathbf{U}_i(t)$ , esto es, de acuerdo a (IV-35) y (IV-42)

$$\mathbf{X}_i(t + \Delta t) = \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{U}_i(t) \Delta t, \quad \mathbf{U}_i(t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{V}_i(t) \quad (\text{V-32})$$

Donde se omitió la dependencia con las coordenadas espaciales y  $\mathbf{U}_i(t)$  se compone de dos términos, el primero corresponde a la velocidad de la corriente libre  $\mathbf{V}_\infty$  y el segundo a la velocidad asociada a las perturbaciones producidas por los cuerpos inmersos  $\mathbf{V}(\mathbf{X}, t)$ . Luego, como se asume que  $\mathbf{V}_\infty > \mathbf{V}_i(t)$  de la condición dada por (V-31) se deduce el paso de tiempo conveniente para la porción aerodinámica de la simulación multi-física, es decir

$$c_a \cong c_e \cong \|\mathbf{X}_i(t + \Delta t) - \mathbf{X}_i(t)\| = \|\mathbf{U}_i(t)\| \Delta t \cong \|\mathbf{V}_\infty\| \Delta t \quad (\text{V-33})$$

$$\Delta t_a \cong \frac{c_a}{\|\mathbf{V}_\infty\|} \quad (\text{V-34})$$

Donde se asumió que  $\|\mathbf{U}_i(t)\| \cong \|\mathbf{V}_\infty\|$  y que  $c_e \cong \|\mathbf{X}_i(t + \Delta t) - \mathbf{X}_i(t)\|$ . De este modo, (V-34) constituye una buena aproximación para  $\Delta t_s$  que es el paso de tiempo apropiado para el modelo aerodinámico.

Con base en lo anterior, el paso de tiempo estructural generalmente resulta menor que el paso de tiempo aerodinámico. Esto se debe a que las velocidades máximas admisibles en el modelo aerodinámico están restringidas por las hipótesis fundamentales del mismo haciendo que el resultado de la expresión (V-34) tenga un límite superior para un valor de  $c_a$  determinado.

Como se expuso al inicio de la Sección V. 3 el esquema numérico adoptado impone una restricción adicional a los pasos de tiempo definidos para cada modelo. Esta restricción está dada por la relación (V-22) y requiere que el paso de tiempo aerodinámico sea una cantidad entera de veces mayor que el paso de tiempo estructural. El método más simple para satisfacer esta restricción consiste en modificar el valor del parámetro  $r$  en la expresión (V-30) reduciendo el paso de tiempo estructural al valor más próximo que cumpla con (V-22).

Conceptualmente, el paso de tiempo de la simulación puede fijarse de forma arbitraria para luego ajustar en consecuencia la densidad de la malla aerodinámica y la máxima frecuencia a considerar de la estructura. A pesar de esto, el costo computacional se vuelve determinante desde el punto de vista de la aplicabilidad del modelo. Este aspecto hace referencia al tiempo neto de cómputo que requiere una simulación para arrojar resultados útiles y, de ser excesivo, puede volverse prohibitivo. Considerando los recursos computacionales como constantes, la densidad de la grilla aerodinámica y la cantidad de modos tangentes de la estructura influirán directamente en el paso de tiempo de la simulación, determinando así qué tan costosa será desde el punto de vista computacional.

## V. 5 Estudio de fenómenos aeroelásticos

El estudio del comportamiento aeroelástico de un sistema se realiza a partir de simulaciones utilizando el modelo combinado y la secuencia descrita en la Sección V. 3. Como se mencionó, el presente trabajo se enfoca en el *pandeo aerodinámico* y en el acoplamiento o interacción que pueda existir entre éste y el *flutter*. En general, el resultado objetivo es el valor de velocidad de la corriente libre que provoca la aparición de algún fenómeno aeroelástico en el sistema, denominada velocidad crítica, para luego analizar el comportamiento precrítico (para velocidades menores) y, de ser posible, el comportamiento postcrítico (para velocidades por encima del valor crítico).

El estudio realizado en cada simulación consiste en analizar la respuesta de un sistema ante determinadas condiciones. Cada simulación se inicia como un arranque impulsivo, esto es, en el instante inicial los cuerpos se ponen en movimiento con una velocidad constante prefijada: la velocidad de la corriente libre  $V_{\infty}$ . Luego del instante inicial se analiza la evolución temporal del sistema y se caracteriza su comportamiento en función de la respuesta obtenida. Este proceso se repite barriendo un rango de condiciones hasta que los fenómenos de interés se manifiestan.

Teniendo en cuenta los objetivos del presente trabajo, las simulaciones pueden iniciarse con dos tipos de arranques impulsivos: sin perturbar y perturbado. El primer tipo, el arranque impulsivo sin perturbar suele aplicarse en simulaciones destinadas a identificar el *pandeo aerodinámico* y es el más simple de ambos. En el arranque impulsivo sin perturbar, la velocidad de la corriente libre si fija en el instante inicial y permanece constante durante toda la simulación.

En el segundo tipo de arranque impulsivo, el perturbado, se adiciona una perturbación inicial al sistema que luego de un breve intervalo de tiempo desaparece. Dependiendo del caso, las perturbaciones pueden introducirse sobre la estructura o sobre el flujo. Las perturbaciones estructurales se introducen como desplazamientos o velocidades iniciales prefijados que se superponen, en el instante inicial, a la configuración indeformada de la estructura. Mientras que, una perturbación del flujo se introduce como una componente de velocidad que se adiciona a la velocidad de la corriente libre o bien como un sistema de anillos vorticosos libres que se mueven con el flujo.

### V. 5. 1 Análisis para la predicción del pandeo aerodinámico.

El estudio del *pandeo aerodinámico* se identifica con el análisis de estabilidad de la estructura que se realiza a medida que la simulación avanza (ver Figura V-7). Luego, para investigar la posible pérdida de estabilidad del sistema debida al fenómeno de pandeo aerodinámico, el foco se centra en la matriz de rigidez global,  $\mathbf{K}$ , definida anteriormente como

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g \quad (\text{V-35})$$

Donde  $\mathbf{K}_e$  es la matriz de rigidez elástica global del sistema y  $\mathbf{K}_g$  es la matriz de rigidez geométrica global del sistema.

De acuerdo a lo presentado en la Sección III. 3, la matriz de rigidez geométrica de cada elemento estructural es una función de sus grados de libertad, por lo que la matriz de rigidez geométrica global del sistema depende, también, de los grados de libertad globales. Entonces,  $\mathbf{K}_g$  debe evaluarse en cada paso de tiempo a partir de la configuración deformada  $\mathcal{B}$  de la estructura que, como se mencionó, dependerá de la respuesta del sistema a las cargas aerodinámicas actuantes y, en consecuencia, también lo hará  $\mathbf{K}$ . Esta dependencia permite la existencia de una configuración deformada  $\mathcal{B}^*$  de la estructura tal que los valores que alcancen los grados de libertad vuelvan singular a la matriz de rigidez aerodinámica. Si esto ocurre, los desplazamientos de la estructura se vuelven indeterminados y las deformaciones conducen al colapso.

La condición para la cual el efecto combinado de cargas aerodinámicas y deformación estructural produce la singularidad de la matriz de rigidez global del sistema se identifica con la condición crítica de inestabilidad que da lugar al fenómeno de pandeo aerodinámico. Luego, el proceso de búsqueda de esta condición, que estará íntimamente relacionada al valor de velocidad de la corriente libre, consiste en calcular en cada paso de la simulación los autovalores de la matriz  $\mathbf{K}$  entendiendo que, si alguno de ellos se anula, la matriz se vuelve singular y se produce la inestabilidad de la estructura.

En la configuración indeformada,  $\mathbf{K}_g$  es nula por lo que  $\mathbf{K} = \mathbf{K}_e$  y tanto sus determinantes como autovalores son idénticos. A medida que la simulación evoluciona en el tiempo, la matriz de rigidez geométrica del sistema se modifica como consecuencia de la deformación que las cargas aerodinámicas producen sobre la estructura. Esto, a su vez, produce la variación de los autovalores de  $\mathbf{K}$  lo que puede conducir a la inestabilidad del sistema. En general, esta variación es progresiva y tiene cierta continuidad debido a las propiedades de la estructura, lo que significa que, de producirse el pandeo aerodinámico, será porque el menor de los autovalores de  $\mathbf{K}$  (referidos a la configuración indeformada  $\mathcal{B}_0$ ) se vuelve nulo en una configuración deformada  $\mathcal{B}^*$ .

Una consideración adicional debe realizarse respecto a la influencia de la reducción de orden modal aplicada al modelo estructural en la determinación del pandeo aerodinámico de un sistema. Esta consideración se basa en lo expuesto en (V-28) y refiere a si es posible asumir que la condición de singularidad de  $\mathbf{K}$  implica la de  $\tilde{\mathbf{K}}$  y viceversa. Donde  $\tilde{\mathbf{K}}$  es la matriz de rigidez tangente del sistema reducido de orden, dada por

$$\tilde{\mathbf{K}} = \Phi^T \mathbf{K}_t(q_0) \Phi \quad (\text{V-36})$$

Para relacionar los determinantes de  $\mathbf{K}$  y de su versión reducida  $\tilde{\mathbf{K}}$  puede recurrirse a la expansión de Laplace (o expansión en matrices menores) [97] y a la propiedad multiplicativa del determinante [98]. Sin embargo, ambas reglas asumen que  $\tilde{\mathbf{K}}$  es una matriz no singular y pierden validez a medida que el determinante de  $\tilde{\mathbf{K}}$  se aproxima a cero, haciéndolas inaplicables al caso aquí tratado. En este sentido, no es posible asegurar a priori que cuando la matriz de rigidez tangente del sistema reducido por superposición modal es singular, también lo sea la matriz de rigidez global completa. Esto es, la condición para la cual  $\det \tilde{\mathbf{K}} = 0$  por sí sola no garantiza que  $\det \mathbf{K} = 0$ . Normalmente la relación entre ambos determinantes está sujeta a aspectos particulares de cada caso de estudio y esto debe ser tenido en cuenta al interpretar los resultados.

A pesar de lo anterior, existen criterios generales respecto a la cantidad de modos tangentes a considerar para lograr una aproximación satisfactoria en la determinación de inestabilidades en un sistema de orden reducido. En primer lugar, no debe restringirse por completo ningún tipo de

movimiento, es decir, deben por lo menos incluirse modos que sean predominantemente flexionales (en ambos planos), torsionales y axiales. Por otro lado, si se espera o prevé que la respuesta de la estructura se desarrolle mayoritariamente con algún tipo de desplazamiento, es recomendable considerar una mayor cantidad de autovectores asociados al desplazamiento esperado [92]. En general, es recomendable estudiar la convergencia de la respuesta estructural respecto de la dimensión del subespacio de modos sobre el cual se expande la solución y, en función de estos resultados, escoger la cantidad de formas modales apropiada. En base a esto, en el capítulo de resultados se presenta un ejemplo representativo sobre el cual se analiza la influencia de la reducción de orden en la respuesta estructural obtenida.

Otro parámetro del sistema que aporta información adicional a la hora de evaluar la inestabilidad del mismo es la energía elástica, es decir

$$U_e = \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} \quad (\text{V-37})$$

Por su definición, la energía elástica del sistema representa un importante indicador a considerar ya que, cuando el sistema se encuentre próximo a la inestabilidad, acusará un comportamiento característico que mostrará oscilaciones, crecimientos o disminuciones marcadas.

## V. 5. 2 Análisis para la predicción de flutter

La velocidad crítica de flutter del sistema es aquella para la cual los movimientos oscilatorios producidos por las perturbaciones no se amortiguan ya que el acoplamiento entre fuerzas elásticas y aerodinámicas sostiene las oscilaciones a lo largo del tiempo. Por encima de la velocidad crítica de flutter, la inestabilidad oscilatoria auto-excitada del sistema produce oscilaciones de ciclo límite (LCO, por sus siglas en inglés) con amplitudes que crecen a medida que la velocidad aumenta. Con esto en consideración, la velocidad crítica de flutter de un sistema se determina en base al comportamiento de las oscilaciones que producen las perturbaciones introducidas.

En el estado postcrítico y con velocidades de corriente libre crecientes, los niveles de vibración pueden incrementarse lo suficiente como para causar fallas estructurales o incluso volverse destructivos. Sin embargo, en algunos casos el colapso estructural puede ser prematuro si el *flutter* interactúa con el fenómeno de *pandeo aerodinámico*. En estas situaciones, la configuración deformada  $\mathcal{B}^*$  de la estructura para la cual la matriz de rigidez aerodinámica se vuelve singular se alcanza como consecuencia de la amplitud de las LCO. Luego, el pandeo de la estructura no sucede de forma estacionaria para la velocidad de la corriente libre  $V_\infty$  dada, sino que son los efectos dinámicos asociados al *flutter* los que lo producen.

# Apéndices del Capítulo V

## Apéndice V. A : Matriz de rigidez tangente

Esta sección adicional está dedicada a introducir de forma explícita la matriz de rigidez tangente del sistema presentada en la ecuación (V-25) para ser incluida en la forma matricial de la ecuación de movimiento incremental dada en (V-26). Como se mencionó, la matriz  $\mathbf{K}_t$  se obtiene como

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}(\mathbf{q}) \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{V. A.1})$$

Donde  $\mathbf{K}(\mathbf{q}) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q})$ . Luego

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial [\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g(\mathbf{q})] \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} = \left. \frac{\partial [\mathbf{K}_e \mathbf{q} + \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) \mathbf{q}]}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{V. A.2})$$

Distribuyendo la derivada parcial se tiene

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}_e \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} + \left. \frac{\partial \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{V. A.3})$$

Dado que  $\mathbf{K}_e$  no es una función de los grados de libertad del sistema, el primer término de (V. A.3) resulta

$$\left. \frac{\partial \mathbf{K}_e \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} = \mathbf{K}_e \quad (\text{V. A.4})$$

Mientras que, por simplicidad, el segundo término de (V. A.3) se identifica como

$$\mathbf{K}_{t2} = \left. \frac{\partial \mathbf{K}_g(\mathbf{q}) \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{V. A.5})$$

Entonces,

$$\mathbf{K}_t(\mathbf{q}_0) = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{t2} \quad (\text{V. A.6})$$

Al considerar un único elemento, la versión elemental de la matriz de rigidez tangente dada en (V. A.6) es

$$\mathbf{K}_t^e = \mathbf{K}_e^e + \mathbf{K}_{t2}^e = \mathbf{K}_e^e + \frac{\partial \mathbf{K}_g^e(\mathbf{v}_e) \mathbf{v}_e}{\partial \mathbf{v}_e} \quad (\text{V. A.7})$$

Donde el superíndice  $e$  indica que las matrices corresponden al elemento,  $\mathbf{K}_e^e$  es la matriz de rigidez elástica,  $\mathbf{K}_g^e$  es la matriz de rigidez geométrica, y  $\mathbf{v}_e$  es el vector de grados de libertad del elemento, todos introducidos en la Sección III. 3. Todas las matrices son cuadradas de dimensión  $12 \times 12$  y los vectores tienen dimensión  $12 \times 1$ .

Obviando los términos asociados a los efectos del alabeo para guardar consistencia con lo expuesto en la Sección III. 3, la matriz de rigidez tangente de un elemento tiene la forma

$$\mathbf{K}_t^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e^{11} & \mathbf{K}_e^{12} \\ \mathbf{K}_e^{21} & \mathbf{K}_e^{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{t2}^{11} & \mathbf{K}_{t2}^{12} \\ \mathbf{K}_{t2}^{21} & \mathbf{K}_{t2}^{22} \end{bmatrix} \quad (\text{V. A.8})$$

Las submatrices que componen el primer término de (V. A.8) se encuentran en el Apéndice III. E, mientras que las restantes son

$$\mathbf{K}_{t2}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & k_{t2}^{12} & k_{t2}^{13} & 0 & 0 & 0 \\ & k_{t2}^{22} & k_{t2}^{23} & 0 & k_{t2}^{25} & k_{t2}^{26} \\ & & k_{t2}^{33} & 0 & k_{t2}^{35} & k_{t2}^{36} \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & sim & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{V. A.9})$$

Donde,

$$k_{t2}^{12} = \frac{EA}{l_e^2} (u_{22} - u_{21}) \quad (\text{V. A.10})$$

$$k_{t2}^{13} = \frac{EA}{l_e^2} (u_{32} - u_{31}) \quad (\text{V. A.11})$$

$$k_{t2}^{22} = \frac{EA}{2l_e^3} (3u_{21}^2 + 3u_{22}^2 + u_{31}^2 + u_{32}^2 - 6u_{21}u_{22} - 2u_{31}u_{32}) + \frac{Es_2}{l_e^2} (\psi_{22} - \psi_{21}) + \frac{Es_3}{l_e^2} (\psi_{31} - \psi_{32}) + \frac{EA}{l_e^2} (u_{12} - u_{11}) \quad (\text{V. A.12})$$

$$k_{t2}^{33} = \frac{EA}{2l_e^3} (3u_{31}^2 + 3u_{32}^2 + u_{21}^2 + u_{22}^2 - 6u_{31}u_{32} - 2u_{21}u_{22}) + \frac{Es_2}{l_e^2} (\psi_{22} - \psi_{21}) + \frac{Es_3}{l_e^2} (\psi_{31} - \psi_{32}) + \frac{EA}{l_e^2} (u_{12} - u_{11}) \quad (\text{V. A.13})$$

$$k_{t2}^{23} = \frac{EA}{l_e^3} (u_{21} - u_{22})(u_{31} - u_{32}) \quad (\text{V. A.14})$$

$$k_{t2}^{25} = \frac{Es_2}{l_e^2} (u_{22} - u_{21}) \quad (\text{V. A.15})$$

$$k_{t2}^{26} = \frac{Es_3}{l_e^2} (u_{22} - u_{21}) \quad (\text{V. A.16})$$

$$k_{t2}^{35} = \frac{ES_2}{l_e^2} (u_{31} - u_{32}) \quad (\text{V. A.17})$$

$$k_{t2}^{36} = \frac{ES_3}{l_e^2} (u_{31} - u_{32}) \quad (\text{V. A.18})$$



# Capítulo VI: Aplicaciones y Resultados



En este capítulo se presentan los resultados obtenidos a partir de simulaciones realizadas utilizando la herramienta computacional desarrollada como parte del presente trabajo, de aquí en adelante referida como HDT. Los casos de estudio analizados se organizan en cuatro grupos de acuerdo a sus características generales, al tipo de análisis que se lleva a cabo y a la clase de resultados que procuran, éstos son:

## *VERIFICACIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL.*

Las simulaciones de este grupo fueron realizadas sólo con el componente de análisis estructural de la herramienta y tienen por objetivo poner a prueba los resultados que con éste se obtienen. En este grupo se analizan dos casos de estudio.

## *VERIFICACIÓN Y VALIDACIÓN DE LA PREDICCIÓN DE FLUTTER.*

Este grupo engloba simulaciones aeroelásticas que tienen por objetivo calcular la velocidad crítica de *flutter* para distintos casos de estudio. Los resultados obtenidos son comparados con resultados de otros modelos numéricos y resultados experimentales que se encuentran publicados en la bibliografía. En este grupo se analizan dos casos de estudio.

## *VERIFICACIÓN DE LA PREDICCIÓN DE PANDEO AERODINÁMICO.*

Las simulaciones de este grupo se enfocan en determinar en qué condiciones las estructuras analizadas se inestabilizan bajo el fenómeno de pandeo aerodinámico. Para validar los resultados, se toman como referencia aquellos obtenidos por otros modelos numéricos que se encuentran publicados en la bibliografía. En este grupo se analizan dos casos de estudio.

## *CASOS DE ESTUDIO DE INTERÉS.*

El último grupo de simulaciones engloba el análisis aeroelástico de casos de estudio que resultan de interés y permiten no sólo demostrar sino también poner a prueba las potencialidades adicionales tanto del modelo numérico como de la herramienta computacional desarrollados. En este grupo se analizan dos casos de estudio.

## VI. 1 Verificación del modelo estructural

La verificación de los resultados obtenidos con el componente de análisis estructural desarrollado es un paso fundamental previo a la ejecución de simulaciones aeroelásticas. Luego, las simulaciones presentadas en esta sección utilizan dicho componente para analizar casos de estudio representativos y contrastar los resultados obtenidos con los provenientes de implementaciones de otros modelos numéricos. En este caso, se utiliza como referencia el software de elementos finitos *Ansys*

Mechanical® en su versión *Student 2022 R1*. A continuación, se exponen los dos casos de estudio seleccionados, se detallan sus características, las condiciones de simulación y los resultados obtenidos.

## VI. 1. 1 Viga “L”

El primer caso de estudio considerado en este grupo refiere a lo expuesto en la Sección V. 4. 2 y, en este sentido, tiene por objetivo evaluar la influencia de la reducción de orden modal en la predicción de inestabilidades en una estructura. Para evaluar dicha influencia, se modela una estructura simple y se la somete a cargas que crecen a medida que el tiempo avanza para así forzarla a, eventualmente, inestabilizarse. La simulación se repite considerando distintos números de modos tangentes en la base reducida y se registra, en cada caso, la evolución del primer autovalor de la matriz tangente ( $\lambda_1(t)$ ) para identificar, como se mencionó, la inestabilidad de la estructura.

### Descripción del caso de estudio

La estructura utilizada para el análisis está compuesta por una viga en forma de “L”, como la representada en la Figura VI-1 a). La viga posee una sección transversal cuadrada que es constante a lo largo de su longitud, y está construida en un material isótropo y homogéneo. A su vez, la viga se encuentra empotrada en ambos extremos y sobre su vértice actúan dos cargas puntuales que son funciones del tiempo.

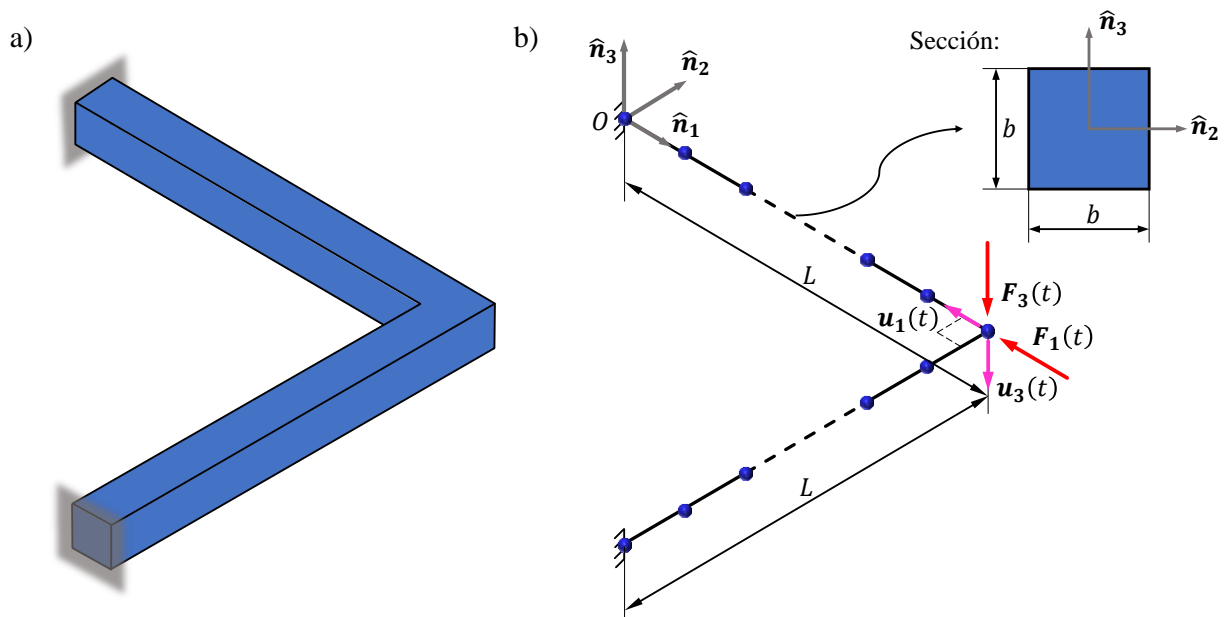


Figura VI-1: Caso de estudio Viga “L”. a) Esquema de la configuración. b) Representación numérica.

La representación numérica del caso de estudio se encuentra en la Figura VI-1 b). Aquí, se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ . Además, se dispusieron 20 elementos finitos uniformes sobre cada uno de los tramos rectos de la viga (utilizando 40 elementos en total) y se consideraron empotrados el nodo inicial y el nodo final, dando un total de  $n = 234$  grados de libertad. Las cargas  $F_1(t)$  y  $F_3(t)$  se aplicaron en el nodo central (vértice de la viga) en las direcciones  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_3$ , respectivamente. Se consideraron cargas armónicas con amplitudes que crecen linealmente con el tiempo

$$F_1(t) = 1.5 \times 10^7 t \sin(10\pi t) \hat{n}_1 [N] \quad (VI-1)$$

$$\mathbf{F}_3(t) = 1.0 \times 10^6 t \sin(10\pi t) \hat{\mathbf{n}}_3 [N]$$

Donde  $t$  representa el tiempo físico de simulación.

Para completar la descripción del modelo analizado, en la Tabla VI. A-1 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos, constitutivos y de modelado. Asimismo, en la Tabla VI-1 se detalla la longitud del paso de tiempo utilizado en las simulaciones, en función de la cantidad de modos que se incluyeron. Por último, en la Tabla VI-2 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura obtenidas con la herramienta desarrollada en este trabajo (HDT) en conjunto con las obtenidas con *Ansys Mechanical*® y el diferencia porcentual entre ambas.

Tabla VI-1: Pasos de tiempo utilizados en las simulaciones según la cantidad de Modos.

Cantidad de Modos	Paso de tiempo
5	$2.0 \times 10^{-4}$ [s]
10	$7.8 \times 10^{-5}$ [s]
20	$3.1 \times 10^{-5}$ [s]
30	$2.0 \times 10^{-5}$ [s]
40	$1.4 \times 10^{-5}$ [s]
50	$8.6 \times 10^{-6}$ [s]
100	$5.3 \times 10^{-6}$ [s]
234	$1.8 \times 10^{-6}$ [s]

Tabla VI-2: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	Ansys Mechanical® [Hz]	HDT [Hz]	Diferencia
1	92.743	92.773	0.032%
2	340.89	341.60	0.207%
3	355.75	356.49	0.209%
4	469.57	471.18	0.432%
5	501.14	502.34	0.239%
6	968.94	972.49	0.366%
7	1002.8	1005.6	0.282%
8	1028.4	1033.1	0.458%
9	1150.5	1153.8	0.291%
10	1270.2	1273.4	0.249%

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se presentan en la Figura VI-2 y en la Figura VI-3. En la primera, se encuentran graficadas las evoluciones temporales del primer autovalor de la matriz de rigidez tangente  $\lambda_1(t)$ , para simulaciones realizadas utilizando cinco (5M), diez (10M), veinte (20M), treinta (30M), cuarenta (40M), cincuenta (50M), cien (100M) modos tangentes, y la curva obtenida utilizando el modelo completo, es decir, sin reducción de orden (Full). Asimismo, se resaltan con flechas negras los puntos en los que se identifica la inestabilidad de la estructura, esto es, cuando  $\lambda_1(t) = 0$ , para cada caso.

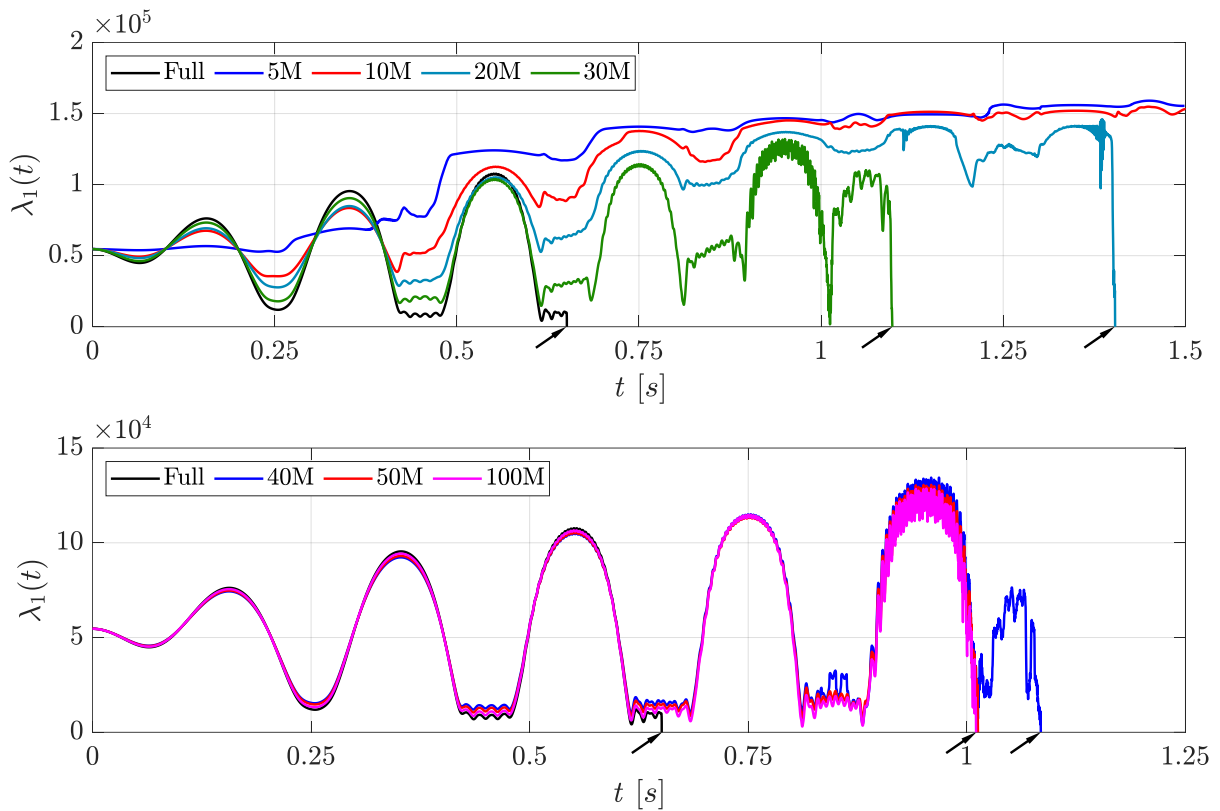


Figura VI-2: Evolución temporal del primer autovalor.

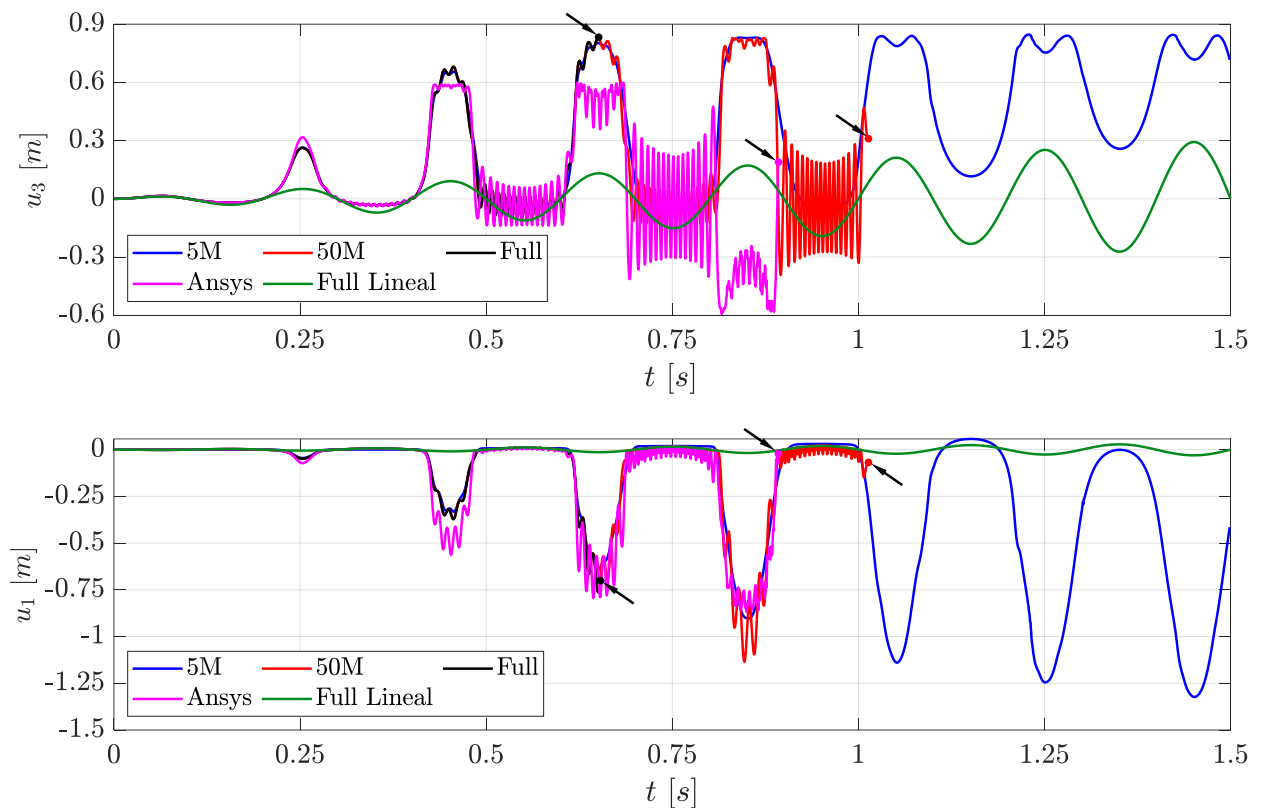


Figura VI-3: Evolución temporal del desplazamiento del vértice de la viga.

En la Figura VI-3 se muestran las evoluciones temporales del desplazamiento del vértice de la viga en las direcciones  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_3$ ,  $u_1(t)$  y  $u_3(t)$ , respectivamente. En este caso, debido a que las

respuestas son similares, sólo se incluyen curvas obtenidas con cinco modos (5M), cincuenta modos (50M) y la correspondiente al modelo completo (Full). Además, para enriquecer el análisis, se incluye el resultado obtenido con una versión lineal y completa del modelo estructural (Full Lineal), esto es, incluyendo sólo la matriz de rigidez elástica en la ecuación de movimiento y sin aplicar reducción de orden. A modo de contraste, se agrega el resultado obtenido con *Ansys Mechanical*®.

Para indicar los puntos en los que se identifica la nulidad del primer autovalor para cada simulación, se utilizaron flechas de color negro y marcadores circulares. Además, los tiempos a los que ocurren las inestabilidades se resumen en la Tabla VI-3, en correspondencia con lo mostrado en la Figura VI-2. Debe destacarse que en el caso de la simulación realizada con *Ansys Mechanical*® se considera que la estructura se inestabiliza en el momento en que el software no es capaz de lograr la convergencia de la solución y la simulación se interrumpe.

Tabla VI-3: Tiempo en el que ocurre la inestabilidad.

Simulación	Ocurrencia de la inestabilidad [s]	Diferencia
Full	0.651	0%
<i>Ansys Mechanical</i> ®	0.892	37.0%
5M	No ocurre	—
10M	No ocurre	—
20M	1.403	115.5%
30M	1.097	68.5%
40M	1.084	66.5%
50M	1.011	55.3%
100M	1.006	54.5%

### Análisis y discusión de resultados

Teniendo en cuenta que el objetivo de este caso de estudio es verificar el modelo estructural implementado, la primera observación refiere a la Tabla VI-2 donde se exponen las frecuencias naturales de la estructura contra los valores de referencia. En ella puede notarse una excelente concordancia entre ambos grupos de resultados lo que indica que la formulación y la implementación de los aspectos geométricos y constitutivos del modelo desarrollado son correctos.

A partir de la Figura VI-2 se observa que con cinco y diez modos (curvas 5M y 10M) el modelo no es capaz de capturar la inestabilidad ya que  $\lambda_1(t)$  se mantiene por encima de cero e incluso, luego de crecer, parece estabilizarse. Utilizando veinte modos, sin embargo, el comportamiento de la estructura cambia pasados los 1.25 s de simulación, donde la curva del autovalor mínimo comienza a mostrar oscilaciones importantes y luego se desploma hasta alcanzar el valor cero. Algo similar ocurre con treinta, cuarenta y cincuenta modos pasado 1.0 s de tiempo de simulación. No obstante, todos los casos difieren con el resultado obtenido con el modelo completo que encuentra la inestabilidad apenas pasados los 0.6 s.

Los resultados de la Figura VI-3 ponen en evidencia las limitaciones del modelo lineal para representar la respuesta de la estructura. En cuanto a los modelos reducidos, las respuestas obtenidas con cinco y cincuenta modos no muestran diferencias apreciables durante los primeros 0.6 s, pero a medida que la curva de 50M se aproxima al punto crítico presenta oscilaciones marcadas que no se aprecian en la de 5M. La curva del modelo completo tiene un comportamiento análogo a las anteriores, e incluso es similar a la obtenida con *Ansys Mechanical*®. La diferencia recae en que el punto de inestabilidad ocurre más prematuramente.

Los resultados muestran que la cantidad de vectores considerados es determinante a la hora de identificar la inestabilidad de la estructura, a tal punto que las bases con cinco y diez vectores no son capaces de capturar el fenómeno. No obstante, la respuesta estructural caracterizada por los desplazamientos parecería no verse sensiblemente influida por la dimensión del subespacio utilizada, ya que con un porcentaje relativamente bajo de modos los resultados son aceptables sin mostrar diferencias marcadas, mientras el sistema se encuentre lejos de la inestabilidad. Eso podría deberse a la naturaleza de las cargas externas aplicadas cuyas frecuencias se encuentran en el orden de las primeras frecuencias naturales del sistema.

Finalmente, existe, en términos generales, una buena concordancia entre los resultados obtenidos con la HDT y aquellos calculados con *Ansys Mechanical*® en lo que respecta a la respuesta estructural. Sin embargo, debido a las discrepancias que se observan en la predicción del punto crítico de inestabilidad, de aquí en adelante se utilizará el modelo completo (sin reducción de orden) para acrecentar la confiabilidad de los resultados.

## VI. 1. 2 Viga “JWA”

El segundo caso de estudio considerado en este grupo tiene por objetivo verificar la capacidad del componente de análisis estructural para describir la respuesta dinámica de una estructura frente a una carga arbitraria. En esta oportunidad, se selecciona una estructura compuesta por dos vigas que, de un modo simple, se asemeja a la estructura que forma el ala de una aeronave con configuración de alas unidas (JWA). A continuación, se describe la configuración, para luego exponer algunos resultados y conclusiones.

### Descripción del caso de estudio

La estructura utilizada para el análisis está compuesta por dos vigas rectas de sección constante que representan el ala trasera y el ala delantera de una JWA. Como se esquematiza en la Figura VI-4, la viga que representa el ala delantera posee flecha y diedro positivos y se encuentra empotrada en uno de sus extremos (punto  $O$ ) y libre en el restante (punto  $a$ ). Por su parte, la viga que representa al ala trasera cuenta con flecha y diedro negativos, también se encuentra empotrada en uno de sus extremos (punto  $c$ ), pero el extremo restante se une al ala delantera en un punto denominado “*unión*” (punto  $b$ ).

La sección transversal escogida es idéntica para ambas vigas y se mantiene constante a lo largo de sus longitudes. La sección se compone de un cajón rectangular y dos alas laterales con espesor uniforme, de acuerdo al esquema de la Figura VI-5. Además, las secciones de cada viga están orientadas de acuerdo a los sistemas de referencia locales  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  con el origen ubicado en su centroide.

La representación numérica del caso de estudio se encuentra en la Figura VI-5. Aquí, se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$ . Además, se dispusieron 10 elementos finitos uniformes sobre el ala trasera, 10 elementos finitos uniformes sobre el tramo interior a la unión del ala delantera, y 3 elementos finitos uniformes por fuera de la unión. Teniendo en cuenta los dos nodos empotrados y la conexión rígida en el punto de unión, el modelo tiene un total de  $n = 132$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que las respuestas de la estructura corresponden al modelo “completo”.

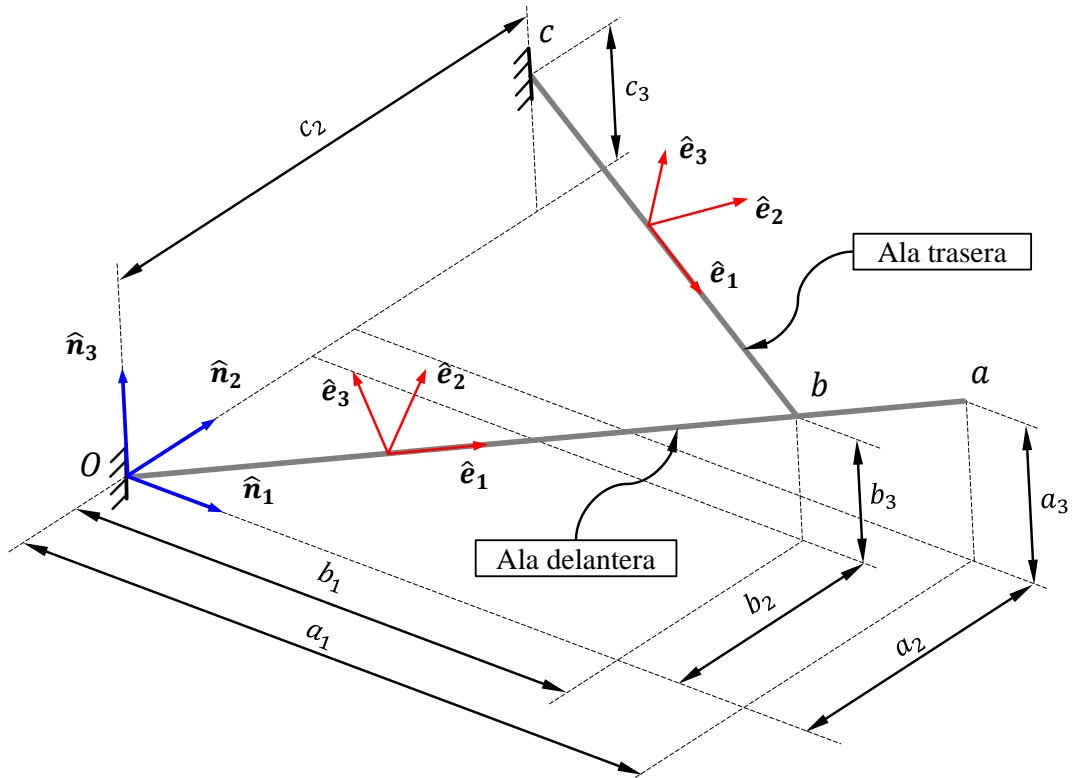


Figura VI-4: Caso de estudio Viga “JWA”, esquema de la configuración.

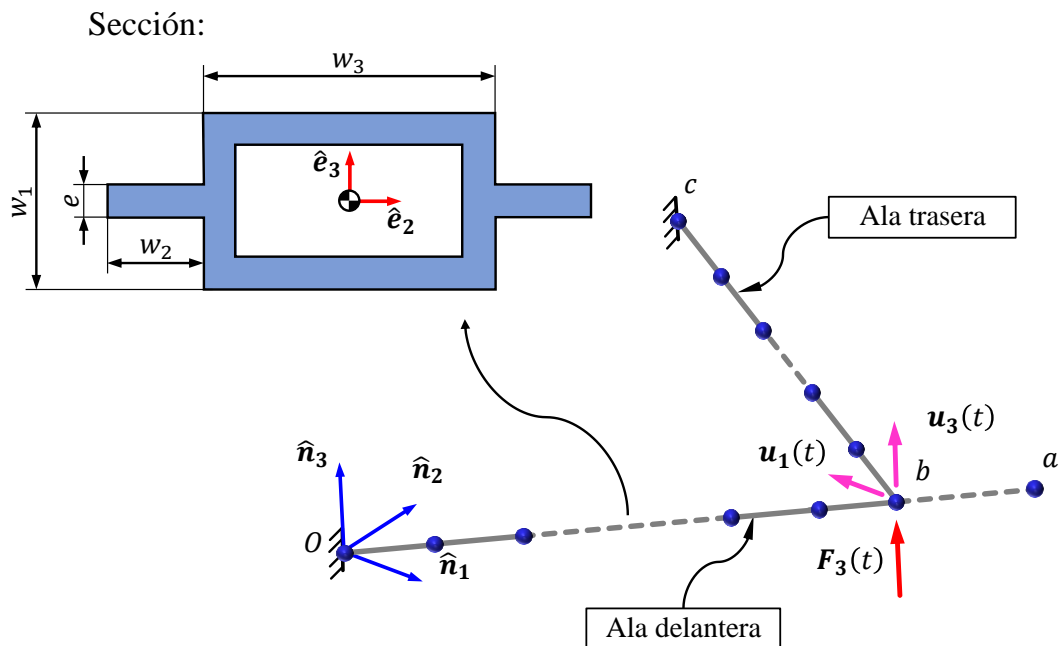


Figura VI-5: Caso de estudio Viga “JWA”, sección y representación numérica.

Por otro lado, sobre el sistema actúa sólo la carga  $F_3(t)$  que posee dirección  $\hat{n}_3$  y está aplicada sobre el punto de unión.  $F_3(t)$  está definida por tramos en el dominio del tiempo como una función escalón, esto es (ver Figura VI-6)

$$F_3(t) = \begin{cases} 30.0 \hat{n}_3 \text{ [KN]}, & 0 \leq t \leq 0.05 \text{ [s]} \\ 0.0, & t > 0.05 \text{ [s]} \end{cases} \quad (\text{VI-2})$$

Donde  $t$  representa el tiempo físico de simulación y va desde 0.0 s hasta 0.5 s.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-2 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos, constitutivos y de modelado. Asimismo, en la Tabla VI-4 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura obtenidas con la herramienta desarrollada en este trabajo (HDT) en conjunto con las obtenidas con *Ansys Mechanical*® y el diferencia porcentual entre ambas

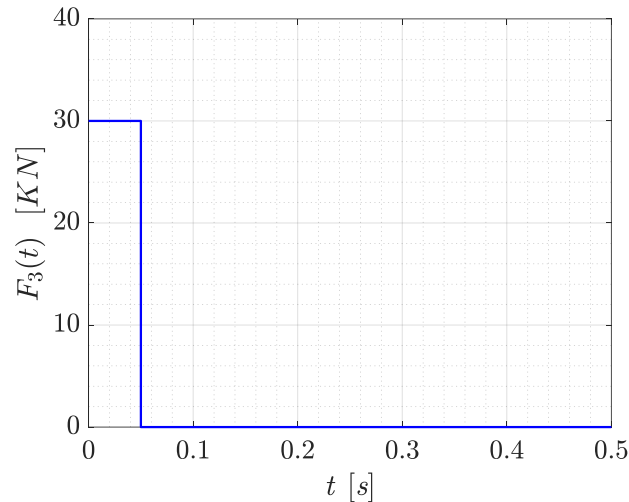


Figura VI-6: Carga externa aplicada a la estructura en función del tiempo.

Tabla VI-4: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	Ansys® [Hz]	HDT [Hz]	Diferencia
1	0.3666	0.3667	0.007%
2	1.8013	1.8014	0.008%
3	2.0597	2.0597	0.000%
4	4.1999	4.2020	0.051%
5	4.6274	4.6180	0.202%
6	5.5789	5.5632	0.281%
7	6.5957	6.5769	0.284%
8	8.8592	8.7649	1.064%
9	10.919	10.901	0.162%
10	12.333	12.014	2.584%

## Resultados

Los resultados de la simulación consisten en la respuesta de la estructura a lo largo del tiempo ante la aplicación de la carga  $F_3(t)$ . Al respecto, se presentan en la Figura VI-7 los desplazamientos  $u_1(t)$  y  $u_3(t)$  del punto de unión en función del tiempo, en las direcciones  $\hat{n}_1$  y  $\hat{n}_3$ , respectivamente. Estos resultados se encuentran contrastados con los obtenidos en *Ansys Mechanical*® con los mismos parámetros de simulación, utilizando un modelo lineal y uno no lineal. Luego, en la Figura VI-8 se encuentran graficadas las diferencias porcentuales entre los grupos de resultados obtenidos con los modelos no lineales.



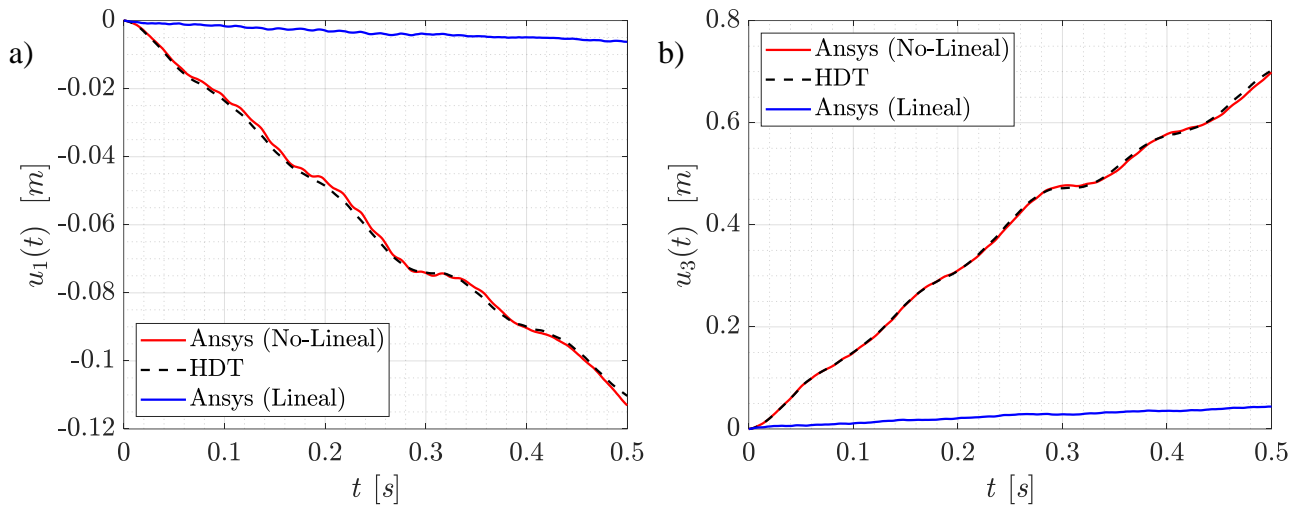


Figura VI-7: Desplazamientos del punto de unión. a)  $u_1(t)$ . b)  $u_3(t)$ .

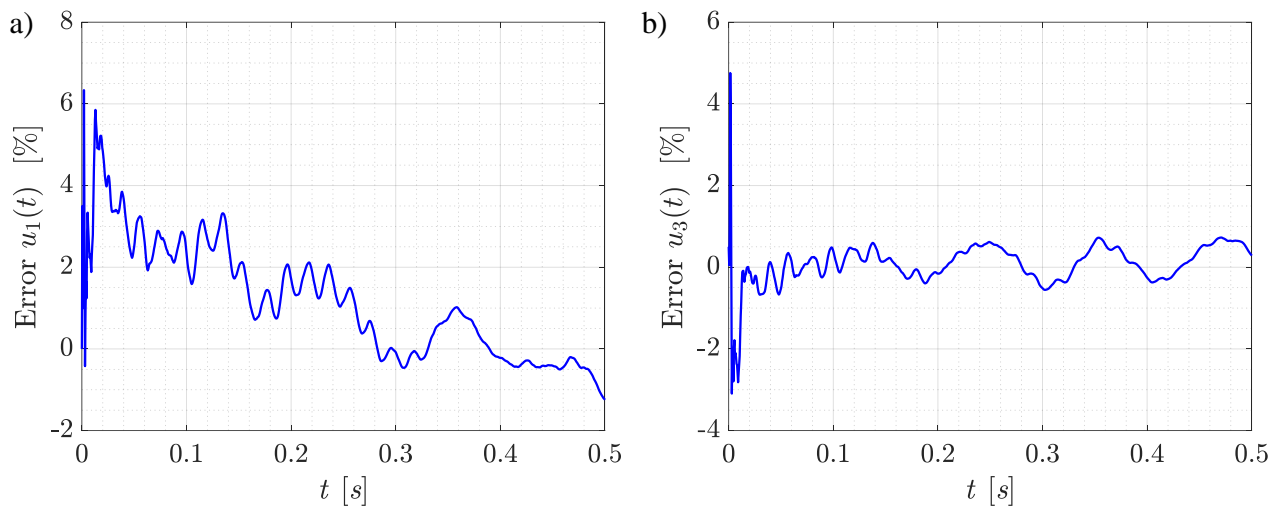


Figura VI-8: Diferencia porcentual en los desplazamientos del punto de unión. a)  $u_1(t)$ . b)  $u_3(t)$ .

### Análisis y discusión de resultados

Nuevamente y con base en la tabla donde se exponen las frecuencias naturales de la estructura contra los valores de referencia, puede concluirse que la formulación y la implementación de los aspectos geométricos y constitutivos del modelo desarrollado son correctos. Esto se debe a que existe concordancia entre ambos grupos de resultados.

En cuanto a los desplazamientos del punto de unión, la Figura VI-7 revela una correspondencia aceptable en ambos casos, aunque la similitud es mayor en el caso del desplazamiento vertical  $u_3(t)$ . Sin embargo, debe destacarse que la buena aproximación que existe en los resultados del desplazamiento horizontal  $u_1(t)$  indica que el modelo estructural desarrollado captura de forma exitosa los efectos no lineales que producen desplazamientos transversales a las cargas aplicadas sobre la estructura, que es uno de los principales objetivos de la inclusión de los términos de Von Kármán. En términos generales, las diferencias obtenidas poseen máximos que apenas superan el 6% respecto a los resultados de *Ansys Mechanical*® y tienden a mantenerse por debajo del 2%. Asimismo, y como era de esperarse, el modelo lineal resulta incapaz de capturar los efectos buscados (ver Figura VI-7).

## VI. 2 Verificación y validación de la predicción de flutter

Luego de haber presentado algunos casos de validación para el componente estructural desarrollado, se utiliza la herramienta de simulación completa para estudiar sistemas aeroelásticos. En esta sección, se analizan dos casos con el objetivo de predecir la velocidad crítica de *flutter* del sistema. Ambos ejemplos son utilizados como referencia para la verificación y validación de los resultados. A continuación, se exponen los dos casos de estudio seleccionados, se detallan sus características, las condiciones de simulación y los resultados obtenidos.

### VI. 2. 1 Ala simple SW-UAV 1

El primer caso de estudio considerado en este grupo representa el ala del UAV presentado por W. Su [34] y tiene por objetivo, como se mencionó, verificar la capacidad de la herramienta desarrollada en este trabajo para predecir la velocidad crítica de *flutter*. El sistema se compone de un ala empotrada-libre que se modela con una viga recta con esas mismas condiciones de borde y una grilla aerodinámica asociada. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

#### Descripción del caso de estudio

El sistema “Ala simple SW-UAV 1” consiste en un ala cantiléver flexible, como la representada en la Figura VI-9, que enfrenta una corriente libre horizontal (en dirección  $\hat{n}_1$ ) con una perturbación inicial. La estructura del sistema está conformada por una viga recta con uno de sus nodos extremos empotrado, y cuyas propiedades varían a lo largo de su longitud. Por su parte, la superficie sustentadora del ala posee diedro y ahusamiento, y un perfil aerodinámico NACA 4415.

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  (ver Figura VI-9). Para representar la viga, se utilizaron 9 elementos finitos uniformes que se orientan según el sistema de referencia local  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y, teniendo en cuenta el nodo empotrado, el modelo estructural cuenta con  $n = 54$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”.

La grilla aerodinámica utilizada cuenta con 8 paneles en la dirección de la cuerda y 40 en la dirección de la envergadura. La sección transversal de la grilla está dada por la línea media (MCL) del perfil aerodinámico NACA 4415 y se reduce linealmente desde la cuerda raíz hasta la cuerda puntera (ver Figura VI-9).

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-3 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-9. Además, en la Tabla VI. A-4 del Apéndice VI. A se detallan las propiedades equivalentes de cada elemento de la malla estructural, numerados de 1 hasta 9 desde la raíz hacia la puntera. Por último, en la Tabla VI-5 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura, obtenidas con las mencionadas propiedades, así como también, en la Figura VI-10, se muestran las seis primeras formas modales.

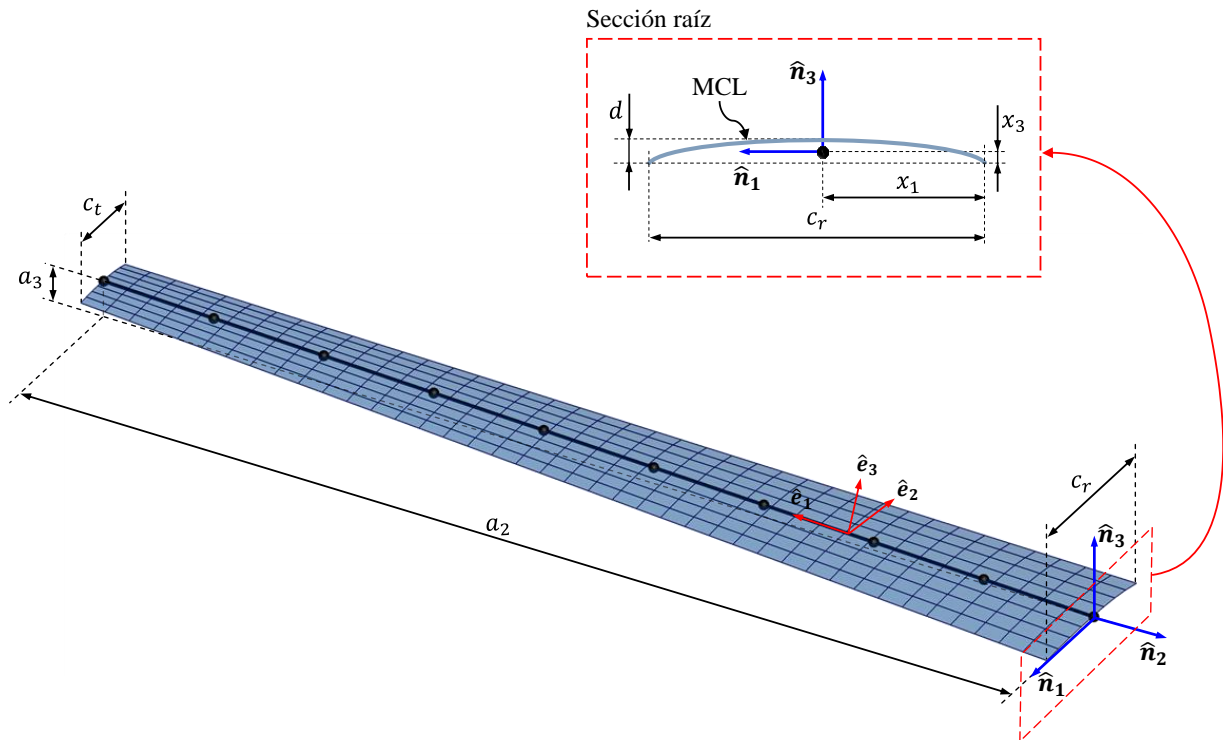


Figura VI-9: Caso de estudio “Ala simple SW-UAV 1”, esquema de configuración.

Tabla VI-5: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	Frecuencia [Hz]	$i$	Frecuencia [Hz]
1	0.80266	6	14.3970
2	3.30449	7	15.9492
3	3.61765	8	19.5696
4	8.26223	9	26.9365
5	9.70740	10	31.2707

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se basan en el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo para distintos valores de velocidad de la corriente libre, luego de aplicar una perturbación inicial modelada como un flujo vertical de velocidad  $u = 5.0 \text{ m/s}$  con 2 pasos de tiempo de duración. Para estas condiciones, se confeccionan diagramas de bifurcación y de fase para identificar la aparición del fenómeno de *flutter*.

En la Figura VI-11, se encuentran los diagramas de bifurcación del sistema donde las variables de referencia son el desplazamiento vertical de la puntera  $u_3(t)$  y el giro de torsión de la puntera  $\theta_2(t)$ . Como es habitual, sobre el eje horizontal se encuentra la velocidad de la corriente libre mientras que en el eje vertical se miden las amplitudes de oscilación de las variables de referencia.

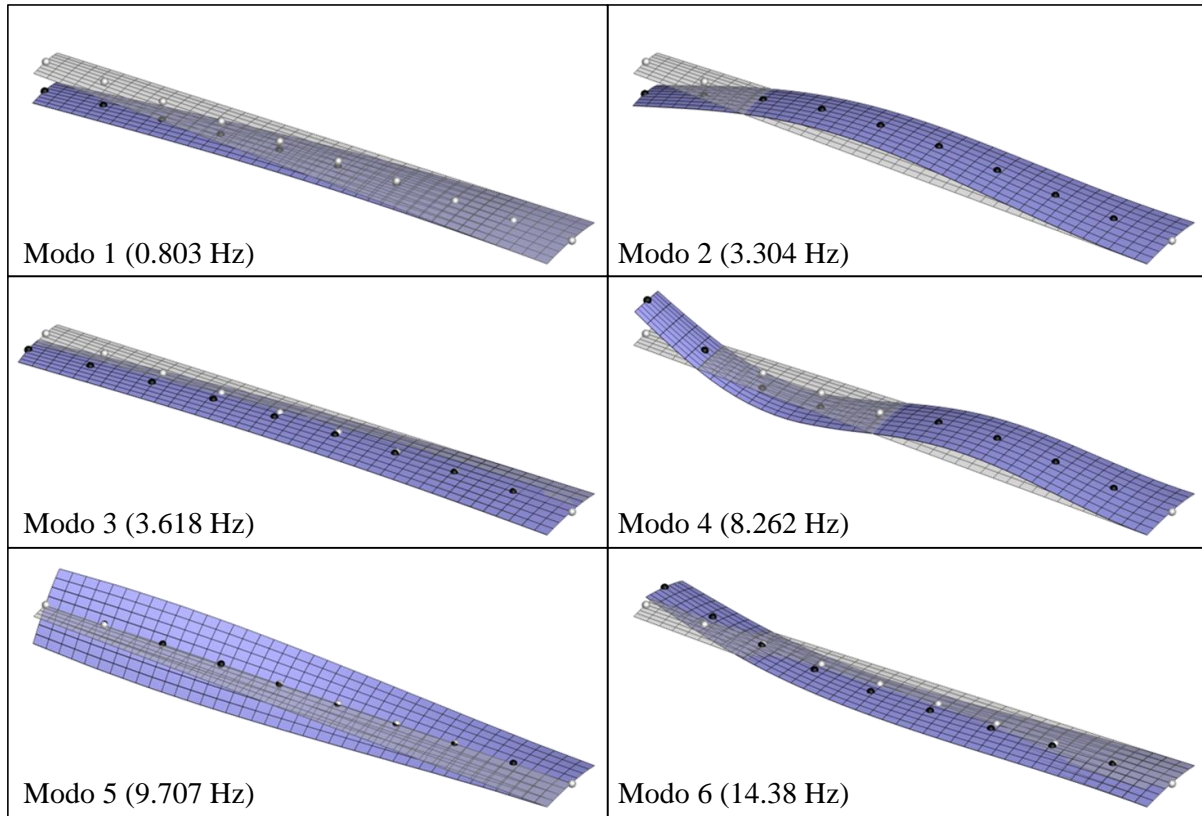


Figura VI-10: Formas modales del caso de estudio “Ala simple SW-UAV 1”.

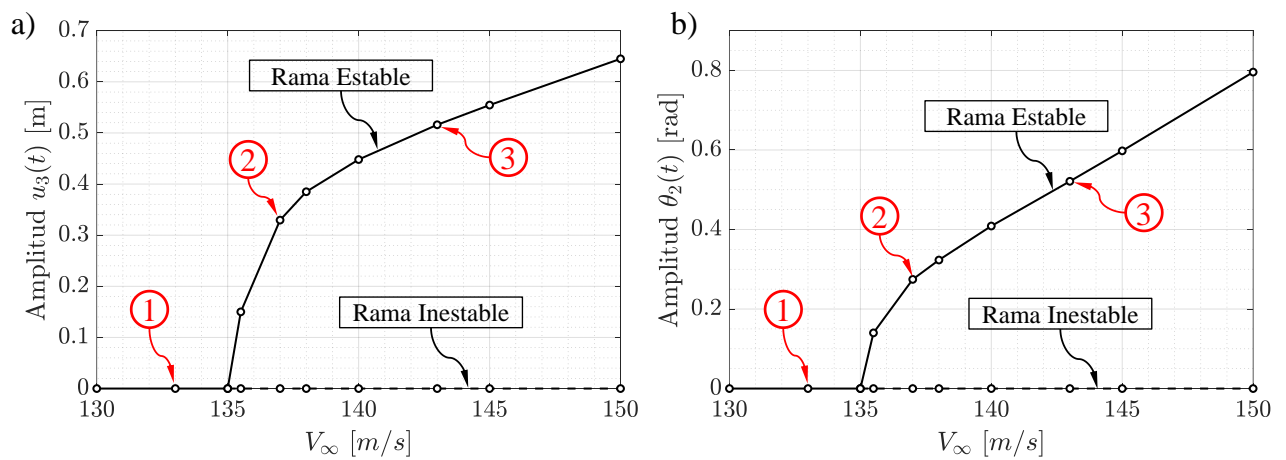


Figura VI-11: Diagramas de bifurcación. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_2(t)$ .

Asimismo, en la Figura VI-11 se identifican con marcadores rojos tres puntos de interés que corresponden a 133.0 m/s, 137.0 m/s y 143 m/s. Para estos valores de velocidad se presentan los diagramas de fase en la Figura VI-12, la Figura VI-13 y la Figura VI-14, respectivamente. En estos diagramas, el punto inicial de la simulación se indica con un marcador circular color magenta y se resalta en color azul el estado que alcanza el sistema luego de un transitorio, ya sea un punto fijo o una LCO.

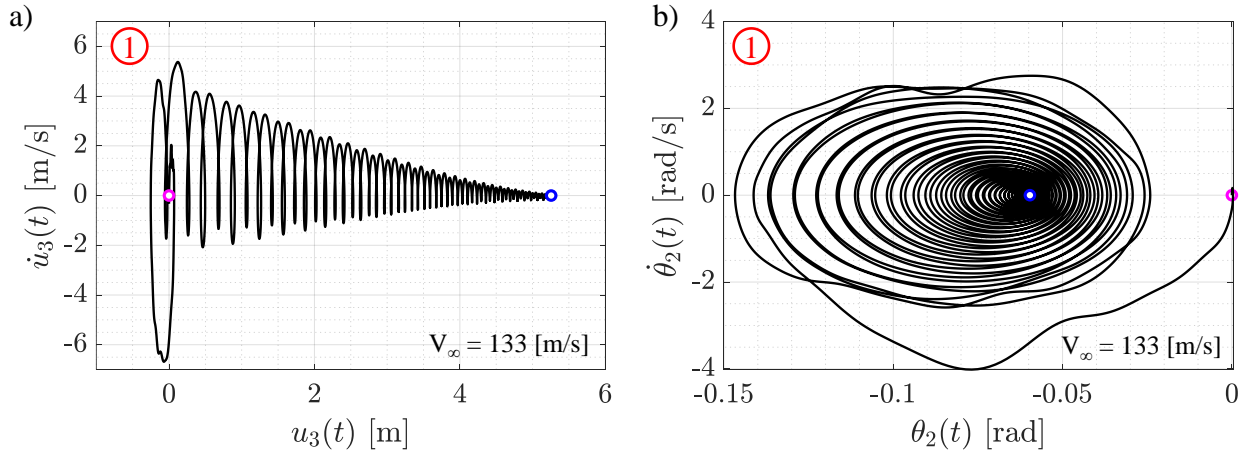


Figura VI-12: Diagramas de fase para  $V_\infty = 133$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_2(t)$ .

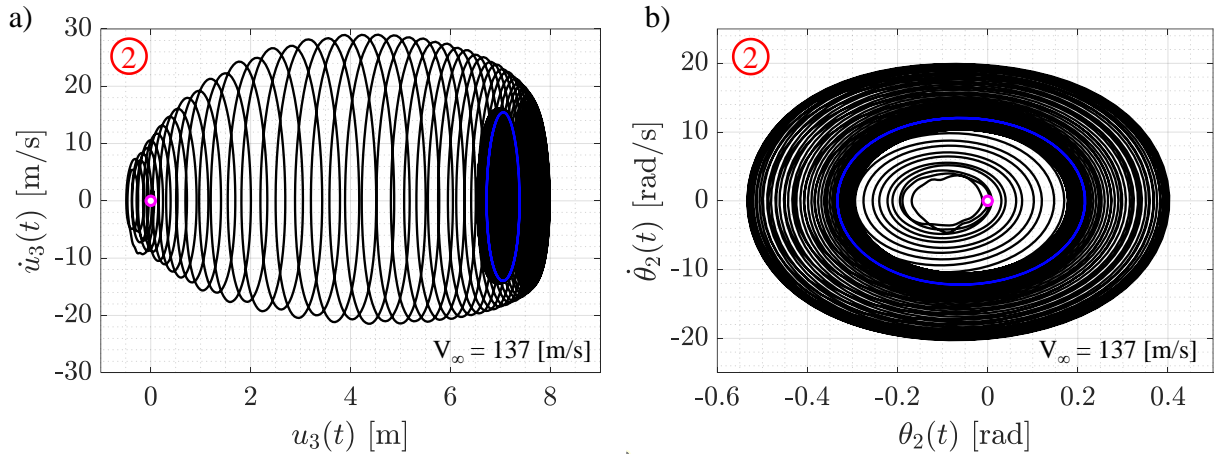


Figura VI-13: Diagramas de fase para  $V_\infty = 137$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_2(t)$ .

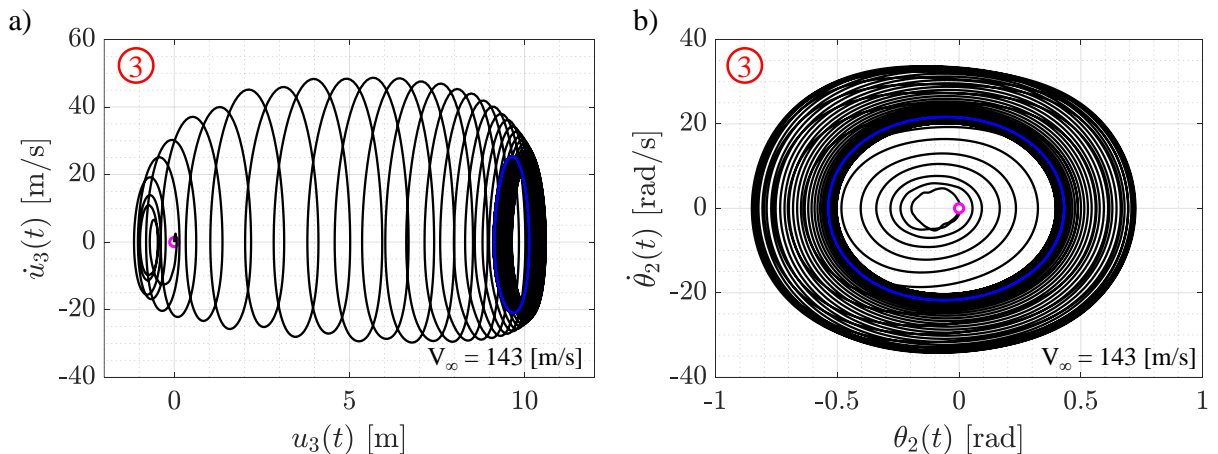


Figura VI-14: Diagramas de fase para  $V_\infty = 143$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_2(t)$ .

Con el objetivo de complementar los resultados anteriores, en la Figura VI-15 a) se muestra el estado de la estela en la simulación correspondiente a una velocidad de corriente libre  $V_\infty = 137$  [m/s], habiendo transcurrido un tiempo  $t = 17.767$  [s]. En ese mismo estado, la distribución de presiones sobre la grilla aerodinámica es la que se presenta en la Figura VI-15 b).

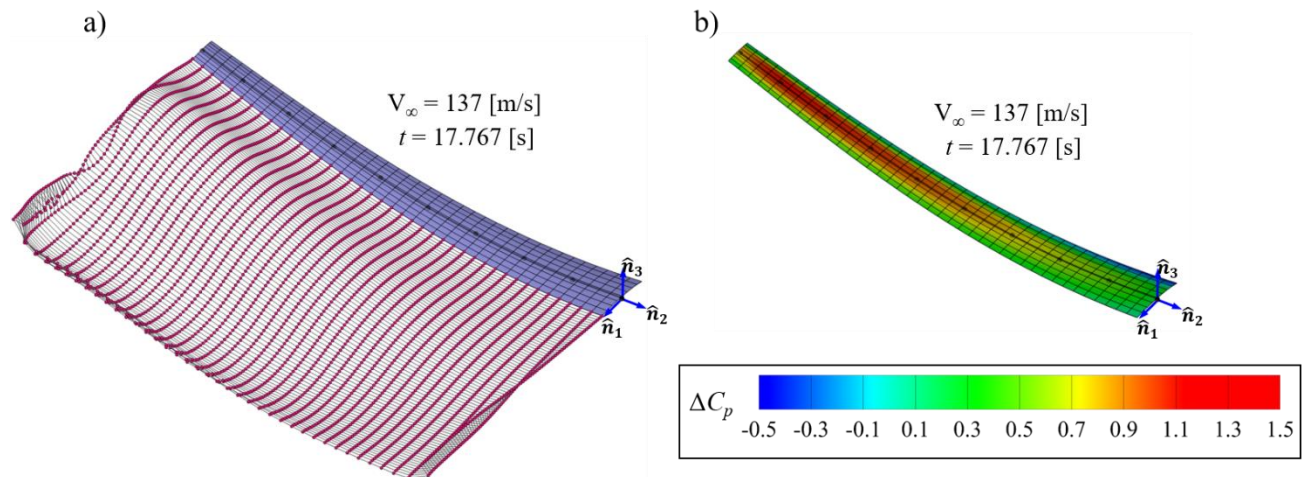


Figura VI-15: Simulación a  $V_\infty = 137$  [m/s] y  $t = 17.767$  [s]. a) Visualización de la estela. b) Distribución de coeficiente de presión.

El último set de resultados del sistema “Ala simple SW-UAV 1” que se presenta tiene por motivación estudiar la aplicabilidad de un modelo estructural lineal en las simulaciones. Para ello, se consideran dos simulaciones con los parámetros antes introducidos y una velocidad de la corriente libre precrítica de  $V_\infty = 130$  [m/s]. En la primera de ellas, se utiliza la versión lineal del modelo estructural presentado en el Capítulo 2 en el componente de análisis estructural, mientras que en la segunda se utiliza el modelo estructural con las no linealidades introducidas. Luego de 10 s de simulación, las posiciones de la estructura obtenidas en cada caso son las que se muestran en la Figura VI-16 y en la Figura VI-17, en ésta última contrastada contra la posición indeformada. Adicionalmente, en la Figura VI-18 se grafica la evolución temporal del desplazamiento vertical de la puntera destacando la diferencia entre el resultado obtenido con cada modelo.

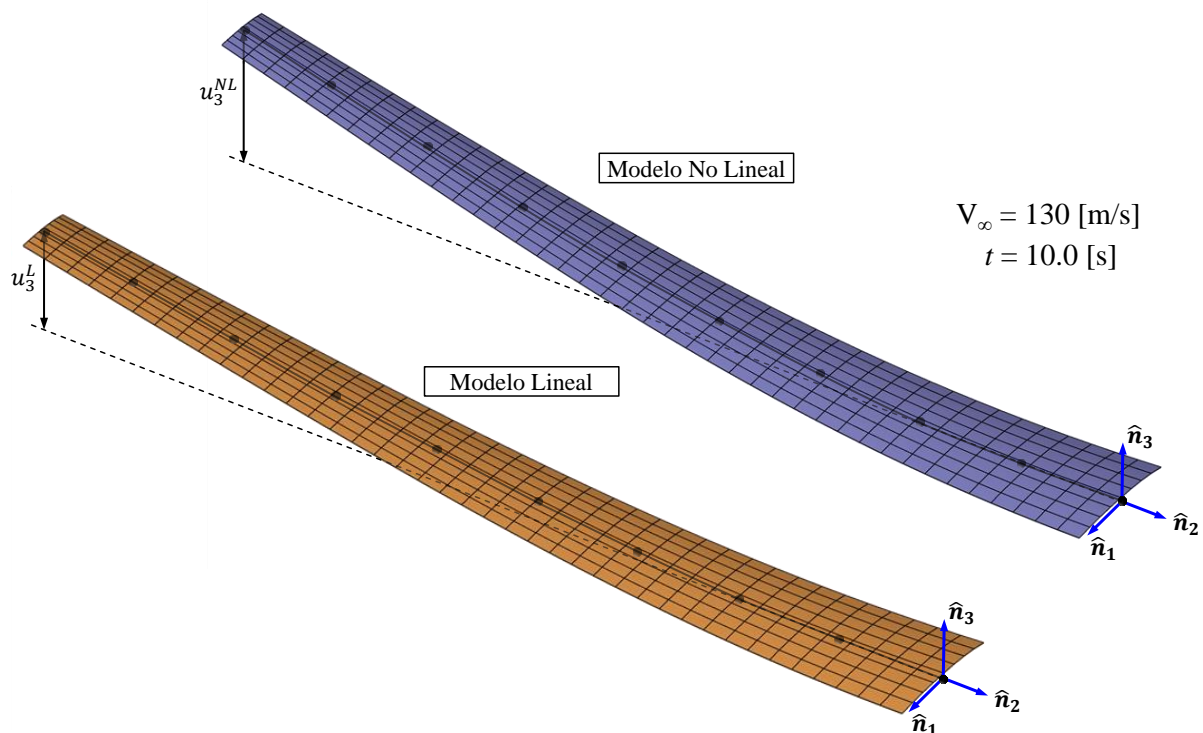


Figura VI-16: Posición deformada del sistema a  $V_\infty = 130$  [m/s] y  $t = 10.0$  [s] obtenidas con el modelo lineal y el modelo no lineal.

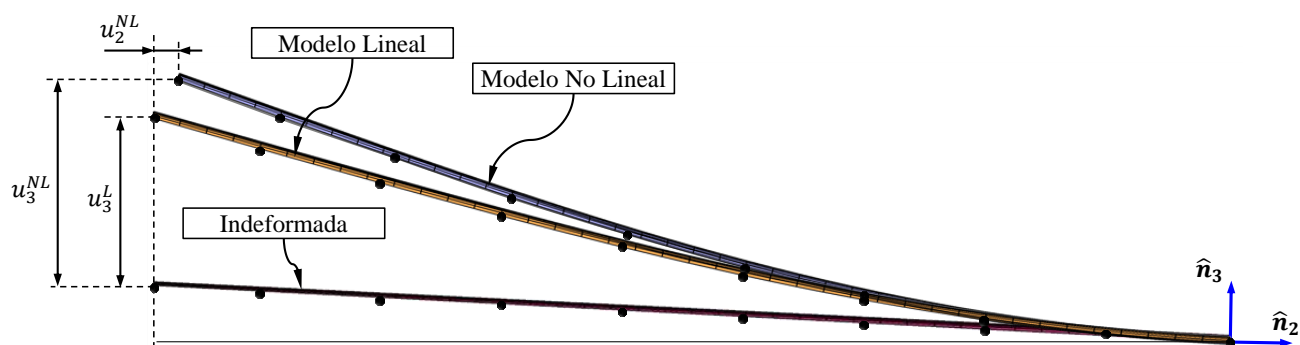


Figura VI-17: Comparación entre las posiciones deformadas del sistema a  $V_\infty = 130$  [m/s] y  $t = 10.0$  [s] obtenidas con modelo lineal y modelo no lineal.

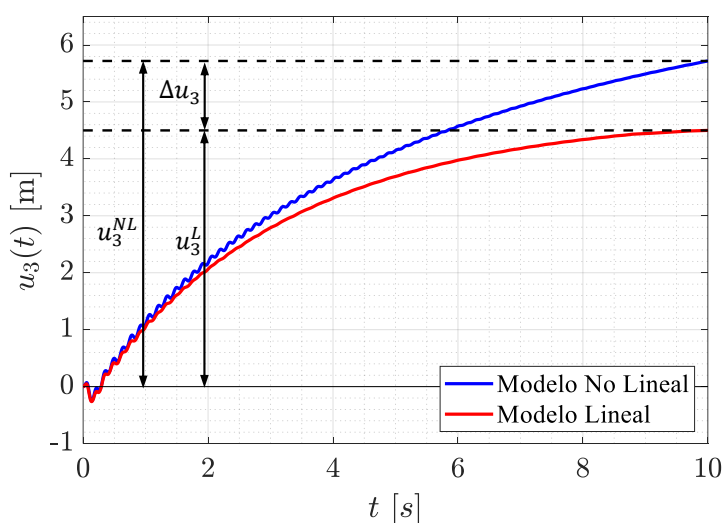


Figura VI-18: Desplazamiento vertical de la puntera para modelo lineal y no lineal.

### Análisis y discusión de resultados

Los resultados de las simulaciones realizadas sobre el caso de estudio revelan que la velocidad de *flutter* del sistema es  $V_{crt} = 135.0$  [m/s]. Esto puede apreciarse en los diagramas de la Figura VI-11 donde para ambos grados de libertad se tienen bifurcaciones de Hopf supercríticas [99] que inician a partir de la velocidad indicada. Los diagramas de fase, por su parte, muestran la presencia de un centro donde las oscilaciones se atenúan para  $V_\infty = 133.0$  [m/s] y LCO en los casos con  $V_\infty = 137.0$  [m/s] y  $V_\infty = 143.0$  [m/s].

Como se mencionó, el caso de estudio se basa en el presentado por W. Su [34] quienes utilizaron su modelo numérico para calcular la velocidad crítica de *flutter* de una configuración similar a la aquí presentada. La velocidad crítica reportada es  $V_{crt} = 129.0$  [m/s] y se encuentra 4.7% por debajo del valor obtenido con la HDT. Con estos valores la concordancia es suficientemente aceptable y permite verificar tanto el modelo numérico como la herramienta computacional en la predicción de *flutter*.

En cuanto a la aplicabilidad del modelo estructural lineal en las simulaciones, la Figura VI-16 y la Figura VI-17 muestran la diferencia que existe en la configuración deformada del sistema a una velocidad precrítica respecto a la obtenida con el modelo estructural no lineal. En este sentido, al analizar el gráfico de la Figura VI-18 se observa que el modelo lineal parece ser más rígido respecto al desplazamiento vertical de la estructura. Además, el modelo lineal no es capaz de capturar los efectos axiales de la deformación por flexión del ala que son propios de las no linealidades introducidas en el modelo. Estas discrepancias concuerdan con el hecho de que a medida que la configuración deformada

se aleja de la configuración de referencia, el modelo lineal pierde aplicabilidad y esto puede extenderse a las respuestas obtenidas.

## VI. 2. 2 Placa cantiléver CPW

El segundo caso de estudio considerado en esta sección se basa en el modelo experimental presentado por A. Alizadeh *et al.* [100] y tiene por objetivo validar la capacidad de la herramienta desarrollada en este trabajo para predecir la velocidad crítica de *flutter*, en este caso contra resultados obtenidos en un laboratorio. El sistema se compone de una placa de plexiglás flexible empotrada-libre que se modela con una viga recta con esas mismas condiciones de borde y una grilla aerodinámica asociada. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

### Descripción del caso de estudio

El sistema “Placa cantiléver CPW” consiste en un placa cantiléver flexible, como la representada en la Figura VI-19 a), que enfrenta una corriente libre horizontal con una perturbación inicial. La estructura del sistema está conformada por una viga recta, de sección y propiedades constantes a lo largo de su longitud, y con uno de sus nodos extremos empotrado.

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  (ver Figura VI-19 b)). Para representar la viga, se utilizaron 5 elementos finitos uniformes que se orientan según el sistema de referencia local  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y, teniendo en cuenta el nodo empotrado, el modelo estructural cuenta con  $n = 30$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”.

Desde el punto de vista del modelo aerodinámico, la placa se representa por una grilla plana rectangular sin diedro ni ahusamiento. Además, la grilla aerodinámica utilizada cuenta con 6 paneles en la dirección de la cuerda y 24 en la dirección de la envergadura (ver Figura VI-19 b)).

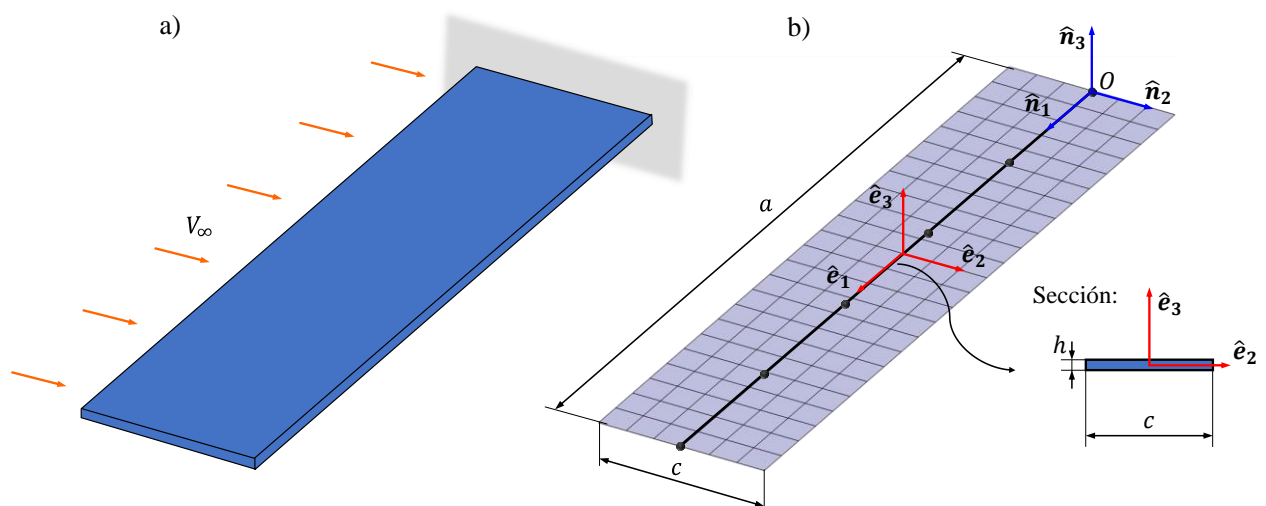


Figura VI-19: Caso de estudio “Placa cantiléver CPW”. a) Esquema de configuración. b) Sección y representación numérica.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-5 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-19. Por último, en la Tabla VI-6 se presentan las cuatro primeras frecuencias naturales de la estructura, que se



contrastan con las reportadas por A. Alizadeh *et al.* [100], así como también, en la Figura VI-20, se muestran las formas modales correspondientes.

Tabla VI-6: Frecuencias naturales de la estructura.

<i>i</i>	HDT [Hz]	Alizadeh et al [Hz]	Diferencia
1	4.11902	4.36	5.53%
2	27.07382	28.84	6.13%
3	33.14296	39.44	15.97%
4	82.32459	79.74	3.24%

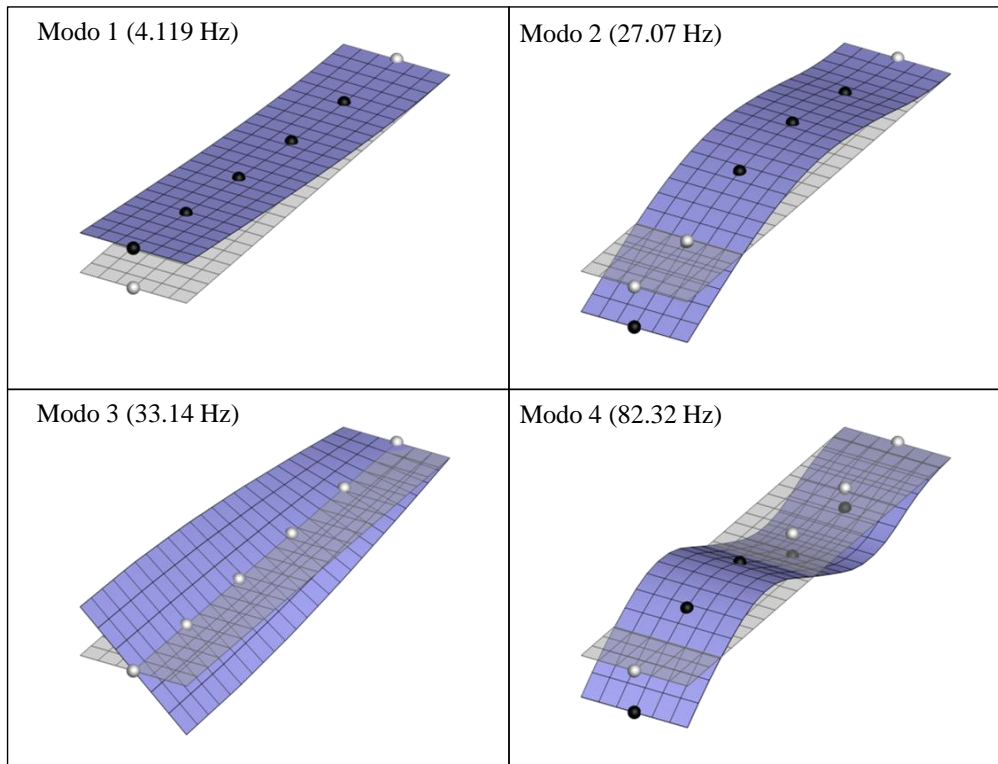


Figura VI-20: Formas modales del caso de estudio “Placa cantiléver CPW”.

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se basan en el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo para distintos valores de velocidad de la corriente libre, luego de aplicar una perturbación inicial modelada como un flujo vertical de velocidad  $u = 2 [m/s]$  con 2 pasos de tiempo de duración. Con estas condiciones, se confeccionan diagramas de bifurcación y de fase para identificar la aparición del fenómeno de *flutter*, que luego se compara con los resultados experimentales reportados en la bibliografía de referencia.

En la Figura VI-21, se encuentran los diagramas de bifurcación del sistema donde las variables de referencia son el desplazamiento vertical  $u_3(t)$ , el giro de torsión  $\theta_1(t)$  y la velocidad angular de torsión  $\dot{\theta}_1(t)$  del extremo libre de la placa. Como es habitual, sobre el eje de abscisas se encuentra la velocidad de la corriente libre mientras que en el eje de ordenadas se miden las amplitudes de oscilación de las variables de referencia.

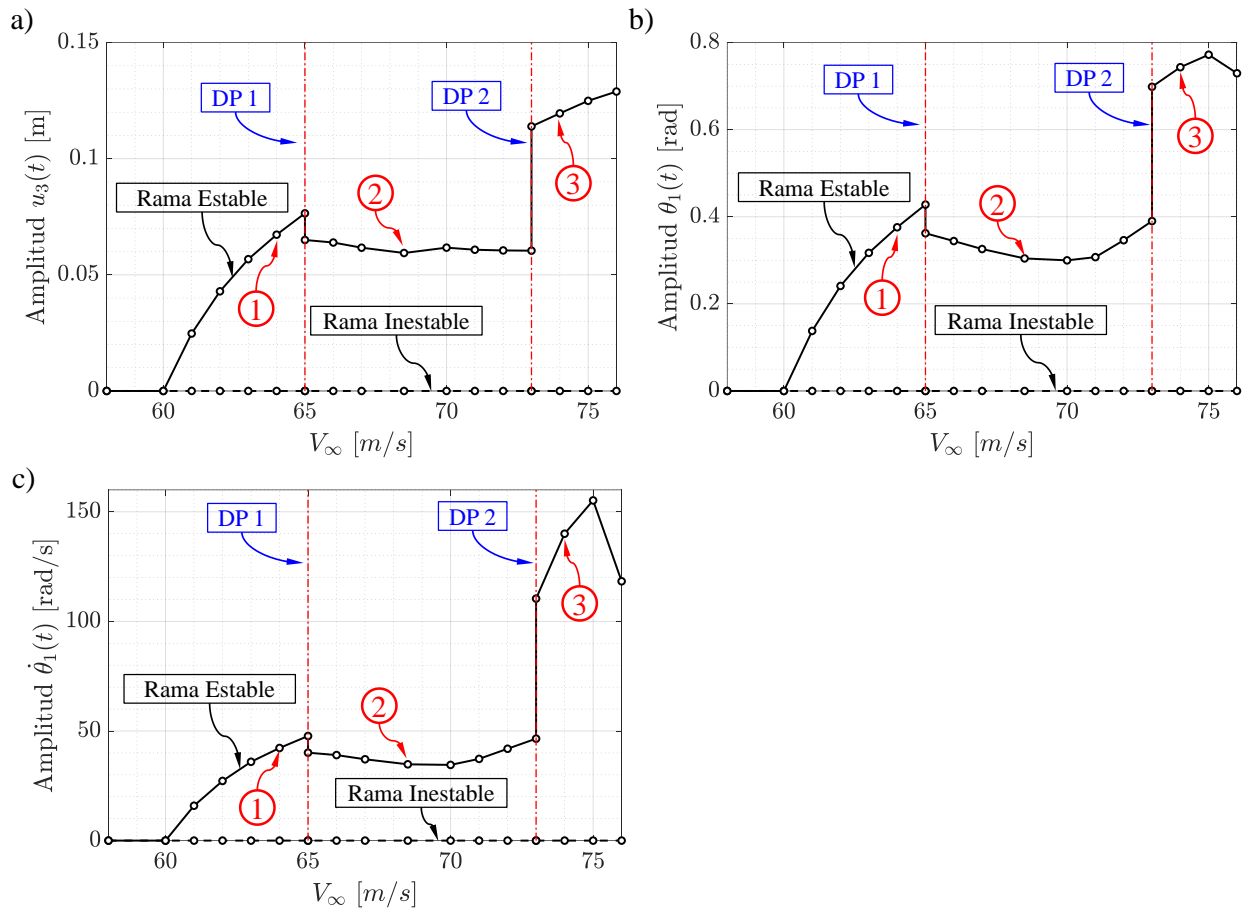


Figura VI-21: Diagramas de bifurcación. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_1(t)$ . c)  $\dot{\theta}_1(t)$ .

Los marcadores rojos de la Figura VI-21 identifican tres puntos de interés que corresponden a velocidades de 64.0 m/s, 68.5 m/s y 74.0 m/s. Para estos valores de velocidad se presentan los diagramas de fase en la Figura VI-22, la Figura VI-23 y la Figura VI-24, respectivamente. En estos diagramas, el punto inicial de la simulación se indica con un marcador circular en magenta y se resalta con una línea azul la LCO que alcanza el sistema. Además, en la Figura VI-25 se presentan transformadas rápidas de Fourier (FFT) de las señales  $u_3(t)$  para las velocidades antes indicadas y se indica la frecuencia de vibración de flutter reportada por A. Alizadeh *et al.* [100].

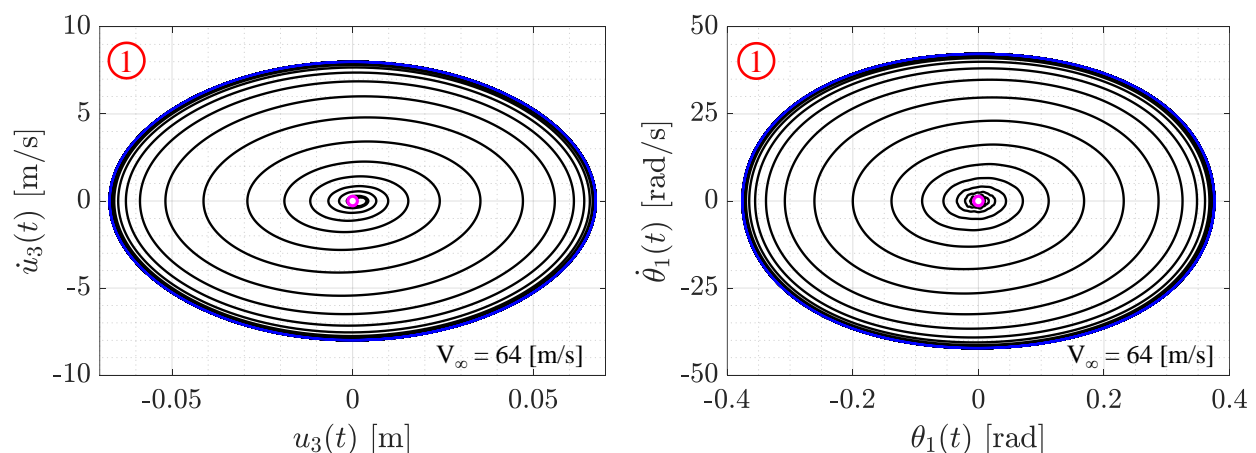


Figura VI-22: Diagramas de fase para  $V_\infty = 64.0$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_1(t)$ .

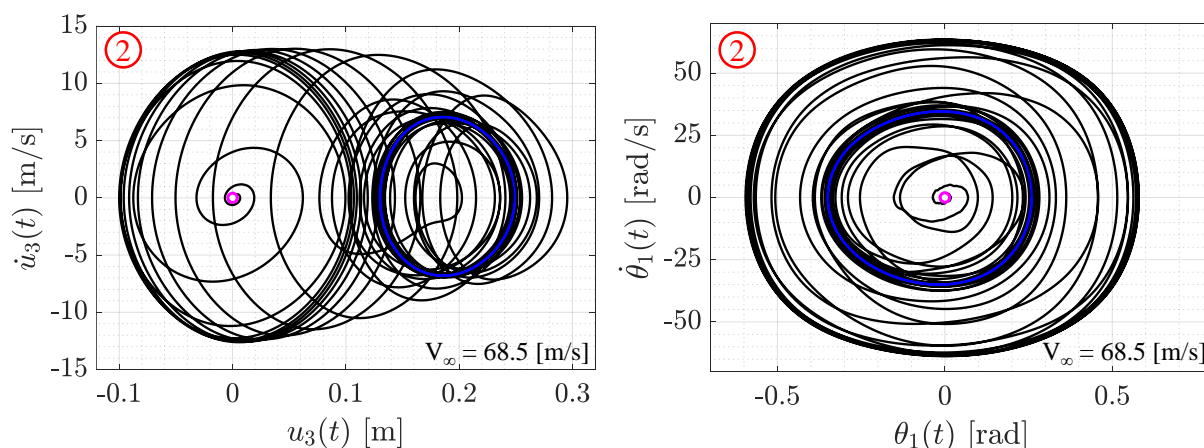


Figura VI-23: Diagramas de fase para  $V_\infty = 68.5$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_1(t)$ .

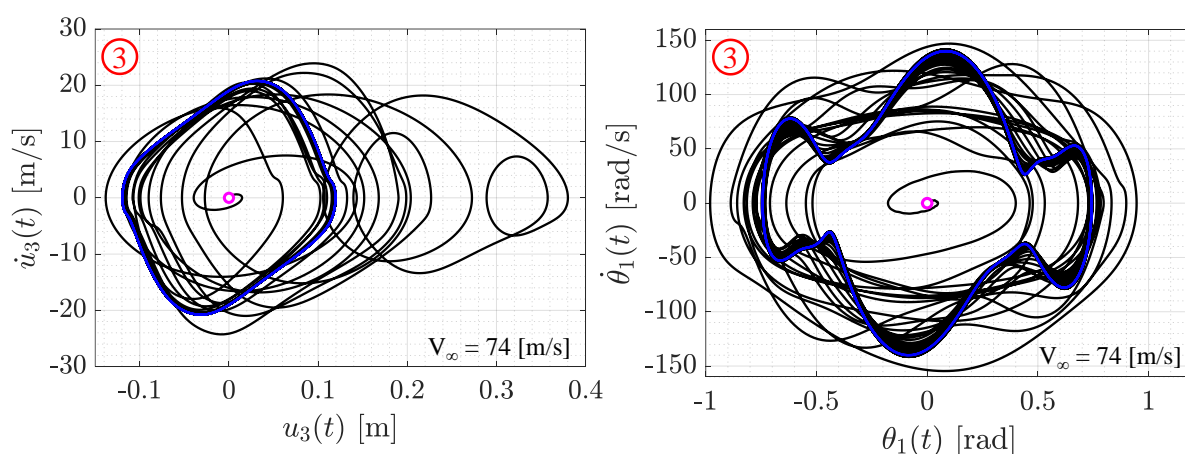


Figura VI-24: Diagramas de fase para  $V_\infty = 74$  [m/s]. a)  $u_3(t)$ . b)  $\theta_1(t)$ .

Finalmente, y para complementar los resultados anteriores, en la Figura VI-26 a) se muestra el estado de la estela en la simulación correspondiente a una velocidad de corriente libre  $V_\infty = 68.5$  [m/s], habiendo transcurrido un tiempo  $t = 2.34$  [s]. En ese mismo estado, la distribución de presiones sobre la grilla aerodinámica es la que se presenta en la Figura VI-26 b).

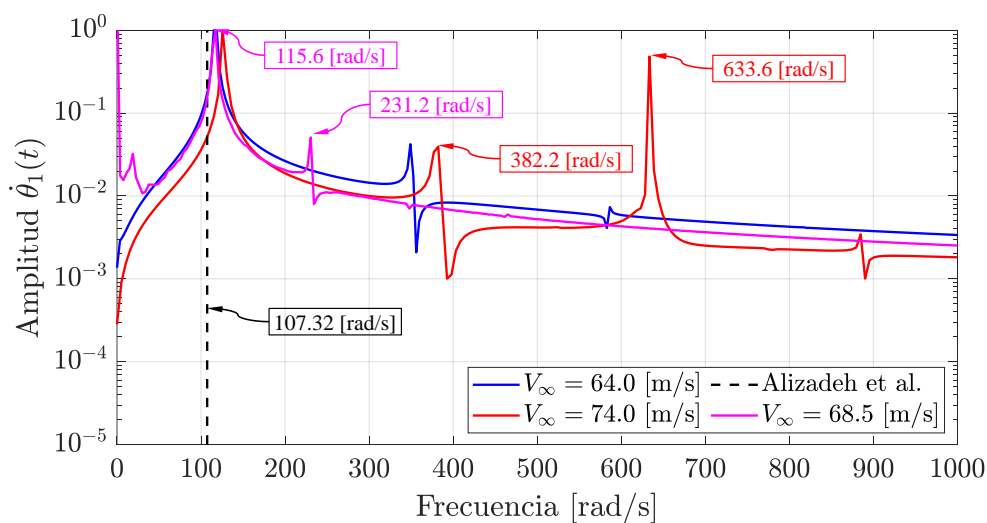


Figura VI-25: Transformadas rápidas de Fourier (FFT) de las señales  $u_3(t)$ .

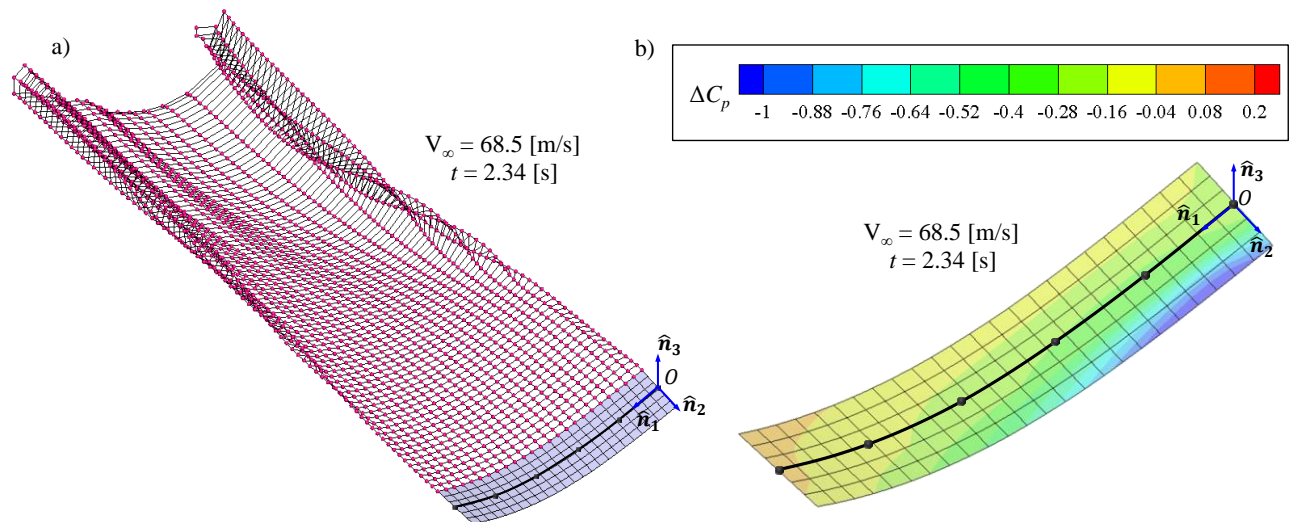


Figura VI-26: Simulación a  $V_\infty = 68.5 [m/s]$  y  $t = 2.34 [s]$ . a) Visualización de la estela. b) Distribución de coeficiente de presión.

### Análisis y discusión de resultados

Las simulaciones realizadas con el caso de estudio “Placa cantiléver CPW” muestran resultados particulares. En primer lugar, los diagramas de la Figura VI-21 muestran una bifurcación de Hopf supercrítica [99] que ocurre a una velocidad  $V_{crt} = 61.0 [m/s]$ . Pasado este punto, el sistema muestra LCO alrededor de la configuración indeformada con amplitudes que crecen a medida que se incrementa la velocidad de la corriente libre (ver Figura VI-22). Este comportamiento se mantiene hasta alcanzar  $V_\infty = 65.0 [m/s]$  donde ocurre un fenómeno de doblamiento de período (DP1), indicado con marcadores azules en la Figura VI-21. Para este valor de velocidad en adelante, las LCO se alejan del centro anterior y se producen alrededor de una configuración deformada que, por las características de simetría del caso, puede darse a ambos lados de la configuración indeformada (ver Figura VI-23). Luego del DP1, las amplitudes de las LCO se mantienen más o menos constantes al crecer la velocidad de la corriente, hasta alcanzar  $V_\infty = 73.0 [m/s]$ , donde ocurre un cambio en el comportamiento indicado como DP2. A partir de aquí, las LCO incrementan su amplitud notoriamente y se producen alrededor de los tres centros antes mencionados, como se observa en la Figura VI-24.

El comportamiento descrito se ve reflejado también en la Figura VI-25. Aquí, la FFT de la señal para  $V_\infty = 68.5 [m/s]$  muestra una frecuencia secundaria de  $f_2 = 231.2 [rad/s]$  que es exactamente el doble de la frecuencia dominante de  $f_1 = 115.6 [rad/s]$ . El contenido de la frecuencia  $f_2$  sólo está presente cuando la velocidad de la corriente libre se encuentra entre 65.0 m/s y 73.0 m/s y el sistema vibra alrededor de la configuración deformada. Pasado el punto DP2, la señal sólo muestra contenidos de frecuencias con valores cercanos a  $f_1 = 125.7 [rad/s]$ ,  $f_3 = 382.3 [rad/s]$  y  $f_4 = 633.6 [rad/s]$ .

Como se mencionó, el principal objetivo de este caso de estudio es validar los resultados con datos experimentales. En este sentido, A. Alizadeh *et al.* [100] reportan una velocidad de flutter experimental del sistema  $V_{crtE} = 73.0 [m/s]$  y una frecuencia en esa condición de  $f_f = 17.08 [Hz]$  ( $107.32 [rad/s]$ ). Teniendo en cuenta estos valores y los comentarios expuestos en la publicación, puede suponerse que el instrumental utilizado en el experimento captura las vibraciones que ocurren pasado el punto DP2, donde las amplitudes de las LCO se incrementan de manera notoria. Si este fuera el caso, la concordancia en la predicción de la velocidad crítica de flutter es adecuada, pero no ocurre lo mismo con el valor de frecuencia que, para  $V_\infty = 73.0 [m/s]$ , muestra una discrepancia de un 17%.

Evidentemente, el caso de estudio reviste de un interés adicional y merece un análisis más detallado que permita caracterizar correctamente el comportamiento del sistema. A pesar de esto, la

motivación inicial del estudio queda satisfecha dada la comparación entre los resultados que sirve como un punto inicial en la validación de la HDT.

## VI. 3 Verificación de la predicción de pandeo aerodinámico

Las simulaciones de este grupo se enfocan en evaluar la capacidad de la herramienta desarrollada para predecir en qué condiciones las estructuras analizadas se inestabilizan bajo el fenómeno de pandeo aerodinámico. Para ello, se toman como referencia dos casos de estudio que fueron analizados con otros modelos numéricos que se encuentran publicados en la bibliografía. A continuación, se exponen los dos casos de estudio seleccionados, se detallan sus características, las condiciones de simulación y los resultados obtenidos.

### VI. 3. 1 Modelo de Alas Unidas “PrP40”

El primer caso de estudio considerado en esta sección se basa en el modelo presentado por L. Demasi *et al.* [29] y tiene por objetivo verificar la capacidad de la herramienta desarrollada en este trabajo para predecir la velocidad crítica a la que ocurre el pandeo aerodinámico de una estructura. El sistema tiene la geometría del ala de una JWA y se compone de tres placas asociadas al ala delantera (AD), al ala trasera (AT) y al ala vertical (AV), respectivamente. Cada placa se modela con una viga recta y una grilla aerodinámica asociada. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

#### Descripción del caso de estudio

El sistema “PrP40” consiste en el ala representada en la Figura VI-27 a), que enfrenta una corriente libre con un ángulo de incidencia fijo  $\alpha$ . La estructura del sistema está conformada por tres vigas rectas, de sección y propiedades uniformes. La primera de ellas corresponde al AD, posee uno de sus extremos empotrado y se une al AV en el restante. La segunda de ellas corresponde al AT, cuenta con uno de sus nodos extremos empotrado y el restante se une al AV. Por último, la viga que corresponde al AV se conecta rígidamente a los extremos no empotrados del AD y el AT.

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$  (ver Figura VI-27 b)). Para representar la estructura, se utilizaron en total 9 elementos finitos, de los cuales 4 corresponden al AD y son uniformes entre sí, 4 corresponden al AT y también son uniformes entre sí, y uno representa al AV. Los elementos se orientan según los sistemas de referencia locales  $\mathcal{E} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$  y, teniendo en cuenta los nodos empotrados y las conexiones rígidas entre vigas, el modelo estructural cuenta con  $n = 48$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”. Por su parte, la grilla aerodinámica utilizada cuenta con 5 paneles en la dirección de la cuerda y en dirección de la envergadura se utilizaron 30 paneles para el AD y el AT, y 2 paneles para el AV.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-6 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-27. Por último, en la Tabla VI-7 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura, junto con las seis primeras formas modales que se encuentran en la Figura VI-28.

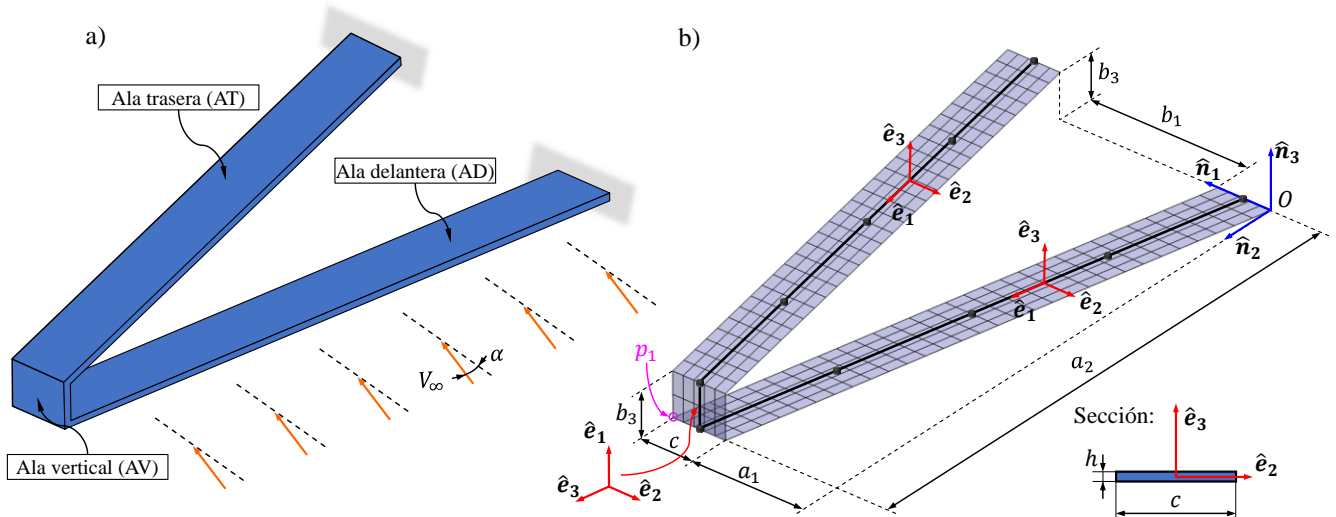


Figura VI-27: Caso de estudio Modelo de Alas Unidas “PrP40”. a) Esquema de configuración. b) Sección y representación numérica.

Tabla VI-7: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	HDT [Hz]	$i$	HDT [Hz]
1	4.90936	6	103.114
2	21.1712	7	124.608
3	29.6023	8	147.299
4	69.8398	9	164.515
5	86.4087	10	198.422

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se basan en el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo para valores crecientes de velocidad de la corriente libre, manteniendo constante su ángulo de incidencia  $\alpha$ . A medida que la velocidad aumenta, se evalúa la respuesta de la estructura hasta identificar el punto en el que se inestabiliza dando lugar al fenómeno de pandeo aerodinámico. Para ello, se utilizan como indicadores el determinante de la matriz de rigidez global del sistema y la energía interna de deformación de la estructura.

En la Figura VI-29 se muestra la posición vertical del punto  $p_1$  ubicado en el borde de fuga de la unión entre el AD y el AV (ver Figura VI-27),  $u_{3p_1}(t)$ , en función del tiempo para distintos valores de velocidad de la corriente libre. Además, se indican con marcadores circulares aquellos casos donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la estructura.

En la Figura VI-30 se comparan los resultados con aquellos reportados por L. Demasi *et al.* [29]. Con base en los resultados anteriores, se grafica el valor que alcanza la posición del punto  $p_1$  luego de amortiguados los efectos transitorios,  $\bar{u}_{3p_1}$ , para cada valor de velocidad. Asimismo, se indica el valor de velocidad crítica a la cual ocurre el fenómeno de pandeo aerodinámico.

Para identificar el fenómeno de pandeo aerodinámico, como se mencionó, se registra a lo largo de cada simulación el valor del determinante de la matriz de rigidez global de la estructura y se infiere que ocurre la inestabilidad del sistema cuando éste se anula. Por simplicidad, en este caso se analiza la variación del mínimo autovalor de la matriz de rigidez en función del tiempo de simulación, el cual se relaciona directamente con el determinante y acusa el mismo comportamiento. En la Figura VI-31 se muestran las curvas de  $\lambda_{min}(t)$  para distintos valores de velocidad y se indican con marcadores aquellos casos donde  $\lambda_{min}(t) = 0$ .

El siguiente indicador a tener en cuenta para identificar la inestabilidad del sistema es la energía interna de deformación  $U_e(t)$ . Luego, en la Figura VI-32 se presentan las variaciones temporales de dicha energía para distintas velocidades de la corriente libre, indicando con líneas de trazos y marcadores los instantes de tiempo donde se anulaban los determinantes de la matriz de rigidez global del sistema, en cada caso (ver Figura VI-31). Debe mencionarse que las simulaciones para  $V_\infty = 30 [m/s]$  y  $V_\infty = 35 [m/s]$  fueron continuadas hasta alcanzar los 0.35 [s], luego de que sus autovalores mínimos se anulaban.

Finalmente, y para complementar los resultados anteriores, en la Figura VI-33 a) se muestra el estado de la estela en la simulación correspondiente a una velocidad de corriente libre  $V_\infty = 28.5 [m/s]$ , habiendo transcurrido un tiempo  $t = 0.72 [s]$ . En ese mismo estado, la distribución de presiones sobre la grilla aerodinámica es la que se presenta en la Figura VI-33 b).

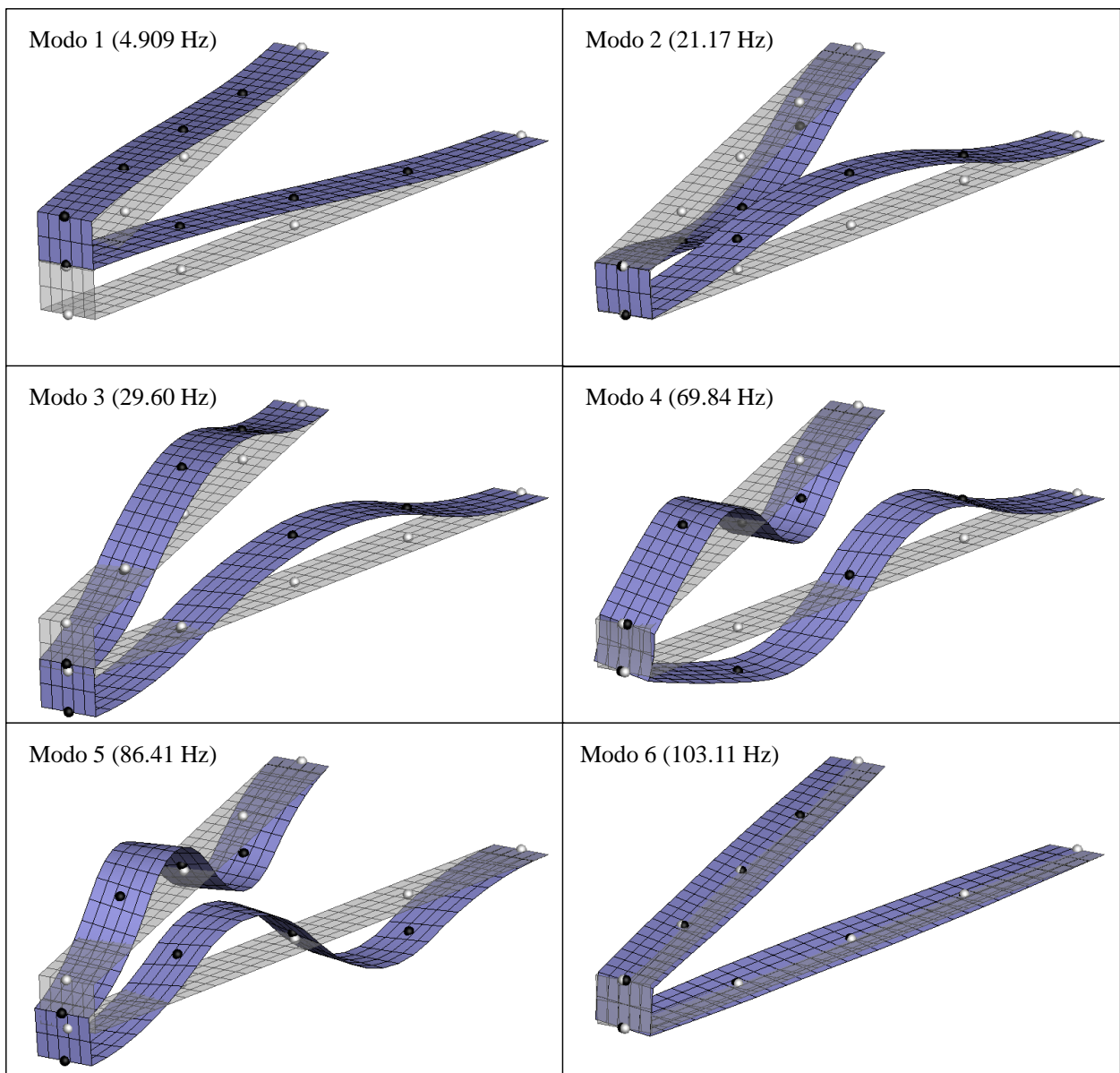


Figura VI-28: Formas modales del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “PrP40”.

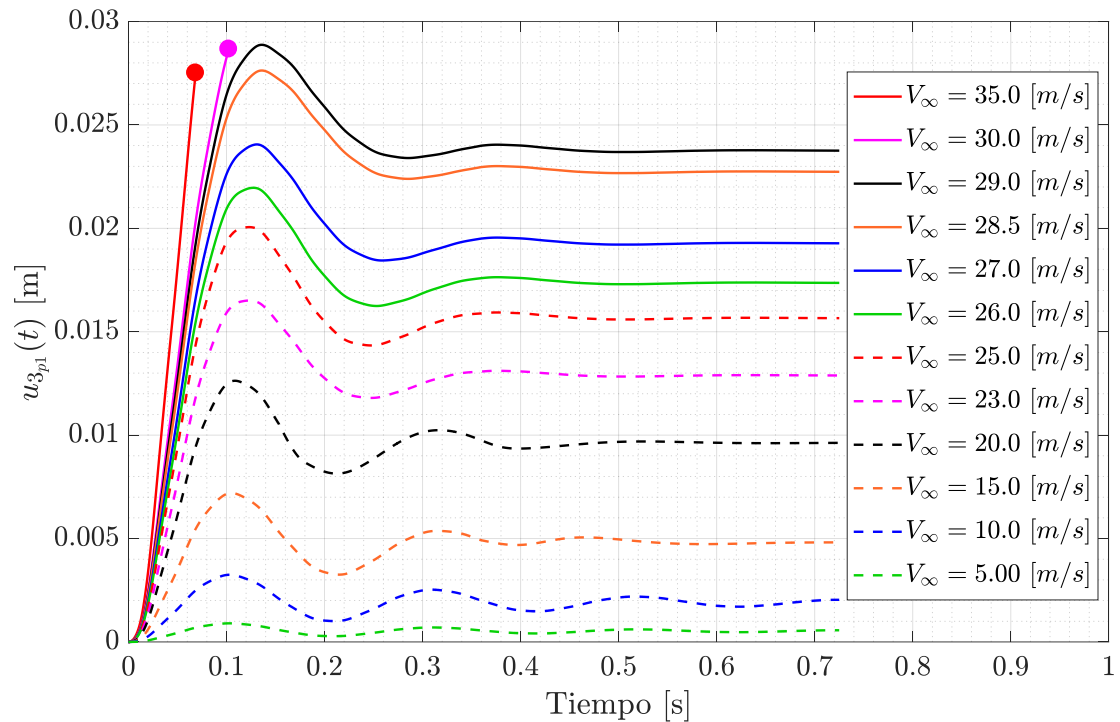


Figura VI-29: Desplazamientos verticales del punto  $p_1$  para distintas condiciones.

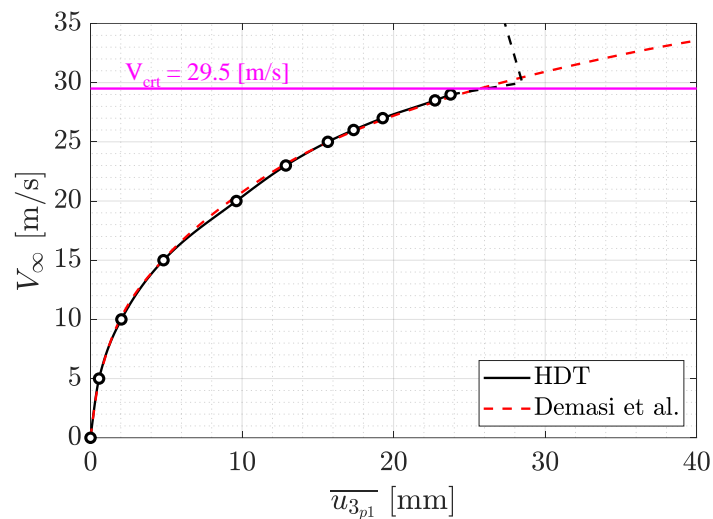


Figura VI-30: Valor estacionario del desplazamiento vertical de punto  $p_1$ .

### Análisis y discusión de resultados

Los resultados anteriores muestran que el sistema experimenta un ablandamiento (o pérdida de rigidez) progresivo producto de las cargas aerodinámicas que se generan sobre las superficies sustentadoras. A medida que se incrementa la velocidad de la corriente libre, la configuración del ala en el estado estacionario presenta cada vez más deformación, lo que se ve reflejado en el cambio de pendiente de la curva de la Figura VI-30. Este efecto es el que, finalmente, produce la inestabilidad de la estructura a una velocidad crítica  $V_{crit} = 29.5 [m/s]$ .



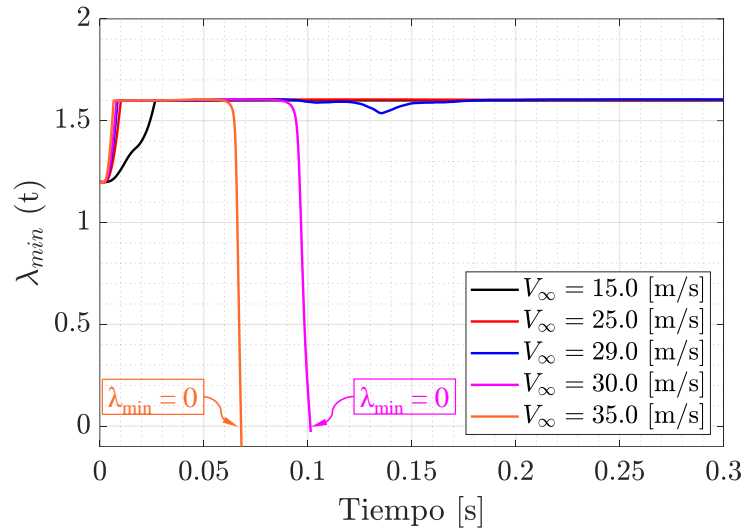


Figura VI-31: Autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura para distintas condiciones.

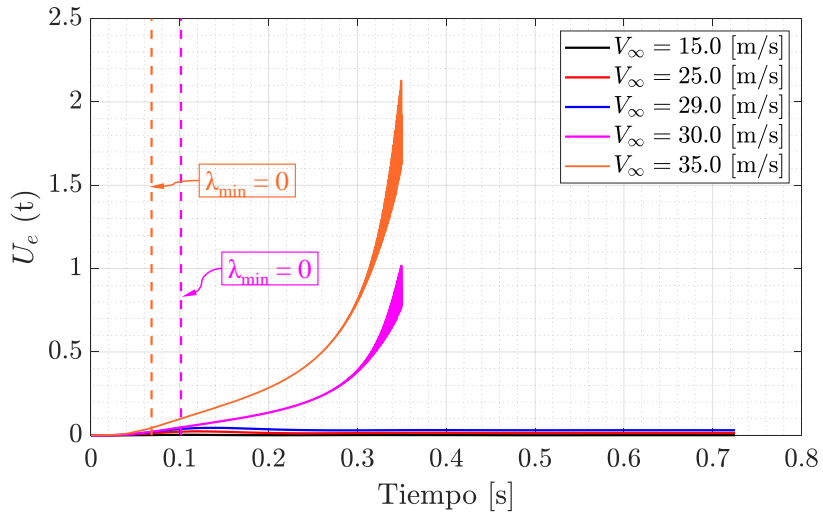


Figura VI-32: Energía interna de deformación de la estructura para distintas condiciones.

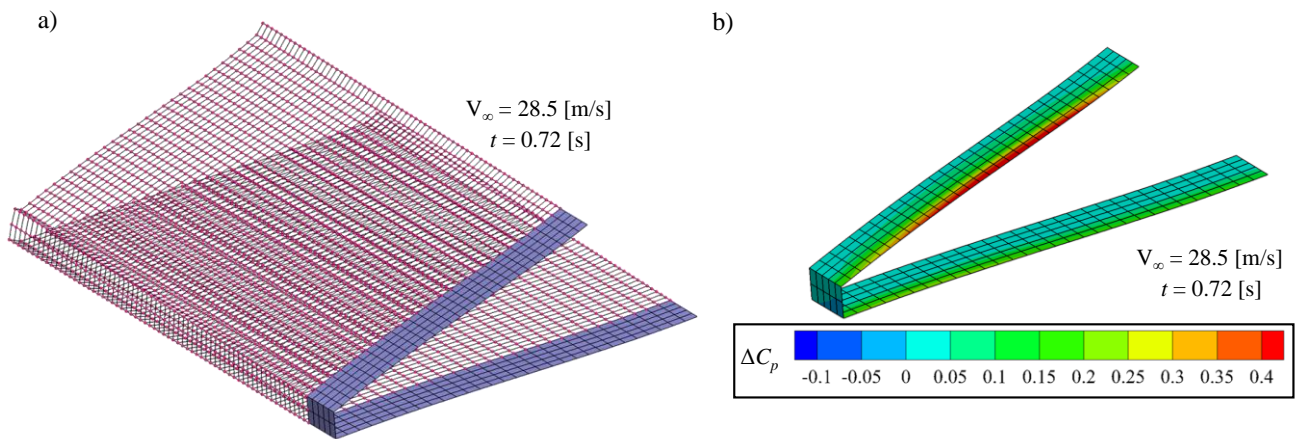


Figura VI-33: Simulación a  $V_\infty = 28.5 \text{ [m/s]}$  y  $t = 0.72 \text{ [s]}$ . a) Visualización de la estela. b) Distribución de coeficiente de presión.

Para velocidades por encima de la velocidad crítica, se observa cómo los autovalores mínimos de la matriz de rigidez se reducen abruptamente hasta anularse, marcando la inestabilidad del sistema (ver Figura VI-31). Asimismo, la energía interna de deformación calculada en estos casos, no sólo acusa un incremento igualmente abrupto, sino que muestra oscilaciones propias de un sistema que ha perdido la estabilidad (ver Figura VI-32).

Como se mencionó, el caso de estudio analizado coincide con el presentado por L. Demasi *et al.* [29] y el objetivo es verificar comparativamente los resultados obtenidos. En este sentido, existe una correcta concordancia entre las curvas mostradas en la Figura VI-30, para valores de  $V_\infty$  menores a la velocidad crítica.

En su trabajo L. Demasi *et al.* [29] concluyen que, si bien su modelo numérico no captura una inestabilidad asociada a una singularidad matemática, a partir de  $V_\infty = 30.0 [m/s]$  el sistema experimenta una pérdida de rigidez tan marcada que puede ser identificada como el fenómeno de pandeo desde el punto de vista práctico. Esta discrepancia puede deberse a dos motivos: al método de determinación de la inestabilidad y al procedimiento utilizado en las simulaciones. En cuanto al método utilizado para determinar la singularidad del sistema, L. Demasi *et al.* [29] presentan un enfoque basado en la linealización alrededor de la posición deformada para caracterizar su estabilidad. Este método difiere con el utilizado en el presente trabajo que analiza directamente el determinante de la matriz de rigidez global de la estructura. El segundo motivo mencionado está asociado al tipo de simulación que se realiza. Por tratarse con arranques impulsivos, al inicio de las simulaciones la estructura sufre un rápido incremento en el desplazamiento que gradualmente se atenúa hasta alcanzar un estado estacionario. Este fenómeno se aprecia en la Figura VI-29 donde, para todas las velocidades por debajo de la velocidad crítica, se ve que el desplazamiento vertical del punto  $p_1$  presenta un sobrepaso inicial del valor estacionario. Luego, el sobrepaso que ocurre en el transitorio inicial puede provocar una inestabilidad prematura del sistema que podría no ocurrir si los estados estacionarios se alcanzaran de forma suave. Con esto en consideración, a pesar de las diferencias con el trabajo de L. Demasi *et al.* [29], es posible arribar a conclusiones similares.

## VI. 3. 2 Modelo de Alas Unidas “JW70”

El segundo caso de estudio considerado en esta sección se basa en otro modelo presentado por L. Demasi *et al.* [29] y, nuevamente, tiene por objetivo validar la capacidad de la herramienta desarrollada en este trabajo para predecir la velocidad crítica a la que ocurre el pandeo aerodinámico de una estructura. El sistema tiene la geometría del ala de una JWA y se compone de tres placas asociadas al ala delantera (AD), al ala trasera (AT) y al ala vertical (AV), respectivamente. Cada placa se modela con una viga recta y una grilla aerodinámica asociada. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

### Descripción del caso de estudio

El sistema “JW70” consiste en un ala como la representada en la Figura VI-34 a), que enfrenta una corriente libre con un ángulo de incidencia fijo  $\alpha$ . La estructura del sistema está conformada por tres vigas rectas, de sección y propiedades uniformes. La primera de ellas corresponde al AD, posee uno de sus extremos empotrado y el otro libre, y se conecta al AV al 70% de su envergadura. La segunda de ellas corresponde al AT, cuenta con uno de sus nodos extremos empotrado y el restante se une al AV. Por último, la viga que corresponde al AV se conecta rígidamente al extremo no empotrado del AT y al punto ubicado al 70% de la envergadura del AD.

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  (ver Figura VI-34 b)). Para representar la estructura, se utilizaron en total 11

elementos finitos, de los cuales cuatro corresponden al AT y son uniformes entre sí, y uno corresponde al AV. De los seis elementos que forman el AD, cuatro se distribuyen uniformemente en el tramo interior (desde el empotramiento hasta la unión con el AV) y los dos restantes lo hacen en el tramo exterior. Los elementos se orientan según los sistemas de referencia locales  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y, teniendo en cuenta los nodos empotrados y las conexiones rígidas entre vigas, el modelo estructural cuenta con  $n = 60$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”. Por su parte, la grilla aerodinámica utilizada cuenta con 5 paneles en la dirección de la cuerda y en dirección de la envergadura se utilizaron 40 paneles para el AD, 28 para el AT y 2 paneles para el AV.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-7 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-34. Por último, en la Tabla VI-8 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura, junto con las seis primeras formas modales que se encuentran en la Figura VI-35.

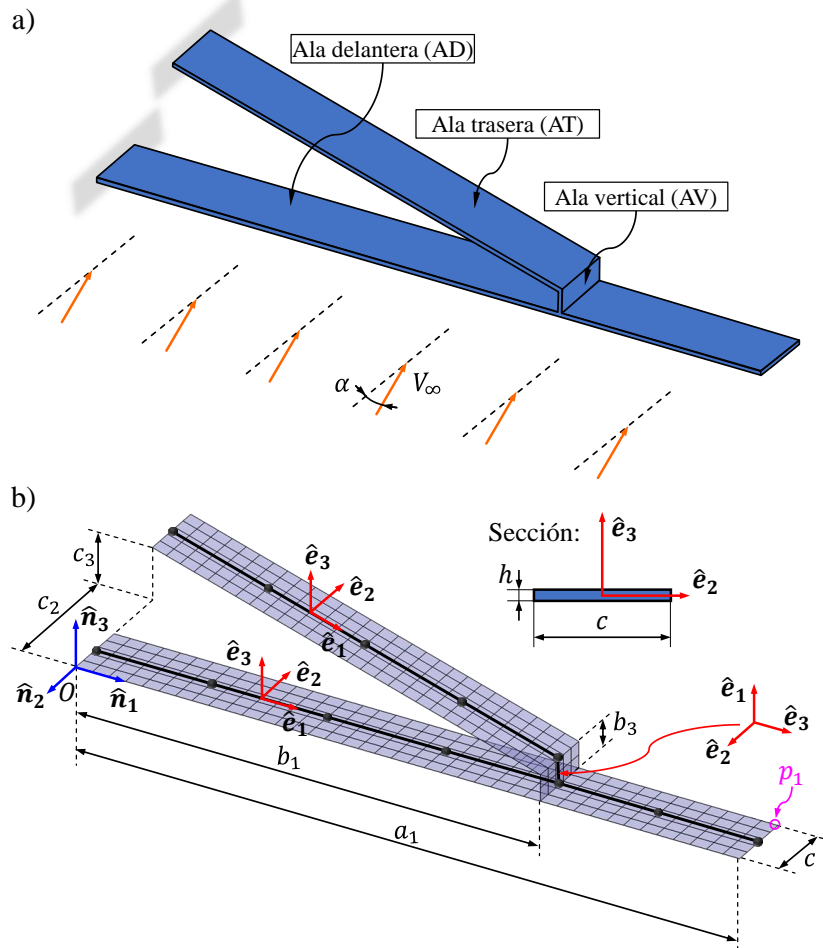


Figura VI-34: Caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JW70”. a) Esquema de configuración. b) Sección y representación numérica.

Tabla VI-8: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	Frecuencia [Hz]	$i$	Frecuencia [Hz]
1	8.43786	6	104.008
2	25.4342	7	122.414
3	31.1783	8	124.513

4	44.2567	9	137.155
5	98.8011	10	179.946

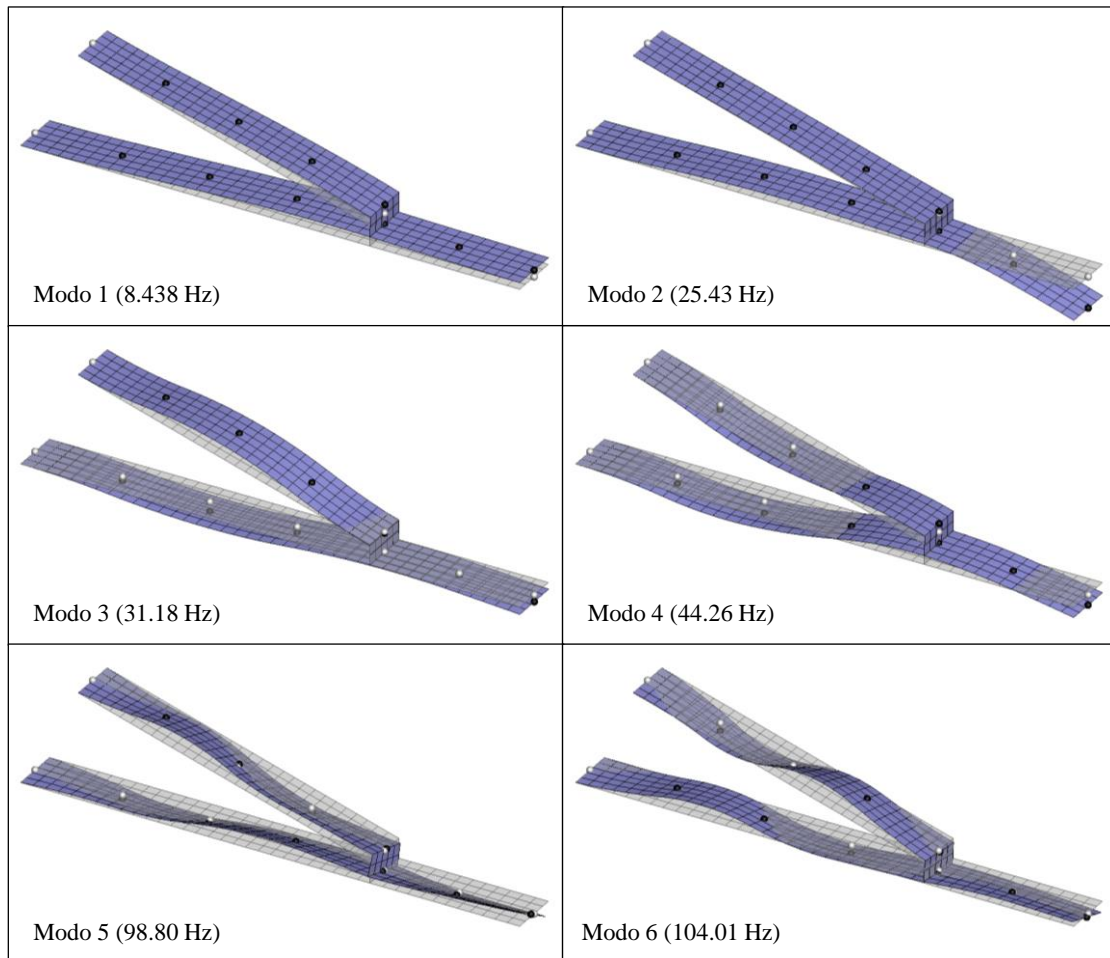


Figura VI-35: Formas modales del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JW70”.

## Resultados

Nuevamente, los resultados de las simulaciones se basan en el comportamiento del sistema a lo largo del tiempo para valores crecientes de velocidad de la corriente libre, manteniendo constante su ángulo de incidencia  $\alpha$ . A medida que la velocidad aumenta, se evalúa la respuesta de la estructura hasta identificar el punto en el que se inestabiliza dando lugar al fenómeno de pandeo aerodinámico. Para ello, se utiliza como indicador el determinante de la matriz de rigidez global de la estructura (ver Sección V. 5. 1).

En la Figura VI-36 se muestra la posición vertical del punto  $p_1$  ubicado en el borde de fuga de la puntera del AD (ver Figura VI-34),  $u_{3,p_1}(t)$ , en función del tiempo para distintos valores de velocidad de la corriente libre. Además, se indican con marcadores circulares aquellos casos donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la estructura.

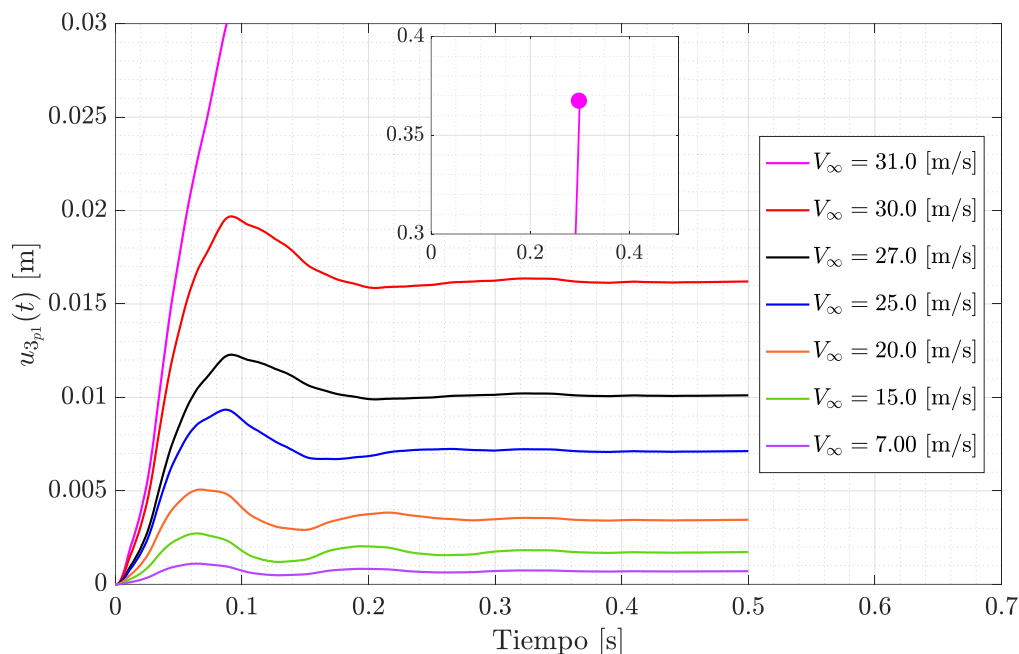


Figura VI-36: Desplazamientos verticales del punto  $p_1$  para distintas condiciones.

En la Figura VI-37 se comparan los resultados con aquellos reportados por L. Demasi *et al.* [29]. Con base en los resultados anteriores, se grafica el valor que alcanza la posición del punto  $p_1$  luego de amortiguados los efectos transitorios,  $\overline{u_{3_{p1}}}$ , para cada valor de velocidad. Asimismo, se indica el valor de velocidad crítica obtenida con el presente modelo y el reportado por L. Demasi *et al.* [29].

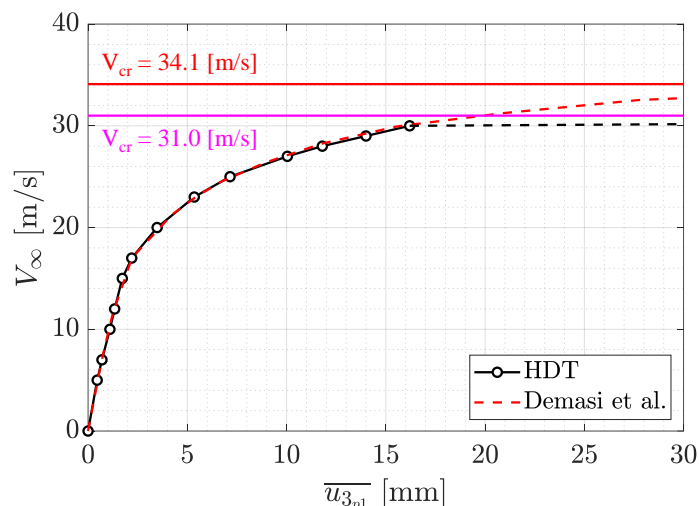


Figura VI-37: Valor estacionario del desplazamiento vertical de punto  $p_1$ .

Al igual que en el caso de estudio anterior, se registra a lo largo de cada simulación el valor del determinante de la matriz de rigidez global de la estructura y se infiere que ocurre la inestabilidad del sistema cuando éste se anula. Por simplicidad, en este caso se analiza la variación del mínimo autovalor de la matriz de rigidez en función del tiempo de simulación, el cual se relaciona directamente con el determinante y acusa el mismo comportamiento. En la Figura VI-38 se muestran las curvas de  $\lambda_{min}(t)$  para distintos valores de velocidad y se indica con un marcador el caso donde  $\lambda_{min}(t) = 0$ .

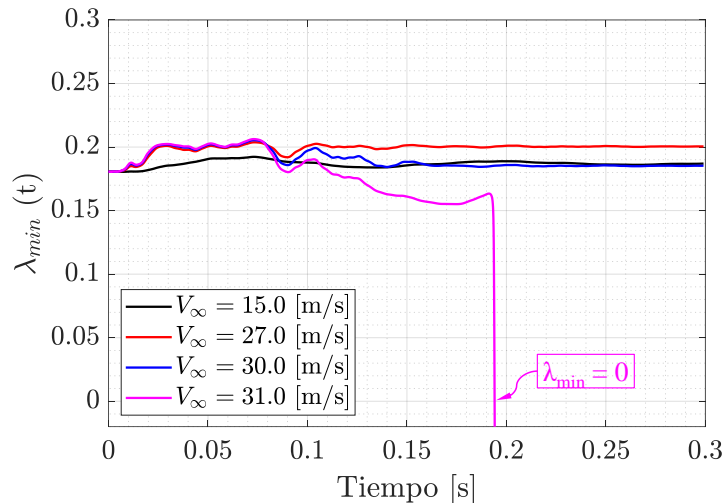


Figura VI-38: Autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura para distintas condiciones.

Finalmente, y para complementar los resultados anteriores, en la Figura VI-39 a) se muestra el estado de la estela en la simulación correspondiente a una velocidad de corriente libre  $V_\infty = 27.0 \text{ [m/s]}$ , habiendo transcurrido un tiempo  $t = 0.3 \text{ [s]}$ . En ese mismo estado, la distribución de presiones sobre la grilla aerodinámica es la que se presenta en la Figura VI-39 b).

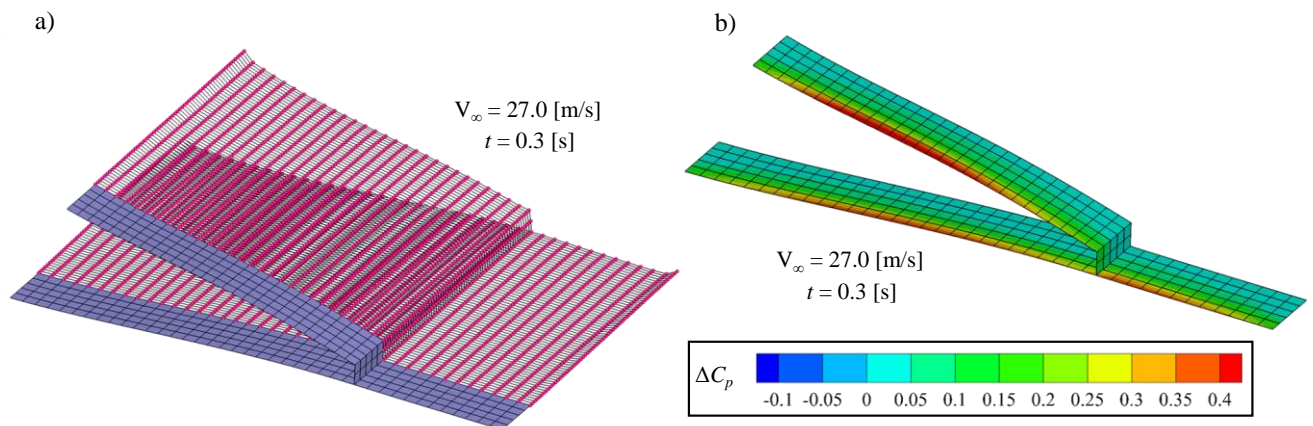


Figura VI-39: Simulación a  $V_\infty = 27.0 \text{ [m/s]}$  y  $t = 0.3 \text{ [s]}$ . a) Visualización de la estela. b) Distribución de coeficiente de presión.

### Análisis y discusión de resultados

Cualitativamente, el comportamiento del sistema “JW70” obtenido en las simulaciones se asemeja al del caso de estudio anterior. Nuevamente, los resultados muestran el efecto del ablandamiento (o pérdida de rigidez) progresivo, producto de las cargas aerodinámicas que se generan sobre las superficies sustentadoras. A medida que se incrementa la velocidad de la corriente libre, la configuración del ala en su estado estacionario se deforma cada vez más, lo que se ve reflejado en el cambio de pendiente de la curva de la Figura VI-37. Este efecto es el que, finalmente, produce la inestabilidad de la estructura a una velocidad crítica  $V_{crt} = 31.0 \text{ [m/s]}$ . A esta velocidad, se observa cómo el autovalor mínimo de la matriz de rigidez se reduce abruptamente hasta anularse un poco antes de 0.2 s, dando lugar a la inestabilidad del sistema (ver Figura VI-38).

Como se mencionó, el caso de estudio analizado coincide con el presentado por L. Demasi *et al.* [29] y el objetivo es verificar comparativamente los resultados obtenidos. En este sentido, existe una

correcta concordancia entre las curvas mostradas en la Figura VI-37, para valores de  $V_\infty$  menores a la velocidad crítica.

En su trabajo, L. Demasi *et al.* [29] exponen que al alcanzar la velocidad crítica la rigidez del sistema no puede resistir eficientemente las acciones aerodinámicas, lo que produce un incremento importante en los desplazamientos y giros de la estructura. Este fenómeno, de acuerdo a L. Demasi *et al.* [29], se produce a una velocidad crítica  $V_{crt} = 34.1 [m/s]$  que es un 9% superior al valor obtenido con la HDT. Esta discrepancia nuevamente puede sustentarse en los motivos antes mencionados: el método de determinación de la inestabilidad y el procedimiento utilizado en las simulaciones. Con esto en consideración, si se toma en cuenta la conclusión del trabajo de L. Demasi *et al.* [29] la diferencia en la velocidad crítica se mantiene dentro de valores razonables.

Por último, en la Figura VI-39 se presenta un estado previo a la inestabilidad que permite describir la interacción que existe entre los efectos aerodinámicos y la estructura de esta configuración de alas unidas. Inicialmente, tanto el AD como el AT generan sustentación debido al ángulo de incidencia de la corriente libre que flexiona a ambas hacia arriba. Luego, a causa de la conexión rígida con el AV, el AT experimenta un incremento en el ángulo de ataque por torsión mientras que el ángulo de torsión del tramo interno del AD se mantiene más o menos constante. Este efecto se vuelve notorio en la distribución de coeficiente de presión de la Figura VI-39, donde la intensidad de la carga aerodinámica es mayor en el AT que en el AD, ya que la flecha negativa del AT hace que un desplazamiento vertical genere flexión y un aumento en el ángulo de ataque.

## VI. 4 Casos de estudio de interés

En este grupo se incluyen casos de aplicación de la herramienta computacional desarrollada que tienen por objetivo demostrar sus potencialidades. Todos los casos están basados en aeronaves con configuración de alas unidas y se enfocan en la predicción del pandeo aerodinámico. A continuación, se exponen los dos casos de estudio seleccionados, se detallan sus características, las condiciones de simulación y los resultados obtenidos.

### VI. 4. 1 Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1”

El primer caso de estudio considerado en esta sección representa una aeronave no tripulada (UAV) con configuración de alas unidas. El sistema consiste en un fuselaje y empenaje vertical, considerados como grillas de contorno y, a cada lado, un ala delantera (AD) con flecha y diedro positivos, un ala trasera (AT) con flecha y diedro negativos, y un ala externa (AE) sin flecha ni diedro. Sin embargo, con el objetivo de reducir el tamaño del problema y dado que el objetivo principal de las simulaciones es estudiar el fenómeno de pandeo aerodinámico, la mayor parte de los resultados fueron obtenidos considerando sólo el ala izquierda de la aeronave. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

#### Descripción del caso de estudio

El sistema “JWA-UAV-S1” se encuentra representado en la Figura VI-40, y consiste en una UAV que enfrenta una corriente libre con un ángulo de incidencia fijo  $\alpha$ . Como se mencionó, los estudios fueron efectuados sobre sólo una de las alas de la aeronave dado que, por las condiciones de contorno aplicadas, constituyen estructuras independientes entre sí. Cada una de las alas se compone de tres vigas rectas que se unen rígidamente en un punto de unión (punto  $b$ ), y se encuentra empotrada en

dos puntos (puntos  $a$  y  $c$ ) que corresponden a la unión con el fuselaje y con el empenaje vertical. La primera de las vigas corresponde al AD, posee uno de sus extremos empotrado (punto  $a$ ) y se conecta en el punto de unión (punto  $b$ ). La segunda corresponde al AT, cuenta con uno de sus nodos extremos empotrado (punto  $c$ ) y se conecta también con el punto de unión (punto  $b$ ). Por último, la viga que corresponde al AE se conecta al punto de unión (punto  $b$ ) y cuenta con un extremo libre (punto  $d$ ).

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  (ver Figura VI-40). Para representar la estructura de una de las alas, se utilizaron en total 12 elementos finitos, de los cuales cuatro corresponden a cada una de las alas (AD, AT, AE) y son uniformes entre sí. Los elementos se orientan según los sistemas de referencia locales  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y, teniendo en cuenta los nodos empotrados y las conexiones rígidas entre vigas, el modelo estructural cuenta con  $n = 66$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”.

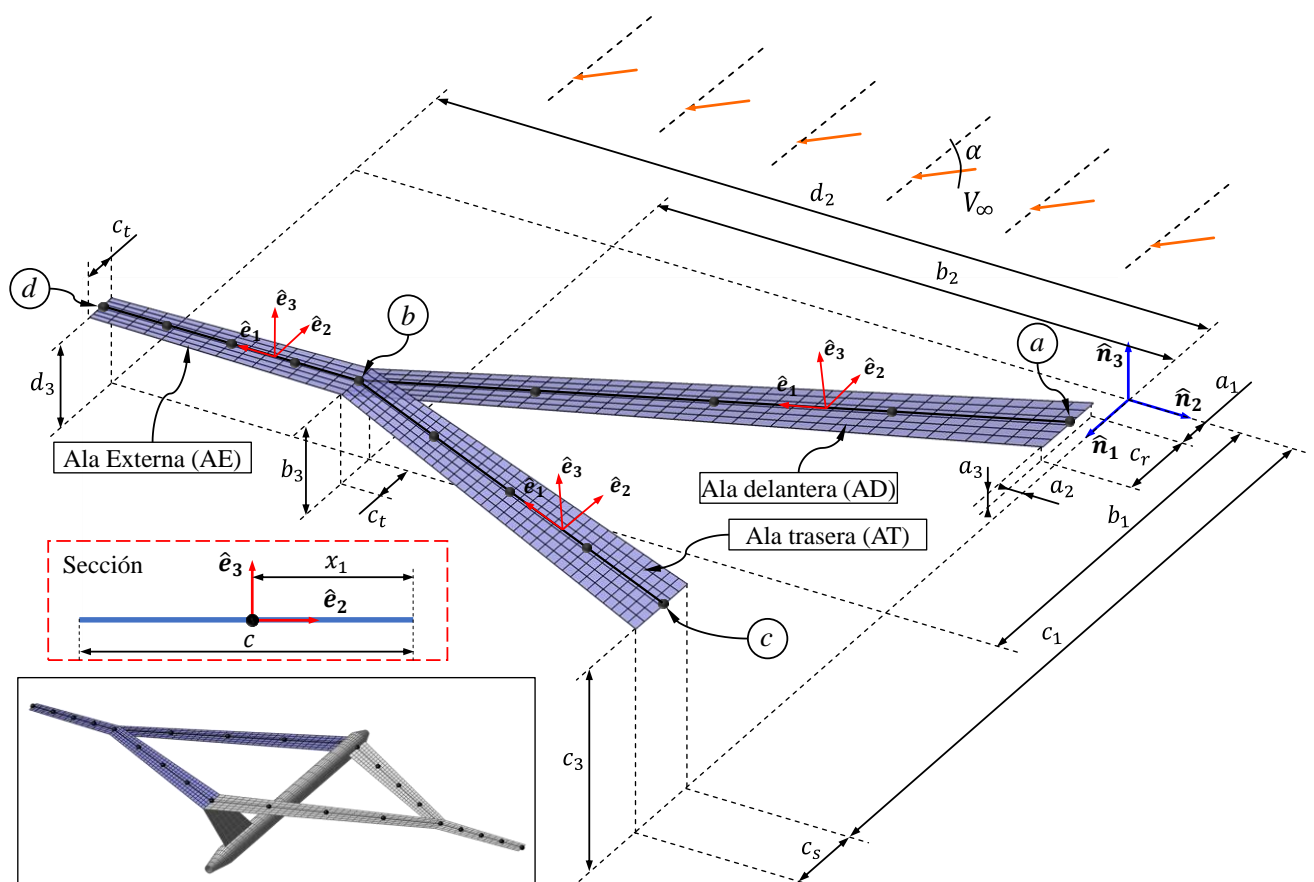


Figura VI-40: Caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1”, esquema de configuración, y representación numérica.

Las grillas aerodinámicas utilizadas son rectas y planas, el AD y el AT cuentan con ahusamiento lineal mientras que el AE posee cuerda constante. En cuanto a la cantidad de paneles, todas las alas cuentan con 6 paneles en la dirección de la cuerda y en dirección de la envergadura se utilizaron 36 paneles para el AD, 36 para el AT y 14 paneles para el AE. La posición relativa entre las grillas aerodinámicas y sus vigas asociadas es uniformemente proporcional a la cuerda de cada ala.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-8 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-40. Además, en la Tabla VI. A-9 del Apéndice VI. A se detallan las propiedades equivalentes de cada elemento de la malla estructural, numerados de la siguiente manera: los elementos 1 al 4 corresponden



al AD desde la raíz hasta el punto de unión y los elementos 5 al 8 corresponden al AE desde el punto de unión hasta el extremo libre. Los elementos que corresponden al AT (numerados de 9 a 12) poseen las mismas propiedades estructurales que los del AD, desde la raíz hasta el punto de unión, respectivamente. Por último, en la Tabla VI-9 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura, obtenidas con las mencionadas propiedades, así como también, en la Figura VI-41, se muestran las seis primeras formas modales.

Tabla VI-9: Frecuencias naturales de la estructura.

<i>i</i>	Frecuencia [Hz]	<i>i</i>	Frecuencia [Hz]
1	1.02954	6	10.9747
2	2.53499	7	12.9545
3	3.75072	8	13.5502
4	6.02448	9	13.7073
5	10.6908	10	18.1789

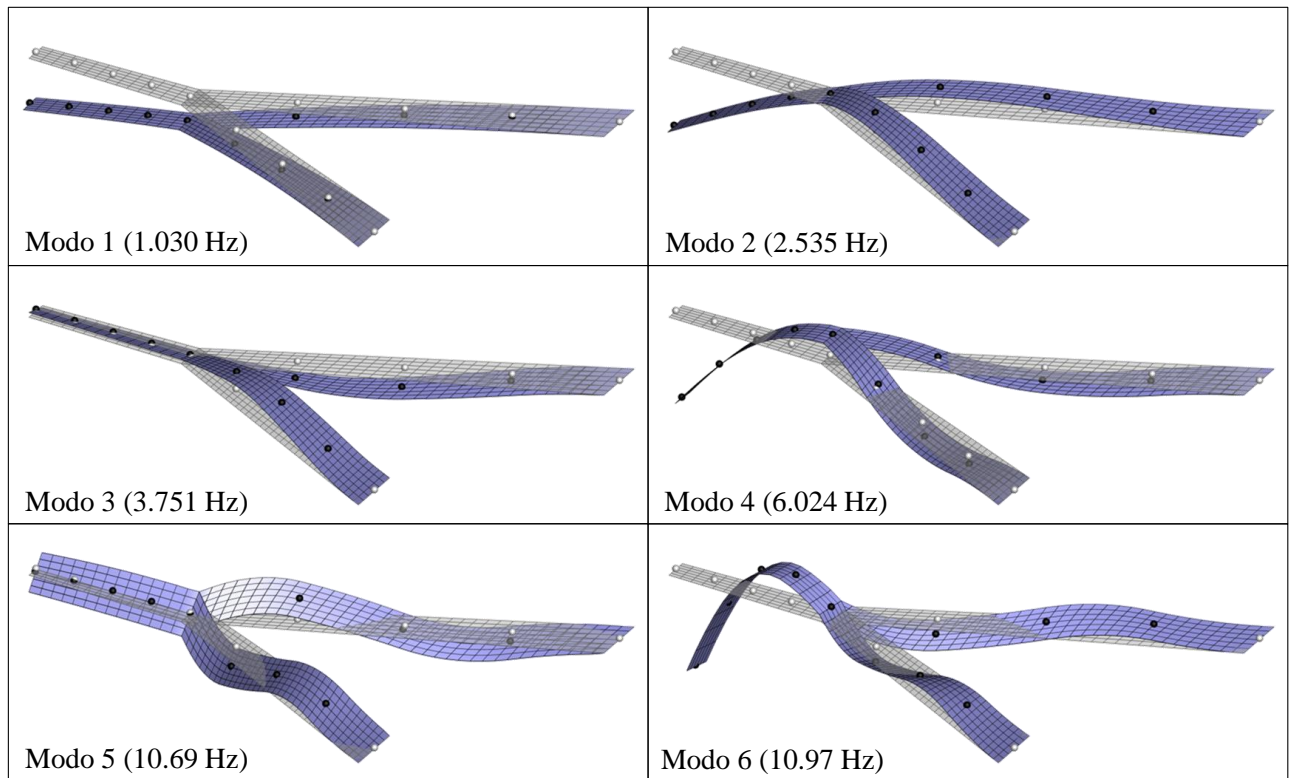


Figura VI-41: Formas modales del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1”.

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se basan en la respuesta del sistema a lo largo del tiempo para valores crecientes de velocidad de la corriente libre, manteniendo constante su ángulo de incidencia  $\alpha$ . A medida que la velocidad aumenta, se evalúa la respuesta de la estructura hasta identificar el punto en el que se inestabiliza dando lugar al fenómeno de pandeo aerodinámico. Como es habitual, se considera como indicador de estabilidad al determinante de la matriz de rigidez global de la estructura, representado por el mínimo autovalor de la misma (ver Sección V. 5. 1).

En la Figura VI-42 se muestran las posiciones verticales de la puntera del ala (extremo libre del AE) en función del tiempo para distintos valores de velocidad de la corriente libre. Además, se indican con marcadores circulares aquellos casos donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la

estructura. En la Figura VI-43, por su parte, se muestran los valores estacionarios de la posición del extremo libre del AE y del punto de unión. Aquí, se indican con marcadores circulares llenos los puntos donde ocurren las inestabilidades y con líneas de trazo discontinuo se indica la transición entre los dos comportamientos encontrados en el sistema, que se discuten más adelante.

En relación a los resultados de la Figura VI-43, en la Figura VI-44 se muestra la configuración que adopta el ala en los dos puntos críticos encontrados a  $V_{crit} = 110.0$  [m/s] y a  $V_{crit} = 195.0$  [m/s]. Asimismo, se indica como referencia la configuración indeformada del ala. Debe mencionarse que se omitieron las mallas estructurales para no ofuscar en exceso la figura.

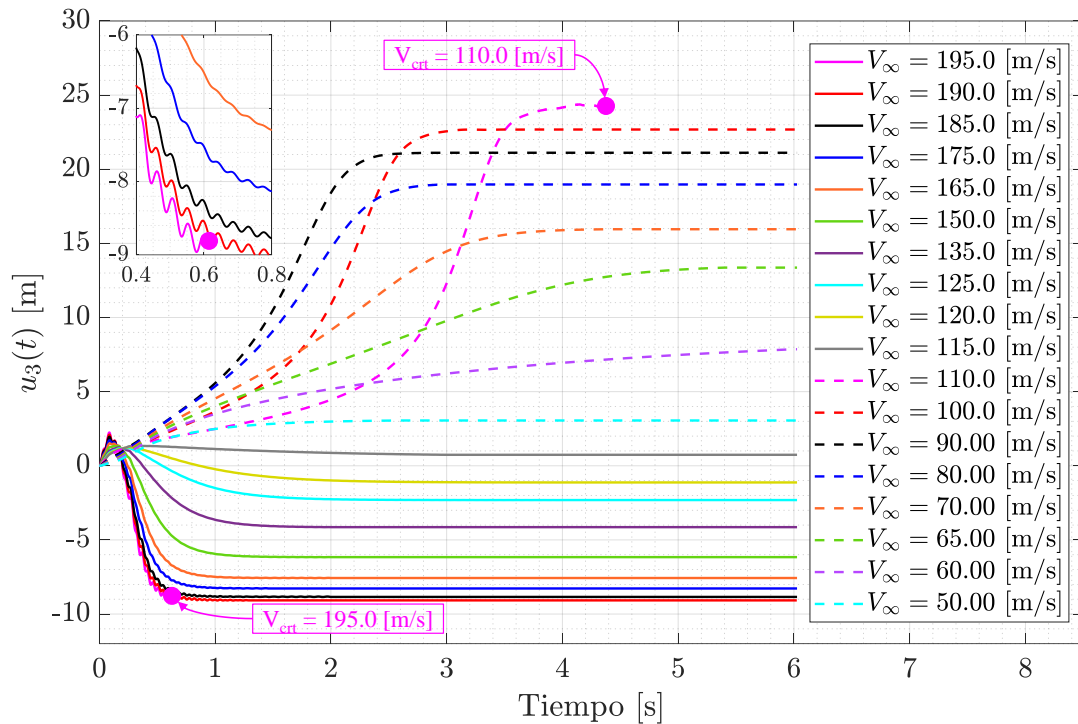


Figura VI-42: Desplazamientos verticales de la puntera del ala para distintas condiciones.

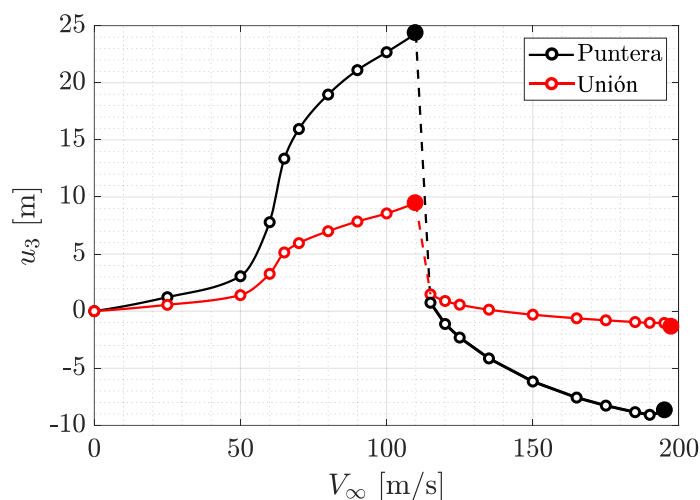


Figura VI-43: Valor estacionario del desplazamiento vertical de la puntera del ala y del punto de unión.

La evolución temporal del mínimo autovalor de la matriz de rigidez de la estructura se muestra en la Figura VI-45 a) para los dos valores de velocidad que producen inestabilidad. Del mismo modo,

se presenta la energía elástica del sistema en la Figura VI-45 b). Por último, en la Figura VI-46 se presenta la configuración de la estela para los instantes en los que se produce la inestabilidad, y en la Figura VI-47 se muestra una visualización de la aeronave completa en el estado crítico de  $V_{crt} = 110.0$  [m/s].

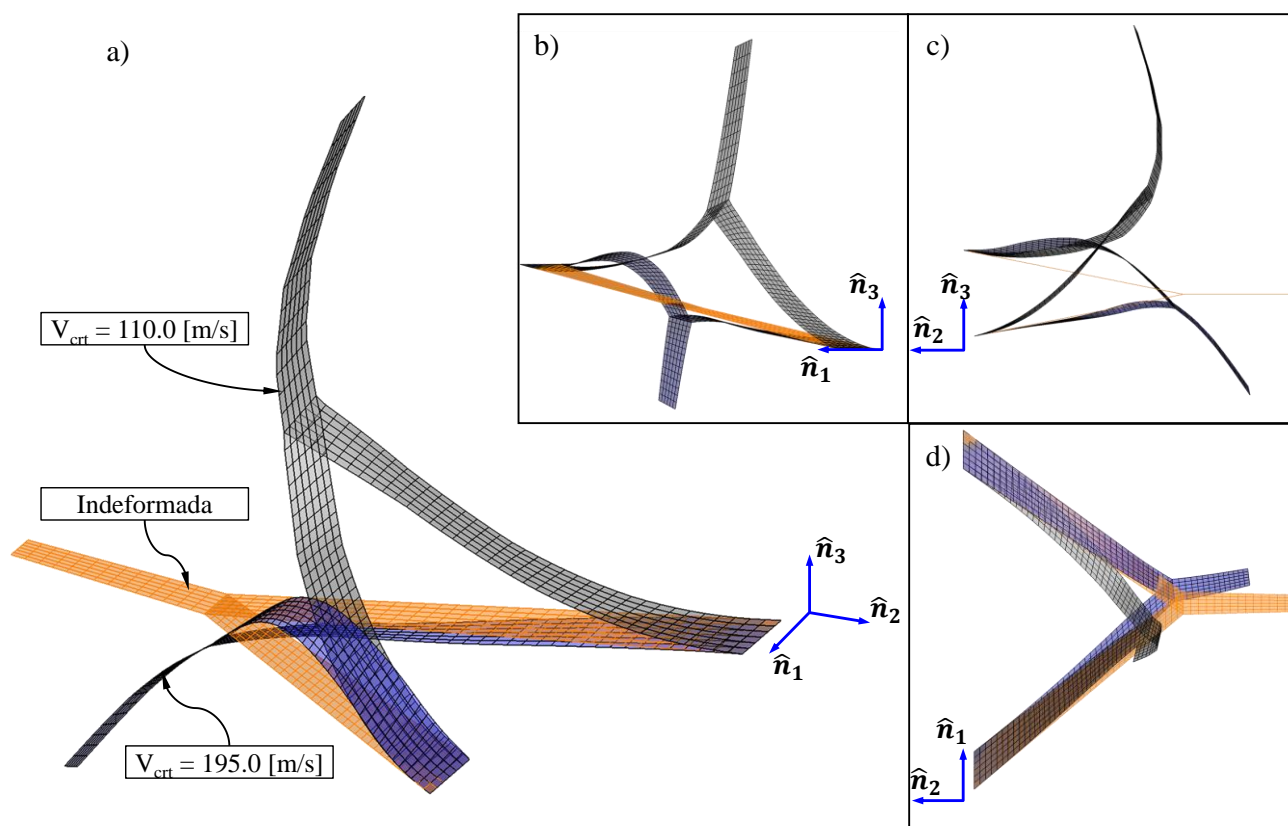


Figura VI-44: Configuración del ala en los puntos críticos encontrados a  $V_{crt} = 110.0$  [m / s] y a  $V_{crt} = 195.0$  [m / s]. a) Perspectiva. b) Vista lateral. c) Vista frontal. d) Vista superior.

### Análisis y discusión de resultados

El sistema analizado en esta sección tiene la particularidad de presentar dos configuraciones de inestabilidad que ocurren a dos valores distintos de velocidad. Estas configuraciones se representan en la Figura VI-44 donde se observa que a 110 m/s la configuración inestable del ala muestra flexión hacia arriba (dirección  $\hat{n}_3$ ) y que a 195.0 m/s el ala se encuentra flexionada en la dirección opuesta (dirección  $-\hat{n}_3$ ) cuando ocurre la inestabilidad.

Para analizar el comportamiento descrito debe tenerse en cuenta que cada simulación se lleva a cabo de forma individual a partir de un arranque impulsivo para cada valor de velocidad, manteniendo constante el ángulo de incidencia. Esto se observa en la Figura VI-42 donde los resultados obtenidos pueden clasificarse en dos grupos: el grupo “de baja velocidad” y el “de alta velocidad”. En las simulaciones del primer grupo, que inician con una velocidad de 50.0 m/s, luego de un breve transitorio, el ala encuentra su configuración deformada estacionaria flexionándose por encima de la configuración de referencia (indeformada). A medida que la velocidad se incrementa, este tipo de respuesta se repite con el correspondiente aumento en la deformación de la estructura hasta alcanzar la primera velocidad crítica que es  $V_{crt} = 110.0$  [m/s].

Las simulaciones realizadas a velocidades mayores a 110.0 m/s se encuentran en el grupo denominado “de alta velocidad”. El primer resultado de la Figura VI-42 corresponde a 115.0 m/s y muestra claramente un cambio en el comportamiento del sistema. En este caso, luego de un transitorio

mucho más suave, la estructura se mantiene en una posición muy cercana a su configuración de referencia mostrando indicios de flexión hacia abajo. Al incrementar la velocidad, la deformación de la estructura en el estado estacionario comienza a acrecentarse ubicándose cada vez más por debajo de la posición indeformada. Este tipo de respuesta se repite con el correspondiente aumento en la deformación hasta alcanzar la segunda velocidad crítica que es  $V_{crt} = 195.0 \text{ [m/s]}$ .

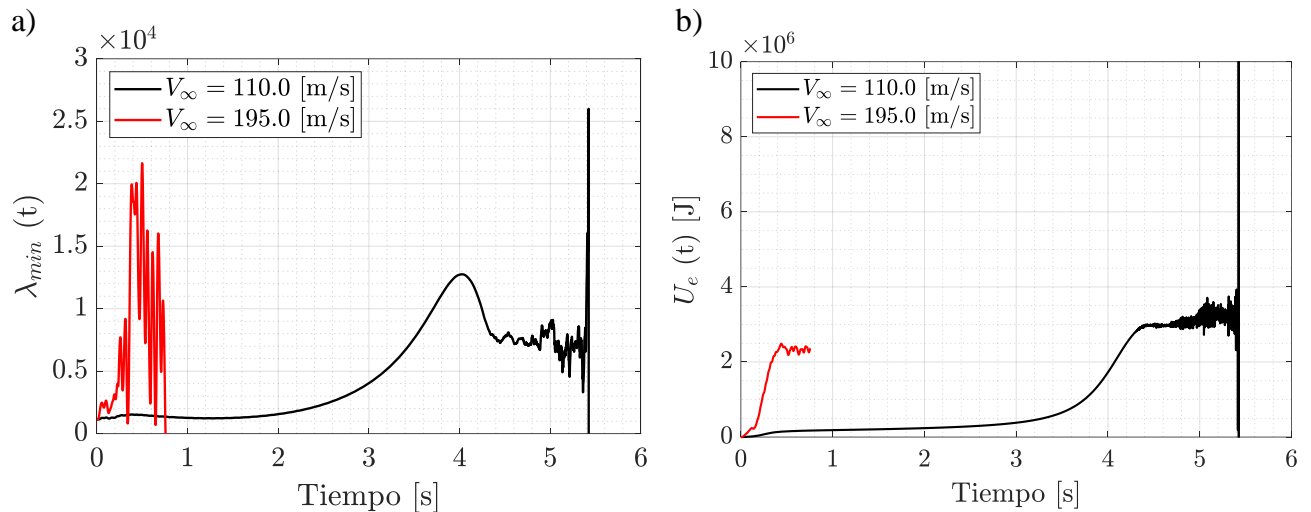


Figura VI-45: Resultados a velocidades críticas. a) Autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura. b) Energía elástica del sistema.

El motivo más probable para el cambio del comportamiento del sistema se basa en la interacción aerodinámica entre el AD y el AT. Es posible que a velocidades menores a 110 m/s las cargas aerodinámicas sobre el ala produzcan un efecto similar al descrito en el Modelo de Alas Unidas “JW70”. Esto es, inicialmente, todas las superficies generan sustentación debido al ángulo de incidencia de la corriente libre que las flexiona hacia arriba. Luego, a causa de la conexión rígida entre las alas, el AT y el AE experimentan un incremento en el ángulo de ataque por torsión mientras que el ángulo de torsión del AD se mantiene más o menos constante. Adicionalmente, la flecha negativa del AT hace que un desplazamiento vertical de flexión genere un aumento en el ángulo de ataque que acentúa más este efecto. Al aproximarse a la velocidad crítica, la flexión de la estructura es tal que incluso el AT interfiere con la estela del AD como se observa en las visualizaciones de la Figura VI-46 a) y la Figura VI-47.

Para velocidades superiores a 110.0 m/s, en cambio, las alteraciones que el AD induce en el flujo aguas abajo producen una reducción en el ángulo efectivo del AT haciendo que esta última desarrolle cargas aerodinámicas de sustentación menores que pueden incluso ser negativas en la zona cercana al punto de unión. En estas condiciones, la deformación de flexión inicial hacia arriba de la estructura no sólo se ve atenuada, sino que se produce un efecto contrario haciendo descender el punto de unión y generando una torsión negativa en el AE. Teniendo en cuenta que las cargas aerodinámicas sobre el AD y el AT son relativamente bajas, la torsión negativa (ángulo de ataque negativo) del AE produce el descenso de toda la estructura hasta encontrar una deformación de estado estacionario por debajo de la posición indeformada. Al aumentar la velocidad, el comportamiento se intensifica hasta alcanzar el punto de inestabilidad mostrado en la Figura VI-46 b).

A pesar de que la naturaleza de los dos puntos de inestabilidad encontrados es similar, ya que en ambos la matriz de rigidez global de la estructura se vuelve singular, estos presentan características diferentes. Haciendo foco en la Figura VI-45 puede notarse que para  $V_\infty = 110.0 \text{ [m/s]}$ , luego de un cierto tiempo de simulación, tanto el autovalor mínimo como la energía elástica del sistema presentan oscilaciones importantes, lo que es un claro indicio de la ocurrencia de la inestabilidad. Para  $V_\infty = 195.0 \text{ [m/s]}$ , en cambio, las oscilaciones del autovalor mínimo se desarrollan prácticamente al iniciarse

la simulación y la energía elástica, aunque presenta oscilaciones, se mantiene en un rango más o menos estable. Este contraste supone que posiblemente el o los modos asociados al pandeo aerodinámico en cada uno de los casos sean diferentes, lo cual se condice con las deformaciones finales que adopta la estructura en cada condición crítica.

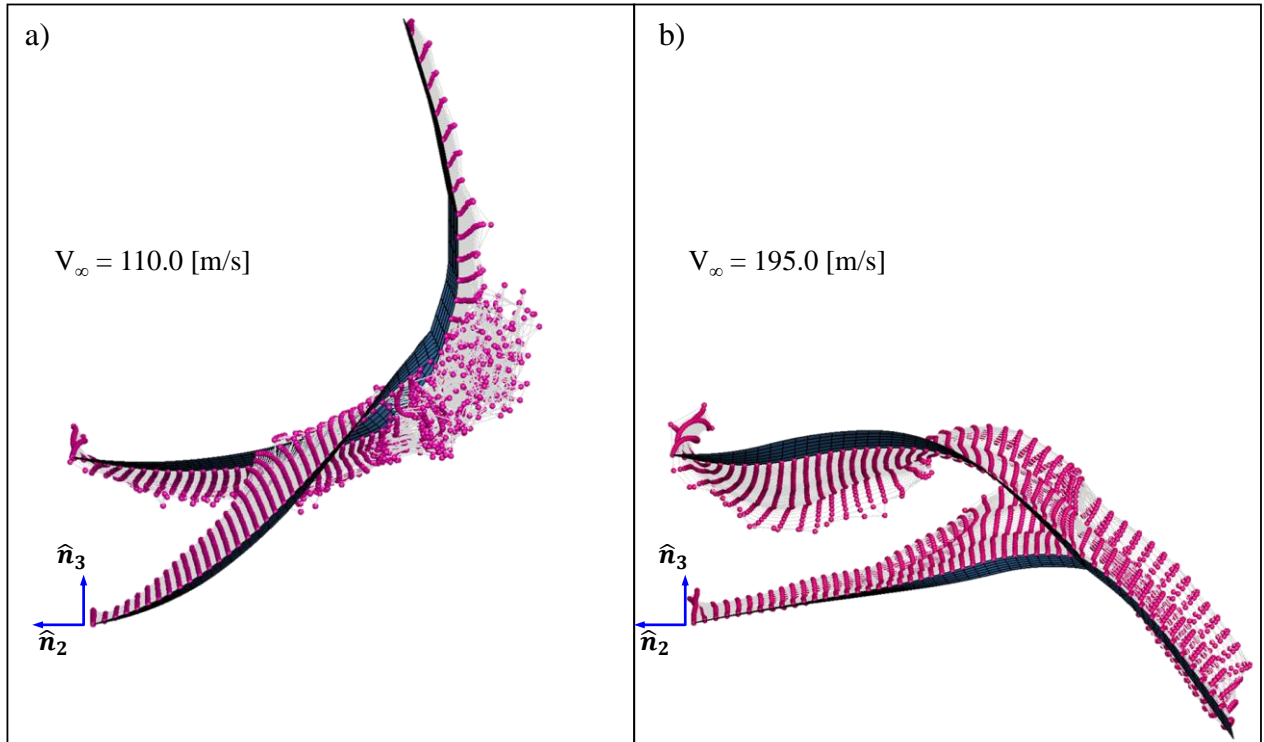


Figura VI-46: Configuración de la estela. a) Inestabilidad a  $V_\infty = 110.0$  [m/s]. b) Inestabilidad a  $V_\infty = 195.0$  [m/s].

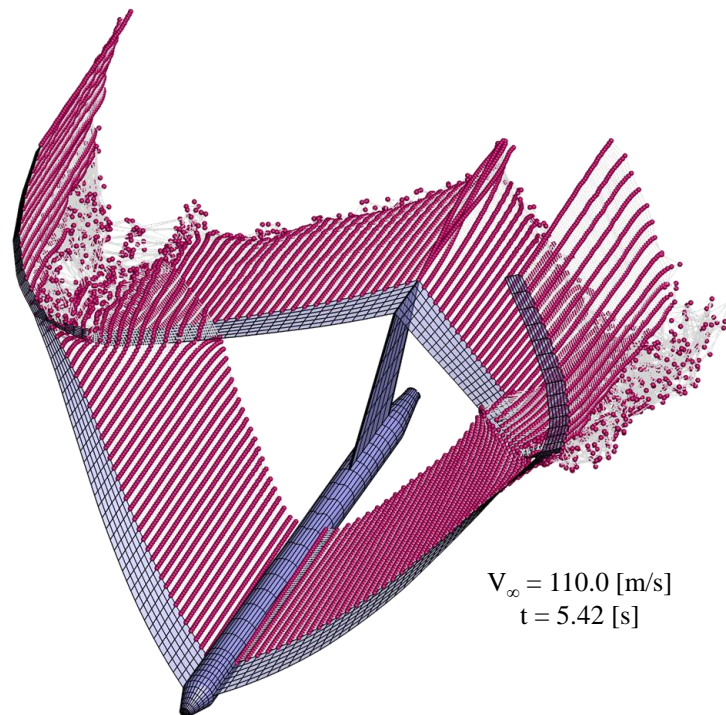


Figura VI-47: Visualización de la aeronave completa en el estado crítico  $V_{crt} = 110.0$  [m/s] y  $t = 5.42$  [s].

## VI. 4. 2 Modelo de Alas Unidas “Glider JWA”

El segundo caso de estudio considerado en esta sección representa una aeronave tipo planeador con configuración de alas unidas. El sistema consiste en un fuselaje y empenaje vertical, considerados como grillas de contorno y, a cada lado, un ala delantera (AD) con flecha y diedro positivos y un ala trasera (AT) con flecha y diedro negativos. Sin embargo, con el objetivo de reducir el tamaño del problema y dado que el objetivo principal de las simulaciones es estudiar el fenómeno de pandeo aerodinámico, la mayor parte de los resultados fueron obtenidos considerando sólo el ala izquierda de la aeronave. En los siguientes apartados, se describen los detalles de la configuración, se exponen algunos resultados y se expresan conclusiones.

### Descripción del caso de estudio

El sistema “Glider JWA” se encuentra representado en la Figura VI-48, y consiste en un modelo de planeador que enfrenta una corriente libre con un ángulo de incidencia  $\alpha$ . Como se mencionó, los estudios fueron efectuados sobre sólo una de las alas de la aeronave dado que, por las condiciones de contorno aplicadas, constituyen estructuras independientes entre sí. A cada lado del planeador, el AD se forma por una viga de dos tramos rectos conectados entre sí en el punto de unión (punto  $b$ ), y se encuentra empotrada en el punto donde se conecta al fuselaje (puntos  $a$ ). El AT, por su parte, se encuentra empotrada en la conexión con el empenaje vertical (punto  $c$ ) y se conecta rígidamente al AD en el punto de unión (punto  $b$ ).

En la representación numérica del caso de estudio se consideró como sistema de referencia global a  $\mathcal{N} = \{\hat{n}_1, \hat{n}_2, \hat{n}_3\}$  (ver Figura VI-48). Para representar la estructura de una de las alas, se utilizaron en total 28 elementos finitos, de los cuales 16 corresponden al AD y 12 al AT. Los elementos del AT son uniformes entre sí, mientras que los del AD son uniformes en cada uno de los tramos. Todos los elementos se orientan según los sistemas de referencia locales  $\mathcal{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y, teniendo en cuenta los nodos empotrados y las conexiones rígidas entre vigas, el modelo estructural cuenta con  $n = 162$  grados de libertad. Debe mencionarse que aquí no se aplicó ningún método de reducción por lo que el comportamiento del sistema corresponde al modelo estructural “completo”.

Las grillas aerodinámicas utilizadas son rectas, planas y de cuerda constante a excepción del tramo externo del AD que posee ahusamiento. En cuanto a la cantidad de paneles, todas las alas cuentan con 6 paneles en la dirección de la cuerda y en dirección de la envergadura se utilizaron 32 paneles para el AD y 24 para el AT. La posición relativa entre las grillas aerodinámicas y sus vigas asociadas es uniformemente proporcional a la cuerda de cada ala.

Para completar la descripción del caso analizado, en la Tabla VI. A-10 del Apéndice VI. A se listan los datos geométricos y de modelado, que se relacionan con el esquema de la Figura VI-48. Los elementos estructurales se numeran de forma creciente desde la raíz de cada una de las alas, es decir los elementos 1 al 16 corresponden al AD y los elementos 17 al 28 corresponden al AT. En cuanto a las propiedades estructurales de cada elemento, estas se obtienen al considerar las secciones transversales mostradas en la Figura VI-49 que se asumen de un material homogéneo e isótropo.

La sección correspondiente al AD (Figura VI-49 a)) consiste en un cajón asimétrico y se mantiene constante desde la raíz hasta el punto de unión (elementos 1 al 12). Luego del punto de unión, la sección transversal se reduce progresivamente con un factor de escala de 0,1 respecto a la sección raíz, con base en el centro de coordenadas, esto es: la sección del elemento 13 se encuentra escalada en 0,9 respecto a la sección raíz, la sección del elemento 14 se encuentra escalada en 0,8 respecto a la sección raíz, la sección del elemento 15 se encuentra escalada en 0,7 respecto a la sección raíz, la sección del elemento 16 se encuentra escalada en 0,6 respecto a la sección raíz. Por su parte, la sección de los

elementos del AT se mantiene constante y está representada en la Figura VI-49 b). Las dimensiones de ambas secciones se encuentran en la Tabla VI. A-11 y en la Tabla VI. A-12 del Apéndice VI. A.

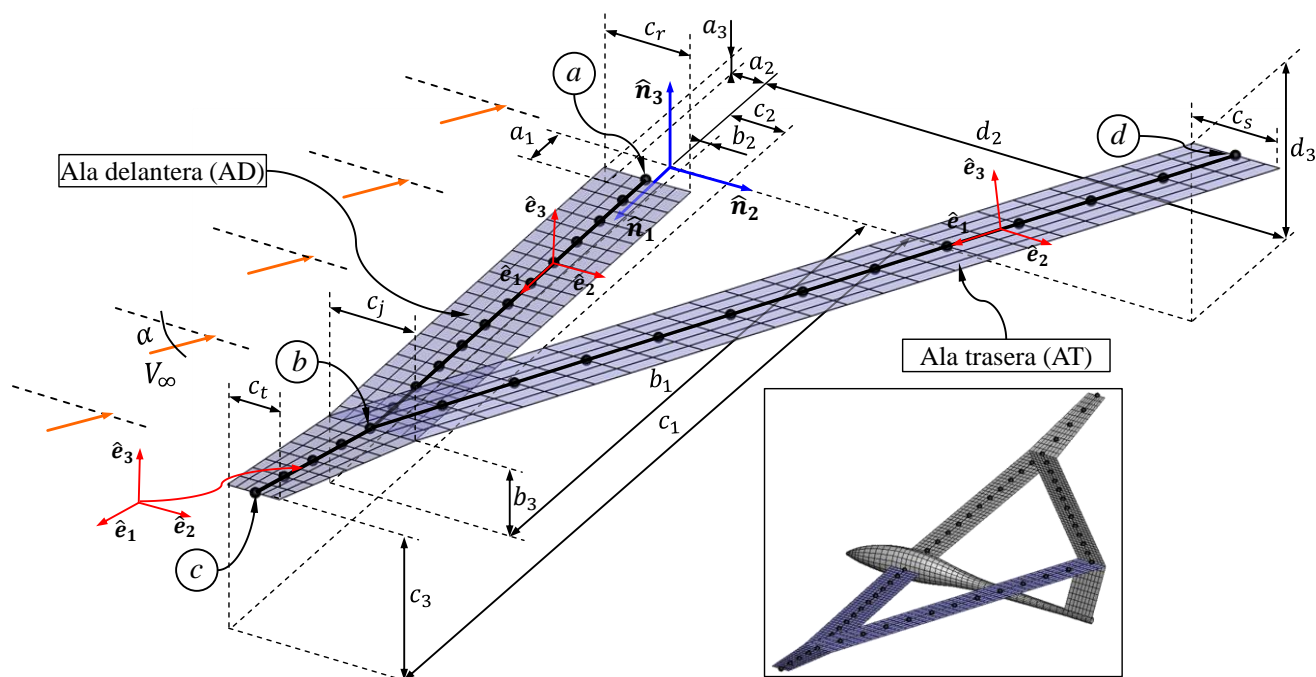


Figura VI-48: Caso de estudio Modelo de Alas Unidas “Glider JWA”, esquema de configuración, y representación numérica

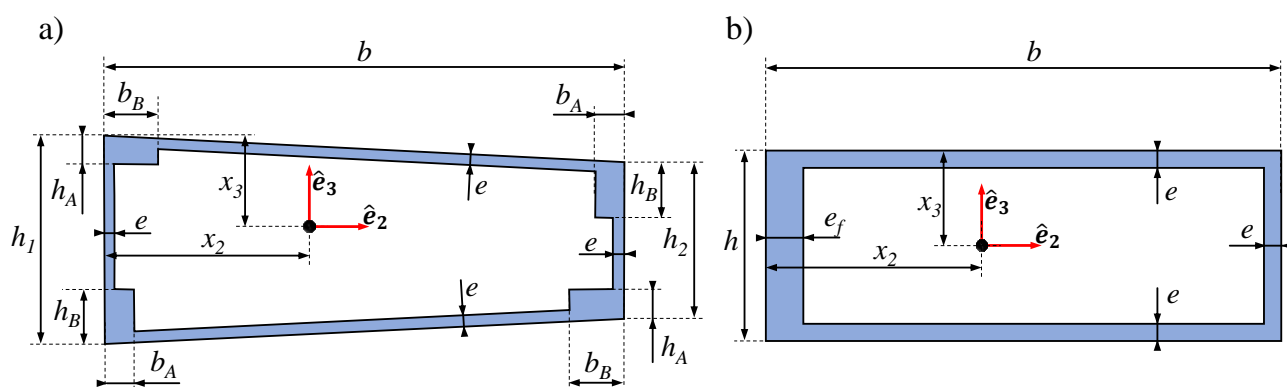


Figura VI-49: Secciones transversales del modelo “Glider JWA”. a) Sección AD. b) Sección AT.

Por último, en la Tabla VI-10 se presentan las diez primeras frecuencias naturales de la estructura, obtenidas con las mencionadas propiedades. Asimismo, en la Figura VI-50, se muestran las seis primeras formas modales.

Tabla VI-10: Frecuencias naturales de la estructura.

$i$	Frecuencia [Hz]	$i$	Frecuencia [Hz]
1	1.94359	6	21.3575
2	4.97334	7	23.5548
3	9.97008	8	29.2596
4	13.5922	9	36.0124
5	14.8697	10	43.6062

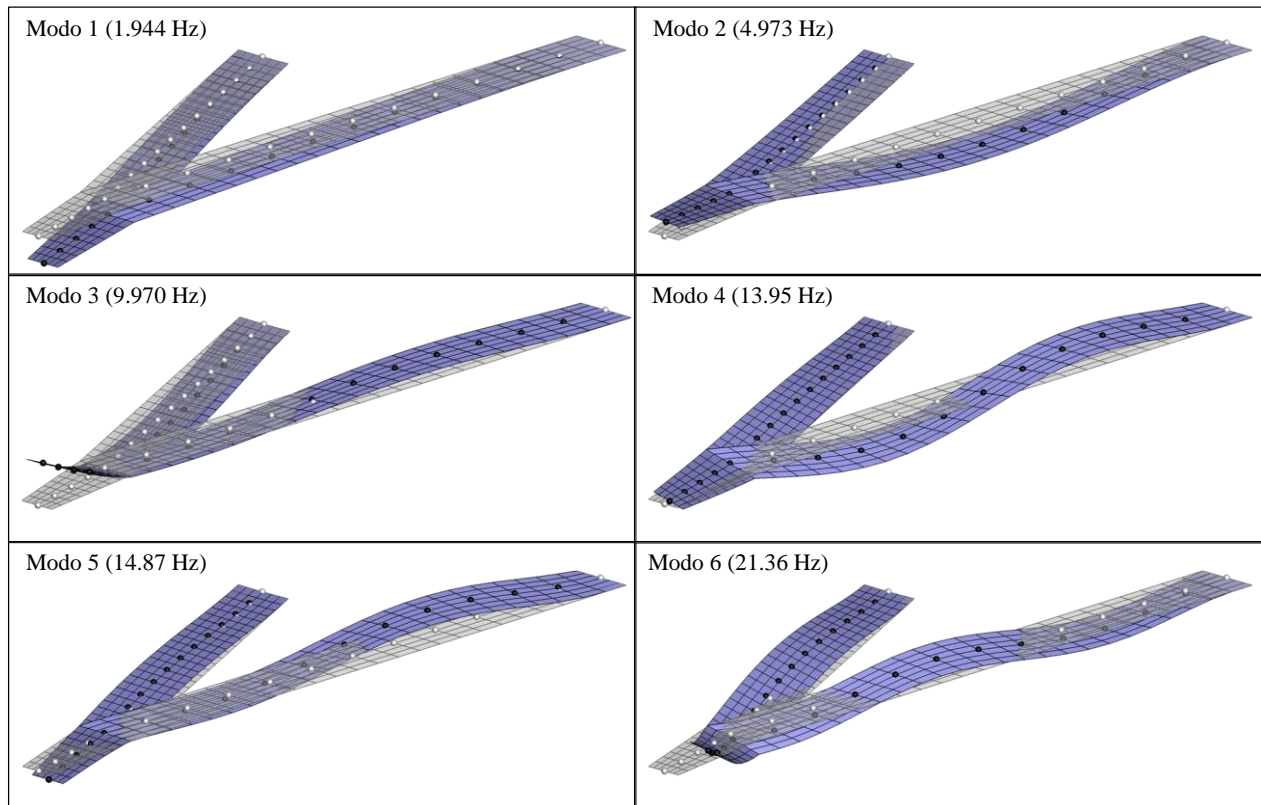


Figura VI-50: Formas modales del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “Glider JWA”.

## Resultados

Los resultados de las simulaciones se basan en la respuesta del sistema a lo largo del tiempo, luego de un arranque impulsivo, para distintas configuraciones de la corriente libre. En este caso, se evalúa el efecto tanto del módulo como del ángulo de incidencia  $\alpha$  de la corriente libre en el comportamiento de la estructura respecto al pandeo aerodinámico. Como es habitual, se considera como indicador de estabilidad al determinante de la matriz de rigidez global de la estructura, representado por el mínimo autovalor de la misma (ver Sección V. 5. 1).

Primeramente, para evaluar el efecto del módulo de  $V_\infty$  en el sistema, se realizan simulaciones para valores de velocidad de la corriente libre crecientes manteniendo su dirección paralela al versor  $\hat{n}_2$  (ver Figura VI-48). Se considera, además, una perturbación inicial que consiste en una corriente vertical (en dirección  $\hat{n}_3$ ), superpuesta a la corriente libre, de dos pasos de tiempo aerodinámico de duración. Con estas condiciones, se evalúa la respuesta del sistema caracterizada en la Figura VI-51 por el desplazamiento vertical de la puntera del ala en función del tiempo  $u_{3p}(t)$ .

Los resultados anteriores se resumen en la Figura VI-52 donde se presenta el valor medio de la posición vertical de la puntera  $\overline{u_{3p}}$  para los distintos valores de velocidad de la corriente libre. Además, se indica con un marcador circular el punto donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la estructura. Complementariamente, las evoluciones temporales de la energía elástica del sistema y el mínimo autovalor de la matriz de rigidez global de la estructura se encuentran graficadas en la Figura VI-53 para  $V_\infty = 133.0 [m/s]$  y  $V_\infty = 135.0 [m/s]$ .

En segundo lugar, se analiza el efecto del ángulo de incidencia de la corriente libre en la respuesta de la estructura. Para ello, se seleccionan dos valores de velocidad,  $V_\infty = 70.0 [m/s]$  y  $V_\infty = 90.0 [m/s]$ , y se realizan simulaciones incrementando el valor de  $\alpha$ , manteniendo la dirección y el módulo de la corriente libre constantes. Los resultados obtenidos se encuentran en la Figura VI-54



donde se presenta el valor medio de la posición vertical de la puntera  $\overline{u_{3p}}$  para los distintos valores de ángulo de incidencia. Además, con marcadores circulares se indica el punto donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la estructura. Complementariamente, las evoluciones temporales de la energía elástica del sistema y el mínimo autovalor de la matriz de rigidez global de la estructura se encuentran graficadas en la Figura VI-55, para las condición crítica a  $V_\infty = 90.0$  [m/s].

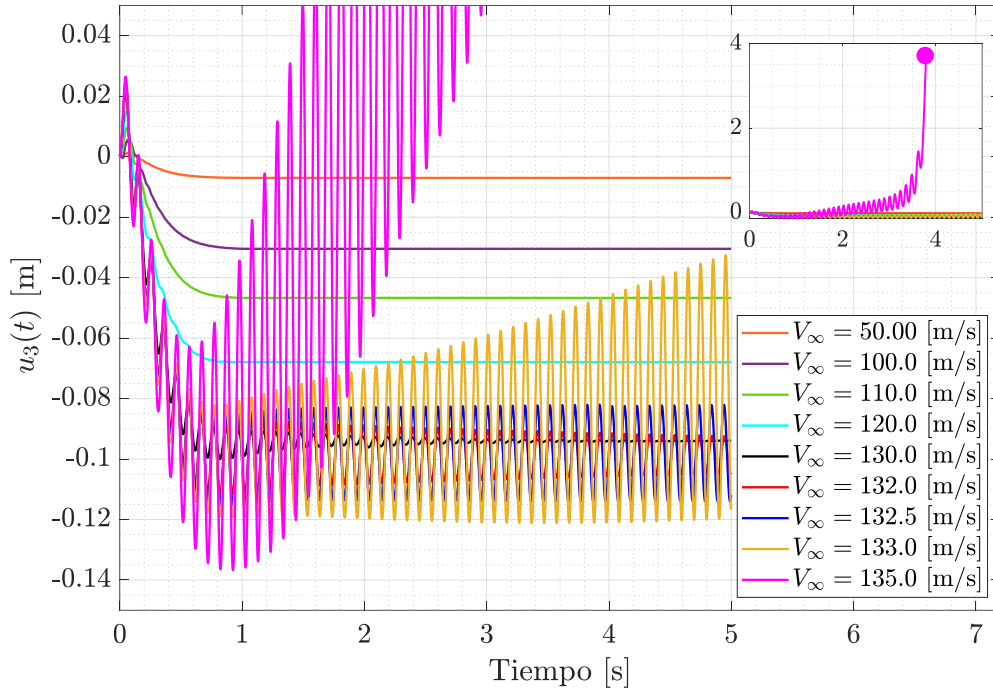


Figura VI-51: Desplazamientos verticales de la puntera del ala para distintas condiciones.

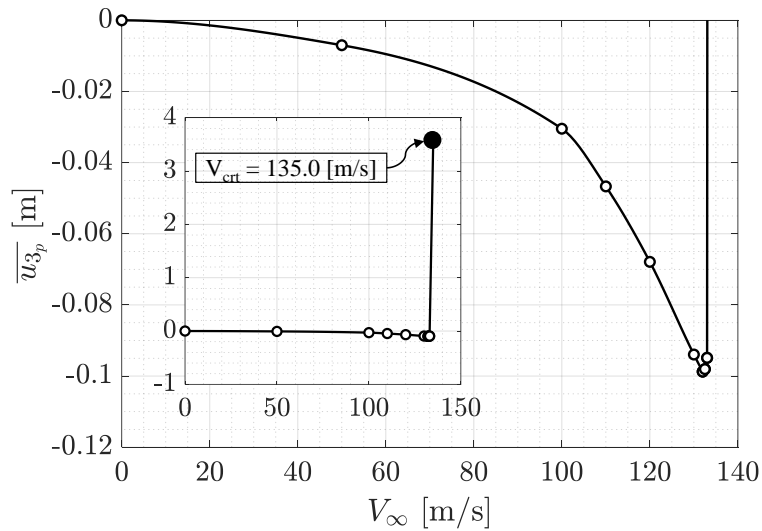


Figura VI-52: Valor medio del desplazamiento vertical de la puntera del ala.

En tercer lugar, se analiza la respuesta de la estructura para valores de velocidad de la corriente libre crecientes con un valor fijo de ángulo de incidencia  $\alpha = 2.0$  [deg]. Los resultados obtenidos se presentan en la Figura VI-56 donde se grafica el valor medio de la posición vertical de la puntera  $\overline{u_{3p}}$  para los distintos valores de  $V_\infty$ . Además, con un marcador circular se indica el punto donde la simulación se detuvo debido a la inestabilidad de la estructura. Por último, en la Figura VI-57 se presenta la configuración de la aeronave completa en el estado crítico a  $V_\infty = 118.0$  [m/s] y  $\alpha = 2.0$  [deg] que ocurre a 2.0 s de simulación.

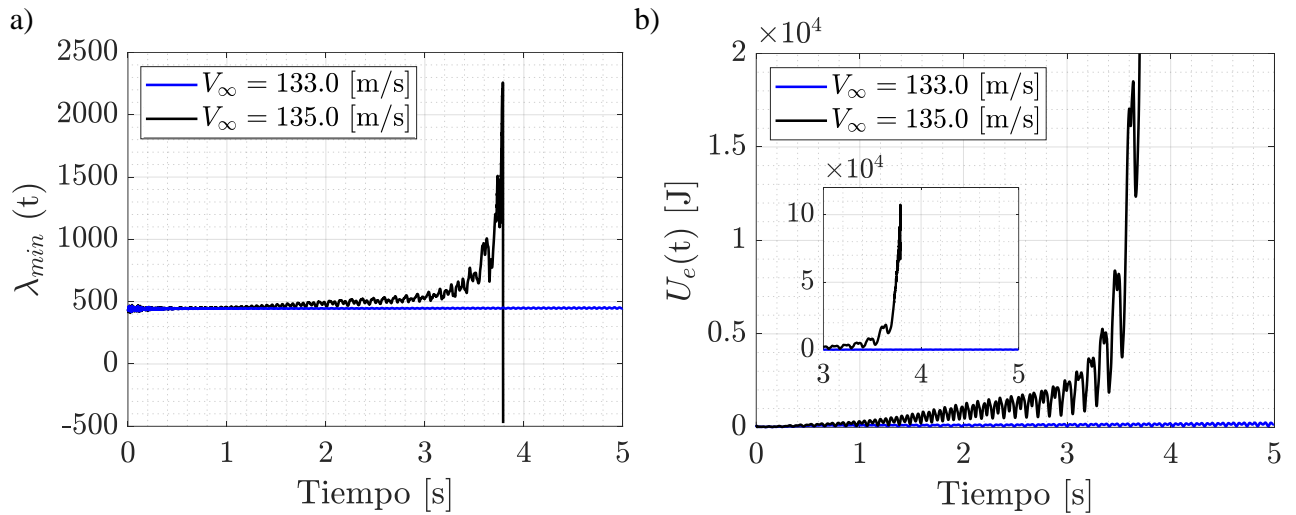


Figura VI-53: Resultados para  $V_\infty = 133.0$  [m/s] y  $V_\infty = 135.0$  [m/s]. a) Autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura. b) Energía elástica del sistema.

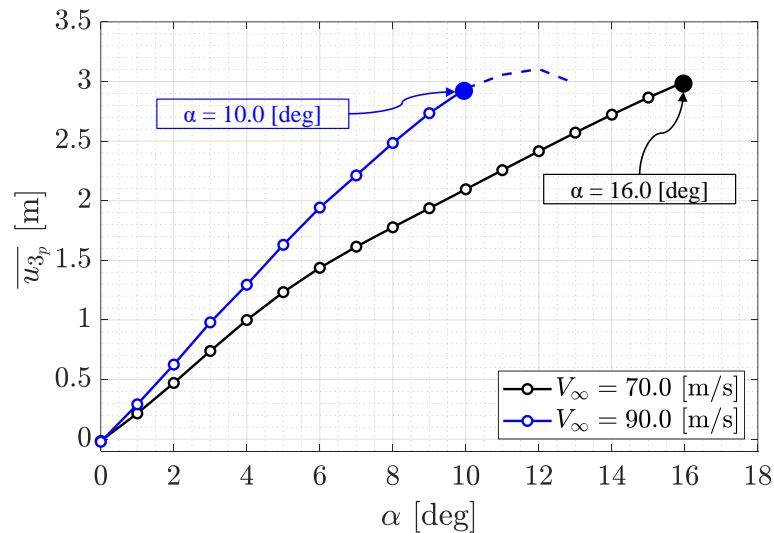


Figura VI-54: Valor medio de la posición vertical de la puntera para distintas condiciones.

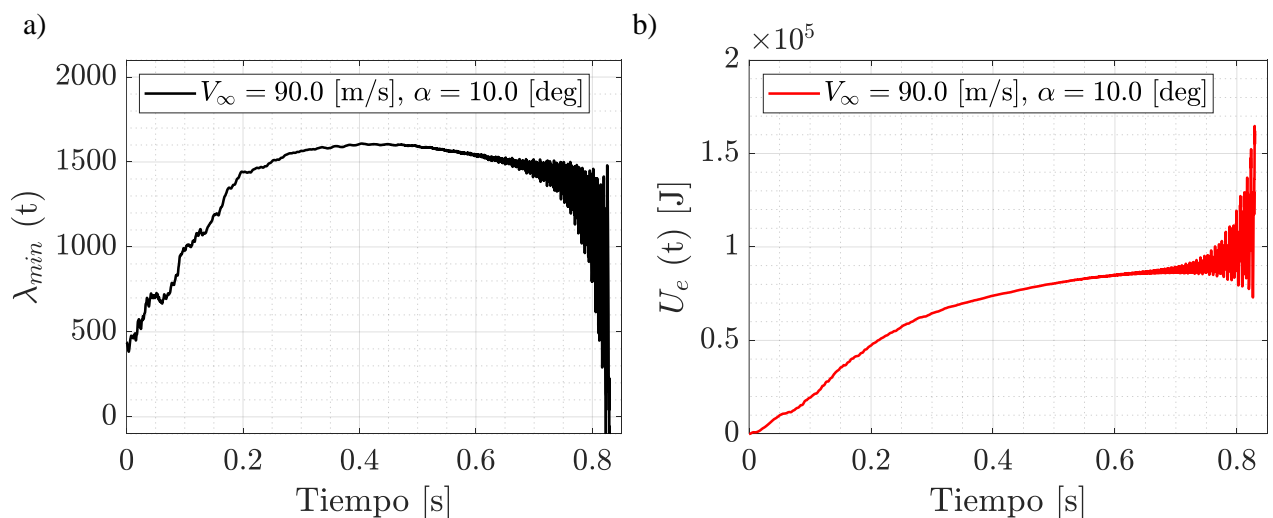


Figura VI-55: Resultados para las condiciones críticas encontradas. a) Autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura. b) Energía elástica del sistema

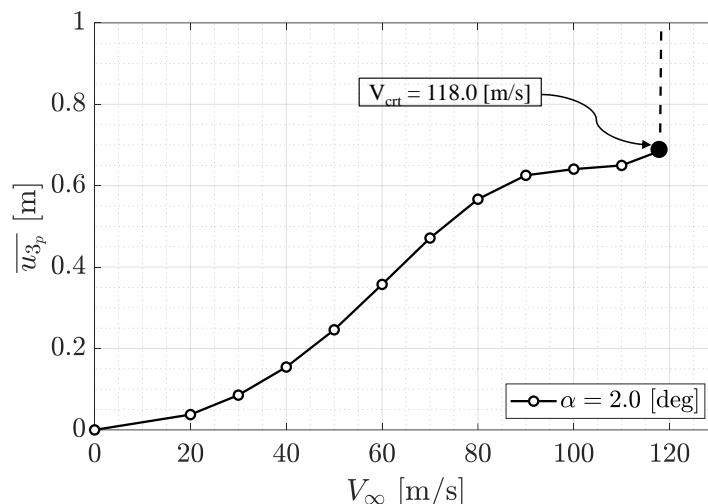


Figura VI-56: Valor medio de la posición vertical de la puntera para distintas condiciones.

### Análisis y discusión de resultados

El primer grupo de resultados de este caso de estudio proviene de simulaciones realizadas al imponer una perturbación inicial sobre el sistema y analizar su evolución en el tiempo manteniendo la corriente libre horizontal. En la Figura VI-51 se observa un cambio en el comportamiento de la respuesta a medida que la velocidad se incrementa. Hasta los 120.0 m/s el ala alcanza una configuración deformada estacionaria luego de transcurridos algunos segundos. Sin embargo, para velocidades mayores (superiores a 130.0 m/s) el sistema comienza a mostrar oscilaciones que al aumentar la velocidad se convierten en LCO. En efecto, a 132.5 m/s el sistema oscila de forma sostenida lo que se identifica con el fenómeno de *flutter*. A mayor velocidad la amplitud de las oscilaciones crece hasta que a 135.0 m/s conducen a la inestabilidad de la estructura.

El comportamiento antes descrito se debe a la progresiva pérdida de rigidez de la estructura, de hecho, algo similar, aunque en menor medida, ocurre en el caso de estudio anterior (Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1”). Luego, en estos sistemas los efectos de la inestabilidad estática (pandeo aerodinámico) se combinan con los de inestabilidad dinámica (*flutter*): al acercarse a la velocidad crítica, la estructura se vuelve sumamente flexible y sufre las oscilaciones propias del *flutter*. Sin embargo, el ciclo límite alcanzado se vuelve sumamente inestable ya que, de sobrepasarse la amplitud de oscilación, ésta puede incrementarse indefinidamente hasta hacer colapsar el sistema como se observa en la Figura VI-51 y la Figura VI-52.

A la velocidad crítica de 135.0 m/s, tanto el autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura como la energía elástica del sistema muestran oscilaciones importantes previas a la inestabilidad (ver Figura VI-53). Esto, como se mencionó es esperable previo al fenómeno de pandeo aerodinámico. En contraparte, a una velocidad subcrítica de 133.0 m/s ambos parámetros, aunque oscilan, se mantienen en un rango más o menos constante.

Los resultados del segundo conjunto de simulaciones analizan cómo la variación del ángulo de incidencia de la corriente libre afecta la estabilidad del sistema. Como es de esperarse, también al incrementar el ángulo  $\alpha$  se produce el efecto de ablandamiento de la estructura (pérdida de rigidez), aunque es menos intenso que el que está asociado al incremento en el módulo de la velocidad. En la Figura VI-54 se aprecia cómo cambian las pendientes de las curvas hasta que finalmente se alcanza la inestabilidad a  $\alpha = 10.0$  [deg] y a  $\alpha = 16.0$  [deg] para  $V_{\infty} = 90.0$  [m/s] y  $V_{\infty} = 70.0$  [m/s], respectivamente.

A los ángulos de incidencia críticos, tanto el autovalor mínimo de la matriz de rigidez global de la estructura como la energía elástica del sistema muestran oscilaciones importantes previas a la inestabilidad (ver Figura VI-55). Esto, como se mencionó es esperable previo al fenómeno de pandeo aerodinámico.

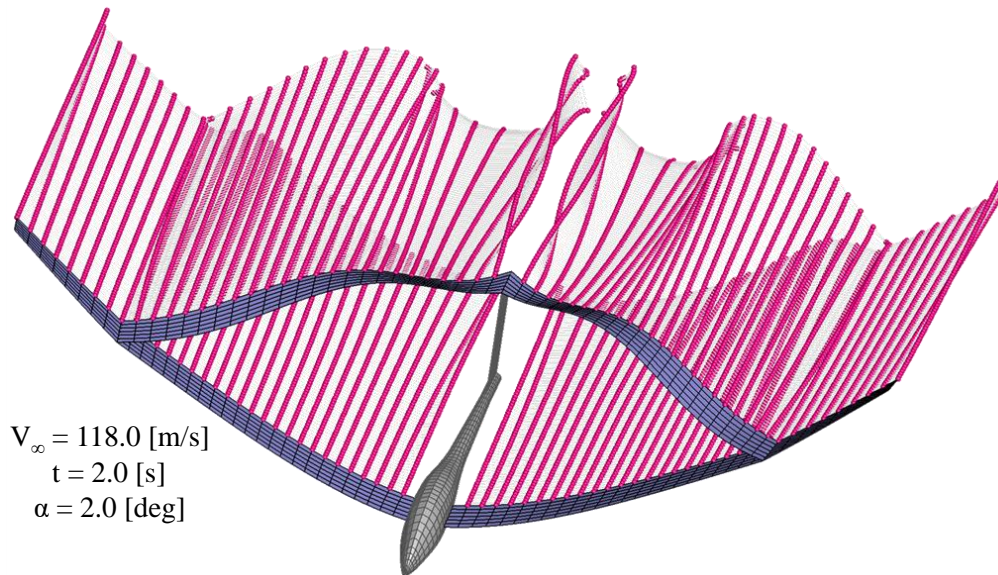


Figura VI-57: Visualización de la aeronave completa en el estado crítico  $V_\infty = 118.0$  [m/s],  $\alpha = 2.0$  [deg] y  $t = 5.42$  [s].

El último grupo de resultados obtenidos para este caso de estudio se presenta en la Figura VI-56. Aquí, se realizan simulaciones con valores crecientes del módulo de la velocidad de la corriente libre, pero se fija un ángulo de incidencia de  $\alpha = 2.0$  [deg]. En este caso, la curva muestra dos comportamientos caracterizados por distintas curvaturas separadas por un punto de inflexión ubicado alrededor de  $V_\infty = 60.0$  [m/s]. Para velocidades más bajas (menores a 60.0 m/s), el sistema acusa el comportamiento característico del efecto de ablandamiento presente en los casos anteriores. Sin embargo, este efecto parece atenuarse e incluso revertirse a medida que la velocidad aumenta. Pasados los 60 m/s la pendiente de la curva decae hasta ponerse casi horizontal y, finalmente, a  $V_\infty = 118.0$  [m/s] se produce la inestabilidad.

Teniendo en cuenta que la variable de análisis es el desplazamiento vertical de la puntera del ala, la conducta del sistema representada en la curva de la Figura VI-56 encuentra motivo en un aspecto geométrico. A velocidades elevadas la configuración deformada del ala se asemeja a la configuración crítica mostrada en la Figura VI-57. En ésta se observa que la flexión vertical del ala se desarrolla hasta que el punto de unión entre las alas alcanza aproximadamente la altura del punto de conexión entre el AT y el empenaje, dejando al AT en una posición prácticamente horizontal. Desde este punto en adelante, el incremento en la flexión del ala delantera, en especial de su tramo externo, produce un desplazamiento de la puntera cuya dirección es principalmente horizontal (dirección  $-\hat{n}_1$ , ver Figura VI-48) y comprime al AT hasta el colapso. Luego, la componente vertical del desplazamiento de la puntera permanece prácticamente inalterada, lo que se refleja en la Figura VI-56.

# Apéndices del Capítulo VI

## Apéndice VI. A : Datos adicionales de los casos de estudio

Con el objetivo de proporcionar toda la información necesaria para reproducir los resultados, en esta sección complementaria se exponen de forma detallada datos adicionales de los casos de estudio presentados en el capítulo.

### Viga “L”

Datos correspondiente al primer caso de estudio del primer grupo de resultados.

Tabla VI. A-1: Propiedades del caso de estudio Viga “L”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$L$	Longitud de cada tramo [m]	1.0
$b$	Lado de la sección [m]	0.1
$\rho$	Densidad del material [Kg/m <sup>3</sup> ]	2768
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	$7.1 \times 10^4$
$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.33
$n$	Grados de libertad del modelo	243

### Viga “JWA”

Datos correspondientes al segundo caso de estudio del primer grupo de resultados.

Tabla VI. A-2: Propiedades del caso de estudio Viga “JWA”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_1$	Coordenada 1 del punto “a” [m]	25.0
$a_2$	Coordenada 2 del punto “a” [m]	10.0
$a_3$	Coordenada 3 del punto “a” [m]	6.0
$b_1$	Coordenada 1 del punto “b” [m]	20.0
$b_2$	Coordenada 2 del punto “b” [m]	8.0
$b_3$	Coordenada 3 del punto “b” [m]	4.8
$c_1$	Coordenada 1 del punto “c” [m]	0.0
$c_2$	Coordenada 2 del punto “c” [m]	20.0
$c_3$	Coordenada 3 del punto “c” [m]	5.0
$w_1$	Alto de la sección [m]	0.19
$w_2$	Ancho de la sección [m]	0.42
$w_3$	Longitud de las alas de la sección [m]	0.14
$e$	Espesor (uniforme) de la sección [m]	0.01
$\rho$	Densidad del material [Kg/m <sup>3</sup> ]	2768
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	$7.1 \times 10^4$

$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.33
$n$	Grados de libertad del modelo	132
$m$	Grados de libertad usados en la simulación	132
$\Delta t$	Paso de tiempo de la simulación [s]	$5.0 \times 10^{-5}$

### Ala Simple SW-UAV 1

Datos correspondientes al primer caso de estudio del segundo grupo de resultados.

Tabla VI. A-3: Propiedades del caso de estudio Ala Simple SW-UAV 1.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_2$	Coordenada 2 de la puntera [m]	29.3
$a_3$	Coordenada 3 de la puntera [m]	1.54
$c_r$	Cuerda raíz [m]	2.2
$c_t$	Cuerda puntera [m]	4.5
$\alpha$	Ángulo de ataque de la corriente libre [°]	0
$x_1$	Coordenada 1 del eje elástico respecto al LE [m]	2.191
$x_3$	Coordenada 3 del eje elástico respecto al LE [m]	0.127
$d$	Alto máximo de la MLC [m]	0.163
$\Delta t_s$	Paso de tiempo estructural [s]	$4.39 \times 10^{-5}$
$\Delta t_a$	Paso de tiempo aerodinámico [s]	0.0016
$n$	Cantidad de grados de libertad estructurales	54
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	320
$\rho_0$	Densidad del aire [Kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
$\rho A$	Masa por unidad de longitud (PUL) [Kg/m]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho I_1$	Momento de inercia másico polar PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho I_2$	Momento de inercia másico eje 2 PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho I_3$	Momento de inercia másico eje 3 PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho I_{23}$	Momento de inercia másico cruzado PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho S_2$	Momento estático másico eje 2 PUL [Kg]	Ver Tabla VI. A-4
$\rho S_3$	Momento estático másico eje 3 PUL [Kg]	Ver Tabla VI. A-4
$EA$	Rigidez axial PUL [N]	Ver Tabla VI. A-4
$EI_2$	Rigidez flexional eje 2 PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-4
$EI_3$	Rigidez flexional eje 3 PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-4
$EI_{23}$	Rigidez flexional cruzada PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-4
$ES_2$	Rigidez acoplada eje 2 PUL [N m]	Ver Tabla VI. A-4
$ES_3$	Rigidez acoplada eje 3 PUL [N m]	Ver Tabla VI. A-4
$GJ$	Rigidez torsional [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-4
$GA_2$	Rigidez al corte eje 2 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-4
$GA_3$	Rigidez al corte eje 3 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-4
$GS_2$	Rigidez acoplada al corte eje 2 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-4
$GS_3$	Rigidez acoplada al corte eje 3 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-4

Tabla VI. A-4: Propiedades los elementos estructurales del caso de estudio Ala Simple SW-UAV 1.

El.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\rho A$	136.276	110.589	90.462	76.716	64.090	53.228	45.825	38.967	32.654

$\rho I_1$	227.514	163.981	118.210	87.658	63.395	45.072	32.784	23.192	15.870
$\rho I_2$	8.284	5.971	4.305	3.192	2.308	1.641	1.194	0.845	0.578
$\rho I_3$	227.514	163.981	118.210	87.658	63.395	45.072	32.784	23.192	15.870
$\rho I_{23}$	-1.797	-1.295	-0.934	-0.692	-0.501	-0.356	-0.259	-0.183	-0.125
$\rho S_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho S_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$EA$	$1.590 \times 10^9$	$1.071 \times 10^9$	$0.877 \times 10^9$	$0.743 \times 10^9$	$0.620 \times 10^9$	$0.514 \times 10^9$	$0.442 \times 10^9$	$0.375 \times 10^9$	$0.313 \times 10^9$
$EI_2$	$9.418 \times 10^7$	$6.431 \times 10^7$	$4.621 \times 10^7$	$3.415 \times 10^7$	$2.459 \times 10^7$	$1.740 \times 10^7$	$1.259 \times 10^7$	$8.843 \times 10^6$	$6.001 \times 10^6$
$EI_3$	$2.492 \times 10^9$	$1.254 \times 10^9$	$9.011 \times 10^8$	$6.658 \times 10^8$	$4.795 \times 10^8$	$3.393 \times 10^8$	$2.454 \times 10^8$	$1.724 \times 10^8$	$1.170 \times 10^8$
$EI_{23}$	$-2.043 \times 10^7$	$-1.468 \times 10^7$	$-1.055 \times 10^7$	$-7.795 \times 10^6$	$-5.614 \times 10^6$	$-3.972 \times 10^7$	$-2.873 \times 10^7$	$-2.019 \times 10^7$	$-1.370 \times 10^7$
$ES_2$	$-1.647 \times 10^6$	$-1.257 \times 10^6$	$-9.630 \times 10^5$	$7.620 \times 10^5$	$-5.907 \times 10^5$	$-4.525 \times 10^5$	$-3.567 \times 10^6$	$-2.754 \times 10^6$	$-2.074 \times 10^6$
$ES_3$	$5.101 \times 10^6$	$3.894 \times 10^6$	$2.984 \times 10^6$	$2.361 \times 10^6$	$1.830 \times 10^6$	$1.402 \times 10^6$	$1.105 \times 10^6$	$8.534 \times 10^5$	$6.427 \times 10^5$
$GJ$	$1.133 \times 10^8$	$7.082 \times 10^8$	$5.089 \times 10^8$	$3.760 \times 10^7$	$2.708 \times 10^7$	$1.192 \times 10^7$	$1.386 \times 10^7$	$9.741 \times 10^6$	$6.612 \times 10^6$
$GA_2$	$7.980 \times 10^8$	$5.371 \times 10^8$	$4.392 \times 10^8$	$3.720 \times 10^8$	$3.101 \times 10^8$	$2.572 \times 10^8$	$2.214 \times 10^8$	$1.882 \times 10^8$	$1.571 \times 10^8$
$GA_3$	$7.980 \times 10^8$	$5.371 \times 10^8$	$4.392 \times 10^8$	$3.720 \times 10^8$	$3.101 \times 10^8$	$2.572 \times 10^8$	$2.214 \times 10^8$	$1.882 \times 10^8$	$1.571 \times 10^8$
$GS_2$	$-8.231 \times 10^5$	$-6.281 \times 10^5$	$-4.823 \times 10^5$	$-3.812 \times 10^5$	$-2.952 \times 10^5$	$-2.262 \times 10^5$	$-1.781 \times 10^5$	$-1.383 \times 10^5$	$-1.041 \times 10^5$
$GS_3$	$2.550 \times 10^6$	$1.952 \times 10^6$	$1.492 \times 10^6$	$1.181 \times 10^5$	$9.151 \times 10^5$	$7.010 \times 10^5$	$5.533 \times 10^5$	$4.272 \times 10^5$	$3.210 \times 10^5$

### Placa Cantiléver CPW

Datos correspondientes al segundo caso de estudio del segundo grupo de resultados.

Tabla VI. A-5: Propiedades del caso de estudio Placa Cantiléver CPW.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a$	Longitud de la placa [m]	0.562
$c$	Cuerda de la placa [m]	0.131
$h$	Espesor de la placa [m]	$5.0 \times 10^{-3}$
$\rho_0$	Densidad del aire [Kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
$\rho$	Densidad del material [Kg/m <sup>3</sup> ]	1208
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	3270
$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.35
$n$	Grados de libertad del modelo	30
$m$	Grados de libertad usados en la simulación	30
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	144
$\Delta t_s$	Paso de tiempo estructural [s]	$3.0 \times 10^{-4}$
$\Delta t_a$	Paso de tiempo aerodinámico [s]	$3.0 \times 10^{-4}$

### Modelo de Alas Unidas “PrP40”

Datos correspondientes al primer caso de estudio del tercer grupo de resultados.

Tabla VI. A-6: Propiedades del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “PrP40”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_2$	Envergadura del ala [m]	0.5
$a_1$	Posición borde de ataque (LE) AD [m]	0.1
$b_1$	Posición borde de ataque (LE) AT [m]	0.15
$b_3$	Altura AT [m]	0.04
$c$	Cuerda del ala [m]	0.05
$h$	Espesor de la placa [m]	$1.0 \times 10^{-3}$

$\rho_0$	Densidad del aire [Kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
$\alpha$	Ángulo de la corriente libre [°]	1.0
$\rho$	Densidad del material [Kg/m <sup>3</sup> ]	2700
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	$6.9 \times 10^4$
$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.33
$n$	Grados de libertad del modelo	48
$m$	Grados de libertad usados en la simulación	48
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	310
$\Delta t$	Paso de tiempo de la simulación [s]	$5.0 \times 10^{-4}$

### Modelo de Alas Unidas “JW70”

Datos correspondientes al segundo caso de estudio del tercer grupo de resultados.

Tabla VI. A-7: Propiedades del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JW70”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_1$	Envergadura del AD [m]	0.5
$b_1$	Envergadura del AT [m]	0.35
$c_2$	Posición borde de ataque (LE) AT [m]	0.1
$c_3$	Altura borde de ataque (LE) AT [m]	0.04
$b_3$	Envergadura del AV [m]	0.02
$c$	Cuerda del ala [m]	0.05
$h$	Espesor de la placa [m]	$0.7 \times 10^{-3}$
$\rho_0$	Densidad del aire [Kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
$\alpha$	Ángulo de la corriente libre [°]	1.0
$\rho$	Densidad del material [Kg/m <sup>3</sup> ]	2700
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	$6.9 \times 10^4$
$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.33
$n$	Grados de libertad del modelo	60
$m$	Grados de libertad usados en la simulación	60
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	350
$\Delta t$	Paso de tiempo de la simulación [s]	$1.5 \times 10^{-4}$

### Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1”

Datos correspondientes al primer caso de estudio del cuarto grupo de resultados.

Tabla VI. A-8: Propiedades del caso de estudio “JWA-UAV-S1”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_1$	Coord. 1 borde de ataque (LE) raíz del AD [m]	0.821
$a_2$	Coordenada 2 LE raíz del AD [m]	-0.981
$a_3$	Coordenada 3 LE raíz del AD [m]	0.196
$b_1$	Coordenada 1 LE punto de unión [m]	16.8
$b_2$	Coordenada 2 LE punto de unión [m]	-20.0
$b_3$	Coordenada 3 LE punto de unión [m]	4.0
$c_1$	Coordenada 1 LE raíz AT [m]	30.0
$c_3$	Coordenada 3 LE raíz AT [m]	8.0
$d_2$	Coordenada 1 LE raíz AT [m]	-30.0



$d_3$	Coordenada 3 LE raíz AT [m]	4.0
$c_r$	Cuerda raíz AD [m]	3.43
$c_s$	Cuerda raíz AT [m]	3.5
$c_t$	Cuerda AE [m]	2.0
$L$	Longitud del fuselaje [m]	33.5
$D$	Diámetro del fuselaje [m]	2
$c_{ev}$	Cuerda raíz del empenaje vertical [m]	5.7
$\alpha$	Ángulo de ataque de la corriente libre [°]	3.5
$x_1$	Posición de la viga respecto al LE [% de cuerda]	48.7
$\Delta t_s$	Paso de tiempo estructural [s]	$2.74 \times 10^{-5}$
$\Delta t_a$	Paso de tiempo aerodinámico [s]	0.002
$n$	Cantidad de grados de libertad estructurales	66
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	456
$\rho_0$	Densidad del aire [Kg/m <sup>3</sup> ]	1.225
$\rho A$	Masa por unidad de longitud (PUL) [Kg/m]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho I_1$	Momento de inercia másico polar PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho I_2$	Momento de inercia másico eje 2 PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho I_3$	Momento de inercia másico eje 3 PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho I_{23}$	Momento de inercia másico cruzado PUL [Kg m]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho S_2$	Momento estático másico eje 2 PUL [Kg]	Ver Tabla VI. A-9
$\rho S_3$	Momento estático másico eje 3 PUL [Kg]	Ver Tabla VI. A-9
$EA$	Rigidez axial PUL [N]	Ver Tabla VI. A-9
$EI_2$	Rigidez flexional eje 2 PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-9
$EI_3$	Rigidez flexional eje 3 PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-9
$EI_{23}$	Rigidez flexional cruzada PUL [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-9
$ES_2$	Rigidez acoplada eje 2 PUL [N m]	Ver Tabla VI. A-9
$ES_3$	Rigidez acoplada eje 3 PUL [N m]	Ver Tabla VI. A-9
$GJ$	Rigidez torsional [N m <sup>2</sup> ]	Ver Tabla VI. A-9
$GA_2$	Rigidez al corte eje 2 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-9
$GA_3$	Rigidez al corte eje 3 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-9
$GS_2$	Rigidez acoplada al corte eje 2 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-9
$GS_3$	Rigidez acoplada al corte eje 3 PUL [N]	Ver Tabla VI. A-9

Tabla VI. A-9: Propiedades los elementos estructurales del caso de estudio “JWA-UAV-S1”.

El.	1	2	3	4	5	6	7	8
$\rho A$	50.076	34.373	25.153	15.337	26.753	15.517	9.643	2.981
$\rho I_1$	48.702	26.584	14.921	6.628	8.780	4.476	2.418	0.6427
$\rho I_2$	1.787	0.9734	0.5470	0.2449	0.3201	0.1630	0.0880	0.0234
$\rho I_3$	46.951	25.611	14.374	6.384	8.460	4.313	2.330	0.6192
$\rho I_{23}$	-0.3880	-0.2113	-0.1188	-0.0532	-0.0694	-0.0354	-0.0191	-0.0051
$\rho S_2$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\rho S_3$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$EA$	$9.167 \times 10^8$	$6.090 \times 10^8$	$4.511 \times 10^8$	$3.035 \times 10^8$	$4.480 \times 10^8$	$2.118 \times 10^8$	$1.314 \times 10^8$	$0.489 \times 10^8$
$EI_2$	$3.048 \times 10^7$	$1.594 \times 10^7$	$0.898 \times 10^7$	$0.439 \times 10^7$	$0.512 \times 10^7$	$0.242 \times 10^7$	$0.130 \times 10^7$	$0.036 \times 10^7$
$EI_3$	$7.875 \times 10^8$	$4.122 \times 10^8$	$2.321 \times 10^8$	$1.131 \times 10^8$	$1.328 \times 10^8$	$0.462 \times 10^8$	$0.249 \times 10^8$	$0.094 \times 10^8$
$EI_{23}$	$-6.63 \times 10^6$	$-3.47 \times 10^6$	$-1.95 \times 10^6$	$-9.55 \times 10^5$	$-1.11 \times 10^6$	$-5.54 \times 10^5$	$-2.98 \times 10^5$	$-7.89 \times 10^4$
$ES_2$	$8.003 \times 10^5$	$4.333 \times 10^5$	$2.941 \times 10^5$	$2.179 \times 10^5$	$1.648 \times 10^5$	$0.806 \times 10^5$	$0.466 \times 10^5$	$0.133 \times 10^5$

$ES_3$	$-2.61 \times 10^6$	$-1.42 \times 10^6$	$-9.62 \times 10^5$	$-7.09 \times 10^5$	$-5.44 \times 10^5$	$-2.67 \times 10^5$	$-1.54 \times 10^5$	$-4.41 \times 10^4$
$GJ$	$2.016 \times 10^7$	$1.130 \times 10^7$	$6.122 \times 10^6$	$2.277 \times 10^6$	$4.234 \times 10^6$	$1.911 \times 10^6$	$0.103 \times 10^6$	$0.313 \times 10^6$
$GA_2$	$4.583 \times 10^8$	$3.045 \times 10^8$	$2.255 \times 10^8$	$1.517 \times 10^8$	$2.245 \times 10^8$	$1.059 \times 10^8$	$0.657 \times 10^8$	$0.244 \times 10^8$
$GA_3$	$4.583 \times 10^8$	$3.045 \times 10^8$	$2.255 \times 10^8$	$1.517 \times 10^8$	$2.245 \times 10^8$	$1.059 \times 10^8$	$0.657 \times 10^8$	$0.244 \times 10^8$
$GS_2$	$4.002 \times 10^5$	$2.167 \times 10^5$	$1.470 \times 10^5$	$1.089 \times 10^5$	$0.824 \times 10^5$	$0.403 \times 10^5$	$0.233 \times 10^5$	$0.666 \times 10^4$
$GS_3$	$-1.31 \times 10^6$	$-7.10 \times 10^5$	$-4.81 \times 10^5$	$-3.54 \times 10^5$	$-2.72 \times 10^5$	$-1.33 \times 10^5$	$-7.72 \times 10^4$	$-2.21 \times 10^4$

### Modelo de Alas Unidas “Glider JWA”

Datos correspondientes al segundo caso de estudio del cuarto grupo de resultados.

Tabla VI. A-10: Propiedades del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “Glider JWA”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$a_1$	Coord. 1 borde de ataque (LE) AD [m]	0.379
$a_2$	Coordenada 2 LE AD [m]	0.0
$a_3$	Coordenada 3 LE AD [m]	$5.78 \times 10^{-3}$
$b_1$	Coordenada 1 LE del punto de unión [m]	7.11
$b_2$	Coordenada 2 LE del punto de unión [m]	0.7
$b_3$	Coordenada 3 LE del punto de unión [m]	0.702
$c_1$	Envergadura del ala [m]	10.0
$c_2$	Coordenada 2 LE de la puntera [m]	1.2
$c_3$	Coordenada 2 LE de la puntera [m]	1.5
$c_r$	Cuerda raíz AD [m]	1.0
$c_j$	Cuerda del punto de unión [m]	1.0
$c_t$	Cuerda puntera [m]	0.6
$c_s$	Cuerda raíz AT [m]	1.0
$c_{EV}$	Cuerda empenaje vertical [m]	1.0
$L_f$	Longitud del fuselaje [m]	8.94
$B_f$	Ancho máximo del fuselaje [m]	0.757
$\rho_0$	Densidad del aire [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]	1.225
$\rho$	Densidad del material [ $\text{Kg}/\text{m}^3$ ]	2700
$E$	Módulo de elasticidad del material [MPa]	$7.37 \times 10^4$
$\nu$	Módulo de Poisson del material	0.33
$n$	Grados de libertad del modelo	162
$m$	Grados de libertad usados en la simulación	162
$n_{pnl}$	Cantidad de paneles aerodinámicos	336
$\Delta t_s$	Paso de tiempo estructural [s]	$1.538 \times 10^{-5}$
$\Delta t_a$	Paso de tiempo aerodinámico [s]	$1.0 \times 10^{-3}$

Tabla VI. A-11: Dimensiones de la sección transversal del ala delantera, “Glider JWA”.

Parámetro	Propiedad	Valor
$h_1$	Altura borde de ataque (LE) [m]	0.12
$h_2$	Altura borde de fuga (TE) [m]	0.09
$b$	Ancho [m]	0.3
$b_A$	Ancho rigidizador vertical [m]	0.01
$b_B$	Ancho rigidizador horizontal [m]	0.02
$h_A$	Alto rigidizador horizontal [m]	0.01
$h_B$	Alto rigidizador vertical [m]	0.02
$e$	Espesor recubrimiento [m]	0.003

$x_2$	Coordenada horizontal eje elástico [m]	0.134
$x_3$	Coordenada vertical eje elástico [m]	0.059

Tabla VI. A-12: Dimensiones de la sección transversal del ala trasera, “Glider JWA”.

<b>Parámetro</b>	<b>Propiedad</b>	<b>Valor</b>
$h$	Altura [m]	0.0573
$b$	Ancho [m]	0.214
$e_f$	Espesor borde de ataque (LE) [m]	0.005
$e$	Espesor general [m]	0.0025
$x_2$	Coordenada horizontal eje elástico [m]	0.0935
$x_3$	Coordenada vertical eje elástico [m]	0.0286



# Capítulo VII: Comentarios Finales



En los capítulos anteriores se expusieron todos los contenidos relacionados con el desarrollo de una herramienta computacional para el estudio de aeronaves con configuración de alas unidas y los fenómenos aeroelásticos que éstas tienen asociados. Entre tales contenidos se destacan: i) la motivación y el contexto; ii) el marco teórico que incluye el modelo estructural, el modelo aerodinámico y el modelo de interacción; iii) la metodología que abarca las particularidades de la implementación y la descripción de los procedimientos seguidos en los distintos estudios; iv) los resultados obtenidos y discusiones de los mismos. Para finalizar el presente trabajo, entonces, se formulan algunos comentarios o notas de cierre que consisten en una síntesis de los puntos más destacados de los capítulos anteriores, conclusiones puntuales a las cuales se arriba luego de los desarrollos realizados y un listado de trabajos futuros que refiere a posibles líneas de investigación que pueden seguirse tomando este trabajo como base. Por último, se presenta una lista de las publicaciones que fueron realizadas debido a y durante el desarrollo de este trabajo.

## VII. 1 Síntesis de desarrollos

Como producto final del presente esfuerzo se desarrolló e implementó una herramienta computacional robusta, confiable, eficiente y de aplicación general, orientada al estudio aeroelástico de sistemas que incluyen aeronaves con configuración de alas unidas. Durante este proceso, se formularon modelos para describir los aspectos estructurales, aerodinámicos y de interacción entre fluido y estructura que rigen, desde un punto de vista multi-físico, los fenómenos aeroelásticos. La herramienta fue luego aplicada a diversos casos de estudio para verificar y validar su funcionamiento, y para demostrar su potencialidad para el estudio de aeronaves con alas unidas.

La herramienta computacional mencionada consiste en un software de propósito general, dentro del tópico de desarrollo, construido bajo los paradigmas de la programación orientada a objetos y la simulación. Tiene, a su vez, incorporadas técnicas de programación de alto desempeño que favorecen la velocidad de cómputo con la consecuente reducción en los tiempos de simulación, como las expuestas en [44]. Cada componente que integra el software se diseñó con la intención de que pueda ser extraído para su uso en otro contexto informático o reemplazado por otro, con una carga de reprogramación mínima.

El modelo estructural utilizado se formuló con base en el método de elementos finitos. Se desarrollaron elementos de viga que admiten deformaciones por corte bajo las hipótesis de la teoría de Timoshenko. En esta formulación, se incorporaron, además y de forma consistente, las no linealidades de Von Kármán que permiten capturar deformaciones moderadas en las componentes axiales del tensor de deformaciones de Green-Lagrange. Adicionalmente, se incluyeron los efectos de las deformaciones por alabeo de la sección, que también fueron agregados consistentemente a la formulación. Con lo

anterior, el modelo estructural es capaz de capturar los efectos no lineales asociados a las inestabilidades aeroelásticas, gracias a un elemento de viga no lineal enriquecido, sin incurrir en excesivos costos computacionales. Por último, el tipo de formulación utilizada en el modelo estructural es apto para investigar la posible incorporación de métodos de reducción de orden adecuados para modelos no lineales. Esto es, teniendo en cuenta que la estrategia evaluada en el presente trabajo de tesis no mostró un desempeño adecuado.

El modelo aerodinámico utilizado es una versión actualizada del método de red de vórtices inestacionario y no lineal que simula flujos dominados por vorticidad. Se trata de un método de elementos de contorno en el que las capas límites y las estelas convectadas desde los bordes filosos de superficies sustentadoras se modelan como sábanas vorticosas discretizadas en redes de segmentos vorticosos. El flujo fuera de las capas límites y estelas se asume incompresible, no viscoso e inestacionario. Las superficies portantes se modelan a partir de su superficie media y se calculan saltos de coeficiente de presión a través de ellas para determinar distribuciones de fuerzas aerodinámicas. El modelo es incapaz de predecir ciertos fenómenos asociados a la capa límite como la resistencia parásita o la pérdida aerodinámica. Sin embargo, es capaz de captar adecuadamente las características tridimensionales del flujo (vórtices de arranque, vórtices de puntera y otras discontinuidades de las superficies sustentadoras), de determinar la interacción aerodinámica entre partes y determinar la sustentación, que es el principal mecanismo involucrado en las inestabilidades aeroelásticas.

El esquema de interacción entre los modelos mencionados entra en la categoría de “fuerte”. Aunque admite el uso de distintos pasos de tiempo para la simulación aerodinámica y la estructural, el intercambio de información es constante (en todos los pasos de tiempo) y garantiza la compatibilidad entre ambas soluciones. Esta condición se traduce en una gran estabilidad del sistema aeroelástico de la que carecen los esquemas “débiles”. Dentro de este esquema, además, se incorpora un controlador que permite identificar la inestabilidad del sistema en los casos en que ocurre el *pandeo aerodinámico*.

La herramienta computacional fue aplicada para analizar distintos casos de estudio, clasificados en cuatro grupos. El primer grupo de resultados tuvo por objetivo verificar el componente de simulación estructural del software desarrollado. En este grupo se evaluaron dos casos y se analizaron las respuestas de los sistemas estructurales en función del tiempo y la aparición de inestabilidades. En el segundo grupo de resultados, los casos analizados estuvieron destinados a verificar y validar la performance del software para predecir *flutter*. En los dos ejemplos considerados el software mostró un gran desempeño. El tercer grupo de resultados se enfocó en determinar en qué condiciones los sistemas considerados se inestabilizan bajo el fenómeno de *pandeo aerodinámico*, para poder validar estos resultados. Aquí también el proceso de validación fue exitoso.

Los resultados del último grupo de simulaciones estuvieron orientados al análisis aeroelástico de casos de estudio que resultan de interés y permiten no sólo demostrar sino también poner a prueba las potencialidades adicionales tanto del modelo numérico como de la herramienta computacional desarrollados. Entre ellos, se destacó la capacidad de modelar el efecto de cambio en la rigidez de la estructura a medida que incurre en deformaciones. Este fenómeno es crucial a la hora de explicar el *pandeo aerodinámico* y la posibilidad de captarlo en las simulaciones reivindica la potencialidad de la herramienta. Por otro lado, fue posible identificar dos configuraciones inestables en una misma estructura que ocurrieron a distintas velocidades de la corriente libre, un resultado de interés para ahondar en los estudios de este tipo de inestabilidades.

## VII. 2 Conclusiones

Luego de todo el proceso de trabajo que fue resumido en la sección anterior, las conclusiones más importantes que pueden extraerse se exponen a continuación.

- El modelo multi-físico permite analizar problemas de interacción fluido-estructura con un abordaje desde el paradigma de la co-simulación. Este enfoque capta con suficiente detalle los fenómenos aeroelásticos de interés y, en consecuencia, es apropiado para el estudio de sistemas que incluyen aeronaves con configuración de alas unidas.
- Las no linealidades introducidas en el modelo estructural representan un punto intermedio entre los modelos lineales simplificados y los más complejos modelos geoméricamente exactos, ambos utilizados en otros trabajos. La complejidad moderada del modelo estructural trae aparejados costos computacionales razonables en comparación con los modelos geoméricamente exactos, en conjunto con la capacidad de representar fenómenos no lineales (como el *pandeo aerodinámico*) que excede a los modelos lineales.
- La principal desventaja del modelo estructural no lineal utilizado recae en las limitaciones de aplicación que imponen sus hipótesis. Aunque trasciende los límites de los modelos lineales, en algunos casos los desplazamientos y deformaciones que sufre la estructura llevan estas hipótesis hasta sus límites reduciendo la confiabilidad de los resultados.
- El modelo aerodinámico utilizado satisface adecuadamente las necesidades de simulación. No obstante, no deben perderse de vista las hipótesis que rigen su formulación, dado que son llevadas al límite en las condiciones críticas de inestabilidad. Luego, las velocidades máximas y los ángulos de ataque efectivos deben ser controlados para no transgredirlas.
- El modelo de interacción fuerte utilizado garantiza la estabilidad de la simulación en todos los casos analizados y los principios físicos de conservación. Sin embargo, se requieren ciertas condiciones para la relación entre los pasos de tiempo estructural y aerodinámico y, en algunos casos, la reducción excesiva del paso de tiempo estructural.
- La representación estricta de las propiedades elásticas y dinámicas de una estructura aeroespacial a partir de un modelo con elementos de viga es una tarea inaccesible en términos prácticos, lo que pone en evidencia la importancia de utilizar otros tipos de modelos más detallados. A pesar de esto, desde un punto de vista global los efectos aeroelásticos pueden predecirse con suficiente precisión para gran parte de los estudios realizados, sin considerar las diferencias en costo computacional implicadas.
- El método de identificación del *pandeo aerodinámico* a partir de la singularidad matemática de la matriz de rigidez global de la estructura, aunque es un parámetro a considerar, por sí solo es insuficiente. Para evaluar correctamente la estabilidad del sistema debe realizarse un análisis integral que incluya, por ejemplo, la variación de la energía interna de la estructura (como se mostró en alguno de los ejemplos anteriores), los desplazamientos en el estado post-crítico y una interpretación física de la configuración. De este modo, se asegura que la condición identificada como *pandeo aerodinámico* efectivamente es una condición crítica.

- Como lo indicaron algunos resultados, un sistema puede presentar más de una configuración inestable en la que ocurra el *pandeo aerodinámico*. En este sentido, ante la predicción de una condición crítica, deben realizarse análisis subsiguientes que permitan obtener más información para contemplar si existen otras, caracterizarlas e identificar las más perjudiciales para la operación de una aeronave.
- Los fenómenos post-críticos asociados al *flutter* se vuelven más complejos a medida que se complejiza la estructura analizada y se incluyen efectos no lineales. El doblamiento de período, el acoplamiento entre distintos grados de libertad a distintas frecuencias, la aparición de múltiples centros en los diagramas de fase, son algunos de los fenómenos que pueden esperarse al estudiar aeronaves con configuración de alas unidas con modelos no lineales.

Como conclusión fundamental del presente trabajo de tesis puede expresarse que el objetivo general planteado inicialmente fue satisfecho de manera íntegra. En cuanto a los objetivos específicos, aunque fueron cumplimentados en su mayoría, restan algunos puntos inconclusos que requieren profundización.

## VII. 3 Trabajos futuros

Sin importar cuán exhaustivo o cuán completo parezca, todo trabajo de investigación puede continuarse, profundizarse, mejorarse o corregirse, en algunos aspectos. Bajo esta premisa, el esfuerzo presentado en esta tesis representa un valorable paso hacia adelante no sólo para lograr el entendimiento de los fenómenos aeroelásticos en las configuraciones con alas unidas, sino también para simularlos. Se proponen, entonces, las siguientes líneas de trabajo que permitirían extender las ideas que aquí se exponen, clasificadas por temas.

### ***Sobre el modelo estructural:***

- Evaluar el uso de un modelo geoméricamente exacto que permita capturar completamente las no linealidades asociadas a los fenómenos aeroelásticos, en lugar del modelo enriquecido utilizado.
- Utilizar una formulación co-rotacional con el modelo de vigas utilizado que mejore la representación de grandes desplazamientos.
- Incorporar al modelo estructural elementos más complejos, como por ejemplo de láminas, que permitan modelar con mayor detalle la topología de las estructuras.
- Expandir el modelo constitutivo para que sea posible trabajar con materiales no homogéneos y/o anisótropos, como materiales compuestos.
- Evaluar la utilización de otros métodos de reducción de orden como las derivadas modales, la descomposición ortogonal propia (POD, por sus siglas en inglés: *Proper Orthogonal Decomposition*), entre otros, y comparar el desempeño de cada uno.

### ***Sobre el modelo aerodinámico:***



- Evaluar la utilización de esquemas alternativos como por ejemplo el uso de estelas de partículas vorticosas.
- Incorporar un método que simule el desprendimiento de la estela para incrementar el rango de ángulos de ataque que pueden modelarse.
- Incorporar métodos que simulen la difusión.

**Sobre el modelo de interacción:**

- Analizar la inclusión de métodos de interacción híbridos entre “fuertes” y “débiles” que garanticen la estabilidad de la solución, pero reduzcan el costo computacional.

**Sobre los resultados:**

- Profundizar y ampliar el proceso de verificación y validación de la herramienta para detallar sus límites y potencialidades.
- Profundizar el análisis del caso de estudio *Placa Cantiléver CPW* para describir con mayor detalle el fenómeno de doblamiento de período identificado.
- Profundizar el análisis del caso de estudio Modelo de Alas Unidas “JWA-UAV-S1” para describir con mayor detalle el fenómeno de pandeo aerodinámico que ocurre para dos configuraciones distintas.
- Realizar más simulaciones para describir en detalle la relación que existe entre la anulación del autovalor mínimo de la matriz de rigidez global del sistema y la energía de deformación elástica para identificar el *pandeo aerodinámico*.

**En general:**

- Evaluar la posibilidad de continuar con las simulaciones luego de anulado el autovalor mínimo de la matriz de rigidez, para definir si este parámetro implica fehacientemente el colapso de la estructura.
- Utilizar la herramienta para caracterizar mecanismos para atenuar las posibilidades de ocurrencia del *pandeo aerodinámico* en configuraciones con alas unidas.
- Utilizar la herramienta para caracterizar el desempeño de distintas configuraciones frente a la ocurrencia del *pandeo aerodinámico*.

## VII. 4 Publicaciones realizadas a partir de este trabajo

Como resultado de la investigación llevada a cabo para desarrollar esta tesis, se realizaron una serie de publicaciones, artículos y otros trabajos científicos que aportaron significativamente a este proceso. A continuación, se enlistan tales trabajos.

[1] **“IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DEL MÉTODO DE RED DE VÓRTICES INESTACIONARIO: UNA VERSIÓN BASADA EN LOS PARADIGMAS DE**

**PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS Y CO-SIMULACIÓN**". Martín E. Pérez Segura, Mauro S. Maza y Sergio Preidikman. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXV, pp. 1391-1409, noviembre, 2017, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5361/5323>

[2] **"ANÁLISIS DE LAS CARACTERÍSTICAS AERODINÁMICAS DE AERONAVES CON CONFIGURACIÓN DE ALAS UNIDAS EN FUNCIÓN DE SUS PARÁMETROS TOPOLOGÍCOS"**. Martín E. Pérez Segura, Mauro S. Maza y Sergio Preidikman. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXVI, pp. 1949-1958, noviembre, 2018, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5722>

[3] **"PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS APLICADA A SIMULACIONES DE FLUJOS DOMINADOS POR VORTICIDAD: EL PUNTO DE VISTA DEL OBJETO"**. Martín E. Pérez Segura, Mauro S. Maza y Sergio Preidikman. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. Volumen 8, pp. 437-440, mayo, 2019, ISSN: 2314-3282. ASAMACI.

[4] **"PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS APLICADA A SIMULACIONES DE FLUJOS DOMINADOS POR VORTICIDAD: ANÁLISIS AERODINÁMICO DE CUADRICÓPTEROS"**. Martín E. Pérez Segura, Santiago Ribero y Sergio Preidikman. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. Volumen 8, pp. 441-443, mayo, 2019, ISSN: 2314-3282. ASAMACI.

[5] **"PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS APLICADA A SIMULACIONES DE FLUJOS DOMINADOS POR VORTICIDAD - PARTE 1: ASPECTOS DE IMPLEMENTACIÓN"**. Pérez Segura, Martín Eduardo; Brewer, Alejandro Tulio; Preidikman, Sergio. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXVII, pp. 1747-1756, noviembre, 2019, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5993>

[6] **"PROGRAMACIÓN ORIENTADA A OBJETOS APLICADA A SIMULACIONES DE FLUJOS DOMINADOS POR VORTICIDAD - PARTE 2: EJEMPLOS DE APLICACIÓN"**. Pérez Segura, Martín Eduardo; Brewer, Alejandro Tulio; Preidikman, Sergio. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXVII, pp. 1757-1766, noviembre, 2019, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/5992>

[7] **"A GENERAL-PURPOSE OBJECT-ORIENTED FRAMEWORK FOR VORTICITY-DOMINATED FLOW SIMULATIONS"**. Pérez Segura, Martín E.; Mook, Dean; Preidikman, Sergio. *AIAA Journal of Aerospace Information Systems*. Vol. 17, No. 10, 2020. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.I010818>

[8] **"SYNERGIES AND CONSTRUCTIVE INTERFERENCE IN A NETWORK OF WEAKLY AERODYNAMICALLY-COUPLED PIEZOAEROELASTIC ENERGY HARVESTERS BASED ON NONLINEAR FLUTTER"**. Emmanuel Beltramo; Martín E. Pérez Segura; Bruno A. Roccia; Marcelo F. Valdez; Marcos L. Verstraete; Sergio Preidikman. *Aerospace 2020*, 7, 167. Open Access Journal by MDPI. DOI: [doi:10.3390/aerospace7120167](https://doi.org/10.3390/aerospace7120167).

[9] **"UN CONCEPTO NO CONVENCIONAL BASADO EN "FLUTTER" PARA COSECHAR ENERGÍA"**. Martín E. Pérez Segura, Emmanuel Beltramo, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete, Luis R. Ceballos y Sergio Preidikman. *International Journal of Natural Disasters, Accidents and Civil Infrastructure*. Vol. 19-20 (1). Civil Engineering and Surveying Department, University of Puerto Rico.

[10] **“ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LAS NO LINEALIDADES ESTRUCTURALES DE VON KÁRMÁN EN LA PREDICCIÓN DE INESTABILIDADES AEROELÁSTICAS”**. Martín E. Pérez Segura, Emmanuel Beltramo, Alejandro T. Brewer, y Sergio Preidikman. XI Congreso Argentino de Tecnología Espacial. 7-9 de abril 2021.

[11] **“UN CONCEPTO NO CONVENCIONAL BASADO EN “FLUTTER” PARA COSECHAR ENERGÍA. PARTE 1: ESQUEMA DE SIMULACIÓN NUMÉRICA”**. Martín E. Pérez Segura, Emmanuel Beltramo, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete, Luis R. Ceballos y Sergio Preidikman. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. Volumen 8, pp. 565-569, mayo, 2021, ISSN: 2314-3282. ASAMACI.

[12] **“UN CONCEPTO NO CONVENCIONAL BASADO EN “FLUTTER” PARA COSECHAR ENERGÍA. PARTE 2: EL DISEÑO CONCEPTUAL”**. Martín E. Pérez Segura, Emmanuel Beltramo, Bruno A. Roccia, Marcelo F. Valdez, Marcos L. Verstraete, Luis R. Ceballos y Sergio Preidikman. *Matemática Aplicada, Computacional e Industrial*. Volumen 8, pp. 570-573, mayo, 2021, ISSN: 2314-3282. ASAMACI.

[13] **“A THREE-DIMENSIONAL PIEZOELECTRIC TIMOSHENKO BEAM MODEL INCLUDING TORWION WARPING”**. Emmanuel Beltramo, Bruno A. Roccia, Martín E. Pérez Segura y Sergio Preidikman. *Multibody Mechatronic Systems. MuSMe 2021*. Mechanisms and Machine Science, vol 110. Springer, Cham. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-88751-3\\_15](https://doi.org/10.1007/978-3-030-88751-3_15)

[14] **“ANÁLISIS DE LA INFLUENCIA DE LA REDUCCIÓN DE ORDEN EN LA DETERMINACIÓN DEL PANDEO DINÁMICO DE UNA ESTRUCTURA DE VIGAS”**. Martín E. Pérez Segura, Emmanuel Beltramo, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXIX, pp. 613-622, noviembre, 2022, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6327/6361>

[15] **“ESTUDIO COMPARATIVO DE METODOLOGÍAS PARA ANALIZAR ESTRUCTURAS DE VIGAS QUE INCLUYEN LAS NO LINEALIDADES DE VON KÁRMÁN”**. Emmanuel Beltramo, Martín E. Pérez Segura, Bruno A. Roccia y Sergio Preidikman. *Mecánica Computacional*. Volumen XXXIX, pp. 221-230, noviembre, 2022, ISSN: 2591-3522. <https://cimec.org.ar/ojs/index.php/mc/article/view/6384>



# Bibliografía

- [1] J. Wolkovitch, «United States Patent», 3942747, 1976.
- [2] J. Wolkovitch, «The joined wing - An overview», *J. Aircr.*, vol. 23, n.º 3, pp. 161-178, mar. 1986, doi: 10.2514/3.45285.
- [3] A. Brown y D. Anderson, «Trajectory Optimization for High-Altitude Long-Endurance UAV Maritime Radar Surveillance», *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 56, n.º 3, pp. 2406-2421, jun. 2020, doi: 10.1109/TAES.2019.2949384.
- [4] A. Voss, V. Handojo, S. Niemann, y C. Weiser, «Results from Loads and Aeroelastic Analyses of a High Altitude , Long Endurance , Solar Electric Aircraft», *ASDJournal*, vol. 9, n.º 1, pp. 1-22, 2021, doi: 10.3293/asdj.2021.58.
- [5] L. Benassi y C. Aquilini, «THE STRUCTURAL DYNAMICS OF FLYING NON STOP FOR 100 DAYS», *Int. Forum Aeroelasticity Struct. Dyn.*, n.º June, pp. 1-14, 2019.
- [6] D. A. Coulson y R. C. Scott, «The Joined Wing», *dSPACE Magazine*, pp. 24-29, mar. 2015.
- [7] J. Gonzalo, D. López, D. Domínguez, A. García, y A. Escapa, «On the capabilities and limitations of high altitude pseudo-satellites», *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 98, pp. 37-56, abr. 2018, doi: 10.1016/j.paerosci.2018.03.006.
- [8] Z. Sotoudeh, «Joined-wing Aircraft in the Twenty-First Century a», *SciTech2015*, 2015.
- [9] R. Collar, «The First 50 Years of Aeroelasticity», *AEROSPACE*, pp. 12-20, feb. 1978.
- [10] I. E. Garrick y W. H. Reed, «Historical Development of Aircraft Flutter», *J. Aircr.*, vol. 18, n.º 11, pp. 897-912, nov. 1981, doi: 10.2514/3.57579.
- [11] S. Preidikman, «Numerical simulations of interactions among aerodynamics, structural dynamics, and control systems». Virginia Tech, 1998.
- [12] M. E. Pérez Segura, E. Beltramo, y S. Preidikman, «Análisis de las Características Aerodinámicas de Aeronaves con Configuración de Alas Unidas en Función de sus Parámetros Topológicos.», *Mecánica Comput.*, vol. XXXVI, pp. 1949-1958, 2018.
- [13] E. Livne, «Aeroelasticity of joined-wing airplane configurations - Past work and future challenges - a survey», en *19th AIAA Applied Aerodynamics Conference*, jun. 2001, n.º April, doi: 10.2514/6.2001-1370.
- [14] B. BUDIANSKY, «DYNAMIC BUCKLING OF ELASTIC STRUCTURES: CRITERIA AND ESTIMATES», en *Dynamic Stability of Structures*, Elsevier, 1967, pp. 83-106.
- [15] C. Gomes, C. Thule, D. Broman, P. G. Larsen, y H. Vangheluwe, «Co-Simulation: A Survey», *ACM Comput. Surv.*, vol. 51, n.º 3, pp. 1-33, may 2019, doi: 10.1145/3179993.
- [16] L. Prandtl, «Induced Drag of Multiplanes», 1924.
- [17] J. Wolkovitch, «Joined-wing research airplane feasibility study», oct. 1984, doi: 10.2514/6.1984-2471.

- 
- [18] A. Frediani, «United States Patent», 5899409, 1999.
- [19] I. Kroo, J. Gallman, y S. Smith, «Aerodynamic and structural studies of joined-wing aircraft», *J. Aircr.*, vol. 28, n.º 1, pp. 74-81, ene. 1991, doi: 10.2514/3.45994.
- [20] J. W. Gallman, S. C. Smith, y I. M. Kroo, «Optimization of joined-wing aircraft», *J. Aircr.*, vol. 30, n.º 6, pp. 897-905, nov. 1993, doi: 10.2514/3.46432.
- [21] T. Kalmar-Nagy y I. Stanciulescu, «Can complex systems really be simulated?», *Appl. Math. Comput.*, vol. 227, pp. 199-211, ene. 2014, doi: 10.1016/j.amc.2013.11.037.
- [22] C. Gomes, C. Thule, D. Broman, P. G. Larsen, y H. Vangheluwe, «Co-simulation: State of the art», feb. 2017.
- [23] L. Demasi y E. Livne, «Exploratory Studies of Joined-Wing Aeroelasticity», abr. 2005, doi: 10.2514/6.2005-2172.
- [24] L. Demasi y E. Livne, «Dynamic Aeroelasticity of Structurally Nonlinear Configurations Using Linear Modally Reduced Aerodynamic Generalized Forces», *AIAA J.*, vol. 47, n.º 1, pp. 70-90, ene. 2007, doi: 10.2514/1.34797.
- [25] L. Demasi y E. Livne, «Dynamic Aeroelasticity Coupling Full Order Geometrically Nonlinear Structures and Full Order Linear Unsteady Aerodynamics - The Joined Wing Case», abr. 2008, doi: 10.2514/6.2008-1818.
- [26] L. Demasi y E. Livne, «Aeroelastic coupling of geometrically nonlinear structures and linear unsteady aerodynamics: Two formulations», *J. Fluids Struct.*, vol. 25, n.º 5, pp. 918-935, jul. 2009, doi: 10.1016/j.jfluidstructs.2009.03.001.
- [27] L. Demasi y E. Livne, «Contributions to Joined-Wing Aeroelasticity», 2009.
- [28] L. Demasi, R. Cavallaro, y A. Márquez Razón, «Postcritical Analysis of PrandtlPlane Joined-Wing Configurations», *AIAA J.*, vol. 51, n.º 1, pp. 161-177, ene. 2013, doi: 10.2514/1.J051700.
- [29] L. Demasi, R. Cavallaro, y F. Bertucelli, «Post-Critical Analysis of Joined Wings: the Concept of Snap-Divergence as a Characterization of the Instability», abr. 2013, doi: 10.2514/6.2013-1559.
- [30] R. Cavallaro, A. Iannelli, L. Demasi, y A. Marquez Razon, «Phenomenology of Nonlinear Aeroelastic Responses of Highly Deformable Joined-wings Configurations», ene. 2014, doi: 10.2514/6.2014-1199.
- [31] C. Cesnik y E. Brown, «Active Warping Control of a Joined Wing/Tail Airplane Configuration», abr. 2003, doi: 10.2514/6.2003-1715.
- [32] D. A. Peters y M. J. Johnson, «Finite-State Airloads for Deformable Airfoils on Fixed and Rotating Wings», *Symp. Aeroelasticity Fluid/Structure Interact.*, 1994.
- [33] C. Cesnik y W. Su, «Nonlinear Aeroelastic Modeling and Analysis of Fully Flexible Aircraft», abr. 2005, doi: 10.2514/6.2005-2169.
- [34] W. Su, «Couple Nonlinear Aeroelasticity and Flight Dynamics of Fully Flexible Aircraft», University of Michigan, 2008.
- [35] W. Su y C. E. S. Cesnik, «Dynamic Response of Highly Flexible Flying Wings», *AIAA J.*, vol. 49, n.º 2, pp. 324-339, feb. 2011, doi: 10.2514/1.J050496.
- [36] C. de Souza, R. G. da Silva, y C. Cesnik, «Nonlinear Aeroelastic Framework Based on Vortex-Lattice Method and Corotational Shell Finite Element», abr. 2012, doi: 10.2514/6.2012-1976.
- [37] Z. Wan y C. E. Cesnik, «Geometrically Nonlinear Aeroelastic Scaling for Very Flexible Aircraft», abr. 2013, doi: 10.2514/6.2013-1894.
- [38] W. Su, Y. Huang, y J. R. Hammerton, «Nonlinear Aeroelasticity of Highly Flexible Joined-Wing Aircraft using Unsteady Vortex-Lattice Method», ene. 2017, doi: 10.2514/6.2017-1353.

- [39] L. R. Ceballos, «Aeroelasticidad NoLineal de Vehículos Aéreos NoTripulados con una Configuración No-Convencional de Alas Unidas», Universidad Nacional de Córdoba, 2017.
- [40] M. S. Maza, «Un algoritmo para cosimulación de fenómenos aeroelásticos con ventajosa relación generalidad/costo», Universidad Nacional de Córdoba, 2019.
- [41] A. B. Kebbie-Anthony, «Inestabilities of Joined-Wing Aircraft Using Accelerated Aeroelastic Simulations», University of Maryland, 2021.
- [42] J. Liang, J. Bai, Z. Sun, H. Wang, B. Zhang, y M. Chang, «Modeling and analysis of a geometrically nonlinear joined wing under thrust force», *J. Sound Vib.*, vol. 544, p. 117369, feb. 2023, doi: 10.1016/j.jsv.2022.117369.
- [43] D. H. Hodges, «Geometrically Exact, Intrinsic Theory for Dynamics of Curved and Twisted Anisotropic Beams», *AIAA J.*, vol. 47, n.º 5, pp. 1308-1309, 2009, doi: 10.2514/1.40556.
- [44] M. E. Pérez Segura, «Implementación Computacional del Método de Red de Vórtices Inestacionario: Una Versión Basada en los Paradigmas de Programación Orientada a Objetos y Co-Simulación», Universidad Nacional De Córdoba, 2018.
- [45] M. E. Pérez Segura, D. T. Mook, y S. Preidikman, «General-Purpose Object-Oriented Framework for Vorticity-Dominated Flow Simulation», *J. Aerosp. Inf. Syst.*, vol. 17, n.º 10, oct. 2020, doi: 10.2514/1.I010818.
- [46] R. W. Hamming, «Stable Predictor-Corrector Methods for Ordinary Differential Equations», *J. ACM*, vol. 6, n.º 1, pp. 37-47, ene. 1959, doi: 10.1145/320954.320958.
- [47] R. De Pascalis, «The Semi-Inverse Method in solid mechanics: Theoretical underpinnings and novel applications», Université Pierre et Marie Curie - Università del Salento, 2010.
- [48] R. W. Ogden, *Non-Linear Elastic Deformations*, Reprint. New York: Dover Publications, Inc., 1997.
- [49] F. Auricchio, P. Carotenuto, y A. Reali, «On the geometrically exact beam model: A consistent, effective and simple derivation from three-dimensional finite-elasticity», *Int. J. Solids Struct.*, vol. 45, n.º 17, pp. 4766-4781, ago. 2008, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2008.04.015.
- [50] S. Hassanpour y G. R. Heppler, «Approximation of Infinitesimal Rotations in Calculus of Variations», *J. Guid. Control. Dyn.*, vol. 39, n.º 3, pp. 705-712, mar. 2016, doi: 10.2514/1.G001041.
- [51] N. G. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Third. New York: Dover Publications, Inc., 2010.
- [52] V. Sonneville, A. Cardona, y O. Brüls, «Geometrically exact beam finite element formulated on the special Euclidean group», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 268, pp. 451-474, ene. 2014, doi: 10.1016/j.cma.2013.10.008.
- [53] J. N. Reddy, *An Introduction to Continuum Mechanics*, Second. New York: Cambridge University Press, 2013.
- [54] J. N. Reddy, *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, 2nd ed. Oxford University Press, 2010.
- [55] L. Andersen y S. R. K. Nielsen, «Elastic Beams in Three Dimensions », *Dep. Civ. Eng. Aalborg Univ.*, ago. 2008.
- [56] E. Oñate, *Structural Analysis with the Finite Element Method, Vol 2. Beams, Plates and Shells*, First. Springer, 2013.
- [57] W. D. Pilkey, *Analysis and Design of Elastic Beams*. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [58] P. Papadopoulos, *Introduction to Continuum Mechanics*, First. Berkeley: University of California, 2017.

- 
- [59] A. A. Shabana, *Computational Continuum Mechanics*, First. New York: Cambridge University Press, 2012.
- [60] R. C. Batra, *Elements of Continuum Mechanics*, First. Blacksburg, Virginia: AIAA Education Series, 2006.
- [61] E. W. V. Chaves, *Notes on Continuum Mechanics*, First. Barcelona, España: Springer, 2013.
- [62] B. V. Akinremi, U. S. Idiong, B. Akintewe, y K. S. Famuagun, «On the application of Fubini's theorem in the integration of functions of two variables in a measure space», *Int. J. Adv. Math. Sci.*, vol. 1, n.º 2, mar. 2013, doi: 10.14419/ijams.v1i2.746.
- [63] J. N. Reddy, *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. New York: John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- [64] S. K. Soltakhanov, M. P. Yushkov, y S. A. Zegzhda, *Mechanics of Non-holonomic Systems*, First. St. Petersburg, Russia: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [65] C. Herz, «The Derivative of the Exponential Map», *Proc. Am. Math. Soc.*, vol. 112, n.º 3, p. 909, jul. 1991, doi: 10.2307/2048716.
- [66] G. Gallego y A. Yezzi, «A Compact Formula for the Derivative of a 3-D Rotation in Exponential Coordinates», *J. Math. Imaging Vis.*, vol. 51, n.º 3, pp. 378-384, mar. 2015, doi: 10.1007/s10851-014-0528-x.
- [67] E. C. Da Lozzo, «Geometrically exact three-dimensional beam theory: modeling and FEM implementation for statics and dynamics analysis», Istituto Universitario di Studi Superiori di Pavia, 2009.
- [68] H. Baruh, *Applied Dynamics*. New York: CRC Press, 2015.
- [69] R. A. Adams y J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, First. Vancouver, Canada: Elsevier Ltd.
- [70] T. J. R. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, First. New Jersey: Prentice-Hall, INC., 1987.
- [71] M. Okereke y S. Keates, *Finite Element Applications*. Cham: Springer International Publishing, 2018.
- [72] A. Tessler y T. J. R. Hughes, «An improved treatment of transverse shear in the mindlin-type four-node quadrilateral element», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 39, n.º 3, pp. 311-335, sep. 1983, doi: 10.1016/0045-7825(83)90096-8.
- [73] N. Carpenter, T. Belytschko, y H. Stolarski, «Locking and shear scaling factors in  $C^0$  bending elements», *Comput. Struct.*, vol. 22, n.º 1, pp. 39-52, ene. 1986, doi: 10.1016/0045-7949(86)90083-0.
- [74] G. Prathap y C. R. Babu, «Field-consistency and violent stress oscillations in the finite element method», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, n.º 10, pp. 2017-2033, oct. 1987, doi: 10.1002/nme.1620241013.
- [75] G. Prathap y G. R. Bhashyam, «Reduced integration and the shear-flexible beam element», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 18, n.º 2, pp. 195-210, feb. 1982, doi: 10.1002/nme.1620180205.
- [76] H. C. Huang y E. Hinton, «A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 22, n.º 1, pp. 73-92, ene. 1986, doi: 10.1002/nme.1620220107.
- [77] M. Gellert, «A new method for derivation of locking-free plate bending finite elements via mixed/hybrid formulation», *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 26, n.º 5, pp. 1185-1200, may 1988, doi: 10.1002/nme.1620260512.
- [78] J. D. J. Anderson, *Fundamental of Aerodynamics*, Fifth. New York: Mc Graw Hill, 2010.
- [79] T. Liu, J. Wu, J. Zhu, y L. Liu, «The Origin of Lift Revisited: I. A Complete Physical Theory»,



- jun. 2015, doi: 10.2514/6.2015-2302.
- [80] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2000.
- [81] M. S. Maza, «Desarrollo de Herramientas Numéricas para la Simulación de la Interacción de Estructuras con un Fluido a Elevado Número de Reynolds», Universidad Nacional de Río Cuarto, 2013.
- [82] J. C. Wu y J. F. Thompson, «Numerical solutions of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations using an integro-differential formulation», *Comput. Fluids*, vol. 1, n.º 2, pp. 197-215, jun. 1973, doi: 10.1016/0045-7930(73)90018-2.
- [83] K. Karamcheti, *Principles of Ideal-Fluid Aerodynamics*, Second. Florida, USA: Krieger Pub Co., 1980.
- [84] S. G. Voutsinas, «Vortex methods in aeronautics: how to make things work», *Int. J. Comput. Fluid Dyn.*, vol. 20, n.º 1, pp. 3-18, ene. 2006, doi: 10.1080/10618560600566059.
- [85] J. L. Hess y A. M. O. Smith, «Calculation of potential flow about arbitrary bodies», *Prog. Aerosp. Sci.*, vol. 8, pp. 1-138, 1967, doi: 10.1016/0376-0421(67)90003-6.
- [86] J. Katz and y A. Plotkin, «Low-Speed Aerodynamics, Second Edition», *J. Fluids Eng.*, vol. 126, n.º 2, pp. 293-294, may 2004, doi: 10.1115/1.1669432.
- [87] J. H. Spurk y N. Aksel, *Fluid Mechanics*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [88] A. Van Garrel, «Development of a wind turbine aerodynamics simulation module», 2003.
- [89] R. Estrada y R. P. Kanwal, *Singular Integral Equations*. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2000.
- [90] J. Katz y D. Weihs, «Behavior of Vortex Wakes from Oscillating Airfoils», *J. Aircr.*, vol. 15, n.º 12, pp. 861-863, dic. 1978, doi: 10.2514/3.58463.
- [91] B. Carnahan y H. A. Luther, «Applied numerical methods», 1969.
- [92] S. R. Idelsohn y A. Cardona, «A reduction method for nonlinear structural dynamic analysis», *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 49, n.º 3, pp. 253-279, jun. 1985, doi: 10.1016/0045-7825(85)90125-2.
- [93] A. K. Noor, «Recent Advances and Applications of Reduction Methods», *Appl. Mech. Rev.*, vol. 47, n.º 5, pp. 125-146, may 1994, doi: 10.1115/1.3111075.
- [94] G. Borino y G. Muscolino, «Mode-superposition methods in dynamic analysis of classically and non-classically damped linear systems», *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*, vol. 14, n.º 5, pp. 705-717, sep. 1986, doi: 10.1002/eqe.4290140503.
- [95] W. Witteveen, «On the Modal and Non-Modal Model Reduction of Metallic Structures with Variable Boundary Conditions», *World J. Mech.*, vol. 02, n.º 06, pp. 311-324, 2012, doi: 10.4236/wjm.2012.26037.
- [96] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, INC., 1996.
- [97] P. D. Powell, «Calculating Determinants of Block Matrices», dic. 2011.
- [98] J. R. Silvester, «Determinants of block matrices», *Math. Gaz.*, vol. 84, n.º 501, pp. 460-467, nov. 2000, doi: 10.2307/3620776.
- [99] G. Dimitriadis, «Introduction to Nonlinear Aeroelasticity», *J. Stat. Phys.*, 2017.
- [100] A. Alizadeh, Z. Ebrahimi, A. Mazidi, y S. A. Fazlzadeh, «Experimental Nonlinear Flutter Analysis of a Cantilever Wing/Store», *Int. J. Struct. Stab. Dyn.*, vol. 20, n.º 07, p. 2050082, jul. 2020, doi: 10.1142/S0219455420500820.