



Facultad de Matemática,
Astronomía, Física y
Computación



Universidad
Nacional
de Córdoba

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS ASOCIADAS A ÁLGEBRAS DE LIE CONFORMES

POR JUAN GABRIEL GUZMÁN

Presentado ante la FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y
COMPUTACIÓN como parte de los requerimientos para la obtención del
grado de *Doctor en Matemática* en la
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Diciembre, 2022

Directora: DRA. CARINA BOYALLIAN
Co-director: DR. JOSÉ IGNACIO LIBERATI

Tribunal Especial:

DRA. EMILY ROSE CLIFF (U. Sherbrooke, titular)
DRA. ESTHER GALINA (FAMAFA, titular)
DR. DIEGO ARMANDO SULCA (FAMAFA, titular)
DR. AGUSTÍN GARCÍA IGLESIAS (FAMAFA, suplente)
DR. JETHRO VAN EKEREN (UFF, suplente)



Este trabajo se encuentra bajo una Licencia Creative Commons
Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional.

Resumen

En este trabajo estudiamos las álgebras de vértice y las álgebras de Lie conformes desde el punto de vista de la teoría de Lie, motivados por el hecho de que las álgebras de Lie conformes tienen álgebras de vértice universales envolventes que son análogas a las álgebras asociativas universales envolventes de las álgebras de Lie. Nuestro objetivo es definir un objeto geométrico que sea análogo a un grupo de Lie en el contexto conforme, en el sentido de que su espacio tangente en la identidad debería ser un álgebra de Lie conforme, mientras que su linealización debería ser un álgebra de vértice.

Primero resolvemos este problema a nivel infinitesimal. En la teoría de Lie clásica, la multiplicación de un grupo de Lie G cerca de la identidad está determinada por la expansión en serie de potencias de sus funciones coordenadas, conocida como ley de grupo formal, y estas series de potencias se pueden recuperar a partir de la estructura de álgebra del álgebra universal envolvente de $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$. Definimos una *ley de vértice formal* como su análogo conforme, y demostramos versiones de vértice/conformes de una serie de resultados clásicos tales como el teorema de Milnor-Moore, la dualidad de Cartier, y la equivalencia entre leyes de grupo formales y álgebras de Lie.

Estos resultados nos permitieron comprender que el objeto global que necesitábamos definir debía ser una versión no lineal de un álgebra de vértice. Beilinson y Drinfeld introdujeron en 2004 varios objetos algebro-geométricos definidos sobre curvas algebraicas suaves que generalizan a las álgebras de vértice, principalmente las nociones de álgebras quirales, de factorización y OPE. Las álgebras OPE nos interesan por su naturaleza explícitamente asociativa, mientras que las álgebras de factorización tienen la ventaja de ser fácilmente generalizables a ámbitos no lineales; sus contrapartes no lineales se conocen como monoides de factorización.

Las categorías de álgebras OPE y de factorización son equivalentes porque ambas son equivalentes a la de álgebras quirales. Damos una prueba directa de su equivalencia en el caso en el que la curva base es \mathbb{A}^1 , mostrando que las álgebras OPE pueden utilizarse para construir datos de pegamiento para las álgebras de factorización. A continuación, definimos *monoides OPE* como ciertos análogos no lineales de las álgebras OPE, y adaptamos nuestra demostración del caso lineal para mostrar que las categorías de monoides OPE y monoides de factorización sobre \mathbb{A}^1 son equivalentes. Luego definimos *ind-esquemas de vértice* de forma tal que su relación con los monoides OPE sea la misma que la que existe entre las álgebras de vértice y las álgebras OPE en el caso equivariante por traslaciones. Proponemos a los ind-esquemas de

vértice como análogos conformes de los grupos de Lie, y demostramos que están relacionados con las álgebras de vértice y las álgebras de Lie conformes de la manera esperada. Para finalizar, damos ejemplos de ind-esquemas de vértice relacionados con algunas álgebras de Lie conformes reconocidas, tales como las álgebras de Lie conformes current y Virasoro, y probamos que dada un álgebra de Lie conforme nilpotente, existe un ind-esquema de vértice cuya álgebra de Lie conforme tangente es isomorfa a la dada.

Palabras clave: Álgebras de vértice, álgebras conformes, teoría de Lie, monoides de factorización.

MSC 2020: 17B69, 81R10, 81T40.

Abstract

In this work we study vertex algebras and Lie conformal algebras from the point of view of Lie theory, motivated by the fact that Lie conformal algebras have universal enveloping vertex algebras which are analogous to universal enveloping associative algebras of Lie algebras. Our objective is to define a geometric object which is analogous to a Lie group in the conformal setting, in the sense that its tangent space at the identity should be a Lie conformal algebra, while its linearization should be a vertex algebra.

We first solve this problem at the infinitesimal level. In the classical Lie theory, the multiplication of a Lie group G near the identity is determined by the power series expansion of its coordinate functions, known as a formal group law, and these power series can be recovered from the algebra structure of the universal enveloping algebra of $\mathfrak{g} = \text{Lie } G$. We define a *formal vertex law* as its conformal analogue, and we prove vertex/conformal versions of a number of classical results such as the Milnor-Moore theorem, Cartier duality, and the equivalence between formal group laws and Lie algebras.

These results allowed us to understand that the global object we needed to define should be a non-linear version of a vertex algebra. Beilinson and Drinfeld introduced in 2004 several algebro-geometric objects defined over smooth algebraic curves which generalize vertex algebras, mainly the notions of chiral, factorization and OPE algebras. OPE algebras are of interest to us due to their explicitly associative nature, while factorization algebras have the advantage of being easily generalized to non-linear settings; their non-linear counterparts are known as factorization monoids.

The categories of OPE and factorization algebras are equivalent because they are both equivalent to that of chiral algebras. We give a direct proof of their equivalence in the case when the base curve is \mathbb{A}^1 , showing that OPE algebras can be used to construct gluing data for factorization algebras. Then we define *OPE monoids* as certain non-linear analogues of OPE algebras, and adapt our proof in the linear case to show that the categories of OPE monoids and factorization monoids over \mathbb{A}^1 are equivalent. Afterwards, we define *vertex ind-schemes* so that their relation to OPE monoids is the same as the one between vertex and OPE algebras in the translation equivariant case. We propose vertex ind-schemes to be conformal analogues of Lie groups, and prove that they are related to vertex algebras and Lie conformal algebras in the expected way. Finally, we give examples of vertex ind-schemes related to some well-known Lie conformal algebras, such as the current and Virasoro conformal algebras, and we prove that given any nilpotent Lie conformal

algebra there exists a vertex ind-scheme whose tangent Lie conformal algebra is isomorphic to the given one.

Keywords: Vertex algebras, conformal algebras, Lie theory, factorization monoids.

MSC 2020: 17B69, 81R10, 81T40.

Agradecimientos

A Carina, por acompañarme a lo largo de estos años y guiarme tanto en lo académico como en lo personal, sobre todo en los momentos más difíciles.

A los miembros de mi tribunal: Emily, Esther y Diego, por su compromiso y sus excelentes devoluciones, las cuales me permitieron mejorar en gran medida este texto. También quisiera destacar el rol de mi Comisión Asesora, como así también del IMPA y en especial de Jethro van Ekeren y Reimundo Heluani, por el apoyo que me brindaron en este camino.

A mi familia, quienes siempre creyeron en mí. Sobre todo a mi mamá y mi papá, con quienes sé que puedo contar siempre, así como ellos conmigo.

A mis amigos, con quienes me fui encontrando en la vida y sin los cuales ahora no concibo vivirla. Con algunos comparto mis días desde mis primeros años en la facu, como Ale, Jose, Emi, Lean, Gerson y Belu. Con los años otros se fueron a explorar nuevos horizontes, como Aru, Iván, Azul, Tefi, Pocho, Agus y Guille. A pesar de eso, siempre estaremos en contacto y sé que la vida nos volverá a reencontrar. Quiero agradecer especialmente a dos personas, a quienes extraño horrores: Dahy, quien me acompañó siempre, tanto acá como desde España; y mi hermanita Kari, a quien admiro y es siempre mi referencia, y es además quien me presentó a Elena, otra gran amiga. También me encontré con muchas personas hermosas en mi paso por el profesorado que me acompañan hasta hoy, entre quienes destaco a Fede, Feli, Gabi, Bren, Seba y Jaqui. La pandemia fue un gran obstáculo para todos, pero pudimos sobrellevarla acompañándonos a la distancia, sobre todo en aquellos cafés post-Seminario de Alumnos, donde junto con Vale, Ro, Lu, Lucas, Romi, Nacho y Pau hacíamos una especie de terapia grupal virtual, a la cual debo en parte mi salud mental. Pre y post-pandemia, pude viajar a varios lugares en donde conocí a personas maravillosas, entre las cuales me gustaría mencionar a Javi, Cristian, Ana y Juan Camilo. Una mención especial se merece mi oficina, la 324, ya que gracias a ellos el día a día se hizo siempre mucho más llevadero.

A mis colegas docentes y mis estudiantes, tanto en FAMAF como en el Garzón, y con mucho cariño a Sandra López y Tomás Sánchez, por todos los momentos compartidos.

A mis docentes, en especial a lo largo del doctorado, por haber aportado tanto a mi formación. En particular quiero agradecerle a Nicolás Andruskiewitsch, por la confianza que depositó en mí.

A los trabajadores no docentes de FAMAF, sobre todo a la Secretaría de Posgrado y al CIEM, y en especial a Nancy, por su buena voluntad y predisposición constante.

A la Universidad pública, gratuita y de calidad, a SECYT y a CONICET, por sus políticas de inversión en Ciencia y Tecnología que entre otras cosas me permitieron acceder a una beca, realizar diversos viajes y me brindaron equipamiento tecnológico, sin los cuales habría sido mucho más difícil afrontar este desafío.

Índice general

Introducción	2
1. Preliminares	8
1.1. Campos	8
1.2. Álgebras de vértice y álgebras de Lie conformes	12
1.3. Álgebras quirales y álgebras de Lie*	21
1.4. Álgebras y monoides de factorización	27
1.5. Álgebras OPE	32
2. Teoría infinitesimal	37
2.1. Biálgebras de vértice y el teorema de Milnor-Moore	37
2.2. Coálgebras de vértice topológicas	40
2.3. Bicoálgebras de vértice y dualidad de Cartier	46
2.4. Leyes de vértice formales	49
3. Teoría global	56
3.1. Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización	56
3.2. Generalización a monoides de factorización: monoides OPE	63
3.3. El contexto equivariante por traslaciones: ind-esquemas de vértice	67
4. Ejemplos	70
4.1. La Grassmanniana afín como un ind-esquema de vértice	70
4.2. El ind-esquema de vértice de Virasoro	72
4.3. El caso nilpotente	75
Referencias bibliográficas	84

Introducción

Las simetrías de una teoría conforme de campos en dimensión dos son gobernadas por objetos algebraicos llamados álgebras de vértice, originalmente definidos por Borchers en [Bo]. Las expansiones del producto de operadores (OPE) entre los campos de una teoría de este tipo forman una estructura algebraica que en cierto modo se asemeja a un álgebra de Lie, la cual fue denominada álgebra de Lie conforme [K]. Existen fuertes paralelismos entre las álgebras de vértice y las álgebras asociativas, así como entre las álgebras de Lie conformes y las álgebras de Lie [BD1, K]. La analogía más importante quizás sea el hecho de que cualquier álgebra de Lie conforme R posee un álgebra de vértice universal envolvente $\mathcal{U}(R)$, la cual goza de muchas de las propiedades que tienen las álgebras asociativas universales envolventes de las álgebras de Lie [K, BK]. Esta relación sugiere que podría valer la pena estudiar otras construcciones que surgen en la teoría de Lie para averiguar si se les puede asignar algún objeto en el contexto conforme que tenga propiedades similares.

En la teoría de Lie en dimensión finita sobre \mathbb{C} , además del functor álgebra universal envolvente tenemos el functor que asigna a cualquier grupo de Lie G su álgebra de Lie tangente en la identidad $\mathfrak{g} = T_1G$, y el functor de linealización que asigna a G su álgebra de distribuciones con soporte en la identidad $\text{Dist}(G, 1) \simeq \mathcal{U}(\mathfrak{g})$, cuyo espacio dual es el anillo local en la identidad de G . La relación entre estos funtores está expresada en el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc}
 & \{\text{Grupos de Lie}\} & \\
 & \swarrow T_1 & \downarrow \text{Dist}(-,1) \\
 \{\text{Álgebras de Lie}\} & \xrightarrow{u} & \{\text{Álgebras asociativas}\}
 \end{array} \tag{0.0.1}$$

Tanto \mathfrak{g} como $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ son objetos de naturaleza infinitesimal, ya que las propiedades globales de G (como su conexidad, conexidad simple, etc.) son olvidadas y sólo se conserva el comportamiento infinitesimal de su producto cerca de la identidad. No obstante, tenemos algunos resultados que nos permiten obtener información local a partir de datos infinitesimales, como la convergencia de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (véase [S] o la sección 4.3), y además el tercer teorema de Lie nos permite construir un grupo de Lie global con álgebra de Lie prescrita. Por lo tanto, en dimensión finita se puede estudiar la teoría de Lie simultáneamente en sus niveles infinitesimal, local y global.

También tenemos versiones algebro-geométricas de este marco; por ejemplo, cualquier esquema de grupo simplemente conexo satisface que su espacio tangente Zariski en la identidad es un álgebra de Lie cuyo radical es nilpotente, y en característica cero para todas estas álgebras de Lie existen esquemas de grupo afines simplemente conexos que las tienen como sus álgebras de Lie [Ho].

El panorama en dimensión infinita es mucho más sutil. Hay varias definiciones de grupos de Lie de dimensión infinita, dependiendo de los espacios que queramos modelar localmente (espacios de Banach, espacios localmente convexos, etc.). En la versión algebro-geométrica, podemos considerar los ind-grupos, que son ind-esquemas (i.e., colímites formales de esquemas) con una estructura de grupo compatible. Sin embargo, en estas situaciones la correspondencia entre los niveles infinitesimal, local y global se rompe por completo, convirtiendo las tres teorías en ramas diferentes -aunque todavía relacionadas-. Por ejemplo, la existencia de un mapa exponencial que sea un difeomorfismo local en la identidad sólo está garantizada en algunos de estos contextos (por ejemplo, en la teoría de grupos de Banach-Lie) [N].

Dado que las álgebras de Lie conformes y las álgebras de vértice son análogas a las álgebras de Lie (de dimensión infinita) y a sus álgebras asociativas envolventes, deben concebirse como objetos infinitesimales. El objetivo principal de esta tesis es construir un objeto global análogo a un grupo de Lie (de dimensión infinita), cuyo espacio tangente en la identidad sea un álgebra de Lie conforme y cuya linealización dé lugar a un álgebra de vértice. Para definir dicho objeto, introduciremos en primer lugar un análogo conforme para otro objeto importante que se encuentra en el nivel infinitesimal de la teoría clásica, la ley formal de grupo, cuya construcción describimos ahora brevemente.

Dada cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} se sabe que $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ es una biálgebra conmutativa y conexa, y todas estas biálgebras pueden presentarse de esta manera debido al teorema de Milnor-Moore [M]. Su espacio dual $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^*$, muniendo de la topología linealmente compacta, se convierte en una biálgebra topológica conmutativa y local mediante la dualidad de Cartier [S, D, Hz]. Si escogemos una base ordenada $\{e_i\}_{1 \leq i < \kappa}$ de \mathfrak{g} , donde κ es un cardinal, la base PBW de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ puede usarse para definir un isomorfismo de álgebras $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^* \simeq \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$. Al emplear este mapa para trasladar la estructura de coálgebra topológica de $\mathcal{U}(\mathfrak{g})^*$ hacia esa álgebra, podemos definir una serie formal de potencias $F_\ell(X, Y) = \Delta(X_\ell) \in \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]]$ para cada $1 \leq \ell < \kappa$. La sucesión $F(X, Y) = \{F_\ell(X, Y)\}_{1 \leq \ell < \kappa}$ satisface las siguientes propiedades:

- (I) $F(X, 0) = X = F(0, X)$;
- (II) $F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z)$.

Cualquier $F(X, Y)$ que satisfaga estos axiomas recibe el nombre de ley

formal de grupo (es necesario tener cierta precaución cuando κ es infinito, especificaremos los detalles en la sección 2.4). Las correspondencias descritas en el párrafo anterior pueden resumirse en la siguiente cadena de equivalencias de categorías.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Álgebras} \\ \text{de Lie} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Biálgebras} \\ \text{coconm. con.} \end{array} \right\} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Biálgebras top.} \\ \text{conm. locales} \end{array} \right\}^{\text{op}} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Leyes de grupo} \\ \text{formales} \end{array} \right\} \quad (0.0.2)$$

Se puede demostrar que cuando \mathfrak{g} es el álgebra de Lie de un grupo de Lie G , las series formales de potencias $F_\ell(X, Y)$ son las expansiones de las ℓ -ésimas funciones coordenadas del producto de G cerca de la identidad, y por tanto determinan completamente el comportamiento local del producto en la identidad. Esto significa que podemos ver $F(X, Y)$ como un objeto intermedio entre \mathfrak{g} y G , y como consecuencia fue un punto de partida natural en nuestra búsqueda de un análogo conforme de un grupo de Lie.

En [BG] seguimos este camino y pudimos definir un análogo conforme para $F(X, Y)$, al que llamamos *ley formal de vértice*. La naturaleza de esa definición nos sugirió que el análogo conforme de un grupo de Lie debería ser una versión no lineal de un álgebra de vértice. Esto nos motivó a buscar una solución global a nuestro problema en el contexto de la teoría de álgebras quirales de Beilinson y Drinfeld, que ofrece una generalización algebro-geométrica de las álgebras de vértice.

En su trabajo fundacional [BD1], los autores sentaron las bases para una nueva comprensión de las álgebras de vértice en términos de la geometría de las curvas algebraicas suaves. Ellos introducen los conceptos de álgebras quirales, de factorización y OPE sobre una curva algebraica suave fija X , y demuestran que las categorías definidas por cada uno de estos objetos son equivalentes entre sí. En el caso de que X sea la recta afín $\mathbb{A}^1 = \text{Spec } \mathbb{C}[x]$, las respectivas subcategorías formadas por aquellos objetos que satisfacen una condición de equivariancia por traslaciones son también equivalentes entre sí y, más aún, son equivalentes a la categoría de álgebras de vértice.

Las álgebras de factorización ofrecen una ventaja respecto a las otras: es posible definir una versión no lineal de las mismas, llamadas monoides de factorización en [KV], espacios de factorización con unidad en [FBZ] y originalmente introducidas como monoides quirales en [BD1], y existe un functor de linealización que transforma monoides de factorización en álgebras de factorización. Esto nos da un método para construir álgebras de vértice partiendo de un ámbito geométrico, ya que existen varios espacios de moduli cuyas propiedades nos permiten entenderlos en términos de un monoide de factorización, y por tanto las fibras de su linealización dan lugar a álgebras de vértice. Tanto las álgebras de vértice de Virasoro como las afines son algunos de los ejemplos que se pueden obtener de esta manera, descritos en detalle en [FBZ].

Al tomar conocimiento de estas ideas, se hizo evidente que el objeto que pretendíamos definir debía relacionarse con los monoides de factorización sobre \mathbb{A}^1 del mismo modo en que lo hacen las álgebras de vértice y las álgebras de factorización sobre \mathbb{A}^1 . Para construir un objeto de este tipo, necesitábamos entender mejor la forma en que las álgebras de factorización y de vértice se relacionan entre sí, y el ingrediente clave para relacionarlas adecuadamente son las álgebras OPE. El concepto de álgebra OPE proporciona una versión “hacificada” de las álgebras de vértice, pero conlleva el precio de tener que lidiar con una geometría más sutil, en concreto, con haces no cuasi-coherentes. Las fibras de un álgebra OPE equivariante por traslaciones sobre \mathbb{A}^1 pueden verse como álgebras de vértice sin mayores complicaciones, pero la relación entre las álgebras OPE y las álgebras de factorización es más compleja. Beilinson y Drinfeld demostraron su equivalencia en [BD1] mostrando que ambas son equivalentes a las álgebras quirales, y las pruebas implican una serie de construcciones cohomológicas.

No obstante, los autores también señalan que las álgebras OPE pueden entenderse como los datos de pegamiento de sus correspondientes álgebras de factorización, aunque no proporcionan muchos detalles sobre esta afirmación. Decidimos completar estos detalles, y en [G] obtuvimos una prueba de la equivalencia de las álgebras OPE y de factorización sobre \mathbb{A}^1 que sólo recurría a construcciones geométricas sobre cierta categoría fibrada. Esto nos permitió definir *monoides OPE* como un análogo no lineal de las álgebras OPE, y demostramos su equivalencia con los monoides de factorización adaptando la prueba que dimos en el caso lineal. Las fibras de estos monoides OPE eran entonces las candidatas perfectas para ser las versiones no lineales de las álgebras de vértice que podían considerarse análogas conformes de los grupos de Lie, y por ello las llamamos *ind-esquemas de vértice*. El lector puede consultar en el diagrama (3.3.3) las principales relaciones entre las categorías definidas en [BD1] y las que introducimos nosotros.

Esta tesis está organizada de la siguiente manera.

En el capítulo 1 introducimos los principales conceptos usados a lo largo de este trabajo. Las secciones 1.1 y 1.2 están dedicadas a presentar algunas nociones básicas de la teoría de álgebras de vértice, mientras que las secciones 1.3 a 1.5 consisten en una exposición de las ideas que necesitaremos de la obra [BD1] de Beilinson y Drinfeld.

En el capítulo 2 brindamos análogos conformes para las equivalencias mostradas en (0.0.2). Probamos en la sección 2.1 una versión apropiada del teorema de Milnor-Moore entre R y la biálgebra de vértice $\mathcal{U}(R)$ (definida por primera vez en [Li]), y en las secciones 2.2 y 2.3 definimos *bicoálgebras de vértice* como las estructuras adecuadas a considerar en $\mathcal{U}(R)^*$ para establecer una versión de la dualidad de Cartier. La noción de dualidad para álgebras de vértice fue estudiada en [Hu1, Hu2], pero nuestro enfoque es diferente porque debemos tener en cuenta la topología de estos espacios. Por último, en la sección 2.4 elegimos una base ordenada $\{e_i\}_{1 \leq i < \kappa}$ de R y hacemos uso

del isomorfismo de álgebras $\mathcal{U}(R)^* \simeq \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$ para codificar la “estructura de vértice” adicional de $\mathcal{U}(R)^*$ en una sucesión de series de potencias formales $F(z)(X, Y) = \{F_\ell(z)(X, Y)\}_{1 \leq \ell < \kappa}$, donde

$$F_\ell(z)(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_\ell^n(X, Y) z^{-n-1} \in \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]][[z, z^{-1}]]$$

para todo $1 \leq \ell < \kappa$. Las llamamos *leyes de vértice formales*, ya que los axiomas de bicoálgebra de vértice en $\mathcal{U}(R)^*$ se traducen en ciertas propiedades de estas series formales de potencias que son similares a los axiomas de las álgebras de vértice.

Por lo tanto, hemos podido encontrar analogías para la mayoría de los conceptos que hemos descrito antes en el nivel infinitesimal de la teoría clásica, y las relaciones entre ellos se resumen en el Corolario 2.4.6. Sin embargo, una excepción consiste en la antípoda de $\mathcal{U}(R)$, lo cual nos impide definir la noción de álgebra de vértice de Hopf. Los principales problemas surgen del hecho de que $\mathcal{U}(R)$ no es un álgebra asociativa. Sin embargo, esto no tiene un impacto significativo porque en la teoría clásica la antípoda de un álgebra de Hopf coconmutativa conexa no es una pieza adicional de información, sino que se encuentra determinada por su estructura de biálgebra.

Los aspectos globales de la teoría se consideran en el capítulo 3. En la sección 3.1 formalizamos la idea de que las álgebras OPE son los datos de pegamiento de las álgebras de factorización cuando la curva base es $X = \mathbb{A}^1$, mientras que en la sección 3.2 generalizamos esta idea al ámbito no lineal e introducimos el concepto de *monoide OPE*. El caso equivariante por traslaciones se trata en la sección 3.3, lo que nos conduce a la definición de *ind-esquemas de vértice*, los cuales proponemos como análogos conformes para los grupos de Lie. En particular, en el Teorema 3.3.5 mostramos que esta definición cumple con nuestras expectativas debido a que obtenemos un diagrama conmutativo similar a (0.0.1).

Finalmente, en el capítulo 4 describimos varios ejemplos de la teoría. En las secciones 4.1 y 4.2 introducimos los ind-esquemas de vértice relacionados con las álgebras de vértice de Virasoro y afines mediante una técnica general que nos permite producir ind-esquemas de vértice a partir de ciertos espacios de moduli. Por otro lado, estamos interesados en la posibilidad de integración en el contexto conforme: dado un álgebra de Lie conforme R , ¿existe un esquema de vértice cuya álgebra de Lie conforme tangente es isomorfa a R ? En la teoría de Lie clásica en dimensión infinita se sabe que esto es una cuestión sutil, aunque hay ciertos casos especiales en los que se puede obtener una respuesta positiva. En la sección 4.3 abordamos uno de los casos que suele presentar un buen comportamiento: restringir nuestra atención a las álgebras de Lie conformes nilpotentes. Con la ayuda de los resultados sobre leyes de vértice formales presentados en el capítulo 2, demostramos en el Teorema 4.3.6 que para cualquiera de estas álgebras de Lie conformes existe un tal ind-esquema de vértice. En particular, este resultado nos proporciona una

amplia familia de ejemplos de ind-esquemas de vértice que no provienen de espacios de moduli.

1 | Preliminares

Todos los espacios vectoriales y esquemas que aparecen en este trabajo se consideran sobre el cuerpo \mathbb{C} , pero en muchas situaciones podríamos sustituirlo por cualquier cuerpo de característica cero. El conjunto de enteros no negativos se denotará como \mathbb{Z}_+ .

1.1 | Campos

Para motivar la definición de álgebra de vértice, presentaremos primero una familia de ejemplos procedente de la teoría cuántica de campos, conocidos como teorías de campos libres.

Sea \mathfrak{h} un espacio vectorial de dimensión finita, al cual veremos como un álgebra de Lie abeliana, con una forma bilineal simétrica no degenerada $(\cdot|\cdot)$. Su *álgebra de Lie afín* asociada es el álgebra de Lie

$$\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$$

con corchete de Lie dado por

$$[\alpha_m, \beta_n] = m(\alpha|\beta)\delta_{m,-n}K, \quad [K, \hat{\mathfrak{h}}] = 0,$$

donde $\alpha_m = \alpha \otimes t^m$ para $\alpha \in \mathfrak{h}$ y $m \in \mathbb{Z}$, y δ es la delta de Kronecker. Tiene dos subálgebras de Lie distinguidas: $\hat{\mathfrak{h}}^{\geq} = \mathbb{C}[t] \oplus \mathbb{C}K$ y $\hat{\mathfrak{h}}^{<} = t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}]$.

Sea $\mathbb{C}_k = \mathbb{C}|0\rangle$ la representación unidimensional de $\hat{\mathfrak{h}}^{\geq}$ donde $\alpha_n|0\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathfrak{h}$ y $n \in \mathbb{Z}_+$ y $K|0\rangle = k|0\rangle$ para algún $k \in \mathbb{C}$.

Ahora la *representación de Fock* (de peso máximo 0) de $\hat{\mathfrak{h}}$ es el módulo inducido

$$\begin{aligned} V^k(\mathfrak{h}) &= \text{Ind}_{\hat{\mathfrak{h}}^{\geq}}^{\hat{\mathfrak{h}}} \mathbb{C}_k = \mathcal{U}(\hat{\mathfrak{h}}) \otimes_{\mathcal{U}(\hat{\mathfrak{h}}^{\geq})} \mathbb{C}_k \\ &\simeq \langle \alpha_{n_1}^{i_1} \cdots \alpha_{n_r}^{i_r} |0\rangle : r \in \mathbb{Z}_+, \alpha^{i_j} \in \mathfrak{h}, n_j < 0 \rangle_{\mathbb{C}}. \end{aligned}$$

Para un $\alpha \in \mathfrak{h}$ fijo, la acción de α_n en $V^k(\mathfrak{h})$ define un endomorfismo de $V^k(\mathfrak{h})$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. En la terminología de los físicos, los α_n con $n < 0$ se conocen como *operadores de creación* (ya que “crean” todos los vectores de $V^k(\mathfrak{h})$ a partir del vector vacío $|0\rangle$), mientras que los α_n con $n \in \mathbb{Z}_+$ son *operadores de aniquilación*. Consideremos todos ellos a la vez como los coeficientes de una serie generatriz

$$\alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n z^{-n-1} \in (\text{End } V^k(\mathfrak{h}))[[z, z^{-1}]], \quad (1.1.1)$$

donde z es una variable formal. Muchas propiedades del $\hat{\mathfrak{h}}$ -módulo $V^k(\mathfrak{h})$ pueden estudiarse mediante estas series de potencias formales, por lo que será útil revisar algunas propiedades generales de las mismas.

Definición 1.1.1. Sea V un espacio vectorial arbitrario.

(I) Una *distribución formal* en V es una serie formal de potencias

$$a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1} \in V[[z, z^{-1}]].$$

El índice de los coeficientes se ha elegido de tal manera que el *residuo* de $a(z)$ puede definirse como $\text{Res}_z a(z) = a_0$.

(II) Un *campo* en V es una distribución formal $a(z) \in (\text{End } V)[[z, z^{-1}]]$ en $\text{End } V$ tal que para cada $v \in V$ vale que

$$a(z)v \in V((z)),$$

donde $V((z))$ es el espacio de las series de Laurent con coeficientes en V . En otras palabras, $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ es un campo en V si para todo $v \in V$ existe un $N \in \mathbb{Z}$ tal que $a_n v = 0$ para todo $n > N$.

(III) El *álgebra de campos lineal general* en V es el espacio vectorial $glf(V)$ formado por todos los campos en V .

No es difícil ver que para cualquier $\alpha \in \mathfrak{h}$, $\alpha(z)$ definido por (1.1.1) es un campo en $V^k(\mathfrak{h})$. El conjunto de campos $\{\alpha(z) : \alpha \in \mathfrak{h}\}$ tiene una propiedad muy especial llamada localidad, que precisamos a continuación.

Definición 1.1.2. Dos campos $a(z)$ y $b(z)$ en V son mutuamente *locales* si

$$(z-w)^N [a(z), b(w)] = 0 \text{ para algún } N \in \mathbb{Z}_+, \quad (1.1.2)$$

donde $[a(z), b(w)]$ es el conmutador $a(z)b(w) - b(w)a(z)$ de estos campos.

Para estudiar campos locales necesitamos establecer algunas propiedades básicas del cálculo formal. La *función delta formal* es la distribución formal en z y w dada por

$$\delta(z-w) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} z^{-m-1} w^m \in \mathbb{C}[[z, w, z^{-1}, w^{-1}]].$$

Esta distribución formal también puede escribirse como

$$\begin{aligned} \delta(z-w) &= z^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} (w/z)^m + w^{-1} \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} (z/w)^m \\ &= i_{z,w} \left(\frac{1}{z-w} \right) - i_{w,z} \left(\frac{1}{z-w} \right), \end{aligned}$$

donde el símbolo $i_{z,w}$ (resp. $i_{w,z}$) denota la expansión en series formales de potencias de la función racional $\frac{1}{z-w}$ en el dominio $|z| > |w|$ (resp. $|w| > |z|$) en \mathbb{C}^2 . Similarmente, es posible calcular que

$$\partial_w^{(j)} \delta(z-w) = i_{z,w} \frac{1}{(z-w)^{j+1}} - i_{w,z} \frac{1}{(z-w)^{j+1}}$$

para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, donde $\partial_w^{(j)} = \frac{1}{j!} \partial_w^j$ y ∂_w es el operador de derivación formal.

Tenemos la siguiente caracterización de los campos locales en términos de la función delta formal y sus derivadas formales (ver [K]).

Proposición 1.1.3. *Dos campos $a(z)$ y $b(z)$ en V satisfacen (1.1.2) si y sólo si existen campos $c^j(z)$ para $0 \leq j < N$ tales que*

$$[a(z), b(w)] = \sum_{j=0}^{N-1} c^j(w) \partial_w^{(j)} \delta(z-w). \quad (1.1.3)$$

Los campos $c^j(z)$ pueden ser calculados a partir de $a(z)$ y $b(z)$ para todo $0 \leq j < N$ a través de la fórmula

$$c^j(w) = \text{Res}_z (z-w)^j [a(z), b(w)].$$

La expresión (1.1.3) es comúnmente escrita por los físicos en su forma alternativa

$$a(z)b(w) \sim \sum_{j=0}^{N-1} \frac{c^j(w)}{(z-w)^{j+1}},$$

donde \sim significa que las dos expresiones meromorfas poseen la misma parte singular. Esto se conoce como la *expansión del producto de operadores* (OPE, por sus siglas en inglés “operator product expansion”) de los campos locales $a(z)$ y $b(w)$, y para un físico significa que su producto en dos puntos cercanos puede ser expandido en términos de otros campos y del parámetro pequeño $z-w$ (ver [FBZ]). Esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.1.4. Sean $a(z)$ y $b(z)$ dos campos en V , y sea $n \in \mathbb{Z}_+$. El *producto n -ésimo* entre $a(z)$ y $b(z)$ es el campo dado por

$$a(w)_{(n)} b(w) = \text{Res}_z (z-w)^n [a(z), b(w)].$$

Por ejemplo, para chequear la localidad de los campos definidos por (1.1.1) podemos calcular

$$\begin{aligned} [\alpha(z), \beta(w)] &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} m(\alpha|\beta) \delta_{m,-n} K z^{-m-1} w^{-n-1} \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} m(\alpha|\beta) K z^{-m-1} w^{m-1} \\ &= (\alpha|\beta) K \partial_w \delta(z-w). \end{aligned}$$

Esto muestra que $\alpha(z)$ y $\beta(z)$ son mutuamente locales para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}$ debido a la Prop. 1.1.3, y podemos escribir su OPE como

$$\alpha(z)\beta(w) \sim \frac{(\alpha|\beta)K}{(z-w)^2}.$$

En términos de productos n -ésimos, esto puede describirse como

$$\alpha(z)_{(n)}\beta(z) = \begin{cases} (\alpha|\beta)K & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n = 0 \text{ o } n \geq 2. \end{cases}$$

Por otro lado, nos gustaría dar sentido a la noción de composición de campos, pero tenemos que ser cuidadosos en su definición. Por ejemplo, si intentamos definir

$$\alpha(z)\beta(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{n+l=m} \alpha_n \beta_l \right) z^{-m-2}$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{h}$, entonces el coeficiente de z^{-2} aplicado a $|0\rangle$ sería

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n \beta_{-n} |0\rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} (n(\alpha|\beta)K + \beta_{-n} \alpha_n) |0\rangle = (\alpha|\beta)k \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} n |0\rangle,$$

lo cual en general no tiene sentido como vector en $V^k(\mathfrak{h})$. Este problema puede resolverse de forma general definiendo la composición de campos de forma tal que los operadores de aniquilación actúen siempre antes que los de creación.

Definición 1.1.5. Sean $a(z)$ y $b(z)$ dos campos en V . El *producto normalmente ordenado* de $a(z)$ y $b(z)$ es

$$: a(z)b(z) : := \left(\sum_{m < 0} a_m z^{-m-1} \right) b(z) + b(z) \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} a_m z^{-m-1} \right).$$

Es fácil comprobar que $: a(z)b(z) :$ es nuevamente un campo. Este producto es generalmente no asociativo, por lo que siempre que tomemos el producto normalmente ordenado de más de dos campos asociaremos implícitamente los factores de derecha a izquierda.

Ahora utilizaremos el producto normalmente ordenado para extender la familia de productos n -ésimos entre campos al caso en que n sea un entero negativo.

Definición 1.1.6. Sean $a(z)$ y $b(z)$ dos campos en V y $n < 0$. El *producto n -ésimo* entre $a(z)$ y $b(z)$ es

$$a(z)_{(n)}b(z) = : (\partial_z^{(-n-1)} a(z))b(z) : .$$

Observemos que con esta notación, el producto normalmente ordenado se convierte en el -1 -ésimo producto.

Ahora estamos listos para introducir el ingrediente principal en la definición de un álgebra de vértice: la correspondencia estado-campo. En el ejemplo que hemos estado examinando, notemos que \mathfrak{h} se puede embeber en $V^k(\mathfrak{h})$ identificando α con $\alpha_{-1}|0\rangle$. Por lo tanto podemos considerar la asignación

$$Y(\cdot, z) : \mathfrak{h} \subset V^k(\mathfrak{h}) \rightarrow glf(V^k(\mathfrak{h}))$$

$$\alpha = \alpha_{-1}|0\rangle \mapsto Y(\alpha, z) := \alpha(z).$$

Tenemos que $Y(\alpha, z)|0\rangle = \alpha(z)|0\rangle = \sum_{m < 0} \alpha_m|0\rangle z^{-m-1} \in V^k(\mathfrak{h})[[z]]$ y su término independiente es $\alpha_{-1}|0\rangle = \alpha$. En particular, $Y(\cdot, z)$ es un mapa inyectivo.

Podemos reescribir esta definición como $Y(\alpha_{-1}|0\rangle, z) = \alpha(z)_{(-1)} id_{V^k(\mathfrak{h})}$, si miramos a $id_{V^k(\mathfrak{h})}$ como un campo constante en $V^k(\mathfrak{h})$. Esto sugiere que podríamos extender la asignación $Y(\cdot, z)$ a todo $V^k(\mathfrak{h})$ fijando

$$Y(\alpha_{n_1}^{i_1} \cdots \alpha_{n_r}^{i_r}|0\rangle, z) = \alpha^{i_1}(z)_{(n_1)} \left(\cdots \left(\alpha^{i_r}(z)_{(n_r)} id_{V^k(\mathfrak{h})} \right) \cdots \right)$$

para todos $\alpha^{i_j} \in \mathfrak{h}$ y $n_j < 0$, $1 \leq j \leq r$. Esta definición tiene la notable propiedad de que la familia de campos $\{Y(a, z) : a \in V^k(\mathfrak{h})\}$, que fue “generada” tomando repetidamente productos n -ésimos en la familia de campos locales $\{\alpha(z) : \alpha \in \mathfrak{h}\}$, continúa siendo una familia de campos locales como consecuencia del siguiente lema (ver [K]).

Proposición 1.1.7. (Lema de Dong) *Si $a(z)$, $b(z)$ y $c(z)$ son campos en V mutuamente locales, entonces $a(z)$ y $b(z)_{(n)}c(z)$ son mutuamente locales para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

El mapa $Y(\cdot, z) : V^k(\mathfrak{h}) \rightarrow glf(V^k(\mathfrak{h}))$ sigue satisfaciendo que $Y(a, z)|0\rangle$ es una serie formal de potencias holomorfa y su término independiente es a para todo $a \in V^k(\mathfrak{h})$, así que continúa siendo inyectivo. En consecuencia, podemos interpretar a $Y(\cdot, z)$ como una correspondencia uno a uno entre los elementos $a \in V^k(\mathfrak{h})$, llamados *estados* en física, y los elementos $Y(a, z)$ en una familia de campos locales en $V^k(\mathfrak{h})$, conocidos como *operadores de vértice* en $V^k(\mathfrak{h})$.

1.2 | Álgebras de vértice y álgebras de Lie conformes

El ejemplo que introdujimos en la sección anterior motiva la definición general de un álgebra de vértice. Primero presentaremos la definición utilizada en [K] y [FBZ], y luego describiremos varias presentaciones equivalentes.

Definición 1.2.1. Un *álgebra de vértice* consta de los siguientes datos:

- Un espacio vectorial V , llamado el *espacio de estados*;
- Un elemento distinguido $|0\rangle \in V$, conocido como *estado vacío*;
- Una aplicación lineal $T \in \text{End } V$ llamada *operador de traslación*;
- Una aplicación lineal

$$Y(\cdot, z) : V \rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]], \quad a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1},$$

conocida como *correspondencia estado-campo*.

Estos datos satisfacen los siguientes axiomas:

- (I) Condición de truncamiento: Para todo $a \in V$, $Y(a, z)$ es un campo. Es decir, para todos $a, b \in V$,

$$Y(a, z)b \in V((z)).$$

- (II) Propiedad del vacío: $Y(|0\rangle, z) = id_V$.

- (III) Propiedad de creación: Para todo $a \in V$, $Y(a, z)|0\rangle \in V[[z]]$ y

$$Y(a, z)|0\rangle \Big|_{z=0} = a.$$

- (IV) Invariancia por traslaciones: Para todo $a \in V$, $[T, Y(a, z)] = \partial_z Y(a, z)$ y $T|0\rangle = 0$.

- (V) Localidad: Para todos $a, b \in V$, los campos $Y(a, z)$ y $Y(b, z)$ son locales, i.e.

$$(z - w)^N [Y(a, z), Y(b, w)] = 0 \text{ para algún } N \in \mathbb{Z}_+.$$

Las operaciones $\cdot_{(n)} \cdot : V \otimes V \rightarrow V$, $a \otimes b \mapsto a_{(n)}b$ con $n \in \mathbb{Z}$ son llamadas *productos n -ésimos* del álgebra de vértice, debido al hecho de que la correspondencia estado-campo identifica estas operaciones en V con los productos n -ésimos que ya hemos definido entre sus correspondientes campos, i.e.

$$Y(a_{(n)}b, z) = Y(a, z)_{(n)}Y(b, z)$$

para todos $a, b \in V$ y $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente, el producto (-1) -ésimo en V también se denomina *producto normalmente ordenado*, y lo denotamos por $:ab := a_{(-1)}b$.

El operador $T : V \rightarrow V$ de un álgebra de vértice V no trae consigo información adicional, ya que de hecho los axiomas de invariancia por traslaciones y de creación implican que para todo $a \in V$,

$$Ta = a_{(-2)}|0\rangle.$$

Sin embargo, es muy útil considerar a T como parte de los datos dados ya que es omnipresente en la teoría, como puede apreciarse en la siguiente proposición.

Proposición 1.2.2. *Las siguientes identidades valen en cualquier álgebra de vértice V .*

$$(I) \quad T(a_{(n)}b) = (Ta)_{(n)}b + a_{(n)}(Tb) \text{ para todos } a, b \in V \text{ y } n \in \mathbb{Z}.$$

$$(II) \quad a_{(n)}b = : (T^{(-n-1)}a)b : \text{ para todos } a, b \in V \text{ y } n < 0.$$

$$(III) \quad Y(a, z)|0\rangle = e^{zT}a \text{ para todo } a \in V.$$

$$(IV) \quad Y(a, z)b = e^{zT}Y(b, -z)a \text{ para todos } a, b \in V.$$

$$(V) \quad \partial_z Y(a, z) = Y(Ta, z) \text{ para todo } a \in V.$$

En particular, notar que los productos n -ésimos con $n < -1$ están completamente determinados por T y el producto normalmente ordenado.

Ejemplo 1.2.3. Si $(V, \cdot, 1)$ es un álgebra asociativa y conmutativa con una derivación T , entonces podemos convertirla en un álgebra de vértice definiendo $|0\rangle = 1$ y $Y(a, z)b = (e^{zT}a) \cdot b$ para todos $a, b \in V$.

Notar que en ese caso todos los operadores de vértice $Y(a, z)$ son series de potencias formales holomorfas, i.e. $a_{(n)}b = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Un álgebra de vértice con esta propiedad se denomina *holomorfa*, y se puede probar que en ellas el producto normalmente ordenado es asociativo y conmutativo, así que las álgebras de vértice holomorfas pueden ser identificadas con álgebras asociativas conmutativas con una derivación. Más aún, al fijar $T = 0$ obtenemos una biyección entre las álgebras asociativas y conmutativas $(V, \cdot, 1)$ y las álgebras de vértice holomorfas tales que $Y(a, z)b = a \cdot b$ para todo $a, b \in V$, las cuales son llamadas *álgebras de vértice triviales*.

Podemos pensar en las álgebras asociativas y conmutativas como álgebras $(V, \cdot, 1)$ donde los operadores de multiplicación a izquierda $Y(a) : V \rightarrow \text{End } V$ para todo $a \in V$ conmutan entre sí, i.e.

$$Y(a)Y(b) = Y(b)Y(a). \quad (1.2.1)$$

En efecto, para tales álgebras obtenemos su conmutatividad evaluando (1.2.1) en 1, y a partir de allí puede deducirse fácilmente su asociatividad.

Por otro lado, en toda álgebra de vértice tenemos el axioma de localidad, el cual puede interpretarse como una versión débil de (1.2.1). Podemos definir productos iterados

$$Y(a, z)Y(b, w)c = \sum_{n < N(b, c)} Y(a, z)b_{(n)}c w^{-n-1} \in V((z))((w)) \text{ y}$$

$$Y(b, w)Y(a, z)c = \sum_{m < N(a, c)} Y(b, w)a_{(m)}c z^{-m-1} \in V((w))((z)),$$

pero $V((z))((w)) \neq V((w))((z))$, así que no es posible comparar estas dos expresiones directamente. En su lugar podemos considerar el espacio vectorial

$V[[z, w]][z^{-1}, w^{-1}, (z - w)^{-1}]$, el cual es la localización del $\mathbb{C}[[z, w]]$ -módulo $V[[z, w]]$ en los elementos z , w y $z - w$, y mirar las dos inclusiones

$$V((z))((w)) \leftarrow V[[z, w]]_{z, w, z-w} \hookrightarrow V((w))((z))$$

definidas por $(z - w)^{-1} \mapsto i_{z, w}(z - w)^{-1}$ y $(z - w)^{-1} \mapsto i_{w, z}(z - w)^{-1}$ respectivamente. Podemos preguntarnos si los elementos $Y(a, z)Y(b, w)c$ y $Y(b, w)Y(a, z)c$ pueden ser vistos como expansiones de la misma “función racional” $f(z, w) \in V[[z, w]]_{z, w, z-w}$ con coeficientes en V y polos sólo en $z = 0$, $w = 0$ y $z = w$. Más aún, también podemos considerar

$$Y(Y(a, z - w)b, w)c = \sum_{n < N(a, b)} Y(a_{(n)}b, w)c (z - w)^{-n-1} \in V((w))((z - w))$$

y considerar la posibilidad de que esta expresión pueda ser obtenida de la misma $f(z, w)$ a través de la inclusión $V[[z, w]]_{z, w, z-w} \hookrightarrow V((w))((z - w))$ dada por $z^{-1} \mapsto i_{w, z-w}(w + (z - w))^{-1}$.

Esto resulta ser cierto, y se lo conoce como la propiedad *asociativa* de las álgebras de vértice.

Teorema 1.2.4. [FBZ, Thm. 3.2.1] *Sea V un álgebra de vértice. Para todos $a, b, c \in V$, las tres expresiones*

$$\begin{aligned} Y(a, z)Y(b, w)c &\in V((z))((w)), \\ Y(b, w)Y(a, z)c &\in V((w))((z)) \text{ y} \\ Y(Y(a, z - w)b, w)c &\in V((w))((z - w)) \end{aligned}$$

son las expansiones en sus respectivos dominios del mismo elemento de la localización $V[[z, w]]_{z, w, z-w}$.

En particular, podemos escribir por abuso de notación

$$Y(a, z)Y(b, w)c = Y(Y(a, z - w)b, w)c = \sum_{n < N} Y(a_{(n)}b, w)c (z - w)^{-n-1},$$

donde la primera igualdad debe ser entendida en el sentido descrito anteriormente, i.e. a través de las expansiones apropiadas. Los físicos generalmente están interesados en la parte singular de estas expresiones, así que la fórmula anterior suele escribirse como

$$Y(a, z)Y(b, w) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \frac{Y(a_{(n)}b, w)}{(z - w)^{n+1}}, \quad (1.2.2)$$

donde el símbolo \sim indica que sus partes singulares coinciden. Recordemos que esto es equivalente a la afirmación

$$[Y(a, z), Y(b, w)] = \sum_{n=0}^{N-1} Y(a_{(n)}b, w) \partial_w^{(n)} \delta(z - w). \quad (1.2.3)$$

En otras palabras, el OPE de los campos $Y(a, z)$ y $Y(b, z)$ en un álgebra de vértice puede ser calculado a través de los campos $Y(a_{(n)}b, z)$ con $n \in \mathbb{Z}_+$.

La importancia del OPE en la teoría conforme de campos nos motiva a continuar investigando las propiedades del conjunto de productos n -ésimos no negativos entre los campos $\{Y(a, z) : a \in V\}$. Si le aplicamos la transformada de Fourier formal $f(z, w) \mapsto \text{Res}_z e^{\lambda(z-w)} f(z, w)$ a (1.2.3) obtenemos una serie generatriz para los productos n -ésimos no negativos, la cual denotamos como

$$[Y(a, w)_\lambda Y(b, w)] = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} Y(a_{(n)}b, w),$$

donde $\lambda^{(n)} = \frac{1}{n!} \lambda^n$. Esta expresión se denomina el λ -*corchete* de estos campos. Por medio de la correspondencia estado-campo podemos considerar una serie generatriz análoga para los estados $a, b \in V$ definida como $[a_\lambda b] = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} a_{(n)}b$, y sus propiedades algebraicas se encuentran comprendidas en la siguiente definición.

Definición 1.2.5. Un *álgebra de Lie conforme* es un $\mathbb{C}[T]$ -módulo R junto con una aplicación lineal

$$\begin{aligned} [\cdot, \cdot] : R \otimes R &\rightarrow R[\lambda], \\ a \otimes b &\mapsto [a_\lambda b] = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \lambda^{(n)} a_{(n)}b, \end{aligned}$$

llamada λ -*corchete*, que satisface las siguientes propiedades:

(I) T -sesquilinealidad: Para todos $a, b \in R$,

$$[T a_\lambda b] = -\lambda [a_\lambda b] \text{ y} \tag{1.2.4}$$

$$[a_\lambda T b] = (\lambda + T)[a_\lambda b]. \tag{1.2.5}$$

(II) Antisimetría: Para todos $a, b \in R$,

$$[a_\lambda b] = -[b_{-\lambda-T} a]. \tag{1.2.6}$$

(III) Identidad de Jacobi: Para todos a, b y $c \in R$,

$$[a_\lambda [b_\mu c]] = [[a_\lambda b]_{\lambda+\mu} c] + [b_\mu [a_\lambda c]]. \tag{1.2.7}$$

Los productos n -ésimos no negativos de un álgebra de vértice V siempre definen una estructura de álgebra de Lie conforme en V . Más aún, las álgebras de vértice pueden ser definidas equivalentemente como álgebras de Lie conformes con una estructura adicional (dada por el producto normalmente ordenado) de álgebra unitaria – posiblemente no asociativa – donde T actúa como una derivación, junto con una serie de compatibilidades (cf. [BK, DSK]). Algunas de estas relaciones se enumeran a continuación.

- Fórmula de Wick a izquierda: Para todos $a, b, c \in V$,

$$[a_\lambda : bc :] = : [a_\lambda b] c : + : b [a_\lambda c] : + \int_0^\lambda [[a_\lambda b]_\mu c] d\mu; \quad (1.2.8)$$

- Fórmula de Wick a derecha: Para todos $a, b, c \in V$,

$$[: ab :_\lambda c] = : (e^{T\partial_\lambda} a) [b_\lambda c] : + : (e^{T\partial_\lambda} b) [a_\lambda c] : + \int_0^\lambda [b_\mu [a_{\lambda-\mu} c]] d\mu; \quad (1.2.9)$$

- Cuasi-asociatividad: Para todos $a, b, c \in V$,

$$: (: ab :) c : = : a (: bc :) : + : \left(\int_0^T d\lambda a \right) [b_\lambda c] : + : \left(\int_0^T d\lambda b \right) [a_\lambda c] : . \quad (1.2.10)$$

Los paréntesis en (1.2.10) indican cómo calcular el producto normalmente ordenado. Por ejemplo, el término $: (\int_0^T d\lambda a) [b_\lambda c] :$ debe ser entendido como $\sum_{m \in \mathbb{Z}_+} : (T^{(m+1)} a) (b_{(m)} c) :$.

El hecho de que los productos n -ésimos no negativos se comporten como un álgebra de Lie, mientras que en el caso holomorfo los productos n -ésimos negativos definen una estructura de álgebra asociativa y conmutativa, es una manifestación de la naturaleza dual de la teoría de las álgebras de vértice. Hemos visto que las álgebras de vértice satisfacen una propiedad de asociatividad que generaliza la noción de álgebra asociativa y conmutativa. Pero además, las álgebras de vértice también satisfacen la propiedad de antisimetría dada en la Proposición 1.2.2 (iv) así como una fórmula muy importante conocida como la *identidad de Jacobi* para las álgebras de vértice. En su formulación debemos tener cuidado con la siguiente convención: siempre que nos encontremos con una expresión de la forma $(z \pm w)^n$ con $n < 0$, se interpretará utilizando su expansión en potencias no negativas de la segunda variable, es decir

$$(z \pm w)^n = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \binom{n}{k} z^{n-k} (\pm w)^k,$$

donde los coeficientes binomiales se definen como $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{k!}$ para $n < 0$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Por ejemplo, la expresión $\delta(z_0 - (z_1 - z_2))$ se expande como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} z_0^{-n-1} (z_1 - z_2)^n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \binom{n}{k} z_0^{-n-1} z_1^{n-k} (-z_2)^k.$$

La identidad de Jacobi para las álgebras de vértice es utilizada por Lepowsky y Li como reemplazo de los axiomas de invariancia por traslaciones y de localidad en la definición de álgebra de vértice que dan en [LL], la cual presentamos a continuación.

Definición 1.2.6. Un *álgebra de vértice* consta de los siguientes datos:

- Un espacio vectorial V , llamado el *espacio de estados*;
- Un elemento distinguido $|0\rangle \in V$, conocido como *estado vacío*;
- Una aplicación lineal

$$Y(\cdot, z) : V \rightarrow (\text{End } V)[[z, z^{-1}]], \quad a \mapsto Y(a, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} z^{-n-1},$$

conocida como *correspondencia estado-campo*.

Estos datos satisfacen los siguientes axiomas:

- (I) Condición de truncamiento: Para todo $a \in V$, $Y(a, z)$ es un campo. Es decir, para todos $a, b \in V$,

$$Y(a, z)b \in V((z)).$$

- (II) Propiedad del vacío: $Y(|0\rangle, z) = id_V$.

- (III) Propiedad de creación: Para todo $a \in V$, $Y(a, z)|0\rangle \in V[[z]]$ y

$$Y(a, z)|0\rangle|_{z=0} = a.$$

- (IV) Identidad de Jacobi: Para todos $a, b \in V$,

$$\begin{aligned} \delta(z_0 - (z_1 - z_2))Y(a, z_1)Y(b, z_2) - \delta(z_0 - (-z_2 + z_1))Y(b, z_2)Y(a, z_1) \\ = \delta(z_2 - (z_1 - z_0))Y(Y(a, z_0)b, z_2). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

El axioma de truncamiento es vital en esta definición, ya que para que la identidad de Jacobi tenga sentido debemos comprobar que los coeficientes de cada monomio en las tres variables formales se convierten en sumas finitas cuando son aplicados a elementos en V , y esto es cierto por la propiedad de truncamiento.

Denotemos por \mathcal{VA} a la categoría cuyos objetos son álgebras de vértice y cuyos morfismos son homomorfismos de álgebras de vértice, los cuales son mapas lineales entre álgebras de vértice que preservan el vacío así como todos los productos n -ésimos para $n \in \mathbb{Z}$. Esta categoría es monoidal, donde el objeto unitario es \mathbb{C} con la estructura de álgebra de vértice trivial, y el producto monoidal de dos álgebras de vértice V_1 y V_2 es el producto tensorial $V_1 \otimes V_2$ con la estructura de álgebra de vértice definida tomando $|0\rangle_{V_1} \otimes |0\rangle_{V_2}$ como el estado vacío y $Y_{V_1 \otimes V_2}(a_1 \otimes a_2, z) = Y_{V_1}(a_1, z) \otimes Y_{V_2}(a_2, z)$ para $a_1 \otimes a_2 \in V_1 \otimes V_2$ (ver [K]).

La correspondencia que asigna a cualquier álgebra de vértice V el álgebra de Lie conforme obtenida al olvidar sus productos n -ésimos negativos define

un funtor entre sus respectivas categorías. Demostraremos ahora que este funtor admite un adjunto a izquierda, que asigna a cualquier álgebra de Lie conforme R un *álgebra de vértice universal envolvente* $\mathcal{U}(R)$.

El primer paso consiste en construir la *afinización* de R , la cual es el álgebra de Lie conforme $\tilde{R} = R \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$, con productos n -ésimos definidos como

$$(a \otimes f)_{(n)}(b \otimes g) = \sum_{m \in \mathbb{Z}_+} (a_{(n+m)}b) \otimes (\partial_t^{(m)} f)g$$

para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ y con estructura de $\mathbb{C}[T]$ -módulo dada por

$$T(a \otimes f) = Ta \otimes f + a \otimes \partial_t f.$$

Puede probarse con facilidad que $T\tilde{R}$ es un ideal bilátero con respecto al producto 0-ésimo en \tilde{R} , y por lo tanto

$$\text{Lie } R = \tilde{R}/T\tilde{R} \quad (1.2.12)$$

es un álgebra de Lie con el corchete inducido por el producto 0-ésimo, es decir

$$[a_m, b_n] = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} \binom{m}{j} (a_{(j)}b)_{m+n-j}$$

para todos $a, b \in R$ y $m, n \in \mathbb{Z}$, donde a_m denota la imagen de $a \otimes t^m$ en $\text{Lie } R$. Podemos hacer que $\text{Lie } R$ sea un $\mathbb{C}[T]$ -módulo fijando $T(a_m) = -m a_{m-1}$. Sea $\text{Lie } R_-$ (resp. $\text{Lie } R_+$) la subálgebra de Lie de $\text{Lie } R$ generada por todos los a_m con $m \in \mathbb{Z}_+$ (resp., $m < 0$). Luego la aplicación

$$R \rightarrow \text{Lie } R_+ \quad (1.2.13)$$

dada por $a \mapsto a_{-1}$ es un isomorfismo de $\mathbb{C}[T]$ -módulos (ver [K, Lemma 2.7]), lo cual nos permite transportar la estructura de álgebra de Lie de $\text{Lie } R_+$ hacia R . Denotamos a R con esta estructura de álgebra de Lie como R_{Lie} , y su corchete de Lie puede calcularse directamente a partir del λ -corchete de R mediante la fórmula

$$[a, b] = \int_{-T}^0 [a_\lambda b] d\lambda \quad (1.2.14)$$

para todos $a, b \in R$. Entonces el álgebra universal envolvente de R_{Lie} es

$$\mathcal{U}(R_{\text{Lie}}) \simeq \mathcal{U}(\text{Lie } R_+) \simeq \text{Ind}_{\text{Lie } R_-}^{\text{Lie } R} \mathbb{C}|0\rangle,$$

donde $\mathbb{C}|0\rangle$ es el $\text{Lie } R_-$ -módulo unidimensional trivial. Puede verse que en $\mathcal{U}(R_{\text{Lie}})$ existe una única estructura de álgebra de vértice tal que la restricción de su λ -corchete a $R_{\text{Lie}} \times R_{\text{Lie}}$ coincide con el λ -corchete de R y la restricción de su producto normalmente ordenado a $R_{\text{Lie}} \times \mathcal{U}(R_{\text{Lie}})$ coincide con el producto asociativo en $\mathcal{U}(R_{\text{Lie}})$ (ver [BK, Thm. 7.12]). Equipada con

esta estructura de álgebra de vértice, $\mathcal{U}(R_{\text{Lie}})$ es llamada el *álgebra de vértice universal envolvente* de R y se la denota como $\mathcal{U}(R)$.

Puesto que $\mathcal{U}(R)$ visto como espacio vectorial es el álgebra universal envolvente de R_{Lie} , tenemos una base PBW para $\mathcal{U}(R)$, y podemos escribirla usando el producto normalmente ordenado: si $\{e_i : 1 \leq i < \kappa\}$ es una base ordenada de R como espacio vectorial, donde κ es algún cardinal, entonces podemos conformar una base para $\mathcal{U}(R)$ al considerar todos los elementos de la forma

$$: e_{i_1} \cdots e_{i_k} :,$$

donde $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k < \kappa$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Aquí continuamos usando la convención de asociar estos productos iterados de derecha a izquierda.

El álgebra de vértice $\mathcal{U}(R)$ satisface la siguiente propiedad universal (ver [BK, DSK]): si V es un álgebra de vértice y $f : R \rightarrow V$ es un homomorfismo de álgebras de Lie conformes (es decir, un morfismo de $\mathbb{C}[T]$ -módulos que preserva los λ -corchetes), entonces existe un único homomorfismo de álgebras de vértice $\tilde{f} : \mathcal{U}(R) \rightarrow V$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}(R) \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} \\ & & V \end{array}$$

donde $i : R \rightarrow \mathcal{U}(R)$ el mapa de inclusión. En términos categóricos, esto significa que \mathcal{U} es un adjunto a izquierda del funtor de olvido de \mathcal{VA} a la categoría ConfA de álgebras de Lie conformes.

Terminaremos esta sección introduciendo dos de los ejemplos más importantes de la teoría: las álgebras de vértice afines y de Virasoro.

Ejemplo 1.2.7. Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión finita. Su *álgebra conforme current* asociada es el álgebra de Lie conforme $R = \text{Cur } \mathfrak{g} = \mathbb{C}[T] \otimes \mathfrak{g}$, con λ -corchete determinado por $[\alpha_\lambda \beta] = [\alpha, \beta]$ para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$. Tenemos un isomorfismo $\text{Lie } R \simeq \mathfrak{g}[t, t^{-1}]$, el *álgebra de lazos* de \mathfrak{g} , con corchetes dados por

$$[\alpha_m, \beta_n] = [\alpha, \beta]_{m+n}$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$. El *álgebra de lazos positiva* de \mathfrak{g} es su subálgebra de Lie dada por $\text{Lie } R_+ \simeq \mathfrak{g}[t]$. Si $(\cdot | \cdot)$ es una forma bilineal simétrica invariante en \mathfrak{g} , podemos considerar también el *álgebra de Lie afín* asociada a \mathfrak{g} , definida como la extensión central $\mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ con corchetes

$$[\alpha_m, \beta_n] = [\alpha, \beta]_{m+n} + m(\alpha | \beta) \delta_{m, -n} K, \quad [\alpha_m, K] = 0$$

para todos $\alpha, \beta \in \mathfrak{g}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$.

Dado $k \in \mathbb{C}$, sea $\mathbb{C}_k = \mathbb{C}|0\rangle$ la representación unidimensional de su subálgebra de Lie $\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K$ tal que $\alpha_n |0\rangle = 0$ para todos $\alpha \in \mathfrak{g}$, $n \in \mathbb{Z}_+$ y

$K|0\rangle = k|0\rangle$. Entonces podemos considerar el módulo inducido

$$V^k(\mathfrak{g}) = \text{Ind}_{\mathfrak{g}[t] \oplus \mathbb{C}K}^{\mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K} \mathbb{C}_k \simeq \langle \alpha_{n_1}^{i_1} \cdots \alpha_{n_r}^{i_r} | 0 \rangle : r \in \mathbb{Z}_+, \alpha^{i_j} \in \mathfrak{g}, n_j < 0 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Puede probarse que este espacio vectorial admite una estructura de álgebra de vértice, denominada *álgebra de vértice afín en nivel k* asociada a \mathfrak{g} .

En particular, para $k = 0$ el álgebra de vértice afín $V^0(\mathfrak{g})$ es el álgebra de vértice universal envolvente de $R = \text{Cur } \mathfrak{g}$. Asimismo, notemos que cuando $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie abeliana recuperamos el ejemplo trabajado en la sección 1.1.

Ejemplo 1.2.8. El *álgebra conforme de Virasoro* es el álgebra de Lie conforme $R = \text{Vir} = \mathbb{C}[T]L$, con λ -corchete determinado por $[L_\lambda L] = TL + 2\lambda L$. Por otro lado, el *álgebra de Witt* es el álgebra de Lie $\text{Der } \mathbb{C}[t, t^{-1}] = \mathbb{C}[t, t^{-1}]\partial_t$ de campos vectoriales regulares en \mathbb{C}^\times , la cual posee una base formada por los elementos $L(n) = -t^{n+1}\partial_t$ con $n \in \mathbb{Z}$, y sus corchetes de Lie están dados por

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n)$$

para todos $n, m \in \mathbb{Z}$. Es un $\mathbb{C}[T]$ -módulo con $T = \text{ad } L(-1)$. Tenemos un isomorfismo de álgebras de Lie dado por $\text{Lie } R \simeq \text{Der } \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ que respeta la acción de T , determinado por la identificación $L_{n+1} \mapsto L(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Mediante este isomorfismo, $\text{Lie } R_-$ se identifica con su subálgebra de $\text{Lie } \text{Der } \mathbb{C}[t] = \mathbb{C}[t]\partial_t$, generada por $\{L(n) : n \geq -1\}$.

El álgebra de Witt tiene una única extensión central, el *álgebra de Virasoro* $\mathbb{C}[t, t^{-1}]\partial_t \oplus \mathbb{C}C$, cuyos corchetes están dados por

$$[L(m), L(n)] = (m - n)L(m + n) + (m^3 - m)\delta_{m, -n} \frac{C}{12}, \quad [L(m), C] = 0$$

para todos $m, n \in \mathbb{Z}$. Si fijamos $c \in \mathbb{C}$, podemos considerar $\mathbb{C}_c = \mathbb{C}|0\rangle$ como la representación unidimensional de $\mathbb{C}[t]\partial_t \oplus \mathbb{C}C$ donde $L(n)|0\rangle = 0$ para todos $\alpha \in \mathfrak{g}$, $n \geq -1$ y $C|0\rangle = c|0\rangle$, y formar el módulo inducido

$$\text{Vir}_c = \text{Ind}_{\mathbb{C}[t]\partial_t \oplus \mathbb{C}C}^{\mathbb{C}[t, t^{-1}]\partial_t \oplus \mathbb{C}C} \mathbb{C}_c \simeq \langle L(n_1) \cdots L(n_r) | 0 \rangle : r \in \mathbb{Z}_+, n_j \leq -2 \rangle_{\mathbb{C}}.$$

Este espacio vectorial admite una estructura de álgebra de vértice, denominada *álgebra de vértice de Virasoro con carga central c* . Notemos que en el caso $c = 0$ esta construcción da lugar al álgebra de vértice universal envolvente de $R = \text{Vir}$.

1.3 | Álgebras quirales y álgebras de Lie*

El resto de los preliminares servirán como un breve recorrido por algunos de los conceptos de la obra de Beilinson y Drinfeld [BD1], que sólo utilizaremos en los capítulos 3 y 4. De este modo, el lector interesado principalmente

en el nivel infinitesimal de la teoría puede omitir estas secciones y avanzar directamente al capítulo 2.

Los principales objetos con los que tendremos que trabajar se conocen como álgebras quirales, de factorización y OPE. Éstas tienen sentido sobre curvas algebraicas suaves X arbitrarias (e incluso en dimensiones superiores, cf. [FG]), pero estaremos interesados principalmente en el caso $X = \mathbb{A}^1$, por lo que el lector puede asumirlo a lo largo del texto.

Comenzaremos por enunciar algunos hechos y notación básicos para abordar estos objetos algebro-geométricos. Para cualquier esquema suave Z , \mathcal{O}_Z denotará su haz de estructura y \mathcal{D}_Z su haz de operadores diferenciales, generado por su haz Θ_Z de campos vectoriales. Un \mathcal{O} -módulo sobre Z es un haz cuasi-coherente de \mathcal{O}_Z -módulos, y un \mathcal{D} -módulo a izquierda (resp. a derecha) sobre Z es un haz de \mathcal{D}_Z -módulos a izquierda (resp. a derecha) que es cuasi-coherente como haz de \mathcal{O}_Z -módulos. Denotaremos por $\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(Z)$, $\mathcal{M}^l(Z)$ y $\mathcal{M}^r(Z)$ a las categorías de \mathcal{O} -módulos, \mathcal{D} -módulos a izquierda y a derecha sobre Z respectivamente.

Dado un morfismo de esquemas $f : Z_1 \rightarrow Z_2$, denotaremos por f^* y f_* a los funtores de pullback y pushforward de \mathcal{O} -módulos, mientras que $f^!$ y $f_!$ serán los funtores de pullback y pushforward de \mathcal{D} -módulos a izquierda o a derecha (casi nunca nos referiremos a sus versiones derivadas).

Si $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{M}^l(Z)$, entonces $\mathcal{F}_1 \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}_2$ es naturalmente un elemento de $\mathcal{M}^l(Z)$, así que $\mathcal{M}^l(Z)$ es una categoría monoidal con producto $\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_Z}$ y unidad \mathcal{O}_Z . Esto no ocurre en $\mathcal{M}^r(Z)$, sin embargo tenemos la siguiente propiedad: para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{M}^r(Z)$ y $\mathcal{F} \in \mathcal{M}^l(Z)$, $\mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{F}$ es naturalmente un \mathcal{D}_Z -módulo a derecha, donde un campo vectorial $\tau \in \Theta_Z \subseteq \mathcal{D}_Z$ actúa como $(g \otimes f) \tau = g \tau \otimes f - g \otimes \tau f$.

El haz invertible ω_Z de formas de grado máximo en Z posee una estructura canónica de \mathcal{D}_Z -módulo a derecha, donde un campo vectorial $\tau \in \Theta_Z$ actúa en una forma $\alpha \in \omega_Z$ a través de la derivada de Lie de τ , es decir $\alpha \cdot \tau = -Lie_{\tau}(\alpha)$. En particular, tenemos un funtor

$$\mathcal{M}^l(Z) \xrightarrow{(\cdot)^r} \mathcal{M}^r(Z), \quad \mathcal{V} \mapsto \mathcal{V}^r = \omega_Z \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{V}. \quad (1.3.1)$$

Este funtor es de hecho una equivalencia de categorías, cuyo inverso $(\cdot)^l$ está dado por $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^l = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \omega_Z^{-1} = \text{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathcal{O}}(Z)}(\omega_Z, \mathcal{A})$.

El *producto tensorial exterior* del \mathcal{O}_{Z_1} -módulo \mathcal{V} con el \mathcal{O}_{Z_2} -módulo \mathcal{W} es el $\mathcal{O}_{Z_1 \times Z_2}$ -módulo

$$\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{W} = \pi_1^* \mathcal{V} \otimes_{\mathcal{O}_{Z_1 \times Z_2}} \pi_2^* \mathcal{W},$$

donde $\pi_i : Z_1 \times Z_2 \rightarrow Z_i$ son las proyecciones. Notemos que el producto tensorial exterior de \mathcal{D} -módulos a izquierda es nuevamente un \mathcal{D} -módulo a izquierda, y también podemos definir el producto tensorial exterior de \mathcal{D} -módulos a derecha usando (1.3.1).

Sea X una curva algebraica suave sobre \mathbb{C} . Denotaremos por $\Delta : X \rightarrow X^2$ al mapa diagonal, y $j : U \hookrightarrow X^2$ será su inclusión abierta complementaria. Con mayor generalidad, si definimos $fSet$ como la categoría de todos los conjuntos finitos no vacíos con morfismos dados por las suryecciones entre ellos, entonces para cada $I \in fSet$ podemos definir $\Delta^{(I)} : X \rightarrow X^I$ como la diagonal principal y $U^{(I)} = \{\{x_i\}_{i \in I} : x_i \neq x_{i'} \text{ si } i \neq i'\}$, i.e. el complemento del divisor diagonal para $|I| \geq 2$. A su vez, denotaremos por $j^{(I)} : U^{(I)} \hookrightarrow X^I$ a la inclusión abierta canónica.

Ahora para cualquier $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^r(X)$ y $I \in fSet$ definimos una I -operación quiral en \mathcal{A} como un elemento del conjunto

$$P^{ch}(\mathcal{A})_I = \text{Hom}_{\mathcal{M}^r(X^I)}(j_*^{(I)} j^{(I)*} \mathcal{A}^{\boxtimes I}, \Delta_!^{(I)} \mathcal{A}).$$

Estas operaciones pueden ser compuestas entre sí de la siguiente manera: dada una suryección $\pi : J \rightarrow I$ en $fSet$, con fibras $J_i = \pi^{-1}(\{i\})$ para $i \in I$, la composición de $\gamma \in P^{ch}(\mathcal{A})_I$ con $\{\delta_i \in P^{ch}(\mathcal{A})_{J_i}\}_{i \in I}$ es el elemento de $P^{ch}(\mathcal{A})_J$ definido por

$$\begin{aligned} j_*^{(J)} j^{(J)*} \mathcal{A}^{\boxtimes J} &= j_*^{(\pi)} j^{(\pi)*} \boxtimes_{i \in I} j_*^{(J_i)} j^{(J_i)*} \mathcal{A}^{\boxtimes J_i} \xrightarrow{j_*^{(\pi)} j^{(\pi)*} \boxtimes_{i \in I} \delta_i} j_*^{(\pi)} j^{(\pi)*} \Delta_!^{(J_i)} \mathcal{A} \\ &= \Delta_!^{(\pi)} j_*^{(I)} j^{(I)*} \mathcal{A}^I \xrightarrow{\Delta_!^{(\pi)} \gamma} \Delta_!^{(\pi)} \Delta_!^{(I)} \mathcal{A} = \Delta_!^{(J)} \mathcal{A}, \end{aligned}$$

donde

$$\Delta^{(\pi)} = \prod_{i \in I} \Delta^{(J_i)} : X^I \rightarrow X^J \quad (1.3.2)$$

es el mapa diagonal determinado por π y $j^{(\pi)} : U^{(\pi)} \hookrightarrow X^J$ es el complemento de las diagonales transversales a X^I , i.e.

$$U^{(\pi)} = \{\{x_j\}_{j \in J} \in X^J : x_j \neq x_{j'} \text{ si } \pi(j) \neq \pi(j')\}. \quad (1.3.3)$$

Por lo tanto las operaciones quirales forman una operad, a la cual denotamos por $P^{ch}(\mathcal{A})$ y llamamos *operad quiral*.

Definición 1.3.1. Un *álgebra quiral no unitaria* sobre X es un \mathcal{D} -módulo a derecha \mathcal{A} sobre X junto con un producto quiral

$$\mu : j_* j^* \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A} \rightarrow \Delta_! \mathcal{A}$$

en $P^{ch}(\mathcal{A})_{\{1,2\}}$, el cual es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi en el sentido de que define un morfismo de operads de la operad de Lie $\mathcal{L}ie$ a $P^{ch}(\mathcal{A})$. En otras palabras, \mathcal{A} es un álgebra de Lie sobre la operad quiral.

Las secciones del haz $j_* j^* \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}$ son secciones de $\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A}$ en las cuales permitimos que haya polos en la diagonal. Por otro lado, el pushforward $\Delta_! \mathcal{A}$ puede ser calculada a través de la descomposición canónica del \mathcal{D}_{X^2} -módulo

$\omega_X \boxtimes \mathcal{A}$ a lo largo de la subvariedad cerrada Δ (ver [FBZ, Sect. 20.2.3]), lo cual da lugar a la sucesión exacta

$$0 \rightarrow \omega_X \boxtimes \mathcal{A} \rightarrow j_* j^* \omega_X \boxtimes \mathcal{A} \rightarrow \Delta_! \mathcal{A} \rightarrow 0.$$

Esta construcción nos permite definir álgebras quirales *unitarias*, las cuales llamaremos simplemente álgebras quirales.

Definición 1.3.2. Un *álgebra quiral* sobre X es un álgebra quiral no unitaria (\mathcal{A}, μ) junto con un mapa unidad $u : \omega_X \rightarrow \mathcal{A}$, el cual es un morfismo de \mathcal{D}_X -módulos a derecha tal que la restricción de μ a $j_* j^* \omega_X \boxtimes \mathcal{A}$ mediante $u \boxtimes id_{\mathcal{A}}$ es la proyección canónica a $\Delta_! \mathcal{A}$.

Ejemplo 1.3.3. El \mathcal{D}_X -módulo $\mathcal{A} = \omega_X$ junto con la proyección canónica $\mu_{\omega_X} : j_* j^* \omega_X \boxtimes \omega_X \rightarrow \Delta_! \omega_X$ es un ejemplo de álgebra quiral. Su producto quiral es claramente antisimétrico, y para ver que satisface la identidad de Jacobi introducimos el *complejo de Cousin* de ω_{X^3} [3] asociado a la estratificación diagonal de X^3 (ver [BD1, Sect. 3.1.5] para este ejemplo y [Ha] para generalidades sobre complejos de Cousin). Éste es el complejo de cocadena $C(\omega_{X^3})$ concentrado en grados -3 , -2 y -1 dado por

$$0 \rightarrow j_*^{(3)} j^{(3)*} \omega_{X^3} \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \Delta_{ij!} j_* j^* \omega_{X^2} \rightarrow \Delta_!^{(3)} \omega_X \rightarrow 0, \quad (1.3.4)$$

donde $j^{(3)} = j^{\{1,2,3\}}$, $\Delta^{(3)} = \Delta^{\{1,2,3\}}$ y $\Delta_{ij} = \Delta^{\{\pi_{ij}\}}$ para la proyección π_{ij} que identifica i y j en $\{1, 2, 3\}$. La componente (i, j) -ésima de la diferencial d^{-3} es el mapa $d_{(i,j)}^{-3} : j_*^{(3)} j^{(3)*} \omega_{X^3} \rightarrow \Delta_{ij!} j_* j^* \omega_{X^2}$ que toma la parte singular de las secciones de $j_*^{(3)} j^{(3)*} \omega_{X^3}$ a lo largo de la diagonal $x_i = x_j$ en X^3 , mientras que d^{-2} es la suma de los mapas $d_{(i,j)}^{-2} = \Delta_{ij!}(\mu_{\omega_X}) : \Delta_{ij!} j_* j^* \omega_{X^2} \rightarrow \Delta_{ij!} \Delta_! \omega_X = \Delta_!^{(3)} \omega_X$. Ahora la suma de los términos en la identidad de Jacobi para μ_{ω_X} coincide con el cuadrado de la diferencial de este complejo, así que es nula.

A continuación describiremos la relación entre las álgebras de vértice y las álgebras quirales sobre \mathbb{A}^1 . Recordemos que para cualquier esquema afín $Z = \text{Spec } A$ existe una equivalencia de categorías

$$\mathcal{M}_0(Z) \simeq \text{Mod}_A$$

dada por el funtor de secciones globales $\mathcal{V} \rightarrow V = \Gamma(Z, \mathcal{V})$. Su inverso es el funtor de localización $V \mapsto \tilde{V}$, donde $\tilde{V}(D_f) = V_f$ para cada abierto afín distinguido $D_f \subseteq Z$, con $f \in A$. Similarmente

$$\mathcal{M}^l(Z) \simeq \text{Mod}_{\text{Diff } A}^l \quad \text{y} \quad \mathcal{M}^r(Z) \simeq \text{Mod}_{\text{Diff } A}^r,$$

donde $\text{Diff } A$ es el álgebra de operadores diferenciales con coeficientes en A . En particular, un \mathcal{O} -módulo sobre \mathbb{A}^n queda determinado por su $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -módulo de secciones globales, y un \mathcal{D} -módulo a izquierda/derecha sobre \mathbb{A}^n

queda a su vez determinado por su $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}]$ -módulo a izquierda/derecha de secciones globales. Notemos que hemos elegido denotar a las coordenadas globales de \mathbb{A}^n como x_1, \dots, x_n (o bien x e y para \mathbb{A}^2), puesto que las letras z_1, \dots, z_n (o bien z y w) siempre representarán variables formales para nosotros.

Ahora podemos presentar la construcción de las álgebras quirales asociadas a las álgebras de vértice. La prueba del siguiente resultado puede encontrarse en [BDHK].

Proposición 1.3.4. *Dada un álgebra de vértice $(V, Y, T, |0\rangle)$, los siguientes datos definen un álgebra quiral sobre \mathbb{A}^1 :*

- Un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulo a izquierda \mathcal{A} determinado por $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{A}) = V[x]dx$, donde la acción a derecha de $\mathbb{C}[x, \partial_x]$ se define como $a x^i dx \cdot \partial_x = T a x^i dx - a \partial_x x^i dx$;
- Un producto quiral $\mu : j_* j^* \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A} \rightarrow \Delta_! \mathcal{A}$ dado en coordenadas globales por la aplicación

$$V \otimes V[x, y][(x - y)^{-1}]dx \wedge dy \rightarrow V[x, y][(x - y)^{-1}]dx \wedge dy / V[x, y]dx \wedge dy$$

$$a \otimes b \alpha(x, y) \mapsto Y(a, x - y)b \alpha(x, y) \bmod V[x, y]dx \wedge dy;$$

- Un mapa unidad $u : \omega_{\mathbb{A}^1} \rightarrow \mathcal{A}$ dado por la sección global $|0\rangle dx$ de \mathcal{A} .

Estas álgebras quirales poseen una propiedad especial: son *equivariantes por traslaciones*, lo que a grandes rasgos significa que inducen la misma estructura de álgebra de vértice sobre cada una de sus fibras sobre \mathbb{A}^1 . Seguidamente daremos una definición precisa.

Sea \mathbb{G}_a el grupo aditivo de traslaciones sobre la recta \mathbb{A}^1 , actuando mediante $a : \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$, $(t, x) \mapsto t + x$, y sea $p : \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ la proyección al segundo factor. Un \mathcal{O} -módulo \mathcal{F} sobre \mathbb{A}^1 es \mathbb{G}_a -equivariante si existe un isomorfismo $\psi : p^* \mathcal{F} \rightarrow a^* \mathcal{F}$ de \mathcal{O} -módulos sobre $\mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1$, tal que valen las siguientes compatibilidades:

1. Si $a_3, p_3 : \mathbb{G}_a^2 \times \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{A}^1$ se definen por $a_3(t_1, t_2, x) = t_1 + t_2 + x$ y $p_3(t_1, t_2, x) = x$, entonces el siguiente diagrama commuta en la categoría de $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_a^2 \times \mathbb{A}^1}$ -módulos

$$\begin{array}{ccc} (a \times id)^* p^* \mathcal{F} = p_3^* \mathcal{F} = (p \times id)^* p^* \mathcal{F} & \xrightarrow{(p \times id)^* \psi} & (p \times id)^* a^* \mathcal{F} = (id \times a)^* p^* \mathcal{F} \\ & \searrow (a \times id)^* \psi & \swarrow (id \times a)^* \psi \\ & (a \times id)^* a^* \mathcal{F} = a_3^* \mathcal{F} = (id \times a)^* a^* \mathcal{F} & \end{array}$$

2. Si $i_0 : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1$ es la inclusión $x \mapsto (0, x)$, entonces $i_0^* \psi = id_{\mathcal{F}}$.

Definición 1.3.5. (I) Un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulo a izquierda/derecha es *equivariante por traslaciones* si es \mathbb{G}_a -equivariante como $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ -módulo y el mapa ψ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_a} \boxtimes \mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulos.

(II) Un álgebra quiral no unitaria (\mathcal{A}, μ) es *equivariante por traslaciones* si lo es como $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulo y para todo $t \in \mathbb{G}_a$ vale que $\mu = \mu^t$, donde μ^t está dado en coordenadas globales por

$$a \otimes b f(x, y) \mapsto \mu(a \otimes b f(x - t, y - t))|_{x=x+t}.$$

Notemos que $\omega_{\mathbb{A}^1}$ es un álgebra quiral no unitaria equivariante.

(III) Un álgebra quiral es *equivariante por traslaciones* si lo es como álgebra quiral no unitaria y además el mapa unidad es equivariante bajo la \mathbb{G}_a -acción.

Tenemos el siguiente resultado de [BD1] (una prueba detallada puede encontrarse en [BDHK]), el cual en particular nos dice que las álgebras quirales sobre \mathbb{A}^1 definidas en la Proposición 1.3.4 son exactamente las equivariantes por traslaciones.

Teorema 1.3.6.

1. La asignación $V \rightarrow \widetilde{V[x]}$ define una equivalencia entre la categoría de espacios vectoriales y la categoría de $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ -módulos \mathbb{G}_a -equivariantes.
2. La asignación $(V, T) \rightarrow \widetilde{V[x]dx}$ define una equivalencia entre la categoría de espacios vectoriales diferenciales y la categoría de $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulos a derecha \mathbb{G}_a -equivariantes.
3. La asignación $(V, Y, T, |0) \rightarrow (\mathcal{A}, \mu, u)$ dada en la Proposición 1.3.4 define una equivalencia entre la categoría de álgebras de vértice y la categoría de álgebras quirales sobre \mathbb{A}^1 equivariantes por traslaciones.

Dado que nos interesan las álgebras de vértice que son envolturas universales de álgebras de Lie conformes, necesitaremos entender la contraparte geométrica de estas últimas. Para un $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^r(X)$ dado, definimos la *operad* $*$ de \mathcal{A} como la operad $P^*(\mathcal{A})$ cuyas I -operaciones para todo $I \in fSet$ están dadas por el conjunto

$$P^*(\mathcal{A})_I = \text{Hom}_{\mathcal{M}^r(X^I)}(\mathcal{A}^{\boxtimes I}, \Delta_!^{(I)} \mathcal{A}).$$

Para un $\pi : J \rightarrow I$ dado en $fSet$, la composición entre $\gamma \in P^*(\mathcal{A})_I$ con $\{\delta_i \in P^*(\mathcal{A})_{J_i}\}_{i \in I}$ es el elemento de $P^*(\mathcal{A})_J$ definido por

$$\mathcal{A}^{\boxtimes J} \xrightarrow{\boxtimes_{i \in I} \delta_i} \boxtimes_{i \in I} \Delta_!^{(J_i)} \mathcal{A} = \Delta_!^{(\pi)} \mathcal{A}^{\boxtimes I} \xrightarrow{\Delta_!^{(\pi)} \gamma} \Delta_!^{(\pi)} \Delta_!^{(I)} \mathcal{A} = \Delta_!^{(J)} \mathcal{A}.$$

Definición 1.3.7. Un *álgebra de Lie** sobre X es un \mathcal{D} -módulo a derecha \mathcal{R} sobre X junto con un producto $*$

$$\mu_- : \mathcal{R} \boxtimes \mathcal{R} \rightarrow \Delta_! \mathcal{R}$$

en $P^*(\mathcal{R})_{\{1,2\}}$ que define un morfismo de operads $\mathcal{L}ie \rightarrow P^*(\mathcal{R})$. En otras palabras, es un álgebra de Lie sobre la operad $*$.

Dado que para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^r(X)$ e $I \in fSet$ tenemos una inclusión

$$\mathcal{A}^{\boxtimes I} \hookrightarrow j_*^{(I)} j^{(I)*} \mathcal{A}^{\boxtimes I},$$

podemos restringir cualquier operación quiral en $P^{ch}(\mathcal{A})_I$ a una operación $*$ en $P^*(\mathcal{A})_I$. Esto define un morfismo de operads $P^{ch}(\mathcal{A}) \rightarrow P^*(\mathcal{A})$, el cual a su vez nos permite definir un funtor de la categoría de álgebras quirales a la categoría de álgebras de Lie* sobre X . Beilinson and Drinfeld demostraron en [BD1] que este funtor admite un adjunto a izquierda, el cual le asigna a cada álgebra de Lie* \mathcal{R} su *álgebra quiral universal envolvente* $\mathcal{U}(\mathcal{R})$. Tenemos el siguiente resultado en consonancia con el Teorema 1.3.6 relacionando álgebras de Lie*, álgebras de Lie conformes y sus correspondientes álgebras universales envolventes.

Proposición 1.3.8. Si $(R, [\cdot, \cdot])$ es un álgebra de Lie conforme, los siguientes datos definen un álgebra de Lie* sobre \mathbb{A}^1 :

- Un $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -módulo \mathcal{R} determinado por $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{R}) = R[x]dx$, donde ∂_x actúa como $a x^i dx \cdot \partial_x = T a x^i dx - a \partial_x x^i dx$;
- Un producto $*$ $\mu_- : \mathcal{R} \boxtimes \mathcal{R} \rightarrow \Delta_! \mathcal{R}$ dado en coordenadas globales por

$$\begin{aligned} R \otimes R[x, y]dx \wedge dy &\rightarrow R[x, y][(x - y)^{-1}]dx \wedge dy / R[x, y]dx \wedge dy \\ a \otimes b \alpha(x, y) &\mapsto [a_{(x-y)^{-1}} b] \alpha(x, y) \bmod R[x, y]dx \wedge dy. \end{aligned}$$

Más aún, la asignación $(R, [\cdot, \cdot]) \mapsto (\mathcal{R}, \mu_-)$ define una equivalencia entre las categorías de álgebras de Lie conformes y la categoría de álgebras de Lie* sobre \mathbb{A}^1 \mathbb{G}_a -equivariantes, y $\mathcal{U}(\mathcal{R})$ es el álgebra quiral asociada al álgebra de vértice $\mathcal{U}(R)$.

1.4 | Álgebras y monoides de factorización

A continuación ahondaremos en los aspectos geométricos que yacen bajo las álgebras de vértice. En [BD1, Sect. 3.4] los autores introdujeron la noción de álgebra de factorización, la cual codifica toda la información subyacente a un álgebra de vértice o quiral en ciertas propiedades de factorización para una familia de \mathcal{O} -módulos sobre las potencias de X . Utilizaremos la notación definida en (1.3.2) y (1.3.3).

Definición 1.4.1. Un *álgebra de factorización no unitaria* sobre X es una familia $\{\mathcal{V}_I\}$ donde \mathcal{V}_I es un \mathcal{O} -módulo sobre X^I para cada $I \in fSet$, junto con

- Un *isomorfismo diagonal* de \mathcal{O} -módulos sobre X^I

$$\nu^{(\pi)} : \Delta^{(\pi)*}\mathcal{V}_J \rightarrow \mathcal{V}_I$$

- Un *isomorfismo de factorización* de \mathcal{O} -módulos sobre $U^{(\pi)}$

$$c_{[\pi]} : j^{(\pi)*} \boxtimes_{i \in I} \mathcal{V}_{J_i} \rightarrow j^{(\pi)*}\mathcal{V}_J$$

para cada suryección $\pi : J \rightarrow I$ en $fSet$. Requerimos que los \mathcal{O} -módulos \mathcal{V}_I no posean secciones locales no nulas con soporte en la unión de todas las diagonales en X^I , y también las siguientes compatibilidades con respecto a la composición de suryecciones $K \xrightarrow{\pi'} J \xrightarrow{\pi} I$:

$$(I) \quad \nu^{(\pi\pi')} = \nu^{(\pi)} \Delta^{(\pi)*}(\nu^{(\pi')}).$$

$$(II) \quad c_{[\pi']} = c_{[\pi\pi']} j^{(\pi')*}(\boxtimes_{i \in I} c_{[\pi'_i:K_i \rightarrow J_i]}).$$

$$(III) \quad \nu^{(\pi')} \Delta^{(\pi')*}(c_{[\pi\pi']}) = c_{[\pi]}(\boxtimes_{i \in I} \nu^{(\pi'_i:K_i \rightarrow J_i)}).$$

Dada un álgebra de factorización no unitaria $\{\mathcal{V}_I\}$, utilizaremos las notaciones $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{\{1\}}$, $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_{\{1,2\}}$, $\nu = \nu^{[\{1,2\} \rightarrow \{1\}]} : \Delta^*\mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}$ y $c = c^{[id_{\{1,2\}}]} : j^*\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} \rightarrow j^*\mathcal{V}_2$.

Definición 1.4.2. Un *álgebra de factorización* sobre X es un álgebra de factorización $\{\mathcal{V}_I\}$ sobre X junto con una *unidad*, que es una sección global $\mathbb{1} \in \mathcal{V}$ tal que para toda sección local $f \in \Gamma(W, \mathcal{V})$ con W abierto en X , la sección $\mathbb{1} \boxtimes f$ de $j^*\mathcal{V}_2$ definida usando c se extiende a la diagonal, y su restricción es $\Delta^*(\mathbb{1} \boxtimes f) = f$. Notemos que si la unidad existe, entonces es única.

Bajo la presencia de una unidad, los \mathcal{O}_{X^I} -módulos \mathcal{V}_I admiten una estructura de \mathcal{D}_{X^I} -módulos a izquierda compatible con la estructura de factorización y tal que la sección unidad es horizontal (i.e., $\mathbb{1} : \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{V}$ es un morfismo de \mathcal{D} -módulos). Esto es análogo al hecho de que el operador de traslación T de un álgebra de vértice V está unívocamente determinado por $|0\rangle$ e Y , puesto que $Ta = \partial_z Y(a, z)|0\rangle|_{z=0}$ para todo $a \in V$.

La importancia de las álgebras de factorización radica en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.3. [BD1, Sect. 3.4] *La categoría $\mathcal{FA}(X)$ de álgebras de factorización es equivalente a la categoría $\mathcal{CA}(X)$ de álgebras quirales sobre X .*

Idea de la demostración. Si partimos de un álgebra de factorización $\{\mathcal{V}_I\}$, podemos considerar la descomposición canónica del \mathcal{D} -módulo \mathcal{V}_2 con respecto a Δ y U , la cual nos brinda el siguiente triángulo exacto en la categoría derivada $D^b\mathcal{M}^l(X^2)$

$$\Delta_! \Delta^! \mathcal{V}_2 \rightarrow \mathcal{V}_2 \rightarrow j_* j^* \mathcal{V}_2 \rightarrow \Delta_! \Delta^! \mathcal{V}_2[1].$$

En $\mathcal{M}^l(X^2)$, podemos utilizar a c y ν para calcular los últimos dos términos en términos de \mathcal{V} , y teniendo en cuenta que \mathcal{V}_2 no puede tener secciones soportadas en la diagonal, llegamos a la siguiente sucesión exacta

$$0 \rightarrow \mathcal{V}_2 \rightarrow j_* j^* \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} \xrightarrow{\mathcal{Y}^2} \Delta_! \mathcal{V} \rightarrow 0.$$

Si tomamos el \mathcal{D} -módulo a derecha $\mathcal{A} = \mathcal{V}^r$, obtenemos un producto quiral μ para \mathcal{A} al tensorizar \mathcal{Y}^2 con ω_{X^2} . Para entender por qué este producto es antisimétrico y satisface la identidad de Jacobi, observemos que una forma alternativa de construir μ (dada en [BD1]) es

$$\begin{aligned} j_* j^* \mathcal{V}^r \boxtimes \mathcal{V}^r &= j_* j^* \omega_X^{\boxtimes 2} \otimes \mathcal{V}^{\boxtimes 2} \simeq j_* j^* \omega_X \boxtimes \omega_X \otimes \mathcal{V}_2 \xrightarrow{\mu_{\omega_X} \otimes id_{\mathcal{V}_2}} \\ &\Delta_! \omega_X \otimes \mathcal{V}_2 \simeq \Delta_! (\omega_X \otimes \Delta^! \mathcal{V}_2) \simeq \Delta_! \mathcal{V}^r, \end{aligned}$$

donde $\mu_{\omega_X} \in P^{ch}(\omega_X)_{\{1,2\}}$ es la proyección canónica, la cual a su vez es el producto quiral de ω_X . Por tanto, la antisimetría y la identidad de Jacobi para μ se deducen de las de μ_{ω_X} , que hemos comprobado en el Ejemplo 1.3.3. La sección $u = \mathbb{1} \otimes \omega_X$ es una unidad para \mathcal{A} , así que (\mathcal{A}, μ, u) resulta ser un álgebra quiral sobre X .

Supongamos ahora que tenemos un álgebra quiral (\mathcal{A}, μ, u) sobre X arbitraria. De la construcción anterior se deduce que podemos recuperar los dos primeros haces de $\{\mathcal{V}_I\}$ como $\mathcal{V} = \mathcal{A}^l = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^{-1}$ y $\mathcal{V}_2 = \text{Ker } \mathcal{Y}^2$, donde $\mathcal{Y}^2 = \mu \otimes \omega_X^{-1}$. Esto se puede generalizar considerando el *complejo de Chevalley-Cousin* de \mathcal{A} , que es el complejo de familias (o familia de complejos) de \mathcal{D}_{X^I} -módulos a izquierda dado por

$$C(\mathcal{A})_{X^I}^n = \bigoplus_{\substack{\pi: I \rightarrow T \\ |T|=|I|+n}} \Delta_!^{(\pi)} j_*^{(T)} j^{(T)*} (\mathcal{A}[1])^{\boxtimes T}.$$

Notemos que $C(\mathcal{A})_{X^I}^n$ está concentrado en grados $-|I|$ a -1 . Las componentes $d_{T,T'}^n : \Delta_!^{(I \rightarrow T)} j_*^{(T)} j^{(T)*} (\mathcal{A}[1])^{\boxtimes T} \rightarrow \Delta_!^{(I \rightarrow T')} j_*^{(T')} j^{(T')*} (\mathcal{A}[1])^{\boxtimes T'}$ de las diferenciales d^n sólo son no nulas cuando $|T'| = |T| - 1 \geq 1$, y en ese caso si escribimos $T = T'' \cup \{i, j\}$ y $T' = T'' \cup \{k\}$, entonces $d_{T,T'}^n$ es el producto tensorial exterior de la identidad en $\mathcal{A}^{\boxtimes T''}$ y el producto quiral μ aplicado en las entradas i -ésima y j -ésima y colocado en la k -ésima salida, localizado en las diagonales transversales a $X^{T'}$.

No es difícil ver que $C(\mathcal{A})_{X^1}$ es sólo $\mathcal{A}[1]$, mientras que $C(\mathcal{A})_{X^2}$ es el complejo concentrado en grados -2 y -1 dado por

$$j_*j^*\mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A} \xrightarrow{d=\mu} \Delta_1\mathcal{A}.$$

Además, observemos que en el caso $\mathcal{A} = \omega_X$, $C(\mathcal{A})_{X^3}$ coincide con el complejo de Cousin $C(\omega_{X^3})$ que describimos en el Ejemplo 1.3.3. Los complejos $C(\mathcal{A})_{X^I}$ resultan ser acíclicos en todos sus términos a excepción de $n = -|I|$, así que la única información cohomológica relevante proviene de

$$\mathcal{V}_I = \text{Ker} (d^{-|I|} : C(\mathcal{A})_{X^I}^{-|I|} \rightarrow C(\mathcal{A})_{X^I}^{-|I|+1})^l.$$

Estos \mathcal{D}_{X^I} -módulos a izquierda forman un álgebra de factorización sobre X , donde los isomorfismos $\nu^{(\pi)}$ y $c_{[\pi]}$ requeridos se obtienen como consecuencia de ciertas propiedades de factorización de los complejos $C(\mathcal{A})_{X^I}$, y la sección unidad es $\mathbb{1} = u^l$. \square

Ejemplo 1.4.4. Sea $X = \mathbb{A}^1$ y asumamos que (\mathcal{A}, μ, u) es equivariante por traslaciones, de forma tal que $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{A}) = V[x]dx$ para algún álgebra de vértice V . Entonces los dos primeros haces de su álgebra de factorización asociada $\{\mathcal{V}_I\}$ están determinados por $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{V}) = V[x]$ y $\Gamma(\mathbb{A}^2, \mathcal{V}_2) = V_2 = \text{Ker } Y^2$, donde $Y^2 = \Gamma(\mathbb{A}^2, \mu^l)$. Similarmente, para todo $n \geq 2$ vale que $\Gamma(\mathbb{A}^n, \mathcal{V}_{\{1, \dots, n\}}) = V_n = \text{Ker } Y^n$, donde

$$Y^n : V^{\otimes n}[x_i]_{1 \leq i \leq n}[(x_i - x_j)^{-1}]_{1 \leq i < j \leq n} \rightarrow \frac{V[x_i]_{1 \leq i \leq n}[(x_i - x_j)^{-1}]_{1 \leq i < j \leq n}}{V[x_i]_{1 \leq i \leq n}},$$

$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n f(x_1, \dots, x_n) \mapsto Y(\cdots Y(a_1, x_1 - x_2)a_2 \cdots, x_{n-1} - x_n)a_n \cdot f(x_1, \dots, x_n) \text{ mod } V[x_i]_{1 \leq i \leq n}.$$

Usando los Teoremas 1.3.6 y 1.4.3 es posible mostrar que las álgebras de factorización descritas en este ejemplo agotan todas las *álgebras de factorización equivariantes por traslaciones sobre \mathbb{A}^1* , las cuales se definen de forma similar a otros objetos \mathbb{G}_a -equivariantes: si $a^I, p^I : (\mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1)^{|I|} \rightarrow \mathbb{A}^{|I|}$ son los morfismos deducidos naturalmente de a y p , entonces requerimos que existan isomorfismos $\psi_I : p^{I*}\mathcal{V}_I \rightarrow a^{I*}\mathcal{V}_I$ que preserven las estructuras de factorización y satisfagan compatibilidades naturales.

Una de las principales ventajas de las álgebras de factorización es el hecho de que se puede generalizar su definición para que los haces \mathcal{V}_I vivan en categorías distintas a la de \mathcal{O}_{X^I} -módulos, inclusive en categorías no aditivas. Para cualquier esquema Z , el análogo no lineal de un haz cuasi-coherente de \mathcal{O}_Z -módulos es un *ind-esquema* \mathcal{G}_Z sobre Z , es decir, un colímite formal $\varinjlim \mathcal{G}_Z^{(n)}$ de un sistema inductivo de esquemas cuasi-compactos $\mathcal{G}_Z^{(n)}$ sobre Z , tal que todos los morfismos $\mathcal{G}_Z^{(n)} \rightarrow \mathcal{G}_Z^{(m)}$ para $n \leq m$ son inclusiones cerradas. Supondremos siempre que el conjunto de índices es contable, de modo que

los morfismos $\mathcal{G}_Z^{(n)} \xrightarrow{r^{(n)}} Z$ definan un morfismo $\mathcal{G}_Z \xrightarrow{r} Z$, y nuestros ind-esquemas siempre serán formalmente suaves (ver [BD2, Sect. 7.11]).

Esta analogía motiva la siguiente definición.

Definición 1.4.5. Un *espacio de factorización* sobre X es una familia $\{\mathcal{G}_I\}$ donde \mathcal{G}_I es un ind-esquema sobre X^I para cada $I \in fSet$, junto con

- Un *isomorfismo diagonal* de ind-esquemas sobre X^I

$$\nu^{(\pi)} : \Delta^{(\pi)*} \mathcal{G}_J \rightarrow \mathcal{G}_I$$

- Un *isomorfismo de factorización* de ind-esquemas sobre $U^{(\pi)}$

$$c_{[\pi]} : j^{(\pi)*} \prod_{i \in I} \mathcal{G}_{J_i} \rightarrow j^{(\pi)*} \mathcal{G}_J$$

para cada suryección $\pi : J \rightarrow I$, satisfaciendo compatibilidades análogas a las de las álgebras de factorización con respecto a la composición de proyecciones.

Por supuesto, también podemos definir unidades para estos espacios de factorización.

Definición 1.4.6. Un *monoide de factorización* sobre X es un espacio de factorización $\{\mathcal{G}_I\}$ sobre X junto con una *unidad*, la cual es una colección de secciones globales $\mathbb{1}^{(I)} : X^I \rightarrow \mathcal{G}_I$ compatibles con los isomorfismos diagonales y de factorización, tal que para toda sección local $s : U \rightarrow \mathcal{G}_{U,1}$ de la proyección $\mathcal{G}_{U,1} \rightarrow U \subseteq X$, con U abierto en X , la sección $s \times \mathbb{1}^{(1)}$ de $j^* \mathcal{G}_{U,2}$ definida usando $c_{[id_{\{1,2\}}]}$ se extiende a todo X^2 , y su restricción a U mediante Δ es s .

La relación entre los monoides de factorización y las álgebras de factorización no es una mera analogía, podemos aplicar el siguiente “proceso de linealización” para transformar los primeros en las segundas: dado un monoide de factorización $\{\mathcal{G}_I\}$ sobre X , con proyecciones $r^{(I)} : \mathcal{G}_I \rightarrow X^I$ y unidad $\mathbb{1}^{(I)} : X^I \rightarrow \mathcal{G}_I$, definimos

$$\mathcal{A}_{\mathcal{G},I} = r_*^{(I)} \mathbb{1}_!^{(I)} \omega_{X^I}. \quad (1.4.1)$$

Éstos pueden ser interpretados como haces de funciones delta en \mathcal{G}_I a lo largo de la sección $\mathbb{1}^{(I)}$ (ver [FBZ, Sect. 20.4.1]).

Proposición 1.4.7. Los \mathcal{O}_{X^I} -módulos $\mathcal{A}_{\mathcal{G},I}^!$ conforman un álgebra de factorización, llamada la *linearización del monoide de factorización* $\{\mathcal{G}_I\}$. Esto determina un funtor de la categoría $\mathcal{FM}(X)$ de monoides de factorización a la categoría $\mathcal{FA}(X)$ de álgebras de factorización sobre X .

1.5 | Álgebras OPE

Beilinson y Drinfeld definen en [BD1, Sect. 3.5] otro objeto equivalente a las álgebras quirales y de factorización: las álgebras OPE. Ellas, entre todos estos conceptos, son las más cercanas en espíritu a las álgebras de vértice, y por lo tanto serán de suma importancia para nosotros.

Dado $I \in fSet$, un \mathcal{D}_{X^I} -haz es un haz (no necesariamente cuasi-coherente) de \mathcal{D}_{X^I} -módulos a izquierda para la topología étale. Sea $\bar{\mathcal{M}}^l(X^I)$ la categoría de \mathcal{D}_{X^I} -haces. Para la inclusión diagonal $\Delta^{(\pi)} : X^I \rightarrow X^J$ determinada por una suryección $\pi : J \rightarrow I$, podemos definir un funtor pullback $\Delta^{(\pi)!} : \bar{\mathcal{M}}^l(X^J) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}^l(X^I)$ como $\Delta^{(\pi)!}\mathcal{F} = \Delta^{(\pi)*}(\mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})$, donde $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{O}_{X^J}$ es el ideal determinado por $\Delta^{(\pi)}$. Por otro lado, tenemos dos funtores importantes de $\bar{\mathcal{M}}^l(X^I)$ en $\bar{\mathcal{M}}^l(X^J)$:

- $\Delta^{(\pi)!}$ tiene un adjunto a derecha $\hat{\Delta}_!^{(\pi)} : \bar{\mathcal{M}}^l(X^I) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}^l(X^J)$ que es exacto y fielmente pleno, e identifica $\bar{\mathcal{M}}^l(X^I)$ con la subcategoría plena de aquellos \mathcal{D}_{X^J} -haces \mathcal{F} para los cuales $\mathcal{F} = \varinjlim \mathcal{F}/\mathcal{J}^n\mathcal{F}$;
- $\Delta^{(\pi)!}$ posee un inverso a derecha $\Delta_!^{(\pi)} : \bar{\mathcal{M}}^l(X^I) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}^l(X^J)$ que también es exacto y fielmente pleno, dado por $\Delta_!^{(\pi)}\mathcal{F} = (\Delta_!^{(\pi)}\omega_{X^I})^l \otimes \hat{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F}$. Cuando se lo restringe a $\mathcal{M}^l(X^J)$, coincide con el funtor usual $\Delta_!^{(\pi)}$ de pushforward de \mathcal{D} -módulos.

Sea $j^{(J/I)} : U^{(J/I)} \hookrightarrow X^J$ el complemento de las diagonales que contienen a X^I , i.e. $U^{(J/I)} = \{\{x_j\}_{j \in J} \in X^J : x_j \neq x_{j'} \text{ si } \pi(j) = \pi(j')\}$. Definimos un tercer funtor $\tilde{\Delta}_!^{(\pi)} : \bar{\mathcal{M}}^l(X^I) \rightarrow \bar{\mathcal{M}}^l(X^J)$ como

$$\tilde{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F} = \hat{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F} \otimes j_*^{(J/I)} j^{(J/I)*}\mathcal{O}_{X^J}.$$

Si además suponemos que $|J| = |I| + 1$, de forma tal que $\Delta^{(\pi)}$ es un divisor en X^J , entonces para todo \mathcal{D}_{X^I} -haz \mathcal{F} obtenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow \hat{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F} \rightarrow \tilde{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F} \rightarrow \Delta_!^{(\pi)}\mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Estos funtores satisfacen la siguiente propiedad de “levantamiento”: para todos $\mathcal{H} \in \bar{\mathcal{M}}^l(X^J)$, $\mathcal{F} \in \bar{\mathcal{M}}^l(X^I)$ y todo morfismo de \mathcal{D}_{X^J} -haces

$$\mu : \mathcal{H} \otimes j_*^{(J/I)} j^{(J/I)*}\mathcal{O}_{X^J} \rightarrow \Delta_!^{(\pi)}\mathcal{F},$$

existen morfismos únicos $\bar{\mu}$ y $\tilde{\mu}$ tales que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & \tilde{\Delta}_!^{(\pi)}\mathcal{F} \\ \downarrow & \nearrow \bar{\mu} & \downarrow \\ \mathcal{H} \otimes j_*^{(J/I)} j^{(J/I)*}\mathcal{O}_{X^J} & \xrightarrow{\mu} & \Delta_!^{(\pi)}\mathcal{F} \end{array} \quad (1.5.1)$$

Ejemplo 1.5.1. Si $X = \mathbb{A}^1$, entonces para todo $\mathcal{D}_{\mathbb{A}^1}$ -haz \mathcal{F} tenemos que $\Gamma(\mathbb{A}^2, \hat{\Delta}_! \mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{F})[[x-y]]$ y $\Gamma(\mathbb{A}^2, \tilde{\Delta}_! \mathcal{F}) = \Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{F})((x-y))$. En particular, para un \mathcal{D} -módulo a izquierda \mathcal{V} sobre \mathbb{A}^1 equivariante por traslaciones, con $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{V}) = V[x]$ para algún espacio vectorial V , vale que

$$\begin{aligned}\Gamma(\mathbb{A}^2, \hat{\Delta}_! \mathcal{V}) &= V[x][[x-y]] = V[y][[x-y]] \text{ y} \\ \Gamma(\mathbb{A}^2, \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}) &= V[x]((x-y)) = V[y]((x-y)).\end{aligned}$$

Dado un \mathcal{D}_X -haz \mathcal{F} , definimos su espacio de I -OPE's para cualquier $I \in fSet$ como

$$\begin{aligned}OPE(\mathcal{F})_I &= \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{M}}^l(X^I)}(\mathcal{F}^{\boxtimes I}, \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F}) \\ &\simeq \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{M}}^l(X^I)}(\mathcal{F}^{\boxtimes I} \otimes j_*^{(I)} j^{(I)*} \mathcal{O}_{X^I}, \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F}).\end{aligned}$$

Estas operaciones no forman una operad, ya que la composición de OPE's no necesita ser un OPE. En cambio, podemos definir su composición dentro de un espacio vectorial mayor, de la siguiente manera: para cualquier $\pi : J \twoheadrightarrow I$ en $fSet$, el *mapa de composición de OPE's*

$$OPE(\mathcal{F})_I \otimes \bigotimes_{i \in I} OPE(\mathcal{F})_{J_i} \rightarrow \text{Hom}_{\tilde{\mathcal{M}}^l(X^J)}(\mathcal{F}^{\boxtimes J}, \tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F})$$

manda un $(\gamma, \otimes_i \delta_i)$ al morfismo $\gamma(\otimes_i \delta_i)$ definido como

$$\mathcal{F}^{\boxtimes J} \xrightarrow{\boxtimes_{i \in I} \delta_i} \boxtimes_{i \in I} \tilde{\Delta}_!^{(J_i)} \mathcal{F} = \tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \mathcal{F}^{\boxtimes I} \xrightarrow{\tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \gamma} \tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F}.$$

Notemos que en general sólo vale que $\tilde{\Delta}_!^{(J)} \mathcal{F} \subseteq \tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F}$, en contraste con la igualdad $\Delta_!^{(J)} \mathcal{F} = \Delta_!^{(\pi)} \Delta_!^{(I)} \mathcal{F}$ que nos permitía definir la operad de operaciones quirales. Por ejemplo, en el caso donde $X = \mathbb{A}^1$, $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{F}) = V[x]$, $J = \{1, 2, 3\}$, $I = \{1, 2\}$ y $\pi : J \twoheadrightarrow I$ envía $1, 3 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, esto puede traducirse como

$$V[x_3]((x_1 - x_2, x_2 - x_3)) \subseteq V[x_3]((x_2 - x_3))((x_1 - x_3)).$$

Continuaremos explorando este ejemplo en la Sección 3.1.

Decimos que los OPE's *se componen bien* si $\gamma(\otimes_i \delta_i)$ toma valores en $\tilde{\Delta}_!^{(J)} \mathcal{F} \subseteq \tilde{\Delta}_!^{(\pi)} \tilde{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{F}$, de manera tal que $\gamma(\otimes_i \delta_i) \in OPE(\mathcal{F})_J$.

Ahora estamos preparados para presentar la definición principal de [BD1, Sect. 3.5].

Definición 1.5.2. Un *álgebra OPE* sobre X es un \mathcal{D}_X -módulo a izquierda \mathcal{V} junto con un OPE binario

$$\circ : \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} \rightarrow \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}$$

en $OPE(\mathcal{V})_{\{1,2\}}$ y una sección horizontal $\mathbf{1} \in \mathcal{V}$, tales que

1. \circ es asociativo, es decir, los OPE's $(\circ, \{\circ, id\})$ y $(\circ, \{id, \circ\})$ se componen bien y coinciden como 3-OPE's. En otras palabras, existe $\circ_3 \in OPE(\mathcal{V})_{\{1,2,3\}}$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathcal{V} \boxtimes \tilde{\Delta}_! \mathcal{V} = \tilde{\Delta}_{23!} \mathcal{V}^{\boxtimes 2} & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{23!}(\circ)} \tilde{\Delta}_{23!} \tilde{\Delta}_! \mathcal{V} \\
 \mathcal{V}^{\boxtimes 3} & \begin{array}{l} \nearrow^{id \boxtimes \circ} \\ \xrightarrow{\circ_3} \\ \searrow_{\circ \boxtimes id} \end{array} & \tilde{\Delta}_!^{(3)} \mathcal{V} \\
 & \tilde{\Delta}_! \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} = \tilde{\Delta}_{12!} \mathcal{V}^{\boxtimes 2} & \xrightarrow{\tilde{\Delta}_{12!}(\circ)} \tilde{\Delta}_{12!} \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}
 \end{array}$$

donde $\tilde{\Delta}_!^{(3)} = \tilde{\Delta}_!^{\{\{1,2,3\}\}}$ y $\tilde{\Delta}_{ij!} = \tilde{\Delta}_!^{(\pi_{ij})}$ para la suryección π_{ij} que identifica i y j en $\{1, 2, 3\}$.

2. \circ es conmutativo, es decir, permanece fijo por la simetría de “transposición de coordenadas” de $O_2(\{\mathcal{V}, \mathcal{V}\}, \mathcal{V})$.
3. $\mathbb{1}$ es una unidad para \circ , en el sentido de que para cada sección $a \in \mathcal{V}$, tanto $a \circ \mathbb{1}$ como $\mathbb{1} \circ a$ pertenecen a $\hat{\Delta}_! \mathcal{V} \subseteq \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}$ y son iguales a $a \in \mathcal{V}$ módulo $J_{\Delta} \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}$.

Su importancia reside en el siguiente resultado.

Teorema 1.5.3. [BD1, Sect. 3.5.10] *La categoría $\mathcal{CA}(X)$ de álgebras quirales es equivalente a la categoría $\mathcal{OPEA}(X)$ de álgebras OPE sobre X .*

Idea de la demostración. Sea $\mathcal{A} \in \mathcal{M}^r(X)$ y denotemos $\mathcal{V} = \mathcal{A}^l$. Luego para cualquier morfismo $\mu : j_* j^* \mathcal{A} \boxtimes \mathcal{A} \rightarrow \Delta_! \mathcal{A}$ podemos considerar el diagrama (1.5.1) para el mapa $\mu^l = \mathcal{Y}^2$, es decir

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} & \xrightarrow{\tilde{\mu}^l} & \tilde{\Delta}_! \mathcal{V} \\
 \downarrow & \nearrow^{\tilde{\mu}^l} & \downarrow \\
 j_* j^* \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} & \xrightarrow{\mu^l} & \Delta_! \mathcal{V}
 \end{array} \tag{1.5.2}$$

Esto establece una biyección entre productos quirales $\mu \in P^{ch}(\mathcal{A})_{\{1,2\}}$ y OPE's binarios $\circ_\mu = \tilde{\mu}^l \in OPE(\mathcal{V})_{\{1,2\}}$. También tenemos una correspondencia entre las secciones unitarias $u : X \rightarrow \mathcal{A}$ y las secciones unitarias $\mathbb{1} = \mu^l : X \rightarrow \mathcal{V}$. Es fácil demostrar la conmutatividad de \circ_μ a partir de la antisimetría de μ y viceversa, así como la relación entre las respectivas unidades. Suponiendo ahora que \circ_μ es conmutativo (μ antisimétrico), veamos que la asociatividad de \circ_μ es equivalente a la identidad de Jacobi de μ .

Para cualquier $I \in fSet$, consideremos el complejo $C_I(\mathcal{V})$ obtenido a partir del complejo de Chevalley-Cousin $C(\omega_X)_{X_I}$ al tensorizarlo con $\hat{\Delta}_!^{(I)} \mathcal{V} \otimes$

$\omega_{X^I}^{-1}[|I|]$, cuyo término de grado m está dado por

$$C_I(\mathcal{V})^m = \bigoplus_{\substack{\pi: I \rightarrow T \\ |T|=|I|-m}} \Delta_I^{(\pi)} \tilde{\Delta}_I^{(T)} \mathcal{V}.$$

Puesto que para $|I| = 3$ tenemos la descripción explícita de $C(\omega_X)_{X^I}$ dada por (1.3.4), podemos calcular que $C_3(\mathcal{V})$ es el siguiente complejo concentrado en grados 0, 1 y 2:

$$0 \rightarrow \tilde{\Delta}_I^{(3)} \mathcal{V} \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \Delta_{ij!} \tilde{\Delta}_I \mathcal{V} \rightarrow \Delta_I^{(3)} \mathcal{V} \rightarrow 0.$$

Denotemos $R = j_*^{(3)} j^{(3)*} \mathcal{V}^{\boxtimes 3}$. Si le aplicamos el funtor $\text{Hom}(R, -)$ a $C_3(\mathcal{V})$, el complejo que obtenemos resulta ser acíclico, y gracias a (1.5.1) podemos escribirlo como

$$0 \rightarrow \text{Hom}(\mathcal{V}^{\boxtimes 3}, \tilde{\Delta}_I^{(3)} \mathcal{V}) \xrightarrow{d^0} \bigoplus_{1 \leq i < j \leq 3} \text{Hom}(\mathcal{V}^{\boxtimes 3}, \tilde{\Delta}_{ij!} \tilde{\Delta}_I \mathcal{V}) \xrightarrow{d^1} \text{Hom}(R, \Delta_I^{(3)} \mathcal{V}).$$

Ahora observemos que la composición de los OPE's $\circ_\mu(id \otimes \circ_\mu)$ es un elemento $\circ_{1\{23\}} \in \text{Hom}(\mathcal{V}^{\boxtimes 3}, \Delta_{23!} \tilde{\Delta}_I \mathcal{V}) \subseteq \text{Hom}(R, C_3(\mathcal{V})^2)$, mientras que la composición de las operaciones quirales μ y $\{id, \mu\}$ es una operación quiral cuyo morfismo de \mathcal{D} -módulos a izquierda correspondiente es $\mu_{1\{23\}}^l \in P^{ch}(\mathcal{A})_{\{1,2,3\}}^l = \text{Hom}(R, C_3(\mathcal{V})^3)$. Más aún, tenemos que $d^1(\circ_{1\{23\}}) = \mu_{1\{23\}}^l$, y la afirmación análoga es válida para cualquier otra composición posible de \circ_μ con él mismo, las cuales denotamos genéricamente por \circ_S . Denotemos a la suma de todas ellas como $\bar{\circ}_3 = \sum \circ_S \in \text{Hom}(R, C_3(\mathcal{V})^2)$. Luego $d^1(\bar{\circ}_3)$ es la suma de los términos de la identidad de Jacobi para μ^l , así que $\bar{\circ}_3 \in \text{Ker } d^1$ si y sólo si μ satisface la identidad de Jacobi.

Por otro lado, la asociatividad de \circ_μ es la existencia de un OPE ternario $\circ_3 \in OPE(\mathcal{V})_{\{1,2,3\}} = \text{Hom}(R, C_3(\mathcal{V})^0)$ que subyace a todas las posibles composiciones \circ_S de \circ_{mu} consigo mismo. Pero esa propiedad de \circ_3 es equivalente a la condición $d^0(\circ_3) = \sum \circ_S = \bar{\circ}_3$, lo cual significa que \circ_μ es asociativo exactamente cuando $\bar{\circ}_3 \in \text{Im } d^0$.

Por lo tanto, la aciclicidad de $\text{Hom}(R, C_3(\mathcal{V}))$ implica que \circ_μ es asociativo si y sólo si μ satisface la identidad de Jacobi. \square

Un corolario inmediato de este resultado y del Teorema 1.3.6 es el hecho de que en el caso $X = \mathbb{A}^1$ obtenemos una equivalencia entre las categorías de álgebras OPE sobre $\mathbb{A}^1 \mathbb{G}_a$ -equivariantes y la categoría \mathcal{VA} de álgebras de vértice. Dada cualquier álgebra de vértice V , el diagrama (1.5.2) que relaciona al OPE \circ de su álgebra OPE asociada \mathcal{V} y el producto quiral μ de su álgebra quiral asociada \mathcal{A} pueden escribirse en términos de secciones

globales como

$$\begin{array}{ccc}
 V \otimes V[x, y] & \xrightarrow{\circ} & V[y]((x - y)) \\
 \downarrow & \nearrow \bar{\mu}^l & \downarrow \\
 V \otimes V[x, y][(x - y)^{-1}] & \xrightarrow{\mu^l} & V[y]((x - y))/V[y][[x - y]]
 \end{array}$$

Más explícitamente, las secciones globales del OPE \circ se definen como

$$(a \cdot f(x)) \circ (b \cdot g(y)) = Y(a, x - y)b \cdot f(x)g(y)$$

para todos $a, b \in V$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ y $g(y) \in \mathbb{C}[y]$. Esto revela la razón del nombre “álgebra OPE”: el producto binario OPE \circ codifica la expansión del producto de operadores entre los campos $Y(a, z)$ e $Y(b, w)$ descrita en (1.2.2). Además, la propiedad de asociatividad del OPE \circ de \mathcal{V} es equivalente a la asociatividad del álgebra de vértice V establecida en el Teorema 1.2.4.

2 | Teoría infinitesimal

En este capítulo definiremos análogos conformes para varias nociones pertenecientes al nivel infinitesimal de la teoría de Lie clásica, con el objetivo de producir una imagen similar a la descrita en (0.0.2).

2.1 | Biálgebras de vértice y el teorema de Milnor-Moore

Recordemos que para cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} , existe una estructura canónica de biálgebra cocomutativa sobre $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$, con coproducto y counidad inducidos por

$$\Delta(a) = 1 \otimes a + a \otimes 1, \quad \epsilon(a) = 0 \quad \forall a \in \mathfrak{g}.$$

Utilizaremos la notación de Sweedler $\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$ para coálgebras, donde la suma está implícita.

Se puede realizar un procedimiento similar en el álgebra de vértice universal envolvente $\mathcal{U}(R)$ de un álgebra de Lie conforme R : existen homomorfismos de álgebra de vértice únicos $\Delta : \mathcal{U}(R) \rightarrow \mathcal{U}(R) \otimes \mathcal{U}(R)$ y $\epsilon : \mathcal{U}(R) \rightarrow \mathbb{C}$ tales que $\Delta(a) = |0\rangle \otimes a + a \otimes |0\rangle$ y $\epsilon(a) = 0$ para todo $a \in R$ [Li].

Por lo tanto, $\mathcal{U}(R)$ se convierte en nuestro primer ejemplo de biálgebra de vértice.

Definición 2.1.1. [Li] Una *biálgebra de vértice* es un álgebra de vértice V junto con una estructura de coálgebra (V, Δ, ϵ) tal que las aplicaciones

$$\Delta : V \rightarrow V \otimes V \quad \text{y} \quad \epsilon : V \rightarrow \mathbb{C}$$

son homomorfismos de álgebra de vértice. Así, una biálgebra de vértice es simplemente una coálgebra en la categoría monoidal de álgebras de vértice \mathcal{VA} .

Si V es una biálgebra de vértice, denotaremos por $\mathcal{P}(V)$ al subconjunto de elementos *primitivos* de V , es decir, a los elementos $a \in V$ tales que $\Delta(a) = a \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes a$. En la teoría de Lie clásica los elementos primitivos de una biálgebra forman un álgebra de Lie, y en nuestro caso podemos demostrar un resultado similar.

Proposición 2.1.2. $\mathcal{P}(V)$ es una subálgebra de Lie conforme de V .

Demostración. Sean $a, b \in \mathcal{P}(V)$. Entonces

$$\begin{aligned}\Delta(Y(a, z)b) &= Y(\Delta a, z)\Delta b \\ &= Y(a \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes a, z)(b \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes b) \\ &= Y(a, z)b \otimes Y(|0\rangle, z)|0\rangle + Y(a, z)|0\rangle \otimes Y(|0\rangle, z)b \\ &\quad + Y(|0\rangle, z)b \otimes Y(a, z)|0\rangle + Y(|0\rangle, z)|0\rangle \otimes Y(a, z)b \\ &= Y(a, z)b \otimes |0\rangle + e^{zT}a \otimes b + b \otimes e^{zT}a + |0\rangle \otimes Y(a, z)b|0\rangle.\end{aligned}$$

Puesto que $e^{zT}a$ es holomorfa, al comparar los coeficientes de z^{-n-1} a ambos lados para valores no negativos de n obtenemos la fórmula

$$\Delta(a_{(n)}b) = a_{(n)}b \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes a_{(n)}b,$$

así que $a_{(n)}b \in \mathcal{P}(V)$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Análogamente, para cualquier $a \in \mathcal{P}(V)$ vale que

$$\begin{aligned}\Delta(Y(a, z)|0\rangle) &= Y(\Delta a, z)\Delta|0\rangle \\ &= Y(a, z)|0\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes Y(a, z),\end{aligned}$$

por lo que al comparar el coeficiente de grado uno de cada lado vemos que $\Delta(Ta) = Ta \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes Ta$, lo cual significa que $\mathcal{P}(V)$ es un $\mathbb{C}[T]$ -submódulo de V . \square

Observación 2.1.3. Si R es un álgebra de Lie conforme, es evidente que $\mathcal{P}(\mathcal{U}(R)) = R$, porque los primitivos dependen sólo de la estructura de coálgebra y de la unidad de $\mathcal{U}(R)$, y por tanto

$$\mathcal{P}(\mathcal{U}(R)) = \mathcal{P}(\mathcal{U}(R_{Lie})) = R_{Lie} = R.$$

Un *homomorfismo de biálgebras de vértice* es un mapa entre biálgebras de vértice que es a la vez un homomorfismo de álgebras de vértice y de coálgebras. La categoría de biálgebras de vértice se denotará por \mathcal{VBA} . Podemos extender la propiedad universal de $\mathcal{U}(R)$ al ámbito de las biálgebras de vértice.

Proposición 2.1.4. *Sea W una biálgebra de vértice y $\phi : R \rightarrow \mathcal{P}(W)$ un homomorfismo de álgebras de Lie conformes. Entonces existe un único homomorfismo de biálgebras de vértice $\tilde{\phi} : \mathcal{U}(R) \rightarrow W$ que extiende a ϕ .*

Demostración. Sólo debemos comprobar que el homomorfismo de álgebras de vértice inducido $\tilde{\phi} : \mathcal{U}(R) \rightarrow W$ dado por la propiedad universal de $\mathcal{U}(R)$ como álgebra de vértice es también un mapa de coálgebras.

Claramente $\Delta_W(\tilde{\phi}(|0\rangle)) = (\tilde{\phi} \otimes \tilde{\phi})\Delta(|0\rangle)$. Si $a \in R$, entonces $\tilde{\phi}(a) = \phi(a)$ es primitivo en W por hipótesis, y por lo tanto $\Delta_W(\tilde{\phi}(a)) = \phi(a) \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes \phi(a) = (\phi \otimes \phi)\Delta(a)$.

Ahora sea $a =: a_1 \cdots a_n : \in \mathcal{U}(R)$, donde $a_i \in R$ para $i = 1, \dots, n$ y $n \geq 1$. Tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta_W(\tilde{\phi}(a)) &= \Delta_W(: \phi(a_1) \cdots \phi(a_n) :) \\ &=: \Delta_W(\phi(a_1)) \cdots \Delta_W(\phi(a_n)) : \\ &=: (\phi \otimes \phi)(\Delta a_1) \cdots (\phi \otimes \phi)(\Delta a_n) : \\ &= (\tilde{\phi} \otimes \tilde{\phi})\Delta(a). \end{aligned}$$

Luego $\tilde{\phi}$ preserva el coproducto, y cálculos análogos muestran que también preserva la counidad. \square

Recordemos que un álgebra de Lie conforme R puede verse como un álgebra de Lie R_{Lie} . Por construcción, $\mathcal{U}(R)$ coincide con $\mathcal{U}(R_{Lie})$ no sólo como espacio vectorial sino también como coálgebra. En particular, $\mathcal{U}(R)$ es *conexa* (es decir, su coradical es $\mathbb{C}|0\rangle$) y coconmutativa. El teorema clásico de Milnor-Moore afirma que estas condiciones son necesarias y suficientes para que una biálgebra sobre un cuerpo de característica cero sea el álgebra universal envolvente de su álgebra de Lie de primitivos. Ahora demostraremos la afirmación análoga para biálgebras de vértice.

Teorema 2.1.5 (Milnor-Moore para biálgebras de vértice). *Si V es una biálgebra de vértice conexa y coconmutativa, entonces*

$$V \simeq \mathcal{U}(\mathcal{P}(V))$$

como biálgebras de vértice.

Demostración. Sea $R = \mathcal{P}(V)$. Utilizando la propiedad universal demostrada en la Proposición 2.1.4, podemos levantar el morfismo identidad $R \rightarrow \mathcal{P}(V)$ a un mapa de biálgebras de vértice

$$\varphi : \mathcal{U}(R) \rightarrow V.$$

La inyectividad de φ se sigue de [M, Lemma 5.3.3], que afirma que siempre que $f : C \rightarrow D$ sea un morfismo de coálgebras con C conexa y $f|_{\mathcal{P}(C)}$ inyectiva, entonces f debe ser inyectiva. Por otra parte, su suryectividad puede obtenerse siguiendo textualmente la demostración del teorema clásico de Milnor-Moore dada en [M, Thm. 5.6.5], ya que sólo utiliza la estructura de álgebra de $\mathcal{U}(R)$ y su base PBW, que también es la misma que en $\mathcal{U}(R_{Lie})$. \square

Es fácil comprobar que tanto \mathcal{U} como \mathcal{P} son de hecho funtoriales, por lo que los resultados obtenidos en la Observación 2.1.3 y el Teorema 2.1.5 pueden resumirse categóricamente.

Proposición 2.1.6. *Los funtores \mathcal{U} y \mathcal{P} definen una equivalencia de categorías entre la categoría de álgebras de Lie conformes y la categoría de biálgebras de vértice conexas coconmutativas.*

2.2 | Coálgebras de vértice topológicas

El siguiente paso en nuestro programa es determinar la estructura correcta a considerar en el espacio dual $\mathcal{U}(R)^*$ del álgebra de vértice universal envolvente de un álgebra de Lie conforme R . Para ello, en esta sección estudiaremos los espacios duales de álgebras de vértice arbitrarias, lo que nos llevará al concepto de *coálgebra de vértice topológica*.

Recordemos que si V es un espacio vectorial cualquiera, podemos dotar a su espacio dual $W = V^*$ de la topología linealmente compacta, donde una base de entornos abiertos de cero en W viene dada por los aniquiladores U^\perp de los subespacios de dimensión finita U de V . Llamaremos a aquellos espacios vectoriales topológicos que estén dotados de esta topología *espacios linealmente compactos*. Notemos que para cualquier espacio vectorial de dimensión finita W esta es la topología discreta.

Esto nos da un funtor contravariante $*$ de la categoría $\mathcal{V}ec$ de espacios vectoriales a la categoría $\mathcal{LCV}ec$ de espacios linealmente compactos (donde los morfismos son los mapas lineales continuos). Este funtor tiene un inverso, el dual continuo, que lleva cada espacio linealmente compacto W al espacio W' de todos los funcionales lineales y continuos (con respecto a la topología usual de \mathbb{C}) $f : W \rightarrow \mathbb{C}$, y por tanto el funtor $*$ es una antiequivalencia de categorías.

Si W_1 y W_2 son dos espacios linealmente compactos, podemos definir su *producto tensorial completado* $W_1 \hat{\otimes} W_2$ como la completación de $W_1 \otimes W_2$ con respecto a la topología del producto tensorial, donde una base de entornos abiertos de cero está dada por los espacios $U_1 \otimes W_2 + W_1 \otimes U_2$ con U_i entornos abiertos de cero en W_i para $i = 1, 2$. Esto nos permite considerar la estructura monoidal sobre la categoría $\mathcal{LCV}ec$ donde el producto monoidal es $\hat{\otimes}$ y la unidad monoidal es \mathbb{C} . Se sabe que $(V_1 \otimes V_2)^* \simeq V_1^* \hat{\otimes} V_2^*$ para todos los espacios vectoriales V_1, V_2 (cf. [D]), y por lo tanto el funtor de dualización $*$ preserva la estructura monoidal.

Ahora tomemos un álgebra de vértice V en lugar de un espacio vectorial arbitrario. En este caso, para cada $n \in \mathbb{Z}$ tenemos el producto n -ésimo $\cdot_{(n)} \cdot : V \otimes V \rightarrow V$, su mapa dual (que es continuo) se llamará *coproducto n -ésimo*, y lo denotaremos por

$$\Delta_{(n)} : W \rightarrow W \hat{\otimes} W. \quad (2.2.1)$$

Podemos reunir todas estas aplicaciones lineales y continuas en una serie generatriz:

$$\Lambda(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_{(n)} z^{-n-1}. \quad (2.2.2)$$

Debido al hecho de que $W \hat{\otimes} W = (V \otimes V)^*$, podemos escribir para $f \in W$ y $a, b \in V$

$$(\Lambda(z)f)(a \otimes b) = f(Y(a, z)b).$$

Similarmente, el vector vacío $|0\rangle$ induce un *mapa covacío* continuo:

$$\begin{aligned} c : W &\rightarrow \mathbb{C} \\ f &\mapsto f|0\rangle. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Hemos llegado a una estructura muy parecida a la que Hubbard ha llamado *coálgebra de vértice* en [Hu1]. Aunque usamos algunas de sus ideas en las definiciones y demostraciones que siguen, los resultados son nuevos y más generales. Explicaremos al final de esta sección cómo sus resultados encajan con los nuestros.

Definición 2.2.1. Una *coálgebra de vértice topológica* consiste en un espacio linealmente compacto W junto con un mapa lineal y continuo

$$\begin{aligned} \Lambda(z) : W &\rightarrow (W \hat{\otimes} W)[[x, x^{-1}]] \\ f &\mapsto \Lambda(z)f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_{(n)}(f) z^{-n-1}. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

y una aplicación lineal y continua $c : W \rightarrow \mathbb{C}$ llamada *mapa covacío*, que satisface los siguientes axiomas:

1. Convergencia:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{(n)}(f) = 0 \quad \text{uniformemente para } f \in W. \quad (2.2.5)$$

2. Counidad a izquierda: Para todo $f \in W$,

$$(c \hat{\otimes} Id) \Lambda(z)f = f. \quad (2.2.6)$$

3. Cocreación: Para todo $f \in W$, $(Id \hat{\otimes} c) \Lambda(z)f$ es una serie formal de potencias holomorfa en z con coeficientes en W y

$$(Id \hat{\otimes} c) \Lambda(z)f|_{z=0} = f. \quad (2.2.7)$$

4. Identidad de co-Jacobi:

$$\begin{aligned} &\delta(z_0 - (z_1 - z_2))(Id \hat{\otimes} \Lambda(z_2)) \Lambda(z_1) \\ &\quad - \delta(z_0 - (-z_2 + z_1))(\tau \hat{\otimes} Id)(Id \hat{\otimes} \Lambda(z_1)) \Lambda(z_2) \\ &\quad = \delta(z_2 - (z_1 - z_0))(\Lambda(z_0) \hat{\otimes} Id) \Lambda(z_2), \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

donde $\tau : W \hat{\otimes} W \rightarrow W \hat{\otimes} W$ es el operador de volteo $f \hat{\otimes} g \mapsto g \hat{\otimes} f$.

Observación 2.2.2. Hay varios aspectos de esta definición que merecen ser aclarados. En primer lugar, dado que la topología producto es la topología

de convergencia puntual, el axioma de convergencia equivale a exigir que la parte singular de la serie formal $\Lambda(z)(f)$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta_{(n)}(f) z^{-n-1} \in (W \hat{\otimes} W)[[z^{-1}]], \quad (2.2.9)$$

sea uniformemente convergente para todo $f \in W$ cuando fijamos la topología producto sobre $(W \hat{\otimes} W)[[z^{-1}]] = \prod_{n \in \mathbb{Z}_+} (W \hat{\otimes} W) z^{-n-1}$, donde cada factor es homeomorfo a $W \hat{\otimes} W$. Esto puede interpretarse como una especie de axioma de “truncamiento generalizado”, cambiando el truncamiento de la serie (2.2.9) por su convergencia. De forma similar, la continuidad de $\Lambda(z)$ equivale a pedir que todos los coproductos n -ésimos sean mapas continuos.

Más aún, el axioma de convergencia juega el mismo papel para las coálgebras de vértice topológicas que el axioma de truncamiento para las álgebras de vértice: nos permite multiplicar las series formales de potencias que aparecen en la identidad de co-Jacobi. En efecto, para cualquier $l, t, j \in \mathbb{Z}$, al comparar los coeficientes de $z_0^{-l-1} z_1^{-t-1} z_2^{-j-1}$ en cada lado de la identidad de co-Jacobi obtenemos la fórmula

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \binom{l}{i} (Id \hat{\otimes} \Delta_{(j+i)}) \Delta_{(t+l-i)} \\ & - (\tau \hat{\otimes} Id) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^{l+i} \binom{l}{i} (Id \hat{\otimes} \Delta_{(t+i)}) \Delta_{(j+l-i)} \\ & = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{t}{i} (\Delta_{(l+i)} \hat{\otimes} Id) \Delta_{(t+n-i)}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Para que esta ecuación tenga sentido, necesitamos comprobar que al fijar $f \in W$, todas estas sumas aplicadas a f convergen en $W \hat{\otimes} W \hat{\otimes} W$. Tomemos algún entorno abierto de cero U en este espacio; por definición, podemos suponer que es de la forma $U = U_1 \hat{\otimes} W \hat{\otimes} W + W \hat{\otimes} U_2$ con U_1 y U_2 abiertos en W y $W \hat{\otimes} W$ respectivamente. Ahora (2.2.5) nos permite elegir algún $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\Delta_{(i)}(f) \in U_2$ para todo $i \geq N$ y todo $f \in W$. Pero entonces

$$\sum_{i=\max(0, N-j)}^{\infty} (-1)^i \binom{l}{i} (Id \hat{\otimes} \Delta_{(j+i)}) \Delta_{(t+l-i)}(f) \in W \hat{\otimes} U_2 \subseteq U,$$

así que el primer término de (2.2.10) es una serie convergente, y podemos proceder de forma análoga con los otros dos términos. Como último comentario, observemos que esta prueba se basa en gran medida en el hecho de que la convergencia (2.2.5) es uniforme.

Para definir la categoría de coálgebras de vértice topológicas, que denotaremos por $\mathcal{TV}\mathcal{C}$, necesitaremos la siguiente definición.

Definición 2.2.3. Un *homomorfismo* de coálgebras de vértice topológicas es un mapa lineal y continuo $\phi : W \rightarrow \tilde{W}$ entre coálgebras de vértice topológicas tal que

$$c_{\tilde{W}}\phi = c_W \quad \text{y} \quad \Lambda_{\tilde{W}}(z)\phi = (\phi \hat{\otimes} \phi)\Lambda_W(z).$$

Ahora estamos preparados para demostrar la dualidad entre las álgebras de vértice y las coálgebras de vértice topológicas.

Teorema 2.2.4. Si V es un álgebra de vértice, entonces su espacio dual $W = V^*$ es una coálgebra de vértice topológica con la topología linealmente compacta y los mapas $\Lambda(z)$ y c definidos por (2.2.2) y (2.2.3).

Recíprocamente, si W es un coálgebra de vértice topológica, entonces su espacio dual continuo $V = W'$ es un álgebra de vértice.

Más aún, estas correspondencias definen una antiequivalencia de categorías entre \mathcal{VA} y \mathcal{JVC} .

Demostración. Sea V un álgebra de vértice. Ya sabemos que $W = V^*$ es un espacio linealmente compacto, y también nos consta que para cada $n \in \mathbb{Z}$, $\Delta_{(n)}$ es continuo, lo cual implica que $\Lambda(z)$ es continuo si consideramos el espacio $(W \hat{\otimes} W)[[z, z^{-1}]]$ como el producto $\prod_{n \in \mathbb{Z}} (W \hat{\otimes} W)z^{-n-1}$ con la topología producto, donde cada factor es homeomorfo a $W \hat{\otimes} W$.

Para demostrar que W es una coálgebra de vértice topológica, queda por comprobar el axioma de convergencia como así también las condiciones (2.2.6) a (2.2.8). Estos últimos se desprenden de forma bastante directa de sus respectivos axiomas en la definición de álgebra de vértice, como muestra Hubbard en [Hu2]. Por ejemplo, los axiomas de unidad y counidad a izquierda se siguen el uno del otro porque si $f \in W$ y $a \in V$, entonces

$$\begin{aligned} ((c \hat{\otimes} Id)\Lambda(z)f)(a) &= (\Lambda(z)f)(|0\rangle \otimes a) \\ &= f(Y(|0\rangle, z)a), \end{aligned}$$

y en consecuencia, si $(c \hat{\otimes} Id)\Lambda(z)$ o $Y(|0\rangle, z)$ es la identidad, también lo es el otro.

Por lo tanto, sólo necesitamos demostrar el axioma de convergencia (2.2.5). Empezamos reformulando el axioma de truncamiento: equivale a pedir que la sucesión creciente de espacios

$$A_N := \langle \{a \otimes b \in V \otimes V : a_{(n)}b = 0 \text{ para todo } n \geq N\} \rangle$$

sea una filtración exhaustiva de $V \otimes V$. Elijamos para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ un conjunto (posiblemente muy grande) de espacios vectoriales de dimensión finita $\{B_{i,N}\}_{i \in I_N}$ tal que A_N sea la unión de todos los $B_{i,N}$ con $i \in I_N$. Ahora el conjunto $\{U_{i,N}\}_{i \in I_N, N \in \mathbb{Z}_+}$ formado por todos sus aniquiladores es una base de entornos de cero en $W \hat{\otimes} W$ con la propiedad de que para cada $N \in \mathbb{Z}_+$ vale que

$$\Delta_{(n)}(f) \in U_{i,N} \quad \forall f \in W, \forall n \geq N,$$

que es exactamente lo que expresa (2.2.5).

Recíprocamente, si W es una coálgebra de vértice topológica y definimos $V = W'$, sabemos que el funtor dual continuo envía los mapas $\Delta_{(n)}$ para $n \in \mathbb{Z}$ y c a ciertos mapas lineales

$$\cdot_{(n)} \cdot : V \otimes V \rightarrow V \quad \text{y} \quad \eta : \mathbb{C} \rightarrow V.$$

Sean $|0\rangle = \eta(1)$ y $Y(a, z)b = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{(n)} b z^{-n-1}$ para todos $a, b \in V$. Una vez más, todos los axiomas de álgebra de vértice se derivan directamente de sus correspondientes en las coálgebras de vértice topológicas, excepto quizás la condición de truncamiento.

Sean $a, b \in V$. Entonces $a \otimes b \in V \otimes V \simeq (W \hat{\otimes} W)'$, así que $\text{Ker}(a \otimes b)$ es un subespacio de $W \hat{\otimes} W$ de codimensión a lo sumo 1, y por lo tanto es un entorno abierto de cero. Ahora podemos usar (2.2.5): existe $N \in \mathbb{Z}_+$ tal que $\Delta_{(n)}(f) \in \text{Ker}(a \otimes b)$ para todo $f \in W$ y todo $n \geq N$, lo cual es fácil ver que equivale al axioma de truncamiento para V .

Finalmente, si $\phi : V \rightarrow \tilde{V}$ es un mapa lineal entre álgebras de vértice, $W = V^*$ y $\tilde{W} = \tilde{V}^*$, entonces $\phi^* : \tilde{W} \rightarrow W$ es una aplicación lineal y continua y para todos $a, b \in V$ y $f \in \tilde{W}$,

$$\begin{aligned} (\Lambda_W(z)(\phi^* f))(a \otimes b) &= (\phi^* f)(Y_V(a, z)b) \\ &= f(\phi(Y_V(a, z)b)) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} ((\phi^* \hat{\otimes} \phi^*) \Lambda_{\tilde{W}}(z)f)(a \otimes b) &= (\Lambda_{\tilde{W}}(z)f)(\phi(a) \otimes \phi(b)) \\ &= f(Y_{\tilde{V}}(\phi(a), z)\phi(b)). \end{aligned}$$

Similarmente, $\phi(|0\rangle_V) = |0\rangle_{\tilde{V}}$ si y sólo si $c_{\tilde{W}} \phi^* = c_W$, así que ϕ es un morfismo en \mathcal{VA} si y sólo si ϕ^* es un morfismo en $\mathcal{TV}\mathcal{C}$. Por lo tanto, los funtores dual y dual continuo están bien definidos cuando se los restringe a estas categorías más pequeñas, estableciendo así la antiequivalencia que queríamos. \square

Ahora utilizaremos este resultado para dotar a $\mathcal{TV}\mathcal{C}$ de una estructura monoidal.

Proposición 2.2.5. *Sean W_1 y W_2 coálgebras de vértice topológicas. Entonces el espacio linealmente compacto $W_1 \hat{\otimes} W_2$ adquiere una estructura de coálgebra de vértice topológica al tomar para todo $f_1 \in W_1$ y $f_2 \in W_2$*

$$\Lambda_{W_1 \hat{\otimes} W_2}(z)(f_1 \hat{\otimes} f_2) = (id \hat{\otimes} \tau \hat{\otimes} id)(\Lambda_{W_1}(z)(f_1) \hat{\otimes} \Lambda_{W_2}(z)(f_2)), \quad (2.2.11)$$

$$c_{W_1 \hat{\otimes} W_2}(f_1 \hat{\otimes} f_2) = c_{W_1}(f_1) c_{W_2}(f_2). \quad (2.2.12)$$

Es decir, $\mathcal{TV}\mathcal{C}$ admite una estructura de categoría monoidal.

Demostración. Sean $V_i = W_i'$ para $i = 1, 2$. Dado que cada V_i es un álgebra de vértice, podemos considerar su producto tensorial $V_1 \otimes V_2$, que es nuevamente un álgebra de vértice. Ahora su espacio dual es isomorfo a $W_1 \hat{\otimes} W_2$, y por tanto por el teorema anterior es una coálgebra de vértice topológica. Así que sólo resta comprobar que sus mapas de estructura están dados por (2.2.11) y (2.2.12). Para todos $f_i \in W_i$ y $a_i, b_i \in V_i$ ($i = 1, 2$), vale que

$$\begin{aligned}
\Lambda_{W_1 \hat{\otimes} W_2}(z)(f_1 \hat{\otimes} f_2)(a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2) &= \\
&= (f_1 \hat{\otimes} f_2)(Y_{V_1 \otimes V_2}(a_1 \otimes a_2, z)(b_1 \otimes b_2)) \\
&= (f_1 \hat{\otimes} f_2)(Y_{V_1}(a_1, z)b_1 \otimes Y_{V_2}(a_2, z)b_2) \\
&= f_1(Y_{V_1}(a_1, z)b_1)f_2(Y_{V_2}(a_2, z)b_2) \\
&= \Lambda_{W_1}(z)(f_1)(a_1 \otimes b_1)\Lambda_{W_2}(z)(f_2)(a_2 \otimes b_2) \\
&= (\Lambda_{W_1}(z)(f_1) \hat{\otimes} \Lambda_{W_2}(z)(f_2))(a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2) \\
&= ((id \hat{\otimes} \tau \hat{\otimes} id)(\Lambda_{W_1}(z)(f_1) \hat{\otimes} \Lambda_{W_2}(z)(f_2)))(a_1 \otimes a_2 \otimes b_1 \otimes b_2).
\end{aligned}$$

La prueba de (2.2.12) es análoga. \square

Cerraremos esta sección con una breve discusión sobre álgebras y coálgebras de vértice graduadas. Un álgebra de vértice V se llama *graduada* si tiene una \mathbb{Z} -graduación $V = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} V_{[t]}$ tal que $V_{[t]} = 0$ para $t \ll 0$ y para todo $a \in V_{[t]}$, $b \in V_{[s]}$ y $n \in \mathbb{Z}$, vale que $a_{(n)}b \in V_{[t+s-n-1]}$. Consideremos el espacio dual graduado $V^\circ = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} V_{[t]}^*$. Sea $c^\circ : V^\circ \rightarrow \mathbb{C}$ el doble dual de $|0\rangle$ y definamos para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $\Delta_{(n)}^\circ : V^\circ \rightarrow V^\circ \otimes V^\circ$ como $\Delta_{(n)}^\circ(f)(a \otimes b) = f(a_{(n)}b)$ para todo $f \in V^\circ$ y $a, b \in V$. En [Hu1] ha sido probado que V° munido de estos mapas es una *coálgebra de vértice graduada*, que se define por un conjunto de axiomas similares a los de las coálgebras de vértice topológicas pero exentos de aspectos topológicos. En particular, el axioma de convergencia se sustituye por la siguiente condición de graduación: para todo $f \in V_{[t]}^\circ$,

$$\Delta_{(n)}^\circ(f) \in (V^\circ \otimes V^\circ)_{[t+n+1]}. \quad (2.2.13)$$

Aquí la graduación en $V^\circ \otimes V^\circ$ se define declarando $\deg(f_1 \otimes f_2) = k$ siempre que $f_1 \in V_{[k_1]}^\circ$, $f_2 \in V_{[k_2]}^\circ$ y $k_1 + k_2 = k$.

Por otro lado, si tomamos el dual pleno $W = V^*$ y los mapas duales continuos $\Delta_{(n)} : W \rightarrow W \hat{\otimes} W$ y $c : W \rightarrow \mathbb{C}$ definidos por (2.2.1) y (2.2.3), obtenemos una coálgebra de vértice topológica por el Teorema 2.2.4. En este caso V^* es la completación del espacio discreto V° , y los mapas $\Delta_{(n)}$ y c son extensiones continuas de $\Delta_{(n)}^\circ$ y c° respectivamente. Es ilustrativo ver cómo el axioma de convergencia para V^* puede deducirse en este caso directamente de la condición de graduación (2.2.13) para V° . Sea $T \in \mathbb{Z}$ tal que $V_{[t]} = 0$ para todo $t < T$, y definamos una filtración decreciente por subespacios

abiertos $\{U_k\}_{k \geq T}$ de $W \hat{\otimes} W$ como $U_k = \prod_{t \geq k} (V^\circ \otimes V^\circ)_{[t]}$. Ahora dado un $k \in \mathbb{Z}$, podemos tomar $N = k - T - 1$, y entonces la condición de graduación implica que $\Delta_{(n)}(W) \subseteq U_k$ para todo $n \geq N$, demostrando así el axioma de convergencia.

2.3 | Bicoálgebras de vértice y dualidad de Cartier

Ahora continuaremos las tareas de estudiar los espacios duales de las álgebras de vértice examinando el caso de las biálgebras de vértice. Nuestro objetivo es demostrar una versión de la dualidad de Cartier para álgebras de vértice.

Comenzamos recordando la dualidad de Cartier clásica. Si restringimos nuestra atención a coálgebras en lugar de espacios vectoriales arbitrarios, encontramos que para cualquier coálgebra (coasociativa counitaria) (V, Δ, ϵ) el functor de dualización envía

$$\Delta : V \rightarrow V \otimes V \quad \text{y} \quad \epsilon : V \rightarrow \mathbb{C}$$

a los mapas lineales y continuos

$$\Delta^* : V^* \hat{\otimes} V^* \rightarrow V^* \quad \text{y} \quad \epsilon^* : \mathbb{C} \rightarrow V^*,$$

y de hecho $(V^*, \Delta^*, \epsilon^*)$ es un álgebra (asociativa unitaria) en la categoría monoidal \mathcal{LCVec} , es decir, un *álgebra linealmente compacta*. A su vez, el functor dual continuo envía cualquier álgebra linealmente compacta a una coálgebra. Así, el functor de dualización restringido a las categorías \mathcal{Clg} de coálgebras y \mathcal{LCAlg} de álgebras linealmente compactas es, una vez más, una antiequivalencia de categorías, y ésta es precisamente la afirmación conocida como la primera versión de la dualidad de Cartier [Hz]:

$$\mathcal{Clg} \simeq \mathcal{LCAlg}^{op}.$$

Naturalmente, en el párrafo anterior podríamos haber considerado álgebras en \mathcal{Vec} en lugar de coálgebras, y habríamos llegado a coálgebras linealmente compactas en lugar de álgebras. Combinando ambos razonamientos, obtenemos la versión completa de la dualidad de Cartier, que relaciona las categorías de biálgebras en \mathcal{Vec} y biálgebras linealmente compactas:

$$\mathcal{Blg} \simeq \mathcal{LcBlg}^{op}.$$

Hay un paso más que podríamos dar, que consiste en sustituir biálgebras por álgebras de Hopf, pero no haremos uso de él en este trabajo, principalmente porque la noción de álgebra de vértice de Hopf no ha sido definida todavía.

Volvamos ahora al ámbito de las álgebras de vértice. Dado que una biálgebra de vértice V es en particular una coálgebra, sabemos que su dual

$W = V^*$ es una álgebra linealmente compacta. Además, W es un álgebra conmutativa siempre que V sea una coálgebra coconmutativa (por ejemplo, cuando $V = \mathcal{U}(R)$).

Esto nos lleva a la siguiente dualización de la noción de biálgebra de vértice.

Definición 2.3.1. Una *bicoálgebra de vértice* es una coálgebra de vértice topológica W junto con una estructura de álgebra en \mathcal{LCVec} tal que sus mapas de álgebra

$$\cdot : W \hat{\otimes} W \rightarrow W \quad \text{y} \quad \eta : \mathbb{C} \rightarrow W$$

son homomorfismos de coálgebras de vértice topológicas. Es decir, una bicoálgebra de vértice es simplemente un álgebra en la categoría monoidal \mathcal{TVC} .

Recordemos que las biálgebras pueden definirse de forma equivalente como coálgebras en la categoría de álgebras o álgebras en la categoría de coálgebras, ya que estas estructuras son duales entre sí. En el caso de las biálgebras de vértice tal propiedad no es esperable, ya que no está claro cómo puede dársele a $V((z))$ una estructura de coálgebra de manera que el mapa Y se convierta en un morfismo de coálgebras.

Sin embargo, hay una manera de obtener un resultado de este tipo para bicoálgebras de vértice. El primer paso es observar que si W es una bicoálgebra de vértice, la imagen del mapa $\Lambda(z)$ se encuentra en el subespacio de $(W \hat{\otimes} W)[[z, z^{-1}]]$ que se compone de series de la forma $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ cuyos coeficientes satisfacen que $a_n \rightarrow 0$ en $W \hat{\otimes} W$ cuando $n \rightarrow \infty$. Denotamos a este espacio como $(W \hat{\otimes} W)[[z, z^{-1}]]^{conv}$, ya que está constituido por distribuciones formales cuya parte singular es puntualmente convergente.

Lema 2.3.2. *Si E es un álgebra linealmente compacta, entonces $E[[z, z^{-1}]]^{conv}$ es un álgebra que contiene a $E((z))$ como subálgebra. Si E es de dimensión finita, ambas álgebras coinciden.*

Demostración. Sean $a(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^{-n-1}$ y $b(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n z^{-n-1}$ elementos de $E[[z, z^{-1}]]^{conv}$. El producto inducido por E es $c(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n z^{-n-1}$, donde $c_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \cdot b_{n-m-1}$, y sólo tenemos que comprobar que está bien definido. Es decir, c_n debe ser un elemento de E bien definido para todo $n \in \mathbb{Z}$ y además $c_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Fijando $n \in \mathbb{Z}$, tenemos que c_n existe si tanto $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot b_{n-m-1}$ como $\sum_{m=0}^{\infty} a_{-m-1} \cdot b_{n+m}$ convergen en E , lo que a su vez ocurre si y sólo si sus dos sucesiones de sumas parciales son sucesiones de Cauchy. Sólo probaremos que $\{\sum_{m=0}^M a_m \cdot b_{n-m-1}\}_{M \in \mathbb{Z}_+}$ es una sucesión de Cauchy, pues la otra es análoga. Elijamos una base de entornos abiertos $\{E_k\}_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de E donde cada E_k es un ideal bilátero (por ejemplo, extendiendo la prueba de [D, Ch. 1, Prop. 1] al caso no conmutativo). La convergencia de $a(z)$ y $b(z)$ implica que para

cualquier $k \in \mathbb{Z}_+$ existen $M_1, M_2 \in \mathbb{Z}_+$ tales que $a_m \in E_k$ para $m \geq M_1$ y $b_m \in E_k$ para $m \geq M_2$. Tomando $M = \max\{M_1, M_2\}$, vale que $\sum_{m=M'}^{M''} a_m \cdot b_{n-m-1} \in E_k \cdot E \subseteq E_k$ para toda elección de $M'' \geq M' \geq M$. Por lo tanto la sucesión es de Cauchy, lo que demuestra que cada c_n está bien definido.

Más aún, si $N = M_1 + M_2$ y $n > N$, entonces para todo $m \in \mathbb{Z}_+$ tenemos que o bien $m \geq M_1$ o bien $n - m - 1 \geq M_2$, así que $\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot b_{n-m-1} \in E_k$. Realizando cálculos similares con $\sum_{m=0}^{\infty} a_{-m-1} \cdot b_{n+m}$ podemos concluir que $c_n \rightarrow 0$ para $n \rightarrow \infty$. Finalmente, $E((z))$ es claramente una subálgebra ya que los coeficientes de la parte singular de sus elementos se vuelven nulos a partir de cierto punto, y si $\dim E < \infty$ éstas son las únicas sucesiones que convergen a 0 porque E es discreto en ese caso. \square

Ahora podemos enunciar y demostrar el resultado deseado.

Proposición 2.3.3. *Sea $(W, \Lambda(z), c)$ una coálgebra de vértice topológica que también tiene una estructura de álgebra linealmente compacta (W, \cdot, η) . Entonces W es una bicoálgebra de vértice si y sólo si los mapas*

$$\Lambda(z) : W \rightarrow (W \hat{\otimes} W)[[z, z^{-1}]]^{conv} \quad \text{y} \quad c : W \rightarrow \mathbb{C}$$

son homomorfismos de álgebras.

Demostración. Para que W sea una bicoálgebra de vértice, deben cumplirse las siguientes afirmaciones

1. $\Lambda_W(z)(f \cdot g) = (\cdot \hat{\otimes} \cdot) \Lambda_{W \hat{\otimes} W}(z)(f \hat{\otimes} g)$ para todos $f, g \in W$.
2. $c_W(f \cdot g) = c_{W \hat{\otimes} W}(f \hat{\otimes} g)$ para todos $f, g \in W$.
3. $\Lambda_W(z)\eta = (\eta \hat{\otimes} \eta) \Lambda_{\mathbb{C}}(z)$.
4. $c_W\eta = c_{\mathbb{C}}$.

Por otro lado, los mapas $\Lambda(z)$ y c son homomorfismos de álgebras si y sólo si vale que

- (1') $\Lambda(z)(f \cdot g) = \Lambda(z)(f) \cdot \Lambda(z)(g)$ para todos $f, g \in W$.
- (2') $\Lambda(z)(1) = 1 \hat{\otimes} 1$.
- (3') $c(f \cdot g) = c(f) c(g)$ para todos $f, g \in W$.
- (4') $c(1) = 1$.

Es claro que (2) y (3') son equivalentes, así como (3) con (2') y (4) con (4'). Por lo tanto, sólo tenemos que establecer la equivalencia (1) \iff (1').

Pero esto vale porque para todos $f, g \in W$, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\cdot \hat{\otimes} \cdot) \Lambda_{W \hat{\otimes} W}(z)(f \hat{\otimes} g) &= (\cdot \hat{\otimes} \cdot)(Id \hat{\otimes} \tau \hat{\otimes} Id)(\Lambda(z)(f) \hat{\otimes} \Lambda(z)(g)) \\
&= \cdot_{W \hat{\otimes} W}(\Lambda(z)(f) \hat{\otimes} \Lambda(z)(g)) \\
&= \cdot_{W \hat{\otimes} W} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Delta_{(m)}(f) \hat{\otimes} \Delta_{(n-m-1)}(g) z^{-n-1} \\
&= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Delta_{(m)}(f) \cdot \Delta_{(n-m-1)}(g) z^{-n-1} \\
&= \Lambda(z)(f) \cdot \Lambda(z)(g).
\end{aligned}$$

□

Denotemos a la categoría de bicoálgebras de vértice por \mathcal{VBC} , donde los morfismos son aquellos morfismos en \mathcal{TC} que preservan la estructura de álgebra. Con estas definiciones, la dualidad de Cartier para biálgebras de vértice puede enunciarse como sigue.

Proposición 2.3.4 (Dualidad de Cartier). *Si V es una biálgebra de vértice, entonces su espacio dual $W = V^*$ es una bicoálgebra de vértice. Recíprocamente, si W es una bicoálgebra de vértice, entonces su espacio dual continuo $V = W'$ es una biálgebra de vértice.*

Además, estas correspondencias definen una antiequivalencia de categorías entre \mathcal{VBA} y \mathcal{VBC} .

Demostración. Se deduce inmediatamente de reunir el Teorema 2.2.4, la primera versión de la dualidad clásica de Cartier y el hecho de que la estructura de coálgebra de vértice topológica definida en $W \hat{\otimes} W$ es exactamente la que convierte el isomorfismo $W \hat{\otimes} W \simeq (V \otimes V)^*$ de espacios linealmente compactos en un isomorfismo de coálgebras de vértice topológicas. □

2.4 | Leyes de vértice formales

A continuación describiremos en detalle la construcción de la ley de grupo formal asociada a un álgebra de Lie de dimensión infinita \mathfrak{g} , para entender cómo podemos aplicar esa construcción al caso conforme.

Sea \mathfrak{g} un álgebra de Lie de dimensión infinita con una base ordenada $\{e_i : 1 \leq i < \kappa\}$, donde κ es algún cardinal infinito, y sea $V = \mathcal{U}(\mathfrak{g})$. Una forma de definir la base PBW para V es la siguiente: para cualquier sucesión de enteros no negativos $\mathbf{k} = \{k_i\}_{1 \leq i < \kappa}$ con soporte finito, denotamos

$$e_{\mathbf{k}} = e_{i_1}^{k_{i_1}} \cdots e_{i_M}^{k_{i_M}} \in V, \quad (2.4.1)$$

donde $i_1 < \dots < i_M$ son el soporte de \mathbf{k} . El conjunto de todas estas sucesiones \mathbf{k} forma un monoide, que se denotará como $\mathbf{K} = \mathbb{Z}_+^{(\kappa)}$. La *norma* de $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$ es $|\mathbf{k}| = \sum_{1 \leq i < \kappa} k_i$. Ahora la base PBW de V es el conjunto $\{e_{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$.

Denotaremos su *pseudobase dual* por $\{e^{\mathbf{k}} : \mathbf{k} \in \mathbf{K}\}$, donde cada $e^{\mathbf{k}} \in V^*$ está determinado por $e^{\mathbf{k}}(e_{\mathbf{k}'}) = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$ para todo $\mathbf{k}' \in \mathbf{K}$ y δ denota la delta de Kronecker. No es una base en el sentido clásico porque un elemento genérico $f \in V^*$ puede escribirse como

$$f = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} f(e_{\mathbf{k}}) e^{\mathbf{k}}$$

pero esta suma no es necesariamente finita, por lo que tenemos que $V^* = \prod_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \mathbb{C} e^{\mathbf{k}}$.

Sea A el álgebra $\mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$. Denotaremos a los monomios en A como $X^{\mathbf{k}} = \prod_{1 \leq i < \kappa} X_i^{k_i}$, donde $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$, así que $X^{\mathbf{k}+\mathbf{k}'} = X^{\mathbf{k}} X^{\mathbf{k}'}$ para todos $\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{K}$. Fijando $\mathbf{k}! = \prod_{1 \leq i < \kappa} k_i!$ y $X^{(\mathbf{k})} = \frac{1}{\mathbf{k}!} X^{\mathbf{k}}$, podemos enunciar el siguiente resultado clásico, cuya demostración puede encontrarse en numerosos libros, tales como [S, Hz].

Proposición 2.4.1. *La aplicación $\psi : A \rightarrow V^*$ dada por $X^{(\mathbf{k})} \mapsto e^{\mathbf{k}}$ es un isomorfismo de álgebras.*

Ahora este isomorfismo nos permite trasladar la estructura de coálgebra de V^* a A . Definamos para cada $1 \leq \ell < \kappa$ la serie formal de potencias

$$F_\ell(X, Y) = \Delta(X_\ell) \in A \hat{\otimes} A = \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]],$$

donde X_i e Y_i denotan $X_i \hat{\otimes} 1$ y $1 \hat{\otimes} X_i$ en $A \hat{\otimes} A$, $X = \{X_i\}_{1 \leq i < \kappa}$ y $Y = \{Y_i\}_{1 \leq i < \kappa}$. Sea $F(X, Y) = \{F_\ell(X, Y)\}_{1 \leq \ell < \kappa} \in \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]]^\kappa$. Se puede demostrar fácilmente que los axiomas de counidad y coasociatividad en V son equivalentes a las siguientes propiedades para $F(X, Y)$:

$$F(X, 0) = X = F(0, X) \quad (2.4.2)$$

$$F(X, F(Y, Z)) = F(F(X, Y), Z) \quad (2.4.3)$$

Por otro lado, si escribimos

$$F_\ell(X, Y) = \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'}$$

con $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell \in \mathbb{C}$ para todo $1 \leq \ell < \kappa$ y $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$, tenemos que estos coeficientes satisfacen la siguiente condición de finitud (ver [Hz]): para cada par fijo $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$, existe una cantidad finita de $1 \leq \ell < \kappa$ tales que $c_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^\ell \neq 0$.

Una sucesión de series formales de potencias $F(X, Y)$ que satisface las ecuaciones anteriores y la condición de finitud se denomina *ley de grupo formal en dimensión infinita*. Esa condición nos permite escribir la propiedad de asociatividad, ya que podemos utilizarla para mostrar que los coeficientes en (2.4.3) están bien definidos [Hz].

En lo sucesivo, comenzaremos nuestra construcción del análogo de vértice del concepto de ley de grupo formal. Primero observemos que si R es un álgebra de Lie conforme, podemos tomar $\mathfrak{g} = R_{Lie}$ en la construcción anterior y algunos de los resultados siguen siendo válidos. Por ejemplo, como $\mathcal{U}(R)$ y $\mathcal{U}(R_{Lie})$ tienen la misma estructura de coálgebra, sus duales son isomorfos como álgebras, y por tanto la Proposición 2.4.1 sigue siendo válida para $V = \mathcal{U}(R)$. Esto significa que, utilizando el mismo argumento anterior, podemos trasladar la estructura de coálgebra de vértice topológica de $\mathcal{U}(R)^*$ a A , y codificar esta estructura extra a través de ciertas series formales de potencias que desempeñarán el rol de leyes formales de grupo en este escenario. Al considerar el álgebra A como una bicoálgebra de vértice, la denotaremos como \mathbf{W} .

Definamos para cada $n \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq \ell < \kappa$ la serie formal de potencias

$$F_\ell^n(X, Y) = \Delta_{(n)}(X_\ell) \in \mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W} = \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]]. \quad (2.4.4)$$

Usando la pseudobase de $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W}$ dada por $X^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} X^{\mathbf{k}'} = X^{\mathbf{k}Y^{\mathbf{k}'}}$, podemos expandirlas como

$$F_\ell^n(X, Y) = \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}Y^{\mathbf{k}'}} \quad (2.4.5)$$

para ciertos coeficientes $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} \in \mathbb{C}$.

Para cada par $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$, podemos considerar la serie generatriz

$$c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} z^{-n-1} \in \mathbb{C}[[z, z^{-1}]],$$

y podemos usarlas para definir una serie generatriz para todos los $F_\ell^n(X, Y)$, en concreto

$$F_\ell(z)(X, Y) = \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}Y^{\mathbf{k}'}} \in (\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W})[[z, z^{-1}]]. \quad (2.4.6)$$

Finalmente, definimos

$$F(z)(X, Y) = \{F_\ell(z)(X, Y)\}_{1 \leq \ell < \kappa} \in (\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W})[[z, z^{-1}]]^\kappa. \quad (2.4.7)$$

Procederemos ahora a reescribir los axiomas de una coálgebra de vértice topológica en \mathbf{W} en términos de propiedades de $F(z)(X, Y)$. Para estudiar sus propiedades de convergencia, será útil observar que el monoide \mathbf{K}^2 puede describirse como la unión de los conjuntos finitos $\mathbf{K}_{r,I}$ dados por aquellos $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$ tales que $|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}'| \leq r$ y $\text{supp } \mathbf{k} \cup \text{supp } \mathbf{k}' \subseteq I$, donde $r \in \mathbb{Z}_+$ y $I \in fSet_\kappa = \{\{i_1 < \dots < i_M\} \text{ finitos} : 1 \leq i_t < \kappa\}$. Por lo tanto, el álgebra $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W} = \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]]$ posee una base de entornos abiertos de cero dada por los ideales

$$A_{r,I} = \prod_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2 \setminus \mathbf{K}_{r,I}} \mathbb{C} X^{\mathbf{k}Y^{\mathbf{k}'}} \quad (2.4.8)$$

para todos $r \in \mathbb{Z}_+$ e $I \in fSet_\kappa$. En particular, $F_\ell^n(X, Y)$ es el límite en $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W}$ de su sucesión de sumas parciales

$$\sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{r, I}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'}$$

Proposición 2.4.2. *La sucesión de distribuciones formales $F(z)(X, Y)$ definida por (2.4.7) satisface*

1. *Truncamiento uniforme: Para todos $r \in \mathbb{Z}_+$ e $I \in fSet_\kappa$, las sumas parciales*

$$\sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{r, I}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'}$$

de $F_\ell(z)(X, Y)$ son series de Laurent en z para todo $1 \leq \ell < \kappa$, y sus polos están uniformemente acotados por algún $N_{r, I} \in \mathbb{Z}_+$ para todo $1 \leq \ell < \kappa$.

2. *Identidad a izquierda:*

$$F(z)(0, X) = X \quad (2.4.9)$$

3. *Identidad a derecha: Cada distribución formal $F_i(z)(X, 0)$ es holomorfa en z y*

$$F(z)(X, 0) \Big|_{z=0} = X. \quad (2.4.10)$$

4. *Identidad de Jacobi:*

$$\begin{aligned} & \delta(z_0 - (z_1 - z_2)) F(z_1)(X, F(z_2)(Y, Z)) \\ & - \delta(z_0 - (-z_2 + z_1)) F(z_2)(Y, F(z_1)(X, Z)) \\ & = \delta(z_2 - (z_1 - z_0)) F(z_2)(F(z_0)(X, Y), Z). \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

Demostración. La propiedad de truncamiento uniforme es el resultado de escribir el axioma de convergencia de $\mathbb{A}(z)$ en términos de la base $\{A_{r, I}\}$ de entornos abiertos de cero de $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W}$ dada por (2.4.8). Efectivamente, $\Delta_{(n)}(X_\ell)$ converge a cero en $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W}$ uniformemente para todo $1 \leq \ell < \kappa$ si y sólo si para cada $r \in \mathbb{Z}_+$ e $I \in fSet_\kappa$, existe $N_{r, I} \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$F_\ell^n(X, Y) \in A_{r, I} \quad \forall n \geq N_{r, I}, \forall 1 \leq \ell < \kappa.$$

Pero $F_\ell^n(X, Y) \in A_{r, I}$ exactamente cuando $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} = 0$ para todo $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{r, I}$, por lo que la condición anterior es equivalente a

$$\sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{r, I}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'} = \sum_{n < N_{r, I}} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{r, I}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'} z^{-n-1}$$

para todo $1 \leq \ell < \kappa$.

Por otro lado, el mapa covació $c : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{C}$ puede calcularse como $c(X^{\mathbf{k}}) = \delta_{\mathbf{k},0}$ para todo $\mathbf{k} \in \mathbf{K}$. Esto nos permite calcular

$$\begin{aligned}
(c \hat{\otimes} Id)\Lambda(z)(X_\ell) &= (c \hat{\otimes} Id) \left(\sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} X^{\mathbf{k}'} \right) \\
&= \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) c(X^{\mathbf{k}}) \hat{\otimes} X^{\mathbf{k}'} \\
&= \sum_{\mathbf{k}' \in \mathbf{K}} c_{0\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}'} \\
&= \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) Y^{\mathbf{k}} Z^{\mathbf{k}'} \Big|_{\substack{Y=0 \\ Z=X}} \\
&= F_\ell(z)(0, X).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el covació es una counidad a izquierda en \mathbf{W} si y sólo si $F_\ell(z)(0, X) = X_\ell$ para todo $1 \leq \ell \in \kappa$, lo cual es la condición (2.4.9). El axioma de cocreación de la coalgebra de vértice topológica \mathbf{W} puede transformarse en la condición (2.4.10) a través de un procedimiento similar.

Por último, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\delta(z_0 - (z_1 - z_2))(Id \hat{\otimes} \Lambda(z_2))\Lambda(z_1)(X_\ell) \\
&= \delta(z_0 - (z_1 - z_2))(Id \hat{\otimes} \Lambda(z_2)) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{K}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z_1) X^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} X^{\mathbf{k}'} \\
&= \delta(z_0 - (z_1 - z_2)) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{K}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z_1) X^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} \prod_{1 \leq \ell' < \kappa} \Lambda(z_2)(X_{\ell'})^{k_{\ell'}} \\
&= \delta(z_0 - (z_1 - z_2)) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{K}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z_1) X^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} \prod_{1 \leq \ell' < \kappa} \left(\sum_{\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathbf{K}} c_{\mathbf{t}\mathbf{t}'}^{\ell'}(z_2) X^{\mathbf{t}} \hat{\otimes} X^{\mathbf{t}'} \right)^{k_{\ell'}} \\
&= \delta(z_0 - (z_1 - z_2)) \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathbf{K}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z_1) X^{\mathbf{k}} \tilde{Y}^{\mathbf{k}'} \Big|_{\tilde{Y}=F(z_2)(Y, Z)} \\
&= \delta(z_0 - (z_1 - z_2)) F_\ell(z_1)(X, F(z_2)(Y, Z)),
\end{aligned}$$

con $X = X \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} 1$, $Y = 1 \hat{\otimes} X \hat{\otimes} 1$ y $Z = 1 \hat{\otimes} 1 \hat{\otimes} X$ en $\mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W} \hat{\otimes} \mathbf{W}$. Realizando cálculos similares en los otros dos términos de la identidad de co-Jacobi en \mathbf{W} se demuestra que ambos lados de (2.4.11) están bien definidos y coinciden. \square

Definición 2.4.3. Una *ley de vértice formal* (de dimensión κ) es una sucesión de distribuciones formales

$$F(z)(X, Y) \in \mathbb{C}[[X_i, Y_i : 1 \leq i < \kappa]][[z, z^{-1}]]^\kappa$$

tal que las propiedades descritas en la Proposición 2.4.2 valen.

Nos gustaría definir la categoría de leyes formales de vértice de manera tal que se conserve la analogía con la equivalencia clásica entre las categorías de leyes de grupo formales y álgebras de Lie.

Definición 2.4.4. Sean $F(z)(X, Y)$ y $G(z)(X, Y)$ dos leyes de vértice formales de dimensiones κ y κ' . Un *homomorfismo* entre ellas es una sucesión de series formales de potencias $\alpha(X) \in \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]^{\kappa'}$ cuyo término constante es cero, tal que

$$\alpha(F(z)(X, Y)) = G(z)(\alpha(X), \alpha(Y)). \quad (2.4.12)$$

Con estos homomorfismos, las leyes de vértice formales forman una categoría, que denotaremos como $\mathcal{FV}\mathcal{L}$.

Proposición 2.4.5. *La categoría de leyes de vértice formales es antiequivalente a la categoría de bicoálgebras de vértice cuya estructura subyacente de álgebra linealmente compacta es conmutativa y local.*

Demostración. En primer lugar, se sabe que cualquier álgebra linealmente compacta que sea conmutativa y local (como anillo) es isomorfa a un álgebra de series formales de potencias $A = \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$ para algún κ . Por lo tanto, cualquier bicoálgebra de vértice W con esas propiedades debe ser de esa forma, y podemos usar la Proposición 2.4.2 para asignarle una ley de vértice formal a W , que denotaremos como $F^W(z)(X, Y)$.

Por otro lado, partiendo de una ley de vértice formal $F(z)(X, Y)$ de dimensión κ , podemos construir una estructura de bicoálgebra de vértice sobre $W = \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$ como sigue: dado que el axioma de truncamiento uniforme se traduce en que $F_\ell(z)(X, Y)$ sea un elemento del álgebra $(W \hat{\otimes} W)[[z, z^{-1}]]^{conv}$ para cada $1 \leq \ell < \kappa$, la propiedad universal del álgebra de series de potencias W implica que existe un único morfismo de álgebras $\Lambda(z)$ de W a esa álgebra tal que su valor en cada X_ℓ coincide con $F_\ell(z)(X, Y)$. El mapa covariación c también está unívocamente determinado porque existe sólo un homomorfismo de álgebras $W \rightarrow \mathbb{C}$, dado que W es local.

De esta forma, hemos demostrado que para cada ley de vértice formal de dimensión κ existe una única estructura de bicoálgebra de vértice sobre $\mathbf{W} = \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$ tal que (2.4.4) se cumple. Ahora veremos que esta correspondencia se extiende a los morfismos en sus respectivas categorías, lo que nos dará la antiequivalencia deseada.

Si $\psi : \tilde{W} \rightarrow W$ es un mapa lineal y continuo entre bicoálgebras de vértice locales y conmutativas, podemos asumir que son de la forma $W = \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]$ y $\tilde{W} = \mathbb{C}[[\tilde{X}_j : 1 \leq j < \kappa']]$. Luego definiremos $\alpha(X) \in \mathbb{C}[[X_i : 1 \leq i < \kappa]]^{\kappa'}$ como $\alpha_j(X) = \psi(\tilde{X}_j)$ para todo $1 \leq j < \kappa'$. Si tomamos la expansión $\alpha_j(X) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{K}} \alpha_{j\mathbf{m}} X^{\mathbf{m}}$, entonces para todo $1 \leq j < \kappa'$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\alpha_j(F^W(z)(X, Y)) &= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{K}} \alpha_{j\mathbf{m}} X^{\mathbf{m}} \Big|_{X=F^W(z)(X, Y)} \\
&= \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{K}} \alpha_{j\mathbf{m}} \prod_{1 \leq i < \kappa} (\Lambda_W(z)(X_i))^{\mathbf{m}_i} \\
&= \Lambda_W(z)(\alpha_j(X)) \\
&= \Lambda_W(z)(\psi(\tilde{X}_j)).
\end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
F_j^{\tilde{W}}(z)(\alpha(X), \alpha(Y)) &= \sum_{(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{k}}') \in \tilde{\mathbf{K}}^2} c_{\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{k}}'}^j(z) \tilde{X}^{\tilde{\mathbf{k}}} \hat{\otimes} \tilde{X}^{\tilde{\mathbf{k}}'} \Big|_{\tilde{X}=\alpha(X)} \\
&= \sum_{(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{k}}') \in \tilde{\mathbf{K}}^2} c_{\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{k}}'}^j(z) \prod_{1 \leq j_1 < \kappa'} \psi(\tilde{X}_{j_1})^{k_{j_1}} \hat{\otimes} \prod_{1 \leq j_2 < \kappa'} \psi(\tilde{X}_{j_2})^{k'_{j_2}} \\
&= (\psi \hat{\otimes} \psi) \sum_{(\tilde{\mathbf{k}}, \tilde{\mathbf{k}}') \in \tilde{\mathbf{K}}^2} c_{\tilde{\mathbf{k}}\tilde{\mathbf{k}}'}^j(z) \tilde{X}^{\tilde{\mathbf{k}}} \hat{\otimes} \tilde{X}^{\tilde{\mathbf{k}}'} \\
&= (\psi \hat{\otimes} \psi) \Lambda_{\tilde{W}}(z)(\tilde{X}_j).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, ψ es un homomorfismo de bicoálgebras de vértice si y sólo si $\alpha(X)$ es un homomorfismo de leyes de vértice formales. \square

Juntando este resultado, una versión restringida de la dualidad de Cartier demostrada en la última sección (usando el hecho de que los conceptos de localidad para álgebras linealmente compactas y conexidad para coálgebras son duales entre sí, cf. [M]) y la Proposición 2.1.6, inmediatamente obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.6. *La siguiente cadena de equivalencias de categorías vale.*

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{array}{l} \text{Álgebras de} \\ \text{Lie conformes} \end{array} \right\} &\simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Biálgebras de vértice} \\ \text{coconmutativas conexas} \end{array} \right\} \\
&\simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Bicoálgebras de vértice} \\ \text{conmutativas locales} \end{array} \right\}^{\text{op}} \simeq \left\{ \begin{array}{l} \text{Leyes de vértice} \\ \text{formales} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Los resultados obtenidos en este capítulo muestran que las leyes de vértice formales son completamente análogas a las leyes de grupo formales de la teoría de Lie clásica. Dado que las leyes de grupo formales pueden usarse para definir grupos de Lie bajo condiciones de convergencia apropiadas, es razonable esperar que podamos usar leyes de vértice formales de manera similar para definir un objeto que pueda interpretarse como un análogo conforme de un grupo de Lie. Formalizaremos este razonamiento en la sección 4.3, pero para presentar esta definición necesitaremos hacer uso de los conceptos de la teoría de álgebras quirales de Beilinson y Drinfeld que describimos en el capítulo 1.

3 | Teoría global

Este capítulo está dedicado a determinar el objeto correcto a considerar en el nivel global de nuestra versión conforme de la teoría de Lie clásica, que se presentará en la sección 3.3 con el nombre de *ind-esquema de vértice*. Su definición surgirá naturalmente de los resultados de las secciones 3.1 y 3.2, que a su vez se basan en gran medida en los conceptos de [BD1] presentados en los preliminares de este trabajo.

3.1 | Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización

En las secciones 1.3, 1.4 y 1.5 presentamos en detalle las pruebas de las equivalencias

$$\mathcal{FA}(X) \simeq \mathcal{CA}(X) \simeq \mathcal{OPEA}(X).$$

Nuestro objetivo en esta sección es reescribir su composición $\mathcal{FA}(X) \simeq \mathcal{OPEA}(X)$ de forma tal que no sea necesario recurrir a $\mathcal{CA}(X)$ y, además, sin hacer uso de ningún tipo de álgebra lineal o cohomología, sino únicamente conceptos y técnicas geométricas. Esto a su vez allanará el camino para más generalizaciones a contextos no lineales en la Sección 3.2. Para presentar las construcciones de forma más clara y fácil de leer trabajaremos sobre $X = \mathbb{A}^1$, aunque creemos que las herramientas que utilizamos son lo suficientemente generales para que los resultados sigan siendo válidos sobre curvas suaves X más generales.

Nuestro punto de partida es la observación en [BD1, Sect. 3.5.11] que traducida a nuestra notación dice “el OPE \circ_μ es el dato de pegamiento para \mathcal{V}_2 ”. Presentaremos un contexto adecuado para poder formalizar esta idea.

Para trabajar con espacios de series de Laurent iteradas, los axiomatizaremos como *n-espacios de Tate*. Recordemos que un espacio de Tate es un espacio vectorial topológico isomorfo a $V \oplus W^*$, donde V y W son discretos (es decir, W^* es linealmente compacto). El ejemplo más importante para nosotros será $\mathbb{C}((t)) = t^{-1}\mathbb{C}[t^{-1}] \oplus \mathbb{C}[[t]]$, donde $\mathbb{C}((t))$ y $\mathbb{C}[[t]]$ tienen sus topologías usuales donde los subespacios $t^n\mathbb{C}[[t]]$ forman una base de entornos abiertos de cero.

Esta definición se ha generalizado en [BGW] a objetos de Tate en categorías exactas arbitrarias. En particular, esto permite definir 2-espacios de Tate como objetos de Tate en la categoría de espacios de Tate, y con más iteraciones se pueden definir *n-espacios de Tate* en general. Todos los *n-espacios de Tate* de la forma $V \oplus W^*$ donde la dimensión de V y W es

a lo sumo \aleph_0 son sumandos directos de $\mathbb{C}((t_1)) \cdots ((t_n))$ [BGW, Ej. 7.6], y dado que todos los espacios con los que queremos trabajar son de esta forma, asumiremos esta restricción de tamaño a partir de ahora.

Dados V_1 y V_2 espacios vectoriales topológicos, su producto tensorial completado $V_1 \hat{\otimes} V_2$ generalmente se define como la completación de $V_1 \otimes V_2$ con respecto a la topología donde una base de entornos abiertos de cero está dado por los espacios $W_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes W_2$ con W_i entornos abiertos de cero en V_i para $i = 1, 2$. La operación $\hat{\otimes}$ es asociativa, conmutativa y cumple que $\mathbb{C}[[t_1, t_2]] = \mathbb{C}[[t_1]] \hat{\otimes} \mathbb{C}[[t_2]]$. Sin embargo $\mathbb{C}((t_1))((t_2)) \neq \mathbb{C}((t_1)) \hat{\otimes} \mathbb{C}((t_2))$, por lo que necesitamos una noción diferente de producto tensorial para espacios de Tate.

Beilinson y Drinfeld definen el *producto tensorial normalmente ordenado* $V_1 \overrightarrow{\otimes} V_2$ en [BD1, Sect. 3.6.1] como la completación de $V_1 \otimes V_2$ con respecto a la topología donde un subespacio U es abierto si y solo si existe un subespacio abierto $P \subseteq V_2$ tal que $V_1 \otimes P \subseteq U$ y para cada $v_2 \in V_2$ existe un subespacio abierto $P_{v_2} \subseteq V_1$ tal que $P_{v_2} \otimes v_2 \subseteq U$. Es asociativo, no conmutativo, y tenemos que

$$\mathbb{C}((t_1)) \cdots ((t_n)) = \mathbb{C}((t_1)) \overrightarrow{\otimes} \cdots \overrightarrow{\otimes} \mathbb{C}((t_n))$$

para todo $n \geq 2$.

En [BGHW] la definición del producto tensorial normalmente ordenado es extendida a objetos de Tate en general, y por lo tanto si denotamos a la categoría de n -espacios de Tate como n -Tate, tenemos una familia de funtores

$$-\overrightarrow{\otimes}- : n\text{-Tate} \times m\text{-Tate} \rightarrow (n+m)\text{-Tate}.$$

Así $\overrightarrow{\otimes}$ define una estructura monoidal en $\infty\text{-Tate} = \bigcup_n n\text{-Tate}$. Además, si Alg denota la categoría de \mathbb{C} -álgebras (es decir, álgebras en $(Vec, \otimes, \mathbb{C})$), entonces $\overrightarrow{\otimes}$ también define una estructura monoidal en el subcategoría $Alg \cap \infty\text{-Tate}$, ya que $\overrightarrow{\otimes}$ y \otimes conmutan entre sí.

Consideremos la categoría

$$\mathcal{C} = \{\text{Spec } A : A \in Alg \cap \infty\text{-Tate}\} \subseteq AffSch.$$

Dados morfismos $Z_1 \rightarrow Z_2$ y $Z \rightarrow Z_2$ en \mathcal{C} , definiremos el *producto fibrado de Z y Z_1 sobre Z_2* como

$$Z \times_{Z_2} Z_1 = \text{Spec } \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) \overrightarrow{\otimes}_{\Gamma(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2})} \Gamma(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1}).$$

Sobre cada $Z = \text{Spec } A \in \mathcal{C}$, podemos considerar asimismo la categoría

$$\mathcal{S}_Z = \{\tilde{M} : M \in Mod_A \cap \infty\text{-Tate}\} \subseteq \mathcal{M}_0(Z).$$

Entonces $\mathcal{S} = \bigcup_{Z \in \mathcal{C}} \mathcal{S}_Z$ es una *categoría fibrada* sobre \mathcal{C} . Es decir, tenemos un functor $p : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ y dado un morfismo $f : Z_1 \rightarrow Z_2$ en \mathcal{C} elegimos un *pullback* $f^* : \mathcal{S}_{Z_2} \rightarrow \mathcal{S}_{Z_1}$ dado por

$$\Gamma(Z_1, f^* \mathcal{M}) = \Gamma(Z_2, \mathcal{M}) \overrightarrow{\otimes}_{\Gamma(Z_2, \mathcal{O}_{Z_2})} \Gamma(Z_1, \mathcal{O}_{Z_1})$$

para todo $\mathcal{M} \in \mathcal{S}_{Z_2}$.

Consideremos ahora un álgebra de factorización $\{\mathcal{V}_I\}$ sobre \mathbb{A}^1 , no necesariamente \mathbb{G}_a -equivariante. Si dotamos a cada \mathcal{V}_I de la topología discreta, se convierten trivialmente en elementos de $\mathcal{S}_{\mathbb{A}^1}$.

Por los axiomas de factorización sabemos que

- $\mathcal{V}_2|_{\mathbb{A}^2 \setminus \Delta} = j^* \mathcal{V} \simeq j^*(\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}) = \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_{\mathbb{A}^2 \setminus \Delta}$ en $\mathcal{S}_{\mathbb{A}^2 \setminus \Delta}$;
- $\mathcal{V}_2|_{\Delta} = \Delta^* \mathcal{V}_2 \simeq \mathcal{V} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\Delta}$ en \mathcal{S}_{Δ} .

Vemos que las restricciones de \mathcal{V}_2 a Δ y $U = \mathbb{A}^2 \setminus \Delta$ sólo dependen de \mathcal{V} . Nos gustaría presentar a \mathcal{V}_2 como un haz que se obtiene al pegar estas restricciones, pero inmediatamente vemos que hay un problema, ya que Δ y U no se intersecan. Aquí es donde los espacios de Tate resultan de ayuda.

Definamos

$$\begin{aligned} \hat{\Delta} &:= \text{Spec } \varprojlim \frac{\mathbb{C}[x, y]}{(x - y)^n \mathbb{C}[x, y]} = \text{Spec } \mathbb{C}[y][[x - y]], \\ \tilde{\Delta} &:= U \times_{\mathbb{A}^2} \hat{\Delta} = \text{Spec } \mathbb{C}[y][[x - y]]_{x-y} = \text{Spec } \mathbb{C}[y]((x - y)). \end{aligned}$$

Podemos interpretar $\hat{\Delta}$ como la afinización del *entorno formal de la diagonal* en \mathbb{A}^2 , mientras que $\tilde{\Delta}$ sería su *entorno formal pinchado*.

La introducción de estos esquemas nos permite pensar en los funtores $\hat{\Delta}_!$ y $\tilde{\Delta}_!$ de una forma más concreta: si denotamos los mapas canónicos de inclusión como $\hat{j} : \hat{\Delta} \rightarrow \mathbb{A}^2$ y $\tilde{j} : \tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{A}^2$, tenemos que

$$\hat{\Delta}_! \mathcal{V} = \hat{j}_* \hat{j}^* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V} \quad \text{and} \quad \tilde{\Delta}_! \mathcal{V} = \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}$$

para todo $\mathcal{V} \in \mathcal{M}^l(\mathbb{A}^1)$. Otra ventaja de este punto de vista es el hecho de que los funtores $\hat{j}_* \hat{j}^*$ y $\tilde{j}_* \tilde{j}^*$ se definen de forma más general, no solo para \mathcal{D} -haces. Esto es apropiado al tratar con álgebras OPE ya que, al igual que ocurre con las álgebras de factorización, la estructura de \mathcal{D} -módulo no es necesaria para definir su estructura, sino que se sigue como consecuencia de los axiomas.

No es difícil demostrar que el isomorfismo diagonal ν induce un isomorfismo $\mathcal{V}_2|_{\tilde{\Delta}} \simeq \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}}$ (ver [BD1, Sect. 3.4.7]). Por lo tanto, las restricciones de \mathcal{V}_2 a $\hat{\Delta}$ y U pueden escribirse en términos de \mathcal{V} , pero ahora podemos definir entre ellas un isomorfismo de pegamiento a lo largo de la intersección $\tilde{\Delta}$ como

$$\varphi : \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{V}_2|_{\tilde{\Delta}} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}}.$$

Dado que \tilde{j}_* es adjunto a derecha de \tilde{j}^* , este isomorfismo está determinado por un mapa $\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} \rightarrow \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V} = \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}$, que es exactamente el producto OPE \circ_{μ} .

1. Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización 59

La terna $(\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\hat{\Delta}}, \varphi)$ es un ejemplo de un *dato de descenso* en \mathcal{S} relativo a la familia de morfismos $\{U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^2, \hat{\Delta} \xrightarrow{\hat{j}} \mathbb{A}^2\}$. Recordemos la definición con toda su generalidad, ya que necesitaremos usarla en varios contextos.

Definición 3.1.1. [St] Sea $p : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ una categoría fibrada, y sea $\{f_i : Z_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$ una familia de morfismos en \mathcal{C} tal que todos los productos fibrados $Z_i \times_Z Z_j$ y $Z_i \times_Z Z_j \times_Z Z_k$ existen. Un *dato de descenso* $(\mathcal{W}_i, \varphi_{ij})$ en \mathcal{S} relativo a la familia $\{f_i : Z_i \rightarrow Z\}_{i \in I}$ está dado por

- Un objeto $\mathcal{W}_i \in \mathcal{S}_{Z_i}$ para cada $i \in I$
- Un isomorfismo $\varphi_{ij} : \mathcal{W}_i|_{Z_i \times_Z Z_j} \rightarrow \mathcal{W}_j|_{Z_i \times_Z Z_j}$ para cada $(i, j) \in I^2$

que satisfacen la *condición de cociclo*:

$$\varphi_{ik}|_{Z_i \times_Z Z_j \times_Z Z_k} = \varphi_{jk}|_{Z_i \times_Z Z_j \times_Z Z_k} \varphi_{ij}|_{Z_i \times_Z Z_j \times_Z Z_k}$$

para cada terna $(i, j, k) \in I^3$ en $\mathcal{S}_{Z_i \times_Z Z_j \times_Z Z_k}$. Un dato de descenso se dice *efectivo* si existe un objeto $\mathcal{W} \in \mathcal{S}_Z$ junto con isomorfismos $\varphi_i : \mathcal{W}|_{Z_i} \rightarrow \mathcal{W}_i$ en \mathcal{S}_{Z_i} tales que $\varphi_{ij} = \varphi_j|_{Z_i \times_Z Z_j} \varphi_i^{-1}|_{Z_i \times_Z Z_j}$ para todo $(i, j) \in I^2$. En otras palabras, un dato de descenso es efectivo si y sólo si podemos pegar todos los objetos \mathcal{W}_i para formar un solo objeto \mathcal{W} .

Volviendo al contexto de álgebras de factorización/OPE, sabemos que dada cualquier álgebra OPE sobre \mathbb{A}^1 el dato de descenso $(\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\hat{\Delta}}, \varphi)$ es efectivo debido a la existencia de \mathcal{V}_2 garantizada por los Teoremas 1.4.3 y 1.5.3. No obstante, ahora mostraremos que esta efectividad es independiente de esos teoremas: es un corolario directo de la siguiente versión del conocido lema de descenso de Beauville-Laszlo demostrado en [BL2].

Lema 3.1.2. *Supongamos que son dados*

- Un $\mathbb{C}[x, y]_{x-y}$ -módulo F ;
- Un $\mathbb{C}[y][[x - y]]$ -módulo G que es $(x - y)$ -regular (i.e., $x - y$ actúa inyectivamente en G);
- Un isomorfismo de $\mathbb{C}[y]((x - y))$ -módulos

$$\varphi : \hat{F} = F \overrightarrow{\otimes}_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[y][[x - y]] \rightarrow G_{x-y}.$$

Entonces existe un $\mathbb{C}[x, y]$ -módulo M que es $(x - y)$ -regular e isomorfismos $\alpha : M_{x-y} \rightarrow F$ y $\beta : M \rightarrow G$ tales que φ es la composición de

$$\hat{F} \xrightarrow{\hat{\alpha}^{-1}} \hat{M}_{x-y} \xrightarrow{\beta_{x-y}} G_{x-y}.$$

1. Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización 60

En otras palabras, si $\mathcal{W}_1 \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(U)$ y $\mathcal{W}_2 \in \mathcal{M}_{\mathcal{O}}(\hat{\Delta})$ están determinados por los módulos de secciones globales F y G respectivamente, el dato de descenso $(\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \varphi)$ en \mathcal{S} relativo a la familia $\{U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^2, \hat{\Delta} \xrightarrow{\hat{j}} \mathbb{A}^2\}$ es efectivo, siendo M el módulo de secciones globales de su \mathcal{O} -módulo pegado \mathcal{W} sobre \mathbb{A}^2 y siendo $\{\alpha, \beta\}$ los isomorfismos correspondientes a $\psi_1 : \mathcal{W}|_U \rightarrow \mathcal{W}_1$ y $\psi_2 : \mathcal{W}|_{\hat{\Delta}} \rightarrow \mathcal{W}_2$.

Demostración. Las únicas diferencias entre este lema y el de [BL2] es la especialización al caso $A = \mathbb{C}[x, y]$ y $f = x - y$ (sólo por simplicidad), y el hecho de que tomamos $\hat{F} = F[[x - y]] = F \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[y][[x - y]]$ en lugar de $F \otimes_{\mathbb{C}[x, y]} \mathbb{C}[y][[x - y]]$, que son diferentes cuando F es de dimensión infinita.

Sin embargo, la idea clave es observar que la prueba en [BL2] continúa siendo válida, ya que aún podemos definir $M = \text{Ker } \bar{\varphi}$ para el mapa inducido $\bar{\varphi} : F \rightarrow G_f/G$, y las diferencias en los dos enfoques desaparecen en el cociente:

$$(M \otimes_A \hat{A}_f)/(M \otimes_A \hat{A}) \simeq \hat{M}_f/\hat{M}. \quad \square$$

Hasta ahora, dado cualquier \mathcal{O} -módulo \mathcal{V} sobre \mathbb{A}^1 , hemos demostrado que existe una biyección entre aquellos OPE binarios $\circ \in \mathcal{O}_2(\{\mathcal{V}, \mathcal{V}\}, \mathcal{V})$ conmutativos y los \mathcal{O} -módulos pegados \mathcal{V}_2 sobre \mathbb{A}^2 que satisfacen las propiedades de factorización deseadas. Para obtener esto, no hemos necesitado cumplir ninguna condición de cociclo, puesto que no había intersecciones triples no triviales. La situación cambia cuando damos el siguiente paso e intentamos construir el haz \mathcal{V}_3 sobre \mathbb{A}^3 .

Para cada par $1 \leq i < j \leq 3$, sea Δ_{ij} el plano diagonal en \mathbb{A}^3 determinado por $x_i = x_j$. Consideremos ahora el cubrimiento de \mathbb{A}^3 por esquemas afines en \mathbb{C} dado por $\mathbb{A}^3 = Z_1 \cup \bigcup_{1 \leq i < j \leq 3} Z_2^{(ij)} \cup Z_3$, donde

$$(I) \quad Z_1 = \mathbb{A}^3 \setminus (\bigcup_{1 \leq i < j \leq 3} \Delta_{ij}) \xrightarrow{j_1} \mathbb{A}^3, \text{ es decir}$$

$$Z_1 = \text{Spec } \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]_{x_1-x_2, x_1-x_3, x_2-x_3}.$$

$$(II) \quad Z_2^{(ij)} = \widehat{\Delta_{ij} \setminus \Delta}^{(3)} \xrightarrow{j_2^{(ij)}} \mathbb{A}^3, \text{ donde la completación debe tomarse dentro de } \mathbb{A}^3 \setminus (\Delta_{ik} \cup \Delta_{jk}) \text{ y } \{k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i, j\}. \text{ Es decir}$$

$$Z_2^{(ij)} = \text{Spec } \mathbb{C}[x_j, x_k][[x_i - x_j]]_{x_k-x_i, x_k-x_j}.$$

$$(III) \quad Z_3 = \widehat{\Delta}^{(3)} \xrightarrow{j_3} \mathbb{A}^3 \text{ es la afinización de la completación de la diagonal principal en } \mathbb{A}^3, \text{ es decir}$$

$$Z_3 = \text{Spec } \mathbb{C}[x_3][[x_1 - x_3, x_2 - x_3]].$$

Presentamos una visualización de este cubrimiento en la Figura 3.1, donde la perspectiva ha sido elegida de modo tal que la diagonal principal en \mathbb{A}^3 se vea reducida a un punto.

1. Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización 61

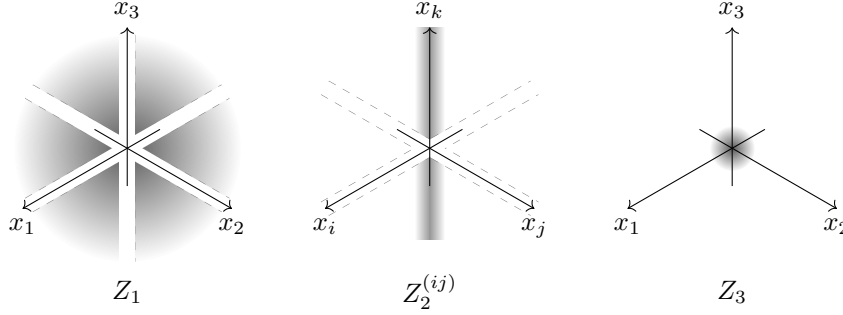


Figura 3.1: Cubrimiento de \mathbb{A}^3

Ahora para cualquier \mathcal{O} -módulo \mathcal{V} sobre \mathbb{A}^1 munido de un OPE binario \circ conmutativo usaremos los axiomas de factorización para definir lo que eventualmente se convertirá en un dato de descenso (para pegar \mathcal{V}_3) relativo a la familia $\{j_1, j_2^{(12)}, j_2^{(13)}, j_2^{(23)}, j_3\}$. Consideremos

- $\mathcal{W}_1 = \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_{Z_1} \in \mathcal{S}_{Z_1}$;
- $\mathcal{W}_2^{(ij)} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_{Z_2^{(ij)}} \in \mathcal{S}_{Z_2^{(ij)}}$ para cada $1 \leq i < j \leq 3$;
- $\mathcal{W}_3 = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{Z_3} \in \mathcal{S}_{Z_3}$.

Quedan por definir los isomorfismos de transición entre estos haces, que se construirán a partir del isomorfismo $\varphi : \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}}$ determinado por \circ .

Caso I: Sea $Z_{12}^{(ij)} = Z_1 \times_{\mathbb{A}^3} Z_2^{(ij)}$, es decir

$$Z_{12}^{(ij)} = \text{Spec } \mathbb{C}[x_j, x_k]((x_i - x_j))_{x_k - x_i, x_k - x_j}.$$

Sea $j_{12}^{(ij)}$ la inclusión $Z_{12}^{(ij)} \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x_j, x_k]((x_i - x_j)) = \mathbb{A}^1 \times \tilde{\Delta}$. Luego definimos

$$\varphi_{12}^{(ij)} = j_{12}^{(ij)*}(id_{\mathcal{V}} \boxtimes \varphi) : \mathcal{W}_1|_{Z_{12}^{(ij)}} \rightarrow \mathcal{W}_2^{(ij)}|_{Z_{12}^{(ij)}}.$$

Caso II: Sea $Z_{23}^{(ij)} = Z_2^{(ij)} \times_{\mathbb{A}^3} Z_3$, es decir

$$Z_{23}^{(ij)} = \text{Spec } \mathbb{C}[x_j]((x_k - x_j))[x_i - x_j].$$

Sea $j_{23}^{(ij)}$ la inclusión $Z_{23}^{(ij)} \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x_j]((x_k - x_j))[x_i - x_j] = \tilde{\Delta} \times \mathbb{A}^1$. Luego definimos

$$\varphi_{23}^{(ij)} = j_{23}^{(ij)*}(\varphi \boxtimes id_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}}) : \mathcal{W}_2^{(ij)}|_{Z_{23}^{(ij)}} \rightarrow \mathcal{W}_3|_{Z_{23}^{(ij)}}.$$

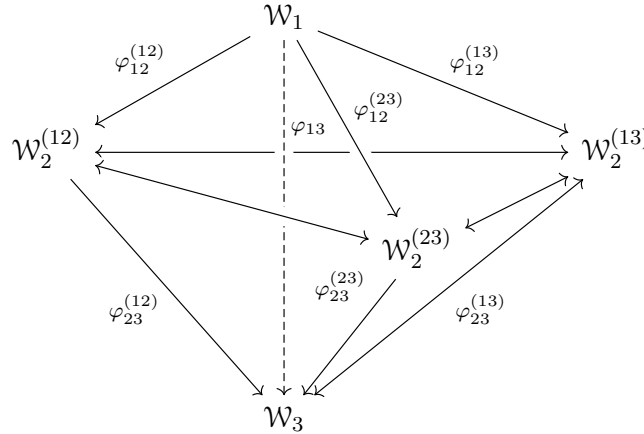
Caso III: Para cualquier par de elecciones $i < j$ y $i' < j'$ en $\{1, 2, 3\}$, definimos un mapa $\mathcal{W}_2^{(ij)} \rightarrow \mathcal{W}_2^{(i'j')}$ permutando los factores apropiados.

1. Álgebras OPE como datos de pegamiento para álgebras de factorización62

Ejemplo 3.1.3. Consideremos el escenario \mathbb{G}_a -equivariante, en el cual tenemos que $\Gamma(\mathbb{A}^1, \mathcal{V}) = V[x]$ para algún espacio vectorial V , y definamos $Y(a, x - y)b = \varphi(a \otimes b) \in V((x - y))$ para todos $a, b \in V$. En ese caso, los mapas $\varphi_{12}^{(23)}$ y $\varphi_{23}^{(23)}$ se pueden escribir en coordenadas globales como

$$\begin{aligned} V^{\otimes 3}[x_1, x_3]((x_2 - x_3))_{x_1 - x_2, x_1 - x_3} &\xrightarrow{\varphi_{12}^{(23)}} V^{\otimes 2}[x_1, x_3]((x_2 - x_3))_{x_1 - x_2, x_1 - x_3}, \\ a \otimes b \otimes c f(x_1, x_2, x_3) &\mapsto a \otimes Y(b, x_2 - x_3)c f(x_1, x_2, x_3), \\ V^{\otimes 2}[x_3]((x_1 - x_3))[[x_2 - x_3]] &\xrightarrow{\varphi_{23}^{(23)}} V[x_3]((x_1 - x_3))[[x_2 - x_3]], \\ \sum_{m=0}^{\infty} a \otimes b f(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3)^m &\mapsto \sum_{m=0}^{\infty} Y(a, x_1 - x_3)b f(x_1, x_2, x_3)(x_2 - x_3)^m. \end{aligned}$$

A esta altura ya logramos definir todos los mapas de transición posibles entre los miembros de la familia excepto en un caso, como mostramos en el siguiente diagrama (donde cada flecha solo está definida en su correspondiente intersección).



El isomorfismo restante $\varphi_{13} : \mathcal{W}_1|_{Z_1 \times_{\mathbb{A}^3} Z_3} \rightarrow \mathcal{W}_3|_{Z_1 \times_{\mathbb{A}^3} Z_3}$ debe ser definido teniendo en cuenta la condición de cociclo. De hecho, para obtener un dato de descenso con estos mapas de transición es condición necesaria y suficiente definir un isomorfismo φ_{13} tal que para cada $1 \leq i < j \leq 3$ se satisfaga que

$$\varphi_{13}|_{Z_{123}^{(ij)}} = \varphi_{23}^{(ij)}|_{Z_{123}^{(ij)}} \varphi_{12}^{(ij)}|_{Z_{123}^{(ij)}},$$

donde $Z_{123}^{(ij)} = Z_1 \times_{\mathbb{A}^3} Z_2^{(ij)} \times_{\mathbb{A}^3} Z_3 = \text{Spec } \mathbb{C}[x_j]((x_k - x_j))((x_i - x_j))$.

Sea $j_{13} : Z_1 \times_{\mathbb{A}^3} Z_3 = \text{Spec } \mathbb{C}[x_3][[x_1 - x_3, x_2 - x_3]]_{x_1 - x_3, x_2 - x_3, x_1 - x_2} \rightarrow \mathbb{A}^3$ el mapa canónico. Ahora debido a la adjunción $j_{13}^* \vdash j_{13*}$ sabemos que φ_{13} es equivalente a un mapa $\circ_3 : \mathcal{V}^{\boxtimes 3} \rightarrow j_{13*} j_{13}^* \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V} = \tilde{\Delta}_1^{(3)} \mathcal{V}$, lo cual es un 3-OPE.

Por otro lado, también tenemos mapas canónicos $\tilde{j}_{12}^{(ij)} : Z_{123}^{(ij)} \rightarrow \mathbb{A}^3$ y $\tilde{j}_{23}^{(ij)} : Z_{123}^{(ij)} \rightarrow \text{Spec } \mathbb{C}[x_j, x_k]((x_i - x_j)) = \mathbb{A}^1 \times \tilde{\Delta}$. No es difícil probar que bajo la adjunción $\tilde{j}_{12}^{(ij)*} \vdash \tilde{j}_{12*}^{(ij)}$ el isomorfismo $\varphi_{12}^{(ij)}|_{Z_{123}^{(ij)}}$ se corresponde con el mapa

$$id_{\mathcal{V}} \boxtimes \circ : \mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}^{\boxtimes 2} \rightarrow \mathcal{V} \boxtimes \tilde{\Delta}_! \mathcal{V},$$

y que de manera similar la adjunción $\tilde{j}_{23}^{(ij)*} \vdash \tilde{j}_{23*}^{(ij)}$ convierte a $\varphi_{23}^{(ij)}|_{Z_{123}^{(ij)}}$ en el mapa

$$\tilde{\Delta}_{ij!}(\circ) : \tilde{\Delta}_{ij!} \mathcal{V}^{\boxtimes 2} \rightarrow \tilde{\Delta}_{ij!} \tilde{\Delta}_! \mathcal{V}.$$

Por lo tanto, encontramos que la condición de cociclo para una elección $1 \leq i < j \leq 3$ dada es equivalente a la afirmación de que el OPE \circ se componga bien consigo mismo, comenzando en las entradas i -ésima y j -ésima. Más aún, la existencia de un único isomorfismo φ_{13} que satisfaga todas las condiciones de cociclo es equivalente a la asociatividad del OPE \circ .

Si además consideramos que este dato de descenso en \mathcal{S} relativo a la familia $\{j_1, j_2^{(ij)}, j_3\}$ debe ser efectivo (como consecuencia directa del Lema 3.1.2), resulta que hemos probado el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4. *Para cualquier \mathcal{O} -módulo \mathcal{V} sobre \mathbb{A}^1 , la biyección entre OPE's conmutativos $\circ \in O_2(\{\mathcal{V}, \mathcal{V}\}, \mathcal{V})$ y datos de descenso en \mathcal{S} de la forma $(\mathcal{V} \boxtimes \mathcal{V}|_U, \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1} \boxtimes \mathcal{V}|_{\tilde{\Delta}}, \varphi)$ identifica aquellos OPE asociativos con los isomorfismos φ que nos permiten construir un dato de descenso en \mathcal{S} relativo a la familia $\{j_1, j_2^{(ij)}, j_3\}$ para pegar un \mathcal{O} -módulo \mathcal{V}_3 sobre \mathbb{A}^3 que todavía satisface los axiomas de factorización.*

Finalmente, notemos que una vez que las condiciones de cociclo se cumplen para el dato de descenso que construimos relativo al cubrimiento elegido de \mathbb{A}^3 , se puede aplicar el mismo método para construir datos de descenso efectivos sobre los cubrimientos análogos de \mathbb{A}^n para cualquier $n \geq 4$, los cuales permiten pegar \mathcal{O} -módulos \mathcal{V}_n sobre \mathbb{A}^n que aún satisfacen los axiomas de factorización. Esto puede relacionarse con el hecho de que cualquier producto binario conmutativo y asociativo define inmediatamente un único producto de n -uplas para cualquier $n \geq 3$.

Obtenemos así en el caso $X = \mathbb{A}^1$ una demostración geométrica de la equivalencia en la cual estamos interesados.

Corolario 3.1.5. $\text{OPEA}(\mathbb{A}^1) \simeq \mathcal{FA}(\mathbb{A}^1)$.

3.2 | Generalización a monoides de factorización: monoides OPE

En esta sección aplicaremos los argumentos de la sección anterior para estudiar a los monoides de factorización en términos de sus datos de pegamiento con respecto a los mismos cubrimientos de sus espacios base.

La única diferencia entre monoides y álgebras de factorización es que debemos considerar familias de ind-esquemas en lugar de familias de \mathcal{O} -módulos sobre las potencias de la curva base. Por lo tanto, sus datos de pegamiento deben considerarse en una categoría fibrada diferente sobre \mathcal{C} .

Sea $\mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{C}$ la categoría fibrada donde para cada $Z \in \mathcal{C}$, \mathcal{S}'_Z es la categoría de aquellos ind-esquemas $\mathcal{G} = \varinjlim \mathcal{G}^{(n)}$ sobre Z tales que cada $\mathcal{G}^{(n)}$ puede obtenerse pegando esquemas afines sobre Z que pertenecen a \mathcal{C} . Dado un cambio de base $f : Z_1 \rightarrow Z_2$, el pullback $f^* : \mathcal{S}'_{Z_2} \rightarrow \mathcal{S}'_{Z_1}$ es inducido por $f^*\mathcal{G} = \mathcal{G} \times_{Z_2} Z_1$ para cada $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$ sobre Z_2 . Una diferencia clave entre \mathcal{S} y \mathcal{S}' radica en que en \mathcal{S}' el pullback f^* es adjunto a derecha del pushforward f_* .

Necesitamos introducir contrapartes no lineales para las álgebras OPE si queremos compararlas con los monoides de factorización. Las definiciones de $\hat{\Delta}$ y $\tilde{\Delta}$ de la sección anterior se pueden generalizar directamente a \mathbb{A}^I : $\hat{\Delta}^{(I)}$ es la afinización de la completación de \mathbb{A}^I con respecto a la diagonal principal $\Delta^{(I)}$ en \mathbb{A}^I y $\tilde{\Delta}^{(I)} = \hat{\Delta}^{(I)} \times_{\mathbb{A}^I} U^{(I)}$. Tenemos morfismos canónicos $\hat{\Delta}^{(I)} \xrightarrow{\hat{j}^{(I)}} \mathbb{A}^I$ and $\tilde{\Delta}^{(I)} \xrightarrow{\tilde{j}^{(I)}} \mathbb{A}^I$.

Definición 3.2.1. Sea \mathcal{G} un ind-esquema sobre \mathbb{A}^1 . Un *I-OPE no lineal* de \mathcal{G} para cualquier $I \in fSet$ es un elemento del conjunto

$$OPE(\mathcal{G})_I = \text{Hom}_{\mathcal{S}'_{\mathbb{A}^I}} \left(\tilde{j}_*^{(I)} \tilde{j}^{(I)*} \mathcal{G}^I, \mathbb{A}^I \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G} \right).$$

Para toda suryección $J \xrightarrow{\pi} I$ en $fSet$, definimos $\tilde{j}^{(\pi)} := \Delta^{(\pi)} \tilde{j}^{(I)} : \tilde{\Delta}^{(I)} \rightarrow \mathbb{A}^J$. Ahora dados OPE's no lineales $\gamma \in OPE(\mathcal{G})_I$ y $\{\delta_i \in OPE(\mathcal{G})_{J_i}\}_{i \in I}$, podemos definir su *composición*

$$\gamma(\{\delta_i\}_{i \in I}) \in \text{Hom}_{\mathcal{S}'_{\mathbb{A}^I}} \left(\tilde{j}_*^{(\pi)} \tilde{j}^{(\pi)*} \prod_{i \in I} \tilde{j}_*^{(J_i)} \tilde{j}^{(J_i)*} \mathcal{G}^{J_i}, \mathbb{A}^J \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G} \right)$$

como

$$\begin{aligned} \tilde{j}_*^{(\pi)} \tilde{j}^{(\pi)*} \prod_i \tilde{j}_*^{(J_i)} \tilde{j}^{(J_i)*} \mathcal{G}^{J_i} &\xrightarrow{\tilde{j}_*^{(\pi)} \tilde{j}^{(\pi)*} \prod_i \delta_i} \tilde{j}_*^{(\pi)} \tilde{j}^{(\pi)*} \prod_i \mathbb{A}^{J_i} \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G} \subseteq \\ &\mathbb{A}^J \times_{\mathbb{A}^I} \left(\tilde{j}_*^{(I)} \tilde{j}^{(I)*} \mathcal{G}^I \right) \xrightarrow{id \times_{\mathbb{A}^I} \gamma} \mathbb{A}^J \times_{\mathbb{A}^I} \mathbb{A}^I \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G} = \mathbb{A}^J \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso lineal, decimos que estos OPE no lineales *se componen bien* si $\gamma(\{\delta_i\})$ se extiende a un OPE no lineal en $OPE(\mathcal{G})_J$ mediante la inclusión

$$\tilde{j}_*^{(\pi)} \tilde{j}^{(\pi)*} \prod_i \tilde{j}_*^{(J_i)} \tilde{j}^{(J_i)*} \mathcal{G}^{J_i} \hookrightarrow \tilde{j}_*^{(J)} \tilde{j}^{(J)*} \prod_i \mathcal{G}^{J_i} = \tilde{j}_*^{(J)} \tilde{j}^{(J)*} \mathcal{G}^J.$$

Ahora podemos presentar la versión no lineal de las álgebras OPE.

Definición 3.2.2. Un *monoide OPE* sobre \mathbb{A}^1 es un ind-esquema \mathcal{G} sobre \mathbb{A}^1 junto con un OPE no lineal binario

$$\bullet : \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}$$

en $OPE(\mathcal{G})_{\{1,2\}}$ y una sección distinguida $\mathbb{1} : \mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{G}$, tales que

1. \bullet es asociativo, es decir, los OPE no lineales $(\bullet, \{\bullet, id\})$ y $(\bullet, \{id, \bullet\})$ se componen bien y ambas composiciones producen el mismo 3-OPE no lineal $\bullet_3 \in OPE(\mathcal{G})_{\{1,2,3\}}$. En otras palabras, debe existir un morfismo \bullet_3 tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \tilde{j}_{13*} \tilde{j}_{13}^* (\mathcal{G} \times (\tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G})) & \xrightarrow{\tilde{j}_{13*} \tilde{j}_{13}^* (id \times \bullet)} & \tilde{j}_{13*} \tilde{j}_{13}^* (\mathcal{G} \times (\mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G})) \\ & & \simeq \mathbb{A}^3 \times_{\mathbb{A}^2} (\tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow id \times_{\mathbb{A}^2} \bullet \\ \tilde{j}_*^{(3)} \tilde{j}^{(3)*} \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xrightarrow{\bullet_3} & \mathbb{A}^3 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G} \\ \uparrow & & \uparrow id \times_{\mathbb{A}^2} \bullet \\ \tilde{j}_{23*} \tilde{j}_{23}^* ((\tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \times \mathcal{G}) & \xrightarrow{\tilde{j}_{23*} \tilde{j}_{23}^* (\bullet \times id)} & \tilde{j}_{23*} \tilde{j}_{23}^* ((\mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}) \times \mathcal{G}) \\ & & \simeq \mathbb{A}^3 \times_{\mathbb{A}^2} (\tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G}) \end{array}$$

donde $\tilde{j}^{(3)} = \tilde{j}^{\{\{1,2,3\}\}}$ y $\tilde{j}_{ij} = \tilde{j}^{(\pi_{ij})}$ para la suryección π_{ij} que identifica $i = j$ en $\{1, 2, 3\}$.

2. \bullet es conmutativo, es decir, queda fijo por la simetría de “trasposición de coordenadas” de $OPE(\mathcal{G})_{\{1,2\}}$.
3. $\mathbb{1}$ es una unidad para \bullet , en el sentido de que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathbb{A}^1 & \xrightarrow{\tilde{j}_* \tilde{j}^* (id \times \mathbb{1})} & \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G} & \xleftarrow{\tilde{j}_* \tilde{j}^* (\mathbb{1} \times id)} & \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathbb{A}^1 \times \mathcal{G} \\ \simeq \mathcal{G} \times_{\mathbb{A}^1} \tilde{\Delta} & & & & \simeq \mathcal{G} \times_{\mathbb{A}^1} \tilde{\Delta} \\ & \searrow id \times_{\mathbb{A}^1} \tilde{j} & \downarrow \bullet & \swarrow id \times_{\mathbb{A}^1} \tilde{j} & \\ & & \mathcal{G} \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^2 & & \end{array}$$

Ahora a partir de un monoide de factorización $\{\mathcal{G}_I\}$ sobre \mathbb{A}^1 , y denotando $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\{1\}}$, $\mathcal{G}_2 = \mathcal{G}_{\{1,2\}}$ y $\mathcal{G}_3 = \mathcal{G}_{\{1,2,3\}}$, podemos construir un mapa de transición sobre $\tilde{\Delta}$ usando sus isomorfismos de factorización y diagonales como

$$\psi : \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G} \xrightarrow{\simeq} \tilde{j}^* \mathcal{G}_2 \xrightarrow{\simeq} \tilde{j}^* \mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}.$$

Debido a la adjunción $\tilde{j}_* \vdash \tilde{j}^*$, φ se corresponde con un OPE no lineal binario $\bullet : \tilde{j}_* \tilde{j}^* \mathcal{G} \times \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \times_{\mathbb{A}^1} \mathbb{A}^2$ que es conmutativo. El ind-esquema \mathcal{G}_2 se puede recuperar de \mathcal{G} y \circ al pegar el dato de descenso $(j^* \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \hat{j}^* \mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}, \psi)$ en \mathcal{S}' relativo a la familia $\{U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^2, \hat{\Delta} \xrightarrow{\hat{j}} \mathbb{A}^2\}$. El hecho de que estos datos de

descenso sean efectivos es consecuencia del Lema 3.1.2, siguiendo los mismos argumentos que en [M-B] para pegar esquemas afines en \mathcal{C} e ind-esquemas en \mathcal{S}' sobre ellos.

Ahora necesitamos definir un dato de descenso en \mathcal{S}' relativo a la familia $\{j_1, j_2^{(ij)}, j_3\}$ para pegar \mathcal{G}_3 . Definamos

- $\mathcal{F}_1 = j_1^* \mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 \times \mathcal{G} \in \mathcal{S}'_{Z_1}$;
- $\mathcal{F}_2^{(ij)} = j_2^{(ij)*} \mathbb{A}^1 \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \in \mathcal{S}'_{Z_2^{(ij)}}$ para cada $1 \leq i < j \leq 3$;
- $\mathcal{F}_3 = j_3^* \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \in \mathcal{S}'_{Z_3}$.

Los morfismos de pegamiento entre ellos se definen de forma muy similar a lo hecho en la sección anterior, siendo los mapas principales

$$\begin{cases} \psi_{21}^{(ij)} = j_{12}^{(ij)*} (id_{\mathbb{A}^1} \times \psi) : \mathcal{F}_2^{(ij)} \Big|_{Z_{12}^{(ij)}} \rightarrow \mathcal{F}_1^{(ij)} \Big|_{Z_{12}^{(ij)}} \\ \psi_{32}^{(ij)} = j_{23}^{(ij)*} (\psi \times id_{\mathcal{G}}) : \mathcal{F}_3^{(ij)} \Big|_{Z_{23}^{(ij)}} \rightarrow \mathcal{F}_2^{(ij)} \Big|_{Z_{23}^{(ij)}} \end{cases}$$

Una vez más, encontramos que la existencia de un isomorfismo de transición entre \mathcal{F}_1 y \mathcal{F}_3 que satisface las condiciones de cociclo es equivalente a la asociatividad del OPE no lineal \bullet .

Podemos recoger todas estas observaciones en el siguiente resultado.

Proposición 3.2.3. *Para cualquier ind-esquema \mathcal{G} sobre \mathbb{A}^1 , existe una biyección entre OPE no lineales $\bullet \in \text{OPE}(\mathcal{G})_{\{1,2\}}$ conmutativos y datos de descenso*

($j^ \mathcal{G} \times \mathcal{G}, \hat{j}^* \mathbb{A}^2 \times_{\mathbb{A}^1} \mathcal{G}, \psi$) en \mathcal{S}' relativos a la familia $\{U \xrightarrow{j} \mathbb{A}^2, \hat{\Delta} \xrightarrow{\hat{j}} \mathbb{A}^2\}$.*

Además, bajo esta correspondencia se identifican los OPE no lineales asociativos y conmutativos con aquellos isomorfismos ψ que nos permiten construir un dato de descenso de ind-esquemas relativos a la familia $\{j_1, j_2^{(ij)}, j_3\}$ que permite pegar un ind-esquema \mathcal{G}_3 sobre \mathbb{A}^3 que satisface los axiomas de factorización.

Como consecuencia directa de esta proposición obtenemos el siguiente enunciado, que es uno de los resultados más importantes de este trabajo.

Teorema 3.2.4. *La categoría $\text{OPEM}(\mathbb{A}^1)$ de monoides OPE sobre \mathbb{A}^1 es equivalente a la categoría $\mathcal{FM}(\mathbb{A}^1)$ de monoides de factorización sobre \mathbb{A}^1 .*

Demostración. Sólo resta observar que dado un monoide OPE $(\mathcal{G}, \bullet, \mathbb{1})$, los ind-esquemas \mathcal{G}_I sobre \mathbb{A}^I para cada $|I| \geq 4$ se pueden pegar a partir de datos de descenso similares relativos a los cubrimientos análogos de \mathbb{A}^I , y las condiciones de cociclo siempre valdrán ya que el “producto” original \bullet es asociativo y conmutativo, por lo que no puede dar lugar a diferentes $|I|$ -productos iterados. También deberíamos notar que cualquier sección $\mathbb{1} :$

$\mathbb{A}^1 \rightarrow \mathcal{G}$ define una familia única de secciones $\mathbb{1}^{(I)} : \mathbb{A}^I \rightarrow \mathcal{G}_I$ compatible con los axiomas diagonales y de factorización tales que $\mathbb{1}^{\{\{1\}\}} = \mathbb{1}$, y que $\mathbb{1}$ es una unidad para \circ si y sólo si la familia $\{\mathbb{1}^{(I)}\}$ es una unidad para el espacio de factorización $\{\mathcal{G}_I\}$. \square

3.3 | El contexto equivariante por traslaciones: ind-esquemas de vértice

Nos gustaría tener una comprensión más profunda de los monoides OPE sobre \mathbb{A}^1 en el caso equivariante por traslaciones. Dado que las fibras en cualquier punto de un álgebra OPE \mathbb{G}_a -equivariante sobre \mathbb{A}^1 son álgebras de vértice, las fibras de un monoide OPE \mathbb{G}_a -equivariante sobre \mathbb{A}^1 serán sus contrapartes no lineales, a las que llamaremos *ind-esquemas de vértice*.

Enunciemos con precisión qué significa la equivariancia por traslaciones en este escenario.

Definición 3.3.1. Un ind-esquema \mathcal{G} sobre \mathbb{A}^1 es \mathbb{G}_a -equivariante si existe un isomorfismo $\psi : p^*\mathcal{G} \rightarrow a^*\mathcal{G}$ de ind-esquemas sobre $\mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^1$ que satisface las mismas compatibilidades que los $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}$ -módulos \mathbb{G}_a -equivariantes. Si además \mathcal{G} está equipado con un OPE no lineal binario \bullet y una sección unidad $\mathbb{1}$ que respetan la acción de \mathbb{G}_a y con respecto a las cuales \mathcal{G} es un monoide OPE, entonces decimos que $(\mathcal{G}, \bullet, \mathbb{1})$ es \mathbb{G}_a -equivariante.

Dado un ind-esquema G (sobre $\text{Spec } \mathbb{C}$), podemos definir un ind-esquema sobre \mathbb{A}^1 \mathbb{G}_a -equivariante como $\mathcal{G} = G \times \mathbb{A}^1$. Más aún, cualquier ind-esquema \mathcal{G} sobre \mathbb{A}^1 \mathbb{G}_a -equivariante es isomorfo a $G \times \mathbb{A}^1$, donde G es su fibra en 0 (o en cualquier otro punto de \mathbb{A}^1 , debido a la equivariancia).

Para estudiar la forma en la cual el OPE no lineal \bullet de un monoide OPE \mathbb{G}_a -equivariante sobre \mathbb{A}^1 puede expresarse en términos de sus fibras, presentaremos la siguiente definición.

Definición 3.3.2. Un *ind-esquema de vértice* es un ind-esquema G junto con un punto distinguido $1 \in G$ (es decir, un morfismo $1 : \text{Spec } \mathbb{C} \rightarrow G$) y un morfismo de ind-esquemas

$$\underset{z}{\bullet} : G \times G \times D^* \rightarrow G, \quad (3.3.1)$$

donde $D^* = \text{Spec } \mathbb{C}((z))$ es el disco pinchado, que satisface los siguientes axiomas:

1. $\underset{z}{\bullet}$ es asociativo, es decir, existe un morfismo $\underset{z,w}{\bullet}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}((z)) \times \text{Spec } \mathbb{C}((w)) & \xrightarrow{id \times \underset{\cdot}{z} \times id} & G \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}((w)) \\
 \downarrow & & \downarrow \dot{w} \\
 G \times G \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}[[z, w]]_{z, w, z-w} & \xrightarrow{\underset{\cdot}{z, w}} & G \\
 \uparrow & & \uparrow \underset{\cdot}{z-w} \\
 G \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}((w)) \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}((z-w)) & \xrightarrow{\dot{w} \times id \times id} & G \times G \times \text{Spec } \mathbb{C}((z-w))
 \end{array}$$

2. $\underset{\cdot}{z}$ es conmutativo, es decir, invariante bajo trasposición de sus entradas.

3. 1 es una unidad para $\underset{\cdot}{z}$, lo que significa que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccccc}
 G \times D^* & \xrightarrow{id_G \times 1 \times id_{D^*}} & G \times G \times D^* & \xleftarrow{1 \times id_G \times id_{D^*}} & G \times D^* \\
 & \searrow & \downarrow \underset{\cdot}{z} & \swarrow & \\
 & & G & &
 \end{array}$$

Notemos que el producto de un ind-esquema de vértice también se puede escribir como un mapa

$$G \times G \rightarrow \text{Hom}_{IndSch}(D^*, G) =: LG, \quad (3.3.2)$$

donde LG es el espacio de lazos de G . Pero cuando G no es un esquema afín, no existe ninguna estructura natural de ind-esquema en su espacio de lazos (ver [FBZ, Sect. 11.3.3]), y por lo tanto este producto no tendría sentido como morfismo de ind-esquemas. Puesto que este problema no surge con la presentación (3.3.1), la hemos elegido para nuestra definición, aunque es conveniente tener en cuenta la presentación alternativa (3.3.2) al comparar los ind-esquemas de vértice con sus contrapartes lineales, las álgebras de vértice.

Definición 3.3.3. Dados dos ind-esquemas de vértice $(G, \underset{\cdot}{z}, 1)$ y $(\tilde{G}, \tilde{\underset{\cdot}{z}}, \tilde{1})$, un morfismo de ind-esquemas de vértice es un morfismo de ind-esquemas $f : G \rightarrow \tilde{G}$ que preserve las unidades y tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc}
 G \times G \times D^* & \xrightarrow{\underset{\cdot}{z}} & G \\
 f \times f \times id \downarrow & & \downarrow f \\
 \tilde{G} \times \tilde{G} \times D^* & \xrightarrow{\tilde{\underset{\cdot}{z}}} & \tilde{G}
 \end{array}$$

Denotaremos a la categoría de ind-esquemas de vértice por \mathcal{VJ} . Las definiciones presentadas anteriormente se han obtenido restringiendo la definición de monoide OPE sobre \mathbb{A}^1 a una de sus fibras. Por lo tanto, en el caso \mathbb{G}_a -equivariante tenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3.4. La categoría de monoides OPE \mathbb{G}_a -equivariantes sobre \mathbb{A}^1 es equivalente a la categoría de ind-esquemas de vértice, a través del funtor de restricción a la fibra en cero.

Dado un monoide de factorización $\{\mathcal{G}_I\}$ sobre una curva X con unidad $\mathbb{1} : X \rightarrow \mathcal{G} = \mathcal{G}_{\{\mathbb{1}\}}$, se puede demostrar que el *espacio tangente relativo* $T_{\mathbb{1}}\mathcal{G}$ de \mathcal{G} en $\mathbb{1}$ sobre X tiene una estructura de álgebra de Lie* sobre X (ver [FBZ, Sect. 20.4]). Su álgebra quiral universal envolvente coincide con el álgebra quiral asociada al álgebra de factorización obtenida aplicando el functor de linealización a $\{\mathcal{G}_I\}$. En particular, cuando $X = \mathbb{A}^1$ y todos estos objetos son \mathbb{G}_a -equivariantes, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 3.3.5. *Sea $(G, \mathbf{z}, 1)$ un ind-esquema de vértice. Entonces*

- (I) *El espacio tangente Zariski T_1G posee una estructura de álgebra de Lie conforme.*
- (II) *La linearización $\text{Dist}(G, 1)$ de G (i.e., el espacio de todas las distribuciones en G con soporte en 1) tiene una estructura de álgebra de vértice.*
- (III) *$\mathcal{U}(T_1G) \simeq \text{Dist}(G, 1)$ como álgebras de vértice.*

En otras palabras, tenemos un diagrama conmutativo de funtores

$$\begin{array}{ccc}
 & & \{\text{Ind-esquemas de vértice}\} \\
 & \swarrow^{T_1} & \downarrow \text{Dist}(-, 1) \\
 \{\text{Álgebras de Lie conformes}\} & \xrightarrow{\mathcal{U}} & \{\text{Álgebras de vértice}\}
 \end{array}$$

Las principales relaciones que hemos descrito entre las categorías definidas por Beilinson y Drinfeld en [BD1], presentadas en el Capítulo 1, y las nuevas categorías $\mathcal{OPEM}(\mathbb{A}^1)$ y \mathcal{VJ} definidas en este capítulo se resumen en el siguiente diagrama conmutativo, donde la notación $(\cdot)^{\mathbb{G}_a}$ representa en cada caso la subcategoría de \mathbb{G}_a -objetos equivariantes y las flechas verticales representan los funtores de linealización correspondientes entre las respectivas categorías.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathcal{VJ} \simeq \mathcal{OPEM}(\mathbb{A}^1)^{\mathbb{G}_a} \simeq \mathcal{FM}(\mathbb{A}^1)^{\mathbb{G}_a} & & \\
 & \swarrow^{T_1} & \downarrow \text{lin.} & \downarrow \text{lin.} & \downarrow \text{lin.} \\
 \text{Conf}\mathcal{A} & \xrightarrow{\mathcal{U}} & \mathcal{VA} \simeq \mathcal{OPEA}(\mathbb{A}^1)^{\mathbb{G}_a} \simeq \mathcal{FA}(\mathbb{A}^1)^{\mathbb{G}_a} \simeq \mathcal{CA}(\mathbb{A}^1)^{\mathbb{G}_a} & & (3.3.3)
 \end{array}$$

4 | Ejemplos

Las ideas presentadas en los capítulos 2 y 3 se pueden desarrollar aún más aplicándolas a ejemplos conocidos, lo cual es nuestra motivación en este capítulo.

Recordemos que para cualquier álgebra de Lie conforme R tenemos un isomorfismo $R \simeq \text{Lie } R_+$, definido en (1.2.13). En particular, vale que $R \simeq \text{Lie } R / \text{Lie } R_-$, y además

$$R \simeq \widehat{\text{Lie } R} / \widehat{\text{Lie } R_-},$$

donde las completaciones $\widehat{\text{Lie } R}$ y $\widehat{\text{Lie } R_-}$ son tomadas con respecto a la familia $\{ \langle a_m : a \in R \wedge m \geq n \rangle \}_{n \in \mathbb{Z}_+}$.

Si sucede que $\widehat{\text{Lie } R}$ y $\widehat{\text{Lie } R_-}$ son las álgebras de Lie de ciertos ind-grupos (es decir, ind-esquemas cuyo funtor de puntos puede levantarse a un funtor $Sch \rightarrow Grp$) G_R y H_R respectivamente, entonces el espacio tangente Zariski a su ind-esquema cociente G_R/H_R es isomorfo a R . Por lo tanto, si queremos encontrar un ind-esquema de vértice que tenga a R como su álgebra de Lie conforme tangente, sería razonable comenzar asumiendo que su ind-esquema subyacente es G_R/H_R . Dedicaremos las secciones 4.1 y 4.2 a aplicar este enfoque para construir los ind-esquemas de vértice asociados a las álgebras conformes current y de Virasoro.

El vínculo entre los ind-esquemas de vértice y las leyes de vértice formales es estudiado en la sección 4.3, y obtenemos en el Teorema 4.3.6 una respuesta positiva en el caso nilpotente a la pregunta acerca de si un álgebra de Lie conforme puede ser “integrada” a un ind-esquema.

4.1 | La Grassmanniana afín como un ind-esquema de vértice

Sea \mathring{G} un grupo algebraico reductivo y sea $\mathring{\mathfrak{g}} = \text{Lie } \mathring{G}$. Entonces definimos el *grupo de lazos* $L\mathring{G}$ (resp. *grupo de lazos positivo* $L^+\mathring{G}$) de \mathring{G} como el ind-grupo cuyos A -puntos para cualquier \mathbb{C} -álgebra A están dados por $L\mathring{G}(A) = \mathring{G}(A((t)))$ (resp. $L^+\mathring{G}(A) = \mathring{G}(A[[t]])$).

Su ind-esquema cociente $\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ se conoce como *Grassmanniana afín* de \mathring{G} , y sus A -puntos están dados por

$$\mathcal{G}r_{\mathring{G}}(A) = \mathring{G}(A((t))) / \mathring{G}(A[[t]]).$$

Éste es un ind-esquema formalmente suave y de *ind-tipo finito* (es decir, se puede escribir como un colímite de esquemas de tipo finito), y en este caso

es además reducido, debido a que \mathring{G} es reductivo (en general, es reducido si y sólo si $\text{Hom}(\mathring{G}, \mathbb{G}_m) = 0$ donde \mathbb{G}_m es el grupo multiplicativo, ver [BD2]).

Las álgebras de Lie asociadas a $L\mathring{G}$ y $L^+\mathring{G}$ son $\mathfrak{g}((t))$ y $\mathfrak{g}[[t]]$ respectivamente, que son las completaciones del álgebra de lazos Lie R y del álgebra de lazos positiva Lie R_- para $R = \text{Cur } \mathfrak{g}$, descritas en el Ejemplo 1.2.7. En particular, el espacio tangente Zariski de $\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ en la identidad es isomorfo a $\text{Cur } \mathfrak{g}$. Queremos definir una estructura de ind-esquema de vértice sobre $\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ que nos permita recuperar la estructura de álgebra de Lie conforme de $\text{Cur } \mathfrak{g}$ a partir de $\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ a través del Teorema 3.3.5. Su existencia será consecuencia de la estructura de factorización que posee la Grassmanniana de Beilinson-Drinfeld, cuya construcción repasamos ahora.

Existe una descripción bien conocida de la Grassmanniana afín en términos del espacio de moduli de \mathring{G} -fibrados sobre una curva algebraica suave X . Para un $x \in X$ fijo, sea \mathcal{O}_x la completación del anillo local en x y \mathcal{K}_x su cuerpo de fracciones. La elección de una coordenada local z en x produce isomorfismos $\mathcal{O}_x \simeq \mathbb{C}[[z]]$ y $\mathcal{K}_x \simeq \mathbb{C}((z))$. Ahora dado un \mathring{G} -fibrado \mathcal{P} sobre X , podemos elegir trivializaciones $\mathcal{P}|_{X \setminus \{x\}} \xrightarrow{\varphi} \mathring{G} \times (X \setminus \{x\})$ y $\mathcal{P}|_{D_x} \xrightarrow{s} \mathring{G} \times D_x$, donde $D_x = \text{Spec } \mathcal{O}_x$ es el disco en x . Para poder pegar \mathcal{P} a partir de estas trivializaciones, necesitamos los datos de pegamiento a lo largo de su intersección $D_x^* = \text{Spec } \mathcal{K}_x$, que se corresponden con un elemento $g \in \mathring{G}(\mathcal{K}_x)$. La efectividad de los datos de descenso (φ, s, g) se prueba en [BL2], y en consecuencia obtenemos una biyección entre $\mathring{G}(\mathcal{K}_x)$ y el espacio de moduli de todas las ternas de la forma $(\mathcal{P}, \varphi, s)$.

Como corolario directo obtenemos la siguiente descripción de $\mathcal{G}r_{\mathring{G},x} = \mathring{G}(\mathcal{K}_x)/\mathring{G}(\mathcal{O}_x)$.

Proposición 4.1.1. [BL1] $\mathcal{G}r_{\mathring{G},x}$ se puede identificar con el espacio de moduli formado por los pares (\mathcal{P}, φ) , donde \mathcal{P} es un \mathring{G} -fibrado y φ es una trivialización de \mathcal{P} restringida a $X \setminus \{x\}$.

Ahora la *Grassmanniana de Beilinson-Drinfeld* es la familia de ind-esquemas $\mathcal{G}r_{\mathring{G},X^I}$ sobre X^I para $I \in fSet$ cuyos S -puntos sobre cualquier esquema S están dados por el conjunto de todas las ternas $(\mathcal{P}, \{x_i\}_{i \in I}, \varphi)$, donde

- \mathcal{P} es un \mathring{G} -fibrado sobre $X \times S$;
- $x_i : S \rightarrow X$ es un S -punto de X para cada $i \in I$;
- φ es una trivialización de \mathcal{P} restringido a $(X \times S) \setminus \bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$, donde Γ_{x_i} denota el gráfico de x_i para cada $i \in I$.

En particular, los \mathbb{C} -puntos de $\mathcal{G}r_{\mathring{G},X^I}$ conforman el espacio de moduli

$$\left\{ \left(\mathcal{P} \in \text{Bun}_{\mathring{G}}(X), \{x_i\}_{i \in I} \in X^I, \varphi \text{ trivialización de } \mathcal{P}|_{X \setminus \{x_i\}_{i \in I}} \right) \right\}.$$

Esta familia resulta ser un espacio de factorización sobre X (ver [BD1, Sect. 5.3.12] or [FBZ, Sect. 20.3.5]). Por ejemplo, dados $x_1 \neq x_2 \in X$, tenemos un mapa

$$\mathcal{G}r_{\mathring{G}, X^2, \{x_1, x_2\}} \rightarrow \mathcal{G}r_{\mathring{G}, X, \{x_1\}} \times \mathcal{G}r_{\mathring{G}, X, \{x_2\}},$$

donde dado $(\mathcal{P}, \varphi) \in \mathcal{G}r_{\mathring{G}, X^2, \{x_1, x_2\}}$, restringimos tanto \mathcal{P} como φ a $X \setminus \{x_2\}$ y $X \setminus \{x_1\}$ respectivamente, y luego usamos la Proposición 4.1.1 para identificar $\mathcal{G}r_{\mathring{G}, X, \{x\}} = \mathcal{G}r_{\mathring{G}, X \setminus \{x_i\}, \{x\}}$ para $x_i \neq x$. Este mapa es un isomorfismo, ya que si partimos de $(\mathcal{P}_i, \varphi_i) \in \mathcal{G}r_{\mathring{G}, X, \{x_i\}}$ para $i = 1, 2$ podemos pegar \mathcal{P}_1 y \mathcal{P}_2 y obtener un solo \mathring{G} -fibrado \mathcal{P} a lo largo de $X \setminus \{x_1, x_2\}$, donde ambos están trivializados.

Este espacio de factorización tiene una sección unidad, dada por el \mathring{G} -fibrado trivial sobre X^I para cada $I \in fSet$, y esto convierte a $\{\mathcal{G}r_{\mathring{G}, X^I}\}$ en un monoide de factorización sobre X .

Si volvemos al contexto en el cual $X = \mathbb{A}^1$, tenemos que $\mathcal{G}r_{\mathring{G}, \mathbb{A}^1}$ es un monoide OPE por el Teorema 3.2.4. Además, es equivariante por traslaciones y su fibra en cero $\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ es un ind-esquema de vértice debido a la Proposición 3.3.4. Dado que la linealización de la Grassmanniana de Beilinson-Drinfeld da lugar por [FBZ, Thm. 20.4.3] al álgebra de factorización asociada con el *álgebra quiral afín* en nivel cero, que en el caso \mathbb{G}_a -equivariante sobre \mathbb{A}^1 se corresponde con el álgebra de vértice afín $V^0(\mathring{\mathfrak{g}})$, llegamos al siguiente resultado.

Proposición 4.1.2. *$\mathcal{G}r_{\mathring{G}}$ es un ind-esquema de vértice tal que su espacio tangente es el álgebra conforme current $\text{Cur } \mathring{\mathfrak{g}}$ y su linealización es el álgebra de vértice afín $V^0(\mathring{\mathfrak{g}})$ en nivel cero.*

4.2 | El ind-esquema de vértice de Virasoro

Ahora consideremos $R = \text{Vir}$. En este caso, las completaciones de Lie R y Lie R_- son las álgebras de Lie $\text{Der } \mathbb{C}((t)) = \mathbb{C}((t))\partial_t$ y $\text{Der } \mathbb{C}[[t]] = \mathbb{C}[[t]]\partial_t$ respectivamente. Éstas son las álgebras de Lie correspondientes a los ind-grupos $\text{Aut } \mathcal{K}$ y $\underline{\text{Aut}} \mathcal{O}$ (ver [FBZ, Sect. 17.3.4]) cuyos A -puntos para $A \in \text{Alg}_{\mathbb{C}}$ están dados respectivamente por

$$\text{Aut } A((t)) = \left\{ a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n t^{n+1} \in A((t)) \mid a_0 \in A^\times, a_n \in \mathfrak{N}(A) \text{ for } n < 0 \right\},$$

$$\underline{\text{Aut}} A[[t]] = \left\{ a(t) = \sum_{n \geq -1} a_n t^{n+1} \in A[[t]] \mid a_0 \in A^\times, a_{-1} \in \mathfrak{N}(A) \right\},$$

donde $\mathfrak{N}(A)$ es el nilradical de A y donde identificamos $a(t)$ con su automorfismo inducido $f(t) \mapsto a(t)f(t)$. Notemos que $\text{Aut } \mathbb{C}((t)) = \underline{\text{Aut}} \mathbb{C}[[t]]$, lo cual

resalta la necesidad de considerar puntos sobre álgebras con nilpotentes para poder ver las “direcciones nilpotentes” que dan lugar a los vectores tangentes $L(n)$ para $n < -1$ en $\text{Der } \mathbb{C}((t)) / \text{Der } \mathbb{C}[[t]]$.

Esto nos lleva a considerar el ind-esquema cociente

$$\text{Vir} := \text{Aut } \mathcal{K} / \underline{\text{Aut}} \mathcal{O}$$

como nuestro candidato para ser un ind-esquema de vértice con Vir como su álgebra de Lie conforme asociada.

De manera similar al caso de la Grassmanniana afín, existe una interpretación de Vir en términos de espacios de moduli. Consideremos el espacio de moduli $\mathfrak{M}_{g,1}$ de curvas punteadas (X, x) , donde X es una curva proyectiva suave de género g y $x \in X$, y sea $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,1}$ el espacio de moduli de ternas (X, x, z) donde $(X, x) \in \mathfrak{M}_{g,1}$ y z es una coordenada formal en x para la curva X . La proyección $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,1} \rightarrow \mathfrak{M}_{g,1}$ es un $\text{Aut } \mathcal{O}$ -fibrado, donde $\text{Aut } \mathcal{O}$ es el esquema de grupo cuyos A -puntos sobre $A \in \text{Alg}_{\mathbb{C}}$ están dados por

$$\text{Aut } A[[t]] = \left\{ a(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} a_n t^{n+1} \in A[[t]] \mid a_0 \in A^\times \right\}.$$

Su álgebra de Lie es $\text{Der}_0 \mathbb{C}[[t]] = t\mathbb{C}[[t]]\partial_t$, que está generada topológicamente por los $L(n)$ con $n \in \mathbb{Z}_+$. Tenemos inclusiones

$$\text{Aut } \mathcal{O} \subseteq \underline{\text{Aut}} \mathcal{O} \subseteq \text{Aut } \mathcal{K} \quad \text{y} \quad \text{Der}_0 \mathbb{C}[[t]] \subseteq \text{Der } \mathbb{C}[[t]] \subseteq \text{Der } \mathbb{C}((t)).$$

La acción de $\text{Aut } \mathcal{O}$ sobre $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,1}$ se puede extender a una acción de $\text{Aut } \mathcal{K}$. Heurísticamente, dado $(X, x, z) \in \widehat{\mathfrak{M}}_{g,1}$ podemos ver a X como la curva obtenida al pegar $X \setminus \{x\}$ y $D_x = \text{Spec } \mathcal{O}_x$ a lo largo del disco pinchado $D_x^* = \text{Spec } \mathcal{K}_x$. Pero dado $\rho \in \text{Aut } \mathcal{K}$, también podríamos pegar $X \setminus \{x\}$ y D_x de una manera diferente, torciendo por ρ . Este pegamiento produce un $(X', x', z) \in \widehat{\mathfrak{M}}_{g,1}$ diferente, que tomamos como la definición de la acción de ρ en (X, x, z) . En otras palabras, podríamos decir que la acción del vector $L(-1)$ se encarga de mover el punto x infinitesimalmente dentro del disco D_x , y los vectores $L(n)$ con $n \leq -2$ actúan cambiando la estructura compleja de X alrededor de x .

Más concretamente, tenemos el siguiente resultado, comúnmente conocido como la *uniformización de Virasoro* del espacio de moduli de curvas, cuya demostración se puede encontrar por ejemplo en [FBZ, Sect. 17.3.4].

Proposición 4.2.1. *Existe una acción transitiva de $\text{Aut } \mathcal{K}$ sobre $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,1}$ que es compatible con la acción de $\text{Aut } \mathcal{O}$ a lo largo de las fibras de la proyección $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,1} \rightarrow \mathfrak{M}_{g,1}$.*

El escenario anterior se puede generalizar a cualquier número de puntos marcados. Definimos $\mathfrak{M}_{g,n}$ para $n \geq 2$ como el espacio de moduli de curvas

proyectivas suaves de género g con n puntos marcados, y $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,n}$ como el espacio de moduli de colecciones $(X, \{x_i, z_i\}_{i=1}^n)$ tales que $(X, \{x_i\}_{i=1}^n) \in \mathfrak{M}_{g,n}$ y z_i es una coordenada local en x_i para la curva X para cada $1 \leq i \leq n$. Hay una proyección natural $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,n} \rightarrow \mathfrak{M}_{g,n}$. Tenemos una generalización de la Proposición 4.2.1 válida en este caso: existe una acción transitiva de $(\text{Der } \mathcal{K})^n$ sobre $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,n}$ compatible con la acción de $(\text{Aut } \mathcal{O})^n$ a lo largo de las fibras de la proyección $\widehat{\mathfrak{M}}_{g,n} \rightarrow \mathfrak{M}_{g,n}$.

Ahora definiremos el monoide de factorización asociado a estos espacios de moduli, siguiendo la exposición de [Y]. Para cualquier $I \in fSet$ y una curva suave X fija, definimos $\mathcal{G}_{X,I}$ como el ind-esquema sobre X^I cuyos S -puntos sobre cualquier esquema S son todos aquellos $(\mathcal{X}, \{x_i\}_{i \in I}, \{s_i\}_{i \in I}, \varphi)$ tales que

- $\mathcal{X} \rightarrow S$ es una familia de curvas proyectivas suaves sobre S ;
- $x_i : S \rightarrow X$ es un S -punto de X para cada $i \in I$;
- $s_i : S \rightarrow \mathcal{X}$ es una sección de $\mathcal{X} \rightarrow S$ para cada $i \in I$;
- $\varphi : \mathcal{X} \setminus \bigcup_{i \in I} \Gamma_{s_i} \rightarrow (X \times S) \setminus \bigcup_{i \in I} \Gamma_{x_i}$ es un isomorfismo, donde Γ_s denota el gráfico de $s : S \rightarrow X$.

En particular, los conjuntos de \mathbb{C} -puntos de los ind-esquemas $\mathcal{G}_{X,I}$ están formados por todos los $(X', \{x_i\}_{i \in I}, \{x'_i\}_{i \in I}, \varphi)$ donde X' es una curva proyectiva suave, $\{x_i\}_{i \in I}$ y $\{x'_i\}_{i \in I}$ son conjuntos finitos de puntos de X y X' respectivamente, y

$$\varphi : X \setminus \{x_i\}_{i \in I} \xrightarrow{\cong} X' \setminus \{x'_i\}_{i \in I}.$$

Observemos que en realidad no existen \mathbb{C} -puntos en $\mathcal{G}_{X,I}$ sobre $\{x_i\}_{i \in I}$ que no sean la propia curva marcada $(X, \{x_i\}_{i \in I})$, ya que cualquier isomorfismo que salga de la curva abierta $X \setminus \{x_i\}_{i \in I}$ se extiende canónicamente a todo X . Esto no debería sorprendernos dada nuestra observación anterior de que $\text{Vir} = \text{Aut } \mathcal{K} / \text{Aut } \mathcal{O}$ no tiene \mathbb{C} -puntos no triviales, y confirma la importancia de considerar puntos sobre esquemas no reducidos.

La familia de ind-esquemas $\{\mathcal{G}_{X,I}\}$ forma un espacio de factorización como consecuencia del teorema de uniformización de Virasoro (ver [FBZ, Sect. 20.4.13]). Además, es un monoide de factorización con las secciones unidad “triviales” dadas por $\{x_i\}_{i \in I} \mapsto (X, \{x_i\}_{i \in I}, \{x_i\}_{i \in I}, \text{id})$.

Su linealización en esta unidad da lugar al álgebra de factorización asociada con el *álgebra quiral de Virasoro* con carga central cero, que en el caso \mathbb{G}_a -equivariante sobre $X = \mathbb{A}^1$ se corresponde con el álgebra de vértice de Virasoro Vir_0 . Por lo tanto, el Teorema 3.3.5 aplicado a este contexto nos da el siguiente resultado.

Proposición 4.2.2. *Vir es un ind-esquema de vértice tal que su espacio tangente es el álgebra conforme de Virasoro y su linealización es el álgebra de vértice de Virasoro de carga central cero.*

4.3 | El caso nilpotente

En la teoría de Lie en dimensión finita, para cualquier álgebra de Lie \mathfrak{g} de dimensión n se puede demostrar que su ley de grupo formal asociada es en realidad convergente en un entorno abierto de cero en \mathbb{C}^n , debido al hecho de que se la puede calcular usando los corchetes de \mathfrak{g} a través de la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$F(X, Y) = \log(\exp(X) \exp(Y)) = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \dots$$

En particular, cuando \mathfrak{g} es nilpotente, esta fórmula se convierte en una suma finita y, por lo tanto, define una estructura de grupo de Lie en todo el espacio \mathbb{C}^n , cuyo álgebra de Lie tangente en cero es isomorfa a \mathfrak{g} .

En esta sección veremos que las mismas ideas se pueden aplicar a las álgebras de Lie conformes nilpotentes de dimensión contable: sus leyes de vértice formales asociadas satisfacen ciertas condiciones de finitud que implican que se las puede usar para definir una estructura de ind-esquema de vértice en el espacio afín infinito \mathbb{A}^∞ cuya álgebra de Lie conforme tangente en cero es isomorfa a la dada.

Primero introduzcamos la noción de nilpotencia para álgebras de Lie conformes.

Definición 4.3.1. ([DK]) Sea R un álgebra de Lie conforme. Dados I, J subespacios vectoriales de R , su corchete $[I \cdot J]$ es el subespacio vectorial de R generado por todos los productos $a_{(n)}b$ con $a \in I$, $b \in J$ y $n \in \mathbb{Z}_+$. Decimos que I es un *ideal* en R si $[I \cdot R] \subseteq I$.

Notemos que por la antisimetría del λ -corchete en R , cualquier ideal I de R también satisface que $[R \cdot I] \subseteq I$. Además, si I y J son ideales en R , la identidad de Jacobi (1.2.7) implica que $[I \cdot J]$ es nuevamente un ideal en R .

Definición 4.3.2. ([DK]) La *serie central descendiente* de R se define recursivamente por $R^1 = R$ y $R^{j+1} = [R \cdot R^j]$ para todo $j \geq 1$. R es un *álgebra de Lie conforme nilpotente* si $R^N = 0$ para algún $N \geq 1$.

Usando la identidad de Jacobi para el λ -corchete, es fácil probar que

$$[R^j \cdot R^{j'}] \subseteq R^{j+j'} \quad \forall j, j' \geq 1. \quad (4.3.1)$$

Ahora sea R un álgebra de Lie conforme nilpotente con grado de nilpotencia $N = \max \{n : R^n \neq 0\} \in \mathbb{N}$. Asumiremos $\dim R = \aleph_0$ a lo largo de esta sección para evitar problemas de tamaño. Para cualquier $a \in R$, definimos

$$\Theta(a) = \max\{j \in \mathbb{N} : a \in R^j\} \in \{1, \dots, N\} \cup \{\infty\}.$$

Es sencillo comprobar las siguientes propiedades del símbolo Θ .

Lema 4.3.3.

- (I) $\Theta(a) = \infty$ si y sólo si $a = 0$.
- (II) $\Theta(Ta) \geq \Theta(a)$ para todo $a \in R$.
- (III) $\Theta(a_{(n)}b) \geq \Theta(a) + \Theta(b)$ para todos $a, b \in R$ y $n \in \mathbb{Z}_+$.
- (IV) $\Theta\left(\sum_{k=1}^K c_k a_k\right) \geq \min_{1 \leq k \leq K} \Theta(a_k)$ para todos $a_1, \dots, a_K \in R$, $c_1, \dots, c_K \in \mathbb{C}$.
- (V) $\Theta\left(\int_{-T}^0 [a_\lambda b] d\lambda\right) \geq \Theta(a) + \Theta(b)$ para todos $a, b \in R$.

Para cada $1 \leq j \leq N$, sea W_j un subespacio complementario de R^{j+1} en R^j , y elijamos una base \mathcal{B}_j en cada W_j . Entonces $\mathcal{B} = \bigcup_{j=1}^N \mathcal{B}_j$ es una base de R . Como $\dim R = \aleph_0$, podemos elegir una biyección $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{B}$, $\ell \mapsto e_\ell$, y ver a $\mathcal{B} = \{e_\ell : \ell \in \mathbb{N}\}$ como una base ordenada de R . Sea $\tilde{\mathcal{B}}$ su base PBW asociada en $\mathcal{U}(R)$. Para cualquier $e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_k} \in \tilde{\mathcal{B}}$, definimos

$$\Theta(e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_t}) = \Theta(e_{\ell_1}) + \cdots + \Theta(e_{\ell_t}).$$

El siguiente resultado técnico motiva el uso de la notación Θ .

Lema 4.3.4. *Sea R un álgebra de Lie conforme y $\pi : \mathcal{U}(R) \rightarrow R$ la proyección canónica. Entonces*

$$\Theta\left(\pi\left(u_{(n_1)}^1 \cdots u_{(n_{l-1})}^{l-1} u^l\right)\right) \geq \sum_{i=1}^l \Theta(u^i) \quad (4.3.2)$$

para todos $u^1, \dots, u^l \in \tilde{\mathcal{B}}$, $n_1, \dots, n_{l-1} \geq -1$ y $l \geq 2$.

Demostración. Consideremos la graduación usual en $\mathcal{U}(R)$, donde el grado de $u = e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_k} \in \tilde{\mathcal{B}}$ es su longitud k , denotada por $|u|$. Sea $\mathbf{S} = \bigcup_{l \geq 2} \mathbb{N}^l$. Para cada $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_l) \in \mathbf{S}$, sea $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ la proposición “(4.3.2) vale para todos $u^1, \dots, u^l \in \tilde{\mathcal{B}}$, $n_1, \dots, n_{l-1} \geq -1$ y $l \geq 2$ tales que $|u^j| = s_j$ para todo $1 \leq j \leq l$ ”. Podemos considerar la filtración $\mathbf{S} = \bigcup_{t \geq 2} \mathbf{S}_t$, donde \mathbf{S}_t es el subconjunto finito de \mathbf{S} formado por todos los (s_1, \dots, s_l) tales que $s_1 + \cdots + s_l = t$. Probaremos que $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ se cumple para todo $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_t$ y para todo $t \geq 2$ por inducción en t .

Como $\mathbf{S}_2 = \{(1, 1)\}$, el caso inicial consiste en probar que

$$\Theta(\pi(e_\ell e_{\ell'})) \geq \Theta(e_\ell) + \Theta(e_{\ell'}) \quad (4.3.3)$$

para todos $e_\ell, e_{\ell'} \in \mathcal{B}$ y todo $n \geq -1$. Si $n \in \mathbb{Z}_+$, esto se sigue de (4.3.1), pero si $n = -1$ necesitamos considerar dos casos: si $\ell \leq \ell'$, (4.3.3) es trivial

porque su lado izquierdo es ∞ , pero si $\ell > \ell'$, debemos calcular

$$\begin{aligned}\Theta(\pi(: e_\ell e_{\ell'} :)) &= \Theta\left(\pi(: e_{\ell'} e_\ell :) + \pi\left(\int_{-T}^0 [e_\ell \lambda e_{\ell'}] d\lambda\right)\right) \\ &= \Theta\left(\int_{-T}^0 [e_\ell \lambda e_{\ell'}] d\lambda\right) \\ &\geq \Theta(e_\ell) + \Theta(e_{\ell'}).\end{aligned}$$

Antes del paso inductivo, ordenemos lexicográficamente cada \mathbf{S}_t para un t fijo, de modo que $\mathbf{s} < \mathbf{s}'$ en \mathbf{S}_t si y sólo si

$$(s_1 < s'_1) \vee (s_1 = s'_1 \wedge s_2 < s'_2) \vee \dots$$

Es claro que el elemento minimal de cada \mathbf{S}_t es el elemento $(1, \dots, 1)$ de longitud t , que denotaremos como $1^{\otimes t}$.

Supongamos ahora que $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ se cumple para todo $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_t$, para algún $t \geq 2$. Probaremos $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ para todo $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_{t+1}$ usando inducción sobre el índice \mathbf{s} ordenado lexicográficamente. Para hacer eso, debemos comenzar demostrando $\mathcal{P}(1^{\otimes(t+1)})$. Es decir, debemos probar que para cualquier elección $(n_1, \dots, n_t) \in (\mathbb{Z}_{\geq -1})^t$, la proposición $\mathcal{Q}(n_1, \dots, n_t)$ dada por

$$\Theta\left(\pi\left(e_{\ell_1(n_1)} \cdots e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}}\right)\right) \geq \sum_{j=1}^{t+1} \Theta(e_{\ell_j}) \quad \forall e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_{t+1}} \in \mathcal{B} \quad (4.3.4)$$

vale. Dividiremos la prueba en tres pasos.

Primer paso: Elijamos $(n_1, \dots, n_t) \in (\mathbb{Z}_{\geq -1})^t$ tal que $n_t \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}} \in R$, y tenemos dos posibilidades: o bien $e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}} = 0$, en cuyo caso la proposición es trivial, o bien para algún $j_0 \in \{1, \dots, N\}$ tenemos que $\Theta(e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}}) = j_0$. En ese caso vale que $e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}} \in R^{j_0}$, pero debido a la forma en que construimos la base \mathcal{B} de R , resulta que $\bigcup_{j_0 \leq h \leq N} \mathcal{B}_h$ es un

base para $R^{j_0} = \bigoplus_{j_0 \leq h \leq N} W^h$, así que podemos escribir $e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}} = \sum_{\ell \in I_0} c_\ell e_\ell$

para algún conjunto finito I_0 , donde $\{e_\ell : \ell \in I_0\} \subseteq \bigcup_{j_0 \leq h \leq N} \mathcal{B}_h$. En particular $e_\ell \in R^{j_0}$ para todo $\ell \in I_0$, lo que nos dice que $\Theta(e_\ell) \geq j_0 \geq \Theta(e_{\ell_t}) + \Theta(e_{\ell_{t+1}})$.

Esto nos permite usar la hipótesis inductiva $\mathcal{P}(1^{\otimes t})$ para calcular

$$\begin{aligned} \Theta(\pi(e_{\ell_1(n_1)} \cdots e_{\ell_t(n_t)} e_{\ell_{t+1}})) &= \Theta\left(\sum_{\ell \in I_0} c_\ell \pi(e_{\ell_1(n_1)} \cdots e_{\ell_{t-1}(n_{t-1})} e_\ell)\right) \\ &\geq \min_{\ell \in I_0} \Theta(\pi(e_{\ell_1(n_1)} \cdots e_{\ell_{t-1}(n_{t-1})} e_\ell)) \\ &\geq \min_{\ell \in I_0} \sum_{j=1}^{t-1} \Theta(e_{\ell_j}) + \Theta(e_\ell) \\ &\geq \sum_{j=1}^{t-1} \Theta(e_{\ell_j}) + \Theta(e_{\ell_t}) + \Theta(e_{\ell_{t+1}}). \end{aligned}$$

Segundo paso: Supongamos que para un $1 \leq j \leq t-1$ fijo, $\mathcal{Q}(n'_1, \dots, n'_t)$ se cumple para cualquier elección de índices tal que $n'_{j+1} \in \mathbb{Z}_+$ y $n'_i = -1$ para todo $j+2 \leq i \leq t$. Ahora elijamos $(n_1, \dots, n_t) \in (\mathbb{Z}_{\geq -1})^t$ de forma tal que $n_j \in \mathbb{Z}_+$ y $n_i = -1$ para todo $j+1 \leq i \leq t$ y probemos $\mathcal{Q}(n_1, \dots, n_t)$. Para cualquier $e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_{t+1}} \in \mathcal{B}$, podemos usar la fórmula de Wick a izquierda (1.2.8) para escribir

$$\begin{aligned} &e_{\ell_1(n_1)} \cdots e_{\ell_j(n_j)} : e_{\ell_{j+1}} e_{\ell_{j+2}} \cdots e_{\ell_{t+1}} : \\ &= e_{\ell_1(n_1)} \cdots : (e_{\ell_j(n_j)} e_{\ell_{j+1}}) : e_{\ell_{j+2}} \cdots e_{\ell_{t+1}} :: \\ &\quad + e_{\ell_1(n_1)} \cdots : e_{\ell_{j+1}} (e_{\ell_j(n_j)} : e_{\ell_{j+2}} \cdots e_{\ell_{t+1}} :) : \\ &\quad + \sum_{m=0}^{n_j-1} \binom{n_j}{m} e_{\ell_1(n_1)} \cdots ((e_{\ell_j(m)} e_{\ell_{j+1}})_{(n_j-1-m)} : e_{\ell_{j+2}} \cdots e_{\ell_{t+1}} :). \end{aligned}$$

Para cada término del lado derecho podemos usar o bien $\mathcal{P}(1^{\otimes t})$ o bien $\mathcal{Q}(n'_1, \dots, n'_t)$ para verificar al igual que en el primer paso que (4.3.4) se cumple en este caso.

Tercer paso: Los primeros dos pasos nos permiten comprobar que la proposición $\mathcal{Q}(n_1, \dots, n_t)$ vale para cualquier (n_1, \dots, n_t) tal que $n_i \in \mathbb{Z}_+$ por algún i . De esta manera, sólo queda comprobar $\mathcal{Q}(-1, \dots, -1)$, es decir

$$\Theta(\pi(: e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_{t+1}} :)) \geq \sum_{j=1}^{t+1} \Theta(e_{\ell_j}) \quad \forall e_{\ell_1}, \dots, e_{\ell_{t+1}} \in \mathcal{B}. \quad (4.3.5)$$

Lo haremos por inducción sobre el número de inversiones de $: e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_{t+1}} :$, definido en [DSK, Lema 5.1] como

$$d(: e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_{t+1}} :) = |\{(p, q) : 1 \leq p \leq q \leq t+1 \wedge \ell_p > \ell_q\}|.$$

Si $d = 0$, significa que $: e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_{t+1}} : \in \tilde{\mathcal{B}}$, pero entonces (4.3.5) se cumple trivialmente ya que su lado izquierdo es ∞ . Por otro lado, si $d \geq 1$, existe

$p \in \{1, \dots, t\}$ tal que $\ell_p > \ell_{p+1}$, luego usando la antisimetría (1.2.14) del producto normalmente ordenado podemos escribir

$$\begin{aligned} : e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_p} e_{\ell_{p+1}} \cdots e_{\ell_{t+1}} : &= : e_{\ell_1} \cdots e_{\ell_{p+1}} e_{\ell_p} \cdots e_{\ell_{t+1}} : \\ &+ : e_{\ell_1} \cdots \left(\int_{-T}^0 [e_{\ell_p \lambda} e_{\ell_{p+1}}] d\lambda \right) \cdots e_{\ell_{t+1}} : . \end{aligned}$$

Dado que el primer término del lado derecho tiene $d - 1$ inversiones y el segundo tiene longitud t , las respectivas hipótesis inductivas nos dan la validez de (4.3.5).

Esto finaliza la demostración de $\mathcal{P}(1^{\otimes(t+1)})$. Ahora necesitamos hacer el paso inductivo para la inducción en $\mathbf{s} \in \mathbf{S}_{t+1}$. Es decir, debemos probar $\mathcal{P}(\mathbf{s})$ para un $\mathbf{s} > 1^{\otimes(t+1)}$ fijo, suponiendo que $\mathcal{P}(\mathbf{s}')$ vale para todos los $\mathbf{s}' < \mathbf{s}$ en \mathbf{S}_{t+1} .

Como $\mathbf{s} \neq 1^{\otimes(t+1)}$, existe j tal que $s_j \geq 2$. Ahora para cualesquiera u^1, \dots, u^{t+1} en $\tilde{\mathcal{B}}$ con $|u^i| = s_i$ para todo $1 \leq i \leq t+1$ y cualesquiera $n_1, \dots, n_t \geq -1$, podemos escribir $u^j = : bc :$, con $b \in \mathcal{B}$ y $c \in \tilde{\mathcal{B}}$, y $D = u_{(n_{j+1})}^{j+1} \cdots u_{(n_t)}^t u^t$. Ahora consideramos dos posibilidades.

Si $n_j = -1$, podemos demostrar (4.3.2) a través de la fórmula de cuasi-asociatividad (1.2.10), es decir

$$: bc : D := : b : cD : + \sum_{m=0}^{\infty} (: (T^{(m+1)}b)(c_{(m)}D) : + : (T^{(m+1)}c)(b_{(m)}D) :).$$

Por otro lado, para abordar el caso $n_j \in \mathbb{Z}_+$ podemos usar la fórmula de Wick a derecha (1.2.9) de la siguiente manera

$$[: bc :_{\lambda} D] = : (e^{T\partial_{\lambda}} b)[c_{\lambda} D] : + : (e^{T\partial_{\lambda}} c)[b_{\lambda} D] : + \int_0^{\lambda} [c_{\mu}[b_{\lambda-\mu} D]] d\mu.$$

En ambos casos la verificación de que (4.3.2) se cumple usando la hipótesis inductiva $\mathcal{P}(\mathbf{s}')$ es directa, lo cual completa la prueba. \square

Gracias al lema anterior llegamos al siguiente resultado.

Corolario 4.3.5. *Si R es un álgebra de Lie conforme nilpotente con $R^{N+1} = 0$, entonces $\pi(u_{(n)}v) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y para todos $u, v \in \tilde{\mathcal{B}}$ tales que $|u| + |v| > N$.*

Demostración. El caso $l = 2$ del Lema 4.3.4 nos permite afirmar que para cualesquiera $u, v \in \tilde{\mathcal{B}}$ y $n \in \mathbb{Z}$ vale que $\Theta(\pi(u_{(n)}v)) \geq \Theta(u) + \Theta(v)$. Si adicionalmente u, v satisfacen $|u| + |v| > N$, podemos calcular

$$\Theta(\pi(u_{(n)}v)) \geq \Theta(u) + \Theta(v) \geq |u| + |v| > N,$$

lo cual nos obliga a que $\pi(u_{(n)}v)$ sea cero. \square

Ahora usaremos este resultado para definir una estructura de ind-esquema de vértice en el ind-esquema \mathbb{A}^∞ con unidad $0 \in \mathbb{A}^\infty$. Por lo tanto, necesitamos definir un morfismo de ind-esquemas

$$\mathfrak{z} : \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{A}^\infty \times \text{Spec } \mathbb{C}((z)) \rightarrow \mathbb{A}^\infty. \quad (4.3.6)$$

Recordemos que un ind-esquema G se puede escribir como un colímite $\varinjlim_m G^{(m)}$ de un sistema dirigido $(G^{(m)}, i_{mm'}^G)$, donde podemos tomar el conjunto de índices como \mathbb{N} (o cualquier otro conjunto de cardinalidad \aleph_0), $G^{(m)}$ son esquemas cuasicompactos para todo $m \in \mathbb{N}$ e $i_{mm'} : G^{(m)} \rightarrow G^{(m')}$ son inclusiones cerradas para $m < m'$. Por ejemplo, \mathbb{A}^∞ es el colímite del sistema directo $(\mathbb{A}^m, i_{mm'})$, donde las inclusiones $i_{mm'} : \mathbb{A}^m \rightarrow \mathbb{A}^{m'}$ están determinadas por las proyecciones canónicas $i_{mm'}^\# : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m'}] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m]$ para todos los $m < m'$ en \mathbb{N} .

Un morfismo de ind-esquemas $f : G \rightarrow \tilde{G}$, donde G y \tilde{G} son los colímites de los sistemas dirigidos $(G^{(m)}, i_{mm'}^G)$ y $(\tilde{G}^{(\ell)}, i_{\ell\ell'}^{\tilde{G}})$ respectivamente, es un elemento del conjunto

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{IndSch}} \left(\varinjlim_m G^{(m)}, \varinjlim_\ell \tilde{G}^{(\ell)} \right) &\simeq \varprojlim_m \text{Hom}_{\text{IndSch}} \left(G^{(m)}, \varinjlim_\ell \tilde{G}^{(\ell)} \right) \\ &= \varprojlim_m \varinjlim_\ell \text{Hom}_{\text{Sch}} \left(G^{(m)}, \tilde{G}^{(\ell)} \right). \end{aligned}$$

Aquí, el primer isomorfismo es una propiedad general de los límites, mientras que la segunda igualdad es la definición de los morfismos en IndSch . La motivación para esta definición es la idea de que cuando vemos a los esquemas como ind-esquemas a través del funtor $\text{Sch} \hookrightarrow \text{IndSch}$, queremos que sean objetos “pequeños” de la categoría IndSch , y una forma de formalizar esto es pidiéndoles que sean objetos *compactos* en IndSch , donde un objeto compacto X en una categoría \mathcal{C} es tal que el funtor $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -)$ preserva colímites dirigidos (ver [Lu]).

Ahora un objeto $f \in \varprojlim_m \text{Hom}_{\text{IndSch}}(G^{(m)}, \tilde{G})$ es lo mismo que una familia $\{f_m \in \text{Hom}_{\text{IndSch}}(G^{(m)}, \tilde{G})\}_{m \in \mathbb{N}}$ tal que

$$f_m = f_{m'} i_{mm'}^G \quad \forall m < m'.$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, cada morfismo $f_m \in \varinjlim_\ell \text{Hom}_{\text{Sch}}(G^{(m)}, \tilde{G}^{(\ell)})$ es lo mismo que un morfismo de esquemas $f_m : G^{(m)} \rightarrow \tilde{G}^{(\ell(m))}$ para algún $\ell(m) \in \mathbb{N}$, ya que el colímite es tomado en la categoría Set , donde es simplemente una unión creciente. Notemos que como para cada m podemos reemplazar $\ell(m)$ por cualquier $\ell \geq \ell(m)$ en \mathbb{N} , podemos suponer que la sucesión $\{\ell(m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ es creciente.

Por lo tanto, un morfismo de ind-esquemas $f : G \rightarrow \tilde{G}$ es simplemente una colección de morfismos de esquemas $\{f_m : G^{(m)} \rightarrow \tilde{G}^{(\ell(m))}\}_{m \in \mathbb{N}}$ que hace que el siguiente diagrama conmute para todos los $m < m'$.

$$\begin{array}{ccc} G^{(m)} & \xrightarrow{f_m} & \tilde{G}^{(\ell(m))} \\ i_{mm'}^G \downarrow & & \downarrow i_{\ell(m)\ell(m')}^{\tilde{G}} \\ G^{(m')} & \xrightarrow{f_{m'}} & \tilde{G}^{(\ell(m'))} \end{array}$$

En particular, un morfismo de ind-esquemas de $G = \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{A}^\infty \times \text{Spec } \mathbb{C}((z)) = \varinjlim_m \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^m \times \text{Spec } \mathbb{C}((z))$ en $\tilde{G} = \mathbb{A}^\infty = \varinjlim_\ell \mathbb{A}^\ell$ se puede identificar con una sucesión de morfismos $f_m^\# : \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{\ell(m)}] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]((z))$ de álgebras para todo $m \in \mathbb{N}$ tales que el siguiente diagrama conmuta para todos los $m < m'$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{\ell(m')}] & \xrightarrow{f_{m'}^\#} & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{m'}, y_1, \dots, y_{m'}]((z)) \\ i_{mm'}^\# \downarrow & & \downarrow i_{\ell(m)\ell(m')}^\# \otimes id_{\mathbb{C}((z))} \\ \mathbb{C}[x_1, \dots, x_{\ell(m)}] & \xrightarrow{f_m^\#} & \mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]((z)) \end{array} \quad (4.3.7)$$

Usando la notación definida en la Sección 2.4, en $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]$ tenemos una base dada por los elementos $X^{\mathbf{k}}Y^{\mathbf{k}'} = x_1^{k_1} \cdots x_m^{k_m} y_1^{k'_1} \cdots y_m^{k'_m}$ para todos los $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ pertenecientes al subconjunto \mathbf{K}_m de $\mathbf{K}^2 = \mathbb{Z}_+^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{Z}_+^{(\mathbb{N})}$ formado por todos los pares de sucesiones tales que $\text{supp } \mathbf{k} \cup \text{supp } \mathbf{k}' \subseteq \{1, \dots, m\}$. Así, la sucesión $\{f_m^\#\}_{m \in \mathbb{N}}$ está determinada por una familia de distribuciones formales en z dada por

$$F_{m\ell}(z)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = f_m^\#(x_\ell) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) X^{\mathbf{k}}Y^{\mathbf{k}'} z^{-n-1},$$

donde $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$, $1 \leq \ell \leq \ell(m)$ y $m \in \mathbb{N}$. Observemos que $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) = 0$ siempre que $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \notin \mathbf{K}_m$. Extendamos esta notación fijando $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2$, $\ell > \ell(m)$ y $m \in \mathbb{N}$. Ahora la conmutatividad del diagrama (4.3.7) es equivalente a

$$c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m') = c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \forall \ell \in \mathbb{N}, \forall (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m, \forall m < m'. \quad (4.3.8)$$

Ahora estamos listos para enunciar y probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.6. *Sea R un álgebra de Lie conforme nilpotente de dimensión contable, y sea $F(z)(X, Y)$ sea su ley de vértice formal asociada, dada por la sucesión de distribuciones formales en z*

$$F_\ell(z)(X, Y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}}Y^{\mathbf{k}'} z^{-n-1}$$

para todo $\ell \in \mathbb{N}$. Entonces para cada $\ell \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$ tenemos que la suma parcial

$$F_{m\ell}(z)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}}Y^{\mathbf{k}'} z^{-n-1} \quad (4.3.9)$$

es un elemento bien definido de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]((z))$ y sus coeficientes satisfacen (4.3.8), lo que nos permite definir un morfismo de ind-esquemas $f : \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{A}^\infty \times \text{Spec } \mathbb{C}((z)) \rightarrow \mathbb{A}^\infty$ que determina una estructura de ind-esquema de vértice en $G = \mathbb{A}^\infty$ con unidad $0 \in \mathbb{A}^\infty$ tal que su espacio tangente Zariski en la identidad es isomorfo a R .

Demostración. Para cada $\ell \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$, sea $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m)$ el coeficiente de $X^{\mathbf{k}}Y^{\mathbf{k}'}z^{-n-1}$ en (4.3.9), es decir

$$c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell}(m) = \begin{cases} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} & \text{if } (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m, \\ 0 & \text{if } (\mathbf{k}, \mathbf{k}') \notin \mathbf{K}_m. \end{cases}$$

Puesto que $\mathbf{K}_m \subseteq \mathbf{K}_{m'}$ para todos $m < m'$, estos coeficientes satisfacen (4.3.8).

Fijemos ahora $\ell \in \mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$. Para probar que (4.3.9) pertenece a $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]((z))$, primero demostraremos que vive en el espacio $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m][[z, z^{-1}]]$. En otras palabras, necesitamos probar que para cada $n \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'} \quad (4.3.10)$$

es una suma finita.

Sea $\{e_\ell\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ la base de R utilizada en el lema 4.3.4. Recordemos que en la sección 2.4 vimos que su base PBW asociada en $V = \mathcal{U}(R)$ se puede indexar como $\{e_{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}}$, y su pseudobase correspondiente en $W = V^*$ es $\{e^{\mathbf{k}}\}_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}}$. Dado que la ley de vértice formal $F(z)(X, Y)$ se define como $F_\ell^n(X, Y) = \Delta_{(n)}(X_\ell)$, usando el isomorfismo de álgebras $W \simeq \mathbb{C}[[X_i : i \in \mathbb{N}]]$ dado por $e^{\mathbf{k}} \mapsto \frac{1}{\mathbf{k}!} X^{\mathbf{k}}$ podemos escribir los coproductos n -ésimos de la bicoálgebra de vértice W en términos de la pseudobase como

$$\Delta_{(n)}(e^\ell) = \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}^2} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} \mathbf{k}! \mathbf{k}'! e^{\mathbf{k}} \hat{\otimes} e^{\mathbf{k}'} \in W \hat{\otimes} W \simeq (V \otimes V)^*.$$

Esto nos permite calcular $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} \mathbf{k}! \mathbf{k}'! = \Delta_{(n)}(e^\ell)(e_{\mathbf{k}} \otimes e_{\mathbf{k}'}) = e^\ell(e_{\mathbf{k}} \otimes e_{\mathbf{k}'})$, y por lo tanto podemos usar el Corolario 4.3.5 para inferir que $c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m$ tales que $|\mathbf{k}| + |\mathbf{k}'| > N$, donde N es el grado de nilpotencia de R . En particular, los únicos términos distintos de cero en (4.3.10) ocurren cuando $(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ pertenecen a $\mathbf{K}_{N, \{1, \dots, m\}} = \{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m : |\mathbf{k}| + |\mathbf{k}'| \leq N\}$, que es un conjunto finito.

Esto prueba que (4.3.9) pertenece a $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m][[z, z^{-1}]]$. Pero además, nuestro argumento nos permite escribir la suma parcial (4.3.9) como

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_m} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^{n\ell} X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'} z^{-n-1} = \sum_{(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \in \mathbf{K}_{N, \{1, \dots, m\}}} c_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^\ell(z) X^{\mathbf{k}} Y^{\mathbf{k}'},$$

y ahora la propiedad de truncamiento uniforme de $F(z)(X, Y)$ definida en la Proposición 2.4.2 implica que esta expresión es una serie de Laurent en z , o en otras palabras, un elemento de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m]((z))$.

Por lo tanto, la familia $\{F_{m\ell}(z)(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m)\}_{m, \ell \in \mathbb{N}}$ satisface los requisitos que describimos anteriormente para definir un morfismo de ind-esquemas $f : \mathbb{A}^\infty \times \mathbb{A}^\infty \times \text{Spec } \mathbb{C}((z)) \rightarrow \mathbb{A}^\infty$. Sus propiedades asociativas y unitarias se pueden derivar de las propiedades unitarias y de Jacobi de la ley de vértice formal $F(z)(X, Y)$, lo que significa que $(\mathbb{A}^\infty, f, 0)$ es un ind-esquema de vértice. Sea \tilde{R} su álgebra de Lie conforme tangente en 0. Dado que la ley de vértice formal asociada con \tilde{R} es $F(z)(X, Y)$ por construcción, debemos tener $\tilde{R} \simeq R$ debido al Corolario 2.4.6. \square

Nos gustaría concluir este trabajo mencionando algunas aplicaciones de los ind-esquemas de vértice que serían de interés para el estudio de las álgebras de vértice en general y de las álgebras de Lie conformes en particular. No hemos tratado con álgebras de operadores de vértice (VOA), pero no debería ser difícil definir “ind-esquemas de operadores de vértice” incluyendo el dato adicional de un morfismo de ind-esquemas de vértice desde el ind-esquema de vértice $\mathcal{V}ir$ satisfaciendo ciertas compatibilidades. Elegimos no incluir los “ejemplos torcidos” relacionados con álgebras de vértice afines $V^k(\mathfrak{g})$ en nivel k y álgebras de vértice de Virasoro $\mathcal{V}ir_c$ de carga central c porque éstas no son envolturas universales de álgebras conformes de Lie, aunque podría ser posible adaptar las definiciones a este caso de manera similar a lo que se hace en [BD1, Sect. 3.7.20]. Por otro lado, la aplicación más importante que queremos seguir investigando es el estudio de *módulos sobre ind-esquemas de vértice*, ya que definir y estudiar estos objetos puede ofrecer información interesante en relación con los módulos sobre álgebras de Lie conformes. Por ejemplo, esperamos que si G es un ind-esquema de vértice con álgebra de Lie conforme asociada R , entonces la categoría de módulos “integrables” sobre R , i.e. aquellos módulos donde la acción de R se levanta a una acción de G , debería tener algunas de las propiedades buenas que se encuentran en la teoría de Lie clásica.

Referencias bibliográficas

- [BK] B. BAKALOV and V. KAC, *Field algebras*, Internat. Math. Res. Notices **3** (2003), 123–159.
- [BDHK] B. BAKALOV, A. DE SOLE, R. HELUANI and V. KAC, *An operadic approach to vertex algebra and poisson vertex algebra cohomology*, Jpn. J. Math **14** (2019), 249–342.
- [BD1] A. BEILINSON and V. DRINFELD, *Chiral algebras*, AMS Colloquium Publications **51**, 2004.
- [BD2] A. BEILINSON and V. DRINFELD, *Quantization of Hitchin’s integrable system and Hecke eigensheaves*, preprint, available at www.math.uchicago.edu/~drinfeld/langlands/QuantizationHitchin.pdf.
- [BL1] A. BEAUVILLE and Y. LASZLO, *Conformal blocks and generalized theta functions*, Commun. Math. Phys. **168** (1995), no. 2, 385–419.
- [BL2] A. BEAUVILLE and Y. LASZLO, *Un lemme de descente*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I Math. **320** (1995), no. 3, 335–340.
- [Bo] R. BORCHERDS, *Vertex algebras, Kac-Moody algebras, and the Monster*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **83** (1986), 3068–3071.
- [BG] C. BOYALLIAN and J. GUZMAN, *Formal vertex laws associated to Lie conformal algebras*, J. Math. Phys. **63** (2022), 071701.
- [BGHW] O. BRAUNLING, M. GROECHENIG, A. HELEODORO and J. WOLFSON, *On the normally ordered tensor product and duality for Tate objects*, Theory Appl. Categ. **33** (2018), no. 13, 296–349.
- [BGW] O. BRAUNLING, M. GROECHENIG and J. WOLFSON, *Tate objects in exact categories*, Mosc. Math. J. **16** (2016), no. 3, 433–504.
- [DK] D’ANDREA, A. and V. KAC, *Structure theory of finite conformal algebras*, Selecta Math. (N.S.) **4** (1998) 377–418.
- [DSK] A. DE SOLE and V. KAC, *Freely generated vertex algebras and non-linear Lie conformal algebras*, Commun. Math. Phys. **254** (2005) 659–694.

- [D] J. DIEUDONNÈ, *Introduction to the theory of formal groups*, Dekker, New York, 1976.
- [FG] J. FRANCIS and D. GAITSGORY, *Chiral Koszul duality*, *Selecta Math. (N.S.)* **18** (2012), 27–87
- [FBZ] E. FRENKEL and D. BEN-ZVI, *Vertex algebras and algebraic curves*, second edition, *Mathematical Surveys and Monographs* **88**, AMS, 2004.
- [G] J. GUZMAN, *Gluing data for factorization monoids and vertex ind-schemes*, preprint, available at [arXiv:2209.09952](https://arxiv.org/abs/2209.09952).
- [Ha] R. HARTSHORNE, *Residues and duality*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1966.
- [Hz] M. HAZEWINKEL, *Formal groups and applications*, Academic Press Inc., New York, 1978.
- [Ho] G. HOCHSCHILD, *Basic theory of algebraic groups and Lie algebras*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1981.
- [Hu1] K. HUBBARD, *Vertex coalgebras, comodules, cocommutativity and coassociativity*, *J. Pure Appl. Algebra* **213** (2009), no. 1, 109-126.
- [Hu2] K. HUBBARD, *The duality between vertex operator algebras and coalgebras, modules and comodules*, *Contemp. Math.* **442** (2007) 339-354.
- [K] V. KAC, *Vertex algebras for beginners*, second edition, AMS, 1998.
- [KV] M. KAPRANOV AND E. VASSEROT, *Vertex algebras and the formal loop space*, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **100** (2004) 209-269.
- [LL] J. LEPOWSKY and H. LI, *Introduction to vertex operator algebras and their representations*, *Progress in Math.* **227**, Birkhauser, Boston, 2004.
- [Li] H. LI, *A smash product construction of nonlocal vertex algebras*, *Commun. Contemp. Math.* **5** (2007) 605-637.
- [Lu] J. LURIE, *Higher topos theory (AM 170)*, *Annals of Mathematical Studies*, Princeton University Press 2009.
- [M] S. MONTGOMERY, *Hopf Algebras and Their Actions on Rings*, *CBMS Reg. Conf. Ser. Math* **82**, Amer. Math. Soc. 1993.
- [M-B] L. MORET-BAILLY, *Un problème de descente*, *Bull. Soc. Math. France* **124** (1996), no. 4, 559–585.

- [N] NEEB, K.-H., *Towards a Lie theory of locally convex groups*, Japan. J. Math. **1** (2006) 291-468
- [S] J. P. SERRE, *Lie algebras and Lie groups*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1992.
- [St] STACKS PROJECT, TAG 02ZC, accessed 30 August 2022, <https://stacks.math.columbia.edu/tag/02ZC>.
- [Y] S. YANAGIDA, *Factorization spaces and moduli spaces over curves*, Josai Mathematical Monographs **10** (2017), 97–128.