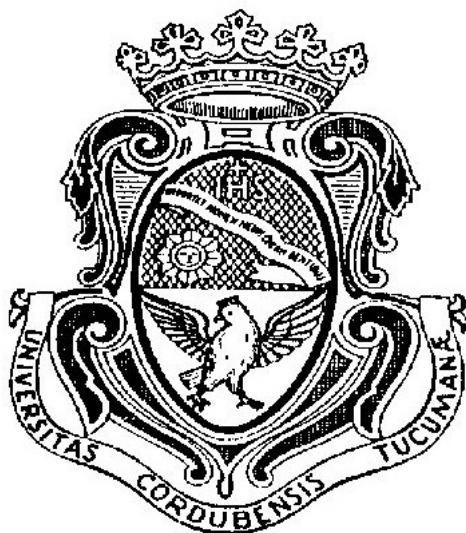


UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA



TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN
MATEMÁTICA

Bimódulos de Soergel

BENJAMÍN ALEJANDRO ALIONI

DIRECCIÓN DE NICOLÁS ANDRUSKIEWITSCH



Bimódulos de Soergel por Benjamín Alejandro Alioni se distribuye bajo una
Licencia Creative Commons Atribución 4.0 Internacional.

RESUMEN

Se introduce en esta monografía la teoría clásica de los bimódulos de Soergel. Comenzamos trabajando arreglos de hiperplanos y grupos de reflexiones en primer lugar. Se motiva de esta forma la definición de los grupos de Coxeter que estudiaremos después. Más adelante presentamos las álgebras de Hecke junto con su base de Kazhdan–Lusztig. Se definen por último los bimódulos de Soergel para concluir con el enunciado de la Conjetura de Soergel.

ABSTRACT

This article serves as an introduction to the classical theory of Soergel bimodules. We commence by delving into hyperplane arrangements and reflection groups as our starting point. This provides the groundwork for the definition and subsequent study of Coxeter groups. The presentation then moves on to the introduction of Hecke algebras and their Kazhdan–Lusztig basis. Lastly we define Soergel bimodules and culminate with the statement of Soergel Conjecture.

PALABRAS CLAVE: Arreglos de Hiperplanos - Grupos de Reflexiones - Grupos de Coxeter - Álgebras de Hecke - Bimódulos de Soergel - Categorificación

KEY WORDS: Hyperplane Arrangements - Reflection Groups - Coxeter Groups - Hecke Algebras - Soergel Bimodules - Categorification

Nothing is more fruitful—all mathematicians know it—
than those obscure analogies,
those disturbing reflections of one theory on another;
those furtive caresses,
those inexplicable discords;
nothing also gives more pleasure to the researcher.
The day comes when this illusion dissolves:
the presentiment turns into certainty;
the yoked theories reveal their common source
before disappearing.
As the Gita teaches, one achieves
knowledge and indifference at the same time.

André Weil, *De la Métaphysique aux Mathématiques*

Introducción

Se pretende en este trabajo ofrecer una introducción a la teoría clásica de bimódulos de Soergel. Son estos ciertos bimódulos sobre un anillo de polinomios con una muy rica estructura interna. Siendo aún de naturaleza elemental, guardan profundas conexiones con diversas ramas de la Matemática. Comenzamos con un breve recorrido de los orígenes de estos objetos.

Marca el inicio de esta historia la publicación de la Conjetura de Kazhdan–Lusztig (1979). Se afirmaba en la misma que importantes invariantes en teoría de Lie pueden obtenerse como el valor en uno de ciertos polinomios. Precisamente que las multiplicidades de Jordan–Hölder de un módulo de Verma simple pueden calcularse mediante los polinomios de Kazhdan–Lusztig. Solo unos años más tarde Beilinson y Bernstein (1981), Brylinski y Kashiwara (1981) además de Kazhdan y Lusztig (1980) probaron la Conjetura. Sin embargo todas estas pruebas hacían uso de un extraordinario abanico de técnicas de la geometría algebraica. Más aún la mayoría de estas técnicas habían sido desarrolladas solo la década previa a la formulación de la Conjetura.

Resultó llamativo entonces que un problema básico, puramente algebraico, requiriera de tan sofisticadas herramientas geométricas. Como tal era solo natural buscar una prueba algebraica más elemental que las anteriores. Con esto en mente Wolfgang Soergel reformula la Conjetura de Kazhdan–Lusztig en términos de los hoy llamados módulos de Soergel (1990). Vagamente la Conjetura equivale a que los módulos de Soergel simples “no son muy grandes”. Soergel deduce esta propiedad de un poderoso Teorema sobre la descomposición de haces constructibles. Aunque la prueba de Soergel era más elemental que las anteriores, todavía requería profundos resultados geométricos.

Solo unos años más tarde Soergel desarrolla la teoría de los hoy llamados bimódulos de Soergel (1992). Observa en este artículo que ciertos bimódulos cumplen las relaciones del álgebra de Hecke para un grupo de Weyl. Con un lenguaje moderno los bimódulos de Soergel categorifican el álgebra de Hecke y los módulos de Soergel su representación regular. Soergel consigue así una nueva reformulación de la Conjetura de Kazhdan–Lusztig: Los bimódulos de Soergel simples categorifican la base de Kazhdan–Lusztig del álgebra de Hecke. Más tarde Soergel nota que su teoría es válida para todo sistema de Coxeter, surja este o no de un grupo de Weyl (2006). De esta forma Soergel postula un análogo más general de la Conjetura de Kazhdan–Lusztig extendiendo su trabajo previo. Sin embargo, al carecer de un Teorema de descomposición, es incapaz de probarlo: Con el tiempo este nuevo postulado pasará a conocerse como la Conjetura de Soergel.

Más recientemente Elias y Williamson desarrollaron un enfoque diagramático a la teoría de bimódulos de Soergel (2016). Conciérne presentar la categoría

de bimódulos de Soergel por generadores y relaciones usando gráficos para representar morfismos. Consiguen de esta forma pasar de complicados cálculos en bimódulos de Soergel a manipular diagramas planares. Con el nuevo enfoque Elias y Williamson obtienen una prueba puramente algebraica de la Conjetura de Soergel. Muchas de las ideas en este artículo han producido un profundo impacto en la Teoría de Representaciones en los últimos años.

Son pertinentes algunas palabras sobre la organización de la monografía. Como muestra la página siguiente, la misma consta de cinco Capítulos. Se ha optado por hacer la exposición autocontenida en la medida de lo posible. Con esto en mente es que al final fueron adjuntos dos Apéndices. Indicamos durante la exposición cuando es oportuno que el lector recurra a ellos. Se introduce además en ambos notación que luego es usada sin aclaración. Así la lectura de los Apéndices es integral para lectura de la monografía.

Índice general

1. Arreglos de Hiperplanos	1
1.1. Hiperplanos	1
1.2. Arreglos de Hiperplanos	2
1.3. Facetas	3
1.4. Cámaras	5
1.5. Muros y Caras	6
1.6. Galerías	9
2. Grupos de Reflexiones	15
2.1. Reflexiones	15
2.2. Grupos de Reflexiones	16
2.3. Acción de Grupo	18
2.4. Propiedades Fundamentales	19
2.5. Un Camino Alternativo	23
2.6. Región Fundamental	24
2.7. Presentación de Coxeter	26
3. Grupos de Coxeter	30
3.1. Grupos de Coxeter	30
3.2. Propiedades Combinatorias	31
3.3. Elemento Máximo	35
3.4. Caracterizaciones	36
3.5. Orden de Bruhat	37
3.6. Representación Geométrica	40
4. Álgebra de Hecke	42
4.1. Álgebra de Hecke	42
4.2. Base Estándar	43
4.3. Base de Kazhdan–Lusztig	47
4.4. Fórmula de Deodhar	53
5. Bimódulos de Soergel	54
5.1. Polinomios	54
5.2. Bimódulos de Bott–Samelson	56
5.3. Bimódulos Estándar	58
5.4. Filtraciones Estándar	59
5.5. Teorema de Categorificación de Soergel	62

Apéndices	64
A. Monoïdes	64
A.1. Monoïde Libre	64
A.2. Función Longitud	65
A.3. Álgebra de Monoïde	66
B. Bimódulos	69
B.1. Bimódulos	69
B.2. Bimódulos Graduados	72
B.3. Grupo de Grothendieck	74
Bibliografía	75

Capítulo 1

Arreglos de Hiperplanos

1.1. Hiperplanos

Comenzamos precisando la noción de hiperplano junto con algo de terminología. Veremos aquí también algunos resultados topológicos que nos serán útiles en lo que sigue.

Se denota por $(\mathbf{E}, \langle -, - \rangle)$ un espacio vectorial Euclídeo por el resto de la monografía. Recordemos esto es un espacio producto interno real de dimensión finita. Si el lector así lo prefiere, puede suponer que este es el espacio coordenado real sin pérdida alguna.

Un *hiperplano afín* en \mathbf{E} es un subespacio afín de codimensión uno. Quiere decir un subespacio afín de dimensión menor en uno a la del espacio ambiente. Usualmente nos referiremos a estos como hiperplanos, omitiendo la palabra afín.

Se define $\tau_w : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$ para w en \mathbf{E} como la traslación $x \mapsto x - w$ para x en \mathbf{E} . Usaremos esta notación a lo largo de la monografía.

Proposición 1.1.1. *Si H en \mathbf{E} es un hiperplano $\mathbf{E} \sim H$ posee dos componentes convexas.*

Demostración. Se tiene que $\tau_h(H)$ para h en H es un subespacio lineal de codimensión uno. Dado v en $\tau_h(H)^\perp$ no nulo tenemos que

$$\mathbf{E} \sim \tau_h(H) = \{x \in \mathbf{E} : \langle x, v \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbf{E} : \langle x, v \rangle < 0\}.$$

Se comprueba fácilmente que ambos conjuntos en la unión son convexas.

Trasladando nuevamente encontramos que

$$\mathbf{E} \sim H = \{x \in \mathbf{E} : \langle \tau_h(x), v \rangle > 0\} \cup \{x \in \mathbf{E} : \langle \tau_h(x), v \rangle < 0\}.$$

Notemos que las traslaciones preservan la convexidad. Por tanto estos conjuntos también resultan convexas. \square

Se llama *semiespacios* acotados por H a estas componentes convexas. Siendo \mathbf{E} localmente convexo, resultan subconjuntos abiertos. Se puede también ver esto de la descripción obtenida en la Proposición anterior.

Se dice que dos puntos en $\mathbf{E} \sim H$ yacen *en el mismo lado* del hiperplano de pertenecer al mismo semiespacio que este acota. Equivalentemente cuando el

hiperplano no corta al segmento que los une. Se dice además que dos puntos en $\mathbf{E} \sim H$ yacen en *lados opuestos* del hiperplano en caso contrario.

Sea A en $\mathbf{E} \sim H$ un subconjunto conexo. Observar está contenido en uno de los semiespacios acotados por este hiperplano. Se denota por $\mathcal{D}_H(A)$ a dicho semiespacio, además de $\overline{\mathcal{D}}_H(A)$ a su clausura. Observar que $\overline{\mathcal{D}}_H(A)$ es la unión de $\mathcal{D}_H(A)$ con el hiperplano que lo acota.

Antes de concluir esta Sección recordemos una noción topológica. Un subconjunto de \mathbf{E} se dice *denso en ninguna parte* si el interior de su clausura es vacío. Particularmente los hiperplanos son densos en ninguna parte: Son cerrados de interior vacío. Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. *Sean A y B en \mathbf{E} subconjuntos densos en ninguna parte. Su unión es también densa en ninguna parte.*

Demostración. Si U en \mathbf{E} es un abierto no vacío, tenemos que $U \sim \text{cl}(A)$ es no vacío. Puesto que $U \sim \text{cl}(A)$ es también abierto ($U \sim \text{cl}(A) \sim \text{cl}(B)$) es no vacío. Se tiene además que

$$(U \sim \text{cl}(A)) \sim \text{cl}(B) = U \sim (\text{cl}(A) \cup \text{cl}(B)) = U \sim \text{cl}(A \cup B).$$

Así para cada abierto U tenemos que $U \sim \text{cl}(A \cup B)$ es no vacío. Se concluye por tanto que $A \cup B$ es denso en ninguna parte. \square

Se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario. *Una unión finita de hiperplanos tiene interior vacío.*

Demostración. Sigue por inducción de la Proposición anterior. \square

1.2. Arreglos de Hiperplanos

Un *arreglo de hiperplanos afines* en \mathbf{E} es una colección localmente finita de hiperplanos afines. Quiere decir que todo punto en \mathbf{E} posee un entorno abierto que interseca a lo sumo finitos hiperplanos en esta colección. Usualmente nos referiremos a estos como arreglos de hiperplanos, omitiendo la palabra afín. Denotaremos en adelante por \mathcal{H} a un arreglo de hiperplanos fijo.

Se ilustran en la Figura 1.1 dos arreglos de hiperplanos en un espacio bidimensional. Se aconseja visualizar en estos arreglos los resultados que probemos.

Sea A en \mathbf{E} un subconjunto cualquiera. Denotamos por $\mathcal{H}(A)$ la familia de hiperplanos en \mathcal{H} que lo contienen. Denotamos además por $\mathcal{H}^*(A)$ al complemento $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}(A)$. Particularmente para H en \mathcal{H} la familia $\mathcal{H}^*(H)$ iguala $\mathcal{H} \sim \{H\}$.

Supongamos que A en \mathbf{E} es conexo. Sea además \mathcal{K} en \mathcal{H} una subfamilia cuyos hiperplanos no lo intersecan. Denotamos por $\mathcal{D}_{\mathcal{K}}(A)$ la intersección

$$\bigcap_{H \in \mathcal{K}} \mathcal{D}_H(A).$$

Similarmente por $\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{K}}(A)$ denotamos a la intersección de sus clausuras.

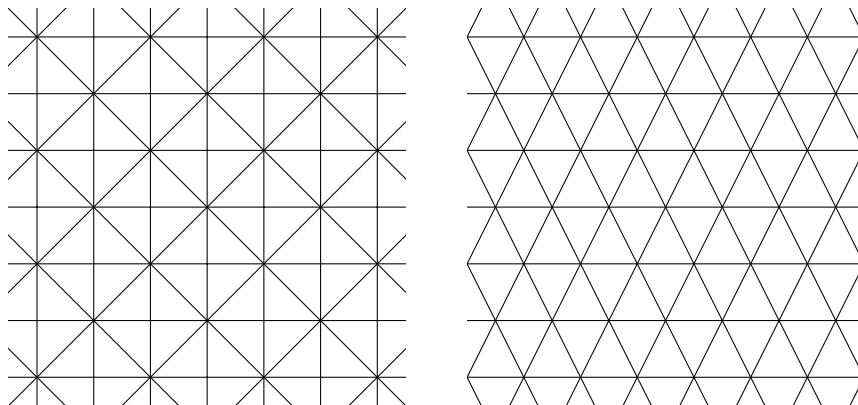


Figura 1.1

1.3. Facetas

Definiremos ahora una relación de equivalencia en \mathbf{E} como sigue:

Se dicen relacionados dos puntos en \mathbf{E} cuando: Cada H en \mathcal{H} contiene ambos puntos o bien estos yacen al mismo lado del hiperplano.

Fácilmente puede verse que esto define una relación de equivalencia. Se llaman *facetas* de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} sus clases de equivalencia. Cuando no haya ambigüedad, las llamaremos sencillamente facetas.

Se ilustran en la Figura 1.2 las facetas de un arreglo formado por dos hiperplanos no paralelos en un espacio bidimensional. Tenemos aquí: (i) Cuatro sectores abiertos; (ii) Cuatro semirectas abiertas; (iii) Un punto.

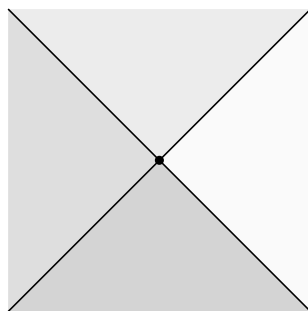


Figura 1.2

Notar que un hiperplano en \mathcal{H} corta a una faceta solo de contenerla. Por tanto para F en \mathbf{E} una faceta $\mathcal{H}(F)$ consta de aquellos hiperplanos que la cortan. Siendo \mathcal{H} localmente finito, tenemos que $\mathcal{H}(F)$ es de cardinal finito.

Sea F una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} dada. Se llama *soporte* de F a la intersección¹ sobre $\mathcal{H}(F)$ de todos sus hiperplanos. Observar este es un subespacio afín al ser $\mathcal{H}(F)$ finito. Notaremos al soporte por $\text{sop}(F)$ en adelante. Se define la *dimensión* de una faceta como la dimensión de su soporte.

¹Se conviene que \mathbf{E} es la intersección sobre una familia vacía.

Obtendremos ahora una descripción alternativa de las facetas.

Proposición 1.3.1. *Si F es una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} entonces*

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F) \cap \text{sop}(F).$$

Más aún se tiene que

$$\text{cl}(F) = \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F).$$

Demostración. Dijimos un hiperplano en \mathcal{H} corta a una faceta solo de contenerla. Por lo tanto, es claro que

$$F \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F) \cap \text{sop}(F).$$

Observar que dos puntos cualesquiera en el lado derecho están relacionados. Sigue entonces la contención recíproca.

Veamos ahora que la segunda igualdad vale. Por el resultado recién obtenido

$$\text{cl}(F) \subseteq \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F).$$

Sea x en $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} \cap \text{sop}(F)$ un punto cualquiera. Se cumple para y en F que $\text{sop}(F)$ contiene el segmento $[x, y]$ al ser un subespacio afín. Notar además los hiperplanos en $\mathcal{H}^*(F)$ no separan a estos puntos en lados opuestos. Por tanto $\mathcal{D}_H(F)$ contiene $[x, y]$ para todo H en $\mathcal{H}^*(F)$. Se deduce así que F contiene $[x, y]$ con lo que x en $\text{cl}(F)$. \square

De esta caracterización se obtienen los siguientes resultados.

Corolario. *Toda faceta es convexa y abierta en su propio soporte.*

Demostración. Sea F de \mathbf{E} una faceta fija. Por la Proposición anterior esta es una intersección de conjuntos convexos. Por lo tanto la misma también resulta convexa. Para probar que F es en $\text{sop}(F)$ abierta basta ver que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ es abierto.

Puesto que \mathcal{H} es localmente finito también $\mathcal{H}^*(F)$ lo es. Por tanto el conjunto $\mathbf{E} \sim \bigcup_{H \in \mathcal{H}^*(F)} H$ resulta abierto. Observar además que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ está contenido en este. Siendo \mathbf{E} localmente convexo, todo punto de $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ posee en $\mathbf{E} \sim \bigcup_{H \in \mathcal{H}^*(F)} H$ un entorno convexo. Por ser este entorno convexo $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ lo contiene. Se deduce así que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)$ es abierto. \square

Corolario. *Sean F y G dos facetas de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} dadas. Si vale que $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío entonces $\text{cl}(F)$ contiene a G .*

Demostración. Observar que G interseca a $\text{sop}(F)$ por la Proposición anterior. Ya que cada hiperplano en $\mathcal{H}(F)$ contiene a $\text{sop}(F)$ tenemos que $\mathcal{H}(G)$ contiene a $\mathcal{H}(F)$. Se obtiene así la contención de los soportes

$$\text{sop}(G) \subseteq \text{sop}(F).$$

Observar además que $\mathcal{H}^*(F)$ contiene a $\mathcal{H}^*(G)$ tomando complementos. Se tiene por hipótesis que $\mathcal{D}_H(G) \cap \overline{\mathcal{D}_H(F)}$ es no vacío para cada H en $\mathcal{H}^*(G)$. Por tanto $\overline{\mathcal{D}_H(F)}$ contiene a $\mathcal{D}_H(G)$ para cada H en $\mathcal{H}^*(G)$. Se obtiene así que

$$\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F)}(F)} = \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(G)}(F)} \cap \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(F) \cap \mathcal{H}(G)}(F)} \supseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(G)}(G) \cap \text{sop}(G).$$

Combinando esta con la contención de los soportes, tenemos el resultado. \square

Se obtiene en la Proposición que sigue provee una útil caracterización de facetas contiguas.

Proposición 1.3.2. *Sea F una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} fija. Se denota L la intersección de una subfamilia de hiperplanos del arreglo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- i. Existe una faceta G con $\text{sop}(G)$ igual a L tal que $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío.*
- ii. Existe una faceta G con $\text{sop}(G)$ igual a L contenida en $\text{cl}(F)$.*
- iii. Existe un punto en $\text{cl}(F) \cap L$ tal que L está contenido en cada H en \mathcal{H} al que este punto pertenezca.*

Demostración. Precisamente ($i \rightarrow ii$) es el Corolario anterior.

Para ($ii \rightarrow iii$) basta tomar en G un punto cualquiera: Todo hiperplano en \mathcal{H} que lo contenga, contiene G en particular. Por tanto estos hiperplanos también deben contener a su soporte.

Finalmente para ($iii \rightarrow i$) consideremos la faceta G que contiene al punto aludido en la hipótesis. Claramente $\text{cl}(F) \cap G$ es no vacío, con lo que resta ver la afirmación sobre su soporte. Basta para ello comprobar que $\mathcal{H}(G)$ y $\mathcal{H}(L)$ son iguales. Notar que todo hiperplano en $\mathcal{H}(G)$ debe contener a L por hipótesis. Ya que cada hiperplano en $\mathcal{H}(L)$ corta G también debe contenerlo. Se deduce así la igualdad

$$\text{sop}(G) = \bigcap_{H \in \mathcal{H}(G)} H = \bigcap_{H \in \mathcal{H}(L)} H = L. \quad \square$$

1.4. Cámaras

Pondremos ahora el foco en una clase particular de facetas. Será esencialmente el estudio de estas lo que nos ocupe por el resto de este Capítulo.

Se define una *cámara* de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} a ser una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} de dimensión igual a la del espacio ambiente. Equivalentemente estas son facetas que ningún hiperplano en \mathcal{H} contiene. Si no hay ambigüedad respecto a \mathcal{H} las llamaremos sencillamente cámaras.

Sea \mathbf{G} el subconjunto abierto formado por los puntos en \mathbf{E} que ningún hiperplano de \mathcal{H} contiene. Observemos que cada faceta contenida en \mathbf{G} es una cámara: Una faceta corta a un hiperplano en \mathcal{H} solo cuando este la contiene. Se tiene de esta forma que \mathbf{G} queda particionado en cámaras. Siendo las cámaras conexas, estas son exactamente sus componentes conexas.

Si C es una cámara \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} entonces la Proposición 1.3.1 implica que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{H}}(C), \quad \text{cl}(C) = \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}}(C)}. \quad (1.1)$$

Obtendremos en la Proposición 1.5.2 una descripción más precisa de las cámaras. Será esta términos de los hiperplanos que las ciñen, sus muros.

En la Figura 1.1 las cámaras consisten del interior de los triángulos que teselan el espacio. Su clausura está a la vez formada por el interior y el borde del triángulo. Observar así que todo punto del plano cae en la clausura de alguna cámara. Como muestra la siguiente Proposición, este es un hecho general.

Proposición 1.4.1. *Cada punto en \mathbf{E} pertenece a la clausura de alguna cámara.*

Demostración. Consideremos un punto en \mathbf{E} junto con una base local \mathcal{F} del mismo. Basta ver que existe una cámara que corta cada entorno en esta base. Se puede asumir que los entornos de \mathcal{F} forman un orden total respecto a la inclusión: Efectivamente \mathbf{E} cumple el Primer Axioma de Numerabilidad como espacio topológico.

Sea ahora \mathcal{K} la colección en \mathcal{H} de hiperplanos que cortan algún entorno de la base. Siendo \mathcal{H} localmente finito podemos suponer que \mathcal{K} es finito. Por el Corolario de la Proposición 1.1.2 para cada U en \mathcal{F} tenemos

$$U \not\subseteq \bigcup_{H \in \mathcal{K}} H. \quad (*)$$

Así todo entorno U en \mathcal{F} interseca a alguna cámara: Se afirma en (*) que existen puntos del entorno que ningún hiperplano en \mathcal{H} contiene. Denotemos por \mathcal{C}_U al conjunto de cámaras a las que U en \mathcal{F} interseca.

Se puede asumir al ser \mathbf{E} localmente convexo que los entornos en \mathcal{F} son convexos. Observemos que así para cada U en \mathcal{F} el conjunto \mathcal{C}_U es finito: Dada C en \mathcal{C}_U tenemos para cada H en $\mathcal{H} \sim \mathcal{K}$ que

$$\mathcal{D}_H(C) = \mathcal{D}_H(U).$$

Por tanto para C y D en \mathcal{C}_U ambos $\mathcal{D}_H(C)$ y $\mathcal{D}_H(D)$ difieren solo para H en \mathcal{K} . Se deduce de (1.1) que \mathcal{C}_U es finito al ser \mathcal{K} finito.

Observar que la hipótesis inicial sobre \mathcal{F} implica que $\{\mathcal{C}_U : U \in \mathcal{F}\}$ es un orden total respecto a la inclusión. Se tiene que esta familia posee un mínimo al ser los conjuntos que la conforman finitos. Si C es una cámara en el mínimo, para cada U en \mathcal{F} la intersección $C \cap U$ es no vacía. Obtenemos así lo que queríamos mostrar. \square

1.5. Muros y Caras

Sea C es una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} dada. Se define una *cara* de C como una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} contenida en $\text{cl}(C)$ cuyo soporte es un hiperplano. Además un *muro* de C es un hiperplano que es el soporte de una de sus caras.

Para F una cara de C tenemos por la Proposición 1.3.1 que

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H$$

donde H en \mathcal{H} es su soporte. Ya que $\text{cl}(C)$ contiene a F sigue que $C \cap \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F)$ es no vacío. Por tanto F y C yacen al mismo lado de cada hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$. Podemos así reescribir la expresión anterior como

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H. \quad (1.2)$$

Claramente cada muro de C pertenece a \mathcal{H} por definición. Observar de la anterior igualdad que cada muro es el soporte de solo una de sus caras. Se cumple además una afirmación recíproca.

Proposición 1.5.1. *Todo hiperplano en \mathcal{H} es el muro de al menos una cámara.*

Demostración. Sea H en \mathcal{H} un hiperplano fijo. Se puede suponer que este contiene al origen trasladando el arreglo de ser necesario. Observar que entonces

este hiperplano es un espacio Euclídeo en si mismo. Será denotado por \mathbf{F} momentáneamente.

Si K en $\mathcal{H}^*(\mathbf{F})$ es tal que $K \cap \mathbf{F}$ es no vacío, entonces $K \cap \mathbf{F}$ es en \mathbf{F} un hiperplano. Se denota por \mathcal{K} a la colección de estos hiperplanos. Observar que \mathcal{K} forma en \mathbf{F} un arreglo de hiperplanos: Se tiene que \mathcal{K} es localmente finito en \mathbf{F} puesto que \mathcal{H} es localmente finito en \mathbf{E} .

Sea V en \mathbf{F} entorno abierto no vacío. Por ser \mathcal{K} localmente finito, el Corolario de la Proposición 1.1.2 implica

$$V \not\subseteq \bigcup_{K \in \mathcal{K}} K.$$

Por tanto este entorno contiene un punto que ningún hiperplano del arreglo contiene. Se ha probado, con la notación inicial, lo siguiente: Cada abierto no vacío V en H contiene un punto que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene.

Consideremos un punto cualquiera con la mencionada propiedad. Por la Proposición anterior este ha de estar contenido en la clausura de alguna cámara. Finalmente la Proposición 1.3.2 implica (*iii* \rightarrow *ii*) que el hiperplano fijado debe ser un muro de esta cámara. \square

Se obtuvo en el curso de la prueba el siguiente resultado.

Corolario. *Cada abierto no vacío de H en \mathcal{H} contiene un punto que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene.*

Se dijo es posible describir una cámara como en (1.1) mediante sus muros. Más aún esta descripción es mínima en el sentido que precisamos luego. Para ello son necesarios los dos Lemas que siguen.

Lema 1.5.1. *Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} dada. Un hiperplano H en \mathcal{H} es un muro C de si y solo si $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío.*

Demostración. Si H en \mathcal{H} es un muro de C entonces (1.2) implica que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H \subseteq \text{cl}(C) \cap H.$$

Siendo el lado izquierdo abierto $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío.

Supongamos ahora que $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior no vacío. Por el Corolario anterior, existe un punto en $\text{cl}(C) \cap H$ que ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene. Así la Proposición 1.3.2 implica (*iii* \rightarrow *ii*) que H es un muro de C . \square

Observar que el Lema anterior caracteriza los muros de una cámara en forma independiente del arreglo de hiperplanos. Veremos que esto juega en la Proposición que sigue un papel importante.

Lema 1.5.2. *Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} dada. Un hiperplano H en \mathcal{H} es un muro de C si y solo si*

$$C \subsetneq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C).$$

Demostración. Observar en primer lugar que (1.1) implica

$$C \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C). \quad (*)$$

Supongamos que H es un muro de C para comenzar. Por la Proposición 1.3.2 existe un punto en $\text{cl}(C) \cap H$ al que nadie en $\mathcal{H}^*(H)$ contiene. Veremos que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \sim C$ contiene a este punto. Observar el mismo no yace en la cámara por pertenecer al hiperplano. Por otro lado (1.1) implica que

$$\text{cl}(C) \subseteq \overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)},$$

de donde $\overline{\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)}$ contiene a este punto. Ya que nadie en $\mathcal{H}^*(H)$ lo contiene, cae en $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C)$ necesariamente.

Supongamos recíprocamente que vale en (*) la igualdad. Se tiene así que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H$ debe de ser vacío. Por lo tanto de (1.2) deducimos que H no es un muro de C . \square

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado adelantado.

Proposición 1.5.2. *Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} con \mathcal{M} la colección de sus muros. Se tiene entonces que*

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C).$$

Más aún \mathcal{M} está contenido en toda subfamilia de \mathcal{H} con esta propiedad.

Demostración. Sea \mathcal{L} una subfamilia de \mathcal{H} tal que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(C). \quad (*)$$

Veamos que \mathcal{M} está contenido en esta colección. Si H en $\mathcal{H} \sim \mathcal{L}$ entonces $\mathcal{H}^*(H)$ contiene a \mathcal{L} con lo que

$$C \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \subseteq \mathcal{D}_{\mathcal{L}}(C).$$

Se sigue de (*) que todas estas contenciones son igualdades. Por lo tanto H no es un muro de C en virtud del Lema anterior. Se cumple así que \mathcal{L} contiene a \mathcal{M} como queríamos.

Veamos que efectivamente \mathcal{M} cumple la igualdad enunciada. Supongamos que \mathcal{L} es alguna subfamilia de \mathcal{H} tal que (*) vale. Observar que C es una cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{L} en primer lugar: Sigue de (1.1) aplicado a este subarreglo. Se tiene para H en $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ del Lema 1.5.1 que $\text{cl}(C) \cap H$ tiene en H interior vacío. Vemos aplicando a \mathcal{L} el mismo resultado junto con Lema anterior que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L}^*(H)}(C).$$

Se pueden así quitar de \mathcal{L} hiperplanos en $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ de uno a la vez. Inductivamente toda colección finita \mathcal{F} en $\mathcal{L} \sim \mathcal{M}$ cumple

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{L} \sim \mathcal{F}}(C) \quad (**)$$

Consideremos entre C y $\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C)$ un segmento cerrado fijo. Observar que solo una colección finita \mathcal{F} en \mathcal{H} corta este segmento: Puede este ser recubierto por un número finito de entornos abiertos. Siendo \mathcal{H} localmente finito sigue la afirmación. Se tiene que cada hiperplano en \mathcal{F} separa los extremos del segmento. Como ningún muro en \mathcal{M} separa estos puntos $\mathcal{H} \sim \mathcal{M}$ contiene a \mathcal{F} . Por tanto (**) implica que

$$C = \mathcal{D}_{\mathcal{H} \sim \mathcal{F}}(C).$$

Observar que ningún hiperplano en $\mathcal{H} \sim \mathcal{F}$ separa los extremos del segmento. Por tanto ambos pertenecen al miembro derecho de la anterior igualdad. Siendo nuestro segmento arbitrario tenemos

$$\mathcal{D}_{\mathcal{M}}(C) \subseteq C.$$

Por otro lado (1.1) implica la contención recíproca. \square

Se han discutido en extensión los atributos de los muros. Probaremos ahora un último resultado sobre las caras.

Proposición 1.5.3. *Sea F una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} de codimensión uno. Se tiene que esta es la cara de exactamente dos cámaras.*

Demostración. Supongamos que H en \mathcal{H} es el hiperplano que soporta esta faceta. Se denota por \mathcal{D}_H uno de los semiespacios que este hiperplano acota. Observar en primer lugar que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H$ es no vacío: Por la Proposición 1.3.1 tenemos que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H$ es no vacío. Puesto que $\text{cl}(\mathcal{D}_H)$ contiene a H sigue la afirmación.

Se denota por C la intersección $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H$ en adelante. Observar que C es una faceta de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} por definición. Puesto que ningún hiperplano en \mathcal{H} la corta, debe ser una cámara. Más aún la Proposición 1.3.1 implica que

$$F = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap H.$$

Por tanto $\text{cl}(C)$ contiene a F con lo que C tiene a esta por cara. Se puede intercambiar \mathcal{D}_H por su semiespacio complementario. Obtenemos así una segunda cámara con la propiedad buscada.

Sea D otra cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} con F por cara. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que \mathcal{D}_H y $\mathcal{D}_H(D)$ son iguales. Como notamos en la deducción de (1.2) vale que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F).$$

Usando la definición de C tenemos

$$D = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) \cap \mathcal{D}_H = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(F) \cap \mathcal{D}_H = C.$$

Por tanto exactamente dos cámaras comparten una misma cara. Quedando estas determinadas por el lado de su soporte en el que yacen. \square

1.6. Galerías

Se introduce en esta Sección el concepto de galería. Son estas un análogo discreto de las curvas estudiadas en geometría. Se verá que en este contexto las geodésicas cumplen un importante papel.

Fijamos \mathcal{H} un arreglo de hiperplanos. Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a este arreglo. Se dice que C y D son *adyacentes* a través de H en \mathcal{H} cuando comparten una cara con soporte este hiperplano. Se denota como sigue:

$$C \Big|_H D.$$

Se dirá también que son adyacentes a secas sin especificar algún hiperplano. Usamos en acuerdo la notación:

$$C \mid D.$$

Observar que toda cámara es adyacente a si misma. Por la Proposición 1.5.3 exactamente dos cámaras comparten una cara. Más aún estas yacen en lados opuestos del soporte de esta cara.

Una *galería* Γ es upla (C_0, \dots, C_n) de cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} tales que

$$C_{i-1} \mid C_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

donde $n \in \mathbb{N}_0$. Se denota por $\Gamma^{(i)}$ a la i -ésima cámara ($0 \leq i \leq n$) de esta upla. Referimos por $\ell(\Gamma)$ al subíndice de la última cámara. Se llama a esta la *longitud* de Γ en adelante. Observar este es el número de veces que la galería atraviesa algún hiperplano. Se dirá además que la galería *conecta* a las cámaras en sus extremos.

Ilustramos en la Figura 1.3 dos galerías en un arreglo de hiperplanos. Se aconseja referir a estas para visualizar los resultados teóricos.

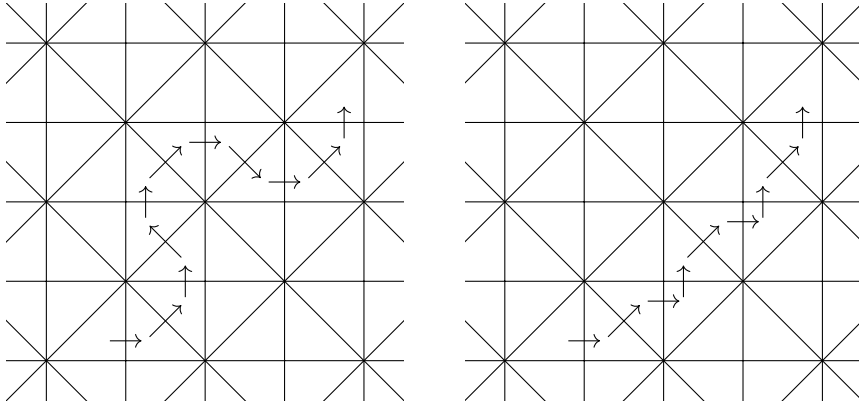


Figura 1.3

Queremos probar que dos cámaras cualesquiera pueden conectarse por una galería. Introducimos para ello algo de terminología que nos será de utilidad. Veremos que ahora reaparecerán algunas ideas de la Sección anterior.

Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} dadas. Se dirá que un hiperplano en \mathcal{H} las *separa* cuando yacen en lados opuestos de este. Notar *prima facie* el conjunto de hiperplanos en \mathcal{H} que separan C y D no tiene por qué ser finito. Se denotará por $d(C, D)$ al cardinal de este conjunto. Suele referirse $d(C, D)$ como la *distancia combinatoria* entre C y D en la literatura.

Proposición 1.6.1. *Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} dadas. Se tiene que el cardinal $d(C, D)$ es finito.*

Demostración. Consideremos entre C y D un segmento cerrado fijo. Observar que solo una colección finita \mathcal{F} en \mathcal{H} corta este segmento: Siendo compacto este puede ser recubierto por finitos entornos abiertos. Puesto que \mathcal{H} es localmente finito sigue la afirmación.

Únicamente los hiperplanos en \mathcal{F} separan los extremos del segmento. Por tanto C y D son separadas solamente por estos hiperplanos. Siendo \mathcal{F} una colección finita obtenemos lo deseado. \square

Se deduce de la prueba un resultado adicional: Un segmento entre C y D corta exactamente $d(C, D)$ hiperplanos en \mathcal{H} . Se puede ver en la Figura 1.4 esta situación: Un segmento entre C y D corta solo aquellos hiperplanos que separan ambas cámaras.

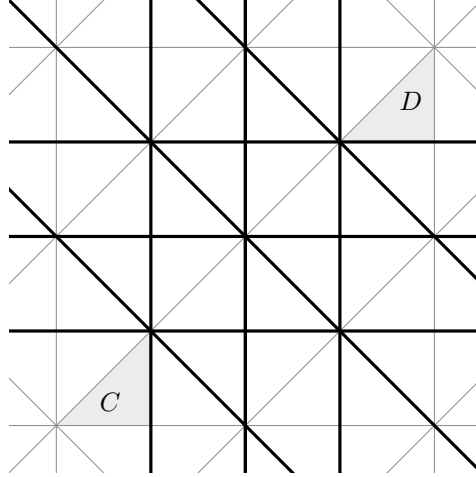


Figura 1.4

Se necesita para probar el resultado que adelantamos un Lema adicional. Obtenemos con este Lema una caracterización de la adyacencia más sencilla.

Lema 1.6.1. Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} distintas. Ambas son adyacentes si y solo si un único hiperplano en \mathcal{H} las separa.

Demostración. Supongamos que C y D son cámaras adyacentes. Sea H en \mathcal{H} el soporte de la cara que comparten. Vimos en la prueba de la Proposición 1.5.3 que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D).$$

Por tanto ningún hiperplano en $\mathcal{H}^*(H)$ separa estas cámaras. Siendo estas distintas (1.1) el hiperplano restante las separa.

Supongamos que a C y D las separa H en \mathcal{H} único. Observar este hiperplano es un muro de ambas cámaras: Se cumple que

$$\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) = \mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D). \quad (*)$$

Sigue del Lema 1.5.2 la afirmación al ser estas cámaras disjuntas. Se tiene por (1.2) que $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(C) \cap H$ y $\mathcal{D}_{\mathcal{H}^*(H)}(D) \cap H$ son caras de C y D respectivamente. Por tanto (*) implica que ambas caras son iguales. Obtuvimos entonces que C y D son adyacentes. \square

Procedemos ahora a probar el resultado que adelantamos.

Proposición 1.6.2. Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a \mathcal{H} dadas. Se tiene entre ambas una galería de longitud $d(C, D)$ que las conecta.

Demostración. Haremos inducción en $d(C, D)$ el número de hiperplanos que separan ambas cámaras. Observar que el caso inicial es trivial.

Supongamos ahora que $d(C, D)$ es positivo. Se tiene en particular que ambas cámaras son distintas. Observar la Proposición 1.5.2 implica existe un muro H en \mathcal{H} de C que las separa. Por la Proposición 1.5.3 existe C' cámara de \mathbf{E} relativa a \mathcal{H} distinta de C tal que

$$C \Big|_H C'.$$

Se tiene para todo K en $\mathcal{H}^*(H)$ que ambos $\mathcal{D}_K(C)$ y $\mathcal{D}_K(C')$ son iguales. Puesto que $\mathcal{D}_H(C)$ y $\mathcal{D}_H(C')$ son distintos, ambos $\mathcal{D}_H(C')$ y $\mathcal{D}_H(D)$ son iguales. Sigue de aquí que

$$d(C', D) = d(C, D) - 1$$

Vía hipótesis inductiva existe una galería entre C' y D de longitud $d(C', D)$. Se obtiene una galería entre C y D de longitud $d(C, D)$ sumando la primera cámara. \square

Veamos que ninguna galería conectando C y D es de menor longitud. Sea una galería Γ conectando ambas cámaras. Sea además H en \mathcal{H} un hiperplano que Γ no atraviesa. Observar que C y D no son separadas por este hiperplano: Usando el Lema 1.6.1 en las cámaras de la galería

$$\mathcal{D}_H(C) = \mathcal{D}_H(\Gamma^{(0)}) = \dots = \mathcal{D}_H(\Gamma^{\ell(\Gamma)}) = \mathcal{D}_H(D).$$

Sigue que Γ cruza todo hiperplano en \mathcal{H} que separa ambas cámaras. Por lo tanto $d(C, D)$ es menor o igual a $\ell(\Gamma)$ como queríamos. Se tiene así que la galería en la Proposición anterior es de longitud mínima. Se llamará *minimal* a una galería de este tipo: Quiere decir de longitud mínima entre las galerías que conectan a sus extremos.

Observar que la galería en la derecha de la Figura 1.3 es minimal. Vimos en la Figura 1.4 los hiperplanos que separan ambas cámaras. Cotejando estos encontramos que son los mismos que la galería cruza. Ilustramos en la Figura 1.5 esta situación.

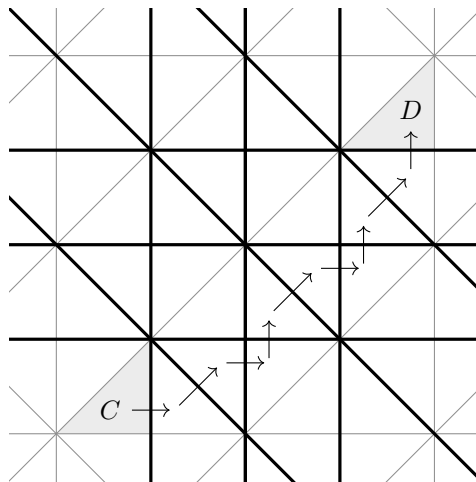


Figura 1.5

Se debe pensar en una galería minimal como el análogo discreto de una geodésica. Una tal galería cruza solo aquellos hiperplanos en \mathcal{H} que cortan cualquier segmento que una a sus extremos.

Proposición 1.6.3. *Una galería Γ es minimal si y solo no cruza ningún hiperplano en \mathcal{H} más de una vez.*

Demostración. Vimos que Γ cruza cada hiperplano en \mathcal{H} que separa $\Gamma^{(0)}$ y $\Gamma^{\ell(\Gamma)}$ al menos una vez. Si esta galería es minimal tiene $d(\Gamma^{(0)}, \Gamma^{\ell(\Gamma)})$ como longitud. Sigue así que cruza solo estos hiperplanos exactamente una vez.

Supongamos que Γ cruza un hiperplano H en \mathcal{H} solo una vez. Quiere decir existe un único $1 \leq i \leq \ell(\Gamma)$ tal que

$$\Gamma^{(i-1)} \Big|_H \Gamma^{(i)} .$$

Observar que a $\Gamma^{(0)}$ y $\Gamma^{\ell(\Gamma)}$ las separa este hiperplano: Usando el Lema 1.6.1 en las cámaras de la galería

$$\mathcal{D}_H(\Gamma^{(0)}) = \dots = \mathcal{D}_H(\Gamma^{(i-1)}) \neq \mathcal{D}_H(\Gamma^{(i)}) = \dots = \mathcal{D}_H(\Gamma^{\ell(\Gamma)}) .$$

Cuando Γ cruza ningún hiperplano en \mathcal{H} más de una vez $\ell(\Gamma)$ iguala $d(\Gamma^{(0)}, \Gamma^{\ell(\Gamma)})$. Sigue por tanto que esta galería es minimal. \square

Observar que la galería en la izquierdo de la Figura 1.3 no es minimal. Como puede verse en la Figura 1.6 atraviesa un hiperplano dos veces.

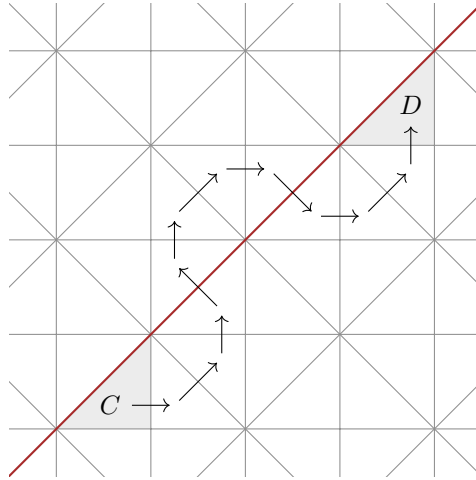


Figura 1.6

Observar que las cámaras adyacentes en una galería minimal son distintas. Se dirá que una galería es *no vacilante* cuando cumpla esta propiedad. Claramente no toda galería no vacilante es minimal: Tenemos en la Figura anterior una tal caso.

Introducimos para concluir notación que será de uso más adelante. Consideremos Γ una galería dada. Se define $\eta(\Gamma, H)$ para H en \mathcal{H} como el número de veces tal que

$$\Gamma^{(i-1)} \Big|_H \Gamma^{(i)} , \quad 1 \leq i \leq \ell(\Gamma) .$$

Quiere decir $\eta(\Gamma, H)$ es el número de veces que la galería cruza este hiperplano. Vale la siguiente Proposición.

Proposición 1.6.4. *Sea Γ una galería dada. Ambas $\Gamma^{(0)}$ y $\Gamma^{\ell(\Gamma)}$ las separa H en \mathcal{H} si y solo si*

$$\eta(\Gamma, H) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Demostración. Sigue razonando de igual forma que en la Proposición anterior. Analizamos la igualdad o desigualdad de $\mathcal{D}_H(\Gamma^{(i-1)})$ y $\mathcal{D}_H(\Gamma^{(i)})$ para $1 \leq i \leq \ell(\Gamma)$. Observar que $\eta(\Gamma, H)$ prescribe el número de desigualdades que habrá. Así la paridad de $\eta(\Gamma, H)$ indica cuando H separa $\Gamma^{(0)}$ y $\Gamma^{\ell(\Gamma)}$. \square

Capítulo 2

Grupos de Reflexiones

2.1. Reflexiones

Introducimos en esta Sección la noción básica de reflexión. Se denota en lo que sigue $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ al grupo de isometrías de \mathbf{E} en sí mismo. Recordamos que una isometría es además una transformación afín.

Una *reflexión* en \mathbf{E} es una isometría en $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ cuyos puntos fijos conforman un hiperplano. Se llama a este el *hiperplano de reflexión* o *hiperplano reflectante* de esta reflexión. Denotamos $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ al conjunto de todas las reflexiones en \mathbf{E} .

Se dará en lo que sigue una fórmula cerrada describiendo una reflexión. Mediante esta algunos resultados son derivados hacia el final. Se obtendrá tal descripción en dos etapas.

Sea ρ en $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ una reflexión dada. Supongamos primero que su hiperplano reflectante contiene al origen. Sigue así que esta reflexión es una transformación ortogonal. Se denota por $\chi_\rho(X)$ a su polinomio característico.

Sobre los complejos $\chi_\rho(X)$ es un producto de factores lineales. Siendo $\text{Fix}(\rho)$ es un hiperplano¹

$$(X - 1)^{\dim(\mathbf{E})-1} \mid \chi_\rho(X).$$

Se tiene así que $\chi_\rho(X)$ no posee raíces complejas. Sabemos los autovalores de una transformación ortogonal son de módulo uno. Por tanto $X + 1 \mid \chi_\rho(X)$ ya que ρ no es la identidad. Observar además que $\text{Fix}(\rho)^\perp$ es el autoespacio de este autovalor. Se tiene así que dado v en $\text{Fix}(\rho)^\perp$ un vector unitario

$$\rho(x) = x - 2\langle x, v \rangle v, \quad x \in \mathbf{E}. \quad (2.1)$$

Nótese que esta reflexión está determinada por su hiperplano reflectante. Se puede proceder en la dirección inversa: Cada hiperplano en \mathbf{E} que contenga el origen es el hiperplano reflectante de alguna reflexión. Simplemente debemos usar la fórmula anterior para definirla.

Sea ahora ρ en $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ una reflexión cualquiera. Sea además f en $\text{Fix}(\rho)$ un punto fijo de esta. Observar que $\tau_f \circ \rho \circ \tau_{-f}$ es una reflexión con $\tau_f(\text{Fix}(\rho))$ por hiperplano reflectante. Se tiene además que $\tau_f(\text{Fix}(\rho))$ contiene al origen. Sigue por (2.1) que dado v en $\tau_f(\text{Fix}(\rho))^\perp$ un vector unitario

$$\rho(x) = x - 2\tau_{-f}(\langle \tau_f(x), v \rangle v), \quad x \in \mathbf{E}. \quad (2.2)$$

¹Se denota $\text{Fix}(\rho)$ a los puntos fijos de esta función.

Observar que $\tau_f(\text{Fix}(\rho))$ no depende del f en $\text{Fix}(\rho)$ elegido. Por lo tanto esta reflexión está determinada por su hiperplano reflectante. Se puede como antes podemos ir en dirección inversa: Cada hiperplano en \mathbf{E} es el hiperplano reflectante de alguna reflexión. Usamos igualmente la fórmula anterior para definirla. Se denotará ρ_H en $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ la reflexión por H en \mathbf{E} un hiperplano.

Nótese que toda reflexión es una involución: Se comprueba fácilmente vía (2.1) para reflexiones del tipo allí discutido. Siendo toda reflexión conjugada de una de estas, sigue la afirmación. Concluimos esta Sección con el siguiente resultado.

Proposición 2.1.1. *Cada reflexión en $\mathcal{R}(\mathbf{E})$ permuta los semiespacios acotados por su hiperplano reflectante.*

Demostración. Recordar la descripción en la Proposición 1.1.1 de los semiespacios. Mediante un cálculo con la fórmula (2.2) obtenemos lo deseado. \square

2.2. Grupos de Reflexiones

Introducimos en este Capítulo los grupos de reflexiones. Asociado a estos está un arreglo de hiperplanos como los del Capítulo anterior. Serán así de uso las herramientas previamente desarrolladas para el estudio de estos grupos. Obtendremos hacia el final una presentación por generadores y relaciones de los mismos. Marca esta el puntapié histórico de la noción de grupo de Coxeter.

Se recomienda al lector revisar las Secciones A.1 y A.2 del Apéndice antes de continuar: Introducimos allí notación que será aquí usada sin aclaración.

Sea una colección \mathcal{H} de hiperplanos en \mathbf{E} dada. Sea además W el subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ generado por las reflexiones a través de estos. Observar que W actúa en \mathbf{E} de forma natural. Se dirá que W es un *grupo de reflexiones* cuando:

R1. Bajo la acción de W la colección \mathcal{H} es estable.

R2. Siendo K y L en \mathbf{E} compactos, finitos σ en W cumplen $\sigma(K) \cap L$ no vacío.

Se tiene que la condición (*R2*) equivale a la siguiente:

R2'. Cada órbita de W en \mathbf{E} es un subconjunto discreto.

Observar que por esta las “operaciones infinitesimales” no son posibles. Se anima al lector a probar la mencionada equivalencia. Sin embargo esta no será necesaria en desarrollos posteriores.

Supóngase dado W un subgrupo de $\mathcal{I}(\mathbf{E})$ generado por reflexiones. Observar podemos elegir una colección \mathcal{H} tal que (*R1*) valga: Tomamos H en \mathcal{H} si y solo si ρ_H en W . Cuando H en \mathcal{H} vale para σ en W que

$$\rho_{\sigma(H)} = \sigma \circ \rho_H \circ \sigma^{-1}. \quad (2.3)$$

Sigue así que $\sigma(H)$ en \mathcal{H} con lo que (*R1*) vale. Observar que W también cumple (*R2*) de ser finito. Se tiene entonces un grupo de reflexiones en tal caso. Veamos algunas instancias concretas.

Ejemplo 2.2.1. Sean ρ y τ en $\mathcal{I}(\mathbb{R}^2)$ dos reflexiones no paralelas: Quiere decir que sus hiperplanos de reflexión no son paralelos. Supongamos que estos forman un ángulo θ en $(0, \pi)$ al cortarse. Observar la composición $\rho \circ \tau$ es una rotación

en el doble de este ángulo. Por lo tanto cuando $\theta \in \mathbb{Q} \cdot \pi$ el orden de $\rho \circ \tau$ es finito. Sigue así que en tal caso el grupo generado por ρ y τ es un grupo de reflexiones. Se conoce a estos como los grupos dihedrales. Ilustramos en la Figura 2.1 esta construcción.

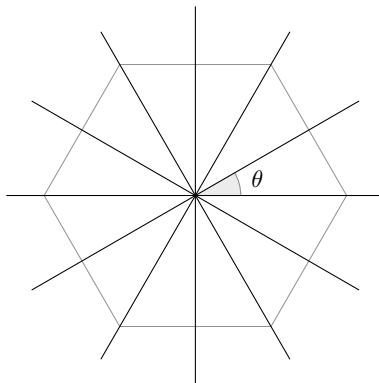


Figura 2.1

Observar que cuando $\theta \in \mathbb{Q}^c \cdot \pi$ el orden de $\rho \circ \tau$ es infinito. Se tiene así que las órbitas de la acción no son discretas: Cada una de estas está contenida en una circunferencia. Siendo que poseen infinitos puntos, estos deben de acumularse. Sigue así que en este caso el grupo obtenido no es un grupo de reflexiones.

Ejemplo 2.2.2. Considerar la acción de \mathbb{S}_n en \mathbb{R}^n vía permutar coordenadas: Se define σ_f en $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ para cada f en \mathbb{S}_n por

$$\sigma_f(x_1, \dots, x_n) = (x_{f^{-1}(1)}, \dots, x_{f^{-1}(n)})$$

para todo (x_1, \dots, x_n) en \mathbb{R}^n . Observar las transposiciones en \mathbb{S}_n son reflexiones vía esta acción. Se recuerda que estas transposiciones además generan al grupo simétrico. Así la imagen en $\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$ de esta acción es un grupo de reflexiones. Siendo la acción fiel, además el grupo es isomorfo a \mathbb{S}_n .

Se han considerado hasta ahora grupos de reflexiones de orden finito. Como muestra el siguiente Ejemplo estos también pueden ser infinitos.

Ejemplo 2.2.3. Sean ρ y τ en $\mathcal{I}(\mathbb{R})$ dos reflexiones distintas. Observar que sus hiperplanos de reflexión son dos puntos. Se tiene además que la composición $\rho \circ \tau$ es una traslación no trivial. Sigue así que el grupo generado por estas reflexiones es de orden infinito.

Se ve en la Figura 2.2 la forma general de las reflexiones en este grupo: Son estas traslaciones de alguno de los dos generadores. Observar que así las órbitas de la acción de grupo son discretas. Se tiene por lo tanto que $(R2')$ también vale. Obtenemos así un grupo de reflexiones.



Figura 2.2

2.3. Acción de Grupo

Se denota el resto del Capítulo por W un grupo de reflexiones. Veamos que \mathcal{H} es un arreglo de hiperplanos: Cada punto admite un entorno compacto K en \mathbf{E} que lo contiene. Observar que $H \cap K$ no vacío implica $\rho_H(K) \cap K$ no vacío para H en \mathcal{H} . Sigue de (R2) que esto ocurre solo un número finito de veces. Quiere decir que \mathcal{H} es localmente finito.

Así es posible aplicar a \mathcal{H} todas las nociones del Capítulo anterior. Se llaman facetas de \mathbf{E} relativas a W las asociadas a este arreglo. Observar que W también actúa en el conjunto de facetas.

Proposición 2.3.1. *Sea F una faceta de \mathbf{E} relativa a W dada. Se tiene que $\sigma(F)$ para σ en W es otra faceta de igual dimensión.*

Demostración. Observar que H en \mathcal{H} corta a $\sigma(F)$ solo cuando lo contiene: Si $H \cap \sigma(F)$ es no vacío, también $\sigma^{-1}(H) \cap F$ es no vacío. Ya que $\sigma^{-1}(H)$ en \mathcal{H} sigue que $\sigma^{-1}(H)$ contiene a esta faceta. Se tiene así la afirmación buscada.

Siendo imagen continua de un conexo $\sigma(F)$ también lo es. Sigue así que todos los puntos en $\sigma(F)$ están relacionados: Yacen al mismo lado de todo hiperplano en \mathcal{H} que no corta este conjunto. Se tiene luego una faceta F' relativa a W que lo contiene. Con el mismo argumento, existe otra faceta F'' relativa a W tal que

$$F \subseteq \sigma^{-1}(F') \subseteq F''.$$

Se recuerda que dos facetas distintas son disyuntas. Sigue así que todas las contenciones anteriores deben ser igualdades. Particularmente $\sigma(F)$ es una faceta de \mathbf{E} relativa a W .

Observar que H en $\mathcal{H}(\sigma(F))$ si y solo si $\sigma^{-1}(H)$ en $\mathcal{H}(F)$ por definición. Se deduce así que $\text{sop}(\sigma(F))$ y $\sigma(\text{sop}(F))$ son iguales. Por lo tanto ambas F y $\sigma(F)$ son de igual dimensión. \square

Se tiene en particular que W actúa en el conjunto de cámaras. Siguen de esta Proposición los siguientes dos resultados.

Corolario. *Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a W dada. Si H en \mathcal{H} es un muro de esta cámara entonces*

$$C \Big|_H \rho_H(C).$$

Demostración. Sea F la cara de C que tiene H como soporte. Observar que $\text{cl}(C)$ y $\text{cl}(\rho_H(C))$ contienen esta cara: Sigue al estar esta contenida en el hiperplano de reflexión. Por la Proposición anterior $\rho_H(C)$ es también una cámara. Se tiene así que ambas C y $\rho_H(C)$ comparten una cara. \square

Nótese que la Proposición 2.1.1 implica que C y $\rho_H(C)$ son distintas. Sigue de esta que ambas cámaras yacen en lados opuestos de un hiperplano.

Corolario. *Sean C y D dos cámaras de \mathbf{E} relativas a W tales que*

$$C \Big|_H D.$$

Se tiene para cada σ en W que

$$\sigma(C) \Big|_{\sigma(H)} \sigma(D).$$

Demostración. Sea F la cara de C y D que tiene H como soporte. Se tiene que $\text{sop}(\sigma(F))$ es igual a $\sigma(H)$ por la Proposición anterior. Más aún las clausuras $\text{cl}(\sigma(C))$ y $\text{cl}(\sigma(D))$ contienen a esta faceta. Sigue al ser ambas $\sigma(C)$ y $\sigma(D)$ cámaras, que estas comparten una cara. \square

2.4. Propiedades Fundamentales

Fijemos una cámara C^* de \mathbf{E} relativa a W en forma arbitraria. Se llamará la *cámara fundamental* a esta en adelante. Se denota por S al conjunto de reflexiones a través de sus muros.

Sentaremos en lo que sigue las bases de este Capítulo. Será necesario para ello usar todos los instrumentos hasta ahora desarrollados. Se introduce antes de continuar algo de terminología.

Un elemento σ en $\langle S \rangle$ admite una expresión $\underline{\sigma}$ en S^* de la forma

$$(\rho_{H_1}, \rho_{H_2}, \dots, \rho_{H_n}).$$

Observemos que el primer Corolario de la Proposición 2.3.1 implica

$$C^* \Big|_{H_i} \rho_{H_i}(C^*), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.4)$$

Si por σ_i denotamos $\rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_i}$ vale del segundo Corolario que

$$\sigma_{i-1}(C^*) \Big|_{\sigma_{i-1}(H_i)} \sigma_i(C^*), \quad 1 < i \leq n. \quad (2.5)$$

Obtenemos así una galería $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ asociada a nuestra expresión:

$$(C^*, \sigma_1(C^*), \dots, \sigma_n(C^*))$$

Se tiene que esta conecta C^* y $\sigma(C^*)$ por definición. Vale además que

$$\ell(\underline{\sigma}) = \ell(\Gamma_{\underline{\sigma}}). \quad (2.6)$$

Asociamos a la expresión vacía la galería con solo la cámara fundamental. Comenzamos ahora a cimentar este Capítulo.

Proposición 2.4.1. *Cada cámara C de \mathbf{E} relativa a W admite σ en W tal que*

$$\sigma(C^*) = C.$$

Quiere decir que la acción del grupo en las cámaras es transitiva.

Demostración. Se verá que vale más aún con σ en $\langle S \rangle$ la igualdad anterior. Sea Γ una galería no vacilante que comienza por la cámara fundamental. Veamos que esta es de la forma $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para algún $\underline{\sigma}$ en S^* . Se procede por inducción en $\ell(\Gamma)$ para ello.

Cuando $\ell(\Gamma)$ es cero esto es trivial. Observar la galería asociada a la expresión vacía cumple lo deseado.

Supongamos ahora que la longitud $\ell(\Gamma)$ es positiva. Se obtiene la galería $\hat{\Gamma} : (\Gamma^{(0)}, \dots, \Gamma^{(\ell(\Gamma)-1)})$ eliminando de Γ la última cámara. Sigue por inducción

que $\widehat{\Gamma}$ es de la forma $\Gamma_{\hat{\underline{\sigma}}}$ para algún $\hat{\underline{\sigma}}$ en S^* . Observar que $\hat{\sigma}(C^*)$ es la última cámara de esta galería.

Gracias a esto existe H en \mathcal{H} tal que

$$\hat{\sigma}(C^*) \Big|_H \Gamma^{\ell(\Gamma)}.$$

Se tiene del segundo Corolario de la Proposición 2.3.1 que

$$C^* \Big|_{\hat{\sigma}^{-1}(H)} \hat{\sigma}^{-1}(\Gamma^{\ell(\Gamma)}).$$

Sigue así que $\rho_{\hat{\sigma}^{-1}(H)}$ en S al ser $\hat{\sigma}^{-1}(H)$ de C^* un muro. Vale por (2.3) que

$$\hat{\sigma} \circ \rho_{\hat{\sigma}^{-1}(H)}(C^*) = \rho_H \circ \hat{\sigma}(C^*) = \Gamma^{\ell(\Gamma)}$$

Observar usamos el Lema 1.6.1 y la Proposición 2.1.1 en la última igualdad². Vemos así que Γ es de la forma $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para un $\underline{\sigma}$ en S^* : Basta tomar el producto $\hat{\underline{\sigma}}(\rho_{\hat{\sigma}^{-1}(H)})$ como expresión.

Sea ahora C una cámara de \mathbf{E} relativa a W dada. Se tiene de la Proposición 1.6.2 entre C y C^* una galería no vacilante. Sigue de lo recién visto que existe σ en $\langle S \rangle$ tal que

$$\sigma(C^*) = C. \quad \square$$

Se deduce el siguiente Corolario de forma inmediata.

Corolario. *Como grupo S genera a W .*

Demostración. Consideremos H en \mathcal{H} un hiperplano dado. Por la Proposición 1.5.1 una cámara C de \mathbf{E} relativa a W lo tiene por muro. Vimos en la Proposición anterior existe σ en $\langle S \rangle$ tal que

$$\sigma(C^*) = C.$$

Sigue así que C^* tiene a $\sigma^{-1}(H)$ por uno de sus muros. Como en (2.3) tenemos

$$\rho_H = \sigma \circ \rho_{\sigma^{-1}(H)} \circ \sigma^{-1}.$$

Se deduce que ρ_H en $\langle S \rangle$ en consecuencia. Observar que esto es válido para H en \mathcal{H} arbitrario. Siendo que estas reflexiones generan al grupo sigue el resultado. \square

Obtuvimos en el curso de la prueba un resultado adicional: Cada reflexión por un hiperplano en \mathcal{H} es el conjugado de un generador. Se verá más adelante que toda reflexión en el grupo es de esta forma.

Vimos recién que S es de W un conjunto de generadores. Así la notación del Apéndice A.2 puede aplicarse a este par. Se adopta entonces esta terminología por el resto del Capítulo.

Se probará a continuación que la acción del grupo es libre. Sigue así que esta es simplemente transitiva. Será necesario a este propósito el siguiente resultado.

Proposición 2.4.2. *Una galería $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para $\underline{\sigma}$ en S^* es minimal si y solo si la expresión es reducida. Se tiene más aún la igualdad*

$$\ell(\sigma) = d(C^*, \sigma(C^*)).$$

²Usamos además que ambas cámaras son distintas: Aquí la necesidad de tomar una galería no vacilante.

Demostración. Supongamos que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para $\underline{\sigma}$ en S^* es minimal. Sea $\underline{\sigma}'$ en S^* otra expresión del mismo elemento. Siendo que $\Gamma_{\underline{\sigma}'}$ conecta C^* y $\sigma(C^*)$ vale

$$\ell(\Gamma_{\underline{\sigma}}) \leq \ell(\Gamma_{\underline{\sigma}'}).$$

Se tiene por (2.6) que $\ell(\underline{\sigma}) \leq \ell(\underline{\sigma}')$ de donde la primera es reducida.

Asumamos que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para $\underline{\sigma}$ en S^* no es minimal. Usaremos la notación en (2.4) para esta expresión. Se denota además por σ_0 a la identidad de momento. Vimos en (2.5) que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ atraviesa los hiperplanos

$$\sigma_0(H_1), \sigma_1(H_2), \dots, \sigma_{n-1}(H_n).$$

Sabemos de la Proposición 1.6.3 existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que

$$\sigma_{i-1}(H_i) = \sigma_{j-1}(H_j).$$

Se ilustra en la Figura 2.3 esta situación.

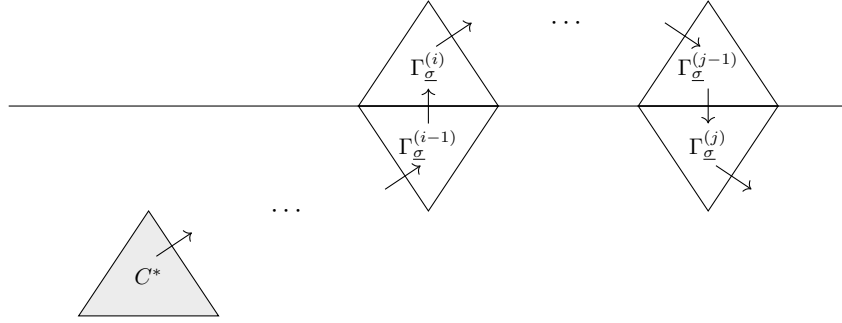


Figura 2.3

Vale por lo tanto que

$$\sigma_{i-1} \circ \rho_{H_i} \circ \sigma_{i-1}^{-1} = \rho_{\sigma_{i-1}(H_i)} = \rho_{\sigma_{j-1}(H_j)} = \sigma_{j-1} \circ \rho_{H_j} \circ \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Reescribiendo esta expresión encontramos

$$\sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} = \sigma_j \circ \sigma_{j-1}^{-1}.$$

Se puede así expresar a σ como

$$\sigma = \sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_j^{-1} \circ \sigma = \sigma_{i-1} \circ \sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} \circ \sigma_{j+1}^{-1}.$$

Si expandimos $\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1}$ obtenemos que

$$\sigma_i^{-1} \circ \sigma_{j-1} = \rho_{H_i} \circ \dots \circ \rho_{H_1} \circ \rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}} = \rho_{H_{i+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}}.$$

Combinando con la igualdad anterior tenemos que

$$\sigma = \rho_{H_1} \circ \dots \circ \rho_{H_{i-1}} \circ \rho_{H_{i+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_{j-1}} \circ \rho_{H_{j+1}} \circ \dots \circ \rho_{H_n}. \quad (2.7)$$

Sigue así que $\ell(\sigma) < \ell(\underline{\sigma})$ de donde esta expresión no es reducida: Observar en (2.5) obtuvimos una expresión de menor longitud. Ilustramos en la Figura 2.4 la galería asociada a esta expresión. Se obtiene reflejando entre $\Gamma_{\underline{\sigma}}^{(i)}$ y $\Gamma_{\underline{\sigma}}^{(j-1)}$ la galería anterior. \square

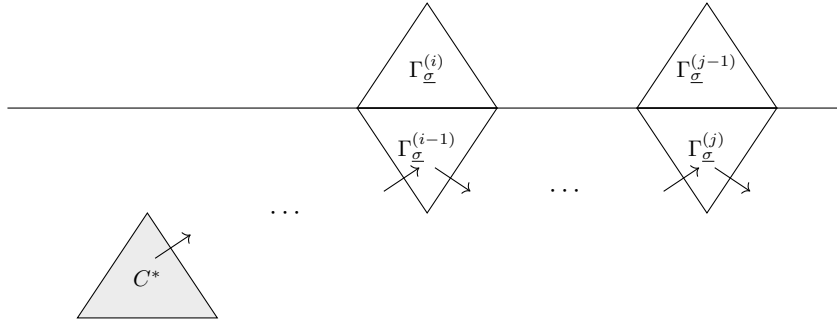


Figura 2.4

Observar así que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para $\underline{\sigma}$ en S^* reducida es no vacilante. Se tiene como adelantamos el siguiente resultado.

Corolario. *Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a W dada. Solo para σ en W trivial ambas C y $\sigma(C)$ son iguales. Quiere decir que la acción de grupo es libre.*

Demostración. Observar que $\ell(\sigma)$ es cero cuando $d(C^*, \sigma(C^*))$ lo es. \square

Sigue por tanto que la acción es simplemente transitiva. Se tiene así una biyección del grupo con el conjunto de cámaras: Hay $\text{ord}(W)$ cámaras de \mathbf{E} relativas a W .

Corolario. *Cada hiperplano H en \mathbf{E} tal que ρ_H en W pertenece a \mathcal{H} .*

Demostración. Supóngase un hiperplano H en \mathbf{E} no cumple con esto. Sigue que este contiene un punto que ningún otro en \mathcal{H} contiene: Ver el Corolario de la Proposición 1.5.1. Se tiene así que una cámara C de \mathbf{E} relativa a W corta este hiperplano. Siendo que $C \cap \rho_H(C)$ es no vacío, ambas cámaras son iguales. Sin embargo esto contradice el Corolario anterior. \square

Obtenemos así que H en \mathcal{H} si y solo si ρ_H en W . Sigue luego que toda reflexión en W es de S un conjugado: Vimos que una reflexión por un hiperplano en \mathcal{H} es el conjugado de un generador.

Se presentan en los próximos Corolarios dos propiedades fundamentales. Veremos estas imponen fuertes restricciones en la estructura del grupo.

Corolario (Propiedad de Supresión). *Siendo (ρ_1, \dots, ρ_n) en S^* no reducida, existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que³*

$$(\rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \hat{\rho}_j, \dots, \rho_n)$$

es otra expresión del mismo elemento.

Demostración. Supóngase que (ρ_1, \dots, ρ_n) en S^* es no reducida. Se vio en la Proposición 2.5 que su galería asociada no es minimal. Siguiendo la prueba existen $1 \leq i < j \leq n$ que otorgan una expresión:

$$(\rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \hat{\rho}_j, \dots, \rho_n).$$

Se tiene por (2.7) que esta representa el mismo elemento que la primera. \square

³Se indica por $\hat{\bullet}$ que omitimos este elemento.

Veremos que la Propiedad de Supresión es equivalente a la que sigue. Se presenta de momento solo una de las implicaciones.

Corolario (Propiedad de Intercambio). *Sea σ en W con expresión (ρ_1, \dots, ρ_n) en S^* reducida. Si ρ en S es tal que $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\sigma)$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que*

$$(\rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$$

es una expresión de $\rho \circ \sigma$ reducida.

Demostración. Observar $(\rho, \rho_1, \dots, \rho_n)$ es de $\rho \circ \sigma$ una expresión no reducida. Sigue así que existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que alguna de

$$(\rho, \rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \hat{\rho}_j, \dots, \rho_n) \quad (\rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$$

es para $\rho \circ \sigma$ otra expresión. Si la primera lo fuese, niega que (ρ_1, \dots, ρ_n) es reducida. Se tiene así que debe darse el segundo caso. Más aún al ser $\ell(\rho \circ \sigma) \geq \ell(\sigma) - 1$ la segunda expresión es reducida. \square

Supongamos que σ en W es dado. Si ρ en S ambos $\ell(\rho \circ \sigma)$ y $\ell(\sigma)$ son distintos: Sigue de la Propiedad de Intercambio en forma directa. Consecuentemente la Proposición A.2.2 implica que

$$\ell(\rho \circ \sigma) = \ell(\sigma) \pm 1.$$

Sigue además para $\underline{\sigma}$ en S^* de la Propiedad de Supresión que

$$\ell(\sigma) \equiv \ell(\underline{\sigma}) \pmod{2}.$$

Se puede así definir el *signo* de σ en W como

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\ell(\underline{\sigma})}, \quad \underline{\sigma} \in S^*.$$

Observar esta noción generaliza la misma del grupo simétrico. Viendo el Ejemplo 2.2.2 allí los generadores son las transposiciones.

2.5. Un Camino Alternativo

Se explora aquí una derivación de la Propiedad de Supresión alternativa. Siendo este enfoque combinatorio, carece de sabor geométrico. Sin embargo motiva algunas ideas clave del Capítulo siguiente. Tan es así que aquí solo planteamos la base de este enfoque: Se continúa la derivación luego en un contexto más general.

Se denota por $SS_{\mathcal{H}}$ al grupo de permutaciones signadas: Quiere decir $SS_{\mathcal{H}}$ consiste de $f : \mathcal{H} \times \{+1, -1\} \rightarrow \mathcal{H} \times \{+1, -1\}$ biyectivas tales que

$$f(H, +1) = -f(H, -1), \quad H \in \mathcal{H}.$$

Vimos que cada hiperplano en \mathcal{H} parte \mathbf{E} en dos convexos. Se piensa así a $\mathcal{H} \times \{+1, -1\}$ como la familia \mathcal{E} de estos convexos. Serán los pares positivos aquellos que contienen la cámara fundamental. Mostramos ahora que W actúa en $\mathcal{H} \times \{+1, -1\}$ de forma natural.

Sabemos que W actúa en \mathcal{H} por definición. Vale así que W actúa en \mathcal{E} además. Se define de forma provisoria $\varepsilon : W \times \mathcal{H} \rightarrow \{+1, -1\}$ como

$$\varepsilon(\sigma, H) = \begin{cases} +1 & \mathcal{D}_{\sigma(H)}(C^*) = \mathcal{D}_{\sigma(H)}(\sigma(C^*)) \\ -1 & \mathcal{D}_{\sigma(H)}(C^*) \neq \mathcal{D}_{\sigma(H)}(\sigma(C^*)) \end{cases}$$

para (σ, H) en $W \times \mathcal{H}$. Observar que ambos $\sigma(\mathcal{D}_H(C^*))$ y $\mathcal{D}_{\sigma(H)}(\sigma(C^*))$ son iguales. Sigue así que $\varepsilon(\sigma, H)$ es positivo solo cuando $\sigma(\mathcal{D}_H(C^*))$ contiene a C^* . Igualmente $\varepsilon(\sigma, H)$ es negativo solo cuando esto no ocurre.

Se traduce así la acción de W en \mathcal{E} en un morfismo $\Phi : W \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ tal que

$$\Phi(\sigma)((H, 1)) = (\sigma(H), \varepsilon(\sigma, H)), \quad (w, H) \in W \times \mathcal{H}.$$

Observar además que este es un monomorfismo: Si σ en $\ker \Phi$ todo H en \mathcal{H} cumple

$$\mathcal{D}_H(\sigma(C^*)) = \mathcal{D}_H(C^*),$$

Sigue de (1.1) que ambas $\sigma(C^*)$ y C^* son iguales. Ver ahora el primer Corolario de la Proposición 2.4.2.

Veamos con algo más de detalle la función definida antes. Sigue de la Proposición 1.6.4 que para $\underline{\sigma}$ en S^* vale

$$\varepsilon(\sigma, H) = (-1)^{\eta(\Gamma_{\underline{\sigma}}, \sigma(H))}, \quad H \in \mathcal{H}.$$

Usamos para $\underline{\sigma}$ en S^* la notación en (2.5) de momento. Se tiene que $\Gamma_{\underline{\sigma}}$ para $\underline{\sigma}$ en S^* cruza únicamente los hiperplanos

$$\sigma_0(H_1), \sigma_1(H_2), \dots, \sigma_{n-1}(H_n).$$

Sigue así que $\sigma(H)$ figura $\eta(\Gamma_{\underline{\sigma}}, \sigma(H))$ veces en esta lista. Más aún $\sigma(H)$ es igual a $\sigma_k(H_{k+1})$ cuando y solo cuando

$$\rho_H = \sigma^{-1} \circ \sigma_k \circ \rho_{k+1} \circ \sigma_k^{-1} \circ \sigma = \rho_n \circ \dots \circ \rho_{k+2} \circ \rho_{k+1} \circ \rho_{k+2} \circ \dots \circ \rho_n.$$

Vemos entonces de estas observaciones que

$$\eta(\Gamma_{\underline{\sigma}}, \sigma(H)) = |\{k \in \mathbb{I}_n : \rho_H = \rho_n \circ \dots \circ \rho_{k+2} \circ \rho_{k+1} \circ \rho_{k+2} \circ \dots \circ \rho_n\}| \quad (2.8)$$

Si por $\xi(\underline{\sigma}, H)$ denotamos al lado derecho tenemos

$$\Phi(\sigma)((H, 1)) = (\sigma(H), (-1)^{\xi(\underline{\sigma}, H)}), \quad (w, H) \in W \times \mathcal{H}.$$

Se definirá en la Sección 3.2 un análogo más general de este morfismo. Veremos luego que posee las propiedades aquí demostradas. Usando esto probaremos que la Propiedad de Supresión es válida.

2.6. Región Fundamental

Surgen al estudiar una acción de grupo algunas preguntas naturales. Se trabajan en esta Sección dos particulares: ¿Cómo son sus órbitas? ¿Cuáles son los estabilizadores en un punto típico? Veremos que ambas admiten respuestas muy sencillas en nuestro caso.

Se examina la acción de W en \mathbf{E} en esta Sección. Se llama *región fundamental* a un conjunto de representantes de sus órbitas: Un subconjunto de \mathbf{E} que corta cada órbita en solo un punto.

Proposición 2.6.1. *Una región fundamental es $\text{cl}(C^*)$.*

Demostración. Observar primero que $\text{cl}(C^*)$ corta cada órbita: Sea C una cámara de \mathbf{E} relativa a W arbitraria. Por la Proposición 2.4.1 existe σ en W tal que

$$\sigma^{-1}(C^*) = C.$$

Siendo que la acción es continua vale

$$\sigma(\text{cl}(C)) = \text{cl}(\sigma(C)) = \text{cl}(C^*).$$

Se tiene así por la Proposición 1.4.1 que $\text{cl}(C^*)$ corta cada órbita.

Mostremos que cada órbita corta $\text{cl}(C^*)$ en solo un punto. Será suficiente que vale

$$\text{cl}(C^*) \cap \sigma(\text{cl}(C^*)) \subseteq \text{Fix}(\sigma), \quad \sigma \in W.$$

Se procede por inducción en la longitud. Trivialmente el resultado vale para la identidad: Cualquier punto es fijado por esta transformación.

Sea σ en W de longitud positiva. Sea además ρ en S tal que $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\sigma)$. Siendo esta una reflexión vale

$$\text{Fix}(\rho) \cap \text{Fix}(\rho \circ \sigma) \subseteq \text{Fix}(\sigma). \quad (1)$$

Se tiene $\underline{\sigma}$ en S^* reducida que comienza por esta reflexión: Sigue en forma directa de la Propiedad de Intercambio. Observar que de (2.4) la galería asociada cruza $\text{Fix}(\rho)$. Siendo la galería minimal C^* y $\sigma(C^*)$ son por este hiperplano separadas. Se cumple en particular que

$$\text{cl}(C^*) \cap \text{cl}(\sigma(C^*)) \subseteq \text{Fix}(\rho). \quad (2)$$

Observar que vale la contención

$$\text{cl}(C^*) \cap \text{cl}(\sigma(C^*)) \subseteq \rho(\text{cl}((\rho \circ \sigma)(C^*))).$$

Solo ha sido reescrito el segundo conjunto en la intersección. Siendo por (2) el lado derecho invariante tenemos que

$$\text{cl}(C^*) \cap \text{cl}(\sigma(C^*)) \subseteq \text{cl}((\rho \circ \sigma)(C^*)).$$

Obtenemos al aplicar la hipótesis inductiva que

$$\text{cl}(C^*) \cap \text{cl}(\sigma(C^*)) \subseteq \text{cl}(C^*) \cap \text{cl}((\rho \circ \sigma)(C^*)) \subseteq \text{Fix}(\rho \circ \sigma). \quad (3)$$

Sigue ahora de (1), (2) y (3) que vale el paso inductivo. \square

Se tiene de la prueba el siguiente resultado.

Corolario. *Si x en $\text{cl}(C^*)$ entonces*

$$\text{Stab}_W(x) = \langle \rho \in S : x \in \text{Fix}(\rho) \rangle.$$

Demostración. Sea σ en W de longitud positiva. Se vio existe ρ en S con $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\sigma)$ tal que

$$\text{cl}(C^*) \cap \sigma(\text{cl}(C^*)) \subseteq \text{Fix}(\rho) \cap \text{Fix}(\rho \circ \sigma).$$

Un argumento inductivo en la longitud completa la prueba. \square

2.7. Presentación de Coxeter

Se obtiene en esta Sección una presentación de los grupos de reflexiones. Será esta el punto de partida del Capítulo siguiente. Introducimos en primer lugar algo de notación.

Será denotada por $\Pi(\rho, \tau; n)$ para ρ, τ en S la n -upla alternada

$$\Pi(\rho, \tau; n) = (\rho, \tau, \rho, \dots)$$

para cada n en \mathbb{N} . Se denotará además por $m_{\rho, \tau}$ en \mathbb{N}^∞ el orden del producto de estas reflexiones. Observar que cuando este es finito

$$\underbrace{\rho \circ \tau \circ \rho \cdots}_{m_{\rho, \tau}} = \underbrace{\tau \circ \rho \circ \tau \cdots}_{m_{\rho, \tau}} \quad (2.9)$$

Obtenemos así que $\Pi(\rho, \tau; m_{\rho, \tau})$ y $\Pi(\tau, \rho; m_{\rho, \tau})$ expresan el mismo elemento. Se llaman *relaciones de trenzas* las de este tipo.

Considerar la matriz $(m_{\rho, \tau})_{\rho, \tau \in S}$ en $M_S(\mathbb{N}^\infty)$ de órdenes. Observar que esta cumple: (1) Ser simétrica; (2) Solo los coeficientes diagonales son uno. Se llamará a $(m_{\rho, \tau})_{\rho, \tau \in S}$ una *matriz de Coxeter* en adelante. Se dirá así además toda matriz en \mathbb{N}^∞ que cumpla (1) y (2).

Será ahora enunciada la presentación antes mencionada. Constituye esta el resultado fundamental de los grupos de reflexiones.

Teorema 2.7.1. *Se cumple de W la presentación por generadores y relaciones⁴:*

$$\langle \rho \in S \mid \forall \rho, \tau \in S \ (\rho\tau)^{m_{\rho, \tau}} = \text{id} \rangle.$$

Se probará antes un resultado auxiliar: Cualesquiera dos expresiones reducidas de un elemento están ligadas por relaciones de trenzas. Quiere decir que relaciones (2.9) permiten llevar una expresión a la otra. Se enuncia formalmente este resultado como sigue.

Lema 2.7.1 (Lema de Matsumoto). *Sea un morfismo $\phi : S^* \rightarrow M$ de monoïdes. Supóngase que para ρ, τ en S cuando $m_{\rho, \tau}$ es finito vale*

$$\phi(\Pi(\rho, \tau; m_{\rho, \tau})) = \phi(\Pi(\tau, \rho; m_{\rho, \tau}))$$

Se tiene que ϕ es constante en las expresiones reducidas de un mismo elemento.

Demostración. Sean $(\rho_1, \dots, \rho_n), (\tau_1, \dots, \tau_n)$ en S^* reducidas tales que

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) \neq \phi((\tau_1, \dots, \tau_n)).$$

Supóngase además que ambas expresan el mismo elemento. Sean más aún de longitud minimal entre las que cumplen esta condición. Se verá que vale el contra-recíproco del enunciado.

Obtenemos de la Propiedad de Intercambio una nueva expresión: Se tiene $1 \leq i \leq n$ tal que $(\tau_1, \rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$ expresa el mismo elemento. Sigue así que (τ_2, \dots, τ_n) y $(\rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \rho_n)$ expresan un mismo elemento. Siendo estas reducidas de menor longitud que las anteriores vale

$$\phi((\tau_1, \dots, \tau_n)) = \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \hat{\rho}_i, \dots, \rho_n)). \quad (*)$$

⁴Se fija $(\rho\tau)^{m_{\rho, \tau}}$ como la identidad de ser el exponente infinito.

Observar que $i < n$ no puede darse: Caso contrario ambas $(\rho_1, \dots, \rho_{n-1})$ y $(\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_{n-1})$ expresan un mismo elemento. Sigue como antes que

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) = \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \widehat{\rho}_i, \dots, \rho_n)).$$

Sin embargo por (*) esto contradice nuestra hipótesis inicial. Se tiene más aún de misma ecuación que

$$\phi((\rho_1, \dots, \rho_n)) \neq \phi((\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1})).$$

Sintetizemos nuestro trabajo hasta ahora: Se partió de dos expresiones reducidas de un mismo elemento cuya imagen difiere. Obtuvimos de estas una nueva expresión reducida del mismo elemento. Vimos que la imagen de esta nueva difiere con una de las anteriores. Condensamos con diagramas este razonamiento:

$$\begin{array}{ccc} (\rho_1, \dots, \rho_n) & \longrightarrow & (\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}) \\ (\tau_1, \dots, \tau_n) & & (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) \end{array}$$

Se tienen en cada columna expresiones cuya imagen difiere. Más aún todas ellas expresan el mismo elemento. Observar que podemos iterar este proceso:

$$\begin{array}{ccccccc} (\rho_1, \dots, \rho_n) & \longrightarrow & (\tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-1}) & \longrightarrow & (\rho_1, \tau_1, \rho_1, \dots, \rho_{n-2}) & \longrightarrow & \dots \\ (\tau_1, \dots, \tau_n) & & (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) & & (\tau_1, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}) & & \end{array}$$

Obtenemos así expresiones $\Pi(\rho_1, \tau_1; n)$ y $\Pi(\tau_1, \rho_1; n)$ reducidas tales que

$$\phi(\Pi(\rho_1, \tau_1; n)) \neq \phi(\Pi(\tau_1, \rho_1; n)).$$

Observar que $n \leq \text{ord}(\rho_1 \circ \tau_1)$ al ser ambas expresiones reducidas. Vale además que $\text{ord}(\rho_1 \circ \tau_1) \leq n$ al expresar el mismo elemento. Se cumple así la igualdad, con lo que

$$\phi(\Pi(\rho_1, \tau_1; m_{\rho_1, \tau_1})) \neq \phi(\Pi(\tau_1, \rho_1; m_{\rho_1, \tau_1})). \quad \square$$

Se procede ahora la prueba del Teorema antes enunciado.

Demostración del Teorema 2.7.1. Sea W' el grupo con la presentación del enunciado. Se tiene un morfismo $\phi : S^* \rightarrow W'$ de monoides que hace conmutar:

$$\begin{array}{ccc} & & S^* \\ & \nearrow \iota & \vdots \phi \\ S & & \downarrow \\ & \searrow \iota & W' \end{array}$$

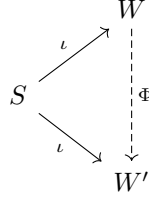
Observar que para ρ, τ en S cuando $m_{\rho, \tau}$ es finito vale

$$\phi(\Pi(\rho, \tau; m_{\rho, \tau})) = \phi(\Pi(\tau, \rho; m_{\rho, \tau})).$$

Sigue así que este es constante en las expresiones reducidas de un elemento. Se define ahora $\Phi : W \rightarrow W'$ para $\underline{\sigma}$ en S^* reducida como

$$\Phi(\underline{\sigma}) = \phi(\underline{\sigma}). \quad (*)$$

Observar este es tal que hace conmutar el diagrama:



Mostremos ahora que Φ es un morfismo de grupos. Sabemos que ϕ es un morfismo de monoides. Sería así suficiente que $(*)$ valga para toda expresión. Veamos para σ en W y ρ en S que

$$\Phi(\rho \circ \sigma) = \phi((\rho))\Phi(\sigma).$$

Sigue luego por inducción la afirmación anterior. Observar que si $\ell(\sigma) < \ell(\rho \circ \sigma)$ entonces

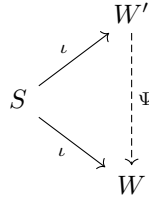
$$\Phi(\rho \circ \sigma) = \phi((\rho)\underline{\sigma}) = \phi((\rho))\phi(\underline{\sigma}) = \phi((\rho))\Phi(\sigma),$$

para toda $\underline{\sigma}$ en S^* reducida. Si $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\sigma)$ entonces $\ell(\rho \circ \sigma) < \ell(\rho \circ (\rho \circ \sigma))$ de donde por el caso anterior

$$\Phi(\sigma) = \Phi(\rho \circ (\rho \circ \sigma)) = \phi((\rho))\Phi(\rho \circ \sigma).$$

Siendo $\phi((\rho))$ una involución obtenemos la afirmación.

Claramente W cumple las relaciones en el enunciado del Teorema. Se tiene así un morfismo $\Psi : W' \rightarrow W$ de grupos que hace conmutar:



Observar que $\Phi \circ \Psi$ y $\Psi \circ \Phi$ actúan en S como la identidad: Sigue de la conmutatividad de los dos anteriores diagramas. Siendo que S genera a W y W' ambas composiciones son la identidad. Se tiene luego que W es isomorfo a W' como buscábamos. \square

Se estudiarán motivados por este Teorema los grupos de Coxeter en el próximo Capítulo. Son estos aquellos grupos que cumplen una presentación análoga a la anterior. Será basados en estos que apoyaremos la teoría de Soergel.

Veamos el Teorema anterior en un Ejemplo antes de concluir.

Ejemplo 2.7.1. Consideremos la situación en el Ejemplo 2.2.2 descrita. Observar que conjugar una transposición otorga nuevamente una transposición. Sigue así que las reflexiones en \mathbb{S}_n son exactamente las transposiciones.

Observar que el hiperplano de reflexión de (ij) para $1 \leq i < j \leq n$ es

$$H_{i,j} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j\}.$$

Así un punto en una cámara tiene todas sus coordenadas distintas. Se puede elegir así la cámara fundamental como

$$C^* = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < \dots < x_n\}.$$

Observar que C^* tiene $H_{1,2}, H_{2,3}, \dots, H_{n-1,n}$ por muros. Supongamos que $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{n-1}$ denotan las reflexiones en estos. Se tienen para $1 \leq i < n$ las relaciones

$$\begin{aligned}\rho_i^2 &= \text{id}, \\ (\rho_i \rho_{i+1})^3 &= \text{id}, \\ (\rho_i \rho_j)^2 &= \text{id} \quad |i - j| > 1.\end{aligned}$$

Se referirá como *presentación estándar* de \mathbb{S}_n a esta en adelante.

Capítulo 3

Grupos de Coxeter

3.1. Grupos de Coxeter

Sea W un grupo junto con S un conjunto de generadores. Diremos que el par (W, S) es un *sistema de Coxeter* si existe una matriz M en $M_S(\mathbb{N}^\infty)$ de Coxeter tal que

$$W = \langle s \in S \mid \forall s, t \in S \ (st)^{m_{s,t}} = \text{id} \rangle. \quad (3.1)$$

Se define $|S|$ a ser el *rango* del sistema (W, S) . Una matriz $M \in M_S(\mathbb{N}^\infty)$ de Coxeter es *compatible* con (W, S) de cumplirse (3.1).

Se llama *grupo de Coxeter* a un grupo que forme parte de un sistema de Coxeter. Observar que un mismo grupo podría conformar un sistema de Coxeter de distintas formas. Incluso es posible que el rango de estos sistemas no sea igual.

Se llaman *reflexiones* a los conjugados de elementos en el conjunto de generadores. Motiva esta terminología la observación que sigue al segundo Corolario de la Proposición 2.4.2. Se denotan además por \mathcal{R} al conjunto de todas estas.

Podría *prima facie* parecer que todo grupo de Coxeter es de reflexiones. Sin embargo para estos últimos [2, Teorema V.3.3] el conjunto de generadores es finito. Como muestra el siguiente Ejemplo esto no vale para todo grupo de Coxeter.¹

Ejemplo 3.1.1. Si S un conjunto cualquiera $\prod_{s \in S} \mathbb{Z}_2$ es de Coxeter. Sus generadores son los naturales de cada coordenada.

Continuamos extendiendo terminología previa. Si s, t en S denotamos por $\Pi(s, t; n)$ a la n -upla alternada

$$\Pi(s, t; n) = (s, t, s, \dots)$$

para cada n en \mathbb{N} . Observar que cuando $m_{s,t}$ es finito vale

$$\underbrace{sts \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{tst \cdots}_{m_{s,t}}$$

Sigue así que $\Pi(s, t; m_{s,t})$ y $\Pi(t, s; m_{s,t})$ son expresiones de un mismo elemento. Como antes llamamos *relaciones de trenzas* a relaciones en W de este tipo.

¹Hay grupos de Coxeter con conjunto de generadores finito que no son grupos de reflexiones: <https://www.math.uzh.ch/sepp/magma-2.25.2-ds/html/text1098.htm>

Cabría preguntarse en primera instancia si (3.1) define el grupo trivial o no. Se ve rápidamente que este tiene orden al menos dos: Observar existe un homomorfismo $\text{sgn} : W \rightarrow \{-1, 1\}$ tal que

$$\text{sgn}(w) = (-1)^{\ell(w)}$$

para todo w en W . Se tiene que esta noción de *signo* generaliza aquella para grupos de reflexiones. Si w en W de aquí tenemos que $\ell(w)$ y $\ell(sw)$ son distintos para cada s en S . Sigue entonces de la Proposición A.2.2 que

$$\ell(sw) = \ell(w) \pm 1. \quad (3.2)$$

3.2. Propiedades Combinatorias

Generalmente es difícil extraer información de un grupo a través de su presentación por generadores y relaciones. Así para continuar nuestro estudio deberemos encontrar una representación adecuada. Como adelantamos en la Sección 2.5 extenderemos algunas nociones por analogía.

Sea \mathcal{H} un conjunto en biyección con \mathcal{R} el conjunto de reflexiones. Se denotará $H \mapsto s_H$ para H en \mathcal{H} a esta correspondencia. Se llamarán además *hiperplanos* a los elementos del conjunto \mathcal{H} . Así esta correspondencia diremos asigna su *hiperplano reflectante* a cada reflexión. Siendo que W actúa en \mathcal{R} por conjugación, tenemos una acción de W en \mathcal{H} tal que

$$s_{w(H)} = ws_Hw^{-1}$$

para w en W y H en \mathcal{H} .

Un elemento w en W tiene una expresión \underline{w} en S^* como

$$(s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Se define como en (2.8) el valor

$$\xi(\underline{w}, H) = |\{k \in \mathbb{I}_n : s_H = s_n \cdots s_{k+2}s_{k+1}s_{k+2} \cdots s_n\}|$$

para cada H en \mathcal{H} . Veremos que su paridad no depende de la expresión elegida. Se puede entender este valor como en grupos de reflexiones: Sería el número de veces que la galería asociada a una expresión cruza un hiperplano.

Sea $H^{k+1}(\underline{w})$ en \mathcal{H} el hiperplano reflectante de

$$s_n \cdots s_{k+2}s_{k+1}s_{k+2} \cdots s_n$$

para $k \in \mathbb{I}_n$. Observar estos corresponden a los hiperplanos que atraviesa la galería. Sigue entonces que $\xi(\underline{w}, H)$ puede reescribirse como

$$\xi(\underline{w}, H) = |\{k \in \mathbb{I}_n : H = H^{k+1}(\underline{w})\}| \quad (3.3)$$

para cada H en \mathcal{H} .

Como en la Sección 2.5 vale el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1. *Se tiene un morfismo de grupos $\Phi : W \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ dado por*

$$\Phi(w)((H, 1)) = (w(H), (-1)^{\xi(\underline{w}, H)}), \quad (w, H) \in W \times \mathcal{H}.$$

Así el lado derecho es independiente de la expresión elegida.

Demostración. Sea ϕ_s en $SS_{\mathcal{H}}$ para s en S la permutación dada por²

$$\phi_s((H, 1)) = (s(H), (-1)^{\delta(s, s_H)}), \quad H \in \mathcal{H}.$$

Observar esta es una involución pues su cuadrado es la identidad. Se tiene que estas inducen un único morfismo de monoides $\phi : S^* \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} & & S^* \\ & \nearrow & \downarrow \phi \\ S & & \\ & \searrow & \\ & & SS_{\mathcal{H}} \end{array}$$

es conmutativo. Veamos por inducción en $\ell(\underline{w})$ para \underline{w} en S^* que vale

$$\phi(\underline{w})((H, 1)) = (w(H), (-1)^{\xi(\underline{w}, H)}), \quad H \in \mathcal{H}.$$

Se tiene que el caso inicial es inmediato de las definiciones.

Sea \underline{w} en S^* de longitud mayor a uno. Supongamos que el resultado vale para expresiones de menor longitud. Observar existe \underline{v} en S^* tal que \underline{w} iguala $(s)\underline{v}$ para algún s en S . Usando la hipótesis inductiva

$$\phi(\underline{w})((H, 1)) = \phi_s((v(H), (-1)^{\xi(\underline{v}, H)})) = (w(H), (-1)^{\xi(\underline{v}, H) + \delta(s, s_{v(H)})})$$

para todo H en \mathcal{H} . Se comprueba fácilmente que $\xi(\underline{w}, H)$ es igual a $\xi(\underline{v}, H) + \delta(s, s_{v(H)})$ lo que prueba el paso inductivo.

Sean s, t en S tales que $m_{s,t}$ es finito. Observar que tenemos

$$\xi(\Pi(s, t; 2m_{s,t}), H) = \{k \in \mathbb{I}_{2m_{s,t}} : s_H = (ts)^k t\}$$

para todo H en \mathcal{H} . Se cumple además la igualdad

$$(ts)^k t = (ts)^{m_{s,t} + k} t, \quad 0 \leq k < m_{s,t}.$$

Así $\xi(\Pi(s, t; 2m_{s,t}), H)$ es par, con lo que $\phi(\Pi(s, t; 2m_{s,t}))$ es la identidad.

Sea $\pi : S^* \rightarrow F(S)$ es el morfismo canónico de monoides. Se tiene un morfismo de grupos $\psi : F(S) \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ que hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & & S^* \\ & \nearrow & \downarrow \pi \\ S & & F(S) \\ & \searrow & \downarrow \psi \\ & & SS_{\mathcal{H}} \end{array}$$

Se deduce así que ϕ es idéntico a $\psi \circ \pi$ por unicidad. Siendo que cumple las relaciones, induce $\Phi : W \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ pasando al cociente. Se tiene que este morfismo

²Se denota por $\delta(-, -)$ la función delta de Kronecker.

hace conmutar el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
S^* & & \\
\downarrow & \searrow \phi & \\
F(S) & & SS_{\mathcal{H}} \\
\downarrow & \nearrow \Phi & \\
W & &
\end{array}$$

Sigue por lo tanto que este es de la forma

$$\Phi(w)((H, 1)) = (w(H), (-1)^{\xi(\underline{w}, H)}), \quad (w, H) \in W \times \mathcal{H}. \quad \square$$

Veremos además que este morfismo es inyectivo. Será necesario para ello un resultado adicional. Antes introducimos algo de notación.

Sea \underline{w} en S^* una expresión no vacía. Indicamos por $\mathcal{H}(\underline{w})$ al conjunto de hiperplanos $(H^k(\underline{w}) : 1 \leq k \leq n)$ en adelante. Se define el conjunto $\mathcal{H}(w)$ formado por los H en \mathcal{H} tales que

$$\xi(\underline{w}, H) \equiv 1 \pmod{2}.$$

Sigue de la Proposición 3.2.1 esto no depende de la expresión elegida. Observar que $\mathcal{H}(\underline{w})$ contiene a $\mathcal{H}(w)$ para cualquier \underline{w} en S^* . Se tiene así que $|\mathcal{H}(w)| \leq \ell(w)$ tomando una expresión reducida.

Lema 3.2.1. *Una expresión \underline{w} en S^* no vacía es reducida si y solo si*

$$|\mathcal{H}(\underline{w})| = \ell(\underline{w}).$$

En particular $\mathcal{H}(w)$ y $\mathcal{H}(\underline{w})$ son iguales si esta expresión es reducida.

Se demostrará ahora la parte “solo si” que necesitamos enseguida. Nos ocuparemos de la recíproca luego de probar algunos resultados.

Demostración del Lema 3.2.1. Supóngase que (s_1, \dots, s_n) define a esta expresión. Si existen $1 \leq k < l \leq n$ tales que $H^k(\underline{w})$ y $H^l(\underline{w})$ son iguales entonces

$$s_n \cdots s_{k+1} s_k s_{k+1} \cdots s_n = s_n \cdots s_{l+1} s_l s_{l+1} \cdots s_n$$

Manipulando esta igualdad obtenemos

$$s_k \cdots s_{l-1} = s_{k+1} \cdots s_l.$$

Multiplicando a derecha e izquierda apropiadamente

$$s_1 \cdots s_n = s_1 \cdots s_{k-1} s_{k+1} \cdots s_{l-1} s_l \cdots s_n.$$

Por lo tanto nuestra expresión original no es reducida. \square

Corolario. *Se tiene que el morfismo $\Phi : W \rightarrow SS_{\mathcal{H}}$ es inyectivo.*

Demostración. Sea w en W un elemento no nulo. Sea además \underline{w} en S^* una expresión reducida de este. Por el Lema anterior los hiperplanos que definen $\mathcal{H}(\underline{w})$ son todos distintos. Se tiene entonces que (3.3) implica

$$\Phi(w)(H^k(\underline{w}), 1) = (w(H^k(\underline{w})), -1).$$

Sigue así que esta permutación no es la identidad. \square

Se verá ahora una Proposición técnica que será de utilidad más adelante. Sin embargo para ello necesitamos el siguiente Lema.

Lema 3.2.2. *Vale que H en $\mathcal{H}(s_H)$ para todo H en \mathcal{H} .*

Demostración. Sea K en \mathcal{H} tal que $s(K)$ iguala H para algún s en S . Se tiene entonces la igualdad

$$\begin{aligned}\Phi(s_H)((H, 1)) &= \Phi(s)(\Phi(s_K)(\Phi(s)((H, 1)))) \\ &= \Phi(s)(\Phi(s_K)((K, (-1)^{\delta(s, s_H)}))) \\ &= \Phi(s)((K, (-1)^{\xi(s_K, K)}(-1)^{\delta(s, s_H)})) \\ &= (H, (-1)^{\delta(s, s_K)}(-1)^{\xi(s_K, K)}(-1)^{\delta(s, s_H)}) \\ &= (H, (-1)^{\xi(s_K, K)}).\end{aligned}$$

Hemos usado en el último paso que $\delta(s, s_H)$ y $\delta(s, s_K)$ son iguales. Sabemos existe K en \mathcal{H} con s_K en S tal que $w(K)$ y H son iguales para algún w en W . Un argumento inductivo en la longitud prueba el resultado. \square

Con esto estamos en condiciones de probar la Proposición recién mencionada.

Proposición 3.2.2. *Vale que H en $\mathcal{H}(w)$ si y solo si H en $\mathcal{H} \sim \mathcal{H}(ws_H)$ para w en W .*

Demostración. Observar que por el Lema anterior

$$\begin{aligned}\Phi(ws_H)((H, 1)) &= \Phi(w)(\Phi(s_H)((H, 1))) \\ &= \Phi(w)((H, -1)) \\ &= (w(H), (-1)^{\xi(w, H)+1}).\end{aligned}$$

Se tiene así que $\xi(\underline{w}(s_H), H) \equiv \xi(\underline{w}, H) + 1$ (mód 2) de donde se sigue el resultado. \square

Completamos ahora la dirección del Lema 3.2.1 que quedó pendiente.

Demostración del Lema 3.2.1. Supongamos los hiperplanos que definen $\mathcal{H}(\underline{w})$ son todos distintos. Por (3.3) tenemos que $\xi(\underline{w}, H)$ es impar si y solo si H en $\mathcal{H}(\underline{w})$. Esto implica que $\mathcal{H}(\underline{w})$ y $\mathcal{H}(w)$ son iguales de donde

$$\ell(\underline{w}) \leq \ell(w).$$

Sigue entonces que esta expresión es reducida. \square

Veremos que la Propiedad de Supresión del Capítulo anterior vale en el actual contexto. Seguirá de esta una versión más general de la Propiedad de Intercambio.

Proposición 3.2.3 (Propiedad de Supresión). *Siendo (s_1, \dots, s_n) en S^* no reducida, existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que*

$$(s_1, \dots, \widehat{s}_i, \dots, \widehat{s}_j, \dots, s_n)$$

es otra expresión del mismo elemento.

Demostración. Observar que del Lema 3.2.1 existen $1 \leq i < j \leq n$ tales que $H^i((s_1, \dots, s_n))$ y $H^j((s_1, \dots, s_n))$ son iguales. Sigue del cálculo en la parte “solo si” de este Lema que vale el resultado. \square

Se obtiene inmediatamente el siguiente resultado.

Proposición 3.2.4 (Propiedad de Intercambio). *Sea w en W con expresión (s_1, \dots, s_n) en S^* reducida. Si s en S es tal que $\ell(sw) < \ell(w)$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que*

$$(s_1, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_n)$$

es una expresión de sw reducida.

Demostración. Ver la prueba del Capítulo anterior. \square

Se podría llamar a esta *Propiedad de Intercambio a Izquierda* en alusión al producto a izquierda por el generador. Si así lo hiciésemos, una *Propiedad de Intercambio a Derecha* es igualmente válida: Se deriva esta de la primera tomando inversos.

3.3. Elemento Máximo

Cuando W es finito posee un elemento de longitud máxima. Se estudian en esta Sección algunas de sus propiedades. Introducimos antes algunos conceptos que serán de uso en lo que sigue.

Se define el *descenso a derecha* de un elemento w en W al conjunto

$$\mathcal{R}(w) = \{s \in S : \ell(ws) < \ell(w)\}.$$

Similarmente definimos $\mathcal{L}(w)$ el *descenso a izquierda* del mismo elemento. Observar que para cada w en W ambos $\mathcal{R}(w)$ y $\mathcal{L}(w^{-1})$ son iguales. Cada afirmación sobre alguno de estos conjuntos tiene una “dual” sobre el otro. Se trabajará por tanto con uno solo de estos conjuntos.

Sigue de la Propiedad de Intercambio a Derecha el siguiente resultado.

Corolario. *Un elemento en S pertenece a $\mathcal{R}(w)$ si y solo si existe \underline{w} en S^* reducida que termina por dicho elemento.*

Obtenemos de este Corolario el Lema que sigue fácilmente.

Lema 3.3.1. *Si w en W cada reflexión en $\mathcal{R}(w)$ tiene hiperplano reflectante en $\mathcal{H}(w)$. Sigue así que $\mathcal{R}(w)$ es un conjunto finito.*

Demostración. Suponiendo H en \mathcal{H} es tal que s_H en $\mathcal{R}(w)$ probemos que $\mathcal{H}(w)$ lo contiene. Por el Corolario anterior existe \underline{w} en S^* reducida que termina por dicha reflexión. Así H en $\mathcal{H}(\underline{w})$ de donde el Lema 3.2.1 prueba el resultado. Se tiene luego una inyección de $\mathcal{R}(w)$ en $\mathcal{H}(w)$ en particular. Más aún esto implica que

$$|\mathcal{R}(w)| \leq \ell(w). \quad \square$$

Un elemento en W se dirá *máximo* si es de longitud máxima. Cuando W es finito un tal elemento claramente existe. Como muestra la Proposición que sigue esta condición es también necesaria.

Proposición 3.3.1. *Un máximo en W existe si y solo si W es finito. Más aún, de existir este es único.*

Demostración. Supongamos que w_0 en W es un máximo. Notemos que $\mathcal{R}(w_0)$ contiene a S con lo que W es finitamente generado. Puesto que la longitud de los elementos es acotada W es finito.

Veamos por inducción en la longitud que

$$\ell(w_0 w^{-1}) = \ell(w_0) - \ell(w), \quad w \in W.$$

Sigue en forma trivial para la identidad. Sea ahora w en W con s en $\mathcal{R}(w)$. Tenemos por inducción que

$$\ell(w_0) = \ell(w_0(ws)^{-1}) + \ell(ws) \quad (*)$$

Como $\ell((w_0(ws)^{-1})(ws)s) < \ell((w_0(ws)^{-1})(ws))$ la Propiedad de Intercambio aplica. Así existe v en W con $\ell(v) < \ell(w_0(ws)^{-1})$ o $\ell(v) < \ell(ws)$ tal que $(w_0(ws)^{-1})(ws)s$ iguala $v(ws)$ o bien $(w_0(ws)^{-1})v$ respectivamente. Como $\ell(ws) < \ell(w)$ el último caso no puede darse. Se tiene entonces que

$$w_0 = (w_0(ws)^{-1})(ws) = vw$$

para algún v en W con $\ell(v) < \ell(w_0(ws)^{-1})$. Observar que (*) puede reescribirse:

$$\ell(w_0) = \ell(w_0(ws)^{-1}) - 1 + \ell(w)$$

Siendo que $\ell(w_0) \leq \ell(v) + \ell(w)$ tenemos de aquí que

$$\ell(w_0 w^{-1}) = \ell(v) = \ell(w_0(ws)^{-1}) - 1 = \ell(w_0) - \ell(w).$$

Completando así la prueba inductiva. Sigue ahora inmediatamente la unicidad del máximo. \square

3.4. Caracterizaciones

Se ha dicho que la Propiedad de Supresión y la Propiedad de Intercambio rigen la estructura del grupo. Son por esta razón descritas a menudo como *fundamentales* en la literatura. Veremos ahora cómo estas determinan a los grupos de Coxeter unívocamente. Introducimos antes algunas definiciones.

Sea un grupo W con S un conjunto de generadores de orden dos. Se dirá que (W, S) cumple la *Propiedad de Supresión* cuando la Proposición 3.2.3 vale para este grupo. Se dirá de igual forma que (W, S) cumple la *Propiedad de Intercambio* cuando la Proposición 3.2.4 vale del mismo.

Teorema 3.4.1. *Sea un grupo W con S un conjunto de generadores de orden dos. Son equivalentes sobre (W, S) las siguientes afirmaciones:*

- i. Conforman un sistema de Coxeter.*
- ii. Satisface la Propiedad de Supresión.*
- iii. Satisface la Propiedad de Intercambio.*

Se necesita para la demostración un Lema preliminar. Como algunos de los resultados previos, este ha aparecido en el Capítulo anterior.

Lema 3.4.1 (Lema de Matsumoto). *Supóngase que (W, S) satisface la Propiedad de Intercambio. Sea un morfismo $\phi : S^* \rightarrow M$ de monoides tal que para s, t en S cuando $\text{ord}(st)$ es finito vale*

$$\phi(\Pi(s, t; \text{ord}(st))) = \phi(\Pi(t, s; \text{ord}(st)))$$

Se tiene que ϕ es constante en las expresiones reducidas de un mismo elemento.

Demostración. Ver la prueba del Capítulo anterior. Sólo ha sido usada la Propiedad de Intercambio. \square

Consideremos un par (W, S) como en el enunciado del Teorema. Se define O_W en $M_S(\mathbb{N}^\infty)$ con $\text{ord}(st)$ por su entrada (s, t) -ésima. Observemos esta es una matriz de Coxeter: Sigue al ser los elementos en S involuciones. Se llama a esta la *matriz de orden* de (W, S) .

Veamos ahora la caracterización del Teorema anterior.

Demostración del Teorema 3.4.1. Observar que $(i \rightarrow ii)$ y $(ii \rightarrow iii)$ ya han sido vistas: Son la Proposición 3.2.3 y la Proposición 3.2.4 respectivamente.

Con la Propiedad de Intercambio vale el Lema de Matsumoto. Sigue $(iii \rightarrow i)$ replicando la prueba del Teorema 2.7.1. Se comprueba que (W, S) cumple (3.1) con su matriz de orden. \square

Se denota (W, S) un sistema de Coxeter en adelante. Observar que la prueba el implica un resultado adicional.

Corolario. *Todo sistema de Coxeter es compatible con su matriz de orden.*

Concluimos con otro Corolario del Teorema recién demostrado. Supongamos que I es de S un subconjunto dado. Se denota por W_I al subgrupo de W que I genera en adelante. Se llamará al mismo el *subgrupo parabólico* que I genera.

Corolario. *Conforma el par (W_I, I) un sistema de Coxeter.*

Demostración. Sea $\ell_I : W_I \rightarrow \mathbb{N}_0$ la longitud en I de W_I . Observemos esta coincide con la longitud en S de W . Claramente $\ell(w) \leq \ell_I(w)$ para cada w en W_I por definición. Más aún la Propiedad de Supresión en (W, S) implica la desigualdad opuesta.

Sigue entonces que (W_I, I) cumple la Propiedad de Intercambio. Se tiene del Teorema anterior que este es un sistema de Coxeter. \square

3.5. Orden de Bruhat

Sean v, w en W dos elementos. Si vale $\ell(v) < \ell(w)$ y $v^{-1}w$ en \mathcal{R} escribiremos

$$v \rightarrow w.$$

Así en particular $ws \rightarrow w$ para cada s en $\mathcal{R}(w)$. Observar que \rightarrow define un grafo dirigido \mathcal{B}_W con W por conjunto de vértices. Se llama a este el *grafo de Bruhat* de W en la literatura. Mostramos en la Figura 3.1 el grafo de Bruhat de \mathbb{S}_3 .

Se denota (W, \leq) la clausura transitiva de la relación \rightarrow en adelante. Si v, w en W cumplen $v \leq w$ estos son iguales o existen u_1, \dots, u_n en W tales que

$$v \rightarrow u_1 \rightarrow \dots \rightarrow u_n \rightarrow w. \quad (3.4)$$

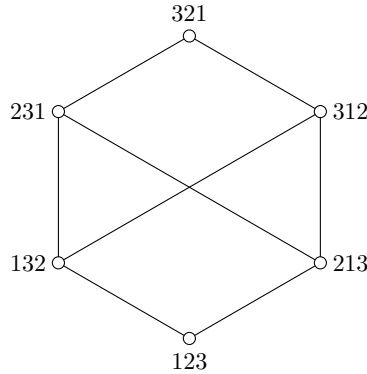


Figura 3.1

Se llama *orden de Bruhat* de W a este orden en adelante. Veremos luego algunas propiedades importantes de este orden. Se necesitan antes ciertos resultados preliminares.

Proposición 3.5.1. *Sea w en W con (s_1, \dots, s_n) en S^* por expresión. Si H en $\mathcal{H}(w)$ entonces existe $1 \leq i \leq n$ tal que*

$$(s_1, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_n)$$

es una expresión de ws_H .

Demostración. Si H en $\mathcal{H}(w)$ existe en particular $1 \leq i \leq n$ tal que

$$s_H = s_n \dots s_{i+1} s_i s_{i+1} \dots s_n.$$

Sigue ahora el resultado multiplicando por $s_1 \dots s_n$ a izquierda. □

Se obtiene ahora una generalización de la Propiedad de Intercambio.

Corolario (Propiedad de Intercambio Fuerte). *Sea w en W con (s_1, \dots, s_n) en S^* por expresión. Si H en \mathcal{H} es tal que $\ell(ws_H) \leq \ell(w)$ existe $1 \leq i \leq n$ tal que*

$$(s_1, \dots, \widehat{s}_i, \dots, s_n)$$

es una expresión de ws_H .

Demostración. Basta ver que H en $\mathcal{H}(w)$ por la Proposición anterior. Caso contrario H en $\mathcal{H}(ws_H)$ por la Proposición 3.2.2. Aplicando la Proposición anterior a una expresión reducida deducimos

$$\ell(w) = \ell((ws_H)s_H) < \ell(ws_H).$$

Queda así probado el contrareciproco del resultado. □

Con esto obtenemos la siguiente útil propiedad del orden de Bruhat.

Proposición 3.5.2. *Si v, w en W cumplen $v \leq w$ entonces $vs \leq w$ o $vs \leq ws$ para cada s en S .*

Demostración. Solo el caso $v \rightarrow w$ basta probarse. Sea s en S fijo, con lo que podemos asumir que $v^{-1}w$ no lo iguala. Si $\ell(vs) < \ell(v)$ tenemos $sv \rightarrow v \rightarrow w$ de donde $sv < w$.

Veamos que $vs < ws$ cuando $\ell(v) < \ell(vs)$ para completar la prueba. Observar que $(vs)^{-1}ws$ en \mathcal{R} en primer lugar. Basta así que $\ell(vs) < \ell(ws)$ para concluir. Supongamos lo contrario, procediendo por el absurdo.

Sea \underline{v} en S^* una expresión reducida. Se tiene $\underline{v}(s)$ en S^* es también reducida. Siendo que $\ell(vs(sv^{-1}ws)) < \ell(vs)$ podemos aplicar la Propiedad de Intercambio Fuerte. Como $v^{-1}w$ y s son distintos existe \hat{v} en W con $\ell(\hat{v}) < \ell(v)$ tal que

$$ws = \hat{v}s.$$

Sigue en particular $\ell(w) < \ell(v)$ produciendo una contradicción. \square

Corolario. Sea w en W con s en $\mathcal{R}(w)$. Vale para cada v en W con $v < w$ que $vs \leq w$.

Demostración. De la Proposición anterior $vs \leq w$ o bien $vs \leq ws$. Cuando vale el segundo caso $vs \leq ws < w$. \square

Se puede caracterizar el orden de Bruhat en términos de subexpresiones.

Proposición 3.5.3 (Propiedad de la Subexpresión). Sea w en W con \underline{w} en S^* reducida. Vale para v en W que $v \leq w$ si y solo si $\underline{v} \leq \underline{w}$ para alguna \underline{v} en S^* reducida.

Demostración. Supongamos que $v \leq w$ en primer lugar. Obtenemos \underline{v} en S^* tal que $\underline{v} \leq \underline{w}$ usando en (3.4) la Propiedad de Intercambio Fuerte reiteradamente. Sigue de la Propiedad de Supresión que podemos tomar a esta reducida.

Supongamos ahora $\underline{v} \leq \underline{w}$ para alguna \underline{v} en S^* reducida. Sean estas de la forma (s_1, \dots, s_n) y $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ con $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ respectivamente. Se procede por inducción en $\ell(w)$ donde el caso inicial trivial.

Cuando $i_k < n$ vale que $\underline{v} \leq \underline{w}(s_n)$ de donde $v \leq ws_n < w$ por hipótesis inductiva. Caso contrario vale que $vs_n \leq ws_n$ de igual forma. Sigue de la Proposición anterior que $v \leq ws_n < w$ o bien $v \leq w$. \square

Se podría haber usado esta caracterización del orden de Bruhat para definirlo. Sin embargo la aparente dependencia en las expresiones hubiese dificultado este camino. Con este enfoque por ejemplo la transitividad no es nada trivial.

Exploramos ahora algunos Corolarios de la Proposición anterior. Se define para \underline{w} en S^* el subconjunto $\chi(\underline{w})$ de S formado por los generadores que esta expresión contiene.

Corolario. Si w en W para cualquier \underline{w} en S^* reducida $\chi(\underline{w})$ es idéntico.

Demostración. Se procede por inducción en la longitud. Claramente esto vale para los generadores. Sea w en W tal que $\ell(w) > 1$ con $\underline{w}, \underline{w}'$ en S^* dos expresiones reducidas. Sabemos existen s, t en S tales que $\ell(sw), \ell(wt) < \ell(w)$ con expresiones $\underline{sw}, \underline{wt}$ en S^* tales que

$$\chi(\underline{w}) = \chi(\underline{sw}) \cup \chi(\underline{wt}).$$

Siendo que $sw < w$ existe \underline{sw}' en S^* reducida con $\underline{sw}' \leq \underline{w}'$ de la Proposición previa. Así ambas $\chi(\underline{sw})$ y $\chi(\underline{sw}')$ son iguales por hipótesis inductiva. Sigue de

aquí que $\chi(\underline{w}')$ contiene $\chi(\underline{sw})$ además de $\chi(\underline{wt})$ en forma similar. Se tiene que $\chi(\underline{w}')$ contiene a $\chi(\underline{w})$ de esta forma. Vale también $\chi(\underline{w})$ contiene a $\chi(\underline{w}')$ intercambiando los roles. \square

Se define $\chi(w)$ para w en W como $\chi(\underline{w})$ con \underline{w} en S^* cualquier expresión reducida. Gracias al Corolario esto está bien definido.

Corolario. *Se tiene para I, J contenidos en S que*

$$W_I \cap W_J = W_{I \cap J}.$$

Demostración. Si w en $W_I \cap W_J$ entonces $I \cap J$ contiene $\chi(w)$ del Corolario anterior. Así w en $W_{I \cap J}$ de forma que

$$W_I \cap W_J \subseteq W_{I \cap J}.$$

Vale trivialmente la contención recíproca. \square

3.6. Representación Geométrica

Supongamos que (W, S) es tal que $|S|$ es finito. Sea \mathbf{E} el espacio lineal real con $(v_s : s \in S)$ por base. Equipamos \mathbf{E} con $\langle -, - \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica: Actúa en la base como

$$\langle v_s, v_t \rangle = -\cos \frac{\pi}{m_{s,t}}, \quad s, t \in S.$$

Cuando $m_{s,t}$ no es finito el cociente se toma cero. Observar esta no es necesariamente un producto interno: No hay garantía de que sea positiva definida. Así el par $(\mathbf{E}, \langle -, - \rangle)$ no puede llamarse un espacio Euclídeo.

Se define ρ_s en $GL(\mathbf{E})$ para cada s en S como sigue

$$\rho_s(x) = x - 2\langle x, v_s \rangle v_s, \quad x \in \mathbf{E}.$$

Observar que en el sentido de la Sección I.2.1 esta no es una reflexión. Como mencionamos, ni siquiera tenemos un producto interno. Sin embargo esta comparte algunas de sus propiedades.

Proposición 3.6.1. *Se cumple para cada s en S que:*

- i. ρ_s preserva la forma.*
- ii. ρ_s es una involución.*
- iii. $\text{Fix}(\rho_s)$ es de codimensión uno.*

Demostración. Siguen ambas (i) y (ii) de un cálculo directo. Notar que $\text{Fix}(\rho_s)$ es el ortogonal a $\text{Sp}\langle v_s \rangle$ por la forma. Siendo este vector no-isotrópico, su subespacio ortogonal lo complementa. Se deduce la afirmación (iii) de aquí. \square

Se verá que el mapa $S \rightarrow GL(\mathbf{E})$ define una representación $W \rightarrow GL(\mathbf{E})$. Será para ello suficiente comprobar las relaciones

$$(\rho_s \circ \rho_t)^{m_{s,t}} = \text{Id}_{\mathbf{E}}, \quad s, t \in S.$$

Si s, t en S denotemos $\mathbf{E}_{s,t}$ al subespacio $\text{Sp}\langle v_s, v_t \rangle$ por un momento. Notar que $\langle -, - \rangle$ es en $\mathbf{E}_{s,t} \times \mathbf{E}_{s,t}$ semidefinida positiva: Se tiene para a, b en \mathbb{R} que

$$\langle av_s + bv_t, av_s + bv_t \rangle = \left(a - b \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} \right)^2 + b^2 \sin^2 \frac{\pi}{m_{s,t}}.$$

Claramente el lado derecho es no negativo. Más aún de ser $m_{s,t}$ finito, es estrictamente positivo. Observar además que $\rho_s \circ \rho_t$ deja a $\mathbf{E}_{s,t}$ estable. Calculemos ahora el orden de $\rho_s \circ \rho_t$ en $\mathbf{E}_{s,t}$.

Se tiene que la matriz de $\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}}$ en la base (v_s, v_t) es

$$[\rho_s \circ \rho_t] = \begin{bmatrix} 4 \cos^2 \frac{\pi}{m_{s,t}} - 1 & -2 \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} \\ 2 \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} & -1 \end{bmatrix}$$

Sigue que esta es de determinante uno. Consideremos ahora dos casos:

Supongamos que $m_{s,t}$ es finito. Observar que $\langle -, - \rangle$ define en $\mathbf{E}_{s,t}$ un producto interno. Vale así que $\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}}$ es una transformación ortogonal. Siendo de determinante uno, es además una rotación. Se tiene calculando que

$$\text{Tr}(\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}}) = 2 \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{m_{s,t}} - 1 \right) = 2 \cos \frac{2\pi}{m_{s,t}}.$$

Sigue así que $\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}}$ es una rotación en $\pm 2\pi/m_{s,t}$ radianes. Cualquiera sea el caso $m_{s,t}$ es su orden.

Supongamos que $m_{s,t}$ es infinito. Se comprueba por inducción que

$$(\rho_s \circ \rho_t)^n(v_s) = 2n(v_s + v_t) + v_s, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Vale así que $\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}}$ es de orden infinito.

Cuando $m_{s,t}$ es finito $\langle -, - \rangle$ es en $\mathbf{E}_{s,t} \times \mathbf{E}_{s,t}$ no degenerada. Se cumple así

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{s,t} \oplus \mathbf{E}_{s,t}^\perp.$$

Observar que $\rho_s \circ \rho_t \upharpoonright_{\mathbf{E}_{s,t}^\perp}$ es la identidad. Sigue de aquí que $\rho_s \circ \rho_t$ es de orden $m_{s,t}$. Claramente en el segundo caso $\rho_s \circ \rho_t$ es de orden infinito. Hemos probado la primera parte del siguiente resultado.

Proposición 3.6.2. *Se tiene una única representación $\sigma : W \rightarrow GL(\mathbf{E})$ tal que*

$$\sigma(s) = \rho_s, \quad s \in S.$$

Más aún esta representación es fiel.

Se llamará a esta la *representación geométrica* del par (W, S) en adelante. Consultar [7, Corolario 5.4] para una prueba de la fidelidad. Sigue de la primera parte de esta Proposición lo siguiente.

Corolario. *Si s, t en S entonces $\text{ord}(st)$ es igual a $m_{s,t}$.*

Así la única matriz compatible con (W, S) es la de orden. Se recuerda que el conjunto de generadores fue asumido finito.

Capítulo 4

Álgebra de Hecke

4.1. Álgebra de Hecke

Se denota (W, S) un sistema de Coxeter fijo en adelante. Sea $(m_{s,t})_{s,t \in S}$ la matriz de orden de este sistema. Se denota además $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ a la localización $\mathbb{Z}[v]_{(v)}$ del anillo $\mathbb{Z}[v]$. Sus elementos son llamados *polinomios de Laurent* en lo que sigue. Sugerimos antes de continuar leer la última Sección del Apéndice A.

Consideremos el $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebra asociativa unitaria $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*]$. Notaremos $\delta : S \rightarrow (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*]$ a la inclusión canónica. Se define $H(W)$ como $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*]$ módulo las siguientes relaciones:¹

$$\delta_s^2 = (v^{-1} - v)\delta_s + 1, \quad s \in S. \quad (4.1)$$

$$\underbrace{\delta_s \delta_t \delta_s \cdots}_{m_{s,t}} = \underbrace{\delta_t \delta_s \delta_t \cdots}_{m_{s,t}}, \quad s, t \in S. \quad (4.2)$$

Se llama a $H(W)$ el *álgebra de Hecke* de W .

Se refiere usualmente como álgebra de Hecke monoparamétrica a esta definición. Gran parte de este Capítulo puede extenderse al contexto multiparamétrico más general. Para tal enfoque [9] puede consultarse.

Sea A un anillo conmutativo con unidad. Un morfismo $\varphi : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow A$ otorga estructura de $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebra a este anillo. Se puede formar entonces $H(W)_\varphi$ la *especialización* de $H(W)$ por

$$H(W)_\varphi = A \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} H(W).$$

Observar que $\varphi : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow A$ está prescrito por el valor en la indeterminada. Si $\psi : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow \mathbb{Z}$ cumple $v \mapsto 1$ tenemos que $H(W)_\psi$ es isomorfo a $\mathbb{Z}[W]$. Se dice por esta razón que el álgebra de Hecke es una *deformación* del álgebra de grupo.

¹Siendo la segunda válida cuando $m_{s,t}$ es finito.

4.2. Base Estándar

Denotaremos $\delta : S \rightarrow H(W)$ a la inclusión canónica en abuso de notación. Observar existe un morfismo $\Delta : S^* \rightarrow H(W)$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} & & S^* \\ & \nearrow \iota & \downarrow \Delta \\ S & & \\ & \searrow \delta & \\ & & H(W) \end{array}$$

Por el Lema de Matsumoto este es constante en las expresiones reducidas de un elemento. Denotamos δ_x en $H(W)$ entonces a $\Delta(\underline{x})$ para cualquier \underline{x} en S^* reducida.

Se llama a $(\delta_x : x \in W)$ la *base estándar* de $H(W)$. Se justifica en el Teorema 4.2.1 esta terminología. Se verá allí que $H(W)$ es libre como $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -módulo sobre este conjunto.

Sea x en W con \underline{x} en S^* reducida. Dado s en S tal que $\ell(x) < \ell(xs)$ tenemos

$$\delta_x \delta_s = \Delta(\underline{x}(s)) = \delta_{xs}.$$

Para s en S tal que $\ell(xs) < \ell(x)$ aplicamos la Propiedad de Intercambio. Así existe \underline{y} en S^* tal que \underline{x} es igual a $\underline{y}(s)$. Usando la relación (4.1) tenemos

$$\delta_x \delta_s = \Delta(\underline{y})\Delta((s))^2 = \Delta(\underline{y})((v^{-1} - v)\Delta(s) + 1) = (v^{-1} - v)\delta_x + \delta_{xs}.$$

Juntando ambos resultados

$$\delta_x \delta_s = \begin{cases} \delta_{xs} & \ell(x) < \ell(xs) \\ (v^{-1} - v)\delta_x + \delta_{xs} & \ell(xs) < \ell(x) \end{cases}. \quad (4.3)$$

De igual forma multiplicando a izquierda

$$\delta_s \delta_x = \begin{cases} \delta_{sx} & \ell(x) < \ell(sx) \\ (v^{-1} - v)\delta_x + \delta_{sx} & \ell(sx) < \ell(x) \end{cases}. \quad (4.4)$$

Procedemos ahora a demostrar el resultado que adelantamos.

Teorema 4.2.1. *El conjunto $(\delta_x : x \in W)$ es base de $H(W)$ como $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -módulo.*

Demostración. Veamos que $(\delta_x : x \in W)$ genera $H(W)$ en primer lugar. Se tiene que $\Delta(S^*)$ genera $H(W)$ por definición. Basta así que $(\delta_x : x \in W)$ contenga $\Delta(S^*)$ para esta primera parte. Por inducción en la longitud de expresiones se ve que este es el caso. Para el paso inductivo (4.3) o (4.4) han de usarse.

Seguimos ahora con la independencia lineal. Esta parte requiere considerablemente más trabajo. Denotemos E al $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -módulo libre con $(\epsilon_x : x \in W)$ por base. Definimos en $\text{End}_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} E$ familias $(\lambda_s : s \in S)$ y $(\rho_s : s \in S)$ que imiten la multiplicación de $H(W)$.

Sean $\lambda_s : E \rightarrow E$ y $\rho_s : E \rightarrow E$ dados en la base por

$$\lambda_s(\epsilon_x) = \begin{cases} \epsilon_{sx} & \ell(x) < \ell(sx) \\ (v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx} & \ell(sx) < \ell(x) \end{cases}, \quad (4.5)$$

$$\rho_s(\epsilon_x) = \begin{cases} \epsilon_{xs} & \ell(x) < \ell(xs) \\ (v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xs} & \ell(xs) < \ell(x) \end{cases}. \quad (4.6)$$

Notar la similitud con las reglas de multiplicación a izquierda y derecha. Se tiene para estos operadores el siguiente resultado. Daremos la prueba de este al concluir la presente.

Lema 4.2.1. *Ambos morfismos λ_s y ρ_t conmutan para todo s, t en S .*

Definamos la subálgebra unitaria A de $\text{End}_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} E$ que $(\lambda_s : s \in S)$ genera. Sea $\eta : A \rightarrow E$ la evaluación $\tau \mapsto \tau(\epsilon_{\text{Id}})$ para τ en A . Veamos que esta es un isomorfismo de $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -módulos.

Denotemos $\phi : S^* \rightarrow A$ al morfismo de monoides universal. Notar que si \underline{x} en S^* es reducida

$$\eta \circ \phi(\underline{x}) = \epsilon_x.$$

Se sigue esto de aplicar (4.5) repetidamente. En particular tenemos que la evaluación es sobreyectiva.

Dado τ en $\ker \eta$ se tiene que $\tau(\epsilon_{\text{Id}})$ es nulo. Supongamos x en W es tal que $\tau(\epsilon_x)$ también se anula. Para s en S con $\ell(x) < \ell(xs)$ se cumple

$$\tau(\epsilon_{xs}) = \tau(\rho_s(\epsilon_x)) = \rho_s(\tau(\epsilon_x)) = 0.$$

Se ha usado el Lema 4.2.1 para la conmutatividad. Inducción en la longitud muestra que este morfismo es idénticamente cero. Por tanto se sigue la evaluación es un isomorfismo.

Veamos que ambas relaciones (4.1) y (4.2) son por A satisfechas. Tomemos dos generadores s, t en S . Se tiene que $\Pi(s, t; m_{s,t})$ y $\Pi(t, s; m_{s,t})$ son expresiones reducidas del mismo elemento. Por lo tanto

$$\eta \circ \phi(\Pi(s, t; m_{s,t})) = \eta \circ \phi(\Pi(t, s; m_{s,t})).$$

Por la inyectividad de la evaluación entonces

$$\underbrace{\lambda_s \lambda_t \lambda_s \cdots}_{m_{s,t}} = \phi(\Pi(s, t; m_{s,t})) = \phi(\Pi(t, s; m_{s,t})) = \underbrace{\lambda_t \lambda_s \lambda_t \cdots}_{m_{s,t}}.$$

Sea s en S un generador fijo. Dado x en W tal que $\ell(x) < \ell(sx)$ se tiene

$$\lambda_s^2(\epsilon_x) = \lambda_s(\epsilon_{sx}) = (v^{-1} - v)\epsilon_{sx} + \epsilon_x = (v^{-1} - v)\lambda_s(\epsilon_x) + \text{Id}(\epsilon_x).$$

Si x en W es tal que $\ell(sx) < \ell(x)$ se cumple

$$\lambda_s^2(\epsilon_x) = \lambda_s((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) = (v^{-1} - v)\lambda_s(\epsilon_x) + \epsilon_x = (v^{-1} - v)\lambda_s(\epsilon_x) + \text{Id}(\epsilon_x).$$

Juntando ambos casos se tiene que

$$\lambda_s^2 = (v^{-1} - v)\lambda_s + \text{Id}.$$

Existe por tanto $\psi : H(W) \rightarrow S$ morfismo de álgebras tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & & H(W) \\
 & \nearrow \Delta & \downarrow \psi \\
 S^* & & A \\
 & \searrow \phi &
 \end{array}$$

es conmutativo. Obtenemos una surjección de $H(W)$ en E componiendo este con la evaluación. Más aún $(\delta_x : x \in W)$ es enviado a $(\epsilon_x : x \in W)$ por la composición. Así la base estándar de $H(W)$ es efectivamente una base. \square

Probar el Lema 4.2.1 consiste en una tediosa verificación por casos. Para simplificar esta tarea usaremos el siguiente resultado.

Lema 4.2.2. Sean s, t en S dos generadores fijos. Sea además x en W tal que $\ell(sx) = \ell(xt)$ y $\ell(x) = \ell(sxt)$ se cumplen. Entonces ambos sx y xt son iguales.

Demostración. Supongamos $\ell(xt) < \ell(x)$ en primer lugar. Tenemos existe \underline{x} en S^* tal que \underline{x} es $\underline{y}(s)$ para algún \underline{y} en S^* . Notar que $\ell(\underline{y}) < \ell(s\underline{y})$ pues $\ell(\underline{x})$ y $\ell(sxt)$ coinciden. Dado que $\ell(sx) < \ell(x)$ se tiene que x y sxt son iguales.

Supongamos que $\ell(x) < \ell(xt)$ ahora. Observar que $\ell(s(xt)) = \ell((xt)t)$ y $\ell(xt) = \ell(s(xt)t)$ se cumplen. Como $\ell((xt)t) < \ell(xt)$ podemos aplicar el caso anterior. De esta forma $s(xt)$ y $(xt)t$ son iguales. \square

Procedemos ahora a dar la prueba del Lema pendiente.

Demostración del Lema 4.2.1. Sean s, t en S dos generadores. Para x en W vale alguna de las siguientes posibilidades:

- i. $\ell(sx) < \ell(x) = \ell(sxt) < \ell(xt)$
- ii. $\ell(xt) < \ell(x) = \ell(sxt) < \ell(sx)$
- iii. $\ell(x) = \ell(sxt) < \ell(sx) = \ell(xt)$
- iv. $\ell(x) < \ell(sx) = \ell(xt) < \ell(sxt)$
- v. $\ell(sx) = \ell(xt) < \ell(x) = \ell(sxt)$
- vi. $\ell(sxt) < \ell(sx) = \ell(xt) < \ell(x)$

Analizamos la conmutatividad para cada caso. Es suficiente en general solo aplicar las definiciones. Cuando el Lema anterior sea necesario será mencionado.

Caso i. Un cálculo directo muestra que:

$$\begin{aligned}
 \lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s(\epsilon_{xt}) \\
 &= (v^{-1} - v)\epsilon_{xt} + \epsilon_{sxt} \\
 &= \rho_t((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) \\
 \rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
 \end{aligned}$$

Caso ii. Se comprueba fácilmente que:

$$\begin{aligned}
\lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xt}) \\
&= (v^{-1} - v)\epsilon_{sx} + \epsilon_{sxt} \\
&= \rho_t(\epsilon_{sx}) \\
\rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
\end{aligned}$$

Caso iii. Usando el Lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s(\epsilon_{xt}) \\
&= (v^{-1} - v)\epsilon_{xt} + \epsilon_{sxt} \\
&= (v^{-1} - v)\epsilon_{sx} + \epsilon_{sxt} \\
&= \rho_t(\epsilon_{sx}) \\
\rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
\end{aligned}$$

Caso iv. Un cálculo directo muestra que:

$$\begin{aligned}
\lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s(\epsilon_{xt}) \\
&= \epsilon_{sxt} \\
&= \rho_t(\epsilon_{sx}) \\
\rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
\end{aligned}$$

Caso v. Usando el Lema anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xt}) \\
&= (v^{-1} - v)((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) + \epsilon_{sxt} \\
&= (v^{-1} - v)((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xt}) + \epsilon_{sxt} \\
&= \rho_t((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) \\
\rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
\end{aligned}$$

Caso vi. Se comprueba fácilmente que:

$$\begin{aligned}
\lambda_s \circ \rho_t(\epsilon_x) &= \lambda_s((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xt}) \\
&= (v^{-1} - v)((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) + (v^{-1} - v)\epsilon_{xt} + \epsilon_{sxt} \\
&= (v^{-1} - v)((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{xt}) + (v^{-1} - v)\epsilon_{sx} + \epsilon_{sxt} \\
&= \rho_t((v^{-1} - v)\epsilon_x + \epsilon_{sx}) \\
\rho_t \circ \lambda_s(\epsilon_x) &=
\end{aligned}$$

Se ha probado que estos operadores conmutan en una base. Se sigue entonces que conmutan en todo el espacio. \square

Podemos introducir en $H(W)$ una graduación $(H_n(W) : n \in \mathbb{N}_0)$ de módulos. Esta viene inducida por la función longitud. Es decir δ_x en $H_{\ell(x)}(W)$ para cada x en W . Siendo estos elementos los generadores de cada submódulo en la graduación. Tenemos de esta forma que

$$H(W) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} H_n(W).$$

Se la llama *graduación estándar* en lo que sigue. Observar que no es una graduación de álgebras. En efecto (4.3) y (4.4) muestran que este no es el caso.

Observemos que los elementos en la base estándar son invertibles. Se tiene para s en S que

$$\delta_s^{-1} = \delta_s + (v - v^{-1}). \quad (4.7)$$

Esta expresión se obtiene de (4.1) fácilmente. Cada elemento en $(\delta_x : x \in W)$ es producto de estos invertibles. Se deduce así nuestra afirmación.

Será útil conocer la forma de estos inversos expandidos en la base estándar. Concerniente a esta cuestión tenemos el siguiente resultado.

Lema 4.2.3. *Para cada x en W existen ciertos $(q_y : y < x)$ en $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ tales que*

$$\delta_{x^{-1}}^{-1} = \delta_x + \sum_{y < x} q_y \delta_y.$$

Demostración. Sea x en W con expresión (t_1, \dots, t_n) reducida. Sea además (s_1, \dots, s_m) una subexpresión propia de esta. Veamos que se cumple

$$\delta_{s_1} \cdots \delta_{s_m} \in \sum_{y < x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \delta_y. \quad (*)$$

Si esta subexpresión es reducida es claro. Caso contrario tomemos $1 \leq k < m$ máximo tal que (s_1, \dots, s_k) es reducida. De esta forma $(s_1, \dots, s_k, s_{k+1})$ no es reducida. Por la Propiedad de Supresión existen $1 \leq i < j \leq k$ tales que $(s_1, \dots, \widehat{s_i}, \dots, \widehat{s_j}, \dots, s_{k+1})$ representa al mismo elemento. Más aún esta última expresión es necesariamente reducida. Usando (4.3) tenemos que

$$\begin{aligned} \delta_{s_1} \cdots \delta_{s_m} &= \delta_{s_1 \cdots s_k} \delta_{s_{k+1}} \cdots \delta_{s_m} \\ &= ((v^{-1} - v) \delta_{s_1 \cdots s_k} + \delta_{s_1 \cdots s_{k+1}}) \delta_{s_{k+2}} \cdots \delta_{s_m} \\ &= (v^{-1} - v) \delta_{s_1} \cdots \widehat{\delta_{s_{k+1}}} \cdots \delta_{s_m} + \delta_{s_1} \cdots \widehat{\delta_{s_i}} \cdots \widehat{\delta_{s_j}} \cdots \delta_{s_m}. \end{aligned}$$

Se cumple así (*) por inducción en la longitud de las subexpresiones.

Concluimos ahora con ayuda de (4.7) la prueba. Observemos que se tiene

$$\delta_{w^{-1}}^{-1} = \delta_{t_1}^{-1} \cdots \delta_{t_n}^{-1} = (\delta_{t_1} + (v - v^{-1})) \cdots (\delta_{t_n} + (v - v^{-1})).$$

Expandiendo el producto, encontramos que

$$\delta_{w^{-1}}^{-1} - \delta_w \in \sum_{y < x} \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \delta_y. \quad \square$$

4.3. Base de Kazhdan–Lusztig

Construiremos para $H(W)$ una nueva base en esta Sección. Será necesario para ello introducir una involución. Esta nueva base resultará invariante por la misma.

Existe un único morfismo $\omega_1 : \mathbb{Z}[v, v^{-1}] \rightarrow H(W)$ dado por $v \mapsto v^{-1} \delta_{\text{Id}}$. Existe además $\omega_2 : S^* \rightarrow H(W)$ único tal que $(s) \mapsto \delta_s^{-1}$ para todo s en S . Por

la Proposición A.3.1 inducen $\omega : (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*] \rightarrow H(W)$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 & (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*] & \\
 \iota_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \nearrow & \downarrow \omega & \\
 \mathbb{Z}[v, v^{-1}] & & H(W) \\
 \omega_1 \searrow & & \\
 & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[S^*] & \\
 \iota_{S^*} \nearrow & \downarrow \omega & \\
 S^* & & H(W) \\
 \omega_2 \searrow & & \\
 & &
 \end{array}$$

Recordamos que este es un morfismo de anillos. Observar que la relación (4.1) se cumple:

$$\begin{aligned}
 \omega((v^{-1} - v)\delta_s + 1) &= (v - v^{-1})\delta_s^{-1} + 1 \\
 &= (v - v^{-1})\delta_s^{-1} + \delta_s\delta_s^{-1} \\
 &= (v - v^{-1})(\delta_s + (v - v^{-1})) + \delta_s(\delta_s + (v - v^{-1})) \\
 &= (\delta_s + (v - v^{-1}))(\delta_s + (v - v^{-1})) \\
 &= \delta_s^{-2} \\
 \omega(\delta_s^2) &=
 \end{aligned}$$

También la relación (4.2) se satisface:

$$\begin{aligned}
 \omega(\overbrace{\delta_s \delta_t \delta_s \cdots}^{m_{s,t}}) &= \delta_s^{-1} \delta_t^{-1} \delta_s^{-1} \cdots \\
 &= (\cdots \delta_s \delta_t \delta_s)^{-1} \\
 &= (\cdots \delta_t \delta_s \delta_t)^{-1} \\
 &= \delta_t^{-1} \delta_s^{-1} \delta_t^{-1} \cdots \\
 \omega(\underbrace{\delta_t \delta_s \delta_t \cdots}_{m_{s,t}}) &=
 \end{aligned}$$

Por tanto este morfismo pasa al cociente. Denotaremos $\bar{\cdot}$ a su acción en $H(W)$. Se la llama *involución barra* usualmente en la literatura.

Notemos que $\overline{\delta_x}$ iguala $\delta_{x^{-1}}^{-1}$ para todo x en W . Solo basta descomponer este elemento mediante una expresión reducida. Por tanto $\bar{\cdot}$ es efectivamente una involución.

Podemos caracterizar la base de $H(W)$ antes mencionada. Una base $(\beta_x : x \in W)$ de $H(W)$ se dice de *Kazhdan-Lusztig* si satisface:

KL1. Para todo x en W ambos $\overline{\beta_x}$ y β_x son iguales.

KL2. Para cada x en W existen $(h_{y,x} : y < x)$ en $v\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_x = \delta_x + \sum_{y < x} h_{y,x} \delta_y. \quad (4.8)$$

Veremos en seguida que una tal base es única. Son llamados de *Kazhdan-Lusztig* los polinomios en (4.8). Resulta que estos son en Teoría de Representaciones fundamentales. Se tiene una famosa Conjetura de Kazhdan-Lusztig.

Conjetura (Conjetura de Positividad de Kazhdan–Lusztig). *Cada polinomio de Kazhdan–Lusztig tiene coeficientes no negativos.*

Volveremos sobre esta hacia el final de la monografía. Seguimos ahora con algunas observaciones.

Cualquier conjunto $(\beta_x : x \in W)$ en $H(W)$ que cumple (KL2) es una base. En efecto δ_y en $\langle \beta_x : x \in W \rangle$ para y en W por inducción en la longitud. Verificar independencia lineal es igualmente sencillo. Para ello es posible hacer uso del orden de Bruhat.

Lema 4.3.1. *Una base de Kazhdan–Lusztig para $H(W)$ es única.*

Demostración. Supongamos $(\beta_x : x \in W)$ y $(\gamma_x : x \in W)$ son dos bases de Kazhdan–Lusztig. Así para x en W existen $(h_{y,x} : y < x)$ y $(k_{y,x} : y < x)$ en $v\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_x = \delta_x + \sum_{y < x} h_{y,x} \delta_y, \quad \gamma_x = \delta_x + \sum_{y < x} k_{y,x} \delta_y.$$

Supongamos existe x en W tal que β_x y γ_x difieren. Sea z en W máximo tal que $h_{z,x} - k_{z,x}$ es no nulo. Observemos de (KL2) que

$$\sum_{y < x} (h_{y,x} - k_{y,x}) \delta_y = \beta_x - \gamma_x = \overline{\beta_x - \gamma_x} = \sum_{y < x} \overline{(h_{y,x} - k_{y,x})} \overline{\delta_y}.$$

Recordemos que $\overline{\delta_z}$ y $\delta_{z^{-1}}$ son ambos iguales. Por el Lema 4.2.3 tenemos

$$\overline{\delta_z} \equiv \delta_z \pmod{\langle \delta_y : y < z \rangle}.$$

Por maximalidad ambos $h_{z,x} - k_{z,x}$ y $\overline{h_{z,x} - k_{z,x}}$ son iguales. Puesto este elemento yace en $v\mathbb{Z}[v] \cap v^{-1}\mathbb{Z}[v^{-1}]$ no puede ser no nulo. \square

Se deduce inmediatamente el siguiente resultado.

Corolario. *Si una base $(\beta_x : x \in W)$ de $H(W)$ es de Kazhdan–Lusztig se tiene*

$$\beta_s = \delta_s + v, \quad s \in S.$$

Demostración. Claramente se satisface (KL2) de estos elementos. Por otro lado notar que

$$\overline{\delta_s + v} = \delta_s^{-1} + v^{-1} = \delta_s + v.$$

Por tanto también (KL1) se satisface. De la unicidad se deduce la igualdad deseada. \square

Notemos que se tiene la regla de multiplicación

$$\delta_x \beta_s = \begin{cases} \delta_{xs} + v \delta_x & x < xs \\ \delta_{xs} + v^{-1} \delta_x & xs < x \end{cases}. \quad (4.9)$$

Se deduce esto de (4.3) junto con el Corolario anterior. Multiplicación por β_s mueve a $(\delta_x : x \in W)$ respecto a la graduación estándar. Aumenta o disminuye el grado de sus elementos dejando una copia de ellos mismos detrás. Según el caso v o v^{-1} acompañan a esta copia. Observar que la multiplicación siempre resulta en una combinación lineal de $(\delta_y : y \leq x)$.

Probaremos en seguida que una base de Kazhdan–Lusztig existe. Implícito en la prueba estará un algoritmo que permite construirla. Ilustremos antes en un Ejemplo como funciona.

Ejemplo 4.3.1. Calculemos para \mathbb{S}_3 la base de Kazhdan–Lusztig. Recordar usamos la presentación estándar introducida al final del Capítulo 2. Conocemos los elementos de la base para los generadores. Con ellos calculemos ahora

$$\begin{aligned}\beta_s\beta_t &= (\delta_s + v)(\delta_t + v) \\ &= \delta_s\delta_t + v\delta_s + v\delta_t + v^2 \\ &= \delta_{st} + v\delta_s + v\delta_t + v^2\end{aligned}$$

Notar este elemento satisface $(KL1)$ y $(KL2)$ al mismo tiempo. Cumple $(KL1)$ siendo producto de elementos que la satisfacen. Se sigue por unicidad que

$$\beta_{st} = \delta_{st} + v\delta_s + v\delta_t + v^2.$$

Similarmente para el producto inverso

$$\beta_{ts} = \delta_{ts} + v\delta_s + v\delta_t + v^2.$$

Repetimos el mismo proceso para hallar el último elemento. Calculando encontramos que

$$\begin{aligned}\beta_s\beta_{ts} &= (\delta_s + v)(\delta_{ts} + v\delta_s + v\delta_t + v^2) \\ &= \delta_s\delta_{ts} + v\delta_s^2 + v\delta_s\delta_t + v^2\delta_s + v\delta_{ts} + v^2\delta_s + v^2\delta_t + v^3 \\ &= \delta_{sts} + v\delta_{st} + v\delta_{ts} + 2v^2\delta_s + v^2\delta_t + v^3 + v((v^{-1} - v)\delta_s + 1) \\ &= \delta_{sts} + v\delta_{st} + v\delta_{ts} + (v^2 + 1)\delta_s + v^2\delta_t + v^3 + v.\end{aligned}$$

Notar este elemento satisface $(KL1)$ aunque $(KL2)$ no: Uno de los coeficientes no yace en $v\mathbb{Z}[v]$. Para solventar esto no podemos simplemente restar el factor problemático. Corremos el riesgo de que $(KL1)$ no valga del resultado. Sin embargo podemos restar por un elemento que cumpla esta propiedad:

$$\beta_s\beta_{ts} - \beta_s = \delta_{sts} + v\delta_{st} + v\delta_{ts} + v^2\delta_s + v^2\delta_t + v^3.$$

Puesto que este satisface $(KL1)$ y $(KL2)$ tenemos que

$$b_{sts} = \delta_{sts} + v\delta_{st} + v\delta_{ts} + v^2\delta_s + v^2\delta_t + v^3.$$

Se tiene entonces la base de Kazhdan–Lusztig para \mathbb{S}_3 .

Tratemos ahora el caso general. Seguimos las mismas ideas que en el Ejemplo.

Teorema 4.3.1. *Una base de Kazhdan–Lusztig para $H(W)$ existe.*

Demostración. Fijemos x en W no nulo. Asumamos existen $(\beta_y : y < x)$ tal que $(KL1)$ y $(KL2)$ se cumplen. Dado s en $\mathcal{R}(x)$ existen $(h_{y,xs} : y < xs)$ en $v\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_{xs} = \delta_{xs} + \sum_{y < xs} h_{y,xs}\delta_y.$$

Por (4.9) existen $(k_{y,x} : y < x)$ en $\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_{xs}\beta_s = \delta_x + \sum_{y < x} k_{y,x}\delta_y.$$

Para que (KL2) se cumpla debemos corregir los coeficientes. En efecto alguno de ellos podría tener término constante no nulo.

Sea $\epsilon(y, x; s)$ en \mathbb{Z} tal que $k_{y,x} - \epsilon(y, x; s)$ en $v\mathbb{Z}[v]$ para cada uno de estos. Se define entonces

$$\beta_x = \beta_{xs}\beta_s - \sum_{y < x} \epsilon(y, x; s)\beta_y. \quad (4.10)$$

Observar que (KL1) se cumple para este elemento. En efecto es una combinación lineal entera de auto-duales. Por otro lado

$$\beta_x = \delta_x + \sum_{y < x} k_{y,x}\delta_y - \epsilon(y, x; s)\beta_y.$$

Los sumandos del segundo término son de la forma

$$k_{y,x}\delta_y - \epsilon(y, x; s)\beta_y = (k_{y,x} - \epsilon(y, x; s))\delta_y - \sum_{z < y} \epsilon(y, x; s)h_{z,y}\delta_z.$$

Notar que $v\mathbb{Z}[v]$ contiene los coeficientes en esta expresión. De aquí (KL2) también se satisface. \square

Ocasionalmente es útil extender la notación en (KL2) como sigue. Para cada x en W existen $(h_{y,x} : y \in W)$ en $\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_x = \sum_{y \in W} h_{y,x}\delta_y. \quad (4.11)$$

Particularmente $y \not\leq x$ implica que el coeficiente es nulo. Más aún $h_{y,x}$ en $v\mathbb{Z}[v]$ excepto para los polinomios en la diagonal.

Dado s en $\mathcal{R}(x)$ sean $(k_{y,x} : y < x)$ en $\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_{xs}\beta_s = \delta_x + \sum_{y < x} k_{y,x}\delta_y.$$

Como se mencionó estos polinomios podrían tener término constante no nulo. Aplicando (4.9) para $y < x$ se deduce que

$$k_{y,x} = \begin{cases} h_{ys,xs} + vh_{y,xs} & y < ys \\ h_{ys,xs} + v^{-1}h_{y,xs} & ys < y \end{cases}. \quad (4.12)$$

Particularmente $\epsilon(y, x; s)$ es nulo en el primer caso.

Lema 4.3.2. Sean x, y en W cualesquiera. Dado s en S tal que $xs < x$ e $ys < y$ se tiene que

$$h_{ys,x} = vh_{y,x}. \quad (4.13)$$

Demostración. Notar que $y \not\leq x$ implica $ys \not\leq x$ en primer lugar. Esto es inmediato del Corolario de la Proposición 3.5.2. En este caso la igualdad se satisface trivialmente. Por tanto podemos asumir $y \leq x$ en adelante.

Continuamos usando la notación del Teorema 4.3.1. Si $y < x$ entonces $ys < y$ implica que $k_{ys,x}$ y $vk_{y,x}$ son iguales. Esto sigue de (4.12) en forma directa. Más aún (4.10) implica que

$$h_{ys,x} = k_{ys,x} - \sum_{z < x} \epsilon(z, x; s)h_{ys,z}.$$

Notar que esta suma contiene términos redundantes. En efecto $\epsilon(z, x; s)$ es nulo cuando $z < zs$ como vimos. Haciendo estas simplificaciones

$$h_{ys,x} = k_{ys,x} - \sum_{\substack{z < x \\ zs < z}} \epsilon(z, x; s) h_{ys,z} .$$

Inducción permite aplicar (4.13) a los términos en la sumatoria. De esta forma obtenemos que

$$h_{ys,x} = k_{ys,x} - \sum_{\substack{z < x \\ zs < z}} \epsilon(z, x; s) h_{ys,z} = vk_{y,x} - \sum_{\substack{z < x \\ zs < z}} \epsilon(z, x; s) v h_{y,z} = v h_{y,x} .$$

Por último asumamos x e y son iguales. Notar que de (4.10) se tiene

$$h_{ys,x} = k_{ys,x} - \epsilon(ys, x; s) = h_{y,xs} + v h_{ys,xs} = v h_{y,x} .$$

Esto completa el paso inductivo concluyendo la prueba. \square

Para x, y en W denotemos por $\mu(y, x)$ al coeficiente de v en $h_{y,x}$. Recordamos que estamos usando (4.11) por notación. Tenemos la siguiente importante fórmula de multiplicación.

Teorema 4.3.2. *Para x en W se cumple*

$$\beta_x \beta_s = \begin{cases} (v + v^{-1})\beta_x & xs < x \\ \beta_{xs} + \sum_{\substack{y < x \\ ys < y}} \mu(y, x) \beta_y & x < xs \end{cases} . \quad (4.14)$$

Demostración. El primer caso es consecuencia del Lema anterior. Calculemos el coeficiente de δ_y en $\beta_x \beta_s$ para y en W arbitrario. De darse que $y < ys$ este es

$$v h_{y,x} + h_{ys,x} = v h_{y,x} + v^{-1} h_{y,x} = (v + v^{-1}) h_{y,x} .$$

Por otro lado, si $ys < y$ se tiene

$$v^{-1} h_{y,x} + h_{ys,x} = v^{-1} h_{y,x} + v h_{y,x} = (v + v^{-1}) h_{y,x} .$$

De aquí se deduce (4.14) en el primer caso.

De darse el segundo caso, existen $(k_{y,xs} : y < xs)$ en $\mathbb{Z}[v]$ tales que

$$\beta_x \beta_s = \delta_{xs} + \sum_{y < xs} k_{y,xs} \delta_y .$$

Si $\epsilon(y, xs; s)$ en \mathbb{Z} es tal que $k_{y,xs} - \epsilon(y, xs; s)$ en $v\mathbb{Z}[v]$ se tiene

$$\beta_x \beta_s = \beta_{xs} + \sum_{y < xs} \epsilon(y, xs; s) \beta_y .$$

Por (4.12) se deduce para $y < xs$ que

$$\epsilon(y, xs; s) = \begin{cases} 0 & y < sy \\ \mu(y, x) & ys < y \end{cases} .$$

Puesto que $\mu(y, x)$ es nulo cuando $y \not< x$ se tiene

$$\beta_x \beta_s = \beta_{xs} + \sum_{\substack{y < x \\ ys < y}} \mu(y, x) \beta_y . \quad \square$$

4.4. Fórmula de Deodhar

Dada (s_1, \dots, s_n) en S^* se denota $\beta_{(s_1, \dots, s_n)}$ al producto $\beta_{s_1} \cdots \beta_{s_n}$ en adelante. Para cerrar este Capítulo se dará una expansión explícita de este producto en la base estándar. Se conoce como *fórmula de Deodhar* a esta expresión.

Fijemos (s_1, \dots, s_n) en S^* para comenzar. Cada subexpresión $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ de (s_1, \dots, s_n) tiene una n -upla asociada (e_1, \dots, e_n) en $\{0, 1\}^*$ de forma que

$$s_1^{e_1} \cdots s_n^{e_n} = s_{i_1} \cdots s_{i_k}.$$

Una coordenada tiene exponente no nulo si y solo si esta figura en la subexpresión. Se define ahora $\mathcal{S}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))$ en W como

$$\mathcal{S}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) = s_1^{e_1} \cdots s_i^{e_i}, \quad 0 \leq i \leq n.$$

En el paso de $\mathcal{S}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))$ a $\mathcal{S}_{i+1}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))$ el orden de Bruhat puede modificarse en cualquier forma. Podría subir en uno o bajar en uno, así también como no cambiar en absoluto.

Se define una n -upla ahora $\mathcal{D}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))$ en $\{U_0, U_1, D_0, D_1\}^*$ como

$$\mathcal{D}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) = \begin{cases} U_{e_i} & \mathcal{S}_{i-1}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))s_i > \mathcal{S}_{i-1}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) \\ D_{e_i} & \mathcal{S}_{i-1}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k}))s_i < \mathcal{S}_{i-1}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) \end{cases},$$

donde $1 \leq i \leq n$. Esta informa sobre cómo podríamos habernos movido en el orden de Bruhat de un paso al siguiente. Más aún el subíndice indica si este movimiento se hizo o no.

Finalmente se define el *defecto* de $(s_{i_1}, \dots, s_{i_k})$ por

$$\text{def}((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) = |\{i \in \mathbb{I}_n : \mathcal{D}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) = U_0\}| - |\{i \in \mathbb{I}_n : \mathcal{D}_i((s_{i_1}, \dots, s_{i_k})) = D_0\}|.$$

Así el defecto cuenta cuántas veces pudimos subir pero no lo hicimos, menos cuántas veces pudimos bajar pero no lo hicimos. Este es el estadístico combinatorio necesario para describir los productos antes mencionados.

Lema 4.4.1 (Fórmula de Deodhar). *Sea x en W con \underline{x} en S^* fija. Entonces se tiene que*

$$\beta_{\underline{x}} = \sum_{z \leq x} v^{\text{def}(z)} \delta_z.$$

Demostración. Procedemos por inducción en la longitud de las expresiones. El caso inicial es trivial. Supongamos entonces que $\ell(\underline{x})$ es positiva. Sea \hat{x} en S^* tal que \underline{x} iguala $\hat{x}(s)$. Por inducción debemos probar que

$$\sum_{z \leq x} v^{\text{def}(z)} \delta_z = \left(\sum_{z \leq \hat{x}} v^{\text{def}(z)} \delta_z \right) \beta_s.$$

Para $z \leq \hat{x}$ tenemos dos subexpresiones $z_0, z_1 \leq x$ tales que

$$\mathcal{S}_i(z) = \mathcal{S}_i(z_j), \quad 1 \leq i < \ell(\underline{x}).$$

Más aún así recorremos todas las subexpresiones de nuestra expresión original. Notar ahora que (4.9) implica

$$v^{\text{def}(z)} \delta_z \beta_s = v^{\text{def}(z_0)} \delta_{z_0} + v^{\text{def}(z_1)} \delta_{z_1}.$$

De aquí se sigue la igualdad buscada, completando el paso inductivo. \square

Capítulo 5

Bimódulos de Soergel

5.1. Polinomios

Se recomienda a quien lea revisar el Apéndice B antes de continuar con este Capítulo: Introducimos allí notación que será aquí usada sin aclaración.

Fijemos (W, S) un sistema de Coxeter. Supongamos que el conjunto de generadores es finito. Sea \mathbf{E} el espacio lineal real con $(v_s : s \in S)$ por base. Previamente definimos $\langle -, - \rangle : \mathbf{E} \times \mathbf{E} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica. Recordemos que estaba dada por

$$\langle v_s, v_t \rangle = -\cos \frac{\pi}{m_{s,t}}, \quad s, t \in S.$$

Definimos después una acción $\tau : W \rightarrow GL(\mathbf{E})$ tal que

$$\tau(s)(x) = x - 2\langle x, v_s \rangle v_s, \quad x \in \mathbf{E}.$$

Consideremos ahora $\text{Sym}(\mathbf{E})$ el álgebra simétrica. Podemos extender esta acción de W en \mathbf{E} a $\text{Sym}(\mathbf{E})$ naturalmente. Se define $\sigma : W \rightarrow GL(\text{Sym}(\mathbf{E}))$ de forma que

$$\sigma(w) \circ \iota = \iota \circ \tau(w), \quad w \in W.$$

Aquí $\iota : \mathbf{E} \rightarrow \text{Sym}(\mathbf{E})$ es la inclusión canónica. Dotamos $\text{Sym}(\mathbf{E})$ de la graduación de álgebras con $\iota(\mathbf{E})$ en grado dos. De esta manera $\text{Sym}^n(\mathbf{E})$ ocupa el grado que dobla su índice. Denotaremos por R a $\text{Sym}(\mathbf{E})$ con esta graduación. Notar que la acción de W en R preserva la graduación.

Se tiene que R es isomorfa a $\mathbb{R}[v_s : s \in S]$ el álgebra de polinomios. Notar esta correspondencia no es canónica, depende de la base elegida. Sin embargo permite hacer uso de resultados que simplificarán nuestro análisis.

Para I en S sea W_I el subgrupo parabólico que I genera. Recordemos que estos fueron tratados al final de la Sección 3.5. Diremos que I es *finitario* si W_I es finito. Sea ahora R^I el anillo de W_I -invariantes de R :

$$R^I = \{f \in R : w \cdot f = f \quad \forall w \in W_I\}$$

El siguiente Teorema constituye la fundación algebraica de los desarrollos en este Capítulo.

Teorema 5.1.1 (Chevalley). *Para I en S finitario R^I es un anillo de polinomios. Posee $|S|$ generadores homogéneos algebraicamente independientes.*

Para una prueba de este resultado [7, Teorema 3.5] puede consultarse.

Corolario. *Si I en S es finitario R^I es graduado.*

Demostración. Se sigue al ser el anillo de invariantes generado por homogéneos. \square

Generalmente la presentación del Teorema no es sencilla de explicitar. El siguiente criterio simplifica considerablemente esta tarea. Puede consultarse [7, Proposición 3.12] para su demostración.

Proposición 5.1.1. *Sea I en S finitario. Supongamos $(f_s : s \in S)$ en R^I son homogéneos algebraicamente independientes. Asumamos además estos satisfacen¹*

$$\prod_{s \in S} \deg(f_s) = 2^{|S|} |W|. \quad (5.1)$$

Entonces $(f_s : s \in S)$ es para R^I un conjunto de generadores.

Así se reduce nuestra tarea a la verificación de independencia algebraica. Para ello dispondremos del siguiente criterio.

Proposición 5.1.2. *Un conjunto $(f_s : s \in S)$ en $\mathbb{R}[v_s : s \in S]$ es algebraicamente independiente de cumplir*

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{df_s}{dv_t} \end{bmatrix}_{s,t \in S} \right) \neq 0 \quad (5.2)$$

En el Ejemplo que sigue, pondremos a prueba estos resultados.

Ejemplo 5.1.1. Tenemos que s en S actúa en R como

$$\sigma(s)(v_t) = v_t + 2 \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} v_s, \quad t \in S.$$

Claramente se satisface

$$\sigma(s)(v_s^2) = \sigma(s)(v_s)^2 = v_s^2.$$

Para t en $S \sim \{s\}$ se cumple también

$$\sigma(s) \left(v_t + \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} v_s \right) = \sigma(v_t) + \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} \sigma(v_s) = v_t + \cos \frac{\pi}{m_{s,t}} v_s.$$

Por la Proposición 5.1.2 estos invariantes son algebraicamente independientes. Cumplen además (5.1) con lo que generan R^s .

Con esto es sencillo comprobar la descomposición

$$R = R^s \oplus R^s v_s. \quad (5.3)$$

Así los $\sigma(s)$ -invariantes y $\sigma(s)$ -antiinvariantes suman el álgebra. Luego tenemos un isomorfismo de $R \rightarrow R^s \oplus R^s(-2)$ como R^s -bimódulos graduados.

Una reformulación equivalente del Teorema de Chevalley es la siguiente.

¹Considerando en $\text{Sym}(\mathbf{E})$ la graduación usual, la potencia en el lado derecho puede omitirse.

Teorema 5.1.2. *Sea I en S finitario. Entonces R es un R^I -módulo libre graduado. Más aún se tiene $\text{rk}_{R^I} R$ igual a $|W|$.*

Este resultado será de uso en la Sección siguiente. Puede consultarse [7, Proposición 3.6] para la prueba de la equivalencia.

5.2. Bimódulos de Bott–Samelson

Se denota B_s para s en S al R -bimódulo graduado $R \otimes_{R^s} R(1)$ en adelante. Observar este no es el producto tensorial de bimódulos. Dados f, g en R denotamos a $f \otimes_{R^s} g$ como sigue:

$$f \underset{s}{|} g.$$

Únicamente los $\sigma(s)$ -invariantes pueden “atravesar” este muro. Notar que así $f \underset{s}{|} 1$ iguala $1 \underset{s}{|} f$ si y solo si este es invariante. Considerar para ello el morfismo $f \underset{s}{|} g \mapsto \sigma(s)(f)g$ donde f, g en R . Omitiremos el subíndice cuando s en S sea claro.

Se tiene un morfismo de monoides $BS : S^* \rightarrow [{}_R\text{GBim}]$ tal que

$$BS(s) = [B_s], \quad s \in S.$$

Sea \underline{w} en S^* una expresión. Se llama a $BS(\underline{w})$ el *bimódulo de Bott–Samelson* asociado a esta expresión. Usualmente por $BS(\underline{w})$ referiremos a un representante de la clase.

Observar que para (s_1, s_2, \dots, s_n) en S^* tenemos

$$BS((s_1, s_2, \dots, s_n)) \simeq R \otimes_{R^{s_1}} R \otimes_{R^{s_2}} \cdots \otimes_{R^{s_n}} R(n). \quad (5.4)$$

Esto sigue por inducción en la longitud. Dados f_1, f_2, \dots, f_{n+1} en R denotaremos a $f_1 \otimes_{R^{s_1}} f_2 \otimes_{R^{s_2}} \cdots \otimes_{R^{s_n}} f_{n+1}$ por:

$$f_1 \underset{s_1}{|} f_2 \underset{s_2}{|} \cdots \underset{s_n}{|} f_{n+1}.$$

Claramente esto va en línea con la notación introducida previamente.

Veamos que $BS(\underline{w})$ yace en ${}_R\text{GBim}_{\text{fg}}$. Notar que basta ver B_s en ${}_R\text{GBim}_{\text{fg}}$ para todo s en S . Como R^s -módulos a izquierda vale:

$$\begin{aligned} R \otimes_{R^s} R(1) &\simeq R(1) \otimes_{R^s} (R^s \oplus R^s(-2)) \\ &\simeq (R(1) \otimes_{R^s} R^s) \oplus (R(1) \otimes_{R^s} R^s(-2)) \\ &\simeq (R(1) \otimes_{R^s} R^s) \oplus (R(-1) \otimes_{R^s} R^s) \simeq R(1) \oplus R(-1) \end{aligned}$$

Usamos el Teorema 5.1.2 para la conclusión. De allí B_s como R^s -módulo a izquierda, es finitamente generado. Un resultado similar vale para la acción a derecha. En particular B_s en ${}_R\text{GBim}_{\text{fg}}$ como queríamos.

Tenemos un isomorfismo $R \otimes_{R^s} R(1) \rightarrow R(1) \oplus R(-1)$ de R^s -módulos a izquierda. Observar que este es de R -módulos a izquierda realmente. Por lo tanto B_s como R -módulo a izquierda es graduado libre de rango finito. Vale para B_s como R -módulo a derecha el mismo resultado. Se tiene así el siguiente resultado.

Lema 5.2.1. *Cada bimódulo de Bott–Samelson es libre graduado de rango finito como módulo a izquierda o derecha.*

Demostración. Tenemos que el producto tensorial de módulos a izquierda libres graduados de rango finito también lo es. Vale además el mismo resultado para módulos a derecha. Se sigue ahora de la observación anterior el resultado. \square

Denotamos $\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}$ la clase de bimódulos de Bott–Samelson. Observar que $\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}$ no es estable por sumas directas finitas. Tampoco lo es por desplazamientos de graduación. Sea entonces $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ su clausura bajo estas operaciones. Notar que también $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ es estable por productos tensoriales.

Podemos precisar la noción de *bimódulo de Soergel* finalmente. Se definen estos a ser sumandos directos de objetos en $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$. Denotaremos $\mathbb{S}\text{Bim}$ la subcategoría estrictamente completa que ellos conforman. Se refiere por “estrictamente” que $\mathbb{S}\text{Bim}$ es cerrada por isomorfismos: Todo objeto en ${}_R\text{GBim}$ isomorfo a uno en $\mathbb{S}\text{Bim}$ también yace en $\mathbb{S}\text{Bim}$.

Claramente $\mathbb{S}\text{Bim}$ es cerrada por sumas directas finitas. Además es estable por desplazamientos de graduaciones. Veremos en seguida que también es cerrada por productos tensoriales. Se tiene que $\mathbb{S}\text{Bim}$ es la clausura en ${}_R\text{Bim}$ estrictamente completa de $(B_s : s \in S)$ bajo estas tres operaciones.

Veamos que $\overline{\mathbb{S}\text{Bim}}$ es cerrada por productos tensoriales. Dados B, B' en $\mathbb{S}\text{Bim}$ existen A, A' en $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ tales que

$$\begin{aligned} A &\simeq B \oplus C, \\ A' &\simeq B' \oplus C', \end{aligned}$$

donde C, C' en ${}_R\text{GBim}$. Por la Proposición B.2.1 tenemos

$$A \otimes A' \simeq (B \otimes B') \oplus (B \otimes C') \oplus (C \otimes B') \oplus (C \otimes C').$$

Puesto que $A \otimes A'$ pertenece a $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ se deduce lo deseado.

Se tiene que ${}_R\text{GBim}_{\text{fg}}$ contiene a $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$. De hecho podemos ser más precisos.

Lema 5.2.2. *Cada bimódulo de Soergel es libre graduado de rango finito como módulo a izquierda o derecha.*

Demostración. Sigue del Lema B.2.1 y el Lema 5.2.1 inmediatamente. \square

Por definición, en $\mathbb{S}\text{Bim}$ los morfismos son de grado cero. Aún así pueden estudiarse en $\mathbb{S}\text{Bim}$ morfismos de grado no nulo. En efecto $\mathbb{S}\text{Bim}$ es cerrado por desplazamientos de graduación. Sin embargo, este en $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ no es el caso. Por ello dotamos a $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ de estructura de categoría como sigue. Se definen para A, B en $\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}$ sus morfismos:

$$\text{Hom}_{\overline{\mathbb{B}\mathbb{S}\text{Bim}}}(A, B) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{{}_R\text{GBim}}(A, B(k)).$$

Notamos que este es el Hom graduado definido en el Apéndice.

Ejemplo 5.2.1. Calcularemos para \mathbb{S}_3 algunos bimódulos indescomponibles. Recordamos que se usa en este la presentación estándar.

Por el Lema B.2.2 tenemos que B_s y B_t son indescomponibles: Son generados por $1 \mid_s 1$ y $1 \mid_t 1$ respectivamente.

Afirmación. $B_s \otimes B_s \simeq B_s(1) \oplus B_s(-1)$

Demostración. Usando (5.3) y (5.4) tenemos que

$$\begin{aligned}
B_s \otimes B_s &\simeq R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^s} R(2) \\
&\simeq R \otimes_{R^s} (R^s \otimes R^s(-2)) \otimes_{R^s} R(2) \\
&\simeq R \otimes_{R^s} R^s \otimes_{R^s} R(2) \oplus R \otimes_{R^s} R^s(-2) \otimes_{R^s} R(2) \\
&\simeq R \otimes_{R^s} R(2) \oplus R \otimes_{R^s} R \\
&\simeq B_s(1) \oplus B_s(-1). \quad \square
\end{aligned}$$

Observación. Comparar esta con la relación $\beta_s \beta_s = v\beta_s + v^{-1}\beta_s$ en $H(\mathbb{S}_3)$.

Puede verse en el Ejemplo 5.1.1 que R^s y R^t generan a R como álgebra. Se tiene además que

$$B_s \otimes B_t \simeq R \otimes_{R^s} R \otimes_{R^t} R.$$

Por el Lema B.2.2 ambos $B_s \otimes B_t$ y $B_t \otimes B_s$ son indescomponibles: Son generados por $1 \mid_s 1 \mid_t 1$ y $1 \mid_t 1 \mid_s 1$ respectivamente. Denotaremos B_{st} y B_{ts} a estos productos.

Afirmación. $B_s \otimes B_{st} \simeq B_{st}(1) \oplus B_{st}(-1)$

Demostración. Usando la Afirmación anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
B_s \otimes B_{st} &\simeq B_s \otimes B_s \otimes B_t \\
&\simeq (B_s(1) \oplus B_s(-1)) \otimes B_t \\
&\simeq B_s \otimes B_t(1) \oplus B_s \otimes B_t(-1) \\
&\simeq B_{sr}(1) \oplus B_{sr}(-1). \quad \square
\end{aligned}$$

Observación. Comparar esta con la relación $\beta_s \beta_{st} = v\beta_{st} + v^{-1}\beta_{st}$ en $H(\mathbb{S}_3)$.

Como muestran estos cálculos $\mathbb{S}\text{Bim}$ y $H(W)$ parecen estar relacionadas. Para el final del Capítulo veremos explícitamente cuál es esta relación.

5.3. Bimódulos Estándar

Se define $\cdot_x : R \times R \rightarrow R$ para x en W como

$$f \cdot_x g = f\sigma(x)(g), \quad f, g \in R.$$

Notar que esta es una acción de R en R a derecha. Consideramos el producto usual como acción de R en R a izquierda. Denotaremos R_x al R -bimódulo conformado por estas. Observar que se obtiene al “torcer” la acción a derecha usual. Se llaman a $(R_x : x \in W)$ los *bimódulos estándar* graduados.

Se tiene que $(R_x : x \in W)$ no es cerrada por sumas directas finitas. Tampoco lo es por desplazamientos de graduaciones. Se define así StdBim su clausura en ${}_R\text{GBim}$ estrictamente completa bajo estas operaciones.

Notar que todo bimódulo estándar es libre como módulo a izquierda y derecha. Efectivamente la identidad conforma una base en ambos casos. De esto sigue que StdBim yace en ${}_R\text{Bim}_{\text{fg}}$.

Lema 5.3.1. *Dados x, y en W tenemos que*

$$R_x \otimes R_y \simeq R_{xy}.$$

Demostración. Existe $\phi : R_x \otimes R_y \rightarrow R_{xy}$ de R -bimódulos dado por

$$\phi(f \otimes g) = f \cdot_x g, \quad f, g \in R.$$

En efecto la Proposición B.1.1 otorga tal morfismo. Se tiene además $\psi : R_{xy} \rightarrow R_x \otimes R_y$ de R -bimódulos dado por

$$\psi(f) = f \otimes 1, \quad f \in R.$$

Claramente estos morfismos son inversos. □

Así el tensor en $StdBim$ opera como en W la multiplicación. Tenemos además el siguiente resultado de ortogonalidad.

Lema 5.3.2. *Dados x, y en W tenemos que*

$$\text{Hom}^\bullet(R_x, R_y) \simeq \delta_{x,y} R.$$

Demostración. Notar que $\phi : R_x \rightarrow R_y$ está determinado por su acción en la unidad. Supongamos que este es no nulo. Se tiene para f en R que

$$\sigma(y)(f)\phi(1) = \phi(1) \cdot_y f = \phi(1 \cdot_x f) = \sigma(x)(f)\phi(1).$$

Siendo R un dominio tenemos que

$$\sigma(y)(f) = \sigma(x)(f), \quad f \in R.$$

Puesto que la representación geométrica es fiel ambos elementos en W son iguales. □

Notemos que $\langle StdBim \rangle$ es isomorfo a $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[W]$ el álgebra de grupo. Se tiene el morfismo $\phi : (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[W] \rightarrow \langle StdBim \rangle$ dado por

$$\phi(x) = [R_x], \quad x \in W.$$

Aquí la Propiedad Universal del álgebra de grupo es usada. Su inverso $\psi : \langle StdBim \rangle \rightarrow (\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[W]$ es dado por

$$\psi([R_x]) = x, \quad x \in W.$$

Se comprueba sencillamente la buena definición. Decimos que $\langle StdBim \rangle$ es una *categorificación* de $(\mathbb{Z}[v, v^{-1}])[W]$. Como veremos más adelante esta noción reaparecerá con $\langle SBim \rangle$.

5.4. Filtraciones Estándar

Sean para s en S los elementos η_s, μ_s en B_s dados por

$$\eta_s = \frac{1}{2}(\alpha_s | 1 + 1 | \alpha_s), \quad \mu_s = \frac{1}{2}(\alpha_s | 1 - 1 | \alpha_s).$$

Observar ambos yacen en grado uno. Se tiene de estos el siguiente resultado.

Lema 5.4.1. *Para f en R tenemos*

$$f \cdot \eta_s = \eta_s \cdot f, \quad f \cdot \mu_s = \mu_s \cdot \sigma(s)(f).$$

Demostración. Sigue de (5.3) fácilmente calculando. \square

Definamos los morfismos $\phi_s : R(-1) \rightarrow B_s$ y $\psi_s : R_s(-1) \rightarrow B_s$ como

$$\phi_s(f) = f \cdot \eta_s, \quad \psi_s(f) = f \cdot \mu_s$$

para f en R . Por el Lema anterior estos preservan los productos. Siendo R un dominio ambos son inyectivos. Definamos además $\Phi_s : B_s \rightarrow R_s(-1)$ y $\Psi : B_s \rightarrow R(-1)$ como

$$\Phi_s(f | g) = f\sigma(s)(g), \quad \Psi(f | g) = fg$$

para f, g en R . Se tienen las siguientes sucesiones exactas cortas

$$0 \longrightarrow R_s(-1) \xrightarrow{\psi_s} B_s \xrightarrow{\Psi} R(1) \longrightarrow 0 \quad (\Delta)$$

$$0 \longrightarrow R(-1) \xrightarrow{\phi_s} B_s \xrightarrow{\Phi_s} R_s(1) \longrightarrow 0 \quad (\nabla)$$

Se comprueba mediante cálculo sencillo la exactitud. Para el mismo (5.3) es usado en la única parte no trivial. Esta es que $\text{Im}(\psi_s)$ y $\text{Im}(\phi_s)$ contienen $\text{Ker}(\Psi)$ y $\text{Ker}(\Phi_s)$ respectivamente.

Observar que (Δ) provee una filtración $B_s^2 \subseteq B_s^1 \subseteq B_s^0$ descendente. Además cumple que

$$B_s^1/B_s^0 \simeq R_s(-1), \quad B_s^2/B_s^1 \simeq R(1). \quad (5.5)$$

Puede filtrarse $BS(\underline{w})$ para \underline{w} en S^* tensorando (Δ) repetidamente. Para esta filtración los subcocientes yacen en $StdBim$ como recién. Veamos en un Ejemplo cómo funciona el proceso.

Ejemplo 5.4.1. Calculemos para $B_s \otimes B_s$ con s en S esta filtración. Se tiene por la Proposición B.1.4 una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow (R_s \otimes B_s)(-1) \longrightarrow B_s \otimes B_s \longrightarrow (R \otimes B_s)(1) \longrightarrow 0 \quad (*)$$

Tensorando con $R_s(-1)$ y $R(1)$ obtenemos las siguientes

$$0 \longrightarrow R(-2) \longrightarrow (R_s \otimes B_s)(-1) \longrightarrow R_s \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow R_s \longrightarrow (R \otimes B_s)(1) \longrightarrow R(2) \longrightarrow 0$$

Notar estas proveen filtraciones de $(R_s \otimes B_s)(-1)$ y $(R \otimes B_s)(1)$ respectivamente. Usando $(*)$ obtenemos para $B_s \otimes B_s$ una filtración descendente

$$(B_s \otimes B_s)^4 \subseteq (B_s \otimes B_s)^3 \subseteq (B_s \otimes B_s)^2 \subseteq (B_s \otimes B_s)^1 \subseteq (B_s \otimes B_s)^0.$$

Se cumple para esta la propiedad en los subcocientes:

$$(B_s \otimes B_s)^3/(B_s \otimes B_s)^4 \simeq R(-2)$$

$$(B_s \otimes B_s)^2/(B_s \otimes B_s)^3 \simeq R_s$$

$$(B_s \otimes B_s)^1/(B_s \otimes B_s)^2 \simeq R_s$$

$$(B_s \otimes B_s)^0/(B_s \otimes B_s)^1 \simeq R(2)$$

Podemos obtener otras filtraciones distintas con subcocientes en $StdBim$. Podríamos usar (∇) en vez de (Δ) en el proceso anterior. Podríamos también combinar ambas para obtener nuevas filtraciones. Dada la falta de unicidad no es claro cuál filtración debería de ser elegida. Para enmendar este problema introducimos algo de terminología.

Sea (W, \preceq) un orden tal que: Para x, y en W vale $x \preceq y$ cuando $x \leq y$ en el orden de Bruhat. Quiere decir que (W, \preceq) refina al orden de Bruhat. Se llama a (W, \preceq) una *enumeración* de W en este caso. Un tal orden es el dado por la longitud de las expresiones.

Sea (W, \preceq) una enumeración. Sea además B en $SBim$ con $(B^i : 0 \leq i \leq n)$ una filtración descendente. Supongamos que existe $(x_i : 0 \leq i < n)$ en W una cadena descendente tal que

$$B^i/B^{i+1} \simeq R_{x_i}^{\oplus h_{x_i}(B)}, \quad h_{x_i}(B) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}[v, v^{-1}]. \quad (5.6)$$

Se llama en tal caso una Δ -filtración de B a la misma. Con el orden dado por la longitud el término *filtración estándar* suele usarse. Se tiene el siguiente resultado de Soergel.

Teorema 5.4.1. *Fijemos (W, \preceq) una enumeración. Cada bimódulo en $SBim$ admite una Δ -filtración única.*

Así para B en $SBim$ la familia $(h_x(B) : x \in W)$ de multiplicidades (5.6) está bien definida. Sin embargo esta *a priori* depende de la enumeración elegida. Como se afirma a continuación este no es el caso.

Teorema 5.4.2. *Para todo B en $SBim$ la familia $(h_x(B) : x \in W)$ es independiente de la enumeración.*

Puede encontrarse en [10, Lema 6.3] la prueba de ambos Teoremas. Se considera allí a bimódulos en ${}_R Bim$ como haces cuasi-coherentes en $QCho(\mathbf{E} \times \mathbf{E})$. Consecuentemente son tratados desde una perspectiva geométrica.

Podemos ahora hacer la siguiente definición: Para B en $SBim$ denotamos $ch_{\Delta}(B)$ en $H(W)$ el elemento

$$ch_{\Delta}(B) = \sum_{x \in W} v^{\ell(x)} h_x(B) \delta_x. \quad (5.7)$$

Se llama a este el Δ -carácter de B en adelante.

Ejemplo 5.4.2. Podemos reescribir (5.5) como sigue

$$B_s^1/B_s^0 \simeq R_s^{\oplus v^{-1}}, \quad B_s^2/B_s^1 \simeq R_{id}^{\oplus v}.$$

Notar que esta es la filtración estándar de B_s para s en S . Con esto se tiene

$$ch_{\Delta}(B_s) = v + \delta_s = \beta_s.$$

Se cumplen de ch_{Δ} lo siguiente.

Proposición 5.4.1. *Dados B, B' en $SBim$ tenemos*

- i. $ch_{\Delta}(B \oplus B') = ch_{\Delta}(B) + ch_{\Delta}(B')$.
- ii. $ch_{\Delta}(B(1)) = v ch_{\Delta}(B)$.

Demostración. Se siguen ambos fácilmente de las definiciones. Considerar para (i) la filtración estándar de ambos bimódulos. Se obtiene la de su suma directa a partir de estas. \square

De la primera afirmación el carácter puede extenderse a $\langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle$. Se tiene un morfismo $\text{ch}_\Delta : \langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle \rightarrow H(W)$ de grupos, denotado de igual forma. De la segunda afirmación este es $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -lineal.

Usando ∇ en lugar de Δ obtenemos análogos de los conceptos previos. Puede consultarse [5, Sección 5.3] para más información sobre esto.

5.5. Teorema de Categorificación de Soergel

Finalmente estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Categorificación de Soergel. Se concretan en este algunas de nuestras previas observaciones.

Teorema 5.5.1 (Teorema de Categorificación de Soergel). *Existe un isomorfismo $c : H(W) \rightarrow \langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle$ de $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebras dado por*

$$c(\beta_s) = B_s, \quad s \in S.$$

Su inverso resulta $\text{ch}_\Delta : \langle \mathbb{S}\text{Bim} \rangle \rightarrow H(W)$ antes definido.

Notar que esto explica las relaciones en el Ejemplo 5.4.1. Hay de este Teorema una segunda parte. Denotemos $\text{Indec}(\mathbb{S}\text{Bim})$ el conjunto en $\mathbb{S}\text{Bim}$ de bimódulos indescomponibles.

Teorema 5.5.2. *Existe una biyección de W con $\text{Indec}(\mathbb{S}\text{Bim})$ módulo desplazamientos de grado:*

$$w \in W \longleftrightarrow B_w \in \text{Indec}(\mathbb{S}\text{Bim}).$$

Para \underline{w} en S^ reducida B_w es en $BS(\underline{w})$ un sumando directo. Demás sumandos de $BS(\underline{w})$ son B_x para $x < w$ posiblemente desplazados.*

Soergel probó en [10] estos resultados, aunque no para la representación geométrica. Probó que valen para ciertas representaciones que no la incluyen. Sin embargo Libedinsky en [8] muestra que también son válidos para esta.

Dada \underline{w} en S^* reducida el Teorema 5.5.1 junto con la fórmula de Deodhar implican

$$\text{ch}_\Delta(BS(\underline{w})) = \sum_{x \leq w} v^{\text{def}(x)} \delta_x$$

Sabemos que los sumandos de $BS(\underline{w})$ son $(B_x : x < w)$ módulo desplazamientos. Por tanto esta fórmula permite inferir información de la filtración estándar de estos.

También en [10] Soergel formula su famosa Conjetura.

Conjetura (Conjetura de Soergel). *Para todo x en W vale*

$$\text{ch}_\Delta(B_x) = \beta_x.$$

Equivalentemente los polinomios $(h_{x,y} : x, y \in W)$ de Kazhdan–Lusztig son exactamente $(h_x(B_y) : x, y \in W)$. Notar que esto implica la Conjetura de Positividad de Kazhdan–Lusztig. Efectivamente los segundos yacen en $\mathbb{Z}_{\geq 0}[v, v^{-1}]$ expresamente.

Celebradamente la Conjetura de Soergel fue probada en [6] por Elias y Williamson. Allí los autores exponen un novedoso enfoque diagramático a la teoría de Soergel. Concretamente presentan $\mathbb{S}\text{Bim}$ por generadores y relaciones usando gráficos planares para representar morfismos.

Apéndice A

Monoides

A.1. Monoide Libre

Serán en esta Sección provistas las nociones básicas de monoides libres. Se denota \mathbb{I}_n para n en \mathbb{N}_0 al conjunto de enteros en \mathbb{N}_0 menores a este. Observar en particular que \mathbb{I}_0 es vacío.

Sea S un conjunto dado. Se denota por S_n^* la familia de funciones $f : \mathbb{I}_n \rightarrow S$ para cada n en \mathbb{N}_0 . Con esta notación S^* es definido a ser

$$S^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} S_n^*.$$

Se define en S^* la operación $\cdot : S^* \times S^* \rightarrow S^*$ como sigue: Si f en S_n^* y g en S_m^* tenemos $f \cdot g$ en S_{n+m}^* dada por

$$(f \cdot g)(k) = \begin{cases} f(k) & 0 \leq k < n \\ g(k - n) & n \leq k < n + m \end{cases}.$$

Claramente esta operación otorga a S^* estructura de monoide. Observar aquí el único elemento en S_0^* es la identidad. Se llama a (S^*, \cdot) el *monoide libre* en S en adelante. Se llaman además *palabras* en S a sus elementos.

Siendo S^* una unión disyunta, tenemos $\ell : S^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ tal que

$$f \in S_{\ell(f)}^*, \quad f \in S^*.$$

Sigue de su definición que ℓ es un morfismo de monoides. Se dice para f en S^* que $\ell(f)$ es la *longitud* de f en adelante.

Usualmente escribimos los elementos en S_n^* como n -uplas en S . Quiere decir que f en S_n^* es denotado como

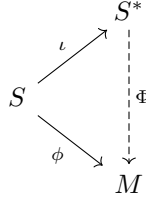
$$(f(0), \dots, f(n-1)).$$

Más aún el único elemento en S_0^* es denotado $()$ como la upla vacía.

Sean f en S_k^* y g en S_n^* dos palabras. Sea $\alpha : \mathbb{I}_k \rightarrow \mathbb{I}_n$ estrictamente creciente tal que $g \circ \alpha$ y f son iguales. Se dice que f es una *subpalabra* de g en este caso. Usamos la notación $f \leq g$ en adelante. Quiere decir que la primera puede obtenerse de la segunda descartando algunos elementos.

Observar la aplicación canónica $\iota : S \rightarrow S^*$ es inyectiva. Podemos así identificar a S con su imagen en S^* mediante esta. Veamos que S^* es un objeto libre sobre S en la categoría de monoides.

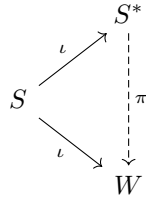
Proposición A.1.1. Sea M un monoide junto con $\phi : S \rightarrow M$ una función. Se tiene un único morfismo de monoïdes $\Phi : S^* \rightarrow M$ que hace conmutar:



Demostración. Sabemos que S genera a S^* por definición. Supongamos que $\Phi : S^* \rightarrow M$ es como en el enunciado. Observar que la acción de este en S está dada por el diagrama. Sigue así que existe a lo sumo un morfismo como en el enunciado. Más aún la existencia también está implícita en el diagrama. Se define $\Phi : S^* \rightarrow M$ por extensión de su definición en los generadores. \square

A.2. Función Longitud

Considerar un grupo W con S un conjunto de generadores. Observar que la inclusión $\iota : S \rightarrow W$ induce $\pi : S^* \rightarrow W$ de monoïdes que hace conmutar:



Se dice que la π -fibra sobre un punto en W son las *expresiones* en S del mismo. Observar estas representan al punto en cuestión: Se tiene que el producto de sus coordenadas iguala a este punto. Si el conjunto de generadores es claro, omitimos la referencia al mismo. Se acostumbra denotar por \underline{w} en S^* una expresión de w en W en general: Indica el elemento en W junto con una expresión en S del mismo. Se llaman además *subexpresiones* a las subpalabras en este contexto.

Observar puede trasladarse la longitud del monoïde libre al grupo. Se define una función $\ell : W \rightarrow \mathbb{N}_0$ como

$$\ell(w) = \text{mín}\{\ell(\underline{w}) : \underline{w} \in \pi^{-1}(\{w\})\}, \quad w \in W.$$

Se llama para w en W a $\ell(w)$ la *longitud* en S de w en adelante. Si el conjunto de generadores es claro, omitimos la referencia al mismo. Se dice *reducida* una expresión que realiza el mínimo en la igualdad anterior.

Siguen inmediatamente de la definición las siguientes propiedades.

Proposición A.2.1. Sea un grupo W con S un conjunto de generadores. Observar que entonces

- i. Cada elemento en W de longitud uno pertenece a S .
- ii. Si w, v en W entonces $\ell(wv) \leq \ell(w) + \ell(v)$.

Se pondrá el foco en grupos generados por involuciones en esta monografía. Vale para estos un complemento de la Proposición anterior.

Proposición A.2.2. *Sea un grupo W generado por un conjunto S de involuciones. Observar que entonces*

- i. Cada elemento w en W tiene igual longitud que su inverso.*
- ii. Si w, v en W entonces $\ell(wv) \geq \ell(w) - \ell(v)$.*
- iii. Si w en W para cada s en S tenemos $\ell(w) - 1 \leq \ell(ws) \leq \ell(w) + 1$.*

Demostración. Hay una biyección entre las expresiones de un elemento y su inverso: Simplemente invertir el orden de las coordenadas. Siendo que esta biyección preserva la longitud (i) es válido.

Observar que si w, v en W entonces

$$\ell(w) = \ell(wvv^{-1}) \leq \ell(wv) + \ell(v^{-1}) = \ell(wv) + \ell(v).$$

Sigue así la validez de (ii). Por último (iii) es inmediata de (ii) junto con la Proposición anterior. \square

A.3. Álgebra de Monoide

Se define ahora un análogo al álgebra de grupo para un monoide. Veremos que este análogo cumple también una Propiedad Universal.

Sea A un anillo conmutativo con unidad además de M un monoide. Dotaremos al A -módulo libre $A^{(M)}$ de estructura multiplicativa. Para cada m en M sea $f_m : M \rightarrow A^{(M)}$ dada por

$$f_m(n) = mn, \quad n \in M.$$

Existe un único morfismo $F_m : A^{(M)} \rightarrow A^{(M)}$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f_m} & A^{(M)} \\ \iota \downarrow & \nearrow F_m & \\ A^{(M)} & & \end{array}$$

Observar que para m, n en M ambas f_{mn} y $f_m \circ f_n$ son iguales. Por unicidad también F_{mn} y $F_m \circ F_n$ son iguales.

Sea ahora $f : M \rightarrow \text{End } A^{(M)}$ la aplicación dada por

$$f(m) = F_m, \quad m \in M.$$

Existe de igual forma un único morfismo $F : A^{(M)} \rightarrow \text{End } A^{(M)}$ tal que el diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & \text{End } A^{(M)} \\ \iota \downarrow & \nearrow F & \\ A^{(M)} & & \end{array}$$

Se ve para x, y en $A^{(M)}$ que ambas $F(F(x)(y))$ y $F(x) \circ F(y)$ son iguales. En efecto basta comprobarlo para el conjunto de generadores.

Definimos así una operación binaria $\cdot : A^{(M)} \times A^{(M)} \rightarrow A^{(M)}$ como

$$x \cdot y = F(x)(y), \quad x, y \in A^{(M)}.$$

Esta operación dota $A^{(M)}$ de estructura de A -álgebra asociativa unitaria. Claramente esta es una forma bilineal. Por otro lado si x, y, z en $A^{(M)}$ se tiene

$$(x \cdot y) \cdot z = F(F(x)(y))(z) = F(x)(F(y)(z)) = x \cdot (y \cdot z).$$

Finalmente vía la inclusión $\iota : M \rightarrow A^{(M)}$ la identidad en M es la unidad.

Denotamos $A[M]$ a la A -álgebra asociativa unitaria construida. Tenemos un morfismo de anillos $\iota_A : A \rightarrow A[M]$ dado por

$$\iota_A(a) = a1_{A[M]}, \quad a \in A.$$

Contamos además con un morfismo de monoides $\iota_M : M \rightarrow A[M]$ dado por

$$\iota_M(m) = m, \quad m \in M.$$

Observar estos satisfacen las relaciones

$$\iota_A(a)\iota_M(m) = \iota_M(m)\iota_A(a), \quad (a, m) \in A \times M.$$

La terna $(A[M], \iota_A, \iota_M)$ satisface en **Ring** la siguiente propiedad universal.

Proposición A.3.1. *Sea K un anillo con unidad. Sean además $\phi_1 : A \rightarrow K$ y $\phi_2 : M \rightarrow K$ morfismos tales que¹*

$$\phi_1(a)\phi_2(m) = \phi_2(m)\phi_1(a), \quad (a, m) \in A \times M.$$

Se tiene un único morfismo $\phi : A[M] \rightarrow K$ tal que los diagramas conmutan

$$\begin{array}{ccc} & A[M] & \\ \iota_A \nearrow & & \downarrow \phi \\ A & & K \\ \phi_1 \searrow & & \\ & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & A[M] & \\ \iota_M \nearrow & & \downarrow \phi \\ M & & K \\ \phi_1 \searrow & & \\ & & \end{array}$$

Demostración. Sea $(\alpha_m : m \in M)$ en $A[M]^\vee$ el dual de la base M en $A[M]$. Se define $\phi : A[M] \rightarrow K$ como

$$\phi(x) = \sum_{m \in M} \phi_1(\alpha_m(x))\phi_2(m), \quad x \in A[M].$$

Es claro que esta aplicación respeta la adición. Dado m en M se denota F_m a la fibra de este elemento bajo el producto. Se cumple así para x, y en $A[M]$ que

$$\alpha_m(x \cdot y) = \sum_{(k,l) \in F_m} \alpha_k(x)\alpha_l(y).$$

¹Se toma la estructura multiplicativa en el codominio del segundo morfismo.

Luego si x, y en $A[M]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\phi(x \cdot y) &= \sum_{m \in M} \phi_1(\alpha_m(x \cdot y)) \phi_2(m) \\
&= \sum_{m \in M} \phi_1 \left(\sum_{(k,l) \in F_m} \alpha_k(x) \alpha_l(y) \right) \phi_2(m) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{(k,l) \in F_m} \phi_1(\alpha_k(x)) \phi_1(\alpha_l(y)) \phi_2(k) \phi_2(l) \\
&= \sum_{m \in M} \sum_{(k,l) \in F_m} \phi_1(\alpha_k(x)) \phi_2(k) \phi_1(\alpha_l(y)) \phi_2(l) \\
&= \left(\sum_{k \in M} \phi_1(\alpha_k(x)) \phi_2(k) \right) \left(\sum_{l \in M} \phi_1(\alpha_l(y)) \phi_2(l) \right) \\
&= \phi(x) \phi(y).
\end{aligned}$$

Esta aplicación respeta así la multiplicación también. La unicidad es inmediata de la conmutatividad de los diagramas. \square

Apéndice B

Bimódulos

B.1. Bimódulos

Fijemos un anillo A conmutativo con unidad. Sea además M un grupo abeliano con $\cdot_L : A \times M \rightarrow M$ y $\cdot_R : M \times A \rightarrow M$ dos acciones bilineales. Asumamos para m en M satisfacen

$$(a \cdot_L m) \cdot_R b = a \cdot_L (m \cdot_R b), \quad a, b \in A. \quad (\text{B.1})$$

Se llama a M un A -bimódulo en este caso. Observar que (B.1) permite escribir productos sin necesidad de paréntesis. Frecuentemente se omitirán los subíndices en los productos.

Sea M un A -bimódulo dado. Sea además N en M un subgrupo aditivo tal que

$$a \cdot n \cdot b \in N, \quad a, b \in A$$

para todo n en N . Se llama a N un *subbimódulo* de M en este caso. Este forma un A -bimódulo con la estructura heredada.

Sean M y N dos A -bimódulos. Un *morfismo* de A -bimódulos es una función $f : M \rightarrow N$ tal que

$$\begin{aligned} f(m + n) &= f(m) + f(n), & m, n \in M. \\ f(a \cdot m \cdot b) &= a \cdot f(m) \cdot b, & a, b \in A. \end{aligned}$$

Es fácil ver que tanto imagen como preimagen de submódulos es un submódulo.

Con esta noción los A -bimódulos forman una categoría. Denotaremos a esta por ${}_A\text{Bim}$ en adelante. Distinguimos ${}_A\text{Bim}_{\text{fg}}$ una subcategoría completa: Sus objetos son finitamente generados como módulos a izquierda y derecha.

Se comprueba fácilmente que ${}_A\text{Bim}$ admite tanto productos como coproductos. Puede verificarse más aún que es una categoría abeliana. Por otro lado ${}_A\text{Bim}$ posee objetos libres: Dado X es un conjunto, definimos

$$A^{(X)} = \bigoplus_{x \in X} A \otimes_{\mathbb{Z}} A. \quad (\text{B.2})$$

Se ve fácilmente que $A^{(X)}$ es libre sobre X . Más aún un objeto es libre si y sólo si admite una base: Aquí independencia lineal refiere a sumas de productos a izquierda y derecha.

Veamos que ${}_A\text{Bim}$ admite productos tensoriales. Consideramos M y N dos A -bimódulos. Notemos $M \otimes N$ al cociente de $M \otimes_{\mathbb{Z}} N$ por las relaciones

$$(m \cdot a) \otimes_{\mathbb{Z}} n - m \otimes_{\mathbb{Z}} (a \cdot n), \quad m \in M, n \in N, a \in A.$$

Dotamos a $M \otimes N$ de dos acciones bilineales

$$\begin{aligned} \cdot_L : A \times (M \otimes N) &\rightarrow M \otimes N, \\ \cdot_R : (M \otimes N) \times A &\rightarrow M \otimes N. \end{aligned}$$

Para $m \otimes n$ en $M \otimes N$ están dadas por

$$\begin{aligned} a \cdot_L (m \otimes n) &= (a \cdot m) \otimes n \\ (m \otimes n) \cdot_R a &= m \otimes (n \cdot a) \end{aligned}$$

para todo a en A . Se comprueba fácilmente que estas están bien definidas. Claramente (B.1) es satisfecha por estas acciones. Otorgan así a $M \otimes N$ estructura de A -bimódulo. Se llama a $M \otimes N$ el *producto tensorial* de M y N .

Tomemos P un A -bimódulo. Sea $B : M \times N \rightarrow P$ una aplicación bilineal. Supongamos para (m, n) en $M \times N$ se cumplen

$$\begin{aligned} B(a \cdot m, n \cdot b) &= a \cdot B(m, n) \cdot b, \\ B(m \cdot a, n) &= B(m, a \cdot n), \end{aligned}$$

para todo a, b en A . Se adjetiva entonces (A, A) -bilineal a esta aplicación. Notar que el mapa $\otimes : M \times N \rightarrow M \otimes N$ canónico es (A, A) -bilineal. El par $(M \otimes N, \otimes)$ satisface la siguiente Propiedad Universal.

Proposición B.1.1. Sean M y N dos A -bimódulos. Sea además $B : M \times N \rightarrow P$ una aplicación (A, A) -bilineal. Existe un único morfismo $f : M \otimes N \rightarrow P$ de A -bimódulos tal que

$$\begin{array}{ccc} & & M \otimes N \\ & \nearrow \otimes & \\ M \times N & & \\ & \searrow B & \\ & & P \end{array}$$

(La flecha vertical de $M \otimes N$ a P es etiquetada como f .)

es conmutativo.

Demostración. Se tiene que existe $\bar{f} : M \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow P$ de grupos que hace conmutar el diagrama. Más aún este induce $f : M \otimes N \rightarrow P$ pasando al cociente. Resta ver que este morfismo es de A -bimódulos. Dado $m \otimes n$ en $M \otimes N$ se tiene

$$\begin{aligned} f(a \cdot (m \otimes n) \cdot b) &= f((a \cdot m) \otimes (n \cdot b)) \\ &= B(a \cdot m, n \cdot b) \\ &= a \cdot B(m, n) \cdot b \\ &= a \cdot f(m \otimes n) \cdot b \end{aligned}$$

Se tiene así el morfismo de A -bimódulos buscado. La unicidad es inmediata. \square

Se satisfacen además las siguientes propiedades

Proposición B.1.2. *Supongamos M, N, P son A -bimódulos. Se cumplen:*

- i.* $A \otimes M \simeq M \simeq M \otimes A$.
- ii.* $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$.
- iii.* $M \otimes (N \oplus P) \simeq (M \otimes N) \oplus (M \otimes P)$.

Demostración. Siguen fácilmente (i) y (iii) de la Proposición previa.

Veamos que vale (ii) ahora. Se tiene $\bar{f}_p : M \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow M \otimes (N \otimes P)$ para cada p en P dado por

$$\bar{f}_p(m \otimes_{\mathbb{Z}} n) = m \otimes (n \otimes p), \quad m \otimes_{\mathbb{Z}} n \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Este induce $f_p : M \otimes N \rightarrow M \otimes (N \otimes P)$ pasando al cociente. Observar este morfismo no es de A -bimódulos. Se tiene vía la Proposición previa $f : (M \otimes N) \otimes P \rightarrow M \otimes (N \otimes P)$ tal que

$$f((m \otimes n) \otimes p) = f_p(m \otimes n), \quad (m \otimes n) \otimes p \in (M \otimes N) \otimes P.$$

Ahora este es un morfismo de A -bimódulos. Su inverso se construye análogamente. \square

Como para módulos, el producto tensorial es exacto a derecha.

Proposición B.1.3. *Se tiene $M \otimes -$ para M en ${}_A\text{Bim}$ es exacto a derecha.*

Demostración. Consideremos en ${}_A\text{Bim}$ la sucesión exacta

$$N \xrightarrow{f} P \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 0$$

Claramente $\text{Id}_M \otimes g : M \otimes P \rightarrow M \otimes Q$ es un epimorfismo. En efecto todo tensor elemental yace en su imagen.

Puesto que $g \circ f$ es nulo, también $(\text{Id}_M \otimes g) \circ (\text{Id}_M \otimes f)$ lo es. Así $\text{Ker}(\text{Id}_M \otimes g)$ contiene $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ en particular. Veamos la contención recíproca.

Denotemos $\pi : M \otimes P \rightarrow (M \otimes P)/\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ a la proyección canónica. Por lo anterior existe $\alpha : (M \otimes P)/\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f) \rightarrow M \otimes Q$ tal que $\alpha \circ \pi$ iguala $\text{Id}_M \otimes g$. Basta ver que este es un isomorfismo.

Definamos $B : M \times Q \rightarrow (M \otimes P)/\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ tal que

$$B(m, g(p)) = \pi(m \otimes p), \quad (m, p) \in M \times P.$$

Observar está bien definida: Sean p, q en P tales que $g(p) = g(q)$ son iguales. Así $p - q$ en $\text{Im}(f)$ de donde $m \otimes p - m \otimes q$ en $\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ para m en M .

Se ve fácilmente que esta aplicación es (A, A) -bilineal. Luego induce $\beta : M \otimes Q \rightarrow (M \otimes P)/\text{Im}(\text{Id}_M \otimes f)$ tal que

$$\beta \circ (\text{Id}_M \otimes g) = \pi.$$

Puede verse fácilmente que α y β son inversos. \square

Vale el mismo resultado tensorando a derecha. Se dice que F un A -bimódulo es *playo* si $F \otimes -$ y $- \otimes F$ son exactos.

Proposición B.1.4. *Todo bimódulo en ${}_A\text{Bim}_{fg}$ es playo.*

Demostración. Consideremos en ${}_A\text{Bim}$ la sucesión exacta

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$$

Dado F en ${}_A\text{Bim}_{\text{fg}}$ basta ver que $\text{Id}_F \otimes f$ y $f \otimes \text{Id}_F$ son inyectivas. Siendo F como R -módulo a derecha libre $\text{Id}_F \otimes f$ es inyectiva. Igualmente para el otro morfismo. \square

B.2. Bimódulos Graduados

Supongamos A admite $(A^k : k \in \mathbb{Z})$ una graduación¹. Sea M un A -bimódulo con una colección $(M^k : k \in \mathbb{Z})$ de subbimódulos. Se dice a esta una *graduación* de M si valen

$$M = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} M^k, \quad (\text{B.3})$$

$$A^i \cdot M^k \cdot A^j \subseteq M^{i+k+j}, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.4})$$

Decimos que M es un A -bimódulo *graduado* en este caso. Se llama *homogéneos* a los elementos en los sumandos de (B.3). Denotaremos a estos M_h en adelante.

Sea M un A -bimódulo graduado. Un subbimódulo N de M se dice *graduado* si

$$N = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} N \cap M^k.$$

Se tiene que un subbimódulo es graduado si y solo si está generado por elementos homogéneos.

Sean M y N dos A -bimódulos graduados. Sea $f : M \rightarrow N$ un morfismo A -bimódulos tal que

$$f(M^k) \subseteq N^k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Se dice en tal caso que es un *morfismo* de A -bimódulos graduados. Tanto imagen como preimagen de submódulos graduados es un submódulo graduado.

De esta forma los A -bimódulos graduados forman una categoría. Denotamos a esta ${}_A\text{GBim}$ en adelante. Distinguimos ${}_A\text{GBim}_{\text{fg}}$ una subcategoría completa de esta: Sus objetos son finitamente generados como módulos a izquierda y derecha.

Se tiene que ${}_A\text{GBim}$ admite coproductos pero no productos. Tampoco posee ${}_A\text{GBim}$ objetos libres esta vez. Sin embargo, usaremos una noción alternativa: Un objeto en ${}_A\text{GBim}$ es *libre graduado* de ser en ${}_A\text{Bim}$ libre con base de homogéneos.

Sea M y N dos A -bimódulos graduados. Supongamos existe P otro A -bimódulo graduado tal que

$$M \simeq N \oplus P. \quad (\text{B.5})$$

Diremos que N es un *sumando directo* de M en tal caso. Notemos que aquí el isomorfismo se toma graduado. Se cumple el siguiente resultado.

Lema B.2.1. *Sea M un A -bimódulo libre graduado. Cuando N es un sumando directo de M este también es libre graduado.*

¹Salvo mención explícita, toda graduación es sobre los enteros.

Demostración. Sabemos existe P un A -bimódulo graduado tal que

$$M \simeq N \oplus P. \quad (\text{B.6})$$

Descomponiendo una base de M conseguimos una de cada sumando. Siendo el isomorfismo graduado, estas bases constan de homogéneos. \square

Sea M un A -bimódulo graduado. Se dirá que este es *indescomponible* si no admite un sumando directo no trivial. Tenemos el siguiente útil resultado.

Lema B.2.2. *Sea M un A -bimódulo graduado. Si M es generado por m en M_h entonces es indescomponible.*

Demostración. Notar que $M^{\deg(m)}$ iguala $\text{Sp}_{\mathbb{R}}\langle m \rangle$ siendo los escalares de grado cero. De cumplirse (B.6) entonces m en $N^{\deg(m)}$ o m en $N^{\deg(m)}$. Siendo este un generador, alguno debe contener a M . \square

Sean M y N dos A -bimódulos graduados. Veamos que $M \otimes N$ admite una graduación. Denotemos $\iota_{(i,j)} : M^i \otimes N^j \rightarrow M \otimes N$ la inclusión canónica. Se define entonces

$$(M \otimes N)^k = \bigoplus_{i+j=k} \iota_{(i,j)}(M^i \otimes N^j), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Observar que $((M \otimes N)^k : k \in \mathbb{Z})$ define en $M \otimes N$ una graduación. Se comprueba fácilmente que (B.4) vale en tensores elementales. De aquí se extiende el resultado por linealidad. Notar que la Proposición B.1.2 es también válida para A -bimódulos graduados.

Proposición B.2.1. *Supongamos M, N, P son A -bimódulos graduados. Se cumplen:*

- i.* $A \otimes M \simeq M \simeq M \otimes A$.
- ii.* $(M \otimes N) \otimes P \simeq M \otimes (N \otimes P)$.
- iii.* $M \otimes (N \oplus P) \simeq (M \otimes N) \oplus (M \otimes P)$.

Demostración. Basta ver que los isomorfismos en la Proposición B.1.2 son graduados. \square

Existe un functor $\text{Sh}_j : {}_A\text{GBim} \rightarrow {}_A\text{GBim}$ para cada $j \in \mathbb{Z}$. Este actúa en $\text{Obj}({}_A\text{GBim})$ como sigue: Sea M un A -bimódulo graduado. Entonces $\text{Sh}_j(M)$ iguala M pero

$$\text{Sh}_j(M)^k = M^{k+j}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Esto es Sh_j desplaza la graduación. Por otro lado, actúa en $\text{Mor}({}_A\text{GBim})$ como la identidad. Se llama *j -shift* a este functor. Denotamos también $M(j)$ a $\text{Sh}_j(M)$ en ocasiones.

Observemos que j -shift conmuta con el producto tensorial. Esto es, canónicamente se tiene

$$\text{Sh}_j(-) \otimes - \simeq \text{Sh}_j(- \otimes -) \simeq - \otimes \text{Sh}_j(-).$$

Notar que en ${}_A\text{GBim}$ los morfismos son de grado cero. Es decir que no desplazan la graduación. Aún así en ${}_A\text{GBim}$ podemos estudiar morfismos de grado no nulo. Desplazando la graduación del codominio, equivalen a uno de grado cero. Se define para M, N en ${}_A\text{GBim}$ el *espacio Hom graduado* por

$$\text{Hom}^\bullet(M, N) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{{}_A\text{GBim}}(M, N(k))$$

B.3. Grupo de Grothendieck

Denotemos $[_R\text{GBim}]$ la clase $\text{Obj}(_R\text{GBim})$ módulo isomorfismos. El producto tensorial hace de $[_R\text{GBim}]$ un monoide. Se tiene $\cdot : [_R\text{GBim}] \times [_R\text{GBim}] \rightarrow [_R\text{GBim}]$ dada por

$$[M] \cdot [N] = [M \otimes N], \quad [M], [N] \in [_R\text{GBim}].$$

Por la Proposición B.2.1 efectivamente $[_R\text{GBim}]$ es un monoide. Observar que $[_R\text{GBim}_{\text{fg}}]$ es un submonoide.

Observar que el coproducto no provee $[_R\text{GBim}]$ de estructura aditiva. Tiene el defecto de carecer de inversos. Podemos enmendar esto vía la siguiente construcción: Sea $\langle _R\text{GBim} \rangle$ el grupo abeliano con $[_R\text{GBim}]$ por generadores. Imponemos en $\langle _R\text{GBim} \rangle$ las relaciones

$$[M \oplus N] = [M] + [N]$$

donde $[M], [N]$ en $[_R\text{GBim}]$. Se llama *grupo de Grothendieck* de $_R\text{GBim}$ en adelante. Observar que $\langle _R\text{GBim}_{\text{fg}} \rangle$ es un subgrupo.

Se puede extender a $\langle _R\text{GBim} \rangle$ el producto en $[_R\text{GBim}]$. Vía la Proposición B.2.1 esta extensión está bien definida. Con este producto $\langle _R\text{GBim} \rangle$ conforma un anillo. Se tiene una acción de $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ en $\langle _R\text{GBim} \rangle$ dada por

$$v[M] = [M(1)], \quad [M] \in [_R\text{GBim}].$$

Por tanto $\langle _R\text{GBim} \rangle$ es una $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -álgebra. Denotaremos $M^{\oplus f}$ la acción de f en $\mathbb{Z}_{\geq 0}[v, v^{-1}]$ sobre M en $_R\text{GBim}$. Por ejemplo tenemos

$$M^{\oplus v^{-2}+1+2v} = M(-2) \oplus M \oplus M(1) \oplus M(1).$$

Bibliografía

- [1] A. Björner, F. Brenti, *Combinatorics of Coxeter Groups*, Springer, Berlin, 2005.
- [2] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie, Chaptieres 4–6*, Masson, Paris, 1981.
- [3] K. Brown, *Buildings*, Springer, New York, 1989.
- [4] M. Davis, *The Geometry and Topology of Coxeter Groups*, Princeton University Press Publishing House, Princeton, 2008.
- [5] B. Elias, S. Makisumi, U. Thiel, G. Williamson, *Introduction to Soergel Bimodules*, RSME Springer Series, Berlin, 2020.
- [6] B. Elias, G. Williamson, The Hodge Theory of Soergel Bimodules, *Annals of Mathematics* (2) 180(3), 1089–1136 (2014).
- [7] J. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [8] N. Libedinsky, Équivalences entre Conjectures de Soergel, *Journal of Algebra* 320, No. 7, 2695–2705 (2008).
- [9] G. Lusztig, *Hecke Algebras with Unequal Parameters*, CRM Monograph Series, Montreal, 2002.
- [10] W. Soergel, Kazhdan-Lusztig-Polynome und Unzerlegbare Bimoduln über Polynomringen, *Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu* 6(3), 501–525 (2007).