

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Tesis de Licenciatura en Física

**Simulaciones de magnetosferas en sistemas binarios
compactos: estudio de métricas aproximadas y su
implementación numérica**

Autor: Fabrizio Venturi

Director: Federico Carrasco

Córdoba - Febrero de 2023



Simulaciones de magnetosferas en sistemas binarios compactos: estudio de métricas aproximadas y su implementación numérica por Fabrizio Venturi se distribuye bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi familia, Elizabeth, Marcelo y Agustín por acompañarme desde siempre.

Quiero agradecer a todos mis amigos.

Quiero agradecer a mi director, Federico, por haberme acompañado en este trabajo, por su amabilidad y por estar siempre dispuesto a ayudar.

Quiero agradecer al grupo de Relatividad.

Quiero agradecer a mis profesores de la facultad por haberme traído hasta acá.

Quiero agradecer al CCAD por darme los recursos para llevar a cabo este trabajo.

Este trabajo utilizó recursos computacionales del CCAD de la Universidad Nacional de Córdoba (<https://ccad.unc.edu.ar/>), que forman parte del SNCAD del MinCyT de la República Argentina.

Quiero agradecer a la universidad pública por haberme dado esta oportunidad.

Resumen

Los sistemas binarios compactos son aquellos compuestos por dos objetos compactos, como agujeros negros o estrellas de neutrones, que orbitan alrededor de un centro de masa común. Cuando al menos uno de estos objetos es una estrella de neutrones, se espera que se genere una magnetosfera conjunta poblada por un plasma tenue y campos magnéticos intensos. En dichos entornos, la interacción del plasma con la dinámica propia del sistema binario permite canalizar parte de la energía cinética hacia la producción de señales electromagnéticas. La caracterización de estas potenciales señales electromagnéticas precursoras (es decir, producidas antes de la colisión) es de gran relevancia en el actual contexto de astronomía de múltiples-mensajeros, inaugurada a partir de las primeras detecciones de ondas gravitacionales.

El programa ONION [1, 2] realiza simulaciones de la evolución de estos sistemas en las últimas órbitas estables previas a la colisión. El código permite estudiar la dinámica del plasma sobre un espacio-tiempo de fondo, representado por una métrica dada. En las simulaciones de sistemas binarios agujero negro/estrella de neutrones realizadas anteriormente con ONION, solo se tuvo en cuenta la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia del agujero negro (a través de una métrica de Kerr-Schild [3]), pero no se consideró la curvatura que causa la estrella compañera. El objetivo de este trabajo es explorar distintas posibilidades de métricas aproximadas que representen tanto la presencia del agujero negro como de la estrella de neutrones, como la métrica propuesta en [4]. Luego, estudiar la validez de las mismas y eligiendo la que se considere más representativa, implementarla en el programa ONION para estudiar cómo el efecto de la curvatura de la estrella altera las propiedades de la magnetosfera que rodea a la misma, comparando con los resultados obtenidos anteriormente en [2].

Abstract

Compact binary systems are those composed by two compact objects, like black-holes and neutron stars, where the objects orbits around a common center of mass. When at least one of the objects is a neutron star a magnetosphere with tenuous plasma and intense magnetic fields is expected. In these environments due to the interaction between the plasma and the dynamic of the binary system part of the kinetic energy can be channeled to produce electromagnetic signals. The characterization of these potential precursor (before merger) electromagnetic signals is of great importance in the actual context of multi-messenger astronomy which its origin remounts to the first detection of gravitational waves.

ONION [1, 2] simulates the evolution of these binary systems in the last orbits before merger. With the code one can study the dynamic of plasma in a background space-time which is represented by a given metric. In the last simulations of the binary black hole/neutron star system made with ONION the curvature of the black hole was only taken into account in the background space-time (with a Kerr-Schild metric [3]), whereas the curvature of the neutron star wasn't taken into account. The aim of this work is to explore approximated metrics which represents the curvature of both objects, like the metric proposed in [4]. Then study the validity of these approximated metrics and implement the most representative metric in ONION to study how the curvature of the neutron star affects the properties of the magnetosphere which surrounds the system, comparing with the previous results in [2].

Índice

1. Introducción	5
1.1. Contexto astrofísico	5
1.2. Force-Free	6
1.3. Curvatura	7
1.4. Implementación numérica	8
1.5. Este trabajo y sus objetivos	8
2. Construcción de la métrica	10
2.1. Métrica Kerr-Schild	10
2.2. Formulación 3+1	11
2.3. Métrica SKS y variaciones	11
2.4. Análisis de la métrica SKS y sus variaciones	14
2.5. Variante 2: reescalo y problemas	14
2.6. Elección de la métrica	16
2.6.1. Signo del escalar de Ricci	17
2.6.2. Variación de los parámetros	17
2.6.3. Otras características de la métrica	18
3. Setup e implementación numérica	22
3.1. Implementación de la métrica en ONION	22
3.1.1. Origen de la grilla	22
3.1.2. Coordenadas <i>cubed-sphere</i> y sistema de grillas	22
3.1.3. Regularización de la métrica	23
3.1.4. Inicio de la rotación	25
3.2. Pruebas de la implementación	25
3.3. Ecuaciones de evolución	26
3.4. Dato inicial	26
3.5. Condiciones de Contorno	29
3.6. Cantidades de monitoreo	30
4. Resultados	32
4.1. Problemas en caso SKS-0	33
4.1.1. Energía	33
4.1.2. Magnetosfera y hojas de corriente	33
4.1.3. Origen	34
4.2. Caso SKS	37
4.2.1. Energía y flujo radial de energía	37
4.2.2. Magnetosfera y hojas de corriente	39
4.2.3. Ondas de alta frecuencia y posibles mejoras	46
5. Conclusión	47
A. Origen de la grilla y métrica	48
B. Cálculos para obtener el campo magnético inicial	48
C. Cálculos para obtener el 4-momento	49

1. Introducción

1.1. Contexto astrofísico

El 17 de agosto de 2017 se detectaron ondas gravitacionales (GW) provenientes de la coalescencia de un sistema binario de estrellas de neutrones (BNS) GW170817 por advanced LIGO/Virgo. Esta detección de GW se diferencia de las anteriores en que además se detectaron señales en todo el espectro electromagnético [5, 6], lo cual marcó el inicio una nueva era de astronomía multi-mensajero. La detección confirmó que la coalescencia de un BNS puede dar lugar a *short gamma ray bursts* (SGRBs) y la formación de elementos pesados a través proceso R, también proporcionó información sobre las propiedades de la materia a densidades nucleares; una estimación de la constante de Hubble y otra prueba importante a la teoría de la Relatividad general (por ejemplo ver [7]). Los SGRBs se originan de flujos relativistas colimados, su emisión es uno de los eventos EM más luminosos en el universo que son seguidos de emisión de radiación de sincrotrón debido a la interacción de los mismos con el material que los rodea. Por otro lado, el proceso R implica una captura de neutrones rápidos por núcleos pesados, las capturas deben ser rápidas para evitar que el núcleo sufra una desintegración radiactiva antes de capturar otro neutrón. Estos procesos se originan en lugares donde hay alta densidad de neutrones libres como, por ejemplo, en la descompresión de materia rica en neutrones arrojada por la fusión en una BNS (kilonova).

Las emisiones mencionadas anteriormente son post coalescencia, estas emisiones se han estudiado en bastante profundidad. Por otro lado, las emisiones electromagnéticas (EM) pre-coalescencia (denominadas EM precursoras) son de particular interés ya que dichas señales son producidas en un ambiente más limpio, previo a las interacciones altamente no lineales de la coalescencia. En la interacción de una estrella de neutrones (NS) con su compañera en la fase *inspiral* se espera que genere emisiones EM (las cuales aún no han sido detectadas), estas podrían darnos información sobre la ubicación en el cielo de la fuente y otros parámetros que no pueden ser obtenidos con información de GW solamente. Estas señales son de particular interés en los sistemas binarios agujero negro-estrella de neutrones (BHNS) ya que en estos sistemas no se esperan emisiones EM post coalescencia, en estos casos si la masa del agujero negro (BH) es mucho mayor que la de la NS ($5 \gtrsim$) y el BH rota lentamente es muy posible que la NS sea absorbida por el BH sin un evento de ruptura de marea (*tidal disruption event*) y así desfavoreciendo la eyección de material del sistema y la formación de un disco de acreción lo cual favorecería a la existencia de emisiones EM post coalescencia. Por lo cual las señales EM precursoras podrían ser la única forma de detectar estos sistemas.

Los sistemas que tienen al menos una NS son las fuentes más probables para una detección simultánea de GW y señales electromagnéticas (EM) ya que la interacción de la magnetosfera de la NS con otro objeto compacto en las últimas órbitas previas al merger (fusión) puede generar emisiones EM [8, 9, 10, 11]. Estas señales EM precursoras son principalmente originadas de la energía orbital y rotacional de la binaria y sus objetos compactos. La energía cinética es primero extraída de forma electromagnética de cada objeto a través del plasma que rodea al sistema y luego es reprocesada en la magnetosfera para producir emisiones observables. La explicación de los mecanismos de extracción de energía de los objetos compactos tiene el origen en los trabajos pioneros Goldreich & Julian [12] y Blandford & Znajek [13] en el contexto de púlsares (NS rotante) y de núcleos galácticos activos (BH rotante), respectivamente. La forma de extraer energía de los objetos se diferencia para el caso de un púlsar y el BH rotante. Por un lado, el púlsar admite la interpretación de electrodinámica clásica de un disco de Faraday. Por otro lado, para un BH rotante la energía se extrae a través del mecanismo de Blandford-Znajek (forma generalizada del proceso de Penrose). Después, respecto al movimiento orbital, hay dos mecanismos de extracción. El primer mecanismo es un efecto clásico producido por la aceleración del momento magnético (por ejemplo: de un dipolo) [14], el caso de una NS o de dos NS en un sistema BNS en vacío ha sido estudiado en [15]. El segundo mecanismo se llama inducción unipolar (UI, por sus siglas en inglés) [12] el cual se resume en la transferencia de momento lineal a energía EM debido al movimiento de un conductor (o objeto compacto) a través de un medio magnetizado, estudiado para BNS en [16, 17, 18, 19] y generalizado para BHs utilizando el paradigma de la membrana [20] para sistemas BHNS [16, 18, 21, 22]. En un sistema BHNS, uno puede asociar el primer efecto con la extracción de energía del dipolo magnético de la NS y el segundo efecto removiendo energía del BH a medida

que se mueve en el campo EM de la NS.

1.2. Force-Free

Una NS en un sistema binario compacto en las últimas órbitas previas a la coalescencia estará rodeada por un plasma tenue, el cual puede ser descrito a través del sistema de ecuaciones no-lineales para el campo electromagnético llamado Force-Free (FF) [23]. El origen de justificar la electrodinámica Force-Free en el contexto de púlsars, los cuales tienen una magnetosfera rodeada de plasma, viene del trabajo de Goldreich & Julian en [12]. En estos sistemas el plasma relativista es magnéticamente dominado, es decir, la densidad de plasma es órdenes de magnitud menor que la densidad de energía electromagnética por lo cual se puede despreciar el 4-momento del plasma e igualar a cero la 4-fuerza de Lorentz. FF sentó una base para el estudio de magnetosferas de púlsars y más tarde el análisis de FF fue extendido en el contexto sistemas binarios en [24], en estos sistemas el ambiente plasmático que los rodea puede canalizar parte de la energía cinética orbital (y también la asociada a la rotación de los cuerpos compactos) y eventualmente parte de esta energía EM será reprocesada para producir emisiones en diferentes bandas del espectro EM.

FF parte de las ecuaciones de Maxwell:

$$\begin{aligned}\nabla_{[a}F_{bc]} &= 0 \\ \nabla_b F^{ab} &= j^a\end{aligned}\tag{1}$$

donde F_{bc} es el tensor electromagnético y j^a la 4-corriente.

El tensor energía-momento electromagnético es:

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}\tag{2}$$

donde g_{ab} es la métrica del espacio-tiempo. Al despreciar la contribución del fluido al tensor electromagnético, la ecuación de intercambio de energía cuando hay interacción de materia con carga se escribe de la forma:

$$\nabla^b T_{ab} = -F_{ab}j^b$$

donde $F_{ab}j^b$ es la densidad 4-fuerza, la cual describe la tasa de transferencia de energía y momento del campo EM a las cargas.

FF describe un campo EM que interactúa con el plasma en una situación donde la transferencia de energía del campo EM al plasma puede ser despreciada ya que la energía y momento del campo supera a la del plasma, por lo cual, la condición FF puede ser expresada como [25]:

$$F_{ab}j^b = 0\tag{3}$$

Utilizando la segunda ecuación de (1) y la condición (3) podemos eliminar la 4-corriente del plasma j^a :

$$F_{ab}\nabla_c F^{bc} = 0$$

De esta forma el campo electromagnético puede ser evolucionado autónomamente, ignorando los grados de libertad del plasma y recuperando así parcialmente información de la dinámica del mismo podemos encontrar una expresión para j^a en función del campo electromagnético.

Eligiendo una foliación temporal con vector normal n^a (un observador) y definiendo los campos eléctrico y magnético: $E_i = F_{ij}n^j$; $B_i = F_{ij}^*n^j$ se puede derivar de la condición FF (3) que¹:

$$E \cdot B = 0\tag{4}$$

Otra condición que se deduce de (3) es que $B^2 - E^2 > 0$. Tanto esta desigualdad como (4) son implicancias algebraicas del tensor de Maxwell de (3).

La validez de la aproximación FF deja de ser cierta en las regiones donde se forman hojas de corriente (CS, por su nombre en inglés). Las CS son regiones en las que hay una corriente eléctrica confinada a una superficie, en estas regiones, hay una densidad de carga muy alta (donde se excede el valor de Goldreich-Julian [12]). En las CSs, la condición FF: $B^2 - E^2 > 0$, deja de ser cierta y

¹La forma covariante de la condición (4) es: $F_{ab}F^{*ab} = 0$.

la teoría FF deja de ser válida, la aproximación de conductividad perfecta falla y es necesario un modelo de resistividad eléctrica.

Las CS almacenan energía aumentando la densidad del campo magnético, éstas son regiones propensas a producir reconexiones magnéticas (aunque éstas pueden producirse de otras formas) debido a las inestabilidades que se originan en las mismas. Las reconexiones magnéticas son procesos en los cuales las líneas de campo magnéticas se reconfiguran. Estos procesos dan origen a plasmoides los cuales son estructuras coherentes del plasma y de los campos magnéticos, los plasmoides son bucles magnéticos cerrados los cuales transportan energía EM.

En [2] se realizaron simulaciones de la evolución de sistemas BHNS en las últimas órbitas estables previas a la colisión utilizando la aproximación FF y se mostró que en un sistema BHNS se forman CSs. Para las CS se hizo un tratamiento en el que el campo eléctrico es disipado para mantener la condición de plasma magnéticamente dominado. El argumento parte de Komissarov [26] donde se analizó un modelo de resistencia radiativa basada en el *scattering* de Compton inverso y concluye que la conductividad perpendicular al campo dentro de la CS tiene que tener un mecanismo de autorregulación que apantalla marginalmente el campo eléctrico, por lo cual $B^2 - E^2 \approx 0$. Un método estándar para tratar numéricamente esta condición es reduciendo el campo eléctrico cada vez que la magnitud del mismo se acerca a la del campo magnético (esto se aplica en cada paso temporal), de esta forma uno está efectivamente disipando el campo eléctrico y llevando el campo EM muy cerca de la condición $B^2 - E^2 = 0$.

Una desventaja de la aproximación FF es que no puede modelar de manera directa los procesos que originan las emisiones EM. Debido a la condición (4), la aproximación FF no admite la aceleración de partículas a lo largo de las líneas de campo. Aun así, se puede utilizar la solución obtenida con FF para luego modelar posibles emisiones EM, propagando los rayos y así obteniendo sus espectros y curvas de luz asociadas. Por ejemplo, en [28] se modelaron señales de rayos X originadas en púlsars de milisegundo. Primero se resolvió numéricamente la magnetosfera con simulaciones FF de una NS rotante y de esas soluciones se derivó el mapa de emisión en la superficies de la NS. Este mapa se basa en corrientes eléctricas en la magnetosfera y se usa para determinar la región de emisiones. Luego de resolver numéricamente la magnetosfera se realizó un trazado de rayos para obtener las curvas de luz y el espectro EM (otros ejemplos de modelado de emisiones EM son [29, 30]).

Una alternativa a las simulaciones FF son las simulaciones *particle in cell* (PIC), este método consiste en seguir las trayectorias de partículas cargadas en un campo electromagnético auto-consistente el cual es calculado en una grilla. Varios aportes se han hecho en el contexto de púlsar (por ejemplo [31, 32, 33, 34]) y en algunos trabajos se ha mostrado que (hasta cierto límite) la aproximación FF es válida en este contexto. Una desventaja de PIC es que requiere una gran capacidad computacional, lo cual lo hace muy limitado en el contexto de sistemas binarios.

1.3. Curvatura

La Relatividad General propone que los objetos con masa hacen que el espacio-tiempo se curve. Para cuantificar y representar esta curvatura se utiliza un objeto matemático llamado métrica, el cual contiene toda la información de la curvatura del espacio-tiempo. La métrica es un tensor de rango 2, con el cual se pueden definir conceptos métricos como distancia y volumen, entre otros.

Tal como las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos y magnéticos con las cargas y corrientes, las ecuaciones de Einstein relacionan la curvatura del espacio-tiempo con la distribución de materia, las ecuaciones se escriben:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}Rg_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

donde G es la constante de gravitación universal; T_{ab} es el tensor energía-momento, el cual es la generalización tensorial de la densidad de masa; g_{ab} es la métrica; R_{ab} es el tensor de Ricci; R es el escalar de Ricci, el cual es la traza del tensor de Ricci: $R = g^{ab}R_{ab}$ (g^{ab} es la inversa de g_{ab}).

Para soluciones de vacío, donde $T_{ab} = 0$, las ecuaciones de Einstein se reducen a la simple forma (capítulo 4 de [35]):

$$R_{ab} = 0 \tag{5}$$

Como el tensor de Ricci es nulo en soluciones de vacío, el escalar de Ricci también será nulo:

$$R = 0 \tag{6}$$

Una solución de vacío de las ecuaciones de Einstein es la métrica de Schwarzschild, la cual describe a un campo gravitacional esféricamente simétrico. La métrica describe a un agujero negro estático. Más tarde, se desarrolló una solución de vacío con simetría axial de las ecuaciones de Einstein que describe un agujero negro rotante y sin carga eléctrica, la métrica de Kerr. Partiendo de estas soluciones exactas, se han propuesto varias soluciones aproximadas de las Ecuaciones de Einstein para representar NS rotantes, sistemas BNS, sistemas BHNS, entre otros.

En un sistema binario en las últimas órbitas estables, la energía transportada por las GW emitidas es mucho mayor a la de las interacciones magnéticas esperables [16, 36], esta separación de escalas en la energía permite "desacoplar" los efectos gravitatorios de los electromagnéticos en el sentido de que la dinámica del plasma no altera la trayectoria de los objetos compactos. Por lo tanto, se puede intentar describir el espacio-tiempo por una solución aproximada de las ecuaciones de Einstein que represente a ambos objetos compactos. De esta manera podríamos prescribir una trayectoria para los objetos compactos, por ejemplo, mediante una órbita Kepleriana la cual quedaría codificada en la métrica aproximada, y el plasma evolucionaría sobre este espacio-tiempo de fondo. De esta forma, no se evolucionan las ecuaciones de Einstein sino que, se preestablece el camino que los cuerpos van a tomar y así se define la métrica para todo tiempo. En términos numéricos, el ahorro de no evolucionar las ecuaciones de Einstein es muy grande, y esto permite principalmente una mayor exploración del espacio de parámetros.

1.4. Implementación numérica

ONION es un programa numérico desarrollado en lenguaje C, su infraestructura numérica inicialmente fue desarrollada para exteriores de agujeros negros y luego extendido a la superficie conductora de una NS con un tratamiento apropiado de las condiciones de contorno sobre el borde interior de su superficie, en [37, 38, 39, 40, 41] se ha empleado ONION en distintos escenarios astrofísicos.

Recientemente en [2] se modificó ONION para representar un sistema binario de una NS y un BH en un ambiente FF. Se asumió que la NS tiene un campo magnético dipolar el cual se mueve alrededor de un BH en un ambiente plasmático FF, lo cual fue llevado a cabo con condiciones de contorno que fijan el campo magnético interior y la superficie (asumida) perfectamente conductora de la estrella. En ese trabajo se tomó como primera aproximación un espacio-tiempo fijo de Kerr que representa al BH, por lo cual no se tuvo en cuenta la curvatura de la NS y se prescribió la trayectoria de esta última en la métrica de fondo del BH.

ONION utiliza unas coordenadas llamadas coordenadas *cubed-sphere* [42], estas representan el espacio (tridimensional) a través de 6 parches² que cubren a una esfera, ya que no es posible cubrir una mediante un único sistema de coordenadas, y que sea regular, se necesitan al menos dos parches. ONION cubre el sistema con seis parches donde no hay superposición entre los mismos, los únicos puntos que se comparten entre distintos parches son sobre las fronteras. La gran ventaja computacional de simular el espacio con este sistema de grillas es que se le puede asignar a cada núcleo de la computadora una grilla, por lo cual si tenemos al menos seis núcleos podemos correr cada parche por separado en paralelo con el uso de MPI (Message Passing Interface). Respecto a los puntos en la frontera de los parches, se necesita comunicación de los valores entre los núcleos (se ahorra mucha memoria ya que solo se necesita comunicar la información de estos puntos de borde entre los núcleos y no la de los puntos internos), ONION utiliza la técnica llamada *multi-block* [1] para tratar este problema.

1.5. Este trabajo y sus objetivos

Como ya mencionamos, en [2] se tuvo en cuenta solamente el BH en la métrica mientras que la curvatura de la NS fue completamente omitida. En ese trabajo se vio que la presencia del BH causa efectos de curvatura muy fuertes los cuales hacen que líneas del campo magnético se curven de

²Un parche es un sistema de coordenadas que representa cierta región del espacio.

forma extrema alrededor del BH llevando reconexiones magnéticas, las cuales producen plasmoides que son liberados a velocidades relativistas transportando energía EM. El principal objetivo de este trabajo es proponer una métrica que represente la curvatura de la NS (y del BH simultáneamente), implementarla en ONION y de esta forma estudiar sus potenciales efectos en la dinámica del plasma FF circundante y comparar con los resultados obtenidos anteriormente en [2].

En este trabajo, haremos nuevamente uso de la métrica de Kerr proponiendo como métrica que represente al sistema una superposición de dos de estas métricas, en la cual cada término de Kerr representa a un objeto compacto (la métrica utilizada en [4]). Debido a que las ecuaciones de Einstein son no lineales, la solución propuesta (una superposición lineal) no cumplirá las ecuaciones. Por ello, estudiaremos la desviación del escalar de Ricci (R) de su valor esperado, $R = 0$.

Otra motivación, a futuro, del trabajo es poder usar las soluciones del mismo como punto de partida en el modelado de posibles emisiones EM a través de la propagación de rayos lo cual sería llevado a cabo con el código SKYLIGHT [43] (el mismo que se utilizó en [28]). Esto permitiría, en un futuro, caracterizar mejor estas señales EM precursoras (al estudiar sus espectros y curvas de luz asociadas).

En este trabajo se estudiará métricas aproximadas que representan a un sistema BHNS y luego se implementará la que se considera la mejor opción en ONION. Por último, se llevarán a cabo simulaciones donde se estudiará los efectos en la dinámica del plasma FF con la nueva métrica, comparando con los resultados de [2].

La tesis de licenciatura se estructura de la siguiente manera: en Sección 2 se construirá y estudiará las potenciales métricas a utilizar en las simulaciones; en Sección 3 se hablará sobre el programa ONION y la implementación de la métrica en el mismo, también se hablará sobre las ecuaciones FF a evolucionar, sobre el dato inicial del campo EM, sobre las condiciones de contorno en la superficie de la estrella y sobre cómo se calculan cantidades como la energía y el flujo radial de energía; en Sección 4 se presentarán los resultados obtenidos en las simulaciones; y por último, en Sección 5 se presentará un resumen del trabajo y sus conclusiones.

Utilizaremos unidades con la velocidad de la luz, $c = 1$ y la constante gravitacional de Newton, $G = 1$, a no ser que se explicita lo contrario. Los índices en Latín i, j, k se utilizarán para las componentes espaciales y q se usará para diferenciar valores del BH ($q = 1$) y de la NS ($q = 2$). El resto de los índices (Latín o Griego) serán para las componentes espacio-temporales.

2. Construcción de la métrica

En esta sección se explicará como se construye una métrica que represente al espacio-tiempo de un sistema binario de un agujero negro (BH) y de una estrella de neutrones (NS). Queremos obtener una métrica que represente tanto la presencia del BH como de la NS a diferencia de la métrica anterior utilizada en ONION [2], donde solo se tiene en cuenta la presencia del BH. La métrica debe tener en cuenta tanto la masa y momento angular de cada objeto, como así también la trayectoria prescripta para ambos.

Usaremos la métrica construida por [4], llamada métrica SKS (Superposed-Kerr-Schild), y también propondremos variaciones a la misma. La métrica SKS consiste en una superposición de dos métricas de Kerr, donde cada una representa a un objeto compacto. Para prescribir la trayectoria de los objetos compactos se realizan transformaciones para que los objetos se muevan en una órbita Kepleriana. En este trabajo tomaremos la separación orbital de los objetos constante, por lo cual no se tendrá en cuenta el *inspiral* y por lo tanto, el efecto de las GW. La métrica SKS corresponde a dos BH, en nuestro caso la utilizaremos para un BH y una NS debido a que la métrica de Kerr es una buena aproximación para el campo gravitacional del exterior de una NS que rotan por frecuencias debajo de 400Hz [44, 45]. Además, para el caso en el que la NS no rota (métrica de Schwarzschild) la solución es exacta.

También estudiaremos el escalar de Ricci para cuantificar las desviaciones de la métrica SKS (y de sus variaciones) de la solución de vacío. Los cálculos para obtener el escalar de Ricci fueron realizados analíticamente (a diferencia de [4], donde se realizaron numéricamente). Esto fue hecho con la ayuda del programa de manipulación simbólica Mathematica, el cálculo del escalar de Ricci para cada métrica llevó varias horas de cómputo (aproximadamente un día para una computadora escritorio con 16 gigas de memoria Ram). La consecuente evaluación del Ricci y elaboración de los gráficos fue realizada exportando la función del escalar Ricci de Mathematica y adaptándola para Python. Debido a que esta parte también requiere bastante tiempo de cómputo fue realizada con una computadora de FAMAF, ATOM, a través de Jupyter, lo que redujo el tiempo de cómputo por gráfico de horas a minutos.

2.1. Métrica Kerr-Schild

En primer lugar repasemos la métrica de Kerr-Schild, la cual es una solución de vacío de las Ecuaciones de Einstein, para entender la métrica que utilizaremos.

Para el caso de un BH rotante existe la solución de Kerr-Schild [2]:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}\ell_\mu\ell_\nu \quad (7)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es el espacio-tiempo de Minkowski en cartesianas; ℓ_a es un cuatri-vector nulo respecto tanto a η_{ab} como a $g_{\mu\nu}$

$$\ell_\mu = \left(1 \quad \frac{ay+rx}{a^2+r^2} \quad \frac{ry-ax}{a^2+r^2} \quad \frac{z}{r} \right) \quad (8)$$

donde

$$r = \sqrt{0.5(-a^2 + x^2 + y^2 + z^2) + \sqrt{a^2 z^2 + 0.25(-a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2}}$$

y el escalar \mathcal{H} es:

$$\mathcal{H} = \frac{Mr^3}{r^4 + a^2 z^2}$$

donde M es la masa del agujero negro y a el momento angular de espín del mismo.

El horizonte de eventos se define como la hipersuperficie que separa los puntos del espacio-tiempo que están conectados al infinito por una trayectoria temporal de los que no [35]. En un agujero negro no rotante (solución de Schwarzschild) el horizonte de eventos se encuentra a un radio $R_s = 2M$ del centro. Mientras que para la métrica de Kerr-Schild se pueden definir dos horizontes (horizonte externo e interno):

$$R_K^\pm = \frac{R_s \pm \sqrt{R_s^2 - 4a^2}}{2} \quad (9)$$

R_K^\pm se reduce a R_s cuando $a = 0$ (sin rotación).

En este trabajo implementaremos una nueva métrica en ONION y compararemos los resultados de las simulaciones con los resultados obtenidos en [2], donde se utilizó una métrica Kerr-Schild (7) con M y a la masa y el espín del BH respectivamente. En [2], el BH se mueve en una órbita circular, respecto a la NS, a través del cambio de coordenadas

$$\begin{aligned} t &= \hat{t} \\ x &= r_o \cos(\varphi_o(\hat{t})) \\ y &= r_o \sen(\varphi_o(\hat{t})) \\ z &= \hat{z} \end{aligned} \tag{10}$$

donde $\{t, x, y, z\}$ son las coordenadas con origen en el BH y $\{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ son las coordenadas con origen en la NS, r_o es la separación orbital y $\varphi_o(\hat{t})$ la fase. En (10) la traslación es hacia el origen de la NS y no al CM porque el dominio numérico en ONION está centrado en la NS (más adelante se hablará sobre la implicancia de que la grilla tenga el origen en la NS y como se lo trata con la métrica que se implementará).

2.2. Formulación 3+1

Vamos a introducir brevemente la formulación 3+1 de Relatividad General, la cual separa la métrica 4x4 $g_{\mu\nu}$ del espacio-tiempo en tres componentes: la métrica espacial 3x3 γ_{ij} ($i, j = 1, 2, 3$), inducida por la métrica del espacio-tiempo; un vector β_i ($i = 1, 2, 3$) llamado shift; y un escalar α , llamado lapse. Las componentes se definen de la siguiente forma:

$$\gamma_{ij} = g_{ij} \quad \beta_i = g_{ti} \quad \alpha = \sqrt{\beta_i \beta^i - g_{tt}} \tag{11}$$

Utilizando (11) podemos escribir el elemento de línea en estas coordenadas adaptadas de la forma:

$$ds^2 = (\beta^2 - \alpha^2) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \tag{12}$$

Con esta última ecuación, queda en manifiesto que la descomposición 3+1 es equivalente a la métrica 4x4 ya que contienen la misma información del espacio-tiempo.

Es conveniente introducir una foliación temporal con vector normal n^a donde $n^a n_a = -1$. El shift, el lapse y la elección de un sistemas de coordenadas x^i en una hipersuperficie $n^a_{(t=0)}$ determinan unívocamente un sistema de coordenadas x^a en las cercanías de $n^a_{(t=0)}$, donde $n^a_{(t=0)}$ es la hipersuperficie de $x^0 = t = 0$. Sabiendo la función lapse podemos conocer la posición de la próxima hipersuperficie $n^a_{(t=\delta t)}$, mientras que el shift nos dice cómo propagar las coordenadas x^i desde $n^a_{(t=0)}$ a $n^a_{(t=\delta t)}$ [46].

Podemos escribir la métrica de tipo espacial utilizando n^a :

$$\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$$

El vector n^a en función del lapse y el shift se escribe de la siguiente forma:

$$\begin{cases} n^0 = \frac{1}{\alpha} & n^i = \frac{\beta^i}{\alpha} \\ n_0 = \alpha & n_i = 0 \end{cases}$$

De esta forma la métrica espacial γ_{ab} queda definida como la métrica inducida en cada hipersuperficie por la métrica del espacio-tiempo g_{ab} . Esto indica que la métrica espacial es el operador proyección en hipersuperficies espaciales.

2.3. Métrica SKS y variaciones

La propuesta de la métrica SKS de [4] es superponer dos BHs de Kerr-Schild, actualizando la posición y velocidad de cada BH para una trayectoria dada. Las coordenadas de esta métrica tienen origen en el centro de masa y al igual que la métrica de Kerr-Schild, la métrica SKS tiende asintóticamente a Minkowski.

Las métricas de cada BH en el sistema binario las sabemos describir, usando Kerr-Schild (subsec:2.1), en un sistema de coordenadas en los cuales los BHs se encuentran 'quietos' y las coordenadas tienen el origen en cada BH. Aplicando las transformaciones correspondientes a cada métrica podemos llevarlas a un sistema con coordenadas en el centro de masa (CM) donde los BHs ya no se encuentran 'quietos' sino que se mueven siguiendo una trayectoria dada. A continuación describiremos la construcción de esta métrica paso a paso.

Definimos el cuadri-vector $\ell_{q\mu}$ y el escalar \mathcal{H}_q como en (8):

$$\ell_{q\mu} = \left(1 \quad \frac{a_q y_q + r_{qo} x_q}{a_q^2 + r_q^2} \quad \frac{r_{qf} y_q - a_q x_q}{a_q^2 + r_q^2} \quad \frac{z_q}{r_{qo}} \right); \mathcal{H}_q = \frac{M_q r_{qo}^3}{r_{qo}^2 + a_q^2 z_q^2} \quad (13)$$

donde $\{t_q, x_q, y_q, z_q\}$ son las coordenadas de cada objeto; M_q y a_q son la masa y el momento angular de cada objeto respectivamente; y

$$r_{qo} = \sqrt{0.5(-a_q^2 + x_q^2 + y_q^2 + z_q^2) + \sqrt{a_q^2 z_q^2 + 0.25(-a_q^2 + x_q^2 + y_q^2 + z_q^2)^2}}$$

(el subíndice o señala la distancia al CM de los objetos) con $q=1,2$ correspondiendo al BH y la NS.

Vamos a considerar para la binaria una órbita Kepleriana con excentricidad nula y aplicar una transformación de Lorentz instantánea a los $\ell_{q\mu}$ y \mathcal{H}_q de la forma:

$$\begin{aligned} t_q &= \gamma_q(t - v_{qx}x - v_{qy}y) \\ x_q &= x + (\gamma_q - 1) \frac{v_{qx}x + v_{qy}y}{v_q^2} v_{qx} \\ y_q &= y + (\gamma_q - 1) \frac{v_{qx}x + v_{qy}y}{v_q^2} v_{qy} \\ z_q &= z \end{aligned} \quad (14)$$

donde

$$\begin{aligned} v_q &= r_q \Omega \\ v_{qx} &= r_q \Omega \text{sen}(\Omega t) \\ v_{qy} &= -r_q \Omega \text{cos}(\Omega t) \\ \gamma_q &= \frac{1}{\sqrt{1 - v_q^2}} \end{aligned} \quad (15)$$

Las coordenadas (t, x, y, z) son las coordenadas del CM; v_{qx}, v_{qy} son las velocidades de rotación de cada objeto y v_q el módulo de la velocidad; Ω es la velocidad angular de rotación de la binaria; y r_q la distancia al CM de cada objeto. Estas transformaciones hacen que los objetos roten alrededor del centro de masa (en el plano x-y) definido por la órbita Kepleriana donde b es la separación de la binaria. En una órbita de excentricidad nula, la velocidad angular de rotación y las distancias de cada objeto con el centro de masa se define de la forma:

$$\begin{aligned} \Omega &= \sqrt{\frac{M_1 + M_2}{b^3}} \\ r_1 &= \frac{bq}{1 + q} \\ r_2 &= \frac{b}{1 + q} \end{aligned} \quad (16)$$

donde $q = \frac{M_2}{M_1}$ y b es la separación entre los objetos, la cual será constante.

Debido a que la métrica (7) se encuentra descrita desde el centro del objeto necesitamos relacionar las coordenadas de cada objeto $\{t_q, x_q, y_q, z_q\}$ con las coordenadas del centro de masa (t, x, y, z) . Además de la transformación (14), hay que sumar un término para trasladar las coordenadas de los objetos al CM:

$$\begin{cases} t_1 = \gamma_1(t - v_{1x}x - v_{1y}y) & t_2 = \gamma_2(t - v_{2x}x - v_{2y}y) \\ x_1 = x - r_1 \cos(\Omega t) + (\gamma_1 - 1)(v_{1x}x + v_{1y}y)v_{1x}/v_1^2 & x_2 = x + r_2 \cos(\Omega t) + (\gamma_2 - 1)(v_{2x}x + v_{2y}y)v_{2x}/v_2^2 \\ y_1 = y - r_1 \sin(\Omega t) + (\gamma_1 - 1)(v_{1x}x + v_{1y}y)v_{1y}/v_1^2 & y_2 = y + r_2 \sin(\Omega t) + (\gamma_2 - 1)(v_{2x}x + v_{2y}y)v_{2y}/v_2^2 \\ z_1 = z & z_2 = z \end{cases} \quad (17)$$

Derivando en (14) las coordenadas (t_q, x_q, y_q, z_q) centradas en los objetos respecto a las del CM, podemos construir el Jacobiano de la transformación:

$$\Lambda_q = \begin{pmatrix} \gamma_q & -v_{qx}\gamma_q & -v_{qy}\gamma_q & 0 \\ -v_{qx}\gamma_q & 1 + v_x^2(\gamma_q - 1)/v_q^2 & v_{qx}v_{qy}(\gamma_q - 1)/v_q^2 & 0 \\ -v_{qy}\gamma_q & v_{qx}v_{qy}(\gamma_q - 1)/v_q^2 & 1 + v_y^2(\gamma_q - 1)/v_q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

Observemos que en Λ_q se desprecian las derivadas temporales de las velocidades y notemos que los 6 valores idénticamente nulos de (18) lo son debido el movimiento ocurre en el plano xy.

Una vez obtenida la transformación la aplicamos a los cuadri-vectores:

$$\tilde{\ell}_{q\mu} = \Lambda_q \ell_{q\mu} \quad (19)$$

Además, se evalúan las coordenadas (t_q, x_q, y_q, z_q) $q = 1, 2$ usando (17) por lo cual

$$(t_q, x_q, y_q, z_q) \rightarrow (t_q(t, x, y), x_q(t, x, y), y_q(t, x, y), z_q(z))$$

Luego, sumando los términos $2\mathcal{H}_1 \tilde{\ell}_{1\mu} \tilde{\ell}_{1\nu}$, $2\mathcal{H}_2 \tilde{\ell}_{2\mu} \tilde{\ell}_{2\nu}$ y tomando un fondo asintótico de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, llegamos a la métrica SKS:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}_1 \tilde{\ell}_{1\mu} \tilde{\ell}_{1\nu} + 2\mathcal{H}_2 \tilde{\ell}_{2\mu} \tilde{\ell}_{2\nu} \quad (20)$$

la cual está escrita en las coordenadas del CM: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t, x, y, z)$.

Ahora propondremos dos variaciones que surgen de (20), las cuales llamaremos variante 1 y variante 2. La construcción es similar a la métrica SKS, pero se diferencian en lo que comentaremos a continuación.

En variante 2, al construir la transformación (18), se conservan las derivadas temporales de la transformación de Lorentz, por lo cual su Jacobiano resulta:

$$\Gamma_q = \begin{pmatrix} \gamma_q(1 + \Omega v_{qy}x - \Omega v_{qx}y) & -\gamma_q v_{qx} & -\gamma_q v_{qy} & 0 \\ -\gamma_q v_{qx} + \Omega \gamma_q v_{qy}t + \frac{(\gamma_q - 1)}{v_q^2} (\Omega (v_{qx}^2 - v_{qy}^2) y - 2v_{qx}v_{qy}\Omega x) & 1 + (\gamma_q - 1) \frac{v_{qx}^2}{v_q^2} & (\gamma_q - 1) \frac{v_{qx}v_{qy}}{v_q^2} & 0 \\ -\gamma_q v_{qy} - \Omega \gamma_q v_{qx}t + \frac{(\gamma_q - 1)}{v_q^2} (\Omega (v_{qx}^2 - v_{qy}^2) x + 2v_{qx}v_{qy}\Omega y) & (\gamma_q - 1) \frac{v_{qy}v_{qx}}{v_q^2} & 1 + (\gamma_q - 1) \frac{v_{qy}^2}{v_q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenida la transformación podemos obtener los distintos elementos de la métrica transformados:

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}_{q\mu} &= \Gamma_q \ell_{q\mu} \\ \tilde{\eta}_{\mu\nu} &= \Gamma_q^T \eta_{\mu\nu} \Gamma_q \end{aligned}$$

Luego se suman dos métricas de la forma (7) donde a cada una se le aplica los Jacobianos correspondientes, a diferencia de la métrica SKS no se toma fondo asintótico de Minkowski, sino que se superponen dos $\eta_{\mu\nu}$ a los cuales también se le aplicó la transformación: $\tilde{\eta}_{1\mu\nu}$ y $\tilde{\eta}_{2\mu\nu}$. La variante 2 resulta en:

$$g_{\mu\nu} = \tilde{\eta}_{1\mu\nu} + 2\mathcal{H}_1 \tilde{\ell}_{1\mu} \tilde{\ell}_{1\nu} + \tilde{\eta}_{2\mu\nu} + 2\mathcal{H}_2 \tilde{\ell}_{2\mu} \tilde{\ell}_{2\nu}$$

La motivación de esta variante es que, al tomar la transformación completa, el escalar de Ricci debería ser exactamente cero al tomar la masa de uno de los dos objetos nulas. Por lo tanto la desviación de cero del escalar de Ricci (cuando ambos objetos tienen masa) se debería exclusivamente a la superposición lineal.

Por último, en variante 1 se propone conservar las derivadas temporales al igual que en variante 2 pero solamente aplicar la transformación a los $\ell_{q\mu}$ y al igual que en la métrica SKS se toma un fondo asintótico $\eta_{\mu\nu}$, la métrica para este caso es:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + 2\mathcal{H}_1\check{\ell}_{1\mu}\check{\ell}_{1\nu} + 2\mathcal{H}_2\check{\ell}_{2\mu}\check{\ell}_{2\nu}$$

Cabe destacar que $\eta_{\mu\nu}$ es invariante ante transformaciones de Lorentz, pero sólo es válido si las velocidades de la transformación son constantes, lo que sucedía si despreciábamos las derivadas temporales en (17).

La variante 1 surge de la idea de un punto medio entre la métrica SKS (al tomar un fondo asintótico de Minkowski: $\eta_{\mu\nu}$) y la variante 2 (al conservar las derivadas en la transformación).

2.4. Análisis de la métrica SKS y sus variaciones

La métrica SKS, al igual que sus variantes, representa una solución de vacío aproximada de las Ecuaciones de Einstein, por lo cual deberían satisfacer aproximadamente (5) y (6).

Para ver qué tan buenas aproximaciones son estas métricas evaluamos el escalar de Ricci y su desviación de su valor esperado $R = 0$. Para ello, lo graficamos (su valor absoluto) en fig:1 en el plano $z = 0$ para la métrica SKS y sus variantes. El caso de la métrica SKS, para masas iguales y sin espines, reproduce un gráfico similar al del centro de la figura 1 de [4].

En principio, el escalar de Ricci debería dar cero, pero debido a las aproximaciones llevadas a cabo no va a ser el caso para ninguna de las métricas (como se ve en fig:1), lo cual es de esperar debido a las aproximaciones que se hacen como la de una superposición lineal (cuando las ecuaciones de RG no son lineales), imponer una trayectoria prescrita a los objetos compactos y la de despreciar derivadas temporales.

En fig:1 podemos observar los mismos escalares pero mostrando las regiones de distinto orden de magnitud (gráficos de la derecha), así es más simple comparar la desviación de $R = 0$ en cada región del espacio para las distintas métricas. También se marcó con negro las regiones que abarcan los objetos.

Las diferencias con cero son mucho menor en el caso de la variante 2 que en el resto, esto se puede observar claramente en la figura. Cabe destacar que para la variante 2 toda la región con valores del orden mayor a 10^{-1} se encuentra contenida dentro de los objetos (y gran parte del orden 10^{-2} también), es decir, dentro de una circunferencia de radio $2M$ (radio de Schwarzschild) desplazada en $\pm 10M$. Esto nos indica que en la región donde el escalar es peor es del orden 10^{-2} mientras que para el caso de la métrica SKS y la variante 1 es del orden 10^{-1} . En los 3 casos en las regiones graficadas más lejanas el orden de magnitud es de $(10^{-7}, 10^{-6})$. También se puede observar que el Ricci para la variante 2 es del rango $(10^{-5}, 10^{-4})$ en la zona que se encuentra entre el BH y la NS mientras que para la métrica SKS y la variante 1 es de un orden mayor.

Lo que podemos notar en la figura es que ninguna de las métricas presenta simetría de reflexión en $x = 0$ (eje horizontal) ni en $y = 0$ (eje vertical). Para el caso de la métrica SKS estas asimetrías son mucho más notorias que para la variante 1 y 2, de hecho observando los gráficos de la izquierda la asimetría de la variante 2 pasa completamente desapercibida mientras que para la variante 1 hay que observar con mucha atención. A priori uno pensaría que debería haber simetría en estos dos planos de reflexión debido a que los objetos tienen misma masa y no tienen momento de espín. La causa de esta asimetría se debe a que el sistema está rotando con velocidad angular Ω , esto rompe ambas simetrías del sistema.

También se calculó el Ricci para un caso como la variante 2 pero con un solo objeto, es decir se utilizó una métrica de la forma (7) y se le aplicó la transformación conservando todas las derivadas en el Jacobiano. En el gráfico se observó que se cumple que el escalar de Ricci da exactamente cero para todo el exterior del objeto. Esto nos confirma que en la variante 2 el escalar de Ricci da distinto de cero debido exclusivamente a la superposición lineal de los dos objetos.

2.5. Variante 2: reescaleo y problemas

Al estudiar la variante 2, se calculó el determinante de la métrica espacial para distintos puntos del espacio. A diferencia de lo que sucede para la métrica SKS (y para un único Kerr-Schild), su valor no tiende asintóticamente a 1 (sino a 3 aproximadamente). Por otro lado, se calculó el lapse

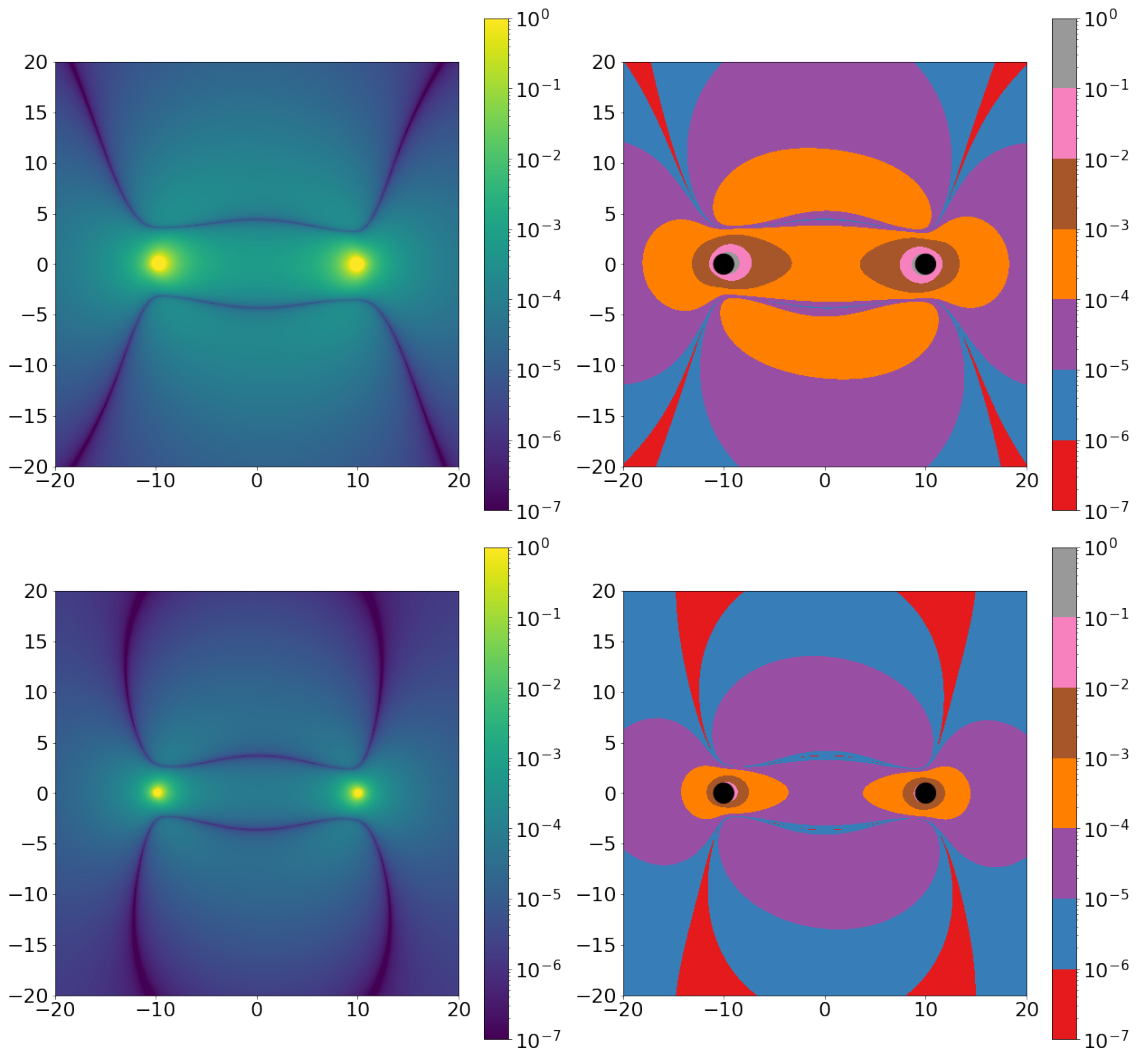


Figura 1: Valor absoluto del escalar de Ricci en el plano $z=0$ para masas $M_1 = M_2 = 0.5$, espines nulos y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. Gráficos de la izquierda muestran el valor del escalar mientras que los de la derecha muestran su orden de magnitud. Arriba: métrica SKS. Centro: variante 1. Abajo: variante 2.

y el mismo no presentó un comportamiento asintóticamente al lapse de un espacio-tiempo plano (como en el caso de la métrica de Kerr donde el lapse tiende a 1) sino que crecía en el plano de rotación (el plano x-y) a medida que nos alejamos del sistema binario.

Debido a que el sistema consiste en dos objetos compactos y se desprecian las ondas gravitacionales, a medida de que nos alejamos del sistema la métrica tendría que tender a un espacio-tiempo plano (Minkowski) ya que estamos lejos de cualquier fuente que cause que el espacio-tiempo se curve. Este es el caso en la métrica SKS (y la métrica Kerr-Schild) donde el lapse y el determinante de la métrica tienden al de un espacio-tiempo plano. A continuación, propondremos una modificación a la métrica para resolver estos problemas.

Para solucionar estos problemas propusimos la siguiente modificación: superponer dos métricas de la forma (7) multiplicadas por un factor $\frac{1}{2}$. A priori, la métrica quedaría:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\check{\eta}_{1\mu\nu} + \mathcal{H}_1\check{\ell}_{1\mu}\check{\ell}_{1\nu} + \frac{1}{2}\check{\eta}_{2\mu\nu} + \mathcal{H}_2\check{\ell}_{2\mu}\check{\ell}_{2\nu}$$

Pero al haber dividido en dos por la métrica (7) no estamos considerando la masa total del objeto compacto sino la mitad de la misma. Por lo cual, para que las masas sean las mismas que antes, hay que hacer un reescalo de las masas: $M_q \rightarrow 2M_q$. Como los valores \mathcal{H}_q son proporcionales a la masa de los objetos (ver (13)), la métrica resulta:

$$g_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\check{\eta}_{1\mu\nu} + 2\mathcal{H}_1\check{\ell}_{1\mu}\check{\ell}_{1\nu} + \frac{1}{2}\check{\eta}_{2\mu\nu} + 2\mathcal{H}_2\check{\ell}_{2\mu}\check{\ell}_{2\nu} \quad (21)$$

Ahora, con (21), se vio que el determinante de la métrica espacial tiende a 1. Pero, por otro lado, el comportamiento del lapse no cambió. A continuación explicaremos la causa de que el lapse no presente un comportamiento asintóticamente al lapse de un espacio-tiempo plano.

Estudiamos el comportamiento asintótico del lapse y observamos que el origen es a causa de la transformación aplicada en los η (la cual no se aplicó a η en la métrica SKS y la variante 1), las mismas hacen que $\check{\eta}_{1tt} + \check{\eta}_{2tt}$ aumente cuadráticamente con x e y mientras que las $\check{\eta}_{1jt} + \check{\eta}_{2jt}$ crecen linealmente con j=x,y. Justamente, estas componentes de la métrica se utilizan para definir el lapse. Por ejemplo para los dos objetos de masas iguales $M_1 = M_2 = 0.5$, separación $b = 20(M_1 + M_2)$, espines nulos y a $t = 0$ y $z = 0$ tenemos que:

$$\frac{\check{\eta}_{1\mu\nu} + \check{\eta}_{2\mu\nu}}{2} = \begin{pmatrix} -1.00016 - Ax^2 + By^2 & -Cy & Cx & 0 \\ -Cy & 1 & 0 & 0 \\ Cx & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde A, B y C son valores de orden 10^{-6} , 10^{-9} y 10^{-5} respectivamente.

Los términos dependientes de x e y son muy pequeños, por lo cual en las cercanías de los objetos la parte de $\frac{\check{\eta}_{1\mu\nu} + \check{\eta}_{2\mu\nu}}{2}$ es muy cercano a Minkowski pero a medida que x e y toman valores mayores $\frac{\check{\eta}_{1\mu\nu} + \check{\eta}_{2\mu\nu}}{2}$ no se vuelve asintóticamente Minkowski. Sin embargo, existe la posibilidad de que haya alguna transformación de coordenadas donde $\frac{\check{\eta}_{1\mu\nu} + \check{\eta}_{2\mu\nu}}{2}$ (y la variante 2) sea asintóticamente Minkowski³.

Además, calculamos nuevamente el escalar de Ricci para (21) (ver fig:2) y observamos que su diferencia con cero ya no es menor que la de la métrica SKS y la variante 1 (sino del mismo orden), la causa de esto es debido al reescalo de las masas de los objetos compactos (cabe aclarar que el escalar de Ricci en las figuras no es necesario normalizarlo con la masa total del sistema ya que se la eligió igual a 1).

2.6. Elección de la métrica

Se eligió una sola métrica de las propuestas para implementar al código ONION. Entre las 3 posibles opciones para elegir se eligió la métrica SKS, ya que es la más simple y las variantes no presentan ninguna mejoría significativa (luego de la corrección de la variante 2). La variante 2 no se eligió debido a que no tiende asintóticamente a Minkowski (al menos no de manera evidente). Por otro lado, la variante 1 era una opción viable, pero finalmente se consideró que no presentaba una ventaja significativa respecto de la métrica SKS.

En la métrica nos queda como variables las masas de los objetos, sus momentos angulares y la separación entre los objetos, por lo cual tenemos la libertad de estudiar distintas situaciones como

³En este trabajo no se estudió en profundidad esta idea.

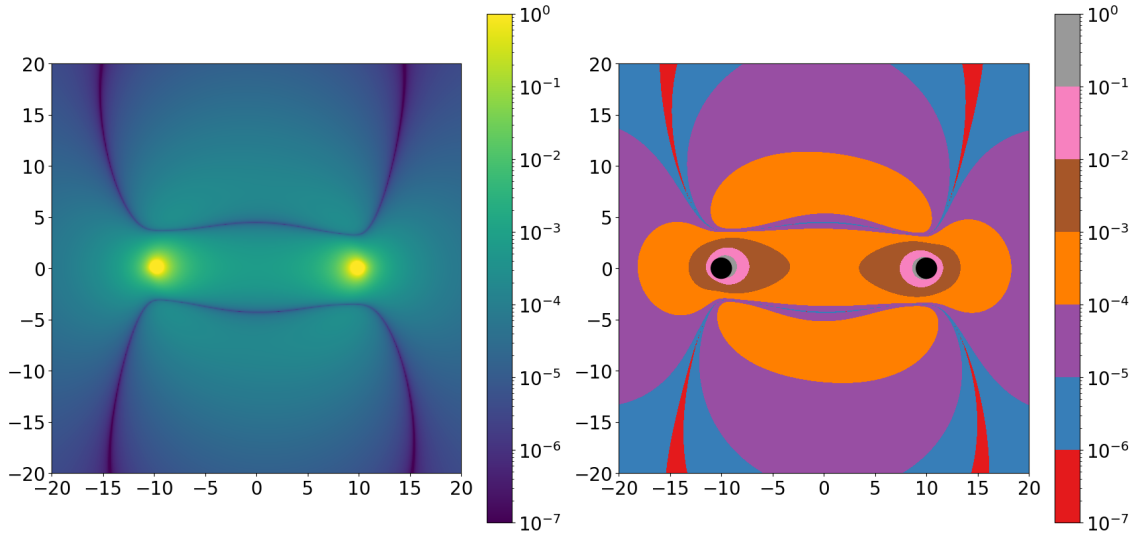


Figura 2: Valor absoluto del escalar de Ricci de la variante 2 modificado en el plano $z=0$ para masas $M_1 = M_2 = 0.5$, espines nulos y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. El gráfico de la izquierda muestra el valor del escalar mientras que el de la derecha muestra su orden de magnitud.

dos objetos de la misma masa (la cual se usó en [4]); una relación de masas 3:1 (este será el caso que implementaremos en ONION); y momentos angulares nulos o no nulos, y para este último, alineados o anti-alineados. A continuación, estudiaremos el escalar de Ricci de la métrica SKS en mayor profundidad. Se analizará el signo del mismo y se estudiará si distintas relaciones de masas, separaciones y valores de espín alteran drásticamente los valores obtenidos del escalar. También se discutirán otras características del mismo, como el vector de Killing que posee.

2.6.1. Signo del escalar de Ricci

En el primer gráfico de la métrica SKS (y en las variantes también) de fig:1 podemos observar curvas con bajo valor del escalar de Ricci. A excepción de estas curvas, la conducta general del escalar es tomar valores menores a medida que nos alejamos de los objetos. Al graficar el escalar de Ricci (y no su valor absoluto) (ver fig:3), podemos observar que estas curvas mencionadas se deben a un cambio de signo en el escalar.

2.6.2. Variación de los parámetros

Luego de haber elegido la métrica SKS como la métrica a implementar en ONION, se estudió el escalar de Ricci para distintas relaciones de masas, momentos angulares y separaciones (fig:4, fig:5 y fig:6) para ver que tan sensitivo es su valor respecto a estos parámetros.

En los gráficos de fig:4, se observa el escalar de Ricci para una relación de masas 3:1. En este caso podemos ver cómo se pierde la simetría en el eje horizontal (aunque en el caso de mismas masas tampoco es completamente simétrico). Otro detalle es que para el objeto de menor masa (y de horizonte más chico) la región que lo rodea tiene un valor del escalar de orden 10^{-1} , mientras que para el objeto más pesado es de orden 10^{-2} (y tiene horizonte más grande). Sin embargo, al alejarnos de los objetos los roles se invierten y el objeto más pequeño tiene escalar más chico que el objeto más pesado. El hecho de que el escalar es más chico cerca de los bordes del objeto grande es debido simplemente a que tiene un horizonte de eventos de mayor radio. A pesar de estas diferencias, los órdenes de magnitud que se observa del escalar en estos gráficos son los mismos que para el caso de mismas masas, por lo cual podemos concluir que es igual de buena la aproximación.

En los gráficos del arriba de fig:5 se redujo la separación de los objetos a la mitad en comparación de los gráficos de fig:1, en este caso podemos observar que los órdenes de magnitud del escalar no son tan bajos como antes, para la región del centro del sistema es de orden 10^{-2} , dos órdenes mayor que con el doble de separación. Para distancias más lejanas el orden de magnitud es del mismo

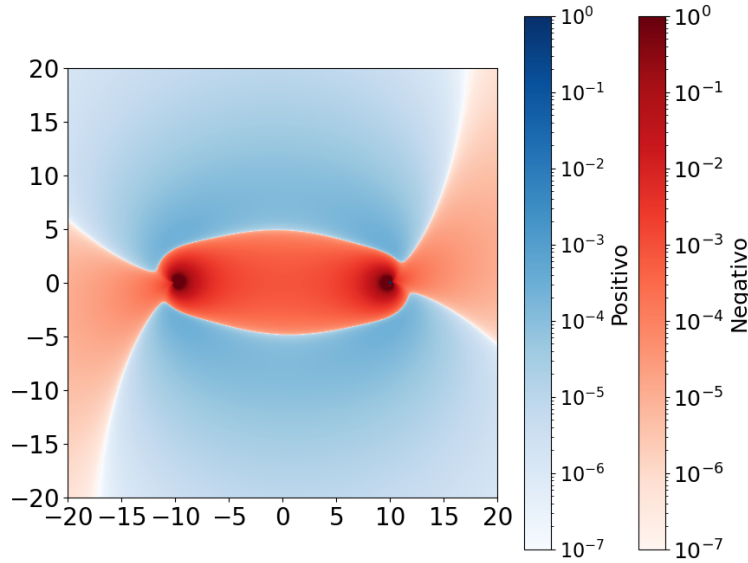


Figura 3: Valor (con signo) del escalar de Ricci (de la métrica SKS) en el plano $z=0$ para masas $M_1 = M_2 = 0.5$, espines nulos y separación $b = 20(M_1 + M_2)$.

orden que antes. La violación $R \neq 0$ en este caso es mayor pero no aparecen órdenes de magnitud mayores en comparación de fig:1, solo que las regiones del espacio que toman valores de órdenes de magnitud mayor son más grandes.

Los gráficos de abajo de fig:5 son el mismo caso que en fig:1 pero en el plano $x-z$. Se puede ver que los órdenes de magnitud son los mismos que en el otro plano, lo cual nos indica que la violación $R \neq 0$ ocurre en la misma magnitud en el plano de rotación como en cualquier otro.

Por otro lado, en fig:6 se graficó el escalar de Ricci para iguales masas pero cada objeto con momentos angulares alineados y anti-alineados⁴, en estos casos nuevamente los escalares dan similar a los de la métrica SKS en fig:1. En estos casos los radios de los horizontes de evento no se calcularon con la fórmula $r_s = 2M$ sino con (9) (tomando R_k^+) por lo cual son menores que en los de fig:1, ahora se puede observar regiones mayores del orden de 10^{-1} cerca de los objetos.

A grandes rasgos podemos concluir que el valor del escalar de Ricci sólo es sensible a la separación orbital pero el efecto no es muy drástico a separación $10(M_1 + M_2)$, la cual es de particular interés ya que será la que se implementará de ONION debido a que la dinámica del plasma se vuelve más intensa durante el *inspiral* (y por lo tanto también las potenciales señales EM).

2.6.3. Otras características de la métrica

En está subsección veremos otras propiedades importantes de la métrica como la simetría de Killing que presenta (o más general las órbitas circulares) y el hecho de que la misma coincide con la métrica de un sistema binario en la aproximación Post Newtoniana.

Una órbita circular dota al espacio-tiempo de una simetría de Killing helicoidal, representada a través del vector de Killing helicoidal (HKV):

$$k^a = t^a + \Omega \varphi^a \quad (22)$$

donde $t^a := (\partial_t)^a$, $\varphi^a := (\partial_\varphi)^a$ y Ω es la frecuencia de la órbita. El HKV puede ser considerado como el generador de traslaciones temporales en el marco que corrota con el sistema binario [41, 47].

Para verificar que (22) es en efecto un HKV de la métrica SKS, se planteó la ecuación de Killing:

$$\nabla_a k_b + \nabla_b k_a = 0 \quad (23)$$

⁴En los dos gráficos de la izquierda podemos ver que para las coordenadas $(\pm 10, 0)$ hay pequeños círculos blancos donde no se realizó el gráfico, esto se debe a una posible divergencia en su cómputo, sin embargo no es de nuestro interés debido a que se encuentran dentro de el radio de los horizontes de eventos.

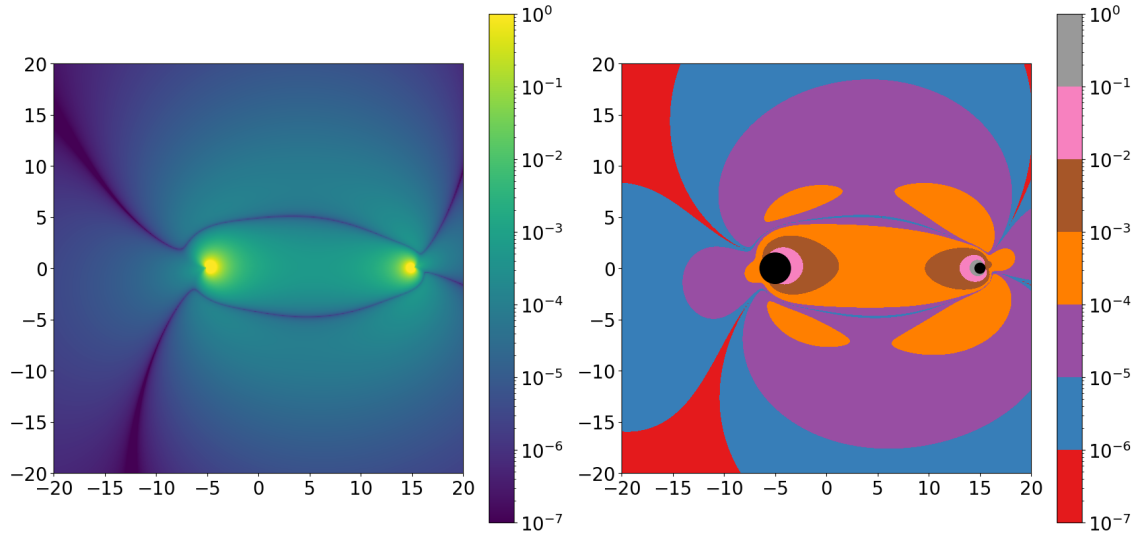


Figura 4: Valor absoluto del escalar de Ricci de la métrica SKS en plano $z=0$ para masas $M_1 = 0.25$; $M_2 = 0.75$, espines nulos y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. El gráfico de la izquierda muestra el valor del escalar mientras que el de la derecha muestra su orden de magnitud.

donde ∇_a es la derivada covariante y $k_b := g_{bc}k^d$. El cálculo se realizó simbólicamente utilizando el programa Mathematica y se mostró que, en efecto, (23) se cumple de manera exacta en todo el espacio-tiempo.

Por otro lado, notemos también que debido a que la métrica (20) tiende asintóticamente a Minkowski, el vector $t^a := (\partial_t)^a$ es asintóticamente un campo vectorial de Killing. Para observar esto se verificó el comportamiento cualitativo a radios grandes de (23) con $k^a = t^a$.

La aproximación Post Newtoniana (PN) es un método en el cual se resuelve las ecuaciones de Einstein para sistemas en los cuales las velocidades son pequeñas comparadas con la velocidad de la luz y los campos gravitacionales son débiles. En [48] se construye la métrica de un sistema binario en esta aproximación y en [4] se demuestra que la expansión a primer orden en las velocidades de la transformación de Lorentz, a separación grandes de los objetos, la métrica SKS reproduce la aproximación PN.

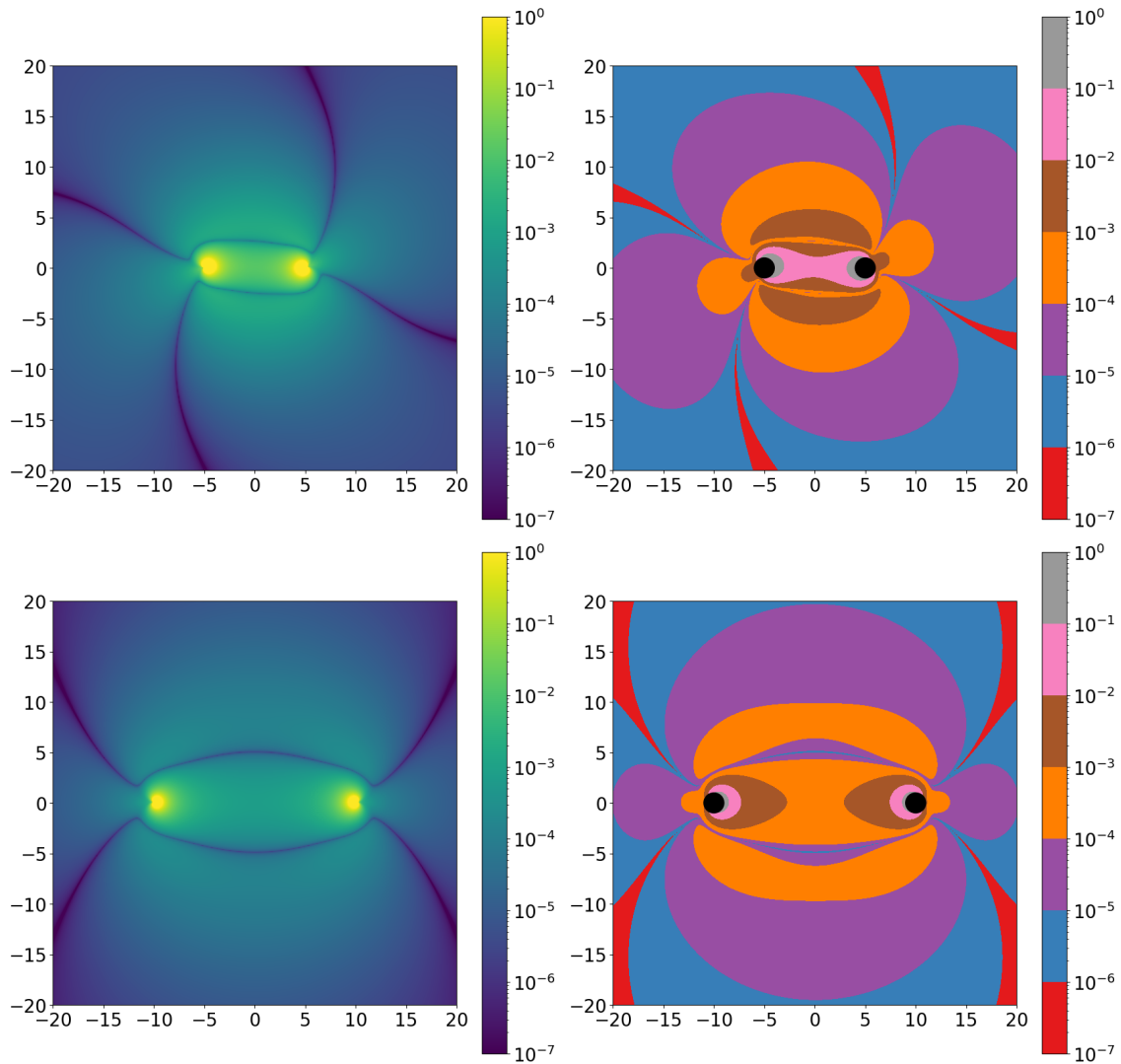


Figura 5: Valor absoluto del escalar de Ricci de la métrica SKS. Arriba: plano $z=0$ para masas $M_1 = 0.5; M_2 = 0.5$, espines nulos y separación $b = 10(M_1 + M_2)$. Abajo: plano $y=0$ para masas $M_1 = 0.5; M_2 = 0.5$, espines nulos y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. Los gráficos de la izquierda muestran el valor del escalar mientras que los de la derecha muestran su orden de magnitud.

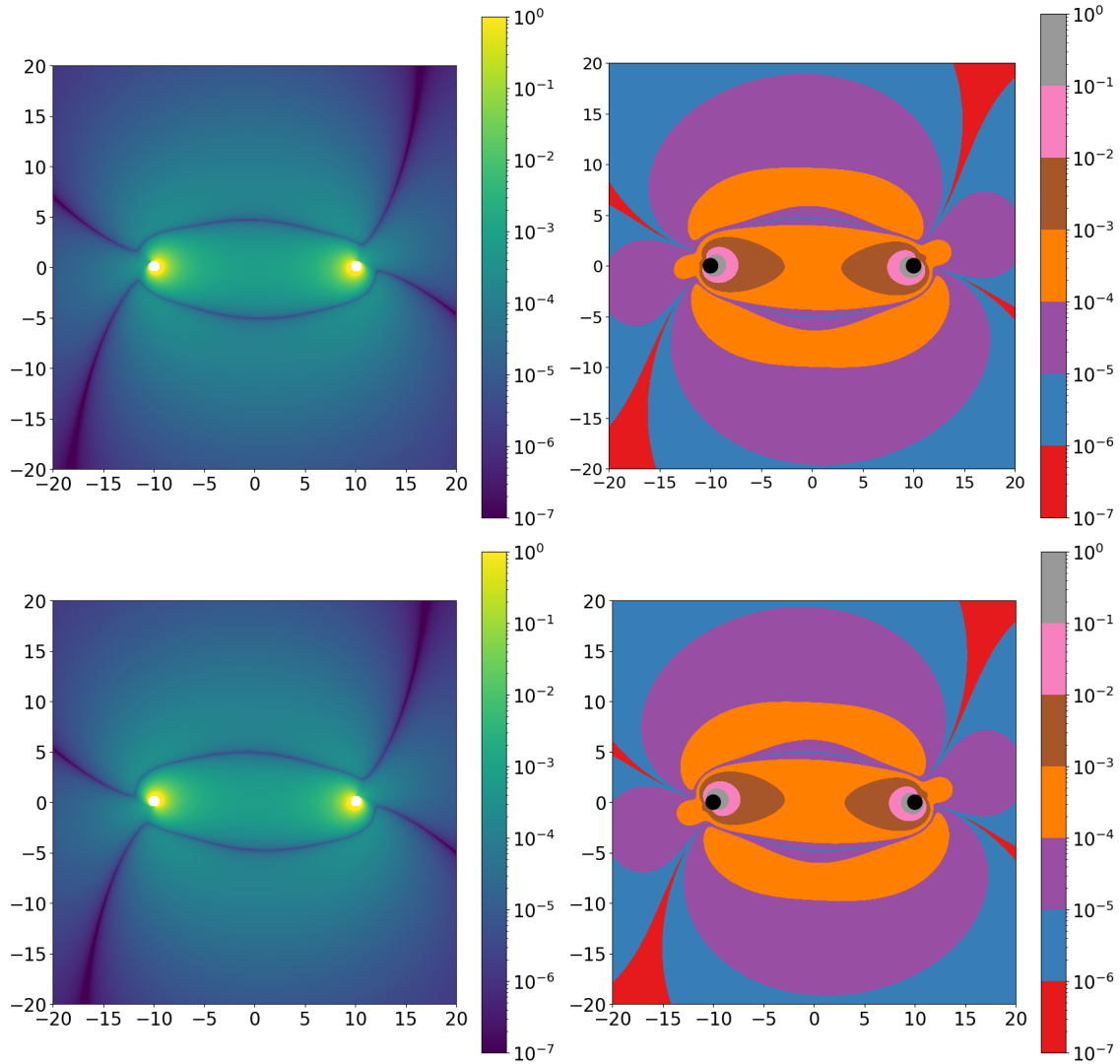


Figura 6: Valor absoluto del escalar de Ricci de la métrica SKS. Arriba: plano $z=0$ para masas $M_1 = M_2 = 0.5$, espines $a_1 = -a_2 = 0.45$ y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. Abajo: plano $z=0$ para masas $M_1 = M_2 = 0.5$, espines $a_1 = a_2 = 0.45$ y separación $b = 20(M_1 + M_2)$. Los gráficos de la izquierda muestran el valor del escalar mientras que los de la derecha muestran su orden de magnitud.

3. Setup e implementación numérica

A continuación comentaremos sobre las modificaciones que se le hacen a la métrica al momento de implementarla en ONION y también cómo probamos que la implementación se esté realizando correctamente. Luego hablaremos de las ecuaciones de evolución, del dato inicial, de las condiciones de contorno de la superficie de la NS y de las cantidades de monitoreo.

3.1. Implementación de la métrica en ONION

Para implementar la métrica, primero se la construye en coordenadas cartesianas con origen en el centro de masa (y en la formulación 3+1). Para ello, se crea una función que toma como variables $\{m_1, m_2, a_1, a_2, b, \{x, y, z\}, t\}$ que es evaluada durante la simulación para todos los valores de $\{x, y, z\}$ de la grilla y para cada tiempo t de la simulación, mientras que los valores $\{m_1, m_2, a_1, a_2, b\}$ son parámetros que se eligen al inicio de la simulación. Esta función construye la métrica en coordenadas cartesianas, luego se desplaza el sistema de coordenadas al centro de la NS debido a que ahí está centrado el origen de la grilla. Por último se pasa la métrica a las coordenadas cubed-sphere. Además de la transformación de coordenadas sobre el punto, hay que aplicar el Jacobiano de la transformación a la métrica y a el shift. Más adelante, se describirá en mayor profundidad las coordenadas cubed-sphere y como se aplican las transformaciones.

3.1.1. Origen de la grilla

Debido a que en ONION la simulación se realiza con origen en el centro de la NS, necesitamos la métrica en coordenadas centradas en la misma. Por ello, después de construir la métrica con origen en el centro de masa, necesitamos desplazar las coordenadas al centro de la NS con la transformación dependiente del tiempo:

$$\begin{aligned}\hat{t} &= t \\ \hat{x} &= x - r_2 \cos(\varphi(t)) \\ \hat{y} &= y - r_2 \sin(\varphi(t)) \\ \hat{z} &= z\end{aligned}\tag{24}$$

donde las coordenadas $\{\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ son las coordenadas desde el centro de la NS.

Además de evaluar la métrica en las nuevas coordenadas, esta transformación tiene como consecuencia que el shift cambia, esto se puede ver en el elemento de línea:

$$ds^2 = (\hat{\beta}^2 - \hat{\alpha}^2) d\hat{t}^2 + 2\hat{\beta}_i d\hat{x}^i d\hat{t} + \hat{\gamma}_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j$$

donde:

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \alpha(x(\hat{x})) \\ \hat{\beta}^i &= \beta^i(x(\hat{x})) + \beta_o^i(x(\hat{x})) \\ \hat{\gamma}_{ij} &= \gamma_{ij}(x(\hat{x}))\end{aligned}\tag{25}$$

con β_o^i el cambio en el shift ocasionado por el desplazamiento:

$$\beta_o^i = \begin{pmatrix} -r_2 \dot{\varphi}(\hat{t}) \sin(\varphi(\hat{t})) \\ +r_2 \dot{\varphi}(\hat{t}) \cos(\varphi(\hat{t})) \\ 0 \end{pmatrix}\tag{26}$$

La cuenta que vincula la transformación (24) con el cambio en el shift se encuentra en el apéndice: A.

3.1.2. Coordenadas *cubed-sphere* y sistema de grillas

Las coordenadas *cubed-sphere* [42] se describen con las coordenadas $\{a, b, c\}$ donde c se relaciona con las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ de la forma $c = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, mientras que las coordenadas a, b varían con cada parche, cómo se puede ver en tabla:1. Con estas coordenadas podemos construir el espacio con esferas concéntricas de distintos radios donde tenemos a cada esfera cubierta por los parches de las coordenadas *cubed-sphere*. Luego para una evolución temporal

parche	a	b
0	z/x	y/x
1	z/y	$-z/y$
2	$-z/x$	y/x
3	$-z/y$	$-x/y$
4	$-x/z$	y/z
5	$-x/z$	$-y/z$

Cuadro 1: Relación entre coordenadas *cubed-sphere* $\{a, b, c\}$ con las coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$.

tenemos este sistema de esferas concéntricas representadas por las parches que a su vez representan el espacio para un determinado valor del tiempo.

Una vez obtenida la métrica en coordenadas cartesianas con origen en la NS hay que aplicarle una transformación para llevarla a coordenadas *cubed-sphere*. Para esto, usamos las transformaciones inversas de tabla:1 (y de la definición de c) para construir los Jacobianos para cada parche (un total de seis Jacobianos). Por ejemplo, para el parche 0, el Jacobiano nos queda:

$$C_0 = \begin{pmatrix} \frac{-ac}{D^3} & \frac{-bc}{D^3} & \frac{1}{D} \\ \frac{-abc}{D^3} & \frac{c+a^2c}{D^3} & \frac{b}{D} \\ \frac{c+b^2c}{D^3} & \frac{-abc}{D^3} & \frac{a}{D} \end{pmatrix}$$

Luego transformamos la métrica espacial 3x3 y el shift:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\gamma}_{ij} &= C_0^T \hat{\gamma}_{ij} C_0 \\ \overset{\circ}{\beta}_i &= C_0 \hat{\beta}_i \end{aligned}$$

y se evalúan las coordenadas x, y, z con tabla:1 en $\overset{\circ}{\gamma}_{ij}$, $\overset{\circ}{\beta}_i$ y $\hat{\alpha}$, es decir, se sustituyen

$$\{x, y, z\} \rightarrow \{x(a, b, c), y(a, b, c), z(a, b, c)\}$$

El procedimiento es análogo para el resto de los parches, reemplazando C_0 por C_i con $i = 1...5$.

Para una referencia, en fig:7 se graficó el lapse para un sistema BHNS con relación de masas 3:1 y separación $10M_{BH}$. El BH (círculo negro a la derecha en la figura superior) se encuentra cubierto por 16x16 puntos de grilla en las direcciones angulares (en la región central del agujero respecto al origen de la grilla) y 36 puntos de grilla en la dirección radial. En fig:7 podemos observar cómo a medida que nos alejamos de la superficie de la estrella la grilla va perdiendo resolución.

3.1.3. Regularización de la métrica

Al construir la métrica en ONION nos encontramos con un problema: el interior del BH se encuentra contenido dentro de nuestro dominio numérico y la métrica se vuelve singular dentro del BH debido a que los vectores (8) se vuelven singulares. Para solucionar este problema lo que se hace es regularizar la métrica dentro del objeto, para ello se redefinen el cuadri-vector ℓ^a ⁵ y \mathcal{H} de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= M_1 \frac{r_{01}^3}{r_{01}^4 + (a_1 z_1)^2} \\ \ell^a &= \begin{pmatrix} 1. \\ \frac{(r_{01} x_1 + a_1 y_1)}{(r_{01}^2 + a_1^2)} \\ \frac{(r_{01} y_1 - a_1 x_1)}{(r_{01}^2 + a_1^2)} \\ \frac{z_1}{r_{01}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

⁵ ℓ^a se define utilizando la métrica η^{ab} (y no con g_{ab}): $\ell^a := \eta^{ab} \ell_b$

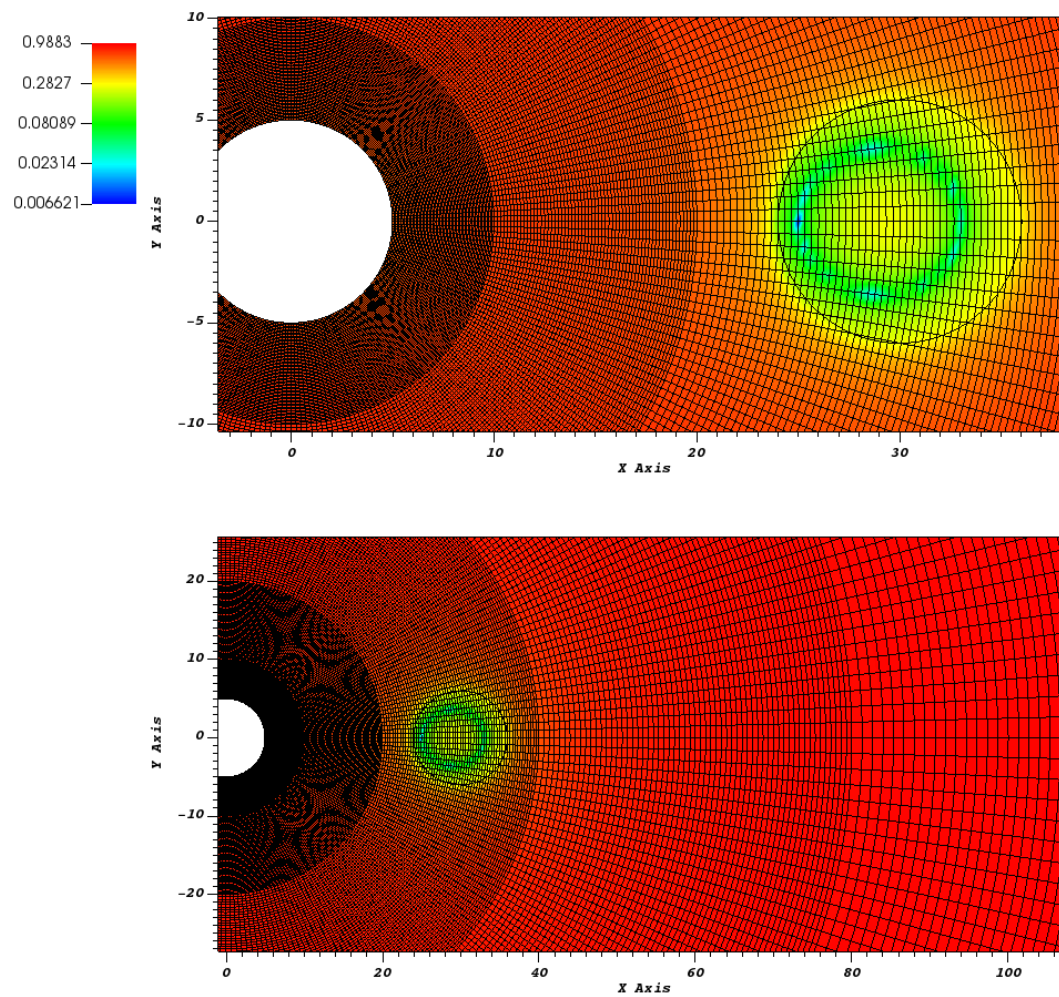


Figura 7: Arriba: Lapse de de la métrica SKS (con $\Omega = 0$) en el plano $z = 0$. Abajo: lo mismo que arriba pero en una mayor extensión. En el gráfico de arriba se pueden observar 3 capas radiales mientras que en la de abajo se observan 5.

con $r_{01} = M_1 + \sqrt{M_1^2 - a_1^2}$. De esta forma se logra garantizar la suavidad en la superficie del BH y la regularidad en todo el espacio.

Es importante señalar que esta modificación de la métrica no afecta a la física afuera del BH, debido a que su región interna se encuentra causalmente desconectada del resto del espacio-tiempo.

3.1.4. Inicio de la rotación

Debido a que iniciar la simulación con el sistema rotando es muy 'brusco', lo que se hace es sustituir la fase Ωt por una función:

$$\begin{cases} \varphi(t) = 0.5\Omega(t - t_f \sin(\pi t/t_f)/\pi) & t < t_f \\ \varphi(t) = \Omega(t - 0.5t_f) & t \geq t_f \end{cases} \quad (27)$$

La velocidad angular Ω es reemplazada por $w(t)$ que se define como la derivada de la fase $\varphi(t)$:

$$\begin{cases} w(t) = 0.5\Omega(1 - \cos(\pi t/t_f)) & t < t_f \\ w(t) = \Omega & t \geq t_f \end{cases} \quad (28)$$

$\varphi(t)$ pone gradualmente en movimiento del sistema hasta que $w(t)$ llega a al valor de Ω en t_f y luego es constante. El segundo término de $\varphi(t)$ para $t \geq t_f$ en (27) es debido a que la fase se 'retrasa' por el inicio suave.

Notemos que al inicio de la simulación el cambio de coordenadas (17) no hace ningún efecto ya que $w(0) = 0$; sin embargo, la transformación tendrá relevancia durante el resto de la simulación.

3.2. Pruebas de la implementación

Para verificar el funcionamiento correcto de la métrica en el programa ONION, en el post proceso del mismo (llamado Post ONION), se utiliza una parte del código llamada Metric Check, la misma nos brinda información del determinante de la métrica y el lapse, entre otras cosas. Esta información puede ser graficada utilizando VisIt [49]. A continuación estudiaremos el funcionamiento de la regularización de la métrica y la rotación de la órbita.

Como se menciona en sec:3.1.3, la métrica se regulariza en el interior del BH. La función lapse para un agujero de Kerr, es decir, para la métrica (7) es

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\mathcal{H}}}$$

donde $\mathcal{H} = \frac{Mr}{r^2 + a^2 z^2 / r^2}$, si tomamos $a = 0$ (para simplificar el análisis) obtenemos que:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{r^2 + 2Mr}}$$

Para $r \rightarrow \infty$ la función lapse tiende a 1 como $\frac{1}{r}$ y además, si $r \rightarrow 0$ tenemos que $\alpha \rightarrow \infty$. En la métrica SKS tenemos una superposición de dos métricas de Kerr por lo cual estudiaremos gráficamente el comportamiento del lapse.

En fig:8 podemos observar que para la métrica SKS el lapse tiende a 1 a medida que nos alejamos del sistema binario (al igual que el lapse de (7)) y por otro lado se puede observar la regularización del interior del BH (en x=10 para el primer gráfico). El interior de la NS no se encuentra en el dominio numérico por lo cual no es necesaria la regularización de su interior. Notemos que sobre la superficie de la NS los valores del lapse son ya cercanos a 1 mientras que en el BH no lo son, esto se debe a que el radio de la NS es mayor al del horizonte de eventos (en el caso de fig:8 $R_{NS} = 5 > R_s = 2M_{NS} = 2$).

Por otro lado, en fig:8 podemos observar que el BH rota alrededor de la NS (y podemos ver que el origen de la misma es el centro de la grilla) con el periodo definido por la órbita Kepleriana. En el caso de la fig:8 hay una relación de masas 3:1, $M_{NS} = 1$; $M_{BH} = 3$ y separación 20 ($M_{NS} + M_{BH}$) por lo cual, según una órbita Kepleriana, el tiempo que tarda el sistema en dar una vuelta es: $T = 1/\Omega \simeq 795$ acorde con lo que se observa en fig:8 (en fig:8 no se encuentra aplicada la modificación de la subsección:3.1.4).

También lo que podemos observar es que pareciera que la regularización no se encontrara en el centro del objeto, sino que se encontrara atrasada en la órbita del BH. En realidad la regularización sí se encuentra centrada en el objeto, pero debido a que hay una transformación de Lorentz aplicada en los objetos ocurre este efecto el cual hace que el horizonte de eventos se contraiga en la dirección del movimiento y deje de ser circular⁶. Observando el último gráfico de fig:8 podemos ver que para $\Omega = 0$, es decir, sin transformación de Lorentz no ocurre este efecto⁷. También se puede observar el efecto de la transformación en la NS, donde con $\Omega \neq 0$ hay una asimetría en el lapse en la dirección de movimiento⁸.

3.3. Ecuaciones de evolución

Seguindo la sec:II-b de [2] (y a [50]) podemos escribir las ecuaciones de evolución FF de la forma:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{E}^i &= -\partial_k \mathcal{F}^{ki} - \mathcal{I}^i \\ \partial_t \mathcal{B}^i &= -\partial_k \mathcal{F}^{*ki}\end{aligned}$$

donde $\mathcal{E}^i = \sqrt{\gamma} E^i$, $\mathcal{B}^i = \sqrt{\gamma} B^i$ con $E_i = F_{ij} n^j$ y $B_i = F_{ij}^* n^j$ (n^a la foliación descrita en subsec:2.2), la corriente FF \mathcal{I}^i es

$$\mathcal{I}^i = Q \left(\frac{\alpha S^i}{\mathcal{B}^2} - \hat{\beta}^i \right) + \frac{\mathcal{B}^i}{\mathcal{B}^2} [\mathcal{E}_j \partial_k \mathcal{F}^{*kj} - \mathcal{B}_j \partial_k \mathcal{F}^{kj} - \mathcal{E}^k \mathcal{B}^j \mathcal{L}_t \gamma_{kj}] \quad (29)$$

donde $Q = \partial_K \mathcal{E}^K$ la densidad de carga eléctrica y \mathcal{L} es la derivada de Lie. Los flujos asociados son

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{ki} &:= \alpha \sqrt{\gamma} F^{ki} = \beta^i \mathcal{E}^k - \beta^k \mathcal{E}^i + \alpha \epsilon^{kij} \mathcal{B}_j \\ \mathcal{F}^{*ki} &:= \alpha \sqrt{\gamma} F^{*ki} = \beta^i \mathcal{B}^k - \beta^k \mathcal{B}^i + \alpha \epsilon^{kij} \mathcal{E}_j\end{aligned}$$

donde $\epsilon^{abc} := \hat{n}_d \epsilon^{dabc}$ es el elemento de volumen inducido en las hipersuperficies.

En este trabajo utilizaremos la versión simplificada de las ecuaciones FF, al igual que en [2], en la cual se desprecian los términos paralelos a \mathcal{B}^i en la corriente (29):

$$\begin{aligned}\partial_t \mathcal{E}^i &= -\partial_k F^{ki} - Q \left(\frac{\hat{\alpha} S^i}{\mathcal{B}^2} - \hat{\beta}^i \right) \\ \partial_t \mathcal{B}^i &= -\partial_k F^{*ki}\end{aligned}$$

Esta versión simplificada de FF es mucho más fácil de implementar y ha mostrado resultados similares comparado a sistemas más elaborados como la versión simetrizada de la teoría en [51] (donde fue probado con configuraciones similares a [39]).

Además, al igual que en [2], se impone numéricamente la condición $\mathcal{E} \cdot \mathcal{B} = 0$ (la cual es la misma que (4)) a través de la proyección $\mathcal{E}^i \rightarrow \mathcal{E}^i - \frac{\mathcal{E} \cdot \mathcal{B}}{\mathcal{B}^2} \mathcal{B}^i$, de la misma forma que en [52, 53, 54].

3.4. Dato inicial

Como configuración inicial del campo, tomaremos un dipolo magnético centrado en la NS en un fondo de Schwarzschild. En contraste, en [2], donde no se incluyó la curvatura de la NS, se tomó dipolo magnético en fondo de Minkowski, al igual que tomaremos en nuestra referencia.

El potencial vector del dipolo magnético, en las representación de Boyer-Lindquist y en coordenadas esféricas centradas en la NS, $\hat{x}^a = (\hat{t}, \hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$, se escribe de la siguiente forma [40]:

$$\hat{A}_{\hat{\phi}}(\hat{r}, \hat{\theta}) = \frac{\left(3\mu \sin^2(\hat{\theta}) \right) \left(\frac{\hat{r}^2 \log(1 - \frac{2m_2}{\hat{r}})}{2m_2^2} + \frac{\hat{r}}{m_2} + 1 \right)}{4m_2} \quad (30)$$

⁶ Debido a este efecto, el círculo negro que representa al BH en fig:8, al igual que en el resto de los gráficos donde se represente el horizonte del BH en este trabajo, no corresponde exactamente al horizonte de eventos, sino que es una aproximación.

⁷ Este efecto también se puede observar en fig:7, donde la regulación también se encuentra aplicada y $\Omega = 0$.

⁸ La superficie de la estrella también se contrae en la dirección del movimiento, sin embargo despreciaremos este efecto y la tomaremos como esférica. Notemos que como $R_{NS} = 5M_{NS} > R_s = 2M_{NS}$ el efecto en la superficie de la NS será menor que si la superficie fuera la del horizonte (aunque en ese caso pasaría ser un BH).

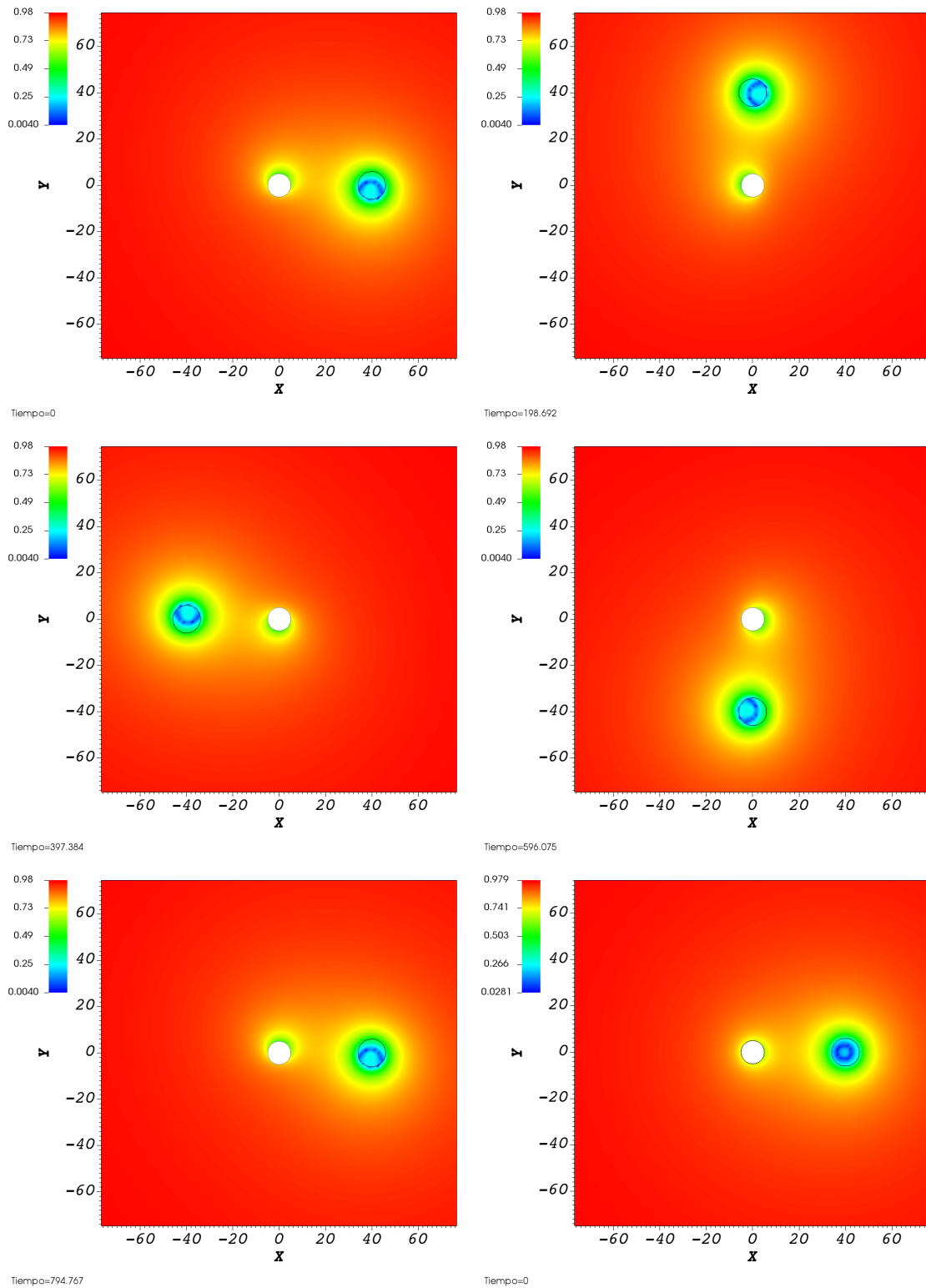


Figura 8: Función lapse en el plano $z=0$ de la métrica SKS. Primeros 5 gráficos: lapse a cuatro tiempos distintos donde no se encuentra aplicada la modificación de la subsección:3.1.4 sobre la fase. Último gráfico: lapse con $\Omega = 0$ a $t = 0$.

donde m_2 es la masa de la estrella y μ es el momento dipolar magnético. Con el potencial vector podemos definir el tensor electromagnético:

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$$

Debido a que la estrella se encuentra boosteada con Λ_2 de (18), tenemos que aplicar también la transformación Λ_2 a F_{ab} . Aunque antes de transformar F_{ab} con Λ_2 , hay que pasar a la foliación Kerr-Schild en coordenadas cartesianas, este se explicará en el apéndice:B. Luego de obtener en la foliación Kerr-Schild a F_{ab} , se aplica la transformación de Lorentz:

$$F_{ab}^{boost} = \Lambda_2^T F_{ab} \Lambda_2 \quad (31)$$

Con (31) podemos plantear el dipolo magnético con origen en la estrella con la ecuación (de ahora en adelante omitiremos el supra índice *boost* en F):

$$\hat{B}_i := F_{ij}^* n^j$$

y el campo eléctrico se define:

$$\hat{E}_i := F_{ij} \hat{n}^j \quad (32)$$

Usando esta convención de signo (normalmente B se define con un signo menos) y que la relación entre el elemento de volumen ϵ^{abcd} y el símbolo de Levi Civita η^{abcd} es

$$\epsilon^{abcd} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \eta^{abcd}; \epsilon_{abcd} = -\sqrt{-g} \eta_{abcd}$$

podemos definir el tensor F_{ab} y su dual cómo:

$$\begin{aligned} F_{ab} &= 2\hat{n}_{[a} \hat{E}_{b]} - \epsilon_{abcd} \hat{n}^c \hat{B}^d \\ F_{ab}^* &= 2\hat{n}_{[a} \hat{B}_{b]} + \epsilon_{abcd} \hat{n}^c \hat{E}^d \end{aligned} \quad (33)$$

Luego obtenemos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \hat{B}^i &= \frac{1}{2\sqrt{h}} \epsilon^{ijk} F_{jk}^{boost} \\ \hat{E}_i &= \frac{1}{\alpha} \left(F_{it} - \sqrt{h} \epsilon_{ijk} \hat{\beta}^j \hat{B}^k \right) \end{aligned} \quad (34)$$

donde h en (35) es el determinante de la métrica de Schwarzschild, a la cual también se le aplicó el *boost* Λ_2 . Esta métrica se construye de forma análoga a (20) pero sin el término del BH (término del medio en (20)) y tomando $a \rightarrow 0$. Utilizando (34), el campo magnético que se obtiene es:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\hat{x}} &= -\frac{3\mu\hat{z} \left(r_2^2 \hat{x} + (\gamma_2 - 1)v_{2oy}(v_{2oy}\hat{x} - v_{2ox}\hat{y}) \right)}{hr_2^2 \hat{r}^2 (\hat{r} - 2m_2)} \\ \hat{B}_{\hat{y}} &= -\frac{3\mu\hat{z} \left(r_2^2 \hat{y} + (\gamma_2 - 1)v_{2ox}(v_{2ox}\hat{y} - v_{2oy}\hat{x}) \right)}{hr_2^2 \hat{r}^2 (\hat{r} - 2m_2)} \\ \hat{B}_{\hat{z}} &= \frac{\gamma_2 \mu \left(\frac{1.5m_2(\hat{r}^3(\hat{r}-m_2) - 2m_2^2 \hat{z}^2)}{\hat{r}^4(\hat{r}-2m_2)} + 0.75 \log \left(1 - \frac{2m_2}{\hat{r}} \right) \right)}{hm_2^3} \end{aligned} \quad (35)$$

donde las coordenadas $\hat{x}^a = (\hat{t}, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ son las definidas en (14) con subíndice 2, las velocidades son

$$\begin{aligned} v_{2ox} &= r_{st} \Omega \text{sen}(\Omega \hat{t}) = v_{2x}(\hat{t})/\Omega \\ v_{2oy} &= -r_{st} \Omega \text{cos}(\Omega \hat{t}) = v_{2y}(\hat{t})/\Omega \end{aligned}$$

r_2 es la distancia de la NS al CM, definido en (16) y γ_2 es el definido en (15).

En fig:9 podemos observar cómo afecta la transformación a la intensidad del campo magnético alrededor de la NS, se observa que el halo de alta intensidad alrededor de la misma se vuelve levemente más angosto en la dirección del eje y. Lo cual es de esperar, ya que esta es la dirección en la que se mueve la estrella (en tiempo $t = 0$).

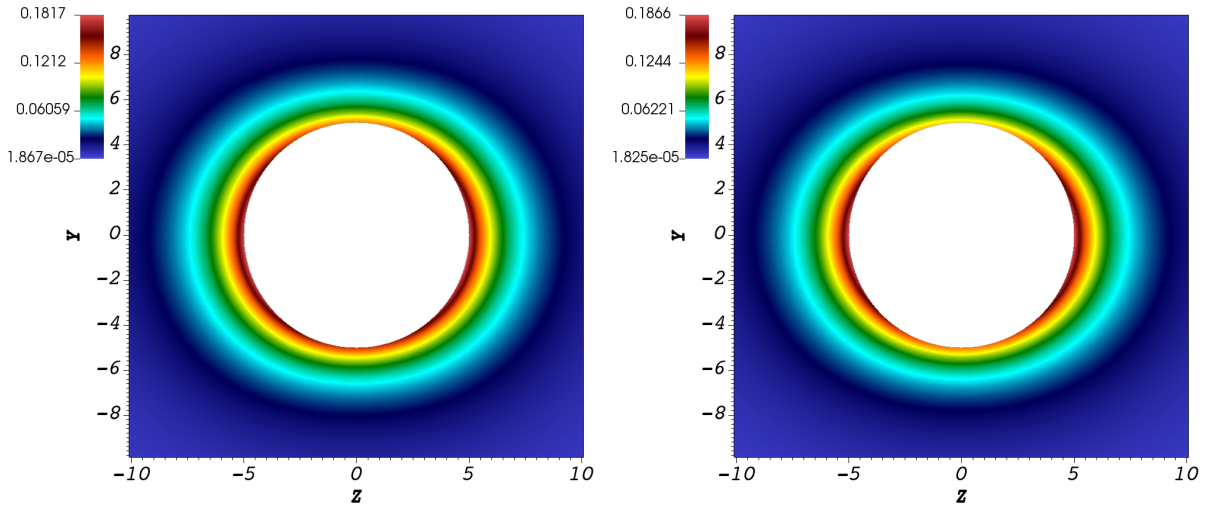


Figura 9: Intensidad del campo magnético en el plano y - z alrededor de la NS de radio $R_{NS} = 5$. Izquierda: campo sin transformación de Lorentz ((35) con $\Omega = 0$). Derecha: campo con transformación de Lorentz ((35) con $\Omega \neq 0$, definido por (16)).

Cabe destacar que debido a que en ONION se inicia la simulación con $\Omega = 0$, la transformación de Lorentz no hace ningún efecto en el dato inicial. Sin embargo, el campo magnético (35) será utilizado para imponer la condición de conductor perfecto en la superficie de la NS durante la evolución, donde $\Omega \neq 0$, y por lo tanto la transformación de Lorentz tendrá efecto.

3.5. Condiciones de Contorno

La condición de contorno en la superficie de la NS se deriva asumiendo la condición de conductor perfecto [39]:

$$0 = F_{ab}\hat{t}^a$$

donde \hat{t}^a es el vector tangente a la línea mundo de la NS en las coordenadas centradas en la NS, el mismo se define de la forma:

$$\hat{t}^a := \hat{\alpha}\hat{n}^a + \hat{\beta}^a$$

Tomando un momento de inercia adimensional para la NS $\mathcal{I} := \frac{I}{MR^2}$ con un valor de $2/5$, podemos vincular la velocidad angular Ω_* de la NS con el espín a_2 de la misma, en unidades del radio estelar:

$$\frac{a_2}{R_{NS}} = \frac{2}{5}\Omega_*R_{NS}$$

Incorporando la velocidad angular de la NS, la condición resulta:

$$0 = F_{ab}\left(\hat{t}^a + \Omega_*\hat{\phi}^a\right)$$

donde $\hat{\phi}^a := \left(\partial_{\hat{\phi}}\right)^a$. Con la condición resultante, el campo eléctrico es:

$$\hat{E}^i = -\frac{1}{\hat{\alpha}}\left(\epsilon^i{}_{jk}\left(\beta^j + \Omega_*\hat{\phi}^j\right)\hat{B}^k\right) \quad (36)$$

Por otro lado, se redefine la componente normal del campo magnético en la superficie de la NS con (35).

La condición del campo eléctrico es impuesta numéricamente a través del método de penalización [55, 56, 57] fijando los modos físicos entrantes a cierta combinación de modos salientes. Además, en la superficie externa se impone condiciones de disipación maximal para hacer que todas las perturbaciones se propaguen (la implementación numérica de esta condición se explica detalladamente en [58]).

3.6. Cantidades de monitoreo

Queremos analizar la energía EM y sus flujos asociados. Para ello, utilizando el vector de Killing (22), definimos el '4-momento' como:

$$p^a := -T^{ab}k_b \quad (37)$$

el cual se conserva, es decir: $\nabla_a p^a = 0$ ⁹. Esto se debe a que por la aproximación FF (3) el tensor energía-momento EM se conserva (se cumple $\nabla^b T_{ab} = 0$) y a que el HKV cumple la ecuación de Killing (23).

Explicaremos brevemente como se calculó p^a en [2], luego explicaremos cómo se extendió el cálculo para el caso actual, y por último definiremos la energía y su flujo radial.

En [2], al tener una métrica de Kerr el vector de Killing es $k^b = t^b$. Para ir a las coordenadas corrotantes con la NS hay que hacer la transformación de coordenadas $\hat{k}^a = \frac{\partial x^a}{\partial \hat{x}^b} k^b = (k^t, k^i - \beta_o^i k^t)$ con β_o^i definido en (26), se obtiene que

$$\hat{k}^a = t^a - \beta_o^a$$

donde $\beta_o^a = (0, \beta_o^i)$.

Si usamos un observador $\hat{n}^a = (\frac{1}{\hat{\alpha}}, -\frac{\beta^i}{\hat{\alpha}})$ y $\hat{n}_a = (-\hat{\alpha}, 0)$:

$$\hat{k}^a = \hat{\alpha} \hat{n}^a - \beta^a \quad (38)$$

De las ecuaciones (2) y (33) podemos escribir el tensor energía-momento EM de la forma:

$$T^{ab} = (\hat{E}^2 + \hat{B}^2) \left[\frac{1}{2} \hat{g}^{ab} + \hat{n}^a \hat{n}^b \right] - (\hat{E}^a \hat{E}^b + \hat{B}^a \hat{B}^b) + 2\hat{n}^a \hat{S}^b \quad (39)$$

Luego $p^a = -T^{ab} \hat{k}_b$ nos da:

$$p^a = \left[\frac{1}{2} \hat{\alpha} (\hat{E}^2 + \hat{B}^2) - \hat{S} \cdot \hat{\beta} \right] \hat{n}^a - \frac{1}{2} (\hat{E}^2 + \hat{B}^2) \hat{\beta}^a + \left[\hat{E}^a (\hat{E} \cdot \hat{\beta}) + \hat{B}^a (\hat{B} \cdot \hat{\beta}) \right] + \hat{\alpha} \hat{S}^a \quad (40)$$

Con la métrica SKS tenemos el vector de Killing (22), por lo cual hay que seguir los mismos pasos que antes, pero con el HKV. Al transformar obtenemos

$$\hat{k}^a = t^a + \Omega \varphi^a - \beta_o^a$$

y al usar el mismo observador que antes (pero con el $\hat{\alpha}$ y β^i definidos con la métrica SKS):

$$\hat{k}^a = \hat{\alpha} \hat{n}^a + \Omega \varphi^a + \hat{\beta}^a \quad (41)$$

Ahora $p^a = -T^{ab} \hat{k}_b$ resulta:

$$p^a = \left[\frac{1}{2} \hat{\alpha} (\hat{E}^2 + \hat{B}^2) - \hat{S} \cdot (\hat{\beta} + \Omega \varphi) + \Omega (\hat{n}^b \varphi_b) \right] \hat{n}^a - \frac{1}{2} (\hat{E}^2 + \hat{B}^2) (\hat{\beta}^a + \Omega \varphi^a) + \left[\hat{E}^a (\hat{E} \cdot (\hat{\beta} + \Omega \varphi)) + \hat{B}^a (\hat{B} \cdot (\hat{\beta} + \Omega \varphi)) \right] + (\hat{\alpha} - \Omega (\hat{n}^b \varphi_b)) \hat{S}^a \quad (42)$$

El cálculo para llegar a la expresión (42) se encuentra en el apéndice:C. Al comparar (40) con (42), se puede ver que pasar del Killing (38) al Killing (41) es equivalente a hacer la sustitución $\hat{\beta}^a \rightarrow \hat{\beta}^a + \Omega \varphi^a$ (y también $\hat{\beta} \rightarrow \hat{\beta} + \Omega \varphi$).

Lo que se quiere medir es la energía y su flujo radial:

$$\left\{ \hat{E}(\hat{t}) := \int_{\Sigma_{\hat{t}}} \hat{\mathcal{E}} \sqrt{\hat{\gamma}} d^3 \hat{x} \quad \hat{L}(\hat{t}, \hat{r}) := \oint_{\hat{r}} \hat{\mathcal{F}}_E \sqrt{-\hat{g}} d^2 \hat{x} \right. \quad (43)$$

donde la luminosidad de Poynting \hat{L} se integra en superficies esféricas de radio r alrededor de la NS y se definió $\hat{\mathcal{E}} := -p^a \hat{n}_a$ y $\hat{\mathcal{F}}_E := p^a (d\hat{r})_a$, utilizando (42) estos valores resultan en:

⁹Esta ecuación es válida en todo el espacio menos en las CS, donde hay disipación del campo eléctrico para mantener la condición de plasma magnéticamente dominado.

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{E}} &= \frac{1}{2}\hat{\alpha} \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) - \hat{S} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega\varphi \right) \\
\hat{\mathcal{F}}_E &= - \left[\hat{E}^2 + \hat{B}^2 - \frac{\hat{S} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega\varphi \right)}{\hat{\alpha}} \right] \hat{\beta}^{\hat{r}} - \left[\frac{1}{2} \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) - \frac{\hat{S} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega\varphi \right)}{\hat{\alpha}} \right] \beta_o^{\hat{r}} \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) \Omega\varphi^{\hat{r}} + \left[\hat{E}^{\hat{r}} \left(\hat{E} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega\varphi \right) \right) + \hat{B}^{\hat{r}} \left(\hat{B} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega\varphi \right) \right) \right] + \hat{\alpha}\hat{S}^{\hat{r}}
\end{aligned}$$

Notemos que $\varphi^{\hat{r}}$ es distinto de cero porque la coordenada \hat{r} está definida desde el centro de la estrella, mientras que φ^a está definido desde el centro de masa (φ^r es cero, pero no $\varphi^{\hat{r}}$).

4. Resultados

El objetivo de este trabajo es estudiar cómo el efecto de la curvatura de la estrella altera las propiedades de la magnetosfera que rodea al sistema binario. Para ello se analiza la métrica discutida en la Sección 2; luego se implementa en ONION; y finalmente se corren simulaciones para estudiar cualitativamente la topología del campo magnético resultante, la energía y su flujo radial, la distribución de carga eléctrica, y la formación de hojas de corriente, entre otras cosas. En esta sección se estudian los resultados obtenidos de las simulaciones, se comparan con los resultados de la métrica utilizada en [2] y se ven las diferencias que ocasiona la incorporación de la métrica SKS (y así el resultado de tener en cuenta la curvatura de la estrella).

Para llevar a cabo lo propuesto, se corrieron tres simulaciones; dos con la métrica SKS y otra con la métrica de Kerr-Schild las cuales llamaremos caso SKS-0, caso SKS y caso de referencia respectivamente. En todos los casos se eligieron las masas $M_{NS} = 1$ y $M_{BH} = 3$ donde el radio del BH está dado por $R_{BH} = 2M_{BH} = 6$ y el de la NS $R_{NS} = 5M_{NS} = 5$ el cual refleja un valor realista de compacticidad para una estrella de neutrones, para ambos objetos se eligió espines nulos. Se tomó una separación de $b = 10M_{BH}$ para el caso de referencia, mientras que para los caso SKS-0 y SKS se eligió una separación de $b = 10(M_{BH} + M_{NS})$. Para dar un poco de contexto, las NS rondan entre una o dos masas solares, para una NS de masa $M_{NS} = 1.4M_{\odot} \simeq 2.8 \times 10^{30} kg$ (M_{\odot} es la masa solar) y un BH de masa $M_{BH} = 3M_{NS} \simeq 8.4 \times 10^{30} kg$ sus radios son $R_{NS} = 10.5 km$ y $R_{BH} = 12.6 km$; y la separación orbital para los casos SKS es de $b = 10(M_{BH} + M_{NS}) \frac{G}{c^2} \simeq 83 km$ (y $62 km$ para el caso de referencia), esta separación corresponde a las últimas órbitas estables del sistema, donde la dinámica electromagnética se intensifica.

La simulación para el caso de referencia se corrió un poco más de 3 órbitas, lo cual equivale a $t \simeq 1600$ y con una extensión espacial radial de $320 \sim 107M_{BH}$. Por otro lado, para los casos SKS-0 y SKS se corrió un poco más de 2 órbitas, lo cual equivale a $t \simeq 1650$ (como la separación b cambia, el periodo también) y con una extensión espacial radial de $640 \sim 213M_{BH}$ para el caso SKS-0 y de $320 \sim 107M_{BH}$ para SKS. Los parámetros de cada simulación se encuentran resumidos en el cuadro:2. El tiempo que tarda la frecuencia Ω en llegar a su valor definido por (16) es de $t_f = 100$ en todos los casos (un $\sim 6\%$ de toda la simulación). Continuando con el ejemplo, el periodo orbital para los casos SKS es $T = 2\pi \sqrt{\frac{b^3}{G(M_1 + M_2)}} = 0.00549s \simeq 5.5ms$ (y $\simeq 3.5ms$ para el caso de referencia). La simulación total corresponde a $\simeq 12ms$ (y a $\simeq 11ms$ para el caso de referencia).

La simulación SKS se llevó a cabo debido a que, como presentaremos a continuación, la simulación SKS-0 presentó un problema numérico debido a la disipación en las CS, en la simulación SKS se solucionó este problema (aunque no en su totalidad).

Las simulaciones se realizaron en el Centro de Computación de Alto Desempeño de la Universidad Nacional de Córdoba (CCAD) en las cuales se utilizaron 7 nodos para el caso SKS-0 y 3 nodos para los otros casos. En el caso SKS y el de referencia se utilizó un sistema de 6×6 (y 6×7 para el caso SKS-0) grillas. El primer valor corresponde al número de parches cubriendo las direcciones angulares y el segundo al número de capas radiales. En las simulaciones, cada parche tiene una resolución de $81 \times 81 \times 61$ donde los primeros dos valores corresponden a los puntos de grilla en las direcciones angulares y el último en la dirección radial. A medida que nos alejamos radialmente cada capa tiene la mitad de resolución radial que la anterior, ya que a pesar que sea la misma cantidad de puntos tiene que cubrir más espacio.

Los gráficos que se presentarán en esta sección fueron realizados con VisIt¹⁰ [49], excepto los de energía y flujo de energía, que fueron realizados en Python (con la librería Matplotlib).

Otro detalle importante de las simulaciones es que para tratar las regiones donde ocurre que $B^2 - E^2 = 0$ se limita el campo eléctrico para cumplir marginalmente la condición Force-Free $B^2 - E^2 > 0$. Al igual que en [2], esto se realizó con un parámetro al cual se lo llamó ε que define que tan cerca el campo eléctrico se puede acercar al campo magnético. A mayor valor de ε , mayor es el recorte que se le hace al campo eléctrico en la CS por lo cual más energía es disipada (en [27] se estudió el parámetro ε en detalle).

¹⁰Fig:7 y fig:8 también se realizaron con VisIt.

Caso	Referencia	SKS-0	SKS
M_{BH}	3	3	3
M_{NS}	1*	1	1
R_{BH}	6	6	6
R_{NS}	5	5	5
b	30	40	40
a_{BH}	0	0	0
a_{NS}	0	0	0
tiempo	1600	1700	1700
t_f	100	100	100
extensión radial	320	640	320

Cuadro 2: Parámetros de las simulaciones. *La masa de la NS no entra en la métrica pero se utiliza para definir la velocidad orbital

caso	Referencia	SKS-0 (HKV helicoidal)
Energía media	3.2938	17
Desviación estándar	0.0008	2

Cuadro 3: Energía media y desviación estándar para los casos de referencia y SKS-0 (con el HKV helicoidal). En el caso de referencia se tomaron los valores superiores a $t = 100$ y en el caso SKS-0 superiores a $t = 200$ para evitar efectos del inicio de la simulación.

4.1. Problemas en caso SKS-0

Al realizar la simulación SKS-0 observamos a través distintos gráficos la aparición de ondas de alta frecuencia que, como se explicará más adelante, es un problema numérico debido a la formación de una CS no observada en [2]. En esta sección se estudiará la energía y la magnetosfera para el caso SKS-0 y se la comparará con el caso de referencia.

4.1.1. Energía

Como mencionamos en subsec:3.6, queremos estudiar la energía, definida en (43). Para ello graficamos la energía integrando (43) en todo el espacio en función del tiempo para ambas simulaciones.

En fig:10 se puede observar la energía en función del tiempo, podemos ver que en el inicio para ambos casos hay un tiempo que la energía crece y luego para el caso de referencia la energía se queda en un valor fijo mientras que para el caso SKS-0 la energía no se estabiliza sino que se mueve alrededor de un valor medio. El transiente inicial se debe a que el sistema se pone en rotación lentamente al inicio de la simulación. En el caso SKS-0 la energía se triplica en comparación a la del dato inicial en contraste con el caso de referencia, donde la energía no se aleja mucho del valor inicial¹¹.

En tabla:3 podemos observar los valores de energía y su desviación estándar para el caso de referencia y para el caso SKS-0 (calculada con el HKV (22)). Lo que podemos ver en la tabla es que la desviación estándar es mucho más alta para el caso SKS-0, esto concuerda con lo que se observa en fig:10.

4.1.2. Magnetosfera y hojas de corriente

Analizamos las características de la magnetosfera: estudiamos la líneas de campo magnético y su intensidad y la formación de CS localizando las regiones de muy alta densidad de carga eléctrica (donde se excede los valores de Goldreich-Julian (GJ) [59]).

En primer lugar, estudiaremos el campo magnético en el co-plano, el cual es un plano que intersecta ambos objetos y tiene como eje vertical la dirección perpendicular al plano orbital (eje

¹¹ A priori, en la evolución se espera que el campo se distorsione y amplifique por lo cual aumentaría la energía comparado al dato inicial, pero no se espera que la misma aumente tanto como para triplicarse (caso SKS-0).

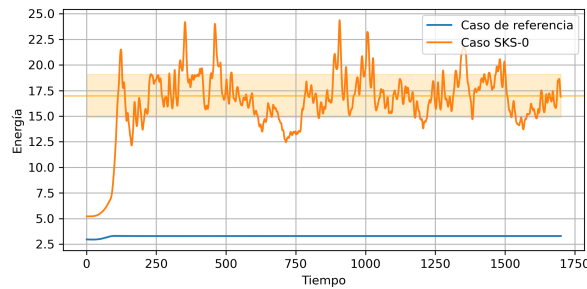


Figura 10: Valor de la Energía en función del tiempo para el caso de referencia y el caso SKS-0 (usando el HKV helicoidal), la línea y barra horizontal corresponde al valor medio y la desviación estándar del caso SKS-0.

z). En los gráficos de arriba de fig:11 se graficó la intensidad de campo magnético en la dirección perpendicular al co-plano y líneas de campo magnético proyectadas al co-plano. Lo que se puede ver al comparar ambos casos es la aparición en el caso SKS-0 de ondas de alta frecuencia que afecta tanto a la intensidad del campo y también tuerce las líneas de campo magnético (principalmente las que están en dirección radial).

Por otro lado, en los gráficos de abajo de fig:11 se graficó la densidad de carga para el caso de referencia y el caso SKS-0. En el caso de referencia se puede observar la formación de una CS espiral, al igual que en [2], mientras que en el caso SKS-0 esta estructura se pierde y en las cercanías del sistema la densidad de carga toma valores muy altos y en esa región también se puede observar las ondas de alta frecuencia aunque no tan claramente como en el gráfico de arriba.

4.1.3. Origen

Estudiando en más detalle las líneas de campo de la NS y la densidad de carga eléctrica, vimos que en el caso SKS-0 en la parte trasera (en la dirección de movimiento) de la NS se forma un 'rastros' de valores altos de densidad de carga como se puede observar en fig:12. Allí se graficó la densidad de carga en el m-plano, el cual es un plano en el que el eje horizontal coincide con la dirección de movimiento de la estrella y tiene como eje vertical a el eje z, el 'rastros' visto para el caso SKS-0 (figuras de arriba) no se forma para el caso de referencia (figuras de abajo). También se observa que cerca de la estrella este rastros deforma las líneas de campo, esto se puede ver claramente al comparar los gráficos de la derecha. Por otro lado, al comparar los gráficos de la izquierda vemos que a distancias más lejanas, en la región del 'rastros', la líneas de campo no se cierran para el caso SKS-0 como ocurre en el caso de referencia.

En [37] se mostró que una NS moviéndose en un campo magnético externo genera una *trailing current sheet* (TCS), la cual es una CS que se encuentra en la parte trasera de la NS (respecto a la dirección de movimiento). Allí se comprobó que la aparición de esta TCS es un efecto puramente vinculado a la curvatura de la NS. La aparición de este 'rastros' al momento de agregar la curvatura de la NS fue un indicio de que el mismo es una manifestación de una TCS, pero que debido a las ondas de alta frecuencia (posiblemente originada por la aparición del mismo 'rastros') se estaba agregando ruido numérico el cual estaba afectando a la dinámica de todo el sistema (lo cual explicaría las grandes fluctuaciones de la energía). Como mencionamos en la introducción sobre [2], al igual que en [37] y en este trabajo, para tratar la disipación en las CS se define un parámetro ε que define que tanto el campo eléctrico se puede acercar al campo magnético para mantener la condición de plasma magnéticamente dominado. En [37] se utilizó un parámetro de disipación de $\varepsilon = 0.05$, mientras que en el caso de referencia y el caso SKS-0 se usó $\varepsilon = 0.02$. A mayor valor de ε , mayor es el 'recorte' que se le hace al campo eléctrico.

En las CSs, el campo eléctrico que se produce está relacionado, a través de las ecuaciones de evolución, a la discontinuidad de el campo magnético. Físicamente, el espesor de la CS estaría determinado por una disipación física como calor, u otro tipo. Esta disipación no se modela en este trabajo, sino que se trata numéricamente con el parámetro ε . Numéricamente, la discontinuidad produce altas frecuencias, especialmente con los operadores de diferencia finita de alto orden como

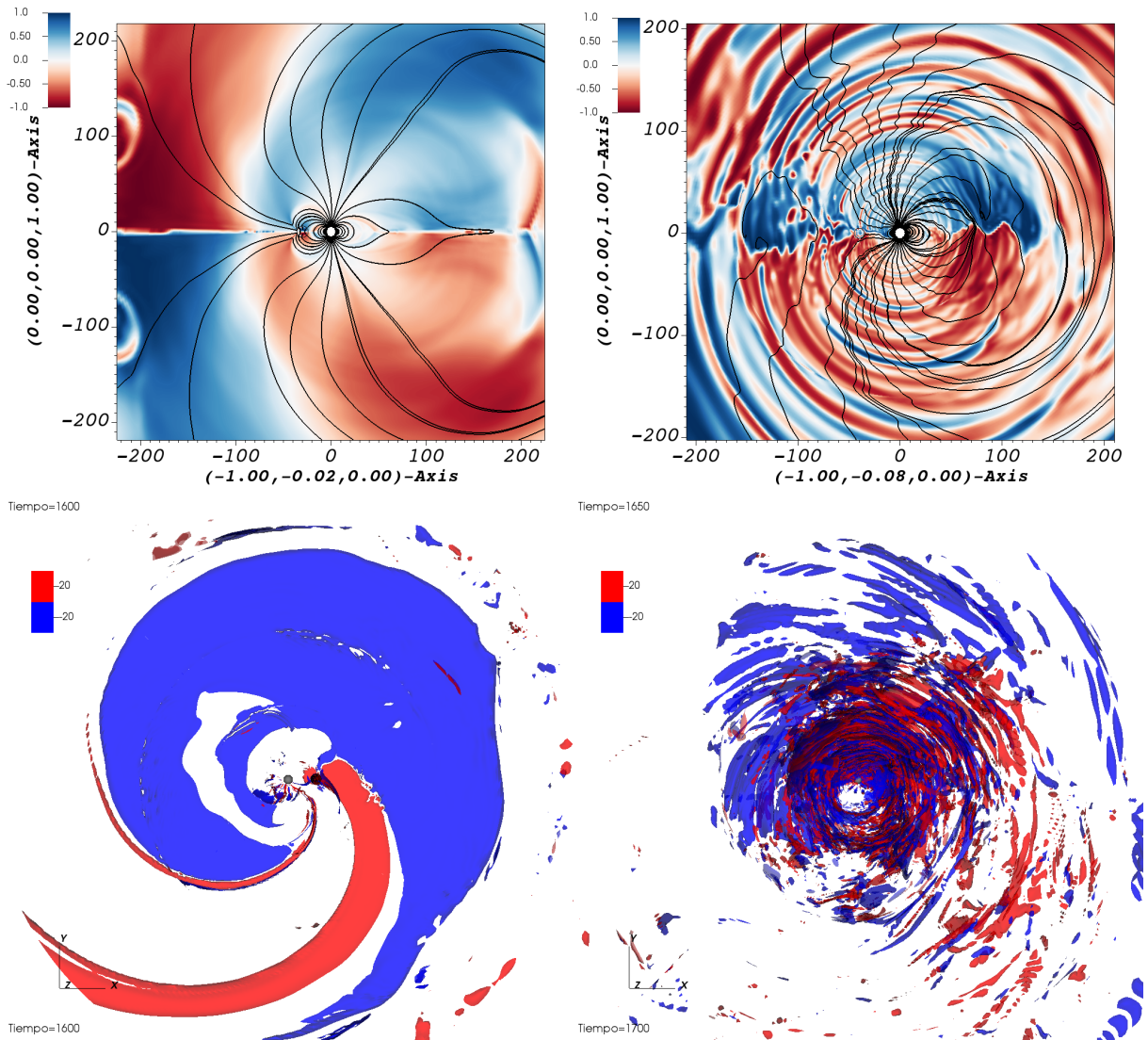


Figura 11: Arriba: Intensidad de campo magnético en la dirección perpendicular al plano en el co-plano (normalizado con el módulo del campo magnético total) y líneas de campo magnético proyectadas al co-plano para el caso caso de referencia (izquierda) y el caso SKS-0 (derecha). Abajo: Gráficos de contorno de densidades de cargas (rojo y azul) normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ para el caso de referencia (izquierda) y el caso SKS-0 (derecha).

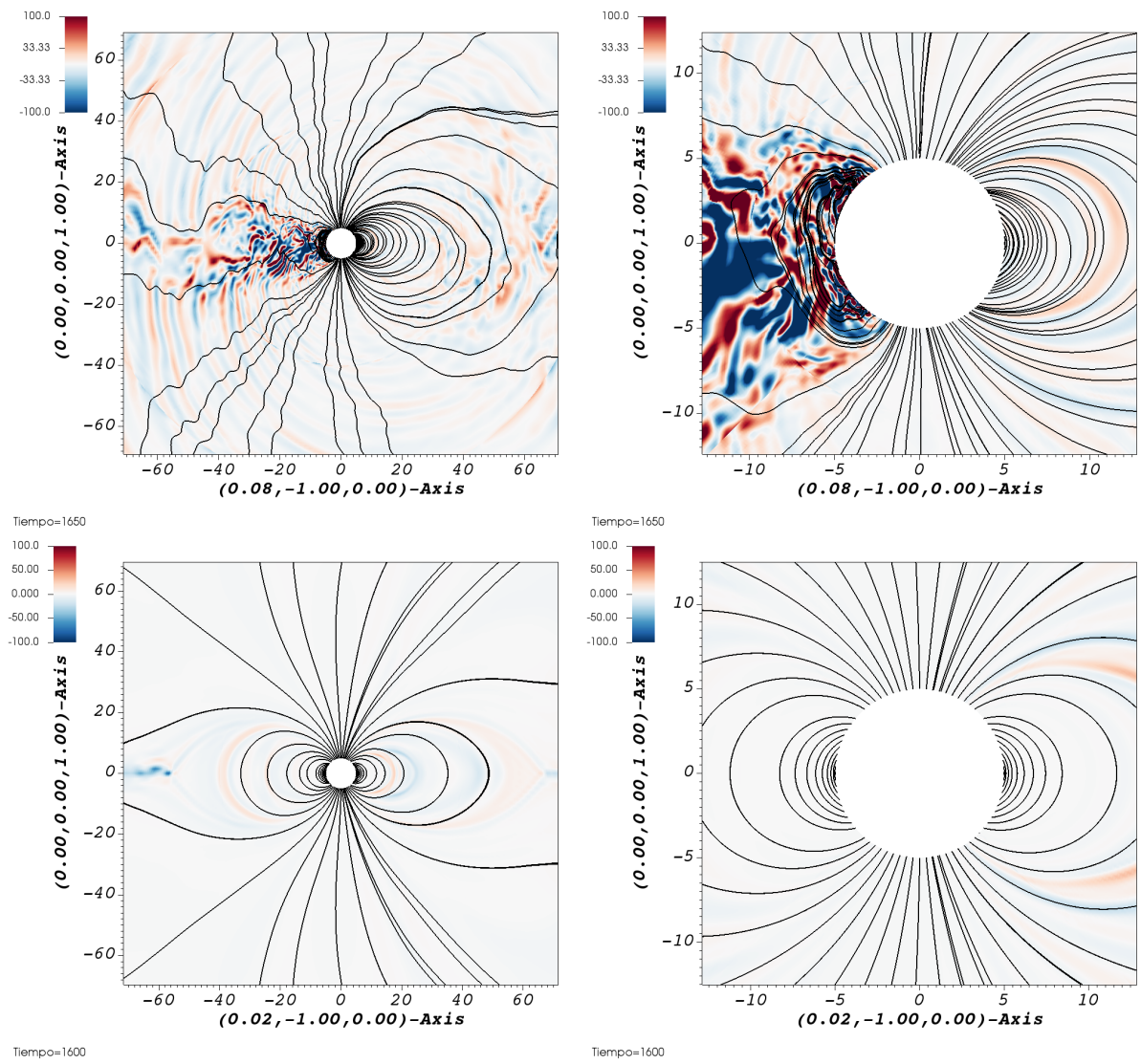


Figura 12: Densidad de carga normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ en el m -plano y líneas de campo magnético proyectadas al plano. Arriba: caso SKS-0. Abajo: caso de referencia.

caso	HKV	Killing asintótico
Energía media	8.6	6.5
Desviación estándar	0.3	0.2

Cuadro 4: Energía media y desviación estándar para el caso SKS calculada con el HKV helicoidal (22) y el Killing asintótico $t^a = (\partial_t)^a$. Se tomaron valores superiores a $t = 200$ para evitar efectos del transiente.

los que se utilizaron en estas simulaciones (de octavo orden). Con disipación numérica se controla, hasta cierto punto, los ruidos de alta frecuencia. Por otro lado, si la disipación numérica no es suficiente, aumentar el valor del parámetro ε , o sea, 'recortar' más el campo eléctrico hace que el perfil de B sea más suave y por lo tanto produce menos ruido numérico.

4.2. Caso SKS

Para eliminar las ondas de alta frecuencia se decidió llevar a cabo una simulación adicional con la métrica SKS, cambiando el parámetro de disipación a $\varepsilon = 0.05$ (el mismo que se utilizó en [37]). Esta simulación tiene los mismos parámetros que la del caso SKS-0 a excepción de que la extensión radial se redujo a la mitad (tiene la misma extensión que el caso de referencia), a la simulación se la llama caso SKS y la compararemos tanto con el caso de referencia y con el caso SKS-0 (para mostrar cómo mejoran los resultados cambiando el parámetro de disipación).

4.2.1. Energía y flujo radial de energía

En los gráficos de arriba de fig:13 se puede observar la energía y el flujo de energía para el caso SKS, comparado al caso SKS-0 y al caso de referencia. Ahora la energía es mucho más estable que en el caso SKS, aún se observan fluctuaciones pero son mucho más pequeñas que en el caso SKS-0. Ahora también la energía no se separa tanto del dato inicial como en el caso SKS-0 y se asemeja más al caso de referencia. En tabla:4 podemos observar los valores de energía y desviación estándar para el caso SKS calculada con el HKV y el Killing asintótico $t^a = (\partial_t)^a$, ahora el valor de la energía se redujo a la mitad comparado al caso SKS-0 (con HKV) y las desviación estándar es un orden de magnitud menor aunque sigue siendo órdenes de magnitud mayor comparado al caso de referencia. También, en fig:13, podemos ver que los valores de la energía se encuentran mejor contenidos en la desviación estándar comparado al caso SKS-0 en fig:10 aunque, por otro lado, las fluctuaciones tampoco se estabilizan con el paso del tiempo. Esto se puede entender dado que la CS producida es quasi-estacionaria, por lo cual, las fluctuaciones (ondas de altas frecuencia) se siguen generando en la CS.

En el gráfico superior derecho de fig:13 se comparó para el caso SKS la energía calculada con el HKV (22) y el Killing asintótico t^a , en este último caso el valor de la energía resulta menor y se puede observar que las fluctuaciones alrededor del valor medio se comportan muy similar tanto para el Killing asintótico t^a como para el HKV, la única diferencia es que en el caso del asintótico Killing t^a las fluctuaciones son menores (al igual que la desviación estándar), lo cual puede estar vinculado con que el valor medio de la energía es menor.

Por otro lado, en los gráficos del centro y abajo de fig:13 se graficó el flujo radial de energía: L^{12} , de (43), a distintos radios con origen en la NS. Lo que se puede ver, comparando los gráficos, es que a medida que nos alejamos del sistema, L se vuelve cada vez menor. La causa de que L decrezca con el radio es que parte del flujo de Poynting está siendo disipado en las CSs. Ahora el flujo radial del caso SKS es menor y más estable que el caso SKS-0 pero a su vez sigue habiendo pequeñas fluctuaciones en comparación al caso de referencia. En el gráfico inferior derecho se compara L calculada con HKV y con el Killing asintótico t^a , lo que vemos es que los roles se invierten en comparación a la energía y L es mayor con el Killing asintótico, aunque la diferencia es muy pequeña.

Cabe destacar que comparar las magnitudes de la energía de los casos SKS con el caso de referencia es complicado ya que se definen con vectores de Killing distintos y fundamentalmente

¹² L se integró con origen en la NS, una alternativa podría ser el centro de masa del sistema.

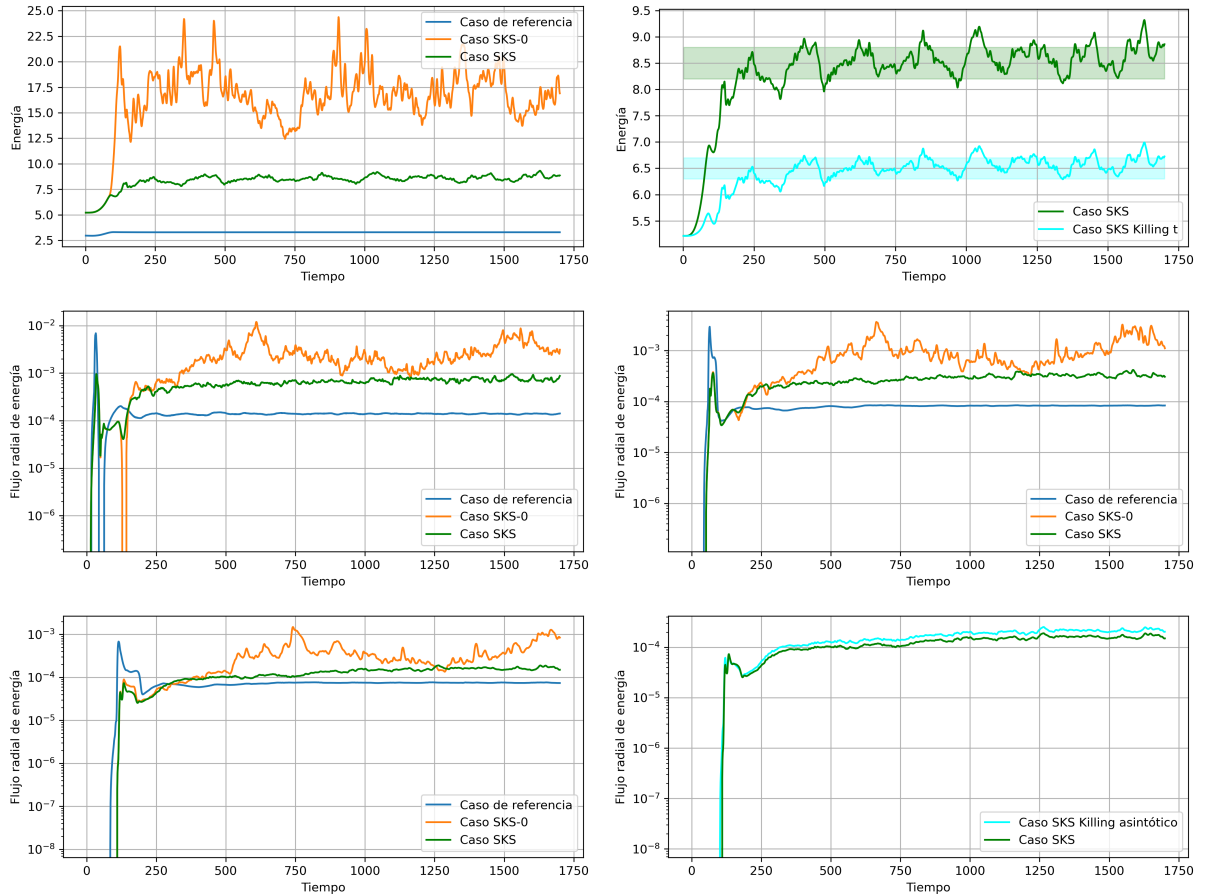


Figura 13: Arriba: Valor de la Energía en función del tiempo para los tres casos (izquierda) y para el caso SKS calculada con el HKV helicoidal (22) y con el Killing asintótico $t^a = (\partial_t)^a$ (derecha). Centro y abajo: Flujo radial de energía en función del tiempo a radio $r_A = 30$ (centro izquierda), $r_B = 60$ (centro derecha) y $r_C = 120$ (abajo izquierda) en escala logarítmica para el caso SKS y el caso de referencia; el gráfico inferior derecho corresponde a una comparación del flujo radial de energía a radio $r_C = 120$ entre el HKV (22) y el Killing asintótico t^a para el caso SKS.

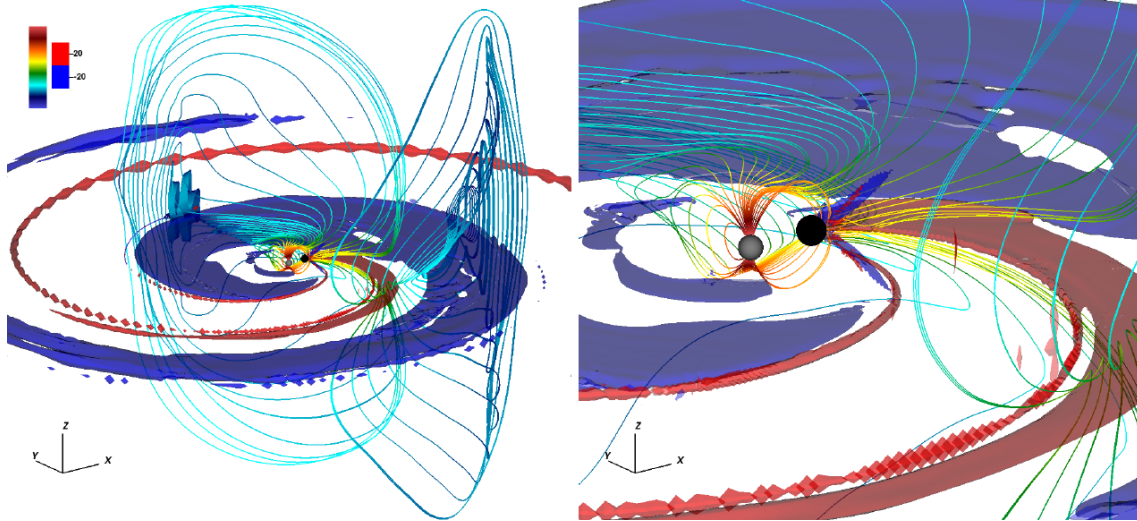


Figura 14: Izquierda: Figura 1 de [2] (mismo que el caso de referencia), gráfico de contorno de densidades de cargas (rojo y azul) normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ y líneas de campo (con el color indicando su intensidad en escala logarítmica). Derecha: misma gráfico que izquierda pero más de cerca.

porque las frecuencias son distintas, ya que los objetos se encuentran a separaciones orbitales distintas.

4.2.2. Magnetosfera y hojas de corriente

En [2] (que es nuestro caso de referencia) se mostró que en un sistema BHNS se generan hojas de corriente. En fig:14 (la cual fue obtenida de [2] con autorización) se graficó la densidad de carga (con algunas líneas de campo magnético). En los gráficos se observa una CS con un patrón espiral en el plano orbital la cual está asociada a discontinuidades en el campo magnético toroidal a través del plano. Por otro lado, se observa una CS fuera de este plano, la cual está producida por una discontinuidad del campo magnético poloidal en el lado exterior del BH. En el gráfico de la izquierda se puede ver claramente la CS con patrón espiral mientras que en el de la derecha se puede ver la otra CS más pequeña al lado derecho del BH.

En fig:15 se graficó la densidad de carga para el caso SKS con el objetivo de ver la formación de CSs. En el gráfico de la izquierda podemos ver cómo se forma una CS espiral (brazo rojo) al igual que en fig:14 (y al igual que en el caso de referencia en fig:11), también se ve la CS azul aunque no tan limpia como en [2]. En el gráfico de la derecha podemos observar la formación de una TCS en la parte trasera de la NS (esfera gris¹³), confirmando lo intuido en sec:4.1. La TCS se observa con una intensidad de la densidad de carga 15 veces mayor que la que se observa en el gráfico de la izquierda donde se ve la CS espiral, esto nos indica que la TCS podría jugar un rol importante en la generación de señales EM.

En la fig:16 se puede observar la TCS a tiempos más tempranos en la simulación, lo que se ve es que se encuentra mucho mejor definida que al final de la simulación (en fig:15). A tiempos $t = 300$ y $t = 350$ se ve bien definida, donde notamos que la misma se extiende hasta por detrás del BH; ya a tiempos $t = 400$ y $t = 450$ la TCS se ve más distorsionada; y aún más a $t = 1650$ (fig:15). Esto es un indicio de que el aumento en la disipación no eliminó las ondas de alta frecuencia por completo (otro indicio es que no se ve tan limpia la CS azul en fig:15), como también observamos en otras figuras más adelante.

A diferencia de [37], donde la TCS se extiende exactamente por detrás de la NS (la cual se mueve en línea recta), la TCS se origina en la NS pero no se extiende exactamente por detrás sino pareciera extenderse en la dirección del BH, siguiendo el movimiento de la órbita. Luego se podría pensar que se une con la CS espiral ya que si vemos el caso de referencia en fig:11 la CS espiral

¹³En todos los gráficos tridimensionales la NS se representará de color gris y el BH de color negro.

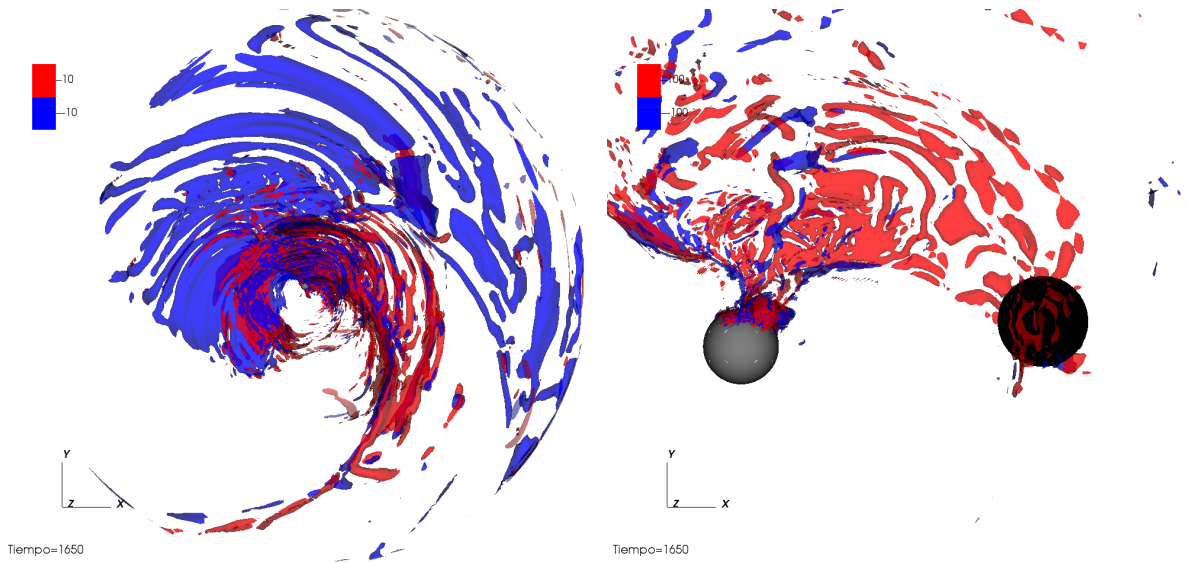


Figura 15: Gráficos de contorno de densidades de cargas (rojo y azul) normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ para el caso SKS. Izquierda: plano orbital. Derecha: el sistema BHNS visto desde cerca y con un valor de densidad 15 veces mayor que el gráfico izquierdo.

tiene origen en el BH. Otra gran diferencia con [37], es que en ese trabajo la NS se movía por un campo externo uniforme, mientras que ahora el campo es generado por la misma NS. Esto nos indica que la simetría del problema en [37] no jugaba un rol tan importante en la formación de la TCS.

En [8] se realizaron simulaciones usando *'full GR'* (evolucionando las ecuaciones de Einstein), para estudiar señales del merger de un sistema BHNS con relación de masas 5:1. En ese trabajo se vio la formación de una CS correlacionada con el movimiento de la NS aunque a cierta distancia de la misma a diferencia de la TCS que se observa en este trabajo. También se vio una CS que se genera en la parte trasera del BH lo cual no se observa en este trabajo, aunque, este efecto podría estar opacado por la TCS de la NS que luego pareciera unirse a la CS espiral. Lo que tampoco se logra observar en el caso SKS es la CS fuera del plano orbital que se producía del BH de [2] (y que también aparece en el caso de referencia), esto quizás se debe al cambio de la topología de las líneas del campo magnético (debida a la TCS posiblemente) que llegan a la región del BH, aunque todavía queda mucho análisis para hacer en estos aspectos.

En fig:17 se graficó líneas de campo magnético con origen en la NS y en la dirección de movimiento de la estrella. En el gráfico superior izquierdo podemos ver cómo, en la parte trasera (región superior izquierda del gráfico) de la NS, la TCS afecta a la estructura dipolar de la estrella mientras que la parte frontal de la estrella (región inferior derecha del gráfico) la estructura se conserva. En la región de la TCS las líneas de campo convergen a una pequeña región donde ocurren reconexiones magnéticas y luego se vuelven a abrir, apenas se vuelven a abrir se puede ver la formación de un pequeño plasmoide (bucle magnético) originado por la reconexión magnética en la TCS. En el gráfico superior derecho podemos ver cómo para el caso de referencia la estructura dipolar se conserva tanto en la parte frontal como la parte trasera de la NS, esto se debe a que la TCS no se encuentra presente en este caso (en concordancia con [37] que dice que si no se considera su masa no se forma la TCS). En los gráficos de arriba de fig:17 la intensidad de las líneas de campo se graficó con distintas paletas de colores para mostrar que la intensidad es un orden de magnitud mayor en la región donde se forma la TCS en comparación a la parte frontal de la NS. Se puede ver que apenas sobre la superficie de la parte trasera de la NS se forman líneas de campo que van rozando la superficie de la NS y es donde aparecen los valores de mayor intensidad. Estas líneas de campo parecerían indicar que se forma un intenso campo magnético tangencial a la superficie, el cual estaría asociado a una corriente superficial¹⁴. En el caso de referencia también

¹⁴Recordemos que, como se comentó en subsec:(3.5), en la superficie de la estrella se fija solo la componente normal del campo magnético y no la tangencial, la cual queda libre de acuerdo a las condiciones de contorno.

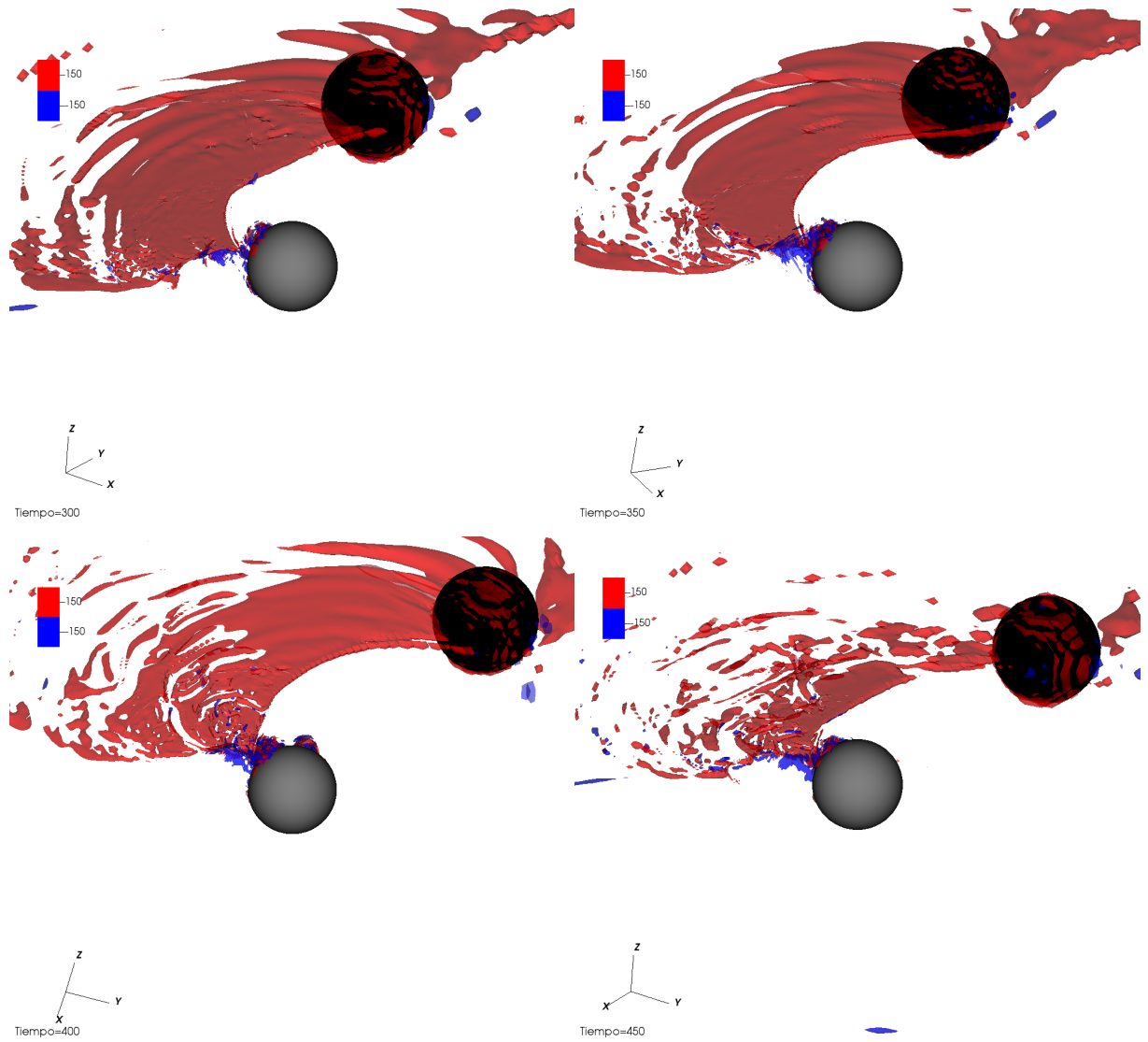


Figura 16: Gráficos de contorno de densidades de cargas (rojo y azul) normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ del sistema BHNS visto desde cerca para distintos valores de tiempo para el caso SKS.

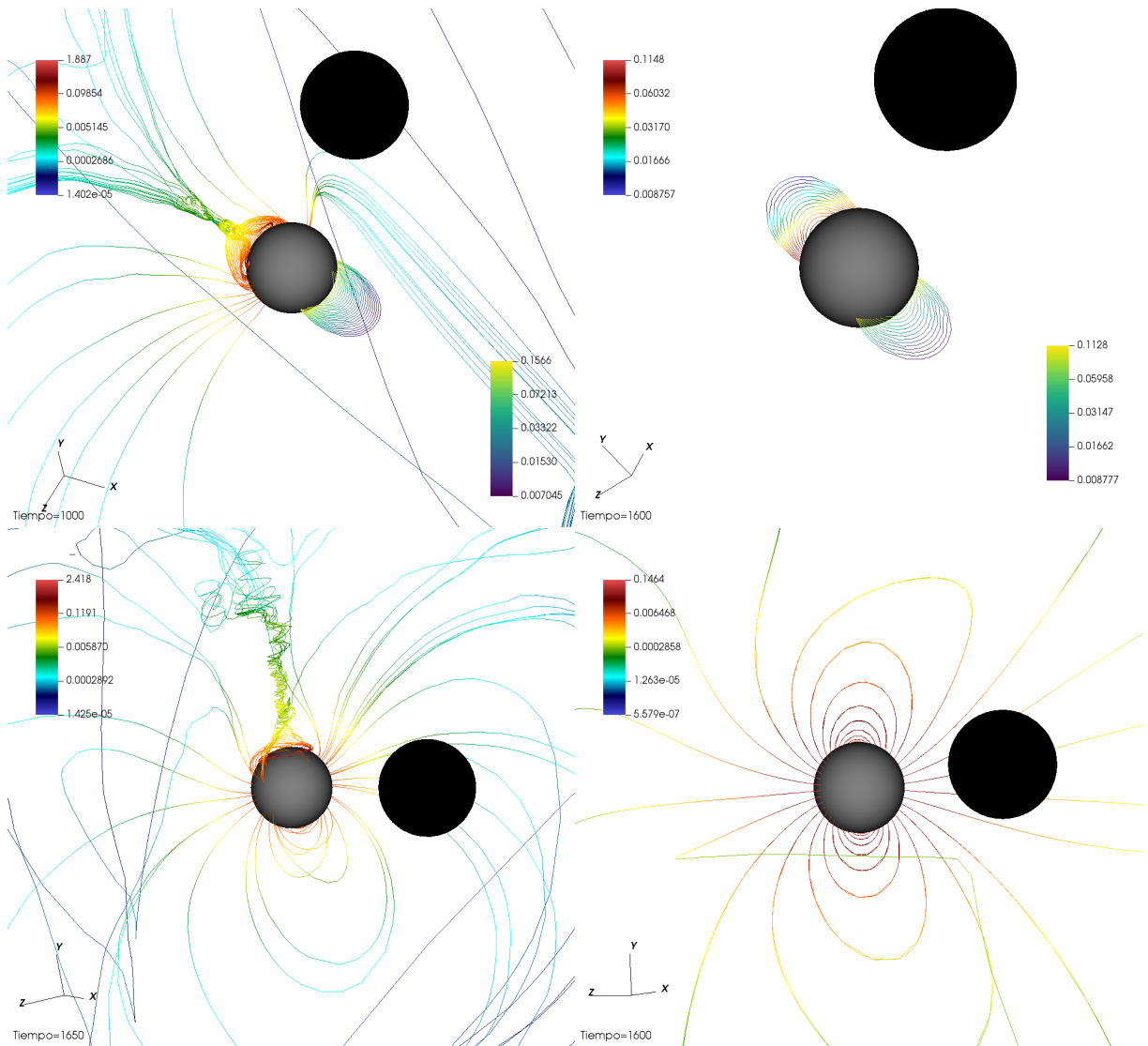


Figura 17: Líneas de campo magnético con origen en la NS (esfera gris), el color indica la intensidad de las mismas en escala logarítmica. Las leyendas en la región superior izquierda corresponden a las líneas con origen en esa región mientras que las leyendas en la región inferior izquierda corresponden a las líneas con origen en esa otra región. Izquierda: caso SKS a $t = 1000$ (arriba) y a 2 órbitas: $t = 1650$ (abajo). Derecha: caso de referencia a 3 órbitas: $t = 1600$.

se utilizó dos paletas de colores para enfatizar que los valores máximos y mínimos de cada región son prácticamente los mismos (y son similares a los de la parte frontal de la NS en el caso SKS). Por otro lado, en el gráfico inferior izquierdo, se muestra una imagen similar a la de arriba pero a un tiempo distinto y con otra selección de líneas de campo. En las líneas de campo arriba de la NS (región de la TCS) se ve la formación de un largo espiral que se extiende una gran distancia, esa estructura espiralada podría corresponder a la formación de un plasmóide. Al comparar este gráfico con el inferior derecho (el cual se encuentra al mismo tiempo que el de arriba) se puede ver como se modifica la estructura del dipolo en la estrella en comparación al caso de referencia. Viendo el caso SKS, por debajo de la NS, se ve que a medida de que nos alejamos de la misma, las líneas de campo se tuercen hacia el BH, efecto que también se observa en el caso de referencia aunque en mucha menor magnitud (en este caso se observa bien alrededor de toda la NS), el hecho de que aumente la intensidad de este efecto en el caso SKS se debe a que la curvatura de la NS aporta a la torción de estas líneas.

A continuación, estudiaremos a la magnetosfera en dos planos: uno es el co-plano y otro es el m-plano; el primero nos brinda información de la magnetosfera en un plano que se encuentra la NS y el BH, y el segundo nos da información del sistema en la dirección de movimiento de los objetos (y, por lo tanto, de la TCS).

En el gráfico superior de fig:18 se graficó la intensidad del campo magnético en el co-plano, junto a unas líneas de campo proyectadas al mismo. Comparando con el gráfico superior derecho de fig:11, podemos ver que las líneas de campo ahora son mucho más suaves que en el caso SKS-0, y las ondas de alta frecuencia, aunque se siguen observando, se ven a mucho menor intensidad. Comparando este gráfico con el superior izquierdo de fig:11 podemos ver que las líneas de campo son mucho más cerradas que en el caso de referencia debido a la incorporación de la curvatura de la NS.

Por otro lado, en los gráficos de abajo de fig:18 se muestra la densidad de carga en el co-plano y también líneas de campo proyectadas al mismo para el caso SKS y el de referencia. Para el caso SKS se puede ver claramente la CS azul a la izquierda del gráfico, mientras que por la derecha se ve la CS espiral roja, pero no tan claramente ya que está siendo perturbada por las ondas de alta frecuencia. En el caso de referencia se ven mucho mejor definidas las CS y nuevamente se ve como las líneas de campo se abren mucho más en comparación al caso SKS (ambos casos tienen exactamente los mismos parámetros en la selección de líneas).

En el gráfico izquierdo de fig:19 se graficó la densidad de carga en el m-plano y líneas de campo proyectadas al mismo. En este gráfico se puede ver la TCS por la izquierda de la NS y cómo en esa región las líneas de campo se abren a diferencia de el caso de referencia en el gráfico inferior izquierdo de fig:12 donde no se genera la TCS y se conserva la estructura del dipolo. En el gráfico de la derecha de fig:19 se graficó la intensidad del campo magnético (en el m-plano), lo que se observa es que la TCS define el cambio de signo en el campo magnético mientras que en la región de la derecha donde no hay TCS el cambio de signo no es de forma tan acentuada como en la región de la TCS (esto mismo se puede ver con las otras CS en los gráficos del co-plano en fig:11 y fig:18). En este gráfico también se vuelve a ver las ondas de alta frecuencia, sobre todo en la región izquierda del gráfico (donde se encuentra la TCS).

Al igual que en [2], para el caso SKS se logró observar la formación de plasmoides. En fig:20 se puede observar un plasmóide que se genera por la derecha de la NS, en el gráfico se puede ver como las líneas de campo cerca del plasmóide se orientan en su dirección. En el gráfico de arriba de fig:18 también se puede ver un plasmóide que se encuentra al lado de la CS azul (ver gráfico inferior izquierdo), indicando nuevamente el hecho de que estas regiones son propensas a reconexiones magnéticas.

Por último, estudiaremos el flujo de Poynting en el plano orbital. En fig:21 se observa el flujo de Poynting para el caso de referencia y el caso SKS. En el caso de referencia la distribución del flujo de Poynting se concentra en el brazo espiral y coincide con la parte roja de la CS ecuatorial (ver gráfico inferior izquierdo de fig:11), al igual que se observó en [2], se argumentó que en esa región de bucles magnéticos es donde más se tuercen las líneas de campo magnético por lo cual la fuerza (y por lo tanto la energía) aumenta en gran nivel. Por otro lado, para el caso SKS, podemos observar que la estructura espiral no es tan clara, se vuelve mucho más grande y más intensa que en el caso de referencia. Una parte del brazo espiral del flujo de Poynting coincide con el brazo espiral rojo de fig:15 pero el primero se extiende en ancho mucho más que el segundo. Nuevamente

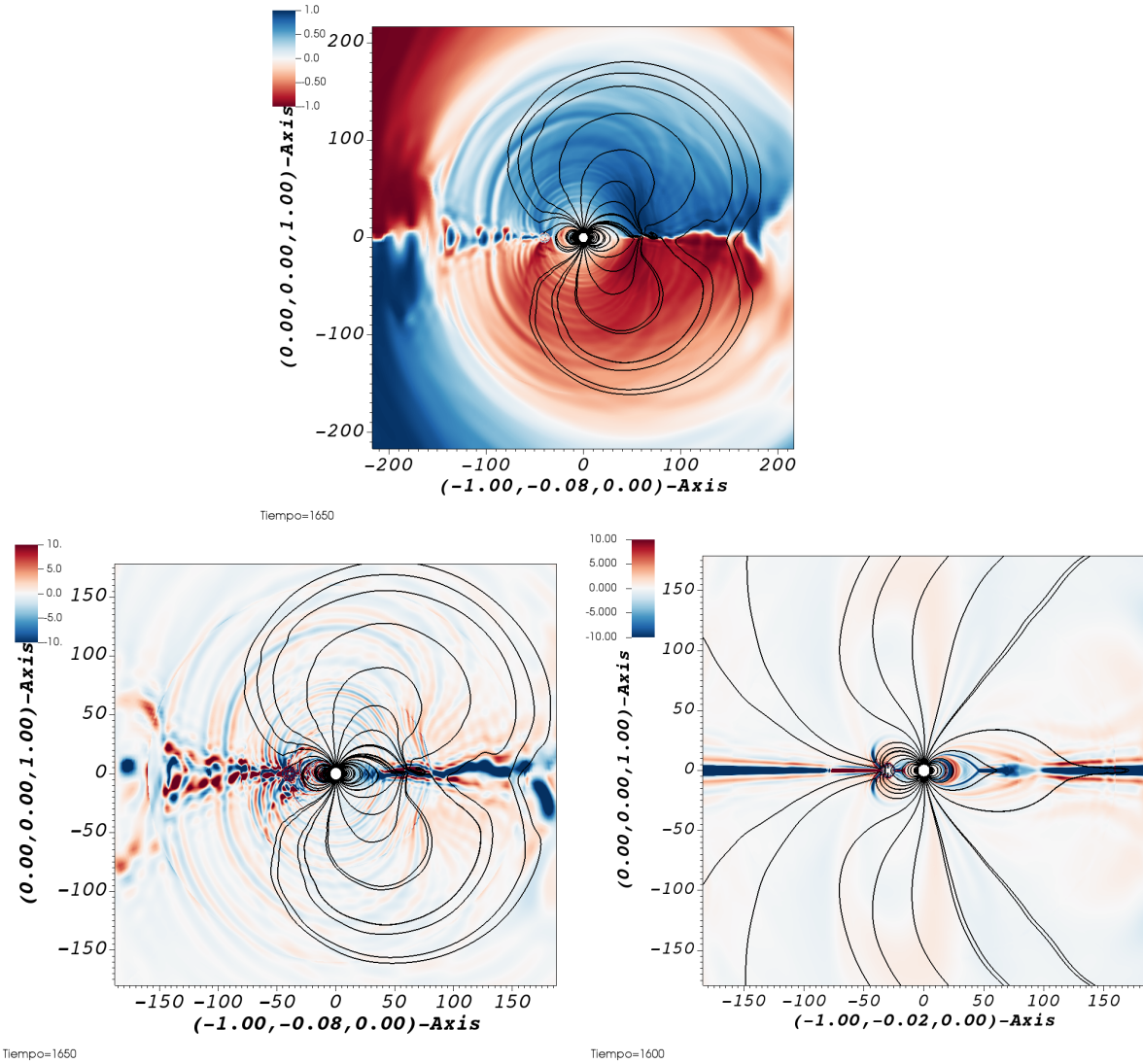


Figura 18: Arriba: intensidad de campo magnético en la dirección perpendicular al co-plano en el co-plano (normalizado con el módulo del campo magnético total) y líneas de campo magnético proyectadas en el co-plano para el caso SKS. Abajo: densidad de carga normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ en el m-plano y líneas de campo magnético proyectadas al plano para el caso SKS (izquierda) y caso de referencia (derecha).

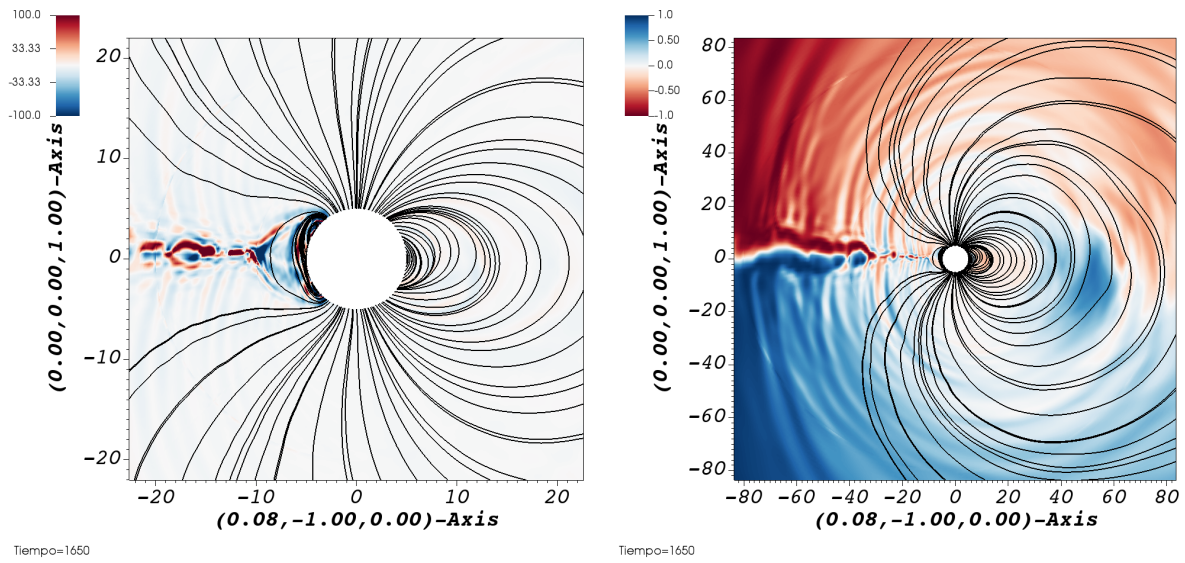


Figura 19: Izquierda: Gráfico de contorno de densidad de carga eléctrica normalizada con el valor de $GJ \frac{\Omega B}{2\pi c}$ en el m-plano y líneas de campo magnético proyectadas al plano para el caso SKS. Derecha: Intensidad de campo magnético en la dirección perpendicular al plano (normalizado con el módulo del campo magnético total) en el m-plano y líneas de campo magnético proyectadas en el plano para el caso SKS.

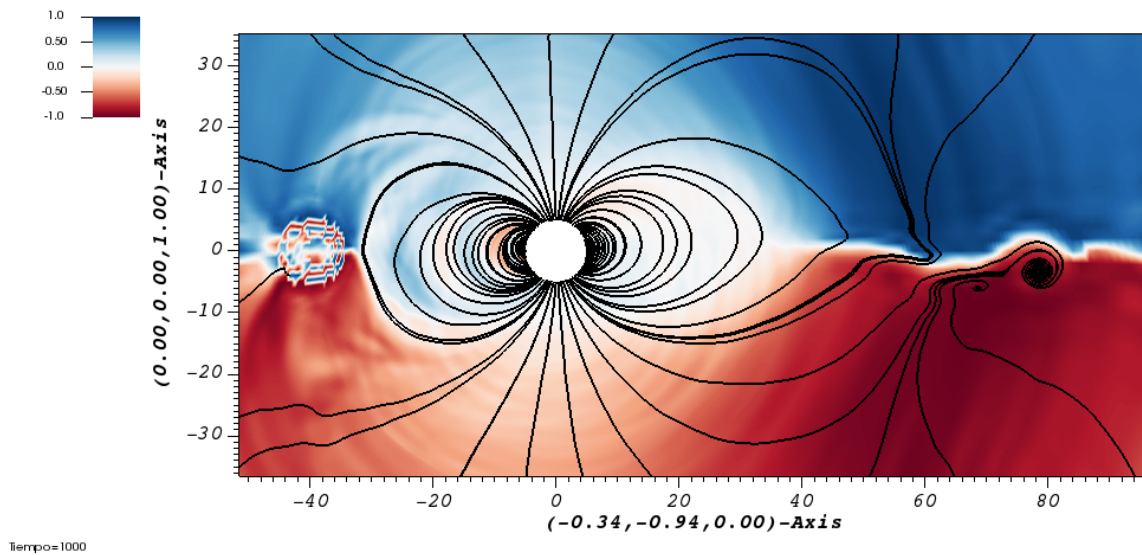


Figura 20: Intensidad de campo magnético en la dirección perpendicular al plano (normalizado con el módulo del campo magnético total) en el co-plano y líneas de campo magnético proyectadas en el plano para el caso SKS. Al valor 80 del eje horizontal se puede observar la formación de un plasmoide (bucle magnético).

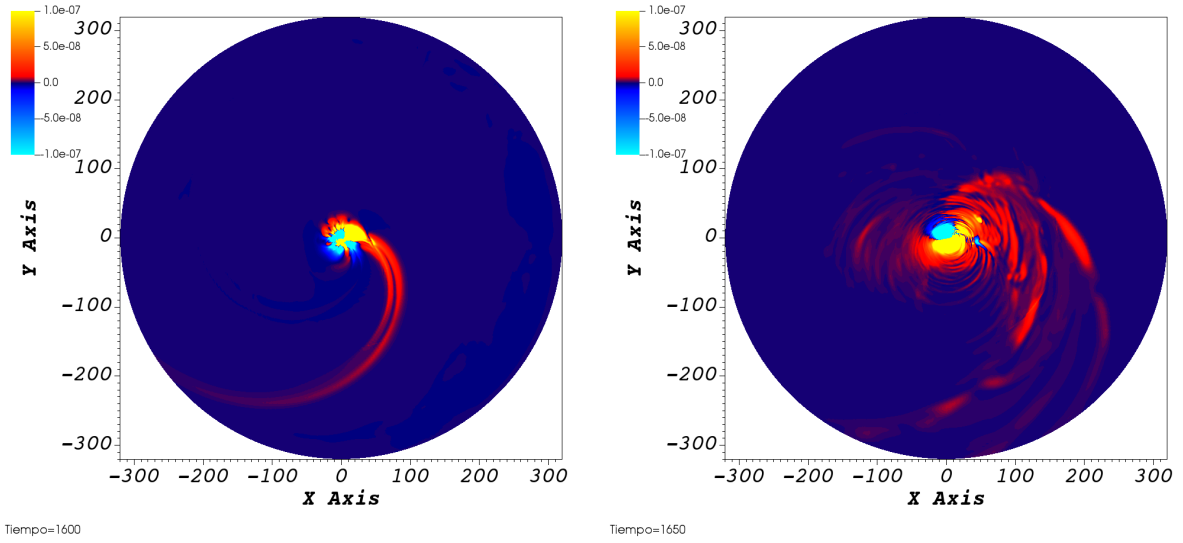


Figura 21: Flujo de Poynting en el plano $z = -3M_{BH}$ (para evitar las CSs en el plano). Los límites de intensidad fueron elegidos manualmente por lo cual hay regiones donde el valor satura (el valor real es mayor). Izquierda: caso de referencia a 3 órbitas. Derecha: caso SKS a 2 órbitas.

se vuelve a notar las ondas de alta frecuencia, sobre todo en la región más cercana a la NS.

4.2.3. Ondas de alta frecuencia y posibles mejoras

Como se puede ver en fig:18 (y en otras figuras), las ondas de alta frecuencia se siguen observando para el caso SKS aunque en mucha menor intensidad que el caso SKS-0, lo que seguramente está vinculado a las fluctuaciones que se observa en la energía y el flujo de energía en fig:13 ya que esto también disminuyó en comparación al caso SKS-0. Esto nos lleva a pensar que hay otras modificaciones que se pueden hacer para mejorar los resultados. Una opción sería reducir el orden de los operadores de diferencia finita: en este trabajo se utilizó orden 8 en el interior de las grillas y orden 4 en los bordes. Una alternativa sería usar orden 4 en el interior y orden 2 en los bordes. En principio la precisión de los operadores sería peor, pero se sabe que, ante una discontinuidad en los campos, los operadores de orden bajo introducen menos ruido de alta frecuencia (notar que en [37] se utilizaron operadores de segundo orden en la región de la TCS). Otra opción (la cual también se podría combinar con la idea anterior), sería explorar otro valor mayor del parámetro ε (en [27] se estudió el flujo de energía hasta con un parámetro de $\varepsilon = 0.07$).

5. Conclusión

En este trabajo se estudió una métrica aproximada: la métrica SKS, la cual representa la curvatura generada de dos objetos compactos en un sistema binario y se estudió su exactitud. Asimismo, se propusieron y evaluaron algunas modificaciones a la misma. Concluimos que la métrica SKS resulta una buena aproximación para el sistema binario BHNS, al menos al nivel de precisión que consideramos aceptable para estudiar la dinámica del plasma circundante. En este sentido, se han explorado aquí distintas relaciones de masas, espines individuales y separación orbital, mostrando que la aproximación se mantiene razonable para todos los parámetros de relevancia astrofísica.

Luego se implementó la métrica SKS en el programa de simulación ONION, el cual permitió estudiar la dinámica del plasma sobre este espacio-tiempo de fondo. Una vez implementada la métrica SKS, se realizaron distintas pruebas para asegurarnos del funcionamiento correcto de la misma. A continuación se llevó a cabo la simulación con la métrica SKS y se comparó los resultados obtenidos con la simulación realizada en [2], en la cual se utilizó una métrica de Kerr que representaba la curvatura del BH. Por lo cual, al comparar [2] con la nueva simulación, se estudió cómo la masa de la NS afecta a la dinámica de la magnetosfera. Para lograr esta implementación también hubo que modificar el dato inicial de los campos en comparación a [2]. Además, hubo que redefinir las cantidades de monitoreo, debido a que la métrica SKS tiene una simetría de Killing helicoidal.

El principal resultado numérico es la aparición de una TCS detrás de la NS, cuyo origen es una combinación de la curvatura de la estrella y el movimiento orbital de la misma. Este efecto había sido notado previamente en simulaciones numéricas (como por ejemplo [37, 8]), aunque en contextos un poco distintos. Esta TCS parece luego unirse a la CS espiral, lo cual tendría una gran relevancia astrofísica ya que podría implicar un aumento de la intensidad de las señales EM precursoras. Por otro lado, se observó la formación de la CS espiral, acorde a lo hallado en [2]. Aunque a diferencia de [2], ahora no se produce la CS fuera del plano orbital en las cercanías del BH, una posible consecuencia de la TCS. En los resultados numéricos, también se mostró la formación de plasmoides en regiones cercanas a CSs y, por último, se estudió el flujo de Poynting. Se lo comparó con el caso de referencia [2] en el cual se forma un brazo espiral donde se concentra la densidad del flujo de Poynting, en este caso se vio cierta correspondencia con un brazo espiral, pero no es tan clara como en [2].

La conclusión que se puede extraer de este trabajo, luego de un análisis cualitativo de los resultados (y no cuantitativo), es que la dinámica cambia con la incorporación de la masa de la NS a la métrica y se muestra el origen de una TCS originada por la NS que afecta en gran nivel la dinámica del sistema.

Como trabajo a futuro se podrían explorar otros parámetros de manera directa, como por ejemplo, la inclusión de espines. Lo cual lleva a la incógnita de si incluir el espín de la NS lleva a algún efecto de curvatura adicional. También se podría cambiar la separación de la órbita para poder comparar las cantidades como la energía y su flujo con [2] (y el caso de referencia). Otra alternativa también sería modificar la relación de las masas, como por ejemplo, una relación de masas 5:1. Un potencial trabajo a futuro sería incorporar la TCS al análisis de las implicancias cuantitativas en términos de potenciales señales EM (similar a lo que se hizo en sección D en [2]). Otro trabajo a futuro también sería el modelado de posibles emisiones EM, donde se propagan rayos y así se obtienen sus espectros y curvas de luz asociadas. El modelado de emisiones EM permitiría, en un futuro, caracterizar mejor estas señales EM precursoras. Sin embargo, debido a las persistencia de las ondas de alta frecuencia (y las fluctuaciones en la energía y flujo radial de energía), aunque a mucha menor intensidad luego de aumentar el parámetro de disipación, sería mejor posponer los trabajos mencionados hasta explorar las mejoras propuestas en subsec:4.2.3.

Apéndice

A. Origen de la grilla y métrica

En esta sección vamos a demostrar que el cambio de coordenadas (24) modifica la métrica con un término adicional en el shift.

En función de (24), podemos calcular la relación de $\{dt, dx, dy, dz\}$ con los nuevos diferenciales $\{d\hat{t}, d\hat{x}, d\hat{y}, d\hat{z}\}$:

$$\begin{aligned} dt &= d\hat{t} \\ dx &= d\hat{x} - \dot{\varphi}(\hat{t})r_2 \text{sen}(\varphi(\hat{t}))d\hat{t} \\ dy &= d\hat{y} + \dot{\varphi}(\hat{t})r_2 \text{cos}(\varphi(\hat{t}))d\hat{t} \\ dz &= d\hat{z} \end{aligned}$$

Usando estas relaciones podemos sustituir $\{dt, dx, dy, dz\}$ en (12) y obtenemos:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\beta^2 - \alpha^2) d\hat{t}^2 + 2\beta_i (d\hat{x}^i + \beta_o^i d\hat{t}) d\hat{t} + \gamma_{ij} (d\hat{x}^i + \beta_o^i d\hat{t}) (d\hat{x}^j + \beta_o^j d\hat{t}) \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) d\hat{t}^2 + 2\beta_i d\hat{x}^i d\hat{t} + 2\beta_i \beta_o^i d\hat{t} d\hat{t} + \gamma_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j + \gamma_{ij} d\hat{x}^i \beta_o^j d\hat{t} + \gamma_{ij} \beta_o^i d\hat{t} d\hat{x}^j + \gamma_{ij} \beta_o^i \beta_o^j d\hat{t} d\hat{t} \\ &= (\beta^2 - \alpha^2) d\hat{t}^2 + 2\beta_i d\hat{x}^i d\hat{t} + 2\beta_i \beta_o^i d\hat{t}^2 + \gamma_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j + 2\gamma_{ij} \beta_o^i d\hat{t} d\hat{x}^j + \beta_{jo} \beta_o^j d\hat{t}^2 \end{aligned}$$

Juntando los tres términos con $d\hat{t}^2$ y usando la definición de (25)

$$ds^2 = (\hat{\beta}^2 - \hat{\alpha}^2) d\hat{t}^2 + (2\beta_i d\hat{x}^i d\hat{t} + 2\beta_{oj} d\hat{t} d\hat{x}^j) + \gamma_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j$$

Por último, reescribiendo el segundo término con (25) para obtener:

$$ds^2 = (\hat{\beta}^2 - \hat{\alpha}^2) dt^2 + 2\hat{\beta}_i d\hat{x}^i dt + \hat{\gamma}_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j$$

Con esto último, podemos ver que la métrica se escribe de la misma forma que antes pero con un término β_o adicional en el shift (y siendo evaluada en las nuevas coordenadas).

B. Cálculos para obtener el campo magnético inicial

En esta sección se explicará detalladamente los pasos para obtener la ecuación (35), la cual define el campo magnético del dato inicial.

En primer lugar tenemos el potencial vector (30), debido a que el mismo tiene solo componente en ϕ y no depende de esa variable, el tensor $F_{\mu\nu}$ tiene solo 4 componentes no nulas (y con solo 2 valores se lo define, por su propiedad de antisimetría):

$$F_{ab}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{r}} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{\theta}} \\ 0 & -\frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{r}} & -\frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{\theta}} & 0 \end{pmatrix} \quad (44)$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{r}} &= \frac{3\mu \sin^2(\hat{\theta}) \left(\frac{m_2}{1 - \frac{2m_2}{\hat{r}}} + \hat{r} \log \left(1 - \frac{2m_2}{\hat{r}} \right) + m_2 \right)}{4M^3} \\ \frac{\partial \hat{A}_{\hat{\phi}}}{\partial \hat{\theta}} &= \frac{3\mu \sin(\hat{\theta}) \cos(\hat{\theta}) \left(\hat{r}^2 \log \left(1 - \frac{2m_2}{\hat{r}} \right) + 2m_2(m_2 + \hat{r}) \right)}{4m_2^3} \end{aligned}$$

Luego hay que transformar a la foliación Kerr-Schild, en el límite $a_2 = 0$ las coordenadas de Boyer-Lindquist son iguales a las de Schwarzschild. Sin embargo la transformación de coordenadas no es

trivial:

$$\Psi = \frac{\partial \hat{x}_{KS}}{\partial \hat{x}_{BL}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2m_2}{2m_2 - \hat{r}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Aun así, notemos que esta transformación no afecta al potencial vector (44) por lo cual

$$\Psi^T F_{ab}(\hat{r}, \hat{\theta}) \Psi = F_{ab}(\hat{r}, \hat{\theta})$$

Luego de demostrar que (44) ya se encuentra en la foliación Kerr-Schild hay que transformar las coordenadas de esféricas a cartesianas

$$F_{ab}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \Upsilon_{inv}^T F_{ab}(\hat{r}, \hat{\theta}) \Upsilon_{inv}$$

Donde Υ_{inv} es la matriz inversa de

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin(\hat{\theta}) \cos(\hat{\phi}) & \hat{r} \cos(\hat{\theta}) \cos(\hat{\phi}) & -\hat{r} \sin(\hat{\theta}) \sin(\hat{\phi}) \\ 0 & \sin(\hat{\theta}) \sin(\hat{\phi}) & \hat{r} \cos(\hat{\theta}) \sin(\hat{\phi}) & \hat{r} \sin(\hat{\theta}) \cos(\hat{\phi}) \\ 0 & \cos(\hat{\theta}) & -\hat{r} \sin(\hat{\theta}) & 0 \end{pmatrix}$$

y reemplazando las coordenadas esféricas por

$$\sin(\hat{\phi}) \rightarrow \frac{\hat{y}}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}, \cos(\hat{\phi}) \rightarrow \frac{\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}, \sin(\hat{\theta}) \rightarrow \frac{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2}}{\hat{r}}, \cos(\hat{\theta}) \rightarrow \frac{\hat{z}}{\hat{r}}, \hat{r} \rightarrow \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}$$

De está forma obtenemos \hat{F}_{ab} en coordenadas cartesianas y luego se aplica (31), así obteniendo \hat{F}_{ab}^{boost} . Por último usando (34), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \hat{B}_{\hat{x}} &= \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} (F_{\hat{y}\hat{z}}^{boost} - F_{\hat{z}\hat{y}}^{boost}) \\ \hat{B}_{\hat{y}} &= \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} (F_{\hat{z}\hat{x}}^{boost} - F_{\hat{x}\hat{z}}^{boost}) \\ \hat{B}_{\hat{z}} &= \frac{1}{2\sqrt{\hbar}} (F_{\hat{x}\hat{y}}^{boost} - F_{\hat{y}\hat{x}}^{boost}) \end{aligned}$$

C. Cálculos para obtener el 4-momento

En esta sección se explicará paso a paso cómo se obtuvo la ecuación del 4-momento (42).

Reemplazando en (37) con las ecuaciones (41) (bajando el índice) y (39) se obtiene:

$$\begin{aligned} p^a &= \left\{ -(\hat{E}^2 + \hat{B}^2) \left[\frac{1}{2} g^{ab} + \hat{n}^a \hat{n}^a \right] + \hat{E}^a \hat{E}^b + \hat{B}^a \hat{B}^b - 2\hat{n}^a \hat{S}^b \right\} (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) \\ &= -(\hat{E}^2 + \hat{B}^2) \left[\frac{1}{2} g^{ab} (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) + \hat{n}^a \hat{n}^b (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) \right] \\ &\quad + (\hat{E}^a \hat{E}^a (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) + \hat{B}^a \hat{B}^b (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b)) \\ &\quad - \hat{n}^a \hat{S}^b (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) + \hat{n}^b \hat{S}^a (\hat{\alpha} \hat{n}_b + \Omega \varphi_b + \hat{\beta}_b) \\ &= -(\hat{E}^2 + \hat{B}^2) \left[\frac{1}{2} (\hat{\alpha} \hat{n}^a + \Omega \varphi^a + \hat{\beta}^a) + \hat{n}^a (\hat{\alpha} \hat{n}^b \hat{n}_b + \Omega \hat{n}^b \varphi_b + \hat{n}^b \hat{\beta}_b) \right] \\ &\quad + (\hat{E}^a (\hat{\alpha} \hat{E}^b \hat{n}_b + \Omega \hat{E}^b \varphi_b + \hat{E}^b \hat{\beta}_b) + \hat{B}^a (\hat{\alpha} \hat{B}^b \hat{n}_b + \Omega \hat{B}^b \hat{\beta}_b + \hat{B}^b \hat{\beta}_b)) \\ &\quad - \hat{n}^a (\hat{\alpha} \hat{S}^b \hat{n}_b + \Omega \hat{S}^b \varphi_b + \hat{S}^b \hat{\beta}_b) - \hat{S}^a (\hat{\alpha} \hat{n}^b \hat{n}_b + \Omega \hat{n}^b \varphi_b + \hat{n}^b \hat{\beta}_b) \end{aligned}$$

Varias de las contracciones que se encuentran entre paréntesis son nulas. Tanto $\hat{n}^b \hat{\beta}_b$ y $\hat{n}^b \varphi_b$ se anulan porque \hat{n}_a tiene solo componente temporal, esto también implica que $E^b \hat{n}_b$, $\hat{B}^b \hat{n}_b$ y $\hat{S}^b \hat{n}_b$

se anulen. Por otro, lado contracción de $\hat{n}^b \hat{n}_b$ da igual a -1 por normalización. Para los términos de la forma $\hat{B}^b \hat{\beta}_b$, podemos reemplazarlos por un producto escalar 3 dimensional $\hat{B}^b \hat{\beta}_b \rightarrow \hat{B} \cdot \hat{\beta}$ (lo mismo para las contracciones con \hat{E}^b y las contracciones de φ_b con \hat{E}^b y \hat{B}^b):

$$\begin{aligned}
p^a &= - \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\hat{\alpha} \hat{n}^a + \Omega \varphi^a + \hat{\beta}^a \right) - \hat{n}^a \hat{\alpha} \right] \\
&\quad + \left(\hat{E}^a \left(\Omega \hat{E}^b \varphi_b + \hat{E}^b \hat{\beta}_b \right) + \hat{B}^a \left(\Omega \hat{B}^b \varphi_b + \hat{B}^b \hat{\beta}_b \right) \right) \\
&\quad - \hat{n}^a \left(\Omega \hat{S}^b \varphi_b + \hat{S}^b \hat{\beta}_b \right) - \hat{S}^a \left(\hat{\alpha} \hat{n}^b \hat{n}_b \right) \\
p^{\hat{a}} &= - \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\hat{\alpha} \hat{n}^a + \Omega \varphi^a + \hat{\beta}^a \right) - \hat{n}^a \hat{\alpha} \right] \\
&\quad + \left(\hat{E}^a \left(\hat{E} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right) + \hat{B}^a \left(\hat{B} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right) \right) \\
&\quad - \hat{n}^a \left(\hat{S} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right) + \hat{S}^a \hat{\alpha}
\end{aligned} \tag{45}$$

Reacomodando los términos en La última igualdad de (45) obtenemos:

$$\begin{aligned}
p^a &= \left[\frac{1}{2} \hat{\alpha} \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) - \hat{S} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right] \hat{n}^a - \frac{1}{2} \left(\hat{E}^2 + \hat{B}^2 \right) \left(\hat{\beta}^a + \Omega \varphi^a \right) \\
&\quad + \left[\hat{E}^a \left(\hat{E} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right) + \hat{B}^a \left(\hat{B} \cdot \left(\hat{\beta} + \Omega \varphi \right) \right) \right] + \hat{\alpha} \hat{S}^a
\end{aligned} \tag{46}$$

Referencias

- [1] Luis Lehner, Oscar Reula, and Manuel Tiglio. Multi-block simulations in general relativity: high-order discretizations, numerical stability and *applications*. *Classical and Quantum Gravity*, 22(24):5283, 2005.
- [2] F. Carrasco, M. Shibata, O. Reula. "Magnetospheres of black hole-neutron star binaries". *Physical Review D*, 104(6):063004, 2021.
- [3] R. Kerr, A. Schild. "Republication of: A new class of vacuum solutions of the Einstein field equations (Reprinted)". *General Relativity and Gravitation*. 41. 2485-2499. 10.1007/s10714-009-0857-z, 2009.
- [4] F. Lopez Armengol, L. Combi, M. Campanelli, S. Noble, J. Krolik, D. Bowen, $\mathcal{H} = \frac{Mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} M$. Avara, V. Mewes, H. Nakano. "Circumbinary disk accretion into spinning black hole binaries". *The Astrophysical Journal*, 913(1):16, 2021.
- [5] Benjamin P Abbott et al. Gw170817: observation of gravitational waves from a binary neutron star inspiral. *Physical Review Letters*, 119(16):161101, 2017.
- [6] Benjamin P Abbott et al. Multi-messenger observations of a binary neutron star merger. *Astrophys. J. Lett*, 848(2):L12, 2017.
- [7] Eric Burns, Aaron Tohuvavohu, James Buckley, Tito Dal Canton, S Brad Cenko, John W Conklin, Filippo D'ammando, David Eichler, Chris Fryer, Alexander J van der Horst, et al. A summary of multimessenger science with neutron star mergers. arXiv preprint arXiv:1903.03582, 2019.
- [8] William E East, Luis Lehner, Steven L Liebling, and Carlos Palenzuela. Multimessenger signals from black hole-neutron star mergers without significant tidal disruption. *The Astrophysical Journal Letters*, 912(1):L18, 2021.
- [9] Elias R Most and Alexander A Philippov. Electromagnetic precursor flares from the late inspiral of neutron star binaries. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 515(2):2710–2724, 07 2022.

- [10] Vasileios Paschalidis, Zachariah B Etienne, and Stuart L Shapiro. General-relativistic simulations of binary black hole-neutron stars: precursor electromagnetic signals. *Physical Review D*, 88(2):021504, 2013.
- [11] Carlos Palenzuela, Luis Lehner, Marcelo Ponce, Steven L Liebling, Matthew Anderson, David Neilsen, and Patrick Motl. Electromagnetic and gravitational outputs from binary-neutron-star coalescence. *Physical review letters*, 111(6):061105, 2013.
- [12] Peter Goldreich and Donald Lynden-Bell. Io, a jovian unipolar inductor. *The Astrophysical Journal*, 156:59–78, 1969.
- [13] R. D. Blandford and R. L. Znajek. Electromagnetic extraction of energy from kerr black holes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 179(3):433–456, 1977.
- [14] LD Landau and EM Lifshitz. *The classical theory of fields* pergamon press. Neew York, 1975.
- [15] Kunihito Ioka and Keisuke Taniguchi. Gravitational waves from inspiraling compact binaries with magnetic dipole moments. *The Astrophysical Journal*, 537(1):327, 2000.
- [16] Dong Lai. Dc circuit powered by orbital motion: magnetic interactions in compact object binaries and exo- planetary systems. *The Astrophysical Journal Letters*, 757(1):L3, 2012.
- [17] Brad MS Hansen and Maxim Lyutikov. Radio and x-ray signatures of merging neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 322(4):695–701, 2001.
- [18] Maxim Lyutikov. Electromagnetic power of merging and collapsing compact objects. *Physical Review D*, 83(12):124035, 2011.
- [19] Anthony L Piro. Magnetic interactions in coalescing neu- tron star binaries. *The Astrophysical Journal*, 755(1):80, 2012.
- [20] Kip S Thorne, Richard H Price, and Douglas A Macdonald. *The membrane paradigm*. Yale University Press, New Haven, 19:84–20, 1986.
- [21] Sean T McWilliams and Janna Levin. Electromagnetic extraction of energy from black-hole–neutron-star binaries. *The Astrophysical Journal*, 742(2):90, 2011.
- [22] Daniel J D’Orazio and Janna Levin. Big black hole, little neutron star: Magnetic dipole fields in the rindler spacetime. *Physical Review D*, 88(6):064059, 2013.
- [23] A. Gruzinov. *ArXiv Astrophysics e-prints*, 1999.
- [24] Tomoki Wada, Masaru Shibata, and Kunihito Ioka. Analytic properties of the electromagnetic field of binary compact stars and electromagnetic precursors to gravita- tional waves. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2020(10):103E01, 2020.
- [25] Samuel E. Gralla, Ted Jacobson, Spacetime approach to force-free magnetospheres, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 515(3):2500–2534, 2014.
- [26] SS Komissarov. Electrodynamics of black hole magnetospheres. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350(2):427–448, 2004.
- [27] Federico Carrasco and Oscar Reula. Novel scheme for simulating the force-free equations: Boundary conditions and the evolution of solutions towards stationarity. *Physical Review D*, 96:063006, 2017.
- [28] F Carrasco, J Pelle, O Reula, D Viganò, and C Palenzuela. "Relativistic force-free models of the thermal X-ray emission in millisecond pùlsars observed by NICER". *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 520, no.2 2023: 3151–3163.
- [29] Will Lockhart, Samuel E Gralla, Feryal Özel, and Dimitrios Psaltis. X-ray light curves from realistic polar cap models: inclined pùlsar magnetospheres and multipole fields. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 490(2):1774–1783, 2019.

- [30] Xue-Ning Bai and Anatoly Spitkovsky. Modeling of gamma-ray pulsar light curves using the force-free magnetic field. *The Astrophysical Journal*, 715(2):1282, 2010.
- [31] Alexander A Philippov and Anatoly Spitkovsky. Ab-initio pulsar magnetosphere: particle acceleration in oblique rotators and high-energy emission modeling. *The Astrophysical Journal*, 855(2):94, 2018.
- [32] Chen, A. & Beloborodov, A. Electrodynamics of Axisymmetric pulsar Magnetosphere with Electron-Positron Discharge: A Numerical Experiment. *ApJ*, 795, 22, 2014.
- [33] Alexander Philippov, Dmitri A Uzdensky, Anatoly Spitkovsky, and Benoît Cerutti. pulsar radio emission mechanism: Radio nanoshots as a low-frequency after-glow of relativistic magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal Letters*, 876(1):L6, 2019.
- [34] Constantinos Kalapotharakos, Gabriele Brambilla, Andrey Timokhin, Alice K Harding, and Demosthenes Kazanas. Three-dimensional kinetic pulsar magnetosphere models: connecting to gamma-ray observations. *The Astrophysical Journal*, 857(1):44, 2018.
- [35] Carroll, Sean. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Benjamin Cummings, 2003.
- [36] Kunihito Ioka and Keisuke Taniguchi. Gravitational waves from inspiraling compact binaries with magnetic dipole moments. *The Astrophysical Journal*, 537(1):327, 2000.
- [37] Ramiro Cayuso, Federico Carrasco, Barbara Sbarato, and Oscar Reula. Astrophysical jets from boosted compact objects. *Phys. Rev. D*, 100:063009, Sep 2019.
- [38] Federico Carrasco, Daniele Viganò, Carlos Palenzuela, and Jose A Pons. Triggering magnetar outbursts in 3d force-free simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 484(1):L124–L129, 2019.
- [39] Federico Carrasco and Masaru Shibata. Magnetosphere of an orbiting neutron star. *Physical Review D*, 101(6):063017, 2020.
- [40] I Wasserman and S L Shapiro. Masses, radii, and magnetic fields of pulsating x-ray sources-is the 'standard' model self-consistent. *The Astrophysical Journal*, 265:1036–1046, 1983.
- [41] Friedman, J, Uryū, K, Shibata, M. "Thermodynamics of binary black holes and neutron stars". *Physical review D: Particles and fields* 2001; 65.
- [42] Ronchi et al. The "Cubed Sphere": A New Method for the Solution of Partial Differential Equations in Spherical Geometry, 1996.
- [43] Joaquin Pelle, Oscar Reula, Federico Carrasco, and Carlos Bederian. Skylight: a new code for general-relativistic ray-tracing and radiative transfer in arbitrary space-times. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 515(1):1316–1327, 2022.
- [44] M Coleman Miller, Frederick K Lamb, and Gregory B Cook. Effects of rapid stellar rotation on equation-of-state constraints derived from quasi-periodic brightness oscillations. *The Astrophysical Journal*, 509(2):793, 1998.
- [45] Timothy M Braje, Roger W Romani, and Kevin P Rauch. Light curves of rapidly rotating neutron stars. *The Astrophysical Journal*, 531(1):447, 2000.
- [46] Ericourgoulhon. 3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity. arXiv:gr-qc/0703035, 2007.
- [47] Alexandre Le Tiec, et al. "First law of binary black hole mechanics in general relativity and post-Newtonian theory". *Physical Review D* 85. 6, 2012.
- [48] Tagoshi, H., Ohashi, A., & Owen, B. J. 2001, *PhRvD*, 63, 044006.

- [49] Childs, H., Brugger, E., Whitlock, B., Meredith, J., Ahern, S., Pugmire, D., Biagas, K., Miller, M. C., Harrison, C., Weber, G. H., Krishnan, H., Fogal, T., Sanderson, A., Garth, C., Bethel, E. W., Camp, D., Rubel, O., Durant, M., Favre, J. M., & Navratil, P. (2012). VisIt: An End-User Tool For Visualizing and Analyzing Very Large Data. <https://doi.org/10.1201/b12985>
- [50] Masaru Shibata. Numerical Relativity, volume 1. World Scientific, 2016.
- [51] Federico Carrasco and Oscar Reula. Covariant hyperbolization of force-free electrodynamics. *Physical Review D*, 93(8):085013, 2016.
- [52] Anatoly Spitkovsky. "Time-dependent Force-free Pulsar Magnetospheres: Axisymmetric and Oblique Rotators". *The Astrophysical Journal* 2006; 648(1):L51–L54.
- [53] Carlos Palenzuela, Travis Garrett, Luis Lehner, and Steven L Liebling. Magnetospheres of black hole systems in force-free plasma. *Physical Review D*, 82(4):044045, 2010.
- [54] Daniela Alic, Philipp Moesta, Luciano Rezzolla, Olindo Zanotti, and José Luis Jaramillo. Accurate simulations of binary black hole mergers in force-free electrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 754(1):36, 2012.
- [55] Mark H. Carpenter, David Gottlieb, Saul Abarbanel. "Time-Stable Boundary Conditions for Finite-Difference Schemes Solving Hyperbolic Systems: Methodology and Application to High-Order Compact Schemes". *Journal of Computational Physics* 1994; 111(2):220-236.
- [56] Mark H Carpenter, Jan Nordström, and David Gottlieb. A stable and conservative interface treatment of arbitrary spatial accuracy. *Journal of Computational Physics*, 148(2):341–365, 1999.
- [57] Jan Nordström and Mark H Carpenter. High-order finite difference methods, multidimensional linear problems, and curvilinear coordinates. *Journal of Computational Physics*, 173(1):149–174, 2001.
- [58] Federico Carrasco, Carlos Palenzuela, and Oscar Reula. pulsar magnetospheres in general relativity. *Physical Review D*, 98:023010, 2018.
- [59] Peter Goldreich and William H Julian. pulsar electrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 157:869, 1969.