UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática

Estudios sobre posets asociativos

Joel Kuperman

Director: Dr. Pedro Sánchez Terraf

Resumen

Dado un poset P, es posible definir sobre él una operación binaria que caracterice el orden. El problema de decidir si es posible hacerlo de manera que dicha operación resulte asociativa no es trivial. Un *poset asociativo* es un poset que admite una operación asociativa que caracteriza al orden. Un álgebra con una operación de este tipo, se denomina *posemigrupo*. En este trabajo estudiaremos los posets asociativos con el fin de obtener resultados que nos permitan acercarnos a una caracterización de los mismos. Comenzaremos estableciendo algunos resultados elementales sobre posets asociativos, los cuales serán necesarios para el desarrollo de este trabajo. Posteriormente analizaremos la equivalencia entre la asociatividad de los árboles de ramas finitas y el Axioma de Elección, para luego mostrar que usando este último, podemos probar que posets pertenecientes a clases más generales son asociativos. Luego analizaremos la descomposición en producto directo de posemigrupos con un elemento central, y estableceremos una equivalencia entre las descomposiciones en producto directo de un posemigrupo y sus pares de congruencias factor complementarias. Finalmente, estudiaremos la relación entre la categoría de los posemigrupos y distintas categorías de posets asociativos, con el objetivo de determinar la existencia de un adjunto a izquierda para el funtor olvidadizo entre la categoría de los posemigrupos y cada una de dichas categorías de posets asociativos.

Abstract

Given any poset P, one can define a binary operation on it in a way it characterizes the order. The problem of deciding if it is possible to do so in a way that this operation turns out to be associative is not trivial. An *associative poset* is a poset which admits an associative operation which caraterizes the order. A *posemigroup* is an algebra with such an operation. In this work we will study associative posets, aiming to obtain results which allow us to characterize them. We begin by establishing some elementary results about associative posets which will be necessary throughout this work. Following that, we will analyze the equivalence between the associativity of trees with finite branches and the Axiom of Choice, afterwards proving that the latter implies that posets belonging to more general classes are associative. Then we will study direct product decomposition of posemigroups with a commuting element and establish the equivalence between direct product decompositions of a posemigroup and its pairs of factor complementary congruences. Finally, we will study the link between the category of posemigroups and different categories of associative posets, attempting to determine the existence of a left adjoint for the forgetful functor between the category of posemigroups and said categories of associative posets.

Índice general

Introducción

A lo largo de la historia, y especialmente en nuestro país, las estructuras algebraicas ordenadas han sido un tema de estudio de alta relevancia dentro del álgebra universal y de la matemática en general ([8, 9]). Consideremos, por ejemplo, el conjunto de subgrupos normales de un grupo G. En este conjunto la inclusión determina un orden parcial que surge de manera natural, el cual nos permite enunciar los teoremas de isomorfismo, de incuestionable importancia histórica dentro de la matemática. Esta estructura no solo es una estructura ordenada, sino que es también una estructura algebraica: podemos considerar las operaciones $\vee$ y $\wedge$ donde para todo par de subgrupos normales H y Z tenemos que $H \wedge Z = H \cap Z$ y $H \vee Z$ es el menor subgrupo normal de G que contiene a $H \cup Z$. Estas operaciones son *asociativas, conmutativas, idempotentes*, y además satisfacen las *leyes de absorción* $H \vee (H \wedge Z) = H$ y $H \wedge (H \vee Z) = H$.
De manera más general, llamamos *retículo* a una estructura algebraica $(L, \wedge, \vee)$ donde $\wedge$ y $\vee$ satisfacen las propiedades enunciadas previamente. No es difícil ver que cualquiera de las dos ecuaciones $a \vee b = b$ y $a \wedge b = a$ determinan un orden parcial (más aún, ambas determinan *el mismo* orden parcial), el cual satisface que *cualquier conjunto finito tiene ínfimo y supremo.* Una estructura ordenada $(L, \leq)$ que satisface esta condición se denomina *poset reticulado.* Un clásico y famoso resultado de Dedekind establece la equivalencia entre los posets reticulados $(L, \leq)$ y los retículos $(L, \wedge, \vee)$: si $(L, \leq)$ es un poset reticulado, y definimos $\vee$ y $\wedge$ como $a \vee b = \sup\{a, b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a, b\}$ entonces $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo; recíprocamente, si $(L, \wedge, \vee)$ es un retículo, podemos definir $\leq$ sobre L como $\leq := \{(a, b) : a \wedge b = a\}$. Con este orden parcial, $(L, \leq)$ es un poset reticulado.
Podemos pensar también en otras estructuras algebraicas con una operación que caracterice el orden, como por ejemplo los semirretículos superiores $(L, \vee)$ (donde la relación $x \leq y$ si y solo si $x \vee y = y$ es un orden parcial), o los semirretículos inferiores $(L, \wedge)$ (donde la relación $x \leq y$ si y solo si $x \wedge y = x$ es un orden parcial). La motivación detrás de este trabajo surge de los semirretículos inferiores.
A continuación definiremos las nociones de *pogrupoide, posemigrupo y poset asociativo.*

Definición 0.0.1. Diremos que el álgebra $(A, \cdot)$ es un *pogrupoide* si la ecuación $x \cdot y = x$ determina un orden parcial.

Para cualquier poset P es posible definir una estructura de pogrupoide compatible con su orden. Más aún, si P no es la anticadena de dos elementos, es posible hacerlo de manera que $\cdot$ resulte conmutativa. En cambio, al intentar definir $\cdot$ de manera que resulte asociativa, encontramos múltiples ejemplos donde esto no es posible.

Definición 0.0.2. Llamamos *poset asociativo* a un poset tal que existe una estructura de pogrupoide asociativa compatible son su orden.

El concepto de poset asociativo fue introducido por Pedro Sánchez Terraf.

Definición 0.0.3. Un pogrupoide asociativo se denomina *posemigrupo*.

La relación de estas estructuras con los semirretículos inferiores motivaron las siguientes preguntas; que surgieron en las investigaciones preliminares sobre el tema y fueron respondidas utilizando las técnicas desarrolladas en este trabajo.

Pregunta 0.0.4. Dado un poset asociativo P, ¿Admite P alguna estructura de posemigrupo $\cdot$ tal que $a \cdot b = a \wedge b$ para todos $a, b \in P$ tales que su ínfimo existe?

Pregunta 0.0.5. Dado un poset asociativo P y dos elementos $a, b \in P$ tal que existe su ínfimo, ¿Admite P alguna estructura de posemigrupo $\cdot$ tal que $a \cdot b = a \wedge b$?

La respuesta a la segunda pregunta es negativa (y por ende, también la respuesta a la primera), como muestra el ejemplo en Figura 1.

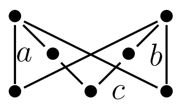


Figura 1: El perro.

Este poset admite una única estructura de posemigrupo la cual cumple $a \cdot b = b \neq c = a \wedge b$.

Definición 0.0.6. Un *semirretículo inferior relativo* es un poset P donde para todo $x \in P$, $x{\downarrow} := \{y \in P : y \leq x\}$ es un semirretículo inferior.

Los semirretículos inferiores relativos son "prácticamente" semirretículos inferiores. El concepto fue tomado de [12] y estos han sido utilizados de ejemplo en [10].

Pregunta 0.0.7. Dado un semirretículo inferior relativo asociativo, ¿Admite P una operación de posemigrupo $\cdot$ tal que $a \cdot b = a \wedge b$ para todos $a, b \in P$ tales que existe $x \in P$ con $a, b \leq x$?

Nuevamente, la respuesta es negativa. Para ver esto consideremos el ejemplo en Figura 2.

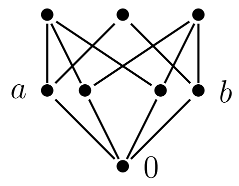


Figura 2: El tulipán.

Este poset admite una única estructura de posemigrupo la cual cumple $a \cdot b = b \neq 0 = a \wedge b$.
Las pruebas de estas afirmaciones se encuentran en un apéndice al final de este trabajo.
Podemos, también, preguntarnos lo siguiente:

Pregunta 0.0.8. ¿Existe algún semirretículo inferior relativo no asociativo?

La respuesta está dada por el Ejemplo 1.3.18, el cual fue el primer ejemplo de poset no asociativo que tuvimos.
El objetivo de este trabajo es acercarnos a una caracterización de los posets asociativos.
En el Capítulo I, estableceremos preliminares necesarios para el desarrollo de los contenidos del trabajo, junto con algunos resultados elementales acerca de posets asociativos y posemigrupos que exhibirán la dificultad de determinar si un poset es asociativo o no. Presentaremos también otros ejemplos de posets no asociativos.
En el Capítulo II, mostraremos que usando el axioma de elección, podemos probar que ciertos árboles son asociativos. Más aún, mostraremos que esta afirmación es equivalente bajo ZF al axioma de elección. Posteriormente enunciaremos un resultado que nos permitirá probar que los posets pertenecientes a clases más generales, que incluyen a los árboles previamente mencionados, son asociativos.
En el capítulo III, analizaremos la descomposición en producto directo de posemigrupos con un elemento central, es decir, un elemento que conmuta con cualquier elemento. Definiremos la noción de descomposición de un posemigrupo en producto directo de dos de sus subposemigrupos, y también estableceremos una equivalencia entre las distintas descomposiciones en producto directo de un posemigrupo y sus pares de congruencias factor complementarias.
En el capítulo IV, consideraremos las categoría **PS** de posemigrupos y definiremos distintas categorías $\mathbf{AP}_i$ de posets asociativos. Como no tenemos de antemano una noción apropiada de morfismo de posets asociativos, consideraremos distintas nociones de morfismo, las cuales determinan distintas categorías. Una vez resuelto el problema de hallar una noción apropiada de morfismo, procederemos a analizar la existencia de un adjunto a izquierda para el funtor olvidadizo $U : \mathbf{PS} \to \mathbf{AP}_i$ para las distintas categorías $\mathbf{AP}_i$ que consideramos.

Capítulo 1

Preliminares acerca de posets asociativos y posemigrupos

Introducimos a continuación algunas propiedades elementales de los posets asociativos y los posemigrupos, las cuales serán útiles más adelante para justificar varios de los razonamientos expuestos en este trabajo.

Definición 1.0.1. Dado un poset asociativo $(P, \leq)$, diremos que una estructura de posemigrupo $\cdot$ sobre P es *compatible con* $(P, \leq)$ o *admisible para* $(P, \leq)$ si y solo si $\leq = \{(x, y) \in P^2 : x \cdot y = x\}$. Dada una operación de posemigrupo $*$ compatible con P, denotaremos por $(P, *)$ al posemigrupo con universo P y operación $*$.
Recíprocamente, dado un posemigrupo $(P, \cdot)$, diremos que el orden parcial $\leq := \{(x, y) : x \cdot y = x\}$ es el *orden subyacente* a este posemigrupo.

Observación 1.0.2. Cuando estemos hablando de un poset asociativo y usemos la notación $\cdot$, a menos que se especifique, esta hará referencia a *cualquier* operación de posemigrupo compatible con este poset. Recíprocamente, cuando estemos hablando de un posemigrupo y usemos la notación $\leq$, nos referimos al poset asociativo subyacente a dicho posemigrupo.

1.1 Propiedades generales de los posets asociativos y los posemigrupos

Lema 1.1.1. *Todo poset A con al menos* 3 *elementos admite una estructura de pogrupoide conmutativa.*

Prueba. Sea $x \cdot y := \min\{x, y\}$ si x, y son comparables, y $x \cdot y = y \cdot x$ algún elemento de $A \setminus \{x, y\}$ en caso contrario. Luego $x \cdot y = x$ si y solo si $x = \min\{x, y\}$, i.e. $x \leq y$. $\square$

Notar que una anticadena (i.e. un poset donde los elementos son incomparables dos a dos) de dos elementos no admite una estructura de pogrupoide conmutativa. La cadena de dos elementos admite una estructura de pogrupoide conmutativa y asociativa simultáneamente.

El siguiente lema establece algunas igualdades y desigualdades que valen en todo posemigrupo.

Lema 1.1.2. *En todo posemigrupo*

1. $a \cdot b \leq b$; *en particular, si* b *es minimal,* $a \cdot b = b$.

2. $a \cdot b \cdot a = b \cdot a$.

3. $a \leq b \implies b \cdot a = a$.

Demostración.

1. $(a \cdot b) \cdot b = a \cdot (b \cdot b) = a \cdot b$.

2. Del ítem 1 sabemos que $a \cdot (b \cdot a) \leq b \cdot a$ y $b \cdot a = b \cdot (a \cdot b \cdot a) \leq a \cdot b \cdot a$. Por antisimetría obtenemos $a \cdot b \cdot a = b \cdot a$.

3. $a = a \cdot a = (a \cdot b) \cdot a = b \cdot a$, por el ítem 2. □

Observación 1.1.3. A lo largo de este trabajo definiremos múltiples estructuras de posemigrupo. Por el ítem 3, tenemos que la condición $x \cdot y = \min\{x, y\}$, cuando x e y son comparables, es necesaria para que la operación definida sea de posemigrupo. Por otro lado, esta condición es suficiente para que la operación sea de pogrupoide, por lo que nunca será necesario verificar que las operaciones definidas sean de pogrupoide. Por este motivo, cuando definamos una estructura de posemigrupo, solamente verificaremos que esta sea asociativa.

1.1.1 La variedad de los posemigrupos

El ítem 3 del lema anterior nos permite probar que los posemigrupos constituyen una variedad.

Definición 1.1.4. Una *variedad* es una clase de estructuras algebraicas de un tipo L axiomatizable por sentencias de la forma $\forall \bar{x} : t_1(\bar{x}) = t_2(\bar{x})$ donde t_1 y t_2 son términos de tipo L.

Consideremos la variedad de las *bandas regulares a derecha* definida por:

Definición 1.1.5. Un álgebra $(A, \cdot)$ se dice una *banda regular a derecha* si:

- $\forall x, y, z \in A : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

- $\forall x \in A : x \cdot x = x$.

- $\forall x, y \in A : x \cdot y \cdot x = y \cdot x$.

Definición 1.1.6. Dada una familia de estructuras algebraicas $\{\mathbf{A}_i = (A_i, \cdot_i) : i \in I\}$, se define el producto $\prod_{i \in I} \mathbf{A}_i$ como el álgebra cuyo universo es $\prod_{i \in I} A_i$ con una operación $\cdot$ dada por $(a \cdot b)_i = a_i \cdot_i b_i$. Es decir, se define la operación *coordenada a coordenada*.

Enunciamos sin prueba el siguiente teorema. La prueba del mismo puede ser hallada en [3].

Teorema 1.1.7 (HSP de Birkhoff)**.** *Una clase de estructuras algebraicas de un tipo L es una variedad si y solo si es cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.*

Notemos que la Definición 0.0.3 puede escribirse como:

Definición 1.1.8. Un posemigrupo es un álgebra $(A, \cdot)$ tal que:

- $\forall x, y, z \in A$: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- $\forall x \in A$: $x \cdot x = x$.
- $\forall x, y \in A$: $(x \cdot y = x) \wedge (y \cdot x = y) \Longrightarrow x = y$.

Observación 1.1.9. El hecho de que la ecuación $x \cdot y = x$ determine un orden parcial sobre A (i.e. que el álgebra $(A, \cdot)$ sea un pogrupoide) se corresponde con que el álgebra satisfaga las dos últimas sentencias de la definición anterior junto con la sentencia $\forall x, y, z \in A$: $(x \cdot y = x) \wedge (y \cdot z = y) \Longrightarrow x \cdot z = x$. En el caso de los posemigrupos, no incluimos esta última sentencia en la definición pues su validez es una consecuencia directa de la asociatividad: $(x \cdot y = x) \wedge (y \cdot z = y) \implies x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = x$.

A continuación, mostramos que un álgebra $(A, \cdot)$ es un posemigrupo si y solo si es una banda regular a derecha. Esto nos dice que los posemigrupos constituyen una variedad.

Lema 1.1.10. *Un álgebra $(A, \cdot)$ es un posemigrupo si y solo si es una banda regular a derecha. Por lo tanto los posemigrupos constituyen una variedad.*

Demostración. El Lema 1.1.2 nos da una de las implicaciones: los dos primeros ítems en la definición de banda regular a derecha valen por definición de posemigrupo mientras que el último vale por el Lema 1.1.2(2). Para la otra implicación, veamos que una banda regular a derecha también satisface $\forall x, y \in A$: $(x \cdot y = x) \wedge (y \cdot x = y) \Longrightarrow x = y$ y por lo tanto es un posemigrupo. Sean $x, y \in A$ tales que $(x \cdot y = x) \wedge (y \cdot x = y)$. Luego tenemos que $x = x \cdot y = y \cdot x \cdot y = (y \cdot x) \cdot y = y \cdot y = y$. □

Esto nos da el siguiente corolario:

Corolario 1.1.11. *La clase de posemigrupos es cerrada por imágenes homomórficas, subálgebras y productos directos.*

Observación 1.1.12. Recordemos que, como la operación en un producto de posemigrupos se define coordenada a coordenada, tendremos que lo mismo vale para el orden del poset asociativo subyacente a un producto de posemigrupos. Es decir, si $\{(P_i, \cdot_i) : i \in I\}$ es una familia de posemigrupos, tendremos que para cualesquiera $x, y \in (\prod_{i \in I} P_i, \leq)$, $x \leq y$ si y solo si $x_i \leq_i y_i$ para todo $i \in I$, donde x_i denota la proyección de x sobre P_i y $\leq_i$ es el orden subyacente al posemigrupo $\prod_{i \in I}(P_i, \cdot_i)$.

1.1.2 Más resultados

Lema 1.1.13. *En todo posemigrupo,*

1. $a \leq b$ *implica* $a \cdot x \leq b \cdot x$.

2. $x \cdot a > x \cdot b$ *implica* $a \not\leq b$.

3. *Si* b *es incompatible con* z*, entonces* $a \cdot b$ *también lo es.*

4. $c \leq x, y$ *implica* $c \leq x \cdot y, y \cdot x$*. Luego si* $x \cdot y = y \cdot x$*, este debe ser el ínfimo de* $\{x, y\}$.

5. $x \cdot y \leq x$ *implica* $x \cdot y = y \cdot x = x \wedge y$.

6. $c \leq x, a$ *y* $c \not\leq z$ *implican* $a \cdot x \not\leq z$.

Demostración.
1. Usando el Lema 1.1.2(2), $(a \cdot x) \cdot (b \cdot x) = a \cdot (x \cdot b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x = a \cdot x$.

2. Tenemos que $a \geq x \cdot a > x \cdot b$ y luego $x \cdot b = x \cdot b \cdot a$. Si $a \leq b$ tendríamos que $x \cdot a = x \cdot b \cdot a = x \cdot b$, una contradicción.

3. Supongamos que existe $y \leq a \cdot b, z$. Por el Lema 1.1.2(1), $y \leq b$ por lo que b y z resultan compatibles, contradicción.

4. $c = c \cdot x = (c \cdot y) \cdot x = c \cdot (y \cdot x)$. Luego $c \leq y \cdot x$. Simétricamente, $c \leq x \cdot y$.

5. Por el Lema 1.1.2(1) $x \cdot y \leq y$; luego por el ítem anterior tenemos que $x \cdot y \leq y \cdot x$. Por lo tanto $x \cdot y = x \cdot (y \cdot y) \cdot x = x \cdot y \cdot x = y \cdot x$ por el Lema 1.1.2(2). Lo anterior implica $x \cdot y = x \wedge y$.

6. $c \leq a \cdot x$. Si $a \cdot x \leq z$ entonces $c \leq z$, contradicción. □

Observación 1.1.14. Notemos que el ítem 4 nos dice que un posemigrupo conmutativo es en realidad un semirretículo inferior. Esto es esperable pues un posemigrupo conmutativo satisface todos los axiomas de semirretículo inferior.

Lema 1.1.15. *Son equivalentes:*

1. $a \leq x \cdot b$ *y* $a \cdot x \leq b$.

2. $a \leq x$ *y* $a \leq b$.

Prueba. (1⇒2) De $a \leq x \cdot b$, $a = a \cdot (x \cdot b) = (a \cdot x) \cdot b = a \cdot x$, luego $a \leq x$. De $a = a \cdot x \leq b$ se sigue que $a \leq b$.

(2⇒1) La primera desigualdad se obtiene del Lema 1.1.13(4) y $a \cdot x = a \leq b$ asegura la segunda desigualdad. □

1.2 Subconjuntos decrecientes y absorción

En esta sección establecemos la noción de absorción y algunos resultados relacionados. Probamos también que todo subconjunto decreciente de un poset asociativo es también asociativo.

Lema 1.2.1. *En todo posemigrupo A, el conjunto $\{x \in A : x \cdot a = b\}$ es un subuniverso convexo para todos $a, b \in A$.*

Demostración. Supongamos $x \cdot a = x' \cdot a = b$ y sea y tal que $x \leq y \leq x'$. Entonces

$$b = x \cdot a \leq y \cdot a \leq x' \cdot a = b,$$

luego $y \cdot a = b$. □

Lema 1.2.2. *Si A es un poset asociativo y $B \subseteq A$ es un subconjunto decreciente entonces B es asociativo.*

Demostración. Por el Lema 1.1.2(1) tenemos que B es subuniverso de cualquier estructura de posemigrupo admisible para A, en particular dada $\cdot$ una operación de posemigrupo sobre A, $\cdot|_B$ es una operación de posemigrupo sobre B. Luego B es asociativo. □

Definición 1.2.3. Sea A un posemigrupo, $b \in A$, e $Y \subseteq A$. Diremos que b *absorbe a* Y (por derecha), si $y \cdot b = b$ para todo $y \in Y$.

Lema 1.2.4. *Si b absorbe a Y, entonces para todos $a \in A$ e $y \in Y$, $y \leq b \cdot a \implies y = b \cdot a$. En otras palabras, no hay ningún elemento de Y estrictamente por debajo de $b \cdot A$.*

Demostración. Supongamos $y \leq b \cdot a$. Esto significa que $y = y \cdot b \cdot a = b \cdot a$, ya que b absorbe a y. □

Lema 1.2.5. *Si $a \cdot b \neq b \cdot a$, existen $a' \neq b'$ tal que $a' \cdot b' = b'$ y $b' \cdot a' = a'$.*

Prueba. Tomemos $a' := b \cdot a$ y $b' := a \cdot b$. Luego

$$a' \cdot b' = b \cdot (a \cdot a) \cdot b = b \cdot a \cdot b = b',$$

usando el Lema 1.1.2(2). Lo mismo vale, simétricamente, para $b' \cdot a'$. □

1.3 Ejemplos

1.3.1 El semi-reticulado infinito 2D

Es trivial verificar que la única operación de posemigrupo admisible para las cadenas es el ínfimo. El siguiente lema extiende esta observación

Lema 1.3.1. *Sean C_1 y C_2 cadenas tal que al menos una de ellas no tiene mínimo. Luego la única operación de posemigrupo admisible para el producto $C_1 \times C_2$ está dada por el ínfimo.*

Demostración. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que la cadena C_1 no tiene mínimo. Denotemos por $\leq^i$ al orden en C_i, y $\leq$ al orden del producto directo. Ahora supongamos, por contradicción, que hay $a, b \in C_1 \times C_2$ tales que $a \cdot b \neq a \wedge b$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $a \cdot b = b$ y $b \cdot a = a$, usando el Lema 1.2.5 y el hecho de que $a \cdot b = a \wedge b$ si y solo si $a \cdot b = b \cdot a$.

Supongamos que $c < a$ y $c \not\leq b$ para c fijo. Luego tenemos

$$(c \cdot b) \cdot a = c \cdot (b \cdot a) = c \cdot a = c.$$

Por lo tanto, deducimos que $c \cdot b < b$, $c \cdot b \neq c$, y $c \cdot b \not\leq a$. De esto último obtenemos $c \wedge b < c \cdot b$.

Nuevamente, sin pérdida de generalidad, podemos asumir $a = \langle a_1, a_2 \rangle$, $b = \langle b_1, b_2 \rangle$ con $a_1 <^1 b_1$ y $b_2 <^2 a_2$. Además, tomando $a_1' <^1 a_1$, $c := \langle a_1', a_2 \rangle$ y $s_1 \in C_1$, $s_2 \in C_2$ tal que $c \cdot b = \langle s_1, s_2 \rangle$. Tenemos que $c \wedge b = \langle a_1', b_2 \rangle$. Como $c < a$ y $c \not\leq b$, valen los cálculos del párrafo previo. De $c \cdot b < b$ y $c \cdot b \not\leq a$ tenemos

$$s_2 \leq^2 b_2 \qquad b_1 \geq^1 s_1 >^1 a_1, \tag{1.1}$$

lo que junto con $c \wedge b < c \cdot b$ implica $s_2 = b_2$. Concluimos que $c \cdot b \geq \langle a_1, b_2 \rangle = a \wedge b$, y por lo tanto

$$\langle a_1', a_2 \rangle = c = (c \cdot b) \cdot a \geq (a \wedge b) \cdot a = a \wedge b = \langle a_1, b_2 \rangle,$$

lo que contradice el hecho de que $a_1' <^1 a_1$. □

Las hipótesis sobre C_i son necesarias: el producto de dos cadenas de 2 elementos admite exactamente dos operaciones de posemigrupo.

Corolario 1.3.2. *La única estructura de posemigrupo admitida por el producto cartesiano de los números naturales con el orden inverso está dada por el ínfimo.* □

1.3.2 Uniones disjuntas de posets asociativos

Definición 1.3.3. Dados dos posets $\mathbf{P} = (P, \leq_P)$ y $\mathbf{Q} = (Q, \leq_Q)$, llamamos *unión disjunta de* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{Q}$ al poset $\mathbf{P} \sqcup \mathbf{Q} := (P \sqcup Q, \leq_P \sqcup \leq_Q)$. Es decir, es el poset cuyos elementos son los elementos de P y de Q donde no introducimos relaciones nuevas. Este concepto se generaliza para una cantidad arbitraria de posets.
Llamamos *suma ordenada de* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{Q}$ al poset $\mathbf{P} + \mathbf{Q} := (P \sqcup Q, \leq_P \sqcup \leq_Q \sqcup (P \times Q))$. Es decir, todo elemento de Q está por encima de todo elemento de P.

Cuando hablemos de alguno de estos dos conceptos, lo denotaremos por $P \sqcup Q$ o $P + Q$, dejando en claro que nos referimos a una unión disjunta o suma ordenada de posets y no de conjuntos.

Lema 1.3.4. *Sean P y Q dos posets asociativos. Entonces $P + Q$ es asociativo.*

Demostración. Definimos $\cdot$ de la siguiente manera:

$$x \cdot y = \begin{cases} \min\{x, y\} & x \text{ e } y \text{ comparables} \\ x \cdot_Q y & x, y \in Q \\ x \cdot_P y & x, y \in P \end{cases}$$

Este producto está bien definido pues en caso de que un par (x, y) esté en más de uno de los casos considerados, entonces la definición debe coincidir para ambos casos, por la Observación 1.1.3. Veamos que para todos $x, y, z \in P + Q$, tenemos que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$. Para esto consideramos 8 casos dependiendo de si cada elemento pertenece a P o a Q.

1. $x, y, z \in P : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot_P y \cdot_P z = x \cdot (y \cdot z)$.

2. $x, y \in P, z \in Q : (x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_P y) \cdot z = x \cdot_P y = x \cdot y = x \cdot (y \cdot z)$.

3. $x, z \in P,\ y \in Q : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot_P z = x \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

4. $x \in P,\ y, z \in Q : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot z = x = x \cdot (y \cdot_Q z) = x \cdot (y \cdot z)$.

5. $x \in Q,\ y, z \in P : (x \cdot y) \cdot z = y \cdot_P z = x \cdot (y \cdot z)$.

6. $x, z \in Q,\ y \in P : (x \cdot y) \cdot z = y \cdot z = y = x \cdot y = x \cdot (y \cdot z)$.

7. $x, y \in Q\ z \in P : (x \cdot y) \cdot z = z = x \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

8. $x, y, z \in Q : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot_Q y \cdot_Q z = x \cdot (y \cdot z)$.

□

Definición 1.3.5. Sean $(P, \leq_P)$ y $(Q, \leq_Q)$ dos posets. Una función $f : P \to Q$ se dice un *homomorfismo de posets* si para todos $x, y \in P$, $x \leq_P y \implies f(x) \leq_Q f(y)$. Un homomorfismo se dice un *isomorfismo* si es biyectivo y su inversa es un homomorfismo.

Enunciamos, sin prueba, la siguiente proposición:

Proposición 1.3.6. *Sea P un poset asociativo, $\cdot$ una operación de posemigrupo sobre P, y $f : P \to Q$ un isomorfismo, entonces $\tilde{\cdot}$ definida por $f(x) \tilde{\cdot} f(y) = f(x \cdot y)$ es una operación de posemigrupo sobre $f(P) = Q$ y por lo tanto Q es asociativo.*

Lema 1.3.7. *Sea P un poset asociativo, I un conjunto de índices y P_i una copia isomorfa de P para cada $i \in I$. Luego $\bigsqcup_{i\in I} P_i$ es asociativo.*

Demostración. Fijemos una operación de posemigrupo $\cdot$ sobre P e isomorfismos $f_i : P \to P_i$. Definamos $\cdot_i$ sobre P_i como $f_i(x) \cdot_i f_i(y) = f_i(x \cdot y)$. Definamos un orden de anticadena sobre I. Es decir, un orden parcial $\leq$ tal que $i \leq j$ si y solo si $i = j$. Notemos que con este orden parcial, I es un poset asociativo que admite una única operación de posemigrupo $*$ dada por $i*j = j$. Veamos ahora que $\bigsqcup_{i\in I} P_i$ es isomorfo al orden subyacente al producto $(P, \cdot)\times(I, *)$, el cual sabemos, por 1.1.11, que es un posemigrupo con una operación $\tilde{\cdot}$. Definamos un isomorfismo $f : P \times I \to \bigsqcup_{i\in I} P_i$ dado por $f(a, i) = f_i(a)$, donde $P \times I$ es el poset asociativo subyacente al posemigrupo $(P\times I, \tilde{\cdot})$. Recordemos, que para $(a, i), (b, j) \in P\times I$, $(a, i) \leq (b, j)$ si y solo si $a \leq b$ e $i = j$ por 1.1.12.
Veamos que f es homomorfismo: sean $a \leq b$ e $i \in I$, entonces $f(a, i) = f_i(a) \leq f_i(b) = f(b, i)$ y por lo tanto f es un homomorfismo. Además f es inyectivo, ya que $f(a, i) = f(b, j)$ si y solo si $f_i(a) = f_j(b)$ lo que implica $a = b$ e $i = j$; y sobreyectivo porque cualquier elemento de $\bigsqcup_{i\in I} P_i$ es de la forma $f_i(a)$ para algún $i \in I$ y $a \in P$ y por lo tanto es la imagen de (a, i) mediante f. La inversa de f también resulta un homomorfismo ya que $f_i(a) \leq f_j(b)$ si y solo si $i = j$ y $a \leq b$ lo que nos dice que $f^{-1}(f_i(a)) = (a, i) \leq (b, j) = f^{-1}(f_j(b))$. Por lo tanto f es un isomorfismo y así $\bigsqcup_{i\in I} P_i$ resulta asociativo. □

Lema 1.3.8. *Sea $\{Q_i : i \in I\}$ una familia de posets asociativos cualquiera y sea P un poset asociativo con máximo 1. Si definimos $R_i = P_i + Q_i$, donde P_i es una copia isomorfa de P, entonces $\bigsqcup_{i\in I} R_i$ es asociativo.*

Demostración. Fijemos isomorfismos $f_i : P \to P_i$ y $f_{i,j} : P_i \to P_j$ donde $f_{i,j} = f_j \circ f_i^{-1}$ (notar que $f_{i,j} \circ f_i = f_j$ para todos i, j). Para $x \in P$ e $i \in I$, llamaremos x_i a $f_i(x)$. También, para $x \in P_i$ y $j \in I$, llamaremos x_j a $f_{i,j}(x)$ (notar que, por como hemos definido $f_{i,j}$, no hay ambigüedad sobre que elemento de P_j está nombrando x_j). Tomemos, además, una operación de posemigrupo $\cdot_P$ sobre P y definamos una operación de posemigrupo $\cdot_{P_i}$ sobre P_i como $x_i \cdot_{P_i} y_i = f_i(x \cdot_P y)$. Es decir, trasladamos la operación a cada P_i mediante el isomorfismo f_i. Notemos que, por como lo hemos definido, $f_{i,j}$ resulta isomorfismo de posemigrupos entre $(P_i, \cdot_{P_i})$ y $(P_j, \cdot_{P_j})$: para todos $x, y \in P$ e $i, j \in I$, tenemos que $f_{i,j}(x_i \cdot_{P_i} y_i) = f_{i,j} \circ f_i(x \cdot_P y) = f_j(x \cdot_P y) = x_j \cdot_{P_j} y_j = f_{i,j}(x_i) \cdot_{P_j} f_{i,j}(y_i)$. Definamos una operación de posemigrupo $\cdot$ sobre $\bigsqcup_{i\in I} R_i$ dada por:

$$x \cdot y = \begin{cases} \text{mín}\{x, y\} & x \text{ e } y \text{ comparables} \\ x \cdot_{P_i} y & x, y \in P_i \\ x \cdot_{Q_i} y & x, y \in Q_i \\ x_j \cdot_{P_j} y & x \in P_i \text{ e } y \in P_j \\ x_j & x \in P_i \text{ e } y \in Q_j \\ y & x \in Q_i \text{ e } y \in P_j \\ 1_j & x \in Q_i \text{ e } y \in Q_j \end{cases}$$

donde i denota el índice tal que $x \in R_i$ y $j \neq i$. Notemos que, por definición de suma ordenada, estos casos son exhaustivos. Veamos ahora que esta operación es asociativa. En esta división por casos, los subíndices i, j, k pueden ser iguales o no, a menos que se especifique una de estas dos opciones. Esta distinción solo se hará en caso de ser necesaria, para disminuir la cantidad de casos a considerar.

1. $x \in P_i, y \in P_j, z \in P_k : (x \cdot y) \cdot z = (x_j \cdot_{P_j} y) \cdot z = (x_j \cdot_{P_j} y)_k \cdot_{P_k} z = x_k \cdot_{P_k} y_k \cdot_{P_k} z = x \cdot (y_k \cdot_{P_k} z) = x \cdot (y \cdot z)$.

2. $x \in P_i, y \in P_j, z \in Q_k : (x \cdot y) \cdot z = (x_j \cdot_{P_j} y) \cdot z = x_k \cdot_{P_k} y_k = x \cdot y_k = x \cdot (y \cdot z)$.

3. $x \in P_i,\ y \in Q_j,\ z \in P_k : (x \cdot y) \cdot z = x_j \cdot z = x_k \cdot_{P_k} z = x \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

4. $x \in P_i,\ y \in Q_j,\ z \in Q_k : (x \cdot y) \cdot z = x_j \cdot z = x_k = x \cdot (y \cdot z)$ (Aquí, $(y \cdot z) = y \cdot_{Q_j} z$ si $j = k$ y $(y \cdot z) = 1_k$ si $j \neq k$, en ambos casos vale que $x \cdot (y \cdot z) = x_k$).

5. $x \in Q_i, y \in P_j, z \in P_k : (x \cdot y) \cdot z = y \cdot z = y_k \cdot_{P_k} z = x \cdot (y_k \cdot_{P_k} z) = x \cdot (y \cdot z)$.

6. $x \in Q_i, y \in P_j, z \in Q_k : (x \cdot y) \cdot z = y \cdot z = y_k = x \cdot y_k = x \cdot (y \cdot z)$.

7. $x \in Q_i,\ y \in Q_j,\ z \in P_k : (x \cdot y) \cdot z = 1_j \cdot z = z = x \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ si $i \neq j$ y $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_{Q_i} y) \cdot z = z = x \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ si $i = j$.

8. $x \in Q_i,\ y \in Q_j,\ z \in Q_k : (x \cdot y) \cdot z = 1_j \cdot z = 1_k = x \cdot 1_k = x \cdot (y \cdot z)$ si i, j, k distintos dos a dos, o si $i = k \neq j$.
   $(x \cdot y) \cdot z = (x \cdot_{Q_i} y) \cdot z = 1_k = x \cdot 1_k = x \cdot (y \cdot z)$ si $i = j \neq k$.
   $(x \cdot y) \cdot z = 1_j \cdot z = 1_j = x \cdot (y \cdot_{Q_j} z) = x \cdot (y \cdot z)$ si $i \neq j = k$.
   $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot_{Q_i} y \cdot_{Q_i} z = x \cdot (y \cdot z)$ si $i = j = k$.

□

Lema 1.3.9. *Supongamos que $\langle B, \cdot \rangle$ es un posemigrupo y que $A \subseteq B$ es un subconjunto decreciente tal que $\cdot \restriction A$ es conmutativo. Si $S \subseteq A$ no es acotado inferiormente, entonces tampoco lo es $S \cdot c$ para ningún $c \in B$.*

Demostración. Probamos la contrarrecíproca. Supongamos $d \leq s \cdot c$ para todo $s \in S$. Veamos primero que d absorbe a S; sea $s \in S$:

$$s \cdot d = s \cdot (d \cdot s \cdot c) = d \cdot s \cdot c = d.$$

Ahora podemos ver que para cualquier $b \in A$, $d \cdot b$ es una cota inferior de S. Sea, nuevamente, $s \in S$. Entonces:

$$d \cdot b = (s \cdot d) \cdot b = s \cdot (d \cdot b) = (d \cdot b) \cdot s,$$

donde la última igualdad vale por hipótesis sobre A. Luego $d \cdot b \leq s$. $\square$

Lema 1.3.10. *Supongamos que $\langle B, \cdot \rangle$ es un posemigrupo y $C \subseteq B$ es un subconjunto decreciente tal que $\cdot \upharpoonright C$ es conmutativo. Sean $a, b \in B$ y $c \in C$. Para todo $y \in B$, $y \cdot c \geq a \cdot c$ e $y \leq a \cdot c \cdot b$ implican $y = a \cdot c \cdot b$.*

Demostración. Supongamos $y \cdot c \geq a \cdot c$. Luego

$$a \cdot c = (a \cdot c) \cdot (y \cdot c) = (y \cdot c) \cdot (a \cdot c) = y \cdot a \cdot c.$$

Ahora supongamos $y \leq a \cdot c \cdot b$. Luego $y = y \cdot (a \cdot c \cdot b) = (y \cdot a \cdot c) \cdot b = (a \cdot c) \cdot b$. $\square$

El siguiente lema es una herramienta muy útil para el estudio de los posets asociativos. Nos permite probar que ciertos posets no son asociativos, así como establecer restricciones que deben valer sobre potenciales operaciones de posemigrupo. La primera versión del mismo fue probada por A. Petrovich. A continuación, presentamos la versión que es de mayor utilidad para este trabajo:

Lema 1.3.11. *Sea P un poset asociativo. Si $x \cdot y = y$ entonces $(y \cdot x)\downarrow$ e $y\downarrow$ son isomorfos.*

Prueba. Veamos que la función $f : (y \cdot x)\downarrow \longrightarrow y\downarrow$ definida por $f(a) = a \cdot y$ es un isomorfismo. Sea $a \leq y \cdot x$. Tenemos que $a = a \cdot (y \cdot x) = (a \cdot y) \cdot x$. Esto prueba la inyectividad de f, pues si suponemos $f(a) = a \cdot y = b \cdot y = f(b)$, de lo anterior obtenemos $a = (a \cdot y) \cdot x = (b \cdot y) \cdot x = b$. Sea ahora $b \leq y$, nos gustaría ver que existe $a \leq (y \cdot x)$ tal que $f(a) = b$. Tomemos $a = b \cdot x$ y veamos que $a = f^{-1}(b)$. Sabemos que $a \leq (y \cdot x)$ por el Lema 1.1.13(1). Ahora, $f(a) = (b \cdot x) \cdot y = b \cdot (x \cdot y) = b \cdot y = b$. Así f resulta biyectiva. El hecho de que f preserva el orden es consecuencia directa del Lema 1.1.13(1). Para ver que f^{-1} preserva el orden, tomemos $a, b \leq y$ tal que $a \leq b$. Sabemos que $f^{-1}(a) = a \cdot x \leq b \cdot x = f^{-1}(b)$ por el Lema 1.1.13(1). Así, f resulta un isomorfismo. $\square$

Corolario 1.3.12. *Sea P un poset asociativo. Para todos $x, y \in P$, $(x \cdot y)\downarrow$ es isomorfo a $(y \cdot x)\downarrow$*

Demostración. Tenemos que $(x \cdot y) \cdot (y \cdot x) = x \cdot (y \cdot y) \cdot x = x \cdot y \cdot x = y \cdot x$. Análogamente $(y \cdot x) \cdot (x \cdot y) = x \cdot y$. Por el lema anterior tenemos que $(x \cdot y)\downarrow \approx (y \cdot x)\downarrow$. $\square$

Corolario 1.3.13. *Sea P un poset asociativo y $m \in P$ minimal. Entonces $m \cdot x$ es minimal para todo $x \in P$.*

Demostración. Notemos que un elemento $y \in P$ es minimal si y solo si $y\downarrow = \{y\}$. Sea ahora $x \in P$. Por el Lema 1.1.2(1), tenemos que $x \cdot m \leq m$ y por lo tanto $x \cdot m = m$. Por el Lema 1.3.11, tenemos que $\{m\} = m\downarrow \approx m \cdot x\downarrow$. Luego $m \cdot x\downarrow = \{m \cdot x\}$ y por lo tanto $m \cdot x$ es minimal. $\square$

Corolario 1.3.14. *Sea P un poset asociativo. Si existe $m \in P$ minimal, entonces para todo $x \in P$ existe m_x minimal tal que $m_x \leq x$.*

Demostración. Por el último corolario sabemos que $m \cdot x$ es minimal. Además, por el Lema 1.1.2(1), $m \cdot x \leq x$. Tomando $m_x = m \cdot x$ obtenemos lo que buscábamos. $\square$

Ejemplo 1.3.15. Consideremos el poset W en Figura 1.1. Entonces $x \cdot z \in \{z, a\}$ y $z \cdot x \in \{x, y\}$. Si $x \cdot z = a$, por el Corolario 1.3.12 tenemos que $z \cdot x = y$, y recíprocamente. Luego, o bien $x \cdot z = a$ y $z \cdot x = y$, o $x \cdot z = z$ y $z \cdot x = x$. Cada una de estas opciones conduce a una estructura de posemigrupo distinta en W.

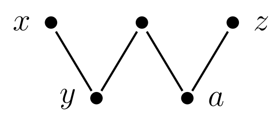


Figura 1.1: Poset W.

Lema 1.3.16. *Sean $\mathbf{B} := (B, R^{\mathbf{B}})$ y $\mathbf{C} := (C, R^{\mathbf{C}})$ dos estructuras de un lenguaje relacional $\{R\}$ y $\mathbf{A}$ una subestructura de $\mathbf{B}$ elementalmente equivalente a $\mathbf{B}$. Si definimos la unión disjunta $\mathbf{B} \sqcup \mathbf{C} := (B \sqcup C, R^{\mathbf{B}} \sqcup R^{\mathbf{C}})$, entonces $\mathbf{A} \sqcup \mathbf{C}$ es elementalmente equivalente a $\mathbf{B} \sqcup \mathbf{C}$.*

Dado que este Lema tiene poca relación con los contenidos de este trabajo, presentamos solamente una idea de la prueba del mismo, utilizando juegos de Ehrenfeucht-Fraïssé (ver [3]).

Demostración. La idea es que si comparamos las estructuras $\mathbf{B} \sqcup \mathbf{C}$ y $\mathbf{A} \sqcup \mathbf{C}$ mediante un juego de EF de largo k, entonces el jugador D siempre tiene una estrategia ganadora para cualquier k: simulamos un juego de EF que compara a las estructuras $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$, para el cual sabemos que D tiene una estrategia ganadora por ser estas estructuras elementalmente equivalentes. Si el jugador A elige un elemento de C, D elige el mismo elemento, mientras que si A elige un elemento de B, entonces D elige el elemento dado por la estrategia ganadora al comparar $\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}$ mediante un juego de largo k. Esta estrategia es una estrategia ganadora. $\square$

Corolario 1.3.17. *La clase de posets asociativos no es de primer orden en el lenguaje $\{\leq\}$.*

Demostración. Sea $\mathbf{R}$ el poset de los números reales. Consideremos la unión disjunta $P = \mathbf{R} \sqcup \mathbf{R}$. Por el Lema 1.3.7. Por el teorema de Löwenheim-Skolem, sabemos que existe una subestructura elemental contable $\mathbf{C}$ de $\mathbf{R}$. Por el Lema 1.3.16, $\mathbf{C} \sqcup \mathbf{R}$ es elementalmente equivalente a P. Pero por el Lema 1.3.11 este poset no es asociativo: tomemos $x \in \mathbf{C}$ e $y \in \mathbf{R}$. Si hubiera alguna operación de posemigrupo $\cdot$ compatible con $\mathbf{C} \sqcup \mathbf{R}$, tendríamos que $x \cdot y \leq y$, $y \cdot x \leq x$, y $x \cdot y{\downarrow} \approx y \cdot x{\downarrow}$, lo cual no es posible por una cuestión de cardinalidad. Así, la clase de posets asociativos no es cerrada bajo equivalencia elemental y por lo tanto no puede ser de primer orden. $\square$

1.3.3 Ejemplos de posets no asociativos

Es posible verificar, mediante un argumento exhaustivo, que todo poset con a lo sumo cuatro elementos es asociativo. Mostramos ahora algunos ejemplos de posets no asociativos.

Ejemplo 1.3.18. Sea N un poset de tipo ω^*, y consideremos $P := \omega + (N \sqcup \{a\})$. Supongamos que P admite una estructura de posemigrupo. Tomemos $x \in N$. Sabemos, por el Lema 1.1.13(4) que $a \cdot x \in N$ y que $x \cdot a = a$, ya que ambos deben estar por encima de ω. Por otro lado, por el Lema 1.3.11, debe valer que $a\!\downarrow = (x \cdot a)\!\downarrow \approx (a \cdot x)\!\downarrow$. Como no existe $y \in N$ tal que $a\!\downarrow \approx y\!\downarrow$, P no puede admitir una estructura de posemigrupo.

Este fue el primer ejemplo de poset no asociativo, probado usando otras técnicas ahora superadas.

Ejemplo 1.3.19. El poset en Figura 1.2 no es asociativo. Supongamos por contradicción que admite una estructura de posemigrupo $\cdot$. Por el Lema 1.1.13(4), $b \cdot x = x$ y $x \cdot b = b$. Pero $x\!\downarrow$ no es isomorfo a $b\!\downarrow$, lo que contradice el Lema 1.3.11.

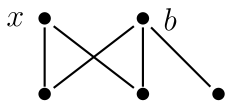


Figura 1.2: El colibrí.

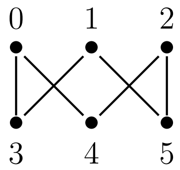


Figura 1.3: La corona.

En los siguientes lemas, suponemos que hay un posemigrupo cuyo poset subyacente es la corona.

Lema 1.3.20. $3 \cdot 2 \in \{4, 5\}$, $4 \cdot 1 \in \{3, 5\}$ *y* $5 \cdot 0 \in \{3, 4\}$.

Demostración. Por el Lema 1.1.2(1), $3 \cdot 2 \leq 2$, y por el Corolario 1.3.13, $3 \cdot 2$ es minimal en la corona. El resto de las pruebas son análogas. □

Hasta ahora, estamos bajo la situación exhibida en Tabla 1.1.

Lema 1.3.21. *1.* $5 \cdot 0 = 3$ *si y solo si* $3 \cdot 2 = 5$.

2. $3 \cdot 2 = 4$ *si y solo si* $4 \cdot 1 = 3$.

3. $5 \cdot 0 = 4$ *si y solo si* $4 \cdot 1 = 5$.

Demostración. Para el primer ítem, supongamos $5{\cdot}0 = 3$. Si $3{\cdot}2 = 4$; usando el Lema 1.1.2(2) obtenemos

$$4 = 4 \cdot 0 = 3 \cdot 2 \cdot 0 = 5 \cdot 0 \cdot 2 \cdot 0 = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 5 \cdot 0 = 3,$$

una contradicción. Luego tenemos la implicación. Para la recíproca, el mapeo dado por la permutación (53)(20) es un isomorfismo.

Para los otros ítems, hay isomorfismos que mapean la primera equivalencia a cualquiera de las otras dos. □

$\cdot$	0	1	2	3	4	5
0	0	?	?	3	4	5
1	?	1	?	3	4	5
2	?	?	2	3	4	5
3	3	3	A	3	4	5
4	4	B	4	3	4	5
5	C	5	5	3	4	5

Cuadro 1.1: El pogrupoide de la corona; $A \in \{4, 5\}$, $B \in \{3, 5\}$, $C \in \{3, 4\}$.

Proposición 1.3.22. *La corona no admite una estructura de posemigrupo*

Demostración. Supongamos lo contrario. Luego todos los lemas anteriores valen

$$\begin{aligned}
4 \cdot 1 = 3 &\iff 3 \cdot 2 = 4 && \text{Lema 1.3.21}\\
&\iff 3 \cdot 2 \neq 5 && \text{Lema 1.3.20}\\
&\iff 5 \cdot 0 \neq 3 && \text{Lema 1.3.21}\\
&\iff 5 \cdot 0 = 4 && \text{Lema 1.3.20}\\
&\iff 4 \cdot 1 = 5 && \text{Lema 1.3.21.}
\end{aligned}$$

Lo que nos dice que $4 \cdot 1 = 3 \iff 4 \cdot 1 = 5$. Esta contradicción muestra que Tabla 1.1 no puede ser extendida para obtener un producto asociativo. □

Capítulo 2

Árboles asociativos

En este capítulo consideraremos distintas familias de posets y veremos que los posets pertenecientes a cada una de ellas son asociativos. Estudiaremos primero los *árboles de ramas finitas*, luego los *árboles foliados* y finalmente una familia de posets más amplia que incluye a las dos previamente mencionadas.

Definición 2.0.1. Un *árbol* es un poset $(T, \leq)$, con máximo 1, tal que para todo $x \in T$, $x{\uparrow} := \{y \in T : x \leq y\}$ es totalmente ordenado.

Definición 2.0.2. Una *foresta* es una unión disjunta de árboles. En otras palabras, T es una foresta si y solo si para todo $x \in T$, $x{\uparrow}$ es totalmente ordenado.

Notar que todo árbol es una foresta, y que toda foresta es un árbol si y solo si tiene máximo.

Afirmación 2.0.3. *Sea T una foresta y $x, y \in T$. Si existe z tal que $z \leq x, y$, entonces x e y son comparables.*

Demostración. Simplemente notar que $x, y \in z{\uparrow}$, el cual es totalmente ordenado por hipótesis. □

2.1 Árboles de ramas finitas

Definición 2.1.1. Diremos que un árbol es de *ramas finitas* si toda cadena maximal del árbol es finita.
Dado un número natural n, diremos que un árbol de ramas finitas tiene *altura* n si toda cadena maximal tiene a lo sumo n elementos y existe al menos una cadena con n elementos.

Procedemos ahora a enunciar el resultado más sorprendente de este trabajo.

Teorema 2.1.2. *Las siguientes son equivalentes (en ZF):*

1. *Todo árbol de altura 3 es asociativo.*

2. *Todo árbol de ramas finitas es asociativo.*

3. *El Axioma de Elección.*

Demostración. Como 2 $\implies$ 1 es trivial, basta probar 3 $\implies$ 2 y 1 $\implies$ 3. Veamos que 1 $\implies$ 3. Sea $\mathcal{F}$ una familia no vacía de conjuntos no vacíos disjuntos dos a dos. Definimos ahora un orden de árbol en $T := \{\mathcal{F}\} \cup \mathcal{F} \cup \bigcup \mathcal{F}$: $x < y$ si y solo si $x \neq y$, e $y = \mathcal{F}$ o $x \in y$ (estamos considerando que $\mathcal{F} \cap \bigcup \mathcal{F} = \varnothing$, si esto no fuera así, el orden construido no sería el de un árbol de altura 3. Podemos solucionar el problema considerando $\{\mathcal{F}\} \times \{2\} \cup \mathcal{F} \times \{1\} \cup \bigcup \mathcal{F} \times \{0\}$ como universo de T y definiendo el orden como: $x' = \langle x, n\rangle < y' = \langle y, m\rangle$ si y solo si $y' = \langle \mathcal{F}, 2\rangle$ o $x \in y$ y $n < m$). Notemos que este es un árbol de tres niveles y por hipótesis es asociativo. Tomemos una estructura de posemigrupo sobre T y fijemos $m \in T$ minimal. Luego $\{m \cdot B : B \in \mathcal{F}\}$ es transversal para $\mathcal{F}$ pues para cada $B \in \mathcal{F}$, $m \cdot B$ es un minimal debajo de B por Corolario 1.3.13.
Veamos ahora que 3 $\implies$ 1.
Para esto, fijamos un árbol T de altura finita y utilizamos el axioma de elección para definir sobre él una estructura de posemigrupo.

Consideremos, para cada $c \in T$ no minimal,

$$B_c := \{y \in T : y < c \wedge \neg\exists x : y < x < c\}.$$

Notar que $B_c \neq \varnothing$ si c no es minimal, ya que debe existir $z < c$. Como el conjunto $\{y \in T : z \leq y < c\}$ es finito y totalmente ordenado, debe tener un máximo, el cual pertenece a B_c. Veamos que además $\{B_c : c \in T \text{ no minimal}\}$ es una familia de conjuntos disjuntos dos a dos. Supongamos que hay c y d tal que $B_c \cap B_d \neq \varnothing$. Tomemos $a \in B_c \cap B_d$. Como $a \leq c, d$, por 2.0.3, c y d son comparables. No puede ser $c < d$ pues luego tendríamos $a < c < d$, lo que contradiría el hecho de que $a \in B_d$. De la misma manera vemos que no puede ser $d < c$ y por lo tanto $c = d$.
Sea f una función de elección de $\{B_c : c \in T \text{ no minimal}\}$. A continuación definiremos por recursión una función F. La definimos primero en los elementos minimales y de ahí vamos "subiendo" hasta definirla en todo el árbol. Sea F definida por:

$$F(y) = \begin{cases} y & y \text{ es minimal} \\ F(f(B_y)) & y \text{ no es minimal} \end{cases}$$

Observemos que, por definición de B_y, $F(y) \leq y$ para todo y (y por lo tanto, $F(y) \leq f(B_y)$ para y no minimal). Más aún, por el carácter recursivo de la definición, $F(y)$ siempre es un elemento minimal bajo y.

Afirmación 2.1.3. *Sean y, z tales que $F(y) \leq z \leq y$, entonces $F(z) = F(y)$.*

Demostración. Sean $y, z \in T$ tal que $F(y) \leq z \leq y$. Consideremos la cadena $\{x \in T : z \leq x \leq y\}$. Sabemos que esta cadena es finita. Probemos por inducción en $n := |\{x \in T : z \leq x \leq y\}|$ que $F(z) = F(y)$. Si $n = 1$ entonces $z = y$ y no hay nada que probar. Supongamos que la afirmación vale para $n \leq k$. Y supongamos ahora que $|\{x \in T : z \leq x \leq y\}| = k + 1$. Bajo está hipótesis, $z < y$ lo cual nos dice que y no es minimal y por lo tanto está definido $f(B_y)$. Como tenemos que $F(y) \leq z$ y $F(y) \leq f(B_y)$, tenemos que z y $f(B_y)$ son comparables por Afirmación 2.0.3. No puede ser $f(B_y) < z$ pues tenemos que $z < y$ y $f(B_y) \in B_y = \{x \in T : x < y \wedge \neg\exists z : x < z < y\}$. Por lo tanto $z \leq f(B_y)$ y además sabemos que $|\{x \in T : z \leq x \leq f(B_y)\}| = k$. Esto se deduce del hecho de que $\{x \in T : z \leq x \leq y\} \setminus \{x \in T : z \leq x \leq f(B_y)\} = \{y\}$. Veamos esto último: es claro que $y \in \{x \in T : z \leq x \leq y\} \setminus \{x \in T : z \leq x \leq f(B_y)\}$. Por otra parte, dado $x \in \{x \in T : z \leq x \leq y\} \setminus \{x \in T : z \leq x \leq f(B_y)\}$, como $z \leq x$, tenemos que x y $f(B_y)$ son comparables por 2.0.3. No puede ser $x \leq f(B_y)$ pues luego x no estaría en $\{x \in T : z \leq x \leq y\} \setminus \{x \in T : z \leq x \leq f(B_y)\}$. Luego $f(B_y) < x$. No puede ser $x < y$ porque esto contradiría el hecho de que $f(B_y) \in B_y$, por lo tanto $x = y$ (pues $x \leq y$). Por hipótesis inductiva, $F(z) = F(f(B_y))$, y por construcción, $F(y) = F(f(B_y))$. Luego $F(z) = F(y)$. □

Ahora procedemos a definir una operación de posemigrupo $\cdot$ sobre T usando la función F.

Definamos

$$x \cdot y = \begin{cases} \min\{x, y\} & \text{si son comparables} \\ F(y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Notemos que, del hecho de que $F(F(y)) = F(y)$ y que $F(y)$ es minimal, tenemos que $x \cdot F(y) = F(y)$ para todos x, y.

Sean x, y, z en T. Luego

$$(x \cdot y) \cdot z = \begin{cases} \min\{x, y, z\} & (1) \\ F(z) & (2) \vee (4) \\ F(y) & (3) \end{cases}$$

Donde

1. x e y comparables y z y $\min\{x, y\}$ comparables; o equivalentemente x, y, z comparables dos a dos (por la Afirmación 2.0.3).

2. x e y comparables y z y $\min\{x, y\}$ incomparables. Consideramos a su vez los siguientes subcasos:

   (a) $x \leq y$, z y x incomparables.

   (b) $y < x$, z e y incomparables.

3. y no comparable con x y $F(y) \leq z$. Consideramos los siguientes subcasos:

(a) $F(y) \leq z \leq y$, x e y incomparables.

(b) $F(y) \leq y < z$, x e y incomparables.

Son exhaustivos pues por 2.1.3 z e y deben ser comparables.

4. y no comparable con x y $F(y)$ no comparable con z. Consideramos los siguientes subcasos:

   (a) $z < y$.

   (b) z e y incomparables.

   No hay más subcasos que estos dos por ser $F(y)$ minimal bajo y y $F(y)$ incomparable con z.

Veamos qué pasa con $x \cdot (y \cdot z)$.

1. $x \cdot (y \cdot z) = \text{mín}\{x, y, z\} = (x \cdot y) \cdot z$.

2. (a) No puede ser $y \leq z$ (pues esto implicaría $x \leq z$), luego z e y son incomparables o $z < y$. En el primer caso $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot F(z) = F(z) = x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$. En el segundo caso $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$.

   (b) y y z son incomparables. Luego $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot F(z) = F(z) = y \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$.

3. (a) En este caso sabemos por 2.0.3 que x y z deben ser incomparables pues x e y lo son: $x \leq z$ implicaría $x \leq y$, mientras que $z \leq x$, junto con 2.0.3 implicaría que x e y son comparables. Además, tenemos que $F(y) = F(z)$ por la Afirmación 2.1.3. Luego $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = F(z) = F(y) = F(y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$.

   (b) Aquí $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot y = F(y) = F(y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$.

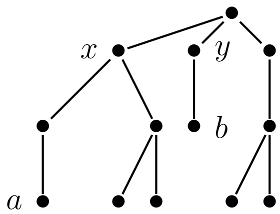
4. (a) En este caso x, z son incomparables. Luego $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot z = F(z) = (x \cdot y) \cdot z$.

   (b) $x \cdot (y \cdot z) = x \cdot F(z) = F(z) = F(y) \cdot z = (x \cdot y) \cdot z$.

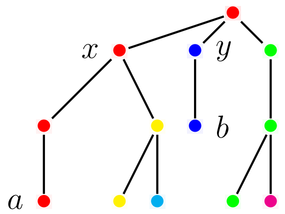
□

No es difícil verificar que lo que obtenemos al realizar esta construcción, es en realidad una descomposición del árbol en cadenas convexas tal que cada una de ellas contiene un elemento minimal del árbol. Tenemos que para cada elemento minimal m, $F^{-1}(m)$ es una cadena (pues esta contenido en $m\uparrow$, que es totalmente ordenado) convexa (por 2.1.3) que contiene a m. La construcción de F es simplemente una forma recursiva de definir esta descomposición, pero cualquier descomposición en cadenas de esta forma induce una estructura de posemigrupo sobre T.
Veamos un ejemplo de la aplicación de este teorema:

Ejemplo 2.1.4.



(a) T



(b) Una descomposición de T en cadenas convexas.

Figura 2.1: Esta descomposición induce una estructura de posemigrupo $\cdot$ sobre T tal que, en particular, $x \cdot y = b$ e $y \cdot x = a$.

Cabe mencionar que el teorema anterior fue el puntapié inicial para éste trabajo. La idea de que multiplicar a izquierda por un elemento minimal es una función de elección, en la prueba de $2 \implies 3$, fue propuesta por A. Petrovich.

2.2 Árboles foliados

Consideramos ahora una clase de árboles más amplia que en la sección anterior: los *árboles foliados*.

Definición 2.2.1. Diremos que un árbol T es *foliado* si para todo $x \in T$ existe $m \in T$ minimal tal que $m \leq x$.

Explotaremos las ideas de la prueba anterior para definir estructuras de posemigrupo sobre estos árboles. Mostraremos que siempre es posibe descomponer un árbol foliado en cadenas convexas, disjuntas y que contienen un elemento minimal del árbol, y que además cada una de estas descomposiciones induce una estructura de posemigrupo distinta.

Teorema 2.2.2. *Todo árbol foliado es asociativo.*

Demostración. Sea T un árbol foliado. Sea $M := \{x \in T : x \text{ es minimal}\}$. Definimos un buen orden sobre M de tipo κ para κ un ordinal apropiado. Es decir, $M = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Procedemos ahora a descomponer T en cadenas convexas $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Definimos las cadenas C_α de manera recursiva. Tomemos $C_0 := x_0\uparrow$. Ahora para $\alpha < \kappa$, tomemos $C_\alpha = x_\alpha\uparrow \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$.

Afirmación 2.2.3. $\bigcup_{\alpha<\kappa} C_\alpha = T$.

Demostración. Es trivial, por la construcción que hemos realizado, que $M \subset \bigcup_{\alpha<\kappa} C_\alpha$ Sea $y \in T \setminus M$ y sea $M_y := M \cap y\downarrow$, el cual es no vacío por las hipótesis sobre el árbol. Sea ahora $\alpha_y := \text{mín}\{\beta < \kappa : x_\beta \in M_y\}$. Por construcción de $\{C_\alpha : \alpha < \kappa\}$ tenemos que para todo $\beta < \alpha_y$, $y \notin C_\beta$. Además, por hipótesis, $y \in x_{\alpha_y}\uparrow$. Luego $y \in x_{\alpha_y}\uparrow \setminus \{C_\beta : \beta < \alpha_y\} = C_{\alpha_y}$. $\square$

Ahora, definimos una función F de la siguiente manera: para $y \in M$, $F(y) = y$, y para $y \in T \setminus M$, $F(y) = x_{\alpha_y}$ con α_y definido como en la prueba de la última afirmación.

Afirmación 2.2.4. *Sean y, z tales que $F(y) \leq z \leq y$, entonces $F(z) = F(y)$.*

Demostración. Si $z \in M$, debe ser que $F(z) = z = F(y)$ y el resultado es trivial. Veamos que la afirmación vale para $z \in T \backslash M$. Notemos que como $M_z \subset M_y$, tenemos que $\alpha_y \leq \alpha_z$. Como además $x_{\alpha_y} \in M_z$ por hipótesis, tenemos que $\alpha_z \leq \alpha_y$. Así $F(z) = x_{\alpha_z} = x_{\alpha_y} = F(y)$. □

Definimos ahora una operación de posemigrupo sobre T:

$$x \cdot y = \begin{cases} \text{mín}\{x, y\} & \text{si son comparables} \\ F(y) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

La prueba de que esta operación es de posemigrupo es idéntica a la del teorema previo. □

Observación 2.2.5. Si un árbol posee algún elemento minimal pero no es foliado, por el Corolario 1.3.14 no puede ser asociativo.

Observación 2.2.6. El teorema previo vale reemplazando en las hipótesis "árbol foliado" por "foresta de árboles foliados". Este hecho se deduce de que si tenemos una foresta de árboles foliados T, podemos considerar el poset $T' := T + \{1\}$, donde 1 es un elemento que no pertenece a T. T' resulta un árbol foliado y por lo tanto satisface las hipótesis del teorema. Finalmente, por el Lema 1.2.2, T resulta asociativo, más aún, resulta subuniverso de la operación construida en la prueba del teorema.

2.3 Preimágenes homomórficas de árboles foliados

El último teorema de este capítulo nos da una herramienta muy útil para probar que los posets pertenecientes a una amplia clase son asociativos.

Teorema 2.3.1. *Sea P un poset. Supongamos que existen una foresta de arboles foliados T y un homomorfismo sobreyectivo $f : P \to T$ tal que:*

1. *$f(x) < f(y)$ implica $x < y$.*

2. *Para todo $a \in f(P)$, $f^{-1}(a)$ admite estructura de posemigrupo y además, si a es minimal en $f(P)$, $f^{-1}(a)$ tiene mínimo.*

Entonces, P admite estructura de posemigrupo.

Demostración. Comenzamos enunciando dos afirmaciones que serán necesarias para esta prueba:

Afirmación 2.3.2. *Si $f(z) \neq f(y) = f(x)$ y $z \leq y$, entonces $z \leq x$*

Demostración. $z \leq y \implies f(z) \leq f(y)$, como $f(z) \neq f(y)$, $f(z) < f(y) = f(x)$, entonces $z < x$ por 1. □

Afirmación 2.3.3. *Para todos $x, y \in P$, si el conjunto $\{x, y\}$ tiene una cota inferior, entonces o bien x e y son comparables, o $f(x) = f(y)$.*

Demostración. Sea z tal que $z \leq x$ y $z \leq y$. Luego $f(z) \leq f(x)$ y $f(z) \leq f(y)$. Como la imagen de f es una foresta, $f(x)$ y $f(y)$ son comparables por 2.0.3. Si $f(x) \neq f(y)$, o bien $f(x) < f(y)$ o $f(y) < f(x)$. En ambos casos x e y son comparables. $\square$

Tomemos un elemento 1 que no pertenece a T. Sea $\tilde{F} : T + \{1\} \to T + \{1\}$ una función como la definida en 2.2.2. Es decir, una función tal que $\tilde{F}(a)$ es minimal bajo a para todo a en T, y además, para todo $b \in T$ minimal, $\tilde{F}^{-1}(b)$ es una cadena convexa que contiene a b.

Definamos $F : P \to P$ como

$$F(x) = \min\{f^{-1}(\tilde{F}(f(x)))\}$$

Notar que si $f(x) = f(y)$ entonces $F(x) = F(y)$.

Afirmación 2.3.4. *Si $F(y) \leq z \leq y$ entonces $F(y) = F(z)$.*

Demostración. Si $f(y) = f(z)$, el resultado es trivial, de lo contrario, tenemos que $f(z) < f(y)$. Notar que $f(F(y)) = \tilde{F}(f(y)) \leq f(z) < f(y)$ y por lo tanto, por 2.2.4, $\tilde{F}(f(z)) = \tilde{F}(f(y))$. Esto nos dice, por definición de F, que $F(z) = F(y)$. $\square$

Tomemos, para cada $a \in T$, una operación de posemigrupo $\tilde{\cdot}_a$ sobre $f^{-1}(a)$. Definamos una operación binaria $\cdot$ sobre P de la siguiente manera:

$$x \cdot y = \begin{cases} \min\{x, y\} & x \text{ e } y \text{ comparables} \\ x \mathbin{\tilde{\cdot}_a} y & f(x) = f(y) = a \\ F(y) & x \text{ e } y \text{ incomparables y } f(x) \neq f(y) \end{cases}$$

Notemos, que para todos $x, y \in P$ tenemos que $x \cdot F(y) = F(y)$: si son comparables, como $F(y)$ es minimal en P debe ser $F(y) \leq x$. Si $f(x) = f(F(y)) = a$, entonces son comparables (pues $F(y) = \min f^{-1}(f(F(y)))$ y aplica el mismo razonamiento anterior. En caso contrario, tenemos que $x \cdot F(y) = F(F(y))) = F(y)$ por definición de F y de $\tilde{F}$.

Para aligerar la notación y facilitar la lectura, omitiremos el uso de $\cdot$ en el resto de la prueba, así como la referencia a a en $\tilde{\cdot}_a$, escribiendo simplemente $\tilde{\cdot}$. Sean $x, y, z \in P$. Veamos, por casos, que $(xy)z = x(yz)$.
Por "caso", nos referimos a hipótesis sobre la terna $\{x, y, z\}$. La elección de la siguiente división por casos es para simplificar la verificación de que $(xy)z = x(yz)$. Cada caso será representado con un ítem que consistirá de cuatro coordenadas.
A continuación, se indica como interpretar cada caso. Las primera y segunda coordenadas del itemizado determinan la igualdad o no entre $f(x)$ y $f(y)$, y $f(y)$ y $f(z)$ respectivamente; si $f(x) = f(y)$, entonces la primera coordenada del caso será 1, de lo contrario será 2. Lo mismo vale para la segunda coordenada. La tercera y cuarta coordenada determinan la condición de comparabilidad entre x e y, e y y z respectivamente; si $x \leq y$ la tercera coordenada será 1, si $y < x$ la tercera coordenada será 2, y si x e y son incomparables, la

tercera coordenada será 3. Lo mismo vale para la cuarta coordenada.
Si en alguna coordenada aparece un asterisco, es porque los razonamientos aplicados en dicho caso valen para cualquier condición en la coordenada omitida.

Entonces, por ejemplo el ítem [1.2.3.2] corresponde al caso en que $f(x) = f(y)$, $f(y) \neq f(z)$, x e y incomparables, $z < y$.
Notemos que cuando los elementos $\{x, y, z\}$ constituyen una cadena, entonces, por definición $(xy)z = x(yz) = \text{mín}\{x, y, z\}$. También, cuando $y \leq x$ e $y \leq z$, tenemos que $(xy)z = x(yz) = y$. Por último, si $x, z \leq y$ entonces $(xy)z = xz = x(yz)$.

1.1.∗.∗ En este caso:

$$(xy)z = (x \,\tilde{\cdot}\, y) \,\tilde{\cdot}\, z = x \,\tilde{\cdot}\, (y \,\tilde{\cdot}\, z) = x(yz)$$

∗.∗.1.1

$$(xy)z = xz = x = xy = x(yz)$$

∗.∗.1.2

$$(xy)z = xz = x(yz)$$

∗.∗.2.1

$$(xy)z = yz = y = xy = x(yz)$$

∗.∗.2.2

$$(xy)z = yz = z = xz = x(yz)$$

1.2.1.3

$$x(yz) = xF(z) = F(z) = xz = (xy)z$$

pues x y z son incomparables. Esto es porque, como $x \leq y$ e y es incomparable con z, no puede ser $z \leq x$. Tampoco puede ser $x \leq z$ pues esto implicaría que $\{y, z\}$ tiene una cota inferior, lo cual, contradice 2.3.3.

1.2.2.3

$$(xy)z = yz = F(z) = xF(z) = x(yz)$$

Pues $x \cdot F(z) = F(z)$.

1.2.3.1

$$(xy)z = (x \,\tilde{\cdot}\, y)z = x \,\tilde{\cdot}\, y = xy = x(yz)$$

Pues $(x \,\tilde{\cdot}\, y) < z$ por Afirmación 2.3.2

1.2.3.2

$$(xy)z = (x \,\tilde{\cdot}\, y)z = z = xz = x(yz)$$

por Afirmación 2.3.2.

1.2.3.3

$$(xy)z = (x \mathbin{\tilde{\cdot}} y)z = F(z) = xF(z) = x(yz)$$

pues $(x \mathbin{\tilde{\cdot}} y)$ no puede ser comparable con z por Afirmación 2.3.3 pues $x \mathbin{\tilde{\cdot}} y \leq y$ (ver la justificación en [1.2.1.3]).

2.1.1.3

$$(xy)z = xz = x = x(y \mathbin{\tilde{\cdot}} z) = x(yz)$$

por 2.3.2.

2.1.2.3

$$(xy)z = yz = y \mathbin{\tilde{\cdot}} z = x(y \mathbin{\tilde{\cdot}} z) = x(yz)$$

por 2.3.2.

2.1.3.1

$$(xy)z = F(y)z = F(y) = xy = x(yz)$$

pues $F(y) \leq y \leq z$.

2.1.3.2

$$(xy)z = F(y)z = F(z)z = F(z) = xz = x(yz)$$

pues $F(y) = F(z)$ y el hecho de que x y z son incomparables (claramente no puede ser $x \leq z$ pues esto implicaría $x \leq y$, y tampoco puede ser $z \leq x$ pues luego z sería cota inferior de $\{x, y\}$ lo que contradice 2.3.3).

2.1.3.3

$$(xy)z = F(y)z = F(y) = F(y \mathbin{\tilde{\cdot}} z) = x(y \mathbin{\tilde{\cdot}} z) = x(yz)$$

pues $F(y) \leq z$, $F(y) = F(y \mathbin{\tilde{\cdot}} z)$ y porque x es incomparable con $y \mathbin{\tilde{\cdot}} z$, ya que no puede ser que $x \leq y \mathbin{\tilde{\cdot}} z$ por 2.3.2 y tampoco puede ser $y \mathbin{\tilde{\cdot}} z \leq x$ pues esto junto con 2.3.3 implicaría $z \leq x$ y esto nos dice que $y \leq x$.

2.2.1.3

$$(xy)z = xz = F(z) = xF(z) = x(yz)$$

pues x es incomparable con z ya que no puede ser $z \leq x$ ni $x \leq z$ por 2.3.3.

2.2.2.3 :

$$(xy)z = yz = F(z) = xF(z) = x(yz)$$

2.2.3.1

$$(xy)z = F(y)z = F(y) = xy = x(yz)$$

2.2.3.2

$$(xy)z = F(y)z = F(z) = xz = x(yz)$$

pues si $F(y) \leq z$ entonces $F(y) = F(z)$. En caso contrario son incomparables.

2.2.3.3

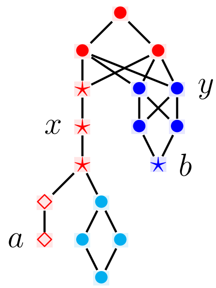
$$(xy)z = F(y)z = F(z) = xF(z) = x(yz)$$

pues $F(y)$ es incomparable con z ya que en caso contrario y debería ser comparable con z por 2.3.3.

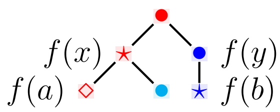
□

Veamos un ejemplo de la aplicación de este teorema.

Ejemplo 2.3.5.



(a) P



(b) T

Figura 2.2: Aquí, suponemos que hay un homomorfismo $f : P \to T$ donde indicamos que dos elementos de P van a parar a un mismo elemento de T si sus nodos tienen el mismo color y forma que el nodo del elemento mencionado. A su vez, el color de los elementos en T indica como descomponemos este poset en cadenas convexas. Bajo esta construcción, en particular, $x \cdot y = b$ e $y \cdot x = a$.

Capítulo 3

Descomposición de posemigrupos en producto directo

En este capítulo estudiaremos la descomposición en producto directo (de subposemigrupos) de posemigrupos con un elemento central.

Definición 3.0.1. Dado un posemigrupo $(A, \cdot)$, un elemento $c \in A$ se dice *central* si para todo $x \in A$ vale que $x \cdot c = c \cdot x$.

Comencemos con un resultado parcial sobre la operación parcial de supremo:

Lema 3.0.2. *Para cualquier par de posemigrupos C, D y elementos $c, e \in C$ y $d, f \in D$, $\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle$ existe en $C \times D$ si y solo si $c \vee e$ y $d \vee f$ existen.*

Demostración. Sean C y D posemigrupos, y $\pi_C : C \times D \to C$ y $\pi_D : C \times D \to D$ las proyecciones canónicas (i.e. $\pi_C(\langle c, d\rangle) = c$ y $\pi_D(\langle c, d\rangle) = d$).
Recordemos que la operación de posemigrupo en un producto directo de posemigrupos se define coordenada a coordenada. Es decir, $\langle c, d\rangle \cdot_{C\times D} \langle e, f\rangle = \langle c \cdot_C e, d \cdot_D f\rangle$. En el resto de esta prueba no indicaremos los subíndices de cada producto ya que, por el contexto, estará claro donde estamos operando.

Sean $c, e \in C$ y $d, f \in D$, y supongamos que existe $\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle$. Veamos que $\pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = c \vee e$. Como sabemos que $\langle c, d\rangle \cdot (\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = \langle c, d\rangle$, tenemos que $c \cdot \pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = c$ y de la misma manera $e \cdot \pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = e$, por lo tanto $c, e \leq \pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)$. Sea $a \in C$ tal que $c, e \leq a$. Luego tenemos que $\langle a, \pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)\rangle \in C \times D$ y tenemos que $\langle c, d\rangle \cdot \langle a, \pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)\rangle = \langle c, d\rangle$ y $\langle e, f\rangle \cdot \langle a, \pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)\rangle = \langle e, f\rangle$. De aquí obtenemos, por definición de supremo, que $(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) \cdot \langle a, \pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)\rangle = \langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle$ y por ende $\pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) \leq \pi_C(\langle a, \pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle)\rangle) = a$. Por lo tanto, $\pi_C(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = c \vee e$. De la misma manera obtenemos que $\pi_D(\langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle) = d \vee f$.

Ahora supongamos que existen $c \vee e$ y $d \vee f$. Tomemos $\langle c \vee e, d \vee f\rangle$. Tenemos que $\langle c, d\rangle \cdot \langle c \vee e, d \vee f\rangle = \langle c, d\rangle$ y $\langle e, f\rangle \cdot \langle c \vee e, d \vee f\rangle = \langle e, f\rangle$, por lo tanto $\langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \leq \langle c \vee e, d \vee f\rangle$.

Sea $x = \langle x_C, x_D\rangle \in C \times D$ tal que $\langle c, d\rangle, \langle e, f\rangle \leq x$, es decir $\langle c, d\rangle \cdot \langle x_C, x_D\rangle = \langle c, d\rangle$ y $\langle e, f\rangle \cdot \langle x_C, x_D\rangle = \langle e, f\rangle$. Por lo tanto tenemos que $c, e \leq x_C$ y $d, f \leq x_D$. Luego $c \vee e \leq x_C$ y $d \vee f \leq x_D$ por definición de supremo. Por lo tanto $\langle c \vee e, d \vee f\rangle \cdot \langle x_C, x_D\rangle = \langle c \vee e, d \vee f\rangle$ y así obtenemos que $\langle c \vee e, d \vee f\rangle = \langle c, d\rangle \vee \langle e, f\rangle$. $\square$

La idea clave en nuestra caracterización surge del hecho de que, en un producto directo de posemigrupos, deben existir ciertos supremos no triviales que satisfacen ciertas propiedades de distributividad y absorción con respecto a $\cdot$. Recíprocamente, la existencia de supremos en el producto directo implica la existencia de supremos en cada factor, como muestra el lema anterior. Este hecho nos permitirá enunciar de manera precisa cuando un posemigrupo es el producto directo de dos de sus subposemigrupos, y también establecer una equivalencia entre las distintas descomposiciones en producto directo de un posemigrupo y sus pares de congruencias factor complementarias.
Las pruebas de este capítulo han sido adaptadas de [11]. En ese artículo se estudia la descomposición en suma directa de semirretículos. Aquí $\cdot$ reemplaza a $\vee$, mientras que $\vee$ reemplaza a $\wedge$. La principal diferencia con las pruebas del artículo mencionado es que, a diferencia de $\vee$, $\cdot$ no es una operación conmutativa, por lo que muchas de las pruebas requieren trabajo adicional. Las diferencias en las pruebas de este capítulo con respecto a las pruebas de [11], así como las partes que no requieren modificaciones con respecto a las pruebas originales, serán explicitadas.

A modo de ejemplo, tenemos el posemigrupo A en Figura 3.1. A es isomorfo al producto directo de sus subposemigrupos I_1 y I_2. De acuerdo a esta representación, el par $\langle x_1, x_2\rangle$ corresponde al punto x. A pesar de que x no es expresable en términos de x_1, x_2 y $\cdot$, podemos obtener x como el supremo $(x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)$. Otras relaciones entre x, x_1, x_2 y c (el único elemento en $I_1 \cap I_2$) pueden ser halladas; a continuación exhibimos cuatro de ellas, que valen exactamente cuando x se corresponde con $\langle x_1, x_2\rangle$ en una descomposición de producto directo.

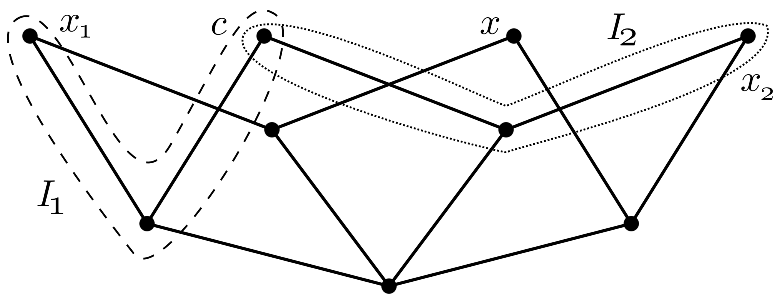


Figura 3.1: Un posemigrupo A isomorfo a $I_1 \times I_2$.

3.1 Descomposición en producto directo de posemigrupos

En el resto de este capítulo, escribiremos fórmulas en el lenguaje extendido $\{\cdot, \vee\}$. La fórmula "$x \vee y = z$" se interpretará como "z es el supremo de $\{x, y\}$":

$$x, y \leq z \ \& \ (\forall u : x, y \leq u \ \rightarrow \ z \leq u),$$

l a menos que se indique lo contrario; en general, toda ecuación $t_1 = t_2$ involucrando $\vee$ deberá interpretarse como "si alguno de ambos términos existe, también el otro y son iguales". Es sencillo observar que las leyes de asociatividad valen para la operación parcial $\vee$ en todo posemigrupo, y usaremos este hecho sin mencionarlo. Veamos esto:

Lema 3.1.1. *Sea A un posemigrupo y $a, b, c \in A$ tales que existen $a \vee b$ y $b \vee c$. Luego, existe $a \vee (b \vee c)$ si y solo si existe $(a \vee b) \vee c$. Además, en caso de existir, estos dos términos son iguales.*

Demostración. Supongamos que existe $x := a \vee (b \vee c)$. Luego tenemos que $a, (b \vee c) \leq x$ y por lo tanto $a, b, c \leq x$. De esto último, por definición de supremo, obtenemos que $(a \vee b) \leq x$, es decir, x es cota superior de $\{a \vee b, c\}$. Sea y tal que $a \vee b, c \leq y$. Luego tenemos que $a, b, c \leq y$ y por lo tanto $b \vee c \leq y$. Luego y es cota superior de $\{a, b \vee c\}$ y por lo tanto $x \leq y$. Esto nos dice que $x = (a \vee b) \vee c$, que es lo que queríamos. La otra mitad de esta prueba es análoga. □

De aquí en adelante, A será un posemigrupo y $c \in A$ un elemento central fijo. Sea $\varphi(c, x_1, x_2, x)$ la conjunción de las siguientes fórmulas:

comm $x \cdot x_1 = x_1 \cdot x$ y $x \cdot x_2 = x_2 \cdot x$.

dist $x = (x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)$.

p₁ $x_1 = (x \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1)$.

p₂ $x_2 = (x \cdot x_2) \vee (c \cdot x_2)$.

prod $x_1 \cdot x_2 = x \cdot c$.

La fórmula **comm** es la única que no aparece en la fórmula $\varphi(c, x_1, x_2, x)$ definida en [11]. Notar que, por las hipótesis de que c es central y la fórmula **comm**, el Lema 1.1.13(4) nos garantiza que todos los productos que aparecen en φ excepto el último, son en realidad ínfimos. Escribiremos $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle_c$ para denotar que vale $\varphi(c, x_1, x_2, x)$.

Definición 3.1.2. Supongamos que I_1, I_2 son subposemigrupos de A. Diremos que A es el *c-producto directo* de I_1 y I_2 (notación: $A = I_1 \times_c I_2$) si y solo si vale lo siguiente:

Perm Los elementos de I_1 conmutan con los de I_2.

Mod1 Para todos $x, y \in A$, $x_1 \in I_1$ y $x_2 \in I_2$, si $x \cdot c \leq x_1 \cdot x_2$ entonces

$$\big((x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)\big) \cdot y = (x \cdot x_1 \cdot y) \vee (x \cdot x_2 \cdot y),$$
$$y \cdot \big((x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)\big) = (y \cdot x \cdot x_1) \wedge (y \cdot x \cdot x_2).$$

Mod2 Para todos $x, y \in A$, $x_1 \in I_1$ y$x_2 \in I_2$, si $x \geq x_1 \cdot x_2$ entonces

$$\big((x \cdot x_i) \vee (c \cdot x_i)\big) \cdot y = (x \cdot x_i \cdot y) \vee (c \cdot x_i \cdot y),$$
$$y \cdot \big((x \cdot x_i) \vee (c \cdot x_i)\big) = (y \cdot x \cdot x_i) \wedge (y \cdot c \cdot x_i).$$

para $i = 1, 2$.

Abs Para todos $x_1, y_1 \in I_1$ y $z_2 \in I_2$, tenemos: $x_1 \vee (y_1 \cdot z_2) = x_1 \vee (y_1 \cdot c)$ (e intercambiando los roles de I_1 e I_2).

Exi $\forall x_1 \in I_1, x_2 \in I_2 \; \exists x \in A : x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle_c$.

Onto $\forall x \in A \; \exists x_1 \in I_1, x_2 \in I_2 : \; x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle_c$.

Como antes, la única condición que debemos agregar con respecto a [11], es la que establece la conmutatividad en ciertos casos, en este caso **Perm**. En particular, en las pruebas que siguen, siempre que se utilicen **comm** o **Perm**, habrá una diferencia con respecto a la prueba presente en [11].
Para aligerar la notación, omitiremos la referencia a c, escribiendo $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ en vez de $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ y usando simplemente $\times$. Notemos que **Exi** implica:

Ori $\forall x_1 \in I_1, x_2 \in I_2 \; (x_1 \cdot x_2 \leq c)$.

3.2 El lema de representación

Lema 3.2.1. *Supongamos que* $A = I_1 \times I_2$. *Entonces* $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ *define un isomorfismo* $\langle x_1, x_2 \rangle \overset{\varphi}{\mapsto} x$ *entre* $I_1 \times I_2$ *y* A.

Demostración. Primero veremos que la función $\langle x_1, x_2 \rangle \overset{\varphi}{\mapsto} x$ está bien definida. Supongamos $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ y $z = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ (hay al menos una imagen posible por **Exi**). Por **dist** para z, tenemos

$$z = (x_1 \cdot z) \vee (x_2 \cdot z).$$

Esto es igual a

$$[((x \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1)) \cdot z] \vee [((x \cdot x_2) \vee (c \cdot x_2)) \cdot z]$$

por $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ para x. Por **prod** para x podemos aplicar **Mod2**:

$$(x \cdot x_1 \cdot z) \vee (c \cdot x_1 \cdot z) \vee (x \cdot x_2 \cdot z) \vee (c \cdot x_2 \cdot z). \tag{3.1}$$

Notar que

$$\begin{aligned}
x \cdot c \cdot x_1 &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 && \text{por } \mathbf{prod} \\
&= x_1 \cdot x_2 && \text{por } \mathbf{Perm} \\
&= c \cdot x_1 \cdot z. && \text{por } \mathbf{comm} \text{ y } \mathbf{prod}
\end{aligned}$$

El mismo razonamiento nos permite obtener $c \cdot x_2 \cdot z = x \cdot c \cdot x_2$. Esto es para obtener una simetría, respecto a x y z, del término que estamos considerando, lo cual es automático en [11]. Ahora, podemos reescribir (3.1), como

$$(x \cdot x_1 \cdot z) \vee (x \cdot c \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2 \cdot z) \vee (x \cdot c \cdot x_2),$$

lo que es igual a

$$(x \cdot z \cdot x_1) \vee (x \cdot c \cdot x_1) \vee (x \cdot z \cdot x_2) \vee (x \cdot c \cdot x_2)$$

usando **comm**.

Ahora aplicamos **Mod2** para z:

$$[x \cdot ((z \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1))] \vee [x \cdot ((z \cdot x_2) \vee (c \cdot x_2))]$$

y así obtenemos

$$(x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2),$$

por $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ para z. Este último término es igual a x por **dist** y por lo tanto φ define una función. Este desarrollo es idéntico al de [11], a excepción del uso de **Perm** y **comm**.

La función definida por φ es sobreyectiva por **Onto**; probemos ahora que es inyectiva. Si $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ y $x = \langle\langle y_1, y_2 \rangle\rangle$, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1 \vee (x_1 \cdot x_2) \\
&= x_1 \vee (x \cdot c) && \text{por } \mathbf{prod} \\
&= x_1 \vee (y_1 \cdot y_2) && \text{por } \mathbf{prod} \text{ nuevamente} \\
&= x_1 \vee (y_1 \cdot c) && \text{por } \mathbf{Abs}
\end{aligned}$$

y luego $x_1 \geq y_1 \cdot c$. Simétricamente, $y_1 \geq x_1 \cdot c$ y en conclusión, por el Lema 1.1.13(1),

$$x_1 \cdot c = y_1 \cdot c. \tag{3.2}$$

Por otro lado,

$$
\begin{aligned}
x \cdot y_1 &= y_1 \cdot x && \text{por } \textbf{comm} \\
&= y_1 \cdot ((x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)) && \text{por } \textbf{dist} \\
&= (y_1 \cdot x \cdot x_1) \vee (y_1 \cdot x \cdot x_2) && \text{por } \textbf{Mod1} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot y_1 \cdot x_2) && \text{por } \textbf{comm} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot y_1 \cdot x_2 \cdot c) && \text{por } \textbf{Ori} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot c) && c \text{ central y } x \cdot c \leq x_1, y_1, x_2, y_2 \\
&= x \cdot y_1 \cdot x_1, && \text{por el mismo argumento.}
\end{aligned}
$$

y también

$$
\begin{aligned}
x \cdot x_1 &= ((x \cdot y_1) \vee (x \cdot y_2)) \cdot x_1 && \text{por } \textbf{dist} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot y_2 \cdot x_1) && \text{por } \textbf{Mod1} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot x_1 \cdot y_2) && \text{por } \textbf{Perm} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot x_1 \cdot y_2 \cdot c) && \text{por } \textbf{Ori} \\
&= (x \cdot y_1 \cdot x_1) \vee (x \cdot c) && c \text{ central y } x \cdot c \leq x_1, y_1, x_2, y_2 \\
&= x \cdot y_1 \cdot x_1. && \text{por el mismo argumento.}
\end{aligned}
$$

Así obtenemos $x \cdot x_1 = x \cdot y_1$.
(Aquí, debemos usar el hecho de que $x \cdot y_1 = y_1 \cdot x$ pues de lo contrario no es posible probar que $x \cdot y_1 = x \cdot x_1$).
Juntando esto con (3.2) y usando $\mathbf{p_1}$ tenemos

$$x_1 = (x \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1) = (x \cdot y_1) \vee (c \cdot y_1) = y_1.$$

Por el mismo razonamiento, $x_2 = y_2$. La parte anterior requiere un desarrollo más extenso que la prueba en [11]. Probaremos ahora que φ preserva $\cdot$. Supongamos $x = \langle\langle x_1, x_2 \rangle\rangle$ y $z = \langle\langle z_1, z_2 \rangle\rangle$; como cada I_1, I_2 es un subposemigrupo, sabemos que $x_j \cdot z_j \in I_j$ para $j = 1, 2$. Queremos ver $x \cdot z = \langle\langle x_1 \cdot z_1, x_2 \cdot z_2 \rangle\rangle$. La propiedad **prod** es inmediata (y por lo tanto podemos aplicar **Mod1** y **Mod2** para $x \cdot z$). Ahora probamos **dist**:

$$
\begin{aligned}
x \cdot z &= \big((x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2)\big) \cdot z && \text{por } \textbf{dist} \text{ para } x \\
&= (x \cdot x_1 \cdot z) \vee (x \cdot x_2 \cdot z). && \text{por } \textbf{Mod1}
\end{aligned}
$$

Este último término es igual a

$$(x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_1) \vee (x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_2) \vee (x \cdot x_2 \cdot z \cdot z_1) \vee (x \cdot x_2 \cdot z \cdot z_2), \tag{3.3}$$

por **dist** para z y **Mod1**. Notar que, para cualquier y

$$\begin{aligned}
(y \cdot z \cdot z_1) &= y \cdot z \cdot (z \cdot z_1 \vee c \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{p_1} \text{ para } z_1 \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (y \cdot z \cdot c \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{Mod1} \text{ para } z \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (y \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{prod} \text{ para } z \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (y \cdot z_2 \cdot z_1) && \text{por el Lema 1.1.2} \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (z_2 \cdot y \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{Perm} \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (z_1 \cdot z_2 \cdot y \cdot z_1) && \text{por el Lema 1.1.2 nuevamente} \\
&= (y \cdot z \cdot z_1) \vee (z \cdot c \cdot y \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{prod} \text{ para } z \\
&= (z \cdot y \cdot z \cdot z_1) \vee (z \cdot y \cdot c \cdot z_1) && \text{por el Lema 1.1.2 y por ser } c \text{ central} \\
&= z \cdot y \cdot (z \cdot z_1 \vee c \cdot z_1) && \text{por } \mathbf{Mod1} \text{ para } z \\
&= z \cdot y \cdot z_1.
\end{aligned}$$

Este desarrollo es necesario para poder permutar x_1 y x_2 con z en el primer y cuarto término de 3.3 respectivamente, pues no podemos garantizar que $\cdot$ actúe de manera conmutativa sobre estos elementos. Esta igualdad será utilizada varias veces en esta prueba, siempre por el mismo motivo. Análogamente, $z \cdot y \cdot z_2 = y \cdot z \cdot z_2$. Luego podemos reescribir el término 3.3 como

$$(x \cdot z \cdot x_1 \cdot z_1) \vee (x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_2) \vee (x \cdot x_2 \cdot z \cdot z_1) \vee (x \cdot z \cdot x_2 \cdot z_2).$$

Notar que

$$\begin{aligned}
x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_2 &= x \cdot x_1 \cdot z_2 \cdot z && \text{por } \mathbf{comm} \\
&= x \cdot x_1 \cdot z_2 \cdot c \cdot z && \text{por } \mathbf{Ori} \\
&= x \cdot c \cdot x_1 \cdot z_2 \cdot z \cdot c && \text{por el Lema 1.1.2 y por ser } c \text{ central} \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot x_1 \cdot z_2 \cdot z_1 \cdot z_2 && \text{por } \mathbf{prod} \text{ dos veces} \\
&= x_2 \cdot x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2. && \text{por } \mathbf{Perm}
\end{aligned}$$

Análogamente, $x \cdot x_2 \cdot z \cdot z_1 = x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2$.

Veamos que $(x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2) \leq (x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_1)$:

$$\begin{aligned}
(x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2) \cdot (x \cdot z \cdot x_1 \cdot z_1) &= x_2 \cdot z_2 \cdot x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_1 \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot z_2 \cdot x \cdot z \cdot z_1 && \text{por } \textbf{comm} \text{ y luego } \textbf{Perm} \text{ dos veces} \\
&= x \cdot c \cdot z_2 \cdot x \cdot z \cdot z_1 && \text{por } \textbf{prod} \text{ para } x \\
&= z_2 \cdot x \cdot z \cdot c \cdot z_1 \\
&= z_2 \cdot x \cdot c \cdot z \cdot c \cdot z_1 \\
&= z_2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_1 && \text{por } \textbf{prod} \text{ para } z \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot z_2 \cdot z_1 \\
&= x_1 \cdot x_2 \cdot z_1 \cdot z_2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto podemos eliminar los dos términos del medio en la Ecuación (3.3) y obtenemos **dist** para $x \cdot z$:

$$(x \cdot z) = \big((x \cdot z) \cdot (x_1 \cdot z_1)\big) \vee \big((x \cdot z) \cdot (x_2 \cdot z_2)\big).$$

Aquí el método para eliminar los dos términos también difiere de lo hecho en [11] Podemos obtener $\mathbf{p_1}$ y $\mathbf{p_2}$ de manera similar. Probamos $\mathbf{p_1}$:

$$\begin{aligned}
x_1 \cdot z_1 &= ((x \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1)) \cdot z_1 && \text{por } \mathbf{p_1} \text{ para } x \\
&= (x \cdot x_1 \cdot z_1) \vee (c \cdot x_1 \cdot z_1). && \text{por } \textbf{Mod2}
\end{aligned}$$

Por $\mathbf{p_1}$ para z seguido de **Mod2** en cada término del supremo, el último término es igual a

$$(x \cdot x_1 \cdot z \cdot z_1) \vee (x \cdot x_1 \cdot c \cdot z_1) \vee (c \cdot x_1 \cdot z \cdot z_1) \vee (x_1 \cdot c \cdot z_1). \tag{3.4}$$

Por lo observado anteriormente (que $z \cdot x_1 \cdot z_1 = x_1 \cdot z \cdot z_1$) y el hecho de que c es central, podemos reescribir este término como

$$(x \cdot z \cdot x_1 \cdot z_1) \vee (x \cdot c \cdot x_1 \cdot z_1) \vee (x_1 \cdot z \cdot c \cdot z_1) \vee (c \cdot x_1 \cdot z_1). \tag{3.5}$$

Notemos que $(x \cdot c \cdot x_1 \cdot z_1) = x \cdot (c \cdot x_1 \cdot z_1) \leq (c \cdot x_1 \cdot z_1)$ por lo que podemos eliminar el segundo término del supremo. Para eliminar el tercer término, podemos reescribirlo como:

$$\begin{aligned}
(x_1 \cdot z \cdot c \cdot z_1) &= (x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot z_1) && \text{Por } \textbf{prod} \text{ para } z \\
&= (x_1 \cdot z_2 \cdot z_1) \\
&= (x_1 \cdot z \cdot c) && \text{por } \textbf{prod} \text{ para } z \\
&= (c \cdot x_1 \cdot z). && \text{por ser } c \text{ central}
\end{aligned}$$

Veamos que $(c \cdot x_1 \cdot z) \leq (c \cdot x_1 \cdot z_1)$:

$$\begin{aligned}
(c \cdot x_1 \cdot z) \cdot (c \cdot x_1 \cdot z_1) &= z \cdot c \cdot x_1 \cdot z_1 \\
&= z_1 \cdot z_2 \cdot x_1 \cdot z_1 && \text{por } \textbf{prod} \text{ para } z \\
&= x_1 \cdot z_1 \cdot z_2 && \text{por } \textbf{Perm} \text{ dos veces} \\
&= x_1 \cdot z \cdot c && \text{por } \textbf{prod} \text{ para } z \\
&= c \cdot x_1 \cdot z. && \text{por ser } c \text{ central}
\end{aligned}$$

Luego la Ecuación 3.8 nos queda:

$$(x \cdot z \cdot x_1 \cdot z_1) \vee (c \cdot x_1 \cdot z_1)$$

y esto es igual a

$$((x \cdot z) \cdot (x_1 \cdot z_1)) \vee (c \cdot (x_1 \cdot z_1)).$$

La forma de eliminar los términos en esta última parte, también difiere ligeramente de la prueba original.
Vale aclarar que las principales diferencias respecto a la prueba que figura en [11], son los desarrollos necesarios para conmutar elementos, mientras que la estructura general de esta prueba es bastante similar a la de la prueba de la que fue adaptada. □

3.3 El teorema de factorización

El objetivo de esta sección es establecer una equivalencia entre las distintas descomposiciones en producto directo de un posemigrupo y sus pares de congruencias factor complementarias. Más específicamente, veremos que dos congruencias sobre A son factor complementarias si y solo si cada una de ellas se corresponde, para alguna descomposición de A en un producto directo $I_1 \times I_2$, con $\ker \pi_i$ donde π_i es la proyección canónica sobre I_i.
Comenzamos esta sección introduciendo algunos conceptos que serán necesarios.

Definición 3.3.1. Sea $(A, \cdot)$ un álgebra. Una congruencia sobre A es una relación de equivalencia θ sobre A tal que para todos $a, b, x, y \in A$, $(a, b) \in \theta$ y $(x, y) \in \theta$ implican $(a \cdot x, b \cdot y) \in \theta$. Denotamos por $Con(A)$ al conjunto de congruencias sobre A. Denotamos por a/θ a la clase de equivalencia de a bajo θ.

Definición 3.3.2. Sea $(A, \cdot)$ un álgebra y $\theta \in Con(A)$. La operación sobre A/θ dada por $a/\theta \tilde{\cdot} b/\theta = (a \cdot b)/\theta$ está bien definida, y siempre que hagamos referencia a una operación sobre un cociente A/θ haremos referencia a esta operación.

Lema 3.3.3. *Sean A y B dos álgebras. Si $f : A \to B$ es un homomorfismo, entonces $\ker f := \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$ es una congruencia sobre A.*

Demostración. Sean $a, b, x, y \in A$ tal que $(a, b) \in \ker f$ y $(x, y) \in \ker f$. Entonces $f(a \cdot x) = f(a) \cdot f(x) = f(b) \cdot f(y) = f(b \cdot y)$ y por lo tanto $(a \cdot x, b \cdot y) \in \ker f$. □

Definición 3.3.4. Dadas dos relaciones binarias θ y φ sobre un conjunto A, se define la *composición* $\theta \circ \varphi$ como la relación binaria sobre A compuesta por los pares $(x, y) \in A^2$ para los que existe $z \in A$ tal que $(x, z) \in \theta$ y $(z, y) \in \varphi$.

Definición 3.3.5. Dos congruencias $\varphi, \theta \in Con(A)$ se dicen *factor complementarias* si:

- $\varphi \cap \theta = id_A = \{(x, x) : x \in A\}$.
- $\theta \circ \varphi = \varphi \circ \theta = A \times A$.

Lema 3.3.6. *Si $\theta, \delta \in Con(A)$ son congruencias factor complementarias, entonces la función $f : A \to A/\theta \times A/\delta$ dada por $f(a) = \langle a/\theta, a/\delta\rangle$ es un isomorfismo de posemigrupos.*

Demostración. Veamos primero que f es homomorfismo de posemigrupos. Sean $a, b \in A$. $f(a \cdot b) = \langle (a \cdot b)/\theta, (a \cdot b)/\delta\rangle = \langle a/\theta \cdot b/\theta, a/\delta \cdot b/\delta\rangle = \langle a/\theta, a/\delta\rangle \cdot \langle b/\theta, b/\delta\rangle = f(a) \cdot f(b)$. Veamos ahora que f es inyectiva. Sean $a, b \in A$ tales que $f(a) = f(b)$. Esto nos dice que $a/\theta = b/\theta$ y $a/\delta = b/\delta$ y por lo tanto $(a, b) \in \theta \cap \delta$. Luego, como θ y δ son factor complementarias, tenemos que $a = b$. Veamos, por último que f es sobreyectiva. Sean $a, b \in A$, queremos ver que hay un c tal que $f(c) = \langle a/\theta, b/\delta\rangle$. Como $\theta \circ \varphi = A \times A$, sabemos que $(a, b) \in \theta \circ \varphi$, y por lo tanto existe un $c \in A$ tal que $(a, c) \in \theta$ y $(c, b) \in \varphi$. Luego $f(c) = \langle c/\theta, c/\varphi\rangle = \langle a/\theta, b/\varphi\rangle$. Así, f es un homomorfismo biyectivo y por lo tanto un isomorfismo. $\square$

Como $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ define un isomorfismo (relativo a I_1, I_2), existen proyecciones canónicas $\pi_j : A \to I_j$ con $j = 1, 2$ tal que:

$$\forall x \in A, x_1 \in I_1, x_2 \in I_2 \ : \ x = \langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle \iff \pi_1(x) = x_1 \ \& \ \pi_2(x) = x_2. \tag{3.6}$$

Lema 3.3.7. *Sea A un posemigrupo e I_1, I_2 dos posemigrupos tales que $A = I_1 \times I_2$. Entonces $\ker \pi_1$ y $\ker \pi_2$ son pares de congruencias factor complementarias.*

Demostración. Sabemos que $\ker \pi_1$ y $\ker \pi_2$ son congruencias por ser π_1 y π_2 homomorfismos. Veamos que son factor complementarias. Supongamos que $(x, y) \in \ker \pi_1 \cap \ker \pi_2$. Luego tenemos que $\pi_i(x) = x_i = \pi_i(y)$ para $i = 1, 2$ y por lo tanto $x = \langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle = y$. Así, $\ker \pi_1 \cap \ker \pi_2 = id_A$ tal como queríamos. Ahora queremos ver que $\ker \pi_1 \circ \ker \pi_2 = \ker \pi_2 \circ \ker \pi_1 = A \times A$. Sean $x, y \in A$ con $x = \langle\langle x_1, x_2\rangle\rangle$ e $y = \langle\langle y_1, y_2\rangle\rangle$. Tomemos $c = \langle\langle x_1, y_2\rangle\rangle$. Tenemos que $(x, c) \in \ker \pi_1$ y $(c, y) \in \ker \pi_2$ y luego $(x, y) \in \ker \pi_1 \circ \ker \pi_2$. Análogamente, tenemos que $(x, y) \in \ker \pi_2 \circ \ker \pi_1$. Luego, como x, y eran arbitrarios, obtenemos lo que queríamos. Así, $\ker \pi_1$ y $\ker \pi_2$ son congruencias factor complementarias. $\square$

Definamos, para toda congruencia θ on A, el conjunto $I_\theta := \{a \in A : a \ \theta \ c\}$.

Teorema 3.3.8. *Sea A un posemigrupo y $c \in A$ un elemento central. Los mapeos*

$$\begin{array}{ccc} \langle \theta, \delta \rangle & \overset{\mathsf{I}}{\longmapsto} & \langle I_\theta, I_\delta \rangle \\ \langle \ker \pi_2, \ker \pi_1 \rangle & \overset{\mathsf{K}}{\longleftarrow\!\shortmid} & \langle I_1, I_2 \rangle \end{array}$$

son mapas inversos definidos entre los pares de congruencias factor complementarias de A y el conjunto de pares de subposemigrupos I_1, I_2 de A tal que $A = I_1 \times_c I_2$.

Demostración. Primero probaremos que el mapeo I está bien definido, i.e. $I_\theta \times_c I_\delta = A$ para todo par de congruencias factor complementarias θ, δ. Es claro que I_θ, I_δ son subpo-semigrupos de A, y sabemos que el mapeo $a \mapsto \langle a/\theta, a/\delta \rangle$ es un isomorfismo entre A y $A/\theta \times A/\delta$. Bajo este isomorfismo, I_θ se corresponde con $\{\langle c', a'' \rangle : a'' \in A/\delta\}$ y I_δ con $\{\langle a', c'' \rangle : a' \in A/\theta\}$, donde $c' = c/\theta$ y $c'' = c/\delta$. De aquí en más identificaremos a I_θ e I_δ con sus respectivas imágenes isomórficas y verificaremos los axiomas para $I_\theta \times_c I_\delta = A$ en $A/\theta \times A/\delta$.

Como c es central, c' y c'' también lo son y de esto surge **Perm**. Para ver **Abs**, sean $x_1 = \langle c', x \rangle \in I_\theta$, $y_1 = \langle c', y \rangle \in I_\theta$ y $z_2 = \langle z, c'' \rangle \in I_\delta$ como en las hipótesis y supongamos que existe $x_1 \vee (y_1 \cdot z_2)$. Es decir, existe

$$\langle c', x \rangle \vee [\langle c', y \rangle \cdot \langle z, c'' \rangle] = \langle c', x \rangle \vee \langle c' \cdot z, y \cdot c'' \rangle.$$

Por el Lema 3.0.2, sabemos que debe existir $x \vee (y \cdot c'')$ en A/δ, y en conclusión,

$$\begin{aligned}\langle c', x \rangle \vee [\langle c', y \rangle \cdot \langle z, c'' \rangle] &= \langle c' \vee (c' \cdot z), x \vee (y \cdot c'') \rangle \\ &= \langle c', x \vee (y \cdot c'') \rangle \\ &= \langle c', x \rangle \vee [\langle c', y \rangle \cdot \langle c', c'' \rangle].\end{aligned}$$

Es decir, el otro supremo $x_1 \vee (y_1 \cdot c)$ existe y es igual al anterior. La otra mitad de esta parte es análoga.
Hasta aquí, el desarrollo de esta prueba es idéntico a la que figura en [11].

Para verificar **Mod1**, supongamos $x = \langle x', x'' \rangle$, $y = \langle y', y'' \rangle$, $x_1 = \langle c', x_1'' \rangle \in I_\theta$ y $x_2 = \langle x_2', c'' \rangle \in I_\delta$. Notar que $x \cdot c \leq x_1 \cdot x_2$ implica

$$x' \cdot c' \leq c' \cdot x_2' \qquad\qquad x'' \cdot c'' \leq x_1'' \cdot c''. \tag{3.7}$$

De la primera desigualdad de 3.7 obtenemos

$$\begin{aligned}(x' \cdot c') \cdot (x' \cdot x_2') &= x' \cdot x_2' \cdot c' && \text{por ser } c' \text{ central} \\ &= x' \cdot c' \cdot x_2 \cdot c' \\ &= (x' \cdot c') \cdot (x_2' \cdot c') \\ &= x' \cdot c'.\end{aligned}$$

Es decir, $x' \cdot c' \leq x' \cdot x_2'$.
Análogamente, de la segunda desigualdad de 3.7 obtenemos que $x'' \cdot c'' \leq x'' \cdot x_1''$.

Es decir:

$$x' \cdot c' \leq x' \cdot x_2' \qquad\qquad x'' \cdot c'' \leq x'' \cdot x_1'', \tag{3.8}$$

y por lo tanto tenemos $x' \cdot c' \cdot y' \leq x' \cdot x_2' \cdot y'$ y $x'' \cdot c'' \cdot y'' \leq x'' \cdot x_1'' \cdot y''$. Aplicando el Lema 3.0.2 obtenemos:

$$\begin{aligned}(x \cdot x_1 \vee x \cdot x_2) \cdot y &= \langle (x' \cdot c' \vee x' \cdot x_2') \cdot y', (x'' \cdot x_1'' \vee x'' \cdot c'') \cdot y'' \rangle \\ &= \langle x' \cdot x_2' \cdot y', x'' \cdot x_1'' \cdot y'' \rangle \\ &= \langle x' \cdot c' \cdot y' \vee x' \cdot x_2' \cdot y', x'' \cdot x_1'' \cdot y'' \vee x'' \cdot c'' \cdot y'' \rangle \\ &= x \cdot x_1 \cdot y \vee x \cdot x_2 \cdot y.\end{aligned}$$

Ahora, para distribuir a izquierda, las Ecuaciones. (3.7) también implican

$$\begin{aligned}y' \cdot x' \cdot c' &= y' \cdot x' \cdot c' \cdot x_2' \cdot c \\ &= y' \cdot x' \cdot x_2' \cdot c \\ &= c \cdot y' \cdot x' \cdot x_2'.\end{aligned}$$

Lo que nos da $y' \cdot x' \cdot c' \leq y' \cdot x' \cdot x_2'$ y, análogamente, $y'' \cdot x'' \cdot c' \leq y'' \cdot x'' \cdot x_1''$. Luego, junto con 3.8, tenemos

$$\begin{aligned}y \cdot (x \cdot x_1 \vee x \cdot x_2) &= \langle y' \cdot (x' \cdot c' \vee x' \cdot x_2'), y'' \cdot (x'' \cdot x_1'' \vee x'' \cdot c'') \rangle \\ &= \langle y' \cdot x' \cdot x_2', y'' \cdot x'' \cdot x_1'' \rangle \\ &= \langle y' \cdot x' \cdot c' \vee y' \cdot x' \cdot x_2', y'' \cdot x'' \cdot x_1'' \vee y'' \cdot x'' \cdot c'' \rangle \\ &= y \cdot x \cdot x_1 \vee y \cdot x \cdot x_2.\end{aligned}$$

Esta parte es ligeramente diferente a la que figura en [11] pues hay desarrollos de ecuaciones que no son necesarios en la prueba original.

La verificación de **Mod2** es similar.

Sean $x = \langle x', x'' \rangle$, $x_1 = \langle c', x'' \rangle$ y $x_2 = \langle x', c'' \rangle$. El mapeo $I_\theta \times I_\delta \to A/\theta \times A/\delta$ dado por $\langle x_1, x_2 \rangle \mapsto x$ es una biyección. Por lo tanto, para verificar **Exi** y **Onto** solo debemos ver que vale $\varphi(c, x_1, x_2, x)$:

comm Inmediato pues c es central.

dist Tenemos:

$$\begin{aligned}x = \langle x', x'' \rangle &= \langle x' \cdot x', x'' \cdot c'' \rangle \vee \langle x' \cdot c', x'' \cdot x'' \rangle \\ &= [\langle x', x'' \rangle \cdot \langle x', c'' \rangle] \vee [\langle x', x'' \rangle \cdot \langle c', x'' \rangle] \\ &= (x \cdot x_1) \vee (x \cdot x_2),\end{aligned}$$

que es lo que buscábamos.

$\mathbf{p_1}$ Aquí tenemos

$$\begin{aligned}x_1 = \langle x', c'' \rangle &= \langle x' \cdot x', x'' \cdot c'' \rangle \vee \langle x' \cdot c', c'' \cdot c'' \rangle \\ &= [\langle x', x'' \rangle \cdot \langle x', c'' \rangle] \vee [\langle c', c'' \rangle \cdot \langle x', c'' \rangle] \\ &= (x \cdot x_1) \vee (c \cdot x_1).\end{aligned}$$

$\mathbf{p_2}$ Análogo a **$\mathbf{p_1}$**

prod Por ser c central, nuevamente.

Aquí no hay diferencias con respecto a lo hecho en [11].

Sean π_θ y π_δ las proyecciones de $A/\theta \times A/\delta$ en I_θ yI_δ, respectivamente, definidas en (3.6). Como $\varphi(c, \langle c', x''\rangle, \langle x', c''\rangle, \langle x', x''\rangle)$, tenemos

$$\pi_\theta(\langle x', x''\rangle) = \langle c', x''\rangle \qquad\qquad \pi_\delta(\langle x', x''\rangle) = \langle x', c''\rangle \tag{3.9}$$

para todos $x' \in A/\theta$ y $x'' \in A/\delta$.

Probaremos ahora que cada uno de los mapeos I, K es el inverso del otro.

Primero probamos que $\mathsf{K} \circ \mathsf{I} = Id$. Para esto, debemos ver que $\ker \pi_\theta = \delta$ y $\ker \pi_\delta = \theta$. Usando (3.9) tenemos:

$$\ker \pi_\theta = \{\langle a, b\rangle : \pi_\theta(a) = \pi_\theta(b)\} = \{\langle a, b\rangle : a'' = b''\} = \delta,$$

donde $a = \langle a', a''\rangle$ y $b = \langle b', b''\rangle$. La prueba para $\ker \pi_\delta = \theta$ es análoga.

Ahora probamos $\mathsf{I} \circ \mathsf{K} = Id$. Verifiquemos $I_{\ker \pi_2} = I_1$. Tomando $x = c$ en **Onto** podemos deducir $c \in I_1 \cap I_2$, $\varphi(c, c, c, c)$ y luego $\pi_1(c) = \pi_2(c) = c$. Es inmediato que vale $\varphi(c, a, c, a)$ para todo a; en particular, para $a \in I_1$. Luego tenemos $\pi_2(a) = c = \pi_2(c)$ para todo $a \in I_1$ y entonces $I_1 \subseteq I_{\ker \pi_2}$. Ahora tomemos $a \in I_{\ker \pi_2}$; tenemos $\pi_2(a) = c$ y entonces $\varphi(c, a_1, c, a)$ para algún $a_1 \in I_1$. Por **prod** tenemos $a_1 \cdot c = a \cdot c$. Ahora considerando **$\mathbf{p_1}$** y **dist** obtenemos:

$$a_1 = (a \cdot a_1) \vee (c \cdot a_1) = (a \cdot a_1) \vee (a \cdot c) = a,$$

por lo tanto $a \in I_1$, lo que prueba $I_{\ker \pi_2} \subseteq I_1$. Obtenemos $I_{\ker \pi_1} = I_2$ de manera similar. Esto último es idéntico a lo hecho en [11].

$\square$

Capítulo 4

Las categorías PS y AP

En este capítulo estudiaremos la relación entre las categorías de posemigrupos (**PS**) y distintas categorías cuyos objetos son los posets asociativos (**AP**).

4.1 Introducción

Tenemos el funtor olvidadizo

$$U : \mathbf{PS} \to \mathbf{AP}$$

que asigna a cada posemigrupo su poset asociativo subyacente y que preserva los morfismos como funciones (es decir, U "olvida" estructura).

Antes de continuar, definamos las nociones de categoría, funtor, y adjunción.

Definición 4.1.1. Una *categoría* $\mathbf{A}$ consta de una colección de objetos $x, y, z, \ldots$ y una colección de morfismos $f, g, h, \ldots$ tal que:

- Cada morfismo tiene especificados un *dominio* y un *codominio* (objetos de la categoría). Escribimos $f : x \to y$ para denotar que x es el dominio de f e y su codominio.
- Cada objeto x tiene asociado un morfismo *identidad* $1_x : x \to x$.
- Para cada par de morfismos f y g tal que el dominio de g es igual al codominio de f, existe la *composición* gf cuyo dominio es igual al dominio de f y su codominio es igual al codominio de g.

Además, debe valer que:

- Para todo $f : x \to y$, $1_y f$ y $f 1_x$ son iguales a f.
- Para cualesquiera morfismos f, g, h tales que existen fg y gh tenemos que $(fg)h = f(gh)$. Es decir, la composición de morfismos es asociativa.

Dada una categoría $\mathbf{A}$ y objetos x, y pertenecientes a $\mathbf{A}$, denotamos por $\mathbf{A}(x, y)$ al conjunto de morfismos con dominio x y codominio y.

Definición 4.1.2. Un *funtor* $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ entre dos categorías $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$ consta de lo siguiente:

- Un objeto $Fc \in \mathbf{C}$ para cada objeto $c \in \mathbf{D}$.
- Un morfismo $Ff : Fc \to Fc'$ en $\mathbf{D}$ para cada morfismo $f : c \to c'$ en $\mathbf{C}$.

donde pedimos que esta asignación satisfaga las condiciones de funtorialidad:

- Para cada par de morfismos f, g en $\mathbf{C}$ tal que su composición existe, tenemos que $FfFg = F(fg)$.
- Para cada $c \in \mathbf{C}$, $F1_c = 1_{Fc}$.

Definición 4.1.3. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}$ categorías. Una *adjunción* de $\mathbf{X}$ en $\mathbf{A}$ es una terna $\langle F, G, \varphi \rangle$, donde $F : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ y $G : \mathbf{A} \to \mathbf{X}$ son funtores y φ es una función que asigna a cada par de objetos $x \in \mathbf{X}$, $a \in \mathbf{A}$ una biyección de conjuntos $\varphi_{x,a} : \mathbf{A}(Fx, a) \cong \mathbf{X}(x, Ga)$ que es *natural* en x y a. Decimos que F es un *adjunto a izquierda* de G y que G es un *adjunto a derecha* de F.

La condición de naturalidad de la definición anterior, para nuestro caso, puede reformularse de la siguiente manera: queremos que, para cada poset asociativo P y cada posemigrupo A, $\varphi_{P,A}$ sea una biyección entre $\mathbf{PS}(FP, A)$ y $\mathbf{AP}_i(P, UA)$ que asigne a cada morfismo de posemigrupos $f : FP \to A$, un morfismo de posets asociativos $\varphi_{P,A}f$ de manera tal que para todo morfismo de posets asociativos $h : P \to Q$ y para todo morfismo de posemigrupos $k : A \to B$ valga que $\varphi_{P,B}(k \circ f) = Uk \circ \varphi_{P,A}f$ y $\varphi_{Q,A}(f \circ Fh) = \varphi_{P,A}f \circ h$.
No tenemos, de antemano, una noción concreta de morfismo de posets asociativos, por lo que lo primero que deberemos hacer es intentar definir este concepto. En el desarrollo de este capítulo consideraremos dos categorías de posets asociativos, las cuales llamamos $\mathbf{AP}_0$ y $\mathbf{AP}_1$. El objetivo de este capítulo es determinar la existencia o no de un adjunto a izquierda para el funtor olvidadizo U, para distintas categorías de posets asociativos. Los resultados serán presentados en el mismo orden en el que surgieron, para una mejor ilustración del desarrollo de este trabajo.

Ejemplo 4.1.4. Consideremos el funtor olvidadizo $U : \mathbf{GRP} \to \mathbf{Set}$ que va de la categoría de los grupos a la categoría de los conjuntos. El adjunto a izquierda para este funtor esta dado por el funtor $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{GRP}$ que asigna a cada conjunto, el grupo libre sobre este conjunto.

Tanto en este ejemplo como en muchos otros (ver [4], [7]), la construcción de objetos libres está directamente relacionada con la construcción de adjuntos a izquierda para funtores olvidadizos. Al intentar construir un adjunto a izquierda, en realidad estamos buscando una forma canónica de “volver” a la categoría $\mathbf{PS}$.

Introducimos ahora algunos conceptos que utilizaremos en este capítulo. En las siguientes dos definiciones, P denotará a un poset asociativo.

Definición 4.1.5. Denotamos por O_P al conjunto de operaciones admisibles para P. Es decir $O_P := \{* : \langle P, *\rangle \text{ es un posemigrupo}\}$.

Definición 4.1.6. Denotamos por $\mathbf{A}_P$ al producto $\prod_{*\in O_P} \langle P, *\rangle$. Denotaremos por $\tilde{p}$ a los elementos de $\mathbf{A}_P$ tales que $(\tilde{p})_* = p$ para toda $* \in O_P$, es decir, $\tilde{p}$ tiene a p en cada una de sus coordenadas.

A continuación, damos algunas definiciones necesarias para el desarrollo de este capítulo junto con algunos lemas relacionados.
Enunciamos sin prueba el siguiente lema:

Lema 4.1.7. *Sean A y B álgebras de un tipo $\{\cdot\}$. Una función $f : A \to B$ es un homomorfismo entre A y B si y solo si para todo término $t(x_1, \ldots, x_n)$ de tipo $\{\cdot\}$ y todos $a_1, \ldots, a_n \in A$ vale que $f(t^A(a_1, \ldots, a_n)) = t^B(f(a_1), \ldots, f(a_n))$.*

Definición 4.1.8. Sea $(A, \cdot)$ un álgebra y $X \subset A^2$. Denotamos por $\mathrm{Cg}^A(X)$ a la menor congruencia, según la contención, que contiene a X. A esta congruencia se le llama la *congruencia generada por X*.

Enunciamos, sin demostración, el siguiente lema que nos permite caracterizar a las congruencias generadas:

Lema 4.1.9. *Sea A un álgebra y sean $c, d \in A$. Entonces $(c, d) \in \mathrm{Cg}^A(X)$ si y solo si existen términos de aridad $(n+m)$ $t_1(\bar{x}, \bar{u}), \ldots, t_k(\bar{x}, \bar{u})$, con k impar, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ con $(a_i, b_i) \in X$ y $\bar{z} \in A^m$ tales que:*

$$\begin{aligned} c &= t_1(\bar{a}, \bar{z}) \\ t_i(\bar{b}, \bar{z}) &= t_{i+1}(\bar{b}, \bar{z}), i \textit{ impar} \\ t_i(\bar{a}, \bar{z}) &= t_{i+1}(\bar{a}, \bar{z}), i \textit{ par} \\ t_k(\bar{b}, \bar{z}) &= d \end{aligned}$$

Lema 4.1.10. *Sean $\theta, \varphi \in Con(A)$ tales que $\theta \subset \varphi$. Llamemos $\varphi/\theta := \{(a/\theta, b/\theta) : (a, b) \in \varphi\}$. Entonces φ/θ es una congruencia en A/θ.*

Teorema 4.1.11 (Segundo teorema de isomorfismo)**.** *Sean $\theta, \varphi \in Con(A)$ tales que $\theta \subset \varphi$. Entonces la función $f : A/\theta/(\varphi/\theta) \to A/\varphi$ definida por $f(a/\theta/(\varphi/\theta)) = a/\varphi$ es un isomorfismo.*

Observación 4.1.12. En el resto de este capítulo, P a veces denotará un conjunto y a veces denotará un poset con universo P, siempre dejando en claro a que tipo de objeto nos estamos refiriendo.

Definición 4.1.13. Dado un lenguaje de primer orden L, y un conjunto de variables X, se define el álgebra $T(X)$ como el álgebra de términos de tipo L con variables pertenecientes a X.

Notación 1. *Dado un conjunto P, denotaremos al álgebra $T(P)$ por T_P. Escribiremos a los términos de T_P como $t(\bar{p})$ donde t es de tipo $\{\cdot\}$ y $t(\bar{x})$ tiene todas sus variables expuestas. Así, por ejemplo, si p y q son elementos de P, y tenemos el término $t(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$, $t(p, q)$ denotará al término $p \cdot q$ perteneciente a T_P. Dado un término $t(\bar{p}) \in T_P$, y $* \in O_P$, denotaremos por $t^{(P,*)}(\bar{p})$ al elemento de P que se obtiene de interpretar el término $t(\bar{p})$ en el álgebra $(P, *)$. Dada una función $f : P \to Q$ y $* \in O_Q$ y un término $t(\bar{p}) \in T_P$, $t(f(\bar{p}))$ denotará al término de T_Q que se obtiene de reemplazar cada ocurrencia de $p' \in \bar{p}$ por $f(p')$ y $t^{(Q,*)}(f(\bar{p}))$ denotará al elemento de Q que se obtiene de interpretar el término $t(f(\bar{p}))$ en el álgebra $(Q, *)$.*

A continuación, definiremos una congruencia sobre T_P, la cual llamamos D_P. Para un poset asociativo P, esta congruencia codifica las igualdades de términos que valen en toda estructura de posemigrupo admisible para P. También definimos, dados posets asociativos P y Q y una función $f : P \to Q$, un subconjunto de T_Q^2 el cual llamamos $D_{f,P}$. Notemos que, entre otras cosas, el orden del poset está dentro de la información que codifica D_P, pues $x \leq y$ si y solo si $(x \cdot y, x) \in D_P$.

Definición 4.1.14. Para un poset asociativo P, denotaremos por D_P a la siguiente congruencia sobre el álgebra de términos T_P: $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$ si y solo si para toda $* \in O_P$, $t_1^{(P,*)}(\bar{p}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q})$. Dada una función $f : P \to Q$ denotaremos por $D_{f,P}$ al siguiente subconjunto de T_Q^2: $(t_1(\bar{a}), t_2(\bar{b})) \in D_{f,P}$ si y solo si existen $\bar{p}$ y $\bar{q}$ tal que $f(\bar{p}) = \bar{a}$, $f(\bar{q}) = \bar{b}$ y $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$.

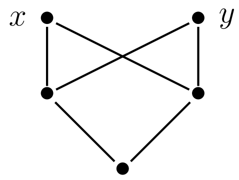
Veamos que efectivamente D_P es una congruencia sobre T_P:

Demostración. Sean $t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q}), s_1(\bar{a}), s_2(\bar{b})$ términos tales que $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$ y $(s_1(\bar{a}), s_2(\bar{b})) \in D_P$. Sabemos que, para toda $* \in O_P$, la interpretación en $(P, *)$ del producto (en T_P) de dos términos es el producto en $(P, *)$ de las interpretaciones de dichos términos. Con esto, tenemos que $(t_1(\bar{p}) \cdot s_1(\bar{a}))^{(P,*)} = t_1^{(P,*)}(\bar{p}) * s_1^{(P,*)}(\bar{a}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q}) * s_1^{(P,*)}(\bar{a}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q}) * s_2^{(P,*)}(\bar{b}) = (t_2(\bar{q}) \cdot s_1(\bar{b}))^{(P,*)}$ para todo $* \in O_P$, donde estas igualdades valen por hipótesis ya que $t_1^{(P,*)}(\bar{p}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q})$ y $s_1^{(P,*)}(\bar{a}) = s_2^{(P,*)}(\bar{b})$. Por lo tanto $(t_1(\bar{p}) \cdot s_1(\bar{a}), t_2(\bar{q}) \cdot s_2(\bar{b})) \in D_P$. Es sencillo verificar que además, D_P es una relación de equivalencia sobre T_P y así resulta una congruencia sobre T_P. □

El siguiente ejemplo busca ilustrar que el conjunto D_P codifica información que no se relaciona directamente con la definición de el orden.

Este poset admite dos estructuras de posemigrupo. En ambas vale que $x \cdot y = y$ e $y \cdot x = x$ por el Lema 1.1.13(4). Luego $(x \cdot y, y), (y \cdot x, x) \in D_P$.

Ejemplo 4.1.15.



4.2 Posemigrupos libres

En esta sección analizaremos los posemigrupos libres en n generadores, concepto que será fundamental para definir los adjuntos (o candidatos a adjuntos) en cada categoría $\mathbf{AP}_i$.

Definición 4.2.1. Sea K una variedad de tipo L. Dado un conjunto X, y el conjunto de términos sobre X, $T(X)$. Definimos la congruencia $\Theta_X(K)$ sobre $T(X)$ como

$$\Theta_X(K) = \bigcap \Phi_X(K),$$

donde

$$\Phi_X(K) = \{\varphi \in Con(T(X)) : T(X)/\varphi \in K\};$$

luego se define el K-álgebra libre sobre X como

$$F_K(X) = T(X)/\Theta_X(K)$$

.

Enunciamos sin demostración el siguiente lema

Lema 4.2.2. *$F_K(X)$ tiene la propiedad universal. Es decir, para toda $A \in K$ y para cualquier función $\alpha : X \to A$, existe un homomorfismo $\beta : F_K(X) \to A$ que cumple $\alpha(x) = \beta(x)$ para todo $x \in X$.*

Definición 4.2.3. Dado un conjunto P, definimos la congruencia (sobre T_P) R_P como la congruencia generada por $\{(x \cdot x, x) : x \in P\} \cup \{((x \cdot y) \cdot z, x \cdot (y \cdot z)) : x, y, z \in P\} \cup \{(x \cdot (y \cdot x), y \cdot x) : x, y \in P\}$.

Lema 4.2.4. *R_P es la menor congruencia sobre T_P, según la contención, tal que su cociente es un posemigrupo.*

Demostración. Es claro que T_P/R_P satisface los axiomas de banda regular a derecha y por lo tanto es un posemigrupo. Sea ahora θ una congruencia sobre T_P tal que T_P/θ es un posemigrupo. Luego tenemos que, para todos $x, y, z \in P$: $(x \cdot x, x) \in \theta$, pues los posemigrupos son idempotentes; $((x \cdot y) \cdot z, x \cdot (y \cdot z)) \in \theta$ pues los posemigrupos son asociativos; y $(x \cdot (y \cdot x), y \cdot x) \in \theta$, por 1.1.2. Luego tenemos que, por definición de congruencia generada, $R_P \subset \theta$. □

Corolario 4.2.5. *$F_K(P) \approx T_P/R_P$.*

Demostración. Por definición de $F_K(P)$ y por 4.2.4. $\square$

Denotaremos a T_P/R_P como $F_{PS}(P)$.

Observación 4.2.6. Podemos pensar a $F_{PS}(P)$ como el conjunto de palabras formadas por elementos de P, sin repeticiones. La operación de posemigrupo está dada por la concatenación de palabras, eliminando la primera ocurrencia de cada letra en caso de que hayan repeticiones en la concatenación.

Proposición 4.2.7. *Sea P un poset asociativo. Entonces $R_P \subset D_P$ y por lo tanto D_P/R_P es una congruencia sobre $F_{PS}(P)$.*

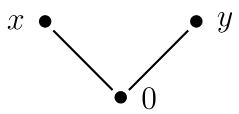
Demostración. Notemos que, por 1.1.5, $R_P \subset D_P$. La segunda parte es por 4.1.10. $\square$

4.3 La categoría $\mathbf{AP}_1$

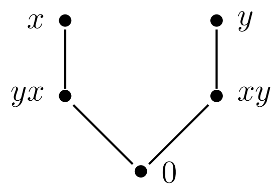
En esta sección, consideraremos la categoría $\mathbf{AP}_1$, la cual fue la primera categoría sobre la que trabajamos. Para construir esta categoría, primero consideramos, para cada poset asociativo P, el objeto G_P definido por:

Definición 4.3.1. $G_P = \langle \tilde{p} : p \in P \rangle_{\mathbf{A}_P}$. Es decir, G_P es la subálgebra de $\mathbf{A}_P$ generada por $\{\tilde{p} : p \in P\}$.

Ejemplo 4.3.2.



(a) P



(b) G_P

Observación 4.3.3. Notemos que, por la caracterización de las subálgebras generadas, cada término $t_1(\bar{p}) \in T_P$ se corresponde con un único elemento $a \in G_P$ donde $(a)_* = t_1^{(P,*)}(\bar{p})$ para toda $* \in O_P$. Distintos términos $t_1(\bar{p})$ y $t_2(\bar{q})$ se corresponden con un mismo elemento si y solo $t_1^{(P,*)}(\bar{p}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q})$ para toda $* \in O_P$. Es decir, si $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$.

Esta observación nos permite probar el siguiente lema:

Lema 4.3.4. *$G_P \approx T_P/D_P$.*

Demostración. Veamos que la función $f : T_P/D_P \to G_P$ dada por $f(t(\bar{p})/D_P) = t^G(\bar{p})$, donde $t^G(\bar{p})$ denota al elemento de G_P tal que $(t^G(\bar{p}))_* = t^{(P,*)}(\bar{p})$ para toda $* \in O_P$, está bien definida. Sean $t_1(\bar{p})$ y $t_2(\bar{q})$ tal que $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$. Luego tenemos, por definición de D_P, que $t_1^{(P,*)}(\bar{p}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q})$ para toda $* \in O_P$ y por lo tanto $t_1^G(\bar{p}) = t_2^G(\bar{q})$. Esto nos dice que f está bien definida. Además, 4.1.7 nos garantiza que por como está definida, resulta un homomorfismo. El hecho de que f es suryectiva se deduce de que todo elemento de G_P

se corresponde con al menos un término de T_P y por lo tanto será la imagen de la clase de equivalencia bajo D_P de dicho término. Para ver que f es inyectiva, supongamos que $f(t_1(\bar{p})/D_P) = f(t_2(\bar{q})/D_P)$. Esto nos dice, por definición de f, que $t_1^G(\bar{p}) = t_2^G(\bar{q})$ y por lo tanto $t_1^{(P,*)}(\bar{p}) = t_2^{(P,*)}(\bar{q})$ para toda $* \in O_P$. Luego $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$. Así, f resulta un homomorfismo biyectivo y por lo tanto un isomorfismo. $\square$

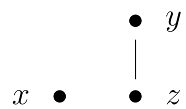
La construcción G_P fue sugerida por Miguel Campercholi y ha sido adaptada de otras construcciones tradicionales de objetos libres. Por este motivo es una buena candidata para definir el posemigrupo libre generado por un poset asociativo P. Para que esto se cumpla, consideramos la categoría $\mathbf{AP}_1$ cuyos objetos son todos los posets asociativos y morfismos dados por:

Definición 4.3.5. Sean P, Q posets asociativos. Una función $f : P \to Q$ será un *morfismo de posets asociativos en la categoría* $\mathbf{AP}_1$, o $\mathbf{AP}_1$-*morfismo*, si y solo si $D_{f,P} \subseteq D_Q$.

Notar que todo morfismo de esta categoría es un morfismo tradicional de posets.

Ejemplo 4.3.6.

(a) P



(b) Q

Tenemos que $\{(a \cdot b, b), (b \cdot a, a)\} \subset D_P$. La función $f : P \to Q$ definida por $f(a) = x$ y $f(b) = z$ es un $\mathbf{AP}_1$-morfismo, mientras que la función $g : P \to Q$ definida por $g(a) = x$ y $g(b) = y$ no lo es pues $(x \cdot y, y) \notin D_Q$. Notar que ambas funciones son homomorfismos de posets y por lo tanto no todo morfismo tradicional de posets es un $\mathbf{AP}_1$-morfismo.

Lema 4.3.7. $G_P \approx F_{PS}(P)/(D_P/R_P)$

Demostración. Por 4.1.11 junto con 4.3.4. $\square$

Teorema 4.3.8. *Sean P, Q posets asociativos, $f : P \to Q$ un* $\mathbf{AP}_1$*-morfismo, y $* \in O_Q$. Luego, existe un morfismo $\varphi : G_P \to (Q, *)$ que cumple que $\varphi(\tilde{p}) = f(p)$ para todo $p \in P$.*

Demostración. La condición $\varphi(\tilde{p}) = f(p)$ nos asegura que hay un único candidato a morfismo, que es la función φ que asigna a cada término $t(\bar{p})$ el término $t^{(Q,*)}(f(\bar{p}))$. Más aún, si vemos que la función $\varphi : G_P \to S$ dada por $\varphi(t(\bar{p})) = t^{(Q,*)}(f(\bar{p}))$ está bien definida, automáticamente será un morfismo de posemigrupos. Supongamos que tenemos términos $t_1(\bar{p})$ y $t_2(\bar{q})$ tal que $(t_1(\bar{p}))_{\tilde{*}} = (t_2(\bar{q}))_{\tilde{*}}$ para todo $\tilde{*} \in O_P$. Nos gustaría ver que $t_1^{(Q,*)}(f(\bar{p})) = t_2^{(Q,*)}(f(\bar{q}))$, pero esto vale exactamente por la definición de $\mathbf{AP}_1$-morfismo, puesto que $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$ y por lo tanto, como f es morfismo, $(t_1(f(\bar{p})), t_2(f(\bar{q}))) \in D_Q$. Luego $t_1^{(Q,*)}(f(\bar{p})) = t_2^{(Q,*)}(f(\bar{q}))$. $\square$

Observación 4.3.9. Si no vale que $D_{f,P} \subseteq D_Q$, es porque existen términos $t_1(\bar{p})$ y $t_2(\bar{q})$ con $(t_1(\bar{p}), t_2(\bar{q})) \in D_P$ y $* \in O_Q$ tal que $t_1^{(Q,*)}(f(\bar{p})) \neq t_2^{(Q,*)}(f(\bar{q}))$. Esto nos dice que no podemos definir un morfismo $\varphi : G_P \to S$ que cumpla $\varphi(\tilde{p}) = f(\tilde{p})$, pues esta condición implica que $t_1^{(Q,*)}(f(\bar{p})) = \varphi(t_1(\bar{p})) = \varphi(t_2(\bar{q})) = t_2^{(Q,*)}(f(\bar{q}))$.

Esto, justo con lo mencionado al comienzo del capítulo, hace que esta construcción sea una candidata natural para definir el adjunto a izquierda del funtor olvidadizo.
Pero:

Afirmación 4.3.10. *Los morfismos de posemigrupos, como funciones, no preservan D_P. Es decir, existen posemigrupos A y B, y un morfismo de posemigrupos $f : A \to B$ tal que $D_{f,UA}$ no esta contenido en D_{UB}.*

Ejemplo 4.3.11. Consideremos los posemigrupos con las tablas de multiplicar:

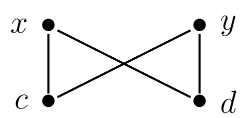
$\cdot$	x	y	c	d
x	x	y	c	d
y	x	y	c	d
c	c	c	c	d
d	d	d	c	d

(a) A

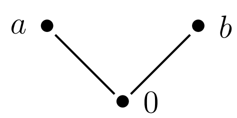
$\cdot$	0	a	b
0	0	0	0
a	0	a	b
b	0	a	b

(b) B

Cuyos posets asociativos subyacentes son:



(a) P



(b) Q

Notemos que la función $f : A \to B$ definida por $f(x) = a$, $f(y) = b$, $f(c) = f(d) = 0$ es morfismo de posemigrupos, pero $Uf : P \to Q$ no es un $\mathbf{AP}_1-$morfismo pues $(x \cdot y, y) \in D_P$ pero $(a \cdot b, b) \notin D_Q$, por lo tanto $D_{f,P} \nsubseteq D_Q$.

Esto nos dice que la asignación $U : \mathbf{PS} \to \mathbf{AP}_1$ no satisface las condiciones de funtorialidad y por lo tanto:

Afirmación 4.3.12. *No existe un funtor olvidadizo U : $\mathbf{PS} \to \mathbf{AP}_1$ que preserve los morfismos como funciones.*

4.4 La categoría $\mathbf{AP}_0$

Como podemos observar, el problema con la categoría considerada en la sección anterior, es que los morfismos de posemigrupos, como funciones, no preservan D_P. Podemos pensar entonces en otras propiedades que sí sean preservadas por estos morfismos, y utilizar las ideas de la sección anterior para definir un adjunto a izquierda para el funtor olvidadizo.

Afirmación 4.4.1. *Los morfismos de posemigrupos, como funciones, son morfismos de posets.*

Demostración. Sean A y B dos posemigrupos con posets subyacentes P y Q respectivamente. Sea $f : A \to B$ un morfismo de posemigrupos y x e y en P con $x \leq y$, queremos ver que $f(x) \leq_Q f(y)$. Esto vale pues $x \leq_P y \implies x \cdot_A y = x \implies f(x) = f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_B f(y) \implies f(x) \leq_Q f(y)$. $\square$

Esto motiva la elección de la categoría $\mathbf{AP}_0$, la cual es la categoría cuyos objetos son los posets asociativos y sus morfismos son exactamente los morfismos de posets.

Proposición 4.4.2. *Sean P y Q dos conjuntos y $f : P \to Q$ una función. Entonces existe un morfismo $\tilde{f} : F_{PS}(P) \to F_{PS}(Q)$. Además, este morfismo esta dado por $\tilde{f}(t(\bar{p})/R_P) = t(f(\bar{p}))/R_Q$.*

Demostración. Primero, tomemos la función $g : P \to UF_{PS}(Q)$ dada por $g(p) = f(p)$ para todo $p \in P$. Luego, por la propiedad universal tenemos que hay un morfismo $\tilde{f}$ que extiende a g. Por último, como $\tilde{f}$ es morfismo de posemigrupos, por 4.1.7, debe cumplir $\tilde{f}(t(\bar{p})/R_P) = t(f(\bar{p}))/R_Q$. $\square$

Definición 4.4.3. Para un poset asociativo P, consideremos el posemigrupo $F_P := F_{PS}(P)/\theta_P$ donde θ_P es la congruencia generada por $\{(x/R_P, (x \cdot y)/R_P) : x \leq y\}$.

Lema 4.4.4. *Sean P y Q posets asociativos y $f : P \to Q$ un morfismo de posets. La función $Ff : F_P \to F_Q$ dada por $Ff((t(\bar{p})/R_P)/\theta_P) = (t(f(\bar{p}))/R_Q)/\theta_Q$ está bien definida y es un morfismo de posemigrupos.*

Demostración. Tomemos un morfismo de posemigrupos $\tilde{f} : F_{PS}(P) \to F_{PS}(Q)$ que cumpla $\tilde{f}(t(\bar{p})/R_P) = t(f(\bar{p}))/R_Q$ para todo $t(\bar{p}) \in T_P$, el cual sabemos que existe por 4.4.2. Notemos que, en particular, esto implica $\tilde{f}(p/R_P) = f(p)/R_Q$ para todo $p \in P$. Ahora tomemos $c, d \in F_{PS}(P)$ (donde, $c = t(\bar{p})/R_P$ y $d = s(\bar{q})/R_P$) tales que $(c, d) \in \theta_P$. Si logramos ver que $(\tilde{f}(c), \tilde{f}(d)) \in \theta_Q$, podemos definir $Ff((t(\bar{p})/R_P)/\theta_P) := \tilde{f}(t(\bar{p})/R_P)/\theta_Q$, y por como tomamos $\tilde{f}$, esta función cumplirá lo que queremos.

Tenemos, por la caracterización de las congruencias generadas dada en 4.1.9, que existen términos de aridad $(n+m)$ $t_1(\bar{x}, \bar{u}), \ldots, t_k(\bar{x}, \bar{u})$, con k impar, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in P$ con $a_i \leq b_i$ y $\bar{z} \in F_{PS}(P)^m$ tales que:

$$c = t_1(a_1/R_P, \ldots, a_n/R_P, \bar{z}),$$
$$t_i((a_1 \cdot b_1)/R_P, \ldots, \bar{z}) = t_{i+1}((a_1 \cdot b_1)/R_P, \ldots, \bar{z})$$

para i impar,

$$t_i(a_1/R_P, \ldots, \bar{z}) = t_{i+1}(a_1/R_P, \ldots, \bar{z})$$

para i par,

$$t_k((a_1 \cdot b_1)/R_P, \ldots, \bar{z}) = d$$

Veamos ahora, que utilizando estos mismos términos y usando el hecho de que $f(a_i) \leq f(b_i)$, podemos atestiguar que el par $(\tilde{f}(c), \tilde{f}(d))$ está en la congruencia θ_Q, utilizando nuevamente la caracterización de las congruencias generadas.

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(c) &= \tilde{f}(t_1(a_1/R_P, \ldots, z_1, \ldots) && \text{por hipótesis} \\
&= t_1(\tilde{f}(a_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= t_1(f(a_1)/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots). && \text{por definición de } \tilde{f}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&t_i((f(a_1) \cdot f(b_1))/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) \\
&= t_i(f(a_1)/R_Q \cdot f(b_1)/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } R_Q \text{ congruencia} \\
&= t_i(\tilde{f}(a_1/R_P) \cdot \tilde{f}(b_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por definición de } \tilde{f} \\
&= t_i(\tilde{f}(a_1/R_P \cdot b_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= t_i(\tilde{f}((a_1 \cdot b_1)/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } R_P \text{ congruencia} \\
&= \tilde{f}(t_i((a_1 \cdot b_1)/R_P, \ldots, z_1, \ldots)) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= \tilde{f}(t_{i+1}((a_1 \cdot b_1)/R_P, \ldots, z_1, \ldots)) && \text{por hipótesis sobre } t_i \text{ y } t_{i+1} \\
&= t_{i+1}(\tilde{f}((a_1 \cdot b_1)/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= t_{i+1}(\tilde{f}(a_1/R_P \cdot b_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } R_P \text{ congruencia} \\
&= t_{i+1}(\tilde{f}(a_1/R_P) \cdot \tilde{f}(b_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= t_{i+1}(f(a_1)/R_Q \cdot f(b_1)/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por definición de } \tilde{f} \\
&= t_{i+1}((f(a_1) \cdot f(b_1))/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } R_Q \text{ congruencia}
\end{aligned}$$

si i es impar.

$$\begin{aligned}
&t_i(f(a_1)/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) \\
&= t_i(\tilde{f}(a_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por definición de } \tilde{f} \\
&= \tilde{f}(t_i(a_1/R_P, \ldots, z_1, \ldots)) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= \tilde{f}(t_{i+1}(a_1/R_P, \ldots, z_1, \ldots)) && \text{por hipótesis sobre } t_i \text{ y } t_{i+1} \\
&= t_{i+1}(\tilde{f}(a_1/R_P), \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo} \\
&= t_{i+1}(f(a_1)/R_Q, \ldots, \tilde{f}(z_1), \ldots) && \text{por definición de } \tilde{f}
\end{aligned}$$

si i es par.

$$\begin{aligned}
&t_k((f(a_1)\cdot f(b_1))/R_Q,\dots,\tilde{f}(z_1),\dots) && \\
&= t_k(f(a_1)/R_Q\cdot f(b_1)/R_Q,\dots,\tilde{f}(z_1),\dots) && \text{por ser } R_Q \text{ congruencia}\\
&= t_k(\tilde{f}(a_1/R_P)\cdot \tilde{f}(b_1/R_P),\dots,\tilde{f}(z_1),\dots) && \text{por definición de } \tilde{f}\\
&= t_k(\tilde{f}(a_1/R_P\cdot b_1/R_P),\dots,\tilde{f}(z_1),\dots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo}\\
&= t_k(\tilde{f}((a_1\cdot b_1)/R_P),\dots,\tilde{f}(z_1),\dots) && \text{por ser } R_P \text{ congruencia}\\
&= \tilde{f}(t_k((a_1\cdot b_1)/R_P,\dots,z_1,\dots) && \text{por ser } \tilde{f} \text{ un morfismo}\\
&= \tilde{f}(d). && \text{por hipótesis}
\end{aligned}$$

Como tenemos que $f(a_i) \leq f(b_i)$, sabemos que $(f(a_i)/R_Q, f(a_i)\cdot f(b_i)/R_Q) \in X$ donde $X := \{(a/R_Q,(a\cdot b)/R_Q) : a \leq_Q b\}$, y por lo tanto tenemos que $(\tilde{f}(c),\tilde{f}(d)) \in \theta_Q$. Así la función Ff está bien definida y tenemos que $Ff((t/R_P)/\theta_P\cdot(s/R_P)/\theta_P) = \tilde{f}(((t/R_P)\cdot s/R_P))/\theta_P) = (\tilde{f}((t/R_P))\cdot\tilde{f}(s/R_P)))/\theta_Q = (\tilde{f}((t/R_P)))/\theta_Q\cdot(\tilde{f}(s/R_P)))/\theta_Q = Ff((t/R_P)/\theta_P)\cdot Ff(s/R_P)/\theta_P)$ y así Ff es efectivamente un morfismo de posemigrupos.

□

Para un poset asociativo P, denotemos por η_P a la inclusión de P en UFP. Es decir, $\eta_P(p)$ denota al elemento $(p/R_P)/\theta_P$. Notar que el lema anterior nos permite probar lo siguiente:
Para todos P y Q posets asociativos, y $h : Q \to P$ morfismo de posets vale que

$$UFh\circ\eta_Q = \eta_P\circ h \tag{4.1}$$

Demostración. Sea $q \in Q$. Tenemos que $(\eta_P\circ h)(q) = \eta_P(h(q)) = (h(q)/R_P)/\theta_P$. Notar que, por definición de Fh, este elemento es igual a $Fh((q/R_Q)/\theta_Q) = Fh\circ\eta_Q(q)$, y como U perserva los morfismos como funciones, tenemos que esto es igual a $UFh\circ\eta_Q(q)$. □

Lema 4.4.5. *Dado un poset asociativo P, y un posemigrupo S tal que $US = P$ (i.e. $S = (P,*)$ para alguna $* \in O_P$), existe un morfismo de posemigrupos $f : F_P \to S$ tal que $f(\eta_p(p)) = p$ para todo $p \in P$.*

Demostración. Notemos que hay un morfismo $g : T_P/D_P \to S$ que cumple que $g(p/D_P) = p$, dado por $g(t(p_1,\dots,p_n)/D_P) = t^{(P,*)}(p_1,\dots p_n)$ el cual está bien definido por definicion de D_P.
Por otro lado, tenemos que $\theta_P \subset D_P/R_P$. Veamos esto: como para todos $x,y \in P$ tal que $x \leq y$ tenemos que $(x, x\cdot y) \in D_P$, tenemos que $\{(x/R_P,(x\cdot y)/R_P) : x \leq y\} \subset D_P/R_P$ por definición de D_P/R_P. Por otro lado, por definición de congruencia generada, esto nos dice que $\theta_P \subset D_P/R_P$.

Ahora, sabemos que hay un morfismo $\pi : F_P = (T_P/R_P)/\theta_P \to ((T_P/R_P)/\theta_P)/((D_P/R_P)/\theta_P)$ dado por la proyección, el cual cumple $\pi((p/R_P)/\theta_P) = ((p/R_P)/\theta_P)/((D_P/R_P)/\theta_P)$. También sabemos, por 4.1.11 que hay isomorfismos
$h_1 : ((T_P/R_P)/\theta_P)/((D_P/R_P)/\theta_P) \to ((T_P/R_P)/(D_P/R_P)$ y $h_2 : (T_P/R_P)/(D_P/R_P) \to T_P/D_P$, que cumplen
$h_1(((p/R_P)/\theta_P)/((D_P/R_P)/\theta_P)) = (p/R_P)/(D_P/R_P)$ y $h_2((p/R_P)/(D_P/R_P)) = p/D_P$. Si ahora tomamos $f = g \circ h_2 \circ h_1 \circ \pi : F_P \to S$ es morfismo por ser composición de morfismos, y además cumple que $f(\eta_P(p)) = p$. □

Esto nos dice que el objeto F_P es el posemigrupo libre generado por P si consideramos los morfismos de la categoría $\mathbf{AP}_0$, lo que hace que sea un candidato natural para definir un adjunto para el funtor olvidadizo $U : \mathbf{PS} \to \mathbf{AP}_0$.

Definición 4.4.6. Definimos la asignación $F : \mathbf{AP}_0 \to \mathbf{PS}$ que asigna a cada poset asociativo P el posemigrupo F_P y a cada morfismo de posets (entre posets asociativos) $f : P \to Q$, el morfismo de posemigrupos $Ff : F_P \to F_Q$.

Lema 4.4.7. $F : \mathbf{AP}_0 \to \mathbf{PS}$ *es un funtor.*

Demostración. Debemos ver que F satisface las dos condiciones de funtorialidad.

- Sean P, Q, S posets asociativos y sean $f : P \to Q$ y $g : Q \to S$ morfismos de posets. Queremos ver que $(Fg)(Ff) = F(gf)$. Sea $x \in F_P$ de la forma $x = (t(\bar{p})/R_P)/\theta_P$. Tenemos que $FgFf(x) = Fg((t(f(\bar{p}))/R_Q)/\theta_Q) = t(gf(\bar{p}))/R_S)/\theta_S) = Fgf(x)$. Así, $FgFf = Fgf$.

- Sea P un poset asociativo. Queremos ver que $F1_P = 1_{F_P}$. Tomemos $x = (t(\bar{p})/R_P)/\theta_P \in F_P$. Tenemos que $F1_P(x) = (t(1_P(\bar{p}))/R_P)/\theta_P = (t(\bar{p})/R_P)/\theta_P = x$. Luego $F1_P = 1_{F_P}$.

Así, F resulta un funtor. □

Proponemos entonces, como candidata a adjunción, a la terna $\langle F, U, \varphi \rangle$ donde $\varphi_{P,A}$ asigna, para cada par de objetos $P \in \mathbf{AP}_0$, $A \in \mathbf{PS}$ y cada morfismo $f : FP \to A$, el morfismo $\varphi_{P,A} f : P \to UA$ dado por $\varphi_{P,A}(f) = Uf \circ \eta_P$.

Teorema 4.4.8. *La terna* $\langle F, U, \varphi \rangle$ *es una adjunción de* $\mathbf{AP}_0$ *en* $\mathbf{PS}$.

Demostración. Veamos que $\varphi_{P,A}$ es una biyección entre $\mathbf{PS}(FP, A)$ y $\mathbf{AP}_0(P, UA)$

- $\varphi_{P,A}$ inyectiva:
Dados $g : F_P \to A$ y $h : F_P \to A$ dos morfismos de posemigrupos tales que $\varphi_{P,A} h = \varphi_{P,A} g$, es decir $Uh(\eta_P(p)) = Uh \circ \eta_P(p) = Ug \circ \eta_P(p) = Ug(\eta(p))$ para todo $p \in P$.

Veamos que g y h coinciden en todos los elementos de F_P de la forma $(p/R_P)/\theta_P$ con $p \in P$ (es decir, todo elemento de la forma $\eta_P(p)$). Tenemos que el elemento $h(\eta(p))$ (es decir, $h((p/R_P)/\theta_P)$) es el mismo elemento que $Uh(\eta_P(p))$ pues U preserva los morfismos como funciones. Por hipótesis, $Uh(\eta_P(p)) = Ug(\eta_P(p))$, siendo este último igual a $g(\eta_P(p))$ por el mismo razonamiento que antes. Luego $h(\eta_P(p)) = g(\eta_P(p))$ para todo $p \in P$.Sea ahora $x \in F_P$ de la forma $x = (t(p_1, \ldots, p_2)/R_P)/\theta_P$. Como g y h son morfismos, tenemos que

$$\begin{aligned}
g(x) &= g((t(p_1, \ldots, p_2)/R_P)/\theta_P) \\
&= t^A(g((p_1/R_P)/\theta_P), \ldots, g((p_n/R_P)/\theta_P)) \\
&= t^A(h((p_1/R_P)/\theta_P), \ldots, h((p_n/R_P)/\theta_P)) \\
&= h((t(p_1, \ldots, p_2)/R_P)/\theta_P) = h(x)
\end{aligned}$$

. Es decir, $g = h$ y por lo tanto $\varphi_{P,A}$ es inyectiva.

- $\varphi_{P,A}$ sobreyectiva:
  Sea $f : P \to UA$ un morfismo de posets. Tomemos $Ff : FP \to FUA$ morfismo de posemigrupos que extiende a f (dado por 4.4.4) y compongamos con un morfismo $g : FUA \to A$ que proyecta a FUA sobre A (dado por 4.4.5). Ahora tenemos que $\varphi_{P,A}(g \circ Ff)(p) = U(g \circ Ff) \circ \eta_P(p)$. Como U preserva los morfismos como funciones, este elemento es igual a $g(Ff(\eta_P(p)))$ que a su vez, por definición de Ff es igual a $g(\eta_{UA}(f(p)))$ y este último término es igual a $f(p)$ por como tomamos g. Por lo tanto, $f = \varphi_{P,A}(g \circ Ff)$.

Veamos ahora que φ satisface las condiciones de naturalidad. Es decir, queremos ver que para todo par de objetos $P \in \mathbf{AP}_0$ y $A \in \mathbf{PS}$, para todo morfismo de posemigrupos $f : FP \to A$, para todo morfismo de posets $h : Q \to P$ y para todo morfismo de posemigrupos $k : A \to B$ vale que $\varphi_{P,B}(k \circ f) = Uk \circ \varphi_{P,A} f$ y $\varphi_{Q,A}(f \circ Fh) = \varphi_{P,A} f \circ h$.

Por un lado tenemos que $\varphi_{P,B}(k \circ f) = U(k \circ f) \circ \eta_P = Uk \circ Uf \circ \eta_P = Uk \circ \varphi_{P,A} f$ tal como queríamos.
Por otro lado tenemos que $\varphi_{Q,A}(f \circ Fh) = U(f \circ Fh) \circ \eta_Q = Uf \circ UFh \circ \eta_Q = Uf \circ \eta_P \circ h = \varphi_{P,A} f \circ h$, pues $UFh \circ \eta_Q = \eta_P \circ h$ por la Ecuación 4.1.
Es decir, las condiciones de naturalidad valen.
Así, φ es una biyección natural entre $\mathbf{PS}(FP, A)$ y $\mathbf{AP}_0(P, UA)$, y por lo tanto la terna $\langle F, U, \varphi \rangle$ es una adjunción. □

4.5 Trabajo futuro

Concluimos este capítulo analizando otras categorías cuyos objetos son los posets asociativos, pero con nociones de morfismo más restrictivas que las de $\mathbf{AP}_0$. La idea es determinar con mayor exactitud que propiedades, expresables en términos de posets asociativos, preservan los morfismos de posemigrupos.

Todas las funciones que mencionamos de aquí en adelante serán morfismos de posets, pues sabemos que el orden es preservado por morfismos de posemigrupos.

La categoría $\mathbf{AP}_\exists$ es la categoría de posets asociativos con la siguiente definición de morfismo:

Definición 4.5.1. Una función $f : P \to Q$ entre posets asociativos será un morfismo en la categoría $\mathbf{AP}_\exists$ si y solo si existe alguna $* \in O_Q$ tal que la imagen de P mediante f es subuniverso de $\langle Q, * \rangle$.

La categoría $\mathbf{AP}_{\exists\forall}$ es la categoría de posets asociativos con la siguiente definición de morfismo:

Definición 4.5.2. Una función $f : P \to Q$ entre posets asociativos será un morfismo en la categoría $\mathbf{AP}_{\exists\forall}$ si y solo si para toda $\cdot \in O_P$, existe $* \in O_Q$ tal que $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$ para todos $x, y \in P$

La categoría $\mathbf{AP}_{\exists\exists}$ es la categoría de posets asociativos con la siguiente definición de morfismo:

Definición 4.5.3. Una función $f : P \to Q$ entre posets asociativos será un morfismo en la categoría $\mathbf{AP}_{\exists\exists}$ si y solo si existen $\cdot \in O_P$ y $* \in O_Q$ tal que $f(x \cdot y) = f(x) * f(y)$.

Esta definición, en particular, implica que la imagen de P mediante f admite una única estructura de posemigrupo que puede ser extendida a todo Q.

Apéndice

Probaremos ahora que los posets exhibidos en Figura 1 y Figura 2 son asociativos, y que además vale lo que afirmamos sobre cada uno en la introducción.

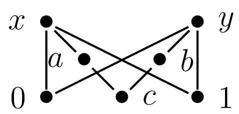


Figura 4.4: El perro.

Definimos sobre este poset, una operación dada por

$\cdot$	0	1	a	b	x	y	c
0	0	1	c	c	0	0	c
1	0	1	c	c	1	1	c
a	0	1	a	b	a	b	c
b	0	1	a	b	b	b	c
x	0	1	a	b	x	y	c
y	0	1	a	b	x	y	c
c	0	1	c	c	c	c	c

Veamos, primero, que es asociativa. Para esto, notemos que los pares de elementos $\{x, y\}$, $\{a, b\}$ y $\{0, 1\}$ tienen roles simétricos en la definición del producto. Por este motivo, si verificamos, por ejemplo, que $(x \cdot a) \cdot 0 = x \cdot (a \cdot 0)$, entonces ya sabemos que $(y \cdot b) \cdot 1 = y \cdot (b \cdot 1)$. También podemos notar que en los productos en donde el elemento que multiplica a derecha es minimal, la asociatividad vale trivialmente; es decir, es obvio, por ejemplo, que $(ax)0 = 0 = a(x0)$. Como última observación, podemos notar que los elementos x e y son neutros a izquierda para esta operación. Por este motivo, la asociatividad vale trivialmente en los productos donde alguno de estos elementos este multiplicando a izquierda. Esto nos permite reducir significativamente la cantidad de casos a chequear.

$$(aa)a = a = a(aa);\ (aa)b = b = a(ab);\ (aa)c = c = a(ac);\ (aa)0 = 0 = a(a0);$$
$$(aa)1 = 1 = a(a1);\ (aa)x = a = a(ax);\ (aa)y = b = a(ay);\ (ab)a = a = a(ba);$$
$$(ab)b = b = a(bb);\ (ab)c = c = a(bc);\ (ab)0 = 0 = a(b0);\ (ab)1 = 1 = a(b1);$$
$$(ab)x = a = a(bx);\ (ab)y = b = a(by);\ (ac)a = c = a(ca);\ (ac)b = c = a(cb);$$
$$(ac)c = c = a(cc);\ (ac)0 = 0 = a(c0);\ (ac)1 = 1 = a(c1);\ (ac)x = c = a(cx);$$
$$(ac)y = c = a(cy);\ (a0)a = c = a(0a);\ (a0)b = c = a(0b);\ (a0)c = c = a(0c);$$
$$(a0)0 = 0 = a(00);\ (a0)1 = 1 = a(01);\ (a0)x = 0 = a(0x);\ (a0)y = 0 = a(0y);$$
$$(a1)a = c = a(1a);\ (a1)b = c = a(1b);\ (a1)c = c = a(1c);\ (a1)0 = 0 = a(10);$$
$$(a1)1 = 1 = a(11);\ (a1)x = 1 = a(1x);\ (a1)y = 1 = a(1y);\ (ax)a = a = a(xa);$$
$$(ax)b = b = a(xb);\ (ax)c = c = a(xc);\ (ax)0 = 0 = a(x0);\ (ax)1 = 1 = a(x1);$$
$$(ax)x = a = a(xx);\ (ax)y = b = a(xy);\ (ay)a = a = a(ya);\ (ay)b = b = a(yb);$$
$$(ay)x = a = a(yx);\ (ay)y = b = a(yy);\ (ca)a = c = c(aa);\ (ca)b = c = c(ab);$$
$$(ca)x = c = c(ax);\ (ca)y = c = c(ay);\ (cb)a = c = c(ba);\ (cb)b = c = c(bb);$$
$$(cb)x = c = c(bx);\ (cb)y = c = c(by);\ (cc)a = c = c(ca);\ (cc)b) = c = c(cb);$$
$$(cc)x = c = c(cx);\ (cc)y = c = c(cy);\ (c0)a = c = c(0a);\ (c0)b = c = c(0b);$$
$$(c0)x = 0 = c(0x);\ (c0)y = 0 = c(0y);\ (c1)a = c = c(1a);\ (c1)b = c = c(1b);$$
$$(c1)x = 1 = c(1x);\ (c1)y = 1 = c(1y);\ (cx)a = c = c(xa);\ (cx)b = c = c(xb);$$
$$(cx)x = c = c(xx);\ (cx)y = c = c(xy);\ (cy)a = c = c(ya);\ (cy)b = c = c(yb);$$
$$(cy)x = c = c(yx);\ (cy)y = c = c(yy);\ (0a)a = c = 0(aa);\ (0a)b = c = 0(ab);$$
$$(0a)x = c = 0(ax);\ (0a)y = c = 0(ay);\ (0b)a = c = 0(ba);\ (0b)b = c = 0(bb);$$
$$(0b)x = c = 0(bx);\ (0b)y = c = 0(by);(0c)a = c = 0(ca);\ (0c)b = c = 0(cb);$$
$$(0c)x = c = 0(cx);\ (0c)y = c = 0(cy);\ (00)a = c = 0(0a);\ (00)b = c = 0(0b);$$
$$(00)x = 0 = 0(0x);\ (00)y = 0 = 0(0y);\ (01)a = c = 0(1a);\ (01)b = c = 0(1b);$$
$$(01)x = 1 = 0(1x);\ (01)y = 1 = 0(1y);\ (0x)a = c = 0(xa);\ (0x)b = c = 0(xb);$$
$$(0x)x = 0 = 0(xx);\ (0x)y = 0 = 0(xy);\ (0y)a = c = 0(ya);\ (0y)b = c = 0(yb);$$
$$(0y)x = 0 = 0(yx);\ (0y)y = 0 = 0(yy);$$

Por las obervaciones hechas anteriormente, la operación definida resulta asociativa. Veamos ahora que es la única operación de posemigrupo admisible para el Perro. Por Lema 1.1.13(4) tenemos que para toda operación de posemigrupo $\cdot$ definida sobre el perro $x \cdot y = y$ e $y \cdot x = x$. Como $a < x$, sabemos que $y \cdot a = y \cdot x \cdot a = x \cdot a = a$, luego $a \cdot y{\downarrow} \approx a{\downarrow}$ por Lema 1.3.11 y por lo tanto $a \cdot y = b$. Ahora, como $b < y$, tenemos que $a \cdot b = a \cdot y \cdot b = b \cdot b = b$. El resto de las restricciones sale del Corolario 1.3.13. También podemos notar que todas las restricciones salen directamente del Lema 1.3.11. De hecho, este lema fue la herramienta principal para hallar este contraejemplo.

Probemos ahora lo afirmado para El tulipán. Comenzaremos, como antes, definiendo una operación sobre este poset para luego verificar que es asociativa. El hecho de que es la única operación definible sobre este poset sale de aplicar el Lema 1.3.11 al poset sin el punto y (el cual es un subconjunto decreciente del tulipán). Como este subconjunto admite una única operación,

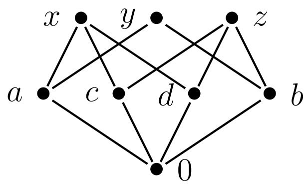


Figura 4.5: El tulipán.

Definimos sobre este poset, una operación dada por

$\cdot$	0	a	b	c	d	x	y	z
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	b	0	0	a	a	b
b	0	a	b	0	0	a	b	b
c	0	0	0	c	0	c	0	c
d	0	0	0	0	d	d	0	d
x	0	a	b	c	d	x	a	z
y	0	a	b	0	0	a	y	b
z	0	a	b	c	d	x	b	z

Lo dicho sobre la simetría en el poset anterior aplica también a este. También es automático que cualquier producto que involucre al 0, será 0 por ser este elemento un mínimo del poset. También es claro que esta es la única operación de posemigrupo admisible para este poset pues $x \cdot z = z$ y $z \cdot x = x$ por Lema 1.1.13(4), para toda $\cdot$ operación de posemigrupo, y luego el Lema 1.3.11 nos da las restricciones sobre los productos involucrando a los otros elementos (excepto y). Para ver que valen las restricciones sobre los productos involucrando a y, notemos que, para toda operación de posemigrupo $\cdot$, $x \cdot y \in \{y, a\}$, pero como $x{\downarrow}$ no es isomorfo a $y{\downarrow}$, tenemos que $x \cdot y = y \cdot x = a$. El mismo razonamiento prueba que $y \cdot z = z \cdot y = b$. De aquí todas las demás restricciones son inmediatas.

$(aa)a = a = a(aa)$; $(aa)b = b = a(ab)$; $(aa)c = 0 = a(ac)$; $(aa)d = 0 = a(ad)$;
$(aa)x = a = a(ax)$; $(aa)y = a = a(ay)$; $(aa)z = b = a(az)$; $(ab)a = a = a(ba)$;
$(ab)b = b = a(bb)$; $(ab)c = 0 = a(bc)$; $(ab)d = 0 = a(bd)$; $(ab)x = a = a(bx)$;
$(ab)y = b = a(by)$; $(ab)z = b = a(bz)$; $(ac)a = 0 = a(ca)$; $(ac)b = 0 = a(cb)$;
$(ac)c = 0 = a(cc)$; $(ac)d = 0 = a(cd)$; $(ac)x = 0 = a(cx)$; $(ac)y = 0 = a(cy)$;
$(ac)z = 0 = a(cz)$; $(ax)a = a = a(xa)$; $(ax)b = b = a(xb)$; $(ax)c = 0 = a(xc)$;
$(ax)d = 0 = a(xd)$; $(ax)x = a = a(xx)$; $(ax)y = a = a(xy)$; $(ax)z = b = a(xz)$;
$(ay)a = a = a(ya)$; $(ay)b = b = a(yb)$; $(ay)c = 0 = a(yc)$; $(ay)d = 0 = a(yd)$;
$(ay)x = a = a(yx)$; $(ay)y = a = a(yy)$; $(ay)z = b = a(yz)$; $(az)a = a = a(za)$;
$(az)b = b = a(zb)$; $(az)c = 0 = a(zc)$; $(az)d = 0 = a(zd)$; $(az)x = a = a(zx)$;
$(az)y = b = a(zy)$; $(az)z = b = a(zz)$; $(ca)a = 0 = c(aa)$; $(ca)b = 0 = c(ab)$;
$(ca)c = 0 = c(ac)$; $(ca)d = 0 = c(ad)$; $(ca)x = 0 = c(ax)$; $(ca)y = 0 = c(ay)$;
$(ca)z = 0 = c(az)$; $(cb)a = 0 = c(ba)$; $(cb)b = 0 = c(bb)$; $(cb)c = 0 = c(bc)$;
$(cb)d = 0 = c(bd)$; $(cb)x = 0 = c(bx)$; $(cb)y = 0 = c(by)$; $(cb)z = 0 = c(bz)$;
$(cc)a = 0 = c(ca)$; $(cc)b = 0 = c(cb)$; $(cc)c = c = c(cc)$; $(cc)d = 0 = c(cd)$;
$(cc)x = c = c(cx)$; $(cc)y = 0 = c(cy)$; $(cc)z = c = c(cz)$; $(cx)a = 0 = c(xa)$;
$(cx)b = 0 = c(xb)$; $(cx)c = c = c(xc)$; $(cx)d = 0 = c(xd)$; $(cx)x = c = c(xx)$;
$(cx)y = 0 = c(xy)$; $(cx)z = c = c(xz)$; $(cy)a = 0 = c(ya)$; $(cy)b = 0 = c(yb)$;
$(cy)c = 0 = c(yc)$; $(cy)d = 0 = c(yd)$; $(cy)x = 0 = c(yx)$; $(cy)y = 0 = c(yy)$;
$(cy)z = 0 = c(yz)$; $(cz)a = 0 = c(za)$; $(cz)b = 0 = c(zb)$; $(cz)c = c = c(zc)$;
$(cz)d = 0 = c(zd)$; $(cz)x = c = c(zx)$; $(cz)y = 0 = c(zy)$; $(cz)z = c = c(zz)$;
$(xa)a = a = x(aa)$; $(xa)b = b = x(ab)$; $(xa)c = 0 = x(ac)$; $(xa)d = 0 = x(ad)$;
$(xa)x = a = x(ax)$; $(xa)y = a = x(ay)$; $(xa)z = b = x(az)$; $(xb)a = a = x(ba)$;
$(xb)b = b = x(bb)$; $(xb)c = 0 = x(bc)$; $(xb)d = 0 = x(bd)$; $(xb)x = a = x(bx)$;
$(xb)y = b = x(by)$; $(xb)z = b = x(bz)$; $(xc)a = 0 = x(ca)$; $(xc)b = 0 = x(cb)$;
$(xc)c = c = x(cc)$; $(xc)d = 0 = x(cd)$; $(xc)x = c = x(cx)$; $(xc)y = 0 = x(cy)$;
$(xc)z = c = x(cz)$; $(xx)a = a = x(xa)$; $(xx)b = b = x(xb)$; $(xx)c = c = x(xc)$;
$(xx)d = d = x(xd)$; $(xx)x = x = x(xx)$; $(xx)y = a = x(xy)$; $(xx)z = z = x(xz)$;
$(xy)a = a = x(ya)$; $(xy)b = b = x(yb)$; $(xy)c = 0 = x(yc)$; $(xy)d = 0 = x(yd)$;
$(xy)x = a = x(yx)$; $(xy)y = a = x(yy)$; $(xy)z = b = x(yz)$; $(xz)a = a = x(za)$;
$(xz)b = b = x(zb)$; $(xz)c = c = x(zc)$; $(xz)d = d = x(zd)$; $(xz)x = x = x(zx)$;
$(xz)y = b = x(zy)$; $(xz)z = z = x(zz)$; $(ya)a = a = y(aa)$; $(ya)b = b = y(ab)$;
$(ya)c = 0 = y(ac)$; $(ya)d = 0 = y(ad)$; $(ya)x = a = y(ax)$; $(ya)y = a = y(ay)$;
$(ya)z = b = y(az)$; $(yb)a = a = y(ba)$; $(yb)b = b = y(bb)$; $(yb)c = 0 = y(bc)$;
$(yb)d = 0 = y(bd)$; $(yb)x = a = y(bx)$; $(ab)y = b = a(by)$; $(ab)z = b = a(bz)$;
$(ac)a = 0 = a(ca)$; $(yc)b = 0 = y(cb)$; $(yc)c = 0 = y(cc)$; $(yc)d = 0 = y(cd)$;
$(yc)x = 0 = y(cx)$; $(yc)y = 0 = y(cy)$; $(yc)z = 0 = y(cz)$; $(yx)a = a = y(xa)$;
$(yx)b = b = y(xb)$; $(yx)c = 0 = y(xc)$; $(yx)d = 0 = y(xd)$; $(yx)x = a = y(xx)$;
$(yx)y = a = y(xy)$; $(yx)z = b = y(xz)$; $(yy)a = a = y(ya)$; $(yy)b = b = y(yb)$;
$(yy)c = 0 = y(yc)$; $(yy)d = 0 = y(yd)$; $(yy)x = a = y(yx)$; $(yy)y = y = y(yy)$;
$(yy)z = b = y(yz)$; $(yz)a = a = y(za)$; $(yz)b = b = y(zb)$; $(yz)c = 0 = y(zc)$;
$(yz)d = 0 = y(zd)$; $(yz)x = a = y(zx)$; $(yz)y = b = y(zy)$; $(yz)z = b = y(zz)$;

Bibliografía

[1] J.A. Gerhard, *The lattice of equational classes of idempotent semigroups*, Journal of Algebra **15** (1970), 195–224.

[2] ______, *Subdirectly irreducible idempotent semigroups*, Pacific J. Math **39** (1971), 669–676.

[3] Wilfrid Hodges, *Model theory*, vol. 42, Cambridge: Cambridge University Press, 1993.

[4] S.M. Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[5] David Marker, *Model theory: An introduction*, vol. 217, New York, NY: Springer, 2002.

[6] Ralph N. McKenzie, George F. McNulty, and Walter F. Taylor, *Algebras, lattices, varieties. vol i*, The Wadsworth & Brooks/Cole Math. Series, Wadsworth Inc., Monterey, California, 1987.

[7] Emily Riehl, *Category theory in context*, Mineola, NY: Dover Publications, 2016.

[8] Itala M. d'Ottaviano Daniele Mundici R.L. Cignoli, *Algebraic foundations of many-valued reasoning*, Springer, Dordrecht, 2000.

[9] H. P. Sankappanavar S. Burris, *A course in universal algebra*, Springer New York, 1981.

[10] Pedro Sánchez Terraf, *Directly indecomposables in semidegenerate varieties of connected po-groupoids*, Order **25** (2008), no. 4, 377–386.

[11] ______, *Factor congruences in semilattices*, Revista de la Unión Matemática Argentina **52** (2011), no. 1, 1–10.

[12] R. Willard, *Varieties having boolean factor congruences*, Journal of Algebra **132** (1990), 130–152.

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por este Tribunal.

Dr. Pedro Sánchez Terraf   Dr. Miguel Campercholi   Dr. Héctor Gramaglia