



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

# ESTRUCTURA DE ÁLGEBRA DE POISSON DE LA COHOMOLOGÍA DE CIERTAS ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

Por: Gonzalo Emanuel Matías Gutierrez

Director: Dr. Leandro Cagliero

Tesis presentada ante la Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la Universidad Nacional de Córdoba.

Córdoba, 2022



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visite:  
[creativecommons.org](http://creativecommons.org)



*A mi madre y hermanos*



# Resumen

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y  $V = \bigwedge^\bullet \mathfrak{g}$ , la cohomología  $H^{\bullet,\bullet} = H^\bullet(\mathfrak{g}, \bigwedge^\bullet \mathfrak{g})$  posee una estructura de súper-álgebra de Poisson. Es decir, posee un producto asociativo súper-conmutativo  $\vee$  y un súper-corchete de Lie  $\{-, -\}$  que se compatibiliza con el producto  $\vee$  en el sentido que lo súper-deriva.

El objetivo de esta tesis es estudiar la estructura de álgebra de súper-Poisson de  $H^{\bullet,\bullet}$  para ciertas álgebras de Lie nilpotentes  $\mathfrak{g}$ . Esto incluye la estructura de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo y de la acción central, noción originalmente definida para la cohomología trivial  $H^{\bullet,0}$  y que en esta tesis se extiende su definición a  $H^{\bullet,\bullet}$  junto con resultados previos en este contexto generalizado.

Si pedimos que  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(n)}$ , donde  $V_{(n)}$  es el  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible de peso máximo  $n$ , entonces una familia ideal de álgebras de Lie nilpotentes a considerar está dada por las álgebras de Lie  $k$ -pasos nilpotentes libres en 2 generadores. En este contexto, fueron consideradas principalmente el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  y el álgebra de Lie 3-pasos nilpotentes libre  $\mathfrak{f}_{3,2}$ . Las dimensiones de  $H^{\bullet,\bullet}$  son 36 y 176 respectivamente y ambas tienen a  $\mathfrak{gl}(2)$  como subálgebra del álgebra de derivaciones exteriores, donde además, las derivaciones de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  tienen un radical no nulo. Para cada una de ellas se obtiene:

1. La estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo de toda la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$ .
2. La estructura de la acción central sobre la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$ .
3. La estructura de la acción del radical soluble de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  para  $\mathfrak{f}_{3,2}$ .
4. La estructura de Poisson de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$ .

Una primera parte de todo este proceso es encontrar, en cada grado, una lista completa de cociclos y cobordes  $\mathfrak{gl}(2)$ -dominantes. Esto produce la descomposición como  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos y como esta acción se entrelaza con la acción central, se obtienen las demás estructuras de módulos. En particular, obtenemos la serie de zócalo de estas estructuras.

Una característica distintiva que hacemos en la descripción de la estructura de Poisson es aprovechar la estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo obtenida. Para ello introducimos el concepto de  $G$ -tabla de un álgebra arbitraria  $\mathfrak{A}$ , la cual brinda una muy detallada información sobre la estructura del álgebra.

Luego de explicar este concepto y calcular las  $G$ -tablas (y  $G$ -cotablas) de ejemplos básicos, desarrollamos todo el trabajo para calcular las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas de las álgebras de Poisson  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$  en los casos particulares ya mencionados. En el cálculo de las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas es crucial introducir los coeficientes de Clebsch-Gordan y calcular lo que llamamos *productos de Clebsch-Gordan*. En este proceso, definimos una familia de álgebra de Poisson con álgebra de Lie subyacente  $\mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$ . Para  $n = 3$  obtenemos la cohomología  $H_E^{\bullet,\bullet}$  de  $\mathfrak{h}_1$ .

**Palabras claves:** Álgebras de Lie, Representaciones de álgebras de Lie, Cohomología de álgebras de Lie, Álgebras de Poisson.

**Mathematics Subject Classification (2020):** 17B10, 17B63, 17B56, 17B70.



# Agradecimientos

En estas pocas líneas, quiero dejar establecido mi mas profundo agradecimiento a aquellas personas que siempre estuvieron en los momentos que mas lo necesité y que continúan estando.

A mi madre por darme la vida y porque, mas allá de todas las caídas y retos que he tenido, sigue acreditando en mí. A toda mi familia, por ser el sustento principal de mis metas. Ustedes también forman parte de este logro.

A todos aquellos amigos y colegas que conocí durante mi transcurso en este doctorado y a todos aquellos amigos que he tenido la posibilidad de conocer previo a este periodo, tanto de la Universidad Nacional de Salta como también de la UFSCar en Brasil. Muchas gracias.

También le quiero agradecer a mi director Leandro, que además de guiarme en todo este proceso de formación, siempre ha tenido la paciencia a lo largo de todo este proceso y estuvo presente para algunos momentos difíciles que se me presentaron. Muchas gracias Leandro.

Por último, mi agradecimiento a la FaMAF por darme esta oportunidad de mi formación académica y al Conicet por el apoyo económico brindado en todo este periodo.

A todos, muchas gracias !



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>III</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares de Álgebras de Lie</b>	<b>13</b>
2.1. Álgebras . . . . .	13
2.2. Álgebras de Lie . . . . .	14
2.2.1. Álgebras Clásicas . . . . .	15
2.3. Semisimplicidad, solubilidad y nilpotencia . . . . .	15
2.4. Módulos . . . . .	17
2.5. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2)$ . . . . .	18
2.5.1. La Fórmula de Clebsch-Gordan . . . . .	21
2.5.2. $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles . . . . .	23
2.6. Álgebras de Lie cuadráticas . . . . .	24
2.7. Álgebras graduadas . . . . .	25
2.8. Álgebras de Poisson . . . . .	27
<b>3. Representaciones de álgebras de Lie no semisimples</b>	<b>31</b>
3.1. Módulos uniseriales sobre álgebras de Lie perfectas . . . . .	31
3.2. Representaciones de $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ con $\mathfrak{r}$ nilpotente . . . . .	34
<b>4. G-álgebras</b>	<b>37</b>
4.1. Introducción . . . . .	37
4.2. G-tablas . . . . .	39
4.2.1. Re-escalamiento . . . . .	40
4.2.2. Ejemplos de $\mathbb{S}_3$ -tablas . . . . .	40
4.3. $\mathfrak{sl}(2)$ -tablas . . . . .	44
4.3.1. Desarrollos de Clebsch-Gordan . . . . .	44
4.3.2. Coeficientes enteros . . . . .	45
4.3.3. Coeficientes de Clebsch-Gordan usuales . . . . .	46
4.3.4. Obtención de la $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla . . . . .	47
4.3.5. Ejemplos . . . . .	48
4.3.6. El álgebra de Polinomios $\mathbb{C}[x, y]$ . . . . .	52
4.3.7. El álgebra de los Octoniones . . . . .	53

4.4. La $\mathfrak{sl}(n)$ -tabla de familias de álgebras de Poisson . . . . .	56
<b>5. La Cohomología <math>H^{\bullet,\bullet}</math></b> . . . . .	<b>61</b>
5.1. El complejo de Chevalley-Eilenberg . . . . .	61
5.1.1. Notación . . . . .	65
5.2. Dualidad de Poincaré y Operador de Hodge . . . . .	67
5.3. Acción Central . . . . .	72
5.3.1. Entrelazamiento . . . . .	73
5.3.2. Acción central fiel . . . . .	74
5.4. Las álgebras de súper-Poisson $C^{\bullet,\bullet}$ y $H^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	76
<b>6. Estructura de Poisson en <math>H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)</math></b> . . . . .	<b>81</b>
6.1. Estructura de $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo en $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$ . . . . .	81
6.2. Acción central sobre $H^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	82
6.3. Producto Copa sobre $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ y $H_E^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	84
6.4. Corchete de Poisson sobre $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ y $H_E^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	88
6.4.1. Subálgebras . . . . .	90
6.4.2. Observación . . . . .	92
<b>7. Estructura de Poisson en <math>H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})</math></b> . . . . .	<b>93</b>
7.1. Álgebras de Lie nilpotentes libres . . . . .	93
7.2. Estructura de $(\mathfrak{gl}(2) \ltimes \Omega_2)$ -módulo de $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$ . . . . .	95
7.2.1. Acción de $\Omega_2$ . . . . .	97
7.2.2. Dualidades sobre $H^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	99
7.3. Acción central sobre $H^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	101
7.3.1. Representantes para $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	105
7.4. Producto copa y corchete de Poisson en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	107
7.4.1. Producto copa en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	107
7.4.2. Corchete de Poisson en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	109
<b>A. Comentarios finales</b> . . . . .	<b>113</b>
A.1. Acciones centrales sobre $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . . . . .	113
A.1.1. Producto $\otimes$ de grafos . . . . .	116
A.2. El álgebra de Diamante $\mathfrak{D}_4$ . . . . .	117
A.2.1. Producto copa sobre $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ y $H_E^{\bullet,\bullet}$ . . . . .	119
A.3. Cociclos y Cobordes de $C^{\bullet,1}(\mathfrak{f}_{3,2})$ . . . . .	121
A.3.1. $d : \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^2 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}$ . . . . .	121
A.3.2. $d : \wedge^2 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^3 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}$ . . . . .	121
A.3.3. $d : \wedge^3 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^4 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}$ . . . . .	122
<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Introducción

La noción de álgebra de Poisson nace en la mecánica Hamiltoniana como parte de la reformulación de la mecánica clásica y desde entonces se le ha encontrado diversos usos en áreas como geometría de Poisson, geometría simpléctica y grupos cuánticos, entre otros. Debido al desarrollo de las teorías de la súper-simetría, también hay un mayor interés por las súper-álgebras de Poisson, junto con otras súper-estructuras tales como las súper-álgebras de Lie y las súper-variedades.

Brevemente [CFL06, GR07, LGPV12], una súper-álgebra es un  $\mathbb{C}$ -espacio vectorial graduado  $\mathfrak{A} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_p$  munido de un producto asociativo (de grado cero)  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{A}_p \cdot \mathfrak{A}_q \subset \mathfrak{A}_{p+q}$ . Cualquier elemento  $a \in \mathfrak{A}_p$  se dice homogéneo de grado  $p$  y su grado es denotado por  $|a|$ . Se dice que el producto es súper-conmutativo si

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$$

para  $a, b \in \mathfrak{A}$  homogéneos.

Una súper-álgebra de Lie de grado  $n$  es un súper-espacio vectorial  $\mathcal{P}$  munido de un producto  $\{-, -\} : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  al que usualmente llamaremos corchete y que satisface las siguientes propiedades:

0.  $\{\mathcal{P}_p, \mathcal{P}_q\} \subset \mathcal{P}_{p+q-n}$ .
1.  $\{a, b\} = (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)+1} \{b, a\}$  (súper-anticonmutativa de grado  $n$ ).
2.  $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)} \{b, \{a, c\}\}$  (súper-Jacobi de grado  $n$ ).

Una súper-álgebra de Poisson es una terna  $(\mathcal{P}, \cdot, \{-, -\})$  donde  $\mathcal{P}$  es una súper-álgebra asociativa y súper-conmutativa con el producto  $\cdot : \mathcal{P} \otimes \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  y una súper-álgebra de Lie de grado 2 con el corchete  $\{-, -\}$ , donde ambos productos satisfacen la siguiente regla de compatibilidad:

$$\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + (-1)^{|b||a|} b \cdot \{a, c\}.$$

Si el súper-corchete  $\{-, -\}$  es de grado 1, entonces  $(\mathcal{P}, \cdot, \{-, -\})$  se conoce usualmente como álgebra de Gerstenhaber. Si  $\mathcal{P}$  es un espacio vectorial de grado 0 y  $\{-, -\}$  es un corchete de Lie en el sentido usual, entonces  $(\mathcal{P}, \cdot, \{-, -\})$  se conoce simplemente como álgebra de Poisson [KS96, CFL06]. Es decir, un álgebra de Poisson es un álgebra de Lie cuyo corchete  $\{x, -\}$  deriva el producto asociativo para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

Un ejemplo clásico de álgebra de Poisson es el álgebra de las funciones suaves sobre  $\mathbb{R}^{2n}$  que puede ser generalizado al álgebra de funciones suaves sobre una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  [CFL06]. Si  $\mathfrak{A}$  es un álgebra asociativa entonces la cohomología de Hochschild  $H^\bullet(\mathfrak{A}, \mathfrak{A})$  es un álgebra de Gerstenhaber [KS96, CFL06]. Por otro lado, si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces la cohomología  $H^{\bullet, \bullet}$  de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes

en el álgebra exterior  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}$  es un álgebra de súper-Poisson. Esta estructura de súper-Poisson es inducida por la estructura de súper-Poisson sobre el complejo de Chevalley  $C^{\bullet,\bullet}$  y que está dada por el corchete algebraico de Schouten [KS96].

El objetivo de esta tesis es describir con mucha precisión la estructura de álgebra de Poisson de  $H^{\bullet,\bullet}$  para ciertas álgebras de Lie donde  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa por derivaciones. La herramienta fundamental para conseguir este objetivo es el concepto de  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas. Así como en un álgebra su tabla de multiplicar (con respecto a una base) describe su estructura, la estructura multiplicativa de una  $G$ -álgebra [Tur95, The95] puede ser descrita a través de la  $G$ -tabla, proveyendo mucha más información que su mera tabla.

### La súper-álgebra de Poisson $H^{\bullet,\bullet}$

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita, entonces el el complejo  $C^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q} C^{p,q}$  es una súper-álgebra asociativa, donde  $C^{p,q} = C^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \cong \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \wedge^q \mathfrak{g}$  y en el producto asociativo  $\cdot : C^{p,q} \times C^{r,s} \rightarrow C^{p+r,q+s}$  intervienen los signos de Koszul:

$$(\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w) = (-1)^{|\psi||v|} \phi \wedge \psi \otimes v \wedge w \quad (1.1)$$

Este complejo se torna un álgebra de súper-Poisson con el súper-corchete  $\{, \} : C^{p,q} \otimes C^{r,s} \rightarrow C^{p+r-1,q+s-1}$  determinado por:

1.  $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = \{\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*\} = 0$
2.  $\{a, b\} = -(-1)^{|a||b|} \{b, a\}$
3.  $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + (-1)^{|a||b|} b \cdot \{a, c\}$
4.  $\{\phi, x\} = \phi(x) = \{x, \phi\}$

con  $a, b, c$  elementos homogéneos de  $C^{\bullet,\bullet}$  y  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  respectivamente. El diferencial de Chevalley-Eilenberg  $\delta$  sobre  $C^{\bullet,\bullet}$  súper-deriva el producto (1.1) y coincide con  $\{\mu, -\} : C^{p,q} \rightarrow C^{p+1,q}$ , donde  $\mu : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \in C^{2,1}$  denota el corchete de Lie de  $\mathfrak{g}$ . Luego, la cohomología:

$$H^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{p,q} H^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g})$$

hereda la estructura de súper-álgebra de Poisson de  $C^{\bullet,\bullet}$ , cuyo producto asociativo  $\vee : H^{p,q} \otimes H^{p',q'} \rightarrow H^{p+p',q+q'}$  es llamado copa y el corchete de Poisson  $\{-, -\} : H^{p,q} \otimes H^{p',q'} \rightarrow H^{p+p'-1,q+q'-1}$  es inducido por 1–4. Resulta que  $H^{\bullet,\bullet}$  también coincide con la cohomología a coeficientes triviales de  $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*$ , es decir la cohomología del fibrado cotangente del grupo de Lie  $G$  asociado a  $\mathfrak{g}$ . Dentro de la estructura de súper-álgebra de Poisson de  $H^{\bullet,\bullet}$  se distinguen:

- \* La estructura de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -modulo, donde  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = H^{1,1}$  son las derivaciones exteriores y forman una subálgebra de Lie de  $H^{\bullet,\bullet}$ , que por lo general no es semisimple.
- \* La estructura de la acción central. El centro  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  vía el producto interior y coincide con los corchetes de Poisson  $\{\mathfrak{z}, -\} : H^{\bullet,\bullet} \rightarrow H^{\bullet,\bullet-1}$ . Esta acción se extiende a un morfismo de álgebras asociativas  $\wedge^\bullet \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(C^{\bullet,\bullet})$  que en los grados ceros es conocida como la acción central [CJ03, CJN20].
- \* Las subálgebras de Poisson  $H_{diag}^{\bullet,\bullet} := \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} H^{p,p}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet} := \bigoplus_{p+q=0(2)} H^{p,q}$ . Observar que  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  es una subálgebra de Poisson de  $H_E^{\bullet,\bullet}$ .

Como  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  deriva el producto (1.1) de  $C^{\bullet,\bullet}$  y  $\delta(D \cdot \phi) - D \cdot \delta(\phi) = 0$  para todo  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ , la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  es una  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -súper-álgebra con el producto copa. Si  $\text{Der}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathfrak{r}$  con  $\mathfrak{r}$  el radical soluble de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ , entonces podemos usar la estructura de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -álgebra de Poisson de  $H^{\bullet,\bullet}$  y describir los productos de  $H^{\bullet,\bullet}$  en términos de sus  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas.

## G-álgebras

El concepto de G-álgebras (un álgebra en la que un grupo dado G actúa por automorfismos) tuvo sus inicios con J. A. Green [Gre58, Gre62] en el estudio sistemático de los módulos indescomponibles sobre álgebras de grupos, donde a su vez las G-álgebras se pueden utilizar como herramienta para la teoría de bloques, vinculada a la clasificación de las representaciones de G sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ . En esta tesis, el concepto de G-álgebra es utilizado para definir posteriormente el concepto de G-tabla asociada a un producto de una G-álgebra  $\mathfrak{A}$ , con la que podemos obtener información sobre la estructura de  $\mathfrak{A}$ . Obtener una G-tabla de  $\mathfrak{A}$  es un proceso sofisticado y que requiere entender primero la estructura de G-módulo de  $\mathfrak{A}$ .

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie que actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por derivaciones, diremos que  $\mathfrak{A}$  es una  $\mathfrak{g}$ -álgebra. Una G-Lie (resp.  $\mathfrak{g}$ -Lie) es un álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  tal que G actúa sobre  $\mathfrak{h}$  por automorfismo (resp.  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{h}$  por derivación). Para cada uno de estos conceptos definimos su G-tabla y  $\mathfrak{g}$ -tabla, según corresponda. Se puede pensar la misma noción en el caso de tener una coálgebra  $C$  tal que G actúa por automorfismos (resp. un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  que actúa por co-derivaciones) e introduciendo de manera natural el concepto de G-cotabla (resp.  $\mathfrak{g}$ -cotabla).

## Resultados

Los resultados de esta tesis están organizados en tres partes. En la primera, que corresponde centralmente al Capítulo 4, estudiamos resultados básicos sobre G-álgebras, especialmente cuando  $G = SU(2)$  e introducimos el concepto de G-tablas.

Recordemos que para un grupo arbitrario G, una G álgebra es un álgebra (que podría ser asociativa o de Lie)  $\mathfrak{A}$  donde G actúa por automorfismos [Tur94, Tur95].

Supongamos que G es semisimple en el sentido que toda representación es completamente reducible y sea  $\hat{G}$  un conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles. Si  $S = \{V_i : i \in I\}$  es un conjunto de representantes de cada clase de  $\hat{G}$ , para todo  $i, j, k \in I$  podemos fijar una base

$$\mathcal{B}_{i,j}^k = \left\{ \left( m^{i,j,k} \right)_1, \dots, \left( m^{i,j,k} \right)_{\ell(i,j,k)} \right\} \quad (1.2)$$

de  $\text{Hom}_G(V_i \otimes V_j, V_k)$ , que puede ser vacía para ciertos  $i, j, k \in I$  (en los principales casos de esta tesis,  $\dim \text{Hom}_G(V_i \otimes V_j, V_k) \leq 1$  así que  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  tiene a lo sumo un elemento). Si  $\mathfrak{A}$  es una G-álgebra, por ser un G-módulo, podemos elegir una descomposición de  $\mathfrak{A}$  en G-submódulos irreducibles:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_n$$

junto con los correspondientes G-morfismos  $\tau_r : V_{i(r)} \rightarrow \mathfrak{A}$  cuya imagen es  $\mathfrak{A}_r$  para todo  $1 \leq r \leq n$ . Podemos decir que los morfismos  $\tau_r$  son denominados *etiquetas*, puesto que  $V_{i(r)}$  representa un G-módulo irreducible abstracto mientras que  $\mathfrak{A}_r$  es la identificación del G-módulo  $V_{i(r)}$  dentro de  $\mathfrak{A}$ . Estos morfismos inducen una base de  $\text{Hom}_G(\mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_t)$  dada por:

$$\tilde{\mathcal{B}}_{r,s}^t = \left\{ \left( \tilde{m}^{r,s,t} \right)_1, \dots, \left( \tilde{m}^{r,s,t} \right)_{\ell(i(r),i(s),i(t))} \right\}. \quad (1.3)$$

Si  $(-\cdot-)_{r,s} : \mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s \rightarrow \mathfrak{A}$  es la restricción del producto de  $\mathfrak{A}$  sobre  $\mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s$ , entonces  $(-\cdot-)_{r,s}$  es un G-morfismo y por lo tanto podemos expresar la combinación lineal:

$$(- \cdot -)_{r,s} = \sum_{t=1}^n \sum_{q=1}^{\ell(i(r),i(s),i(t))} \gamma_{r,s,q}^t (\tilde{m}^{r,s,t})_q \quad (1.4)$$

donde  $\gamma_{r,s,q}^t \in \mathbb{C}$ . Se define **la G-tabla de  $\mathfrak{A}$**  con respecto a la elección de las bases  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  y a los morfismos  $\tau_\bullet$  a la colección de coeficientes  $\gamma_{r,s,q}^t$ . Tales coeficientes permiten describir de manera más eficiente y simultánea las estructuras multiplicativa y de G-módulo de  $\mathfrak{A}$ . Informalmente re-escribimos la información de la G-tabla como:

$$\mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{A}_s = \sum_{t=1}^n \sum_{q=1}^{\ell(i(r),i(s),i(t))} \gamma_{r,s,q}^t \mathfrak{A}_t \quad (1.5)$$

Por ejemplo, si  $G = SU(2)$  con correspondiente álgebra de Lie complexificada  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ , entonces el álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(2)$  y el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  son  $SU(2)$ -álgebras y sus  $SU(2)$ -tablas son:

$$\begin{array}{c|cc} [\cdot, \cdot] & V_{(0)} & V_{(2)} \\ \hline V_{(0)} & 0 & 0 \\ V_{(2)} & 0 & V_{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} [\cdot, \cdot] & V_{(0)} & V_{(1)} \\ \hline V_{(0)} & 0 & 0 \\ V_{(1)} & 0 & V_{(0)} \end{array}$$

En el capítulo 4, calculamos las G-tablas de algunos ejemplos básicos, que mencionamos a continuación. Por empezar, obtenemos la  $\mathbb{S}_3$ -tabla y la  $\mathbb{S}_3$ -cotabla de la biálgebra de grupo  $\mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$ .

Luego obtenemos algunas  $\mathfrak{sl}(2)$ -tablas. Esto requiere introducir los coeficientes de Clebsch-Gordan que corresponden a las bases descritas por la ecuación (1.2) y los **productos de Clebsch-Gordan** para calcular los coeficientes  $\gamma_{r,s}^t$  (ver sec. 4.3).

Se analiza la estructura de las  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebras  $\mathfrak{A}$  formadas por un único módulo irreducible  $V_{(n)}$ . Por el Teorema de Clebsch-Gordan, solo tienen sentido para  $n$  par y cada una de ellas admite una única estructura de  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra. En términos de  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla sería:

$$V_{(n)} \cdot V_{(n)} = V_{(n)}. \quad (1.6)$$

Además,  $\mathfrak{A}$  es conmutativa cuando  $n \equiv 0 \pmod{4}$  y  $\mathfrak{A}$  es anticonmutativa cuando  $n \equiv 2 \pmod{4}$  (Lema 4.3.3). En este último caso tenemos ninguna  $\mathfrak{A}$  es un álgebra alternativa (Prop. 4.3.1). Para  $n = 2$  aparece  $\mathfrak{sl}(2)$  y para  $n = 6$  obtenemos el álgebra de los octoniones imaginarios  $\text{Im } \mathbb{O}$ .

Se sabe que  $\text{Im } \mathbb{O}$  es un ejemplo de álgebra de Malcev (ver [BMS07] y Subsec. 4.3.7) que no es un álgebra de Lie. Es decir,  $\text{Im } \mathbb{O}$  es un álgebra anticonmutativa que satisface una identidad más débil de la identidad de Jacobi. La  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\mathbb{O}$  es:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & V_{(0)} & V_{(6)} \\ \hline V_{(0)} & V_{(0)} & V_{(6)} \\ V_{(6)} & V_{(6)} & q_1 V_{(0)} \oplus q_2 V_{(6)} \end{array}$$

donde  $q_1, q_2 \neq 0$  quedan determinadas según el tipo de bases que escogemos para los irreducibles  $V_{(n)}$  (Subsec. 4.3.2, 4.3.3). Por ejemplo, usando bases de Clebsch-Gordan estándares obtenemos que  $q_1 = -\frac{\sqrt{7}}{6} q_2^2$  (Subsec. 4.3.7). Además,  $\mathbb{O}$  admite deformaciones  $\mathfrak{A}_t$  con  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & V_{(0)} & V_{(6)} \\ \hline V_{(0)} & V_{(0)} & V_{(6)} \\ V_{(6)} & V_{(6)} & q_1 V_{(0)} \oplus t q_2 V_{(6)} \end{array}$$

que satisface las leyes alternativas (Def. 2.1.1) si y sólo si  $t = \pm 1$ . Por lo tanto  $\mathfrak{A}_t$  es una deformación no trivial de  $\mathbb{O}$  y la correspondiente álgebra  $\mathfrak{A}_t^-$  definida a través del conmutador es un álgebra de Malcev para todo  $t \in \mathbb{R}$  (Prop. 4.3.4).

Mediante rutinas computacionales se analizaron todas las  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebras  $\mathfrak{A} = V_{(n)}$  con  $10 \leq n \leq 22$  cuyas  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla son dadas por (1.6) y se concluyó que ninguna es un álgebra de Lie. Mas aún, ninguna de ellas es un álgebra de Malcev, con lo cual los casos  $n = 2, 6$  son ejemplos excepcionales que se pudieron reconocer. Esto permite enunciar la siguiente conjetura:

**Conjetura 1.0.1.** *La única  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie con descomposición  $\mathfrak{A} = V_{(n)}$  es  $\mathfrak{sl}(2)$ , que corresponde a  $n = 2$ .*

El capítulo 4 se cierra definiendo una nueva familia de álgebras de Poisson  $\mathcal{D}_n$  cuya estructura de álgebra de Lie subyacente es  $\mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$  y las correspondientes  $\mathfrak{sl}(n)$ -tablas son dadas por:

$\diamond$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$I_0$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$	0
$\mathfrak{sl}(n)_1$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$	0	0
$I_1$	$I_1$	0	0	0

$[-, -]$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$I_0$	0	0	0	0
$\mathfrak{sl}(n)_0$	0	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	0
$\mathfrak{sl}(n)_1$	0	$\mathfrak{sl}(n)_1$	0	0
$I_1$	0	0	0	0

Los detalles se encuentran en la sección 4.4.

Terminada esta primera parte, nos abocamos a estudiar en el resto de la tesis la estructura de la cohomología  $H^{\bullet, \bullet}$  para las álgebras de Lie Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  y libre 3-pasos nilpotentes  $\mathfrak{f}_{3,2}$ .

En la segunda parte de esta tesis (ver secciones 6.2, 7.3) se describe con mucha precisión la estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo de toda la cohomología  $H^{\bullet, \bullet}$  de las álgebras de Lie ya mencionadas junto con la acción central sobre  $H^{\bullet, \bullet}$ . Para estas descripciones utilizamos la notación  $V_{(m,k)}^{p,q}$  para referirnos a una  $\mathfrak{sl}(2)$ -componente irreducible de  $H^{p,q}$  de peso máximo  $m$  tal que la identidad de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa con peso  $k$ . Una flecha entre dos módulos  $V_{(m,k)}^{p,q} \rightarrow V_{(\tilde{m}, \tilde{k})}^{p,q}$  indica la acción del centro sobre la componente  $V_{(m,k)}^{p,q}$  respectivamente.

La acción central fue originalmente definida en [CJ03] para la cohomología trivial  $H^{\bullet, 0}$  y en esta tesis definimos su extensión a  $H^{\bullet, q}$  y por consiguiente a  $H^{\bullet, \bullet}$  (ver la sección 5.3). Tal acción define una representación de álgebras asociativas  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z} \rightarrow \text{End}(H^{\bullet, \bullet})$  y uno de los motivos de interés para los autores es por su relevancia con la Conjetura del Rango Toral (CRT).

En [CJ03] se prueba que toda álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  cuya acción central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  es fiel satisface la CRT. El Lema 4.1 de [CJ03] establece que la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  es fiel si y sólo si existe  $\omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  tal que  $\vartheta \cdot \omega \neq 0$ , siendo  $\vartheta$  un generador de  $\bigwedge^{\dim \mathfrak{z}} \mathfrak{z}$ . Además, en [CJ03], los autores conjeturan lo siguiente:

**Conjetura 1.0.2.** *La acción central sobre  $H^{\bullet, 0}(\mathfrak{g})$  es no trivial para toda álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita.*

Extendemos la definición de la acción central para la cohomología  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  donde  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo tal que  $\mathfrak{z}$  actúa trivialmente (un caso particular es tomar  $V = \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}$ ) y se prueba que, en este caso, el Lema 4.1 de [CJ03] sigue siendo válido. A continuación resumimos los resultados principales obtenidos sobre la acción central:

Con rutinas computacionales se calcularon las cohomologías triviales y adjuntas de todas las álgebras de Lie nilpotentes con  $\dim \leq 5$ , obteniendo así el siguiente cuadro:

alg. Lie	$\dim \mathfrak{g}$	$\dim H^{\bullet,0}$	rep. central fiel	$\dim H^{\bullet,1}$	rep. central fiel
$\mathfrak{g}_3 \cong \mathfrak{h}_1$	1	1, 2, 2, 1	✓	1, 4, 5, 2	✓
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}$	2	1, 3, 4, 3, 1	✓	2, 8, 13, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_4^1$	1	1, 2, 2, 2, 1	✓	1, 4, 6, 5, 2	✓
$\mathfrak{g}_4^1 \oplus \mathbb{C}$	2	1, 3, 4, 4, 3, 1	✓	2, 8, 14, 15, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}^2$	3	1, 4, 7, 7, 4, 1	✓	3, 14, 28, 30, 17, 9	✓
$\mathfrak{g}_5^1 \cong \mathfrak{h}_2$	1	1, 4, 5, 5, 4, 1	✓	1, 11, 20, 21, 15, 4	✓
$\mathfrak{g}_5^2$	2	1, 3, 6, 6, 3, 1	✓	2, 10, 19, 20, 12, 3	✓
$\mathfrak{g}_5^3$	1	1, 3, 4, 4, 3, 1	✓	1, 6, 13, 15, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_5^4 \cong \mathfrak{f}_{3,2}$	2	1, 2, 3, 3, 2, 1	×	2, 7, 9, 9, 7, 2	✓
$\mathfrak{g}_5^5$	1	1, 2, 3, 3, 2, 1	✓	1, 5, 8, 8, 6, 2	✓
$\mathfrak{g}_5^6$	1	1, 2, 3, 3, 2, 1	✓	1, 4, 7, 8, 6, 2	✓

Luego, para cada una de las álgebras listadas se calcularon las acciones centrales sobre  $H^{\bullet,0}$  y  $H^{\bullet,1}$ , concluyendo que sobre  $H^{\bullet,1}$  son todas fieles. Podemos extender la conjetura 1.0.2 para todo  $H^{\bullet,\bullet}$  del siguiente modo:

**Conjetura 1.0.3.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita. Para todo  $0 \leq q \leq \dim \mathfrak{g}$ , la acción central sobre  $H^{\bullet,q}$  es no trivial.*

La hipótesis de nilpotencia sobre  $\mathfrak{g}$  es necesaria. Por ejemplo si  $\mathfrak{g}$  es el álgebra de diamante  $\mathfrak{D}_4$  (que es un álgebra soluble del tipo cuadrática) entonces  $H^{\bullet,2} = 0$  y la acción central en este caso es trivial (ver el Apéndice A). Cuando  $\mathfrak{g}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie obtenemos el siguiente resultado:

**Proposición 1.0.1.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión  $n$  tal que  $\mathfrak{gl}(2) \subset \text{Der}_e(\mathfrak{g})$  y cuya identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  por escalar, entonces la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  es no trivial.*

**Corolario 1.0.1.** *Si  $\mathfrak{g}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie de dimensión  $n$  y  $\dim \mathfrak{g} = 1$ , entonces la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  es fiel.*



**Figura 1.0.1:** Acción central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1, \wedge^q \mathfrak{h}_1)$ ,  $q = 1, 2$

Para el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  la acción central sobre  $H^{\bullet,1}$  y  $H^{\bullet,2}$  se representa por los diagramas de la Figura 1.0.1. Para el álgebra de Lie libre  $\mathfrak{f}_{3,2}$  la acción central sobre  $H^{\bullet,0}$  se representa por el diagrama de la Figura

1.0.2 y la acción central sobre  $H^{\bullet,1}$  y  $H^{\bullet,2}$  se representa por los diagramas de la Figura 1.0.3. En este caso, también se indicó como actúa el radical soluble  $\Omega_2$  de las derivaciones exteriores de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  sobre cada  $H^{\bullet,\bullet}$  (que pueden mirarse en el capítulo 7).

Para  $\mathfrak{h}_1$  se calculó explícitamente toda la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  y la acción central sobre cada  $H^{\bullet,q}$ , mientras que para  $\mathfrak{f}_{3,2}$  el calculo explícito se realizó con  $H^{\bullet,0}$ ,  $H^{\bullet,1}$  y  $H^{\bullet,2}$ . El resto se obtiene a través de isomorfismos de  $\mathfrak{f}_{3,2}$ -módulos dado que  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es un álgebra de Lie cuadrática (es decir  $\mathfrak{f}_{3,2} \cong \mathfrak{f}_{3,2}^*$  como  $\mathfrak{f}_{3,2}$ -módulo).

El diagrama para  $q = 5$  es análogo a  $q = 0$  y los diagramas para  $q = 3, 4$  son análogos a  $q = 2, 1$  respectivamente. El Lema 4.1 de [CJ03] se materializa sobre estos diagramas mirando que es posible trazar un camino de longitud  $\dim \mathfrak{g}$ . Por ejemplo, para  $\mathfrak{f}_{3,2}$  la acción central sobre  $H^{\bullet,q}$  es fiel cuando  $1 \leq q \leq 4$  y no es fiel para  $q = 0, 5$ . Sin embargo, se sabe que  $\mathfrak{f}_{3,2}$  sí satisface la CRT.

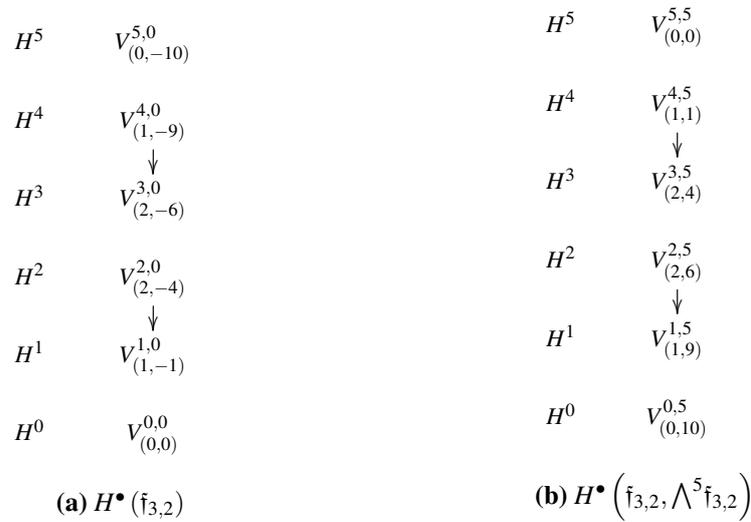


Figura 1.0.2: Acción central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2})$

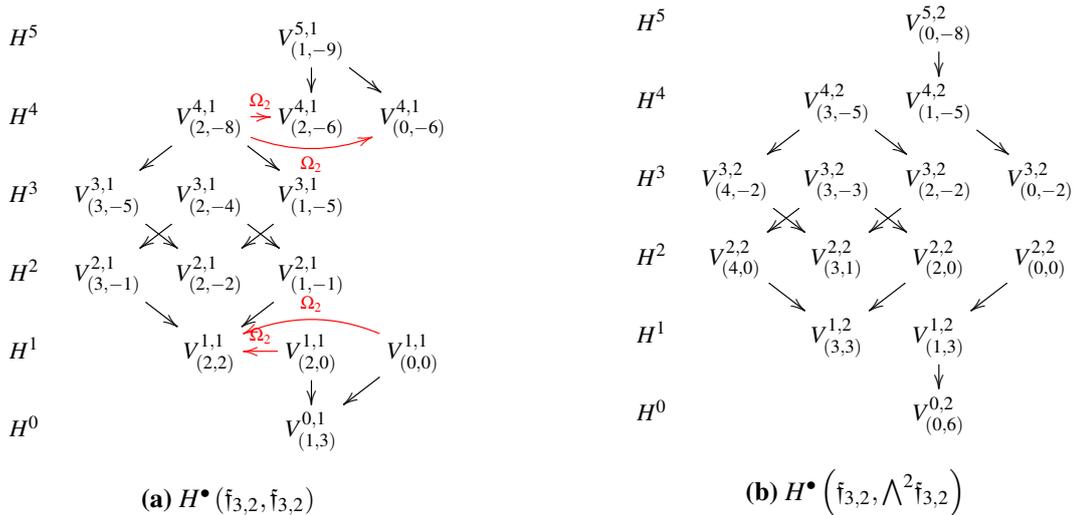


Figura 1.0.3: Acción central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2}, \mathfrak{f}_{3,2}^2)$

También se comenzó a estudiar la acción central para el álgebra de Lie Heisenberg  $\mathfrak{h}_m$  de dimensión  $2m + 1$ . Aquí la acción central sobre  $H^{\bullet,0}$  es fiel y como  $\mathfrak{gl}(2) \subset \text{Der}_e(\mathfrak{h}_m)$  cuya identidad  $\text{id}_2 \in \mathfrak{gl}(2)$  actúa con peso 2

sobre el centro de  $\mathfrak{h}_m$ , tenemos que  $\text{id}_2$  genera un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo  $V_{(0,0)}^{1,1}$  sobre  $H^{1,1}$  y  $V_{(0,0)}^{1,1} \rightarrow V_{(0,2)}^{0,1}$  es no trivial. Luego, la acción central sobre  $H^{\bullet,1}$  es fiel. Usando dualidad de Poincaré,  $V_{(0,-2)}^{m,m-1} \rightarrow V_{(0,0)}^{m-1,m-1}$  es no trivial y la acción central sobre  $H^{\bullet,m-1}$  también es fiel.

Un objetivo a futuro es estudiar la representación central sobre toda la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  para  $\mathfrak{h}_m$ , aprovechando que en [CT04] está calculada la estructura de  $\mathfrak{sp}(m)$ -módulo de la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$ . Por ejemplo para  $\mathfrak{h}_2$ , las representaciones centrales sobre  $H^{\bullet,1}$  y  $H^{\bullet,4}$  están descripta en los diagramas de la Figura 1.0.4.

$$\begin{array}{cccc}
 H^5 & & & V_{(3,-5)}^{5,1} \\
 H^4 & V_{(6,-4)}^{4,1} & V_{(2,-4)}^{4,1} & V_{(4,-4)}^{4,1} \\
 H^3 & V_{(1,-3)}^{3,1} & V_{(5,-3)}^{3,1} & V_{(7,-3)}^{3,1} \\
 H^2 & V_{(1,-1)}^{2,1} & V_{(5,-1)}^{2,1} & V_{(7,-1)}^{2,1} \\
 H^1 & V_{(0,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{1,1} & V_{(6,0)}^{1,1} \\
 H^0 & V_{(0,2)}^{0,1} & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{cccc}
 H^5 & V_{(0,-2)}^{5,4} & & \\
 H^4 & V_{(0,0)}^{4,4} & V_{(2,0)}^{4,4} & V_{(6,0)}^{4,4} \\
 H^3 & V_{(1,1)}^{3,4} & V_{(5,1)}^{3,4} & V_{(7,1)}^{3,4} \\
 H^2 & V_{(1,3)}^{2,4} & V_{(5,3)}^{2,4} & V_{(7,3)}^{2,4} \\
 H^1 & V_{(6,4)}^{1,4} & V_{(2,4)}^{1,4} & V_{(4,4)}^{1,4} \\
 H^0 & & & V_{(0,2)}^{0,1}
 \end{array}$$

(a)  $H^\bullet(\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_2)$  (b)  $H^\bullet(\mathfrak{h}_2, \wedge^4 \mathfrak{h}_2)$

**Figura 1.0.4:** Acción central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{h}_2, \wedge^q \mathfrak{h}_2)$ ,  $q = 1, 4$

En el Anexo A se muestran otras acciones centrales. En los casos  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{f}_{3,2}$ , como consecuencia de calcular las acciones centrales sobre cada  $H^{\bullet,q}$  y descomponer  $H^{\bullet,\bullet}$  en componentes  $\mathfrak{gl}(2)$ -irreducibles, se obtiene la estructura de  $H^{1,1} \rtimes \mathfrak{z}$ -módulo de  $H^{\bullet,\bullet}$  y con los diagramas de cohomología de cada  $H^{\bullet,q}$  se calcula la acción central de  $H^\bullet(\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}^*)$  cuyos diagramas de cohomología pueden mirarse en las Figuras 6.2.2 y 7.3.4 respectivamente.

Finalmente, en la tercera parte, describimos la estructura de álgebra de Poisson de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$  para  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{f}_{3,2}$ . Como  $H^{\bullet,\bullet}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -super-Poisson, para describir ambos productos graduados de  $H^{\bullet,\bullet}$  calculamos como primer paso los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,p}$  de la ecuación ((4.14)) mediante los productos de Clebsch-Gordan, tomando siempre bases simétricas sobre los  $\mathfrak{gl}(2)$ -irreducibles  $V_{(n,k)}^{p,p}$  (sec 2.5). Por ejemplo, el producto copa  $\vee : H^{p,p} \otimes H^{q,q} \rightarrow H^{p+q,p+q}$  de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  está descripto por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$$\begin{array}{c|ccc|ccc}
 \vee & V_{(0,0)}^{0,0} & V_{(0,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{3,3} \\
 \hline
 V_{(0,0)}^{0,0} & V_{(0,0)}^{0,0} & V_{(0,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{3,3} \\
 V_{(0,0)}^{1,1} & V_{(0,0)}^{1,1} & V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(2,0)}^{2,2} & & V_{(0,0)}^{3,3} & \\
 V_{(2,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{1,1} & V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{3,3} & & \\
 \hline
 V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(2,0)}^{2,2} & & V_{(0,0)}^{3,3} & & & \\
 V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{3,3} & & & & \\
 V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(0,0)}^{3,3} & & & & & 
 \end{array}
 \tag{1.7}$$

Si nos olvidamos de la estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo e identificamos  $\zeta = V_{(0,0)}^{1,1}$ ,  $\eta = V_{(2,0)}^{1,1}$  como nuevas variables, resulta que  $(H_{diag}^{\bullet,\bullet}, \vee)$  define un álgebra asociativa presentada por:

$$\mathbb{C}[\zeta, \eta] / \langle \zeta^4, \zeta^2 - \eta^2, \eta^2 \zeta \rangle$$

El corchete de Poisson sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  está descrito por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\vee$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$						
$V_{(0,0)}^{1,1}$						
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$4V_{(2,0)}^{1,1}$	$4V_{(2,0)}^{2,2}$		
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$4V_{(2,0)}^{2,2}$			
$V_{(0,0)}^{2,2}$						
$V_{(0,0)}^{3,3}$						

(1.8)

Como la  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie con  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla  $V_{(2)} \cdot V_{(2)}$  es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ , se concluye que  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie isomorfa a  $\mathfrak{gl}(2) \times \mathfrak{gl}(2)_{ab} \oplus \mathbb{C}^2$ , donde el factor  $\mathfrak{gl}(2)_{ab}$  es abeliano. Para la cohomología par  $H_E^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$ , el producto copa está presentado por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\vee$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$				
$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$-3V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,3)}^{1,3}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$			
$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,-3)}^{3,1}$		$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2}$				$V_{(0,0)}^{3,3}$	
$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$-3V_{(1,3)}^{1,3}$	$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus -V_{(0,0)}^{2,2}$				$-V_{(0,0)}^{3,3}$		
$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$								
$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$							
$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$				$V_{(0,0)}^{3,3}$					
$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$		$-V_{(0,0)}^{3,3}$							
$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$									

(1.9)

Aquí no es posible re-escalar los vectores dominantes para que los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,q}$  en la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla anterior sean todos iguales a 1. Por otro lado, el corchete de Poisson está presentado por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{-, -\}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$					
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$-3V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$4V_{(2,0)}^{1,1}$	$3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$3V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$-3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$3V_{(1,-3)}^{2,0}$			$-6V_{(2,0)}^{1,1} \oplus 6V_{(0,0)}^{1,1}$
$V_{(1,3)}^{0,2}$	$3V_{(1,3)}^{0,2}$	$3V_{(1,3)}^{0,2}$		$6V_{(2,0)}^{1,1} \oplus 6V_{(0,0)}^{1,1}$	
$V_{(0,0)}^{2,2}$				$6V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-6V_{(1,3)}^{1,3}$
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$4V_{(2,0)}^{2,2}$	$-6V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-6V_{(1,3)}^{1,3}$
$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-3V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,-3)}^{3,1}$			$3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus 3V_{(0,0)}^{2,2}$
$V_{(1,3)}^{1,3}$	$3V_{(1,3)}^{1,3}$	$3V_{(1,3)}^{1,3}$		$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus 3V_{(0,0)}^{2,2}$	
$V_{(0,0)}^{3,3}$					

(1.10)

Aunque no es evidente, de esta  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla se deduce que  $H_E^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie isomorfa a  $\mathfrak{gl}(3) \times \mathfrak{gl}(3)_{ab}$ , donde el factor  $\mathfrak{gl}(3)_{ab}$  es abeliano. Mas aún, tenemos siguiente Teorema:

**Teorema 1.1.**  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es una  $\mathfrak{sl}(3)$ -álgebra de Poisson isomorfa a  $\mathcal{L}_3$ .

En el caso del álgebra de Lie libre  $\mathfrak{f}_{3,2}$ , teniendo como punto inicial las descomposiciones en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles de cada  $H^{p,p}$  junto con sus representantes dominantes  $v_{n,k}^{p,p}$ , calculamos los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,p}$  para la

$\mathfrak{gl}(2)$ -tabla del producto copa a través de los productos de Clebsch-Gordan asociados (ver Subsec. 7.4.1). Luego, re-escalamos los dominantes escogidos y obtenemos que el producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$  está definido por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\vee$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$		$4V_{(4,0)}^{3,3}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$4V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$			$4V_{(2,0)}^{3,3}$
$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$							
$V_{(0,2)}^{2,2}$	$V_{(0,2)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$		$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		
$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$4V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$		$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$		$4V_{(2,0)}^{4,4}$
$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$							
$V_{(4,0)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$	$4V_{(4,0)}^{3,3}$	$4V_{(2,0)}^{3,3}$			$4V_{(2,0)}^{4,4}$		$4V_{(0,0)}^{4,4}$
$V_{(4,0)}^{3,3}$	$V_{(4,0)}^{3,3}$		$V_{(2,0)}^{4,4}$					$V_{(0,0)}^{5,5}$
$V_{(3,-1)}^{3,3}$	$V_{(3,-1)}^{3,3}$					$-V_{(0,0)}^{5,5}$		
$V_{(2,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$			$V_{(0,0)}^{5,5}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		$V_{(0,0)}^{5,5}$			
$V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,-2)}^{4,4}$			$V_{(0,0)}^{5,5}$				
$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		$V_{(0,0)}^{5,5}$					
$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{5,5}$						
$V_{(0,0)}^{5,5}$	$V_{(0,0)}^{5,5}$							

(1.11)

Como el procedimiento de re-escalar los vectores dominantes es mas complejo, fue necesario tener en cuenta los productos entre elementos cuyos grados son  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(2, 2)$  y  $(2, 3)$  respectivamente. Los detalles de esta parte se encuentra en 7.4.

Del mismo modo que en  $\mathfrak{h}_1$ , si nos olvidamos de la estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo e identificando  $V_{(0,0)}^{0,0} = 1$ ,  $V_{(0,0)}^{1,1} = \eta_1$ ,  $V_{(2,0)}^{1,1} = \eta_2$ ,  $V_{(2,2)}^{1,1} = \beta_1$ ,  $V_{(3,1)}^{2,2} = \gamma_1$ ,  $V_{(3,-1)}^{3,3} = \gamma_2$ ,  $V_{(2,-2)}^{4,4} = \beta_2$  como nuevas variables, la  $\mathfrak{gl}(2)$ -álgebra  $(H_{diag}^{\bullet,\bullet}, \vee)$  define un álgebra asociativa presentada por:

$$\mathbb{C}[\eta_1, \eta_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2] / \left\langle \eta_1^6 = 0, \eta_2^5 = 0, \eta_2^4 = 5\eta_1^4, \beta_1\beta_2 = \eta_1^5 = \gamma_1\gamma_2, \eta_2^3 - 5\eta_1^2\eta_2 = 0, \eta_1^2\eta_2^2 = \eta_1^4 \right\rangle$$

El corchete de Poisson sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$  está definido por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{ \cdot, \cdot \}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$								
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$-\frac{\sqrt{3}}{6}V_{(2,2)}^{1,1}$			$-\frac{\sqrt{3}}{12}V_{(3,1)}^{2,2}$	
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$		$V_{(2,0)}^{2,2}$	$\frac{15}{4}V_{(3,1)}^{2,2}$	$3V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(2,2)}^{1,1}$		$\frac{\sqrt{3}}{6}V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$					
$V_{(0,0)}^{2,2}$								
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$V_{(2,0)}^{2,2}$			$V_{(2,0)}^{3,3}$		$12V_{(4,0)}^{3,3}$
$V_{(3,1)}^{2,2}$		$\frac{\sqrt{3}}{12}V_{(3,1)}^{2,2}$	$\frac{15}{4}V_{(3,1)}^{2,2}$					
$V_{(4,0)}^{2,2}$			$3V_{(4,0)}^{2,2}$			$12V_{(4,0)}^{3,3}$		$12V_{(2,0)}^{3,3}$
$V_{(4,0)}^{3,3}$			$3V_{(4,0)}^{3,3}$					$3V_{(2,0)}^{4,4}$
$V_{(3,-1)}^{3,3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{12}V_{(3,-1)}^{3,3}$	$\frac{15}{4}V_{(3,-1)}^{3,3}$				$-\frac{15}{4}V_{(2,0)}^{4,4} \oplus -\frac{\sqrt{3}}{12}V_{(0,0)}^{4,4}$	
$V_{(2,0)}^{3,3}$			$V_{(2,0)}^{3,3}$			$V_{(2,0)}^{4,4}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$								
$V_{(2,-2)}^{4,4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{6}V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4} \oplus \frac{\sqrt{3}}{6}V_{(0,0)}^{4,4}$				
$V_{(2,0)}^{4,4}$			$V_{(2,0)}^{4,4}$					
$V_{(0,0)}^{4,4}$								
$V_{(0,0)}^{5,5}$								

(1.12)

En este caso, los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,p}$  de la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla anterior se obtienen usando los re-escalados de los vectores dominantes  $v_{n,k}^{p,p}$  de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$  y que presentan al producto copa con la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (1.11) (ver sec. 7.4).

Finalmente, en el Anexo A se menciona como observación un procedimiento para calcular acciones centrales sobre  $H^{\bullet,0}$  para una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ . Mediante la Fórmula de Künneth se calcula la descomposición de  $H^{\bullet,0}$  en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles y como  $\{z, -\} = \iota_z$  súper-deriva el producto wedge, calculamos la acción central de  $\mathfrak{g}$  conociendo las acciones centrales de  $\mathfrak{g}_1$  y  $\mathfrak{g}_2$  previamente. En este contexto, observamos que el diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$  se obtiene a partir del producto  $\otimes$  entre los grafos  $G_i$  definidos por los diagramas de cohomología  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_i)$  sobre cada factor.



# Capítulo 2

## Preliminares de Álgebras de Lie

Este capítulo presenta una recopilación de los resultados clásicos de la teoría de álgebras de Lie. No se incluyen las demostraciones de la mayoría de los resultados expuestos y las mismas pueden encontrarse en [Hum78, Jac79]. Salvo mención previa, los espacios vectoriales y álgebras mencionadas son de dimensión finitas sobre el cuerpo de los complejos  $\mathbb{C}$ .

### 2.1. Álgebras

Antes de definir las álgebras de Lie, presentamos algunas definiciones de álgebras en general que nos serán útiles para el Capítulo 4. Todas las definiciones presentadas pueden encontrarse en cualquier texto de álgebra abstracta (ver por ejemplo [BMS07] y sus referencias).

**Definición 2.1.1.** Un álgebra es un espacio vectorial  $\mathfrak{A}$  junto con una aplicación bilineal  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ ,  $(x, y) \mapsto xy$  llamada usualmente producto ó multiplicación.

Un álgebra  $\mathfrak{A}$  se dice que es **unitaria** si existe un elemento  $1 \in \mathfrak{A}$  tal que  $1x = x = x1$  para todo  $x \in \mathfrak{A}$ . El **asociador** en un álgebra  $\mathfrak{A}$  es la aplicación trilineal  $(x, y, z) = (xy)z - x(yz)$ . Se dice que  $\mathfrak{A}$  es **asociativa** si  $(x, y, z) = 0$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{A}$ . Se dice que  $\mathfrak{A}$  es **alternativa** si satisface que:

$$\begin{aligned} (x, x, y) &= 0 && \text{Ley alternativa a izquierda} \\ (y, x, x) &= 0 && \text{Ley alternativa a derecha} \end{aligned}$$

para todo  $x, y \in \mathfrak{A}$ . Se dice que  $\mathfrak{A}$  es conmutativa si  $xy = yx$  y anticonmutativa si  $xy = -yx$ . El **Jacobiano** en un álgebra anticonmutativa  $\mathfrak{A}$  es definido por  $J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$ .

Se dice que  $\mathfrak{A}$  es un álgebra de **Malcev** si  $\mathfrak{A}$  es anticonmutativa y satisface la identidad de Malcev  $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{A}$ .

Dada un álgebra  $\mathfrak{A}$ , se define el álgebra  $\mathfrak{A}^-$  cuyo espacio vectorial subyacente es  $\mathfrak{A}$  y multiplicación dada por el conmutador  $[x, y] = xy - yx$ ,  $\forall x, y \in \mathfrak{A}$ . Similarmente, el álgebra  $\mathfrak{A}^+$  es el espacio vectorial  $\mathfrak{A}$  con multiplicación  $x * y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ . Algunos hechos que podemos mencionar son los siguientes [BMS07]:

- †  $\mathfrak{A}^-$  siempre es anticonmutativa y  $\mathfrak{A}^+$  siempre es conmutativa.
- † Si  $\mathfrak{A}$  es asociativa entonces  $\mathfrak{A}^-$  es un álgebra de Lie.
- † Toda álgebra de Lie es un álgebra de Malcev.
- † Si  $\mathfrak{A}$  es un álgebra alternativa, entonces  $\mathfrak{A}^-$  es un álgebra de Malcev.

## 2.2. Álgebras de Lie

**Definición 2.2.1.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un álgebra  $(\mathfrak{g}, [ , ])$  donde la multiplicación  $[ , ] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , denominada corchete de Lie, satisface:

1.  $[x, x] = 0$  para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .
2.  $J(x, y, z) = 0$  para todo  $x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

La expresión 2 es llamada identidad de Jacobi. Por ejemplo, todo espacio vectorial  $V$  posee un corchete de Lie definido trivialmente por  $[x, y] = 0$  para todo  $x, y \in V$ . Esta estructura es llamada álgebra de Lie **abeliana**.

Si denotamos por  $\mathfrak{gl}(V)$  al espacio de morfismos de  $V$  en  $V$ , entonces  $\mathfrak{gl}(V)$  es un álgebra de Lie considerando el corchete de Lie

$$[x, y] = xy - yx, \quad \forall x, y \in \mathfrak{gl}(V)$$

Fijando una base de  $V$ , podemos identificar a  $\mathfrak{gl}(V)$  con el espacio  $\mathfrak{gl}(n)$  de todas las matrices  $n \times n$ , donde  $n = \dim V$ .

**Definición 2.2.2.** Una subálgebra de Lie es un subespacio  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  tal que  $[x, y] \in \mathfrak{h}, \forall x, y \in \mathfrak{h}$ . Un ideal de  $\mathfrak{g}$  es un subespacio vectorial  $I \subset \mathfrak{g}$  tal que  $[x, y] \in I, \forall x \in \mathfrak{g}, y \in I$ . El centro de  $\mathfrak{g}$  es el ideal  $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$ .

**Definición 2.2.3.** Un morfismo entre álgebras de Lie es una aplicación lineal  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  tal que  $\phi([x, y]) = [\phi(x), \phi(y)]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}_1$ .

Si  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  es un morfismo de álgebras de Lie, el núcleo  $\ker(\phi)$  es un ideal de  $\mathfrak{g}_1$  y la imagen  $\text{Im}(\phi)$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}_2$ . Un isomorfismo de álgebras de Lie es un morfismo biyectivo  $\phi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ .

La aplicación lineal  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  definida por  $(\text{ad}x)(y) := [x, y]$  induce un morfismo de álgebras de Lie, llamado morfismo adjunto.

Si  $I$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ , el cociente  $\mathfrak{g}/I$  posee una única estructura de álgebra de Lie que hace de la proyección canónica un morfismo de álgebras de Lie.

**Teorema 2.1.** [Hum78, Prop. 2.2] Sean  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  dos álgebras de Lie y  $I, J$  dos ideales de  $\mathfrak{g}$  respectivamente.

1. Si  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  es un morfismo de álgebras de Lie, entonces  $\mathfrak{g}/\ker \phi \cong \text{Im} \phi$ .
2. Si  $I \subset J$ , entonces  $J/I$  es un ideal de  $\mathfrak{g}/I$  y  $(\mathfrak{g}/I)/(J/I) \cong \mathfrak{g}/J$ .
3.  $(I+J)/J \cong I/(I \cap J)$ .

**Definición 2.2.4.** Una derivación sobre un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es una aplicación lineal  $D : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que:

$$D([x, y]) = [x, D(y)] + [D(x), y], \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}$$

Denotaremos por  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  al espacio de todas las derivaciones sobre  $\mathfrak{g}$  y no es difícil probar que  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  es una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ . Para  $x \in \mathfrak{g}$ , el morfismo  $\text{ad}x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  es una derivación sobre  $\mathfrak{g}$ , puesto que por la identidad de Jacobi se deduce que:

$$(\text{ad}x)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [\text{ad}x(y), z] + [y, \text{ad}x(z)], \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Estas derivaciones son llamadas interiores y el espacio de las derivaciones interiores sobre  $\mathfrak{g}$  se denota usualmente por  $\text{Inn}(\mathfrak{g})$ . Es fácil observar que  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{Der}(\mathfrak{g})$  es un morfismo de álgebras de Lie.

### 2.2.1. Álgebras Clásicas

$A_n$ : El espacio  $\mathfrak{sl}(n)$  de los morfismos de  $\mathbb{C}^{n+1}$  en  $\mathbb{C}^{n+1}$  con traza igual a cero es una subálgebra de Lie de  $\mathfrak{gl}(n)$  de dimensión  $\dim \mathfrak{sl}(n) = (n+1)^2 - 1$ .

$B_n$ : Sea  $I_n$  la identidad sobre  $\mathbb{C}^n$  y  $f$  la forma bilineal simétrica y no degenerada sobre  $\mathbb{C}^{2n+1}$  dada por:

$$S_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio  $\mathfrak{o}(2n+1)$  de los morfismos  $x: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  tales que  $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$  es un álgebra de Lie con dimensión  $\dim \mathfrak{o}(2n+1) = 2n^2 + n$ .

$C_n$ : Sea  $f$  la forma bilineal simétrica y no degenerada sobre  $\mathbb{C}^{2n}$  dada por:

$$S_f = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

El espacio  $\mathfrak{sp}(2n)$  de todos los morfismos  $x: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  tales que  $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$  es un álgebra de Lie con dimensión  $\dim \mathfrak{sp}(2n) = 2n^2 + n$ .

$D_n$ : El álgebra de Lie  $\mathfrak{o}(2n)$  definida por los morfismos  $x: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  tales que  $f(x(v), w) = -f(v, x(w))$  donde  $f$  es la forma bilineal simétrica y no degenerada dada por:

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Su dimensión es  $\dim \mathfrak{o}(2n) = 2n^2 - n$ .

## 2.3. Semisimplicidad, solubilidad y nilpotencia

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. La serie derivada de  $\mathfrak{g}$  es la sucesión descendente de ideales de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^{(1)} \supset \mathfrak{g}^{(2)} \supset \dots$$

donde  $\mathfrak{g}^{(1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{g}^{(1)}, \mathfrak{g}^{(1)}]$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{g}^{(n)} = [\mathfrak{g}^{(n-1)}, \mathfrak{g}^{(n-1)}]$  para  $n \geq 2$ . La serie central de  $\mathfrak{g}$  es la sucesión descendente de ideales de  $\mathfrak{g}$ :

$$\mathfrak{g}^0 \supset \mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \dots \supset \mathfrak{g}^k \supset \dots$$

donde  $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $\dots$ ,  $\mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]$ , ( $k \geq 2$ ).

**Definición 2.3.1.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es **soluble** si existe un  $m \geq 1$  tal que  $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$ . Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es **nilpotente** si existe  $k \geq 1$  tal que  $\mathfrak{g}^k = 0$ . Cuando  $\mathfrak{g}^k \neq 0$  y  $\mathfrak{g}^{k+1} = 0$  diremos que  $\mathfrak{g}$  es  **$k$ -pasos nilpotente**.

Por ejemplo, el álgebra de matrices triangulares superiores estrictas  $\mathfrak{n}(n)$  de tamaño  $n \times n$  es un álgebra de Lie nilpotente y el álgebra de matrices triangulares superiores  $\mathfrak{t}(n)$  de tamaño  $n \times n$  con  $n \geq 2$  es un álgebra de Lie soluble no nilpotente.

**Lema 2.3.1.** [Hum78, Prop I, 3.1] Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $I, J$  ideales de  $\mathfrak{g}$ . Entonces:

1. Si  $\mathfrak{g}$  es soluble, entonces toda subálgebra e imagen homomórfica de  $\mathfrak{g}$  es soluble.
2. Si  $I$  es soluble y  $\mathfrak{g}/I$  es soluble, entonces  $\mathfrak{g}$  es soluble.
3. Si  $I, J$  son solubles entonces  $I + J$  es un ideal soluble de  $\mathfrak{g}$ .

Como la suma de ideales solubles de  $\mathfrak{g}$  es un ideal soluble de  $\mathfrak{g}$ , existe un único ideal soluble maximal de  $\mathfrak{g}$ , llamado *el radical de  $\mathfrak{g}$*  y denotado por  $\text{rad } \mathfrak{g}$  ó  $\mathfrak{r}$  cuando no se preste confusión.

**Definición 2.3.2.** Un álgebra de Lie no abeliana  $\mathfrak{g}$  es **semisimple** si no posee ideales solubles propios; esto es,  $\mathfrak{r} = 0$ . Decimos que  $\mathfrak{g}$  es **simple** si  $\mathfrak{g}$  no posee ideales propios.

Notemos que  $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$  es semisimple para cualquier álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y toda álgebra de Lie simple es semisimple.

**Lema 2.3.2.** [Hum78, Prop I, 3.2] Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie e  $I, J$  ideales de  $\mathfrak{g}$ .

- i. Si  $\mathfrak{g}$  es nilpotente, entonces toda subálgebra de  $\mathfrak{g}$  es nilpotente.
- ii. Si  $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$  es nilpotente, entonces  $\mathfrak{g}$  es nilpotente.
- iii. Si  $I, J$  son nilpotentes, entonces  $I + J$  es nilpotente.

Siguen los Teoremas clásicos de Engel y Lie que caracterizan a las álgebras de Lie nilpotentes y solubles:

**Lema 2.3.3.** Sea  $\mathfrak{g}$  una subálgebra de  $\mathfrak{gl}(V)$ , con  $V \neq 0$  un espacio vectorial. Si todos los elementos de  $\mathfrak{g}$  son nilpotentes, entonces existe un vector no nulo  $v \in V$  tal que  $\mathfrak{g} \cdot v = 0$ .

**Teorema 2.2.** (Engel)  $\mathfrak{g}$  es nilpotente si y sólo si,  $\text{ad}(x)$  es nilpotente para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

**Teorema 2.3.** (Lie) Si  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra de Lie soluble de  $\mathfrak{gl}(V)$ , entonces  $V$  contiene un autovector común para  $\mathfrak{g}$ . En particular, las matrices de  $\mathfrak{g}$  relativas a una cierta base de  $V$  son triangulares superiores.

**Definición 2.3.3.** La forma de Killing sobre un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es la aplicación bilineal  $\kappa : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $\kappa(x, y) = \text{Tr}(\text{ad}x \text{ad}y)$ .

La forma de Killing  $\kappa$  es  $\mathfrak{g}$ -invariante en el sentido  $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$ . Decimos que  $\kappa$  es no degenerada sobre  $\mathfrak{g}$  si su radical  $\mathcal{R}_\kappa = \{x \in \mathfrak{g} : \kappa(x, y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$  es trivial.

**Teorema 2.4.** (Criterios de Cartan) Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie sobre  $\mathbb{C}$ . Entonces:

- i.  $\mathfrak{g}$  es soluble si, y solamente si,  $\kappa(x, y) = 0$  para todo  $x \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ ,  $y \in \mathfrak{g}$ .
- ii.  $\mathfrak{g}$  es semisimple si, y sólo si,  $\kappa$  es no degenerada.

Un resultado importante sobre las álgebras de Lie es el Teorema de Levi, que permite descomponer a toda álgebra de Lie de dimensión finita como suma directa de una parte semisimple con su radical soluble:

**Teorema 2.5.** (Levi) Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie con radical soluble  $\mathfrak{r}$ . Entonces existe una subálgebra de Lie semisimple  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{g}$  tal que  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ .

Como la parte semisimple  $\mathfrak{s}$  en la descomposición de  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{r}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ , vamos a denotar la descomposición anterior por  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ , la cual llamaremos descomposición de Levi.

A continuación definimos las álgebras de Lie *unimodulares*, que son ejemplos importantes para la Dualidad de Poincaré en la teoría de Homología y Cohomología de álgebras de Lie (Sec. 5.2).

**Definición 2.3.4.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es *unimodular* si  $\text{Tr}(\text{ad}x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ .

Algunos ejemplos de álgebras de Lie unimodulares son las álgebras de Lie nilpotentes, las álgebras de Lie semisimples y las álgebras de Lie perfectas (Def. 3.1.5).

## 2.4. Módulos

Un  $\mathfrak{g}$ -módulo es un espacio vectorial  $V$  munido de una aplicación bilineal  $\cdot : \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$  tal que  $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ .

La noción equivalente de  $\mathfrak{g}$ -módulo es la de *representación* de álgebra de Lie, que es un par  $(V, \pi)$  con  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  un morfismo de álgebras de Lie.

Si  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  es una representación de  $\mathfrak{g}$ , la acción inducida  $\cdot : \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$  por  $x \cdot v = \varphi(x)(v)$  define una estructura de  $\mathfrak{g}$ -módulo sobre  $V$ . Recíprocamente, si  $\cdot : \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow V$  es una acción de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  entonces  $\pi : x \in \mathfrak{g} \rightarrow \pi_x \in \mathfrak{gl}(V)$  dada por  $\pi_x(v) = x \cdot v$  define una representación de  $\mathfrak{g}$ . Los conceptos de subrepresentaciones, submódulos y módulos cocientes se definen de la manera usual.

Un morfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos, o  $\mathfrak{g}$ -morfismo, es una aplicación lineal  $T : V \rightarrow W$  entre  $\mathfrak{g}$ -módulos tales que  $T(x \cdot v) = x \cdot T(v)$  para todo  $x \in \mathfrak{g}, v \in V$ . Notaremos por  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W)$  el espacio de los  $\mathfrak{g}$ -morfismos entre  $V$  y  $W$ . En particular  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, V) = \text{End}_{\mathfrak{g}}(V)$ .

Si  $V, W$  son  $\mathfrak{g}$ -módulos, entonces  $V \oplus W$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo de manera natural y el producto tensorial  $V \otimes W$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo vía derivación:

$$x \cdot (v \otimes w) = x \cdot v \otimes w + v \otimes x \cdot w, \quad \forall x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W.$$

A su vez,  $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{C})$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo vía la acción  $(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v)$  y  $\text{Hom}(V, W)$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo vía la acción  $(x \cdot T)(v) = x \cdot (T(v)) - T(x \cdot v)$ .

El módulo  $V^{\mathfrak{g}}$  de  $\mathfrak{g}$ -invariantes de  $V$  es el conjunto  $V^{\mathfrak{g}} = \{v \in V : x \cdot v = 0, \forall x \in \mathfrak{g}\}$  y el módulo coinvariante  $V_{\mathfrak{g}}$  de  $V$  es el cociente  $V_{\mathfrak{g}} = V/\mathfrak{g}V$ . Podemos notar que  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W) = \text{Hom}(V, W)^{\mathfrak{g}}$ . Revisamos a continuación el Teorema de Isomorfismos para  $\mathfrak{g}$ -módulos

**Teorema 2.6.** [Hum78] Supongamos que  $U, V$  y  $W$  son  $\mathfrak{g}$ -módulos.

1. Si  $T : V \rightarrow W$  es un morfismo  $\mathfrak{g}$ -módulos, entonces  $\ker \phi$  es un submódulo de  $V$  y  $\text{Im } T$  es un submódulo de  $W$ . Además,  $V/\ker \phi \cong \text{Im } \phi$  como  $\mathfrak{g}$ -módulos.
2. Si  $U, W$  son submódulos de  $V$ , entonces  $U + W$  y  $U \cap W$  son submódulos de  $V$ . Además,  $(U + W)/W \cong U/(U \cap W)$  como  $\mathfrak{g}$ -módulos.
3. Si  $U, W$  son submódulos de  $V$  y  $U \subseteq W$  entonces  $W/U$  es un submódulo de  $V/U$  y  $(V/U)/(W/U) \cong V/W$  como  $\mathfrak{g}$ -módulos.

**Proposición 2.4.1.** Si  $V, W$  son  $\mathfrak{g}$ -módulos, entonces  $\text{Hom}(V, W) \cong V^* \otimes W$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos.

*Demostración.* Sea  $\{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $V$  y  $\{v_1^*, \dots, v_n^*\}$  la base dual de  $V^*$ , es decir,  $v_i^*(v_j) = \delta_{i,j}$ . Definamos  $\phi : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}(V, W)$  por  $\phi(f \otimes w)(v) = f(v)w$  para todo  $f \in V^*, w \in W, v \in V$  y sea  $\varphi : \text{Hom}(V, W) \rightarrow V^* \otimes W$  dada por  $\varphi(T) = \sum_{i=1}^n v_i^* \otimes T(v_i)$ , donde  $T \in \text{Hom}(V, W)$ . Tomando  $T \in \text{Hom}(V, W)$  y  $v \in V$ , existen escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  tales que  $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$  y

$$(\phi \varphi)(T)(v) = \phi \left( \sum_{i=1}^n v_i^* \otimes T(v_i) \right)(v) = \sum_{i=1}^n \lambda_i T(v_i) = T(v)$$

Así,  $\phi \varphi = \text{id}_{\text{Hom}(V, W)}$ . Por otra parte, si  $f \in V^*$  existen escalares  $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{C}$  tales que  $f = \sum_{i=1}^n \beta_i v_i^*$  y

$$\varphi \phi(f \otimes w) = \sum_{i=1}^n \beta_i \varphi(\phi(v_i^* \otimes w)) = \sum_{i=1}^n \beta_i \left( \sum_{j=1}^n v_j^* \otimes v_i^*(v_j) w \right) = \sum_{i=1}^n \beta_i (v_i^* \otimes w) = f \otimes w$$

mostrando que  $\varphi \phi = \text{id}_{V^* \otimes W}$ . Finalmente, mostrar que  $\phi$  y  $\varphi$  son morfismos de  $\mathfrak{g}$ -módulos es sencillo.  $\diamond$

**Definición 2.4.1.** Un  $\mathfrak{g}$ -módulo no nulo  $V$  que admite apenas los  $\mathfrak{g}$ -submódulos triviales es llamado irreducible. Se dice que  $V$  es completamente reducible si  $V$  se escribe como suma directa de  $\mathfrak{g}$ -submódulos no triviales.

**Observación 2.4.1.** (Producto semidirecto) Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie con descomposición de Levi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \text{rad } \mathfrak{g}$ , como el radical soluble  $\text{rad } \mathfrak{g}$  es un ideal  $\mathfrak{g}$ , por la identidad de Jacobi tenemos que:

$$[x, [y_1, y_2]] = [[x, y_1], y_2] + [y_1, [x, y_2]] \quad \forall x \in \mathfrak{s}, y_1, y_2 \in \text{rad } \mathfrak{g}.$$

Es decir,  $\text{rad } \mathfrak{g}$  es un  $\mathfrak{s}$ -módulo por derivación vía la restricción de la adjunta  $\text{ad} : \mathfrak{s} \rightarrow \text{Der}(\text{rad } \mathfrak{g})$ . De manera general, si  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$  son álgebras de Lie con  $\mathfrak{g}$  actuando sobre  $\mathfrak{h}$  por derivación, entonces se define el producto semidirecto  $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{h}$  como el álgebra de Lie  $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$  cuyo corchete está dado por:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_{\ltimes} = ([x_1, x_2], [y_1, y_2] + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1), \quad \forall x_i \in \mathfrak{g}, y_i \in \mathfrak{h}. \quad (2.1)$$

Sobre un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  no siempre es posible descomponer un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  en suma directa de irreducibles. Es decir, no necesariamente  $V$  es completamente reducible. Sin embargo, si  $\mathfrak{g}$  es semisimple, este hecho es cierto y es lo que conforma el reconocido Teorema de Weyl:

**Teorema 2.7.** (Weyl) Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semisimple. Entonces todo  $\mathfrak{g}$ -módulo de dimensión finita es completamente reducible.

## 2.5. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2)$

Los módulos de  $\mathfrak{sl}(2)$  constituyen el caso más simple en la teoría de representaciones de álgebras de Lie y toda álgebra de Lie semisimple de dimensión finita está constituida por copias de  $\mathfrak{sl}(2)$ . En esta sección consideremos  $\mathfrak{sl}(2)$  con base canónica  $\{e, h, f\}$  y corchetes

$$[h, e] = 2e, \quad [e, f] = h, \quad [h, f] = -2f,$$

Sea  $V$  un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo de dimensión finita y para todo  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $V_\alpha = \{v \in V : h \cdot v = \alpha v\}$ . Cualquier  $\alpha$  tal que  $V_\alpha \neq 0$  es denominado *peso* de  $h$  y  $V_\alpha$  su correspondiente espacio de peso. Luego

$$V = \bigoplus_{\alpha \in \mathbb{C}} V_\alpha. \quad (2.2)$$

Notar que la suma (2.2) es finita y la acción de  $e, f$  sobre cada  $V_\alpha$  se describe del siguiente modo:

**Lema 2.5.1.** [Hum78, Lem. II, 7.2] Si  $v \in V_\alpha$  entonces  $e \cdot v \in V_{\alpha+2}$  y  $f \cdot v \in V_{\alpha-2}$ .

Como el conjunto de pesos sobre  $V$  es finito, existe  $\alpha \in \mathbb{C}$  tal que  $V_\alpha \neq 0$  y  $V_{\alpha+2} = 0$ . Tal  $\alpha$  se denomina un peso máximo de  $V$  y todo vector  $v \in V_\alpha$  no nulo es llamado *vector de peso máximo*<sup>1</sup>  $\alpha$ . Notar que cualquier vector no nulo  $v \in V_\alpha$  anulado por  $e$  es un vector de peso máximo  $\alpha$ .

Si  $V$  es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible y  $v_0 \in V_\alpha$  es un vector de peso máximo  $\alpha$  en  $V$ , definiendo  $v_{-1} = 0$  y  $v_s = \frac{1}{s!} f^s \cdot v_0$  para todo  $s \geq 0$  y usando la acción de  $\mathfrak{sl}(2)$  previamente definida, obtenemos que:

$$h \cdot v_s = (\alpha - 2s) v_s \quad f \cdot v_s = (s+1) v_{s+1} \quad e \cdot v_s = (\alpha - s + 1) v_{s-1}$$

Si  $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$  es el menor entero no negativo tal que  $v_m \neq 0$  y  $v_{m+1} = 0$ , entonces los vectores  $v_0, \dots, v_m$  son linealmente independientes y generan un  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulo de  $V$  dimensión  $m+1$  denotado por  $V_{(m)}$ . Luego,  $V = V_{(m)}$  y  $e \cdot v_{m+1} = (\alpha - m) v_m = 0$  de donde  $\alpha = m$  y  $\{v_0, \dots, v_m\}$  es una base de  $V$ .

<sup>1</sup>También se suele llamar *vector dominante*.





donde  $C_e(n, i) = C_e(n, n-i)$  por simetría sobre los coeficientes  $C_e$ . Luego, de las ecuaciones (2.5) y (2.6) concluimos que  $\psi_n$  respeta la acción de  $e$ . Similarmente,

$$\begin{aligned}\psi_n(h \cdot v_{n-2i}^n) &= \psi_n((n-2i)v_{n-2i}^n) = (n-2i)(-1)^i \left(v_{n-2(n-i)}^n\right)^* \\ &= h \cdot \psi_n(v_{n-2i}^n)\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}\psi_n(f \cdot v_{n-2i}^n) &= \psi_n\left(C_f(n, i)v_{n-2(i+1)}^n\right) = C_f(n, i)(-1)^{i+1} \left(v_{n-2(n-i-1)}^n\right)^* \\ &= f \cdot \psi_n(v_{n-2i}^n)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Es decir,  $\psi_n : V_{(n)} \rightarrow V_{(n)}^*$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos.  $\diamond$

Podemos ver también que el morfismo  $\psi_n : v_{n-2i}^n \mapsto (-1)^i \left(v_{2i-n}^n\right)^*$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos entre  $V_{(n)}$  y  $V_{(n)}^*$  cuando tomamos una base simétrica  $\{v_{n-2i}^n\}$  de  $V_{(n)}$  en lugar de la base de Clebsch-Gordan. Por ejemplo, veamos que  $\psi_n$  satisface la acción de  $e$ :

$$\begin{aligned}\psi_n(e \cdot v_{n-2i}^n) &= i(n-i+1)\psi_n\left(v_{n-2(i-1)}^n\right)(-1)^{i-1}i(n-i+1)\left(v_{n-2(n-i+1)}^n\right)^* \\ e \cdot \psi_n(v_{n-2i}^n) &= (-1)^i e \cdot \left(v_{n-2(n-i)}^n\right)^* (-1)^{i+1}i(n-i+1)\left(v_{n-2(n-i+1)}^n\right)^*\end{aligned}$$

puesto que  $e \cdot \left(v_{n-2(n-i)}^n\right)^*(w) = -\left(v_{n-2(n-i)}^n\right)^*(e \cdot w)$  es no nulo cuando  $w = v_{n-2(n-i+1)}$ . Del mismo modo,  $\psi_n$  también satisface la acción de  $f$  y  $h$ . Por último mencionamos algunas propiedades entre morfismos de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos:

**Lema 2.5.2.** Sea  $\phi : V_{(n)} \rightarrow W$  un morfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos, con  $V_{(n)}$  irreducible de peso máximo  $n$ . Entonces  $\phi$  es un monomorfismo o  $\phi = 0$ .

*Demostración.* En efecto, como  $\ker \phi$  es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulo de  $V_{(n)}$  se sigue que  $\ker \phi = V_{(n)}$  o  $\ker \phi = 0$ . El primer caso muestra que  $\phi = 0$  mientras que el segundo caso muestra que  $\phi$  es un monomorfismo.  $\diamond$

Usando el Lema anterior y el Teorema 2.6, notemos que si  $\phi$  es no nulo entonces  $V_{(n)} \cong \text{Im } \phi$  como  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo. Supongamos ahora que  $\phi : V_{(n)} \oplus V_{(m)} \rightarrow W$  es un morfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos no nulo, entonces existen las siguientes posibilidades para el  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulo  $\ker \phi$  de  $V_{(n)} \oplus V_{(m)}$ :

1.  $\ker \phi = V_{(n)}$  o  $\ker \phi = V_{(m)}$ .
2.  $\ker \phi = 0$ .

Si  $\ker \phi = V_{(n)}$  entonces  $\text{Im } \phi \cong V_{(m)}$  y  $W$  tiene un submódulo irreducible de peso máximo  $m$  (el otro caso es análogo). Si  $\ker \phi = 0$  entonces  $\text{Im } \phi \cong V_{(n)} \oplus V_{(m)}$  y  $W$  tiene submódulos irreducibles de peso máximo  $m$  y  $n$  respectivamente.

De manera general, supongamos que  $\phi : V_{(n_1)} \oplus \cdots \oplus V_{(n_r)} \rightarrow W$  es un morfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos no nulo con  $\ker \phi = V_{(n_1)} \oplus \cdots \oplus V_{(n_s)}$  y  $0 \leq s < r$ . Entonces  $\text{Im } \phi \cong V_{(n_{s+1})} \oplus \cdots \oplus V_{(n_r)}$  y  $W$  tiene submódulos irreducibles de peso máximo  $n_{s+1}, \dots, n_r$  respectivamente.

### 2.5.1. La Fórmula de Clebsch-Gordan

Si  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$  son dos  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles, con  $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , el Teorema de Weyl nos dice que el producto tensorial  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  es completamente reducible y debe admitir una única descomposición en componentes irreducibles. Queremos saber cuáles componentes irreducibles aparecen en tal descomposición y como se relacionan con los pesos dominantes  $m$  y  $n$ . Esta descripción es dada por el Teorema de Clebsch-Gordan, cuyo enunciado es el siguiente:

**Teorema 2.9.** La descomposición de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles está dada por:

$$V_{(n)} \otimes V_{(m)} = \bigoplus_{k=0}^{\min\{n,m\}} V_{(m+n-2k)} \quad (2.9)$$

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $m \leq n$  y sean  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$ ,  $\{v_{m-2j}^m\}_{0 \leq j \leq m}$  las bases simétricas de  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$  donde  $v_n^n$  y  $v_m^m$  denotan los vectores de peso máximo. Por un lado, sabemos que  $\{v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m\}$  es una base de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ . Además, tomando  $0 \leq k \leq m$  fijo, notemos que  $\forall 0 \leq r \leq k$  el vector  $v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m \neq 0$  satisface<sup>2</sup>:

$$h \cdot (v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m) = (m+n-2k)v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m.$$

Es decir,  $v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m$  es un vector de peso  $n+m-2k$  independiente del valor  $0 \leq r \leq k$  y además:

$$e \cdot (v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m) = r(n+1-r)v_{n-2(r-1)}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m + (k-r)(m+1-k+r)v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r-1)}^m$$

En particular:

$$e \cdot (v_n^n \otimes v_{m-2k}^m) = k(m-k+1)v_n^n \otimes v_{m-2(k-1)}^m$$

$$e \cdot (v_{n-2k}^n \otimes v_m^m) = k(n-k+1)v_{n-2(k-1)}^n \otimes v_m^m.$$

Definamos el vector de peso  $n+m-2k$  dado por la combinación lineal:

$$v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k} = \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{\binom{k}{r}}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m.$$

Afirmamos que  $v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k}$  es un vector de peso máximo  $n+m-2k$  en  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ , para todo  $0 \leq k \leq m$ . En efecto,

$$\begin{aligned} e \cdot v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k} &= \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{\binom{k}{r} r(n-r+1)}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{n-2(r-1)}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m + \\ &\quad \sum_{r=0}^k (-1)^r \frac{\binom{k}{r} (k-r)(m-k+r+1)}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r-1)}^m \end{aligned}$$

Notemos que el término correspondiente a  $r=0$  en la primera suma se anula, puesto que  $v_{n+2}^n = 0$ . Del mismo modo ocurre con el término correspondiente a  $r=k$  en la segunda suma. Aplicando propiedades básicas de números combinatorios:

$$\begin{aligned} e \cdot v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k} &= \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{r+1} \frac{\binom{k}{r} (k-r)(m-k+r+1)}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r-1)}^m + \\ &\quad \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^r \frac{\binom{k}{r} (k-r)(m-k+r+1)}{\binom{n+m-k}{n-r}} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r-1)}^m \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Los pesos  $n+m-2k$  que estamos analizando son justamente las ocurrencias del lado derecho de (2.9)

y  $e \cdot v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k} = 0$ . Es decir,  $v_{n+m-2k}^{n,m,n+m-2k}$  genera un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible  $V_{(m+n-2k)}$  en  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  y la suma del lado derecho de (2.9) es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulo de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ . Por argumento de dimensión se sigue la igualdad.  $\diamond$

**Ejemplo 2.5.3.** A continuación se listan los vectores dominantes sobre cada componente de algunos productos tensoriales:

1.  $V_{(2)} \otimes V_{(2)} = V_{(4)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)}$ 

$$v_4^{2,2,4} = v_2^2 \otimes v_2^2$$

$$v_2^{2,2,2} = v_0^2 \otimes v_2^2 - v_2^2 \otimes v_0^2$$

$$v_0^{2,2,0} = v_{-2}^2 \otimes v_2^2 - v_0^2 \otimes v_0^2 + v_2^2 \otimes v_{-2}^2$$
2.  $V_{(2)} \otimes V_{(4)} = V_{(6)} \oplus V_{(4)} \oplus V_{(2)}$ 

$$v_6^{2,4,6} = v_2^2 \otimes v_4^4$$

$$v_4^{2,4,4} = 2v_0^2 \otimes v_4^4 - v_2^2 \otimes v_2^4$$

$$v_2^{2,4,2} = 6v_{-2}^2 \otimes v_4^4 - 3v_0^2 \otimes v_2^4 + v_2^2 \otimes v_0^4$$
3.  $V_{(3)} \otimes V_{(3)} = V_{(6)} \oplus V_{(4)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)}$ 

$$v_6^{3,3,6} = v_3^3 \otimes v_3^3$$

$$v_4^{3,3,4} = v_1^3 \otimes v_3^3 - v_3^3 \otimes v_1^3$$

$$v_2^{3,3,2} = 3v_{-1}^3 \otimes v_3^3 - 4v_1^3 \otimes v_1^3 + 3v_3^3 \otimes v_{-1}^3$$

$$v_0^{3,3,0} = v_{-3}^3 \otimes v_3^3 - v_{-1}^3 \otimes v_1^3 + v_1^3 \otimes v_{-1}^3 - v_3^3 \otimes v_{-3}^3$$
4.  $V_{(4)} \otimes V_{(4)} = V_{(8)} \oplus V_{(6)} \oplus V_{(4)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)}$ 

$$v_8^{4,4,8} = v_4^4 \otimes v_4^4$$

$$v_6^{4,4,6} = v_2^4 \otimes v_4^4 - v_4^4 \otimes v_2^4$$

$$v_4^{4,4,4} = 2v_0^4 \otimes v_4^4 - 3v_2^4 \otimes v_2^4 + 2v_4^4 \otimes v_0^4$$

$$v_2^{4,4,2} = 2v_{-2}^4 \otimes v_4^4 - 3v_0^4 \otimes v_2^4 + 3v_2^4 \otimes v_0^4 - 2v_4^4 \otimes v_{-2}^4$$

$$v_0^{4,4,0} = v_{-4}^4 \otimes v_4^4 - v_{-2}^4 \otimes v_2^4 + v_0^4 \otimes v_0^4 - v_2^4 \otimes v_{-2}^4 + v_4^4 \otimes v_{-4}^4$$

Notar que todos los coeficientes en cada monomio son enteros (ver Sec. 4.3.1).

### 2.5.2. $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles

Es sabido que las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{gl}(2)$  están dadas por las representaciones irreducibles de  $\mathfrak{sl}(2)$  tal que la identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa por escalar. Damos así la siguiente definición:

**Definición 2.5.1.** Un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible de peso  $(n, k)$  es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible  $V_{(n)}$  de peso máximo  $n$  tal que  $\text{id}_2$  actúa con peso  $k$  sobre  $V_{(n)}$ .

Denotaremos por  $V_{(n,k)}$  al  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible de peso  $(n, k)$  y  $v_{n,k}^n$  (ó  $v_{n,k}$  si no se presta confusión) al vector de peso máximo de  $V_{(n,k)}$ . Si  $V$  es un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo tal que  $\text{id}_2$  actúa por escalar entonces existe una única descomposición en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles:

$$V = \bigoplus_{i=1}^r m_i V_{(n_i, k_i)} \quad (2.10)$$

con  $m_i > 0$  y  $V_{(n_i, k_i)} \not\cong V_{(n_j, k_j)}$  para todo  $i \neq j$ . Decimos que  $V$  es libre de multiplicidad si  $m_i = 1$  para todo  $1 \leq i \leq r$ .

**Ejemplo 2.5.4.**  $\mathfrak{gl}(2)$  es un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo vía la acción adjunta con descomposición  $\mathfrak{g} = V_{(2,0)} \oplus V_{(0,0)}$ .

## 2.6. Álgebras de Lie cuadráticas

**Definición 2.6.1.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es cuadrática si existe una forma bilineal simétrica, no degenerada y  $\mathfrak{g}$ -invariante  $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  en el sentido:

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{g}.$$

Se define la 3-forma alternante  $I_B \in \wedge^3 \mathfrak{g}^*$  asociada a  $B$  como  $I_B(x, y, z) = B([x, y], z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ .

Si  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$  con respectiva base dual  $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ , existe una base  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de  $\mathfrak{g}$  de modo que  $B(y_k, -) = x_k^*$  para todo  $1 \leq k \leq n$ . Usualmente  $\{y_1, \dots, y_n\}$  se denomina  $B$ -base de  $\mathfrak{g}$  asociada a  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Algunos ejemplos de álgebras de Lie cuadráticas son:

1. Cualquier álgebra de Lie semisimple es un álgebra de Lie cuadrática con la forma de Killing  $\kappa$ .
2. El álgebra de diamante  $\mathfrak{D}_4$  de dimensión 4 con base  $\{x_1, x_0, y_0, y_1\}$  y corchetes no triviales  $[y_0, x_1] = x_1$ ,  $[y_0, y_1] = -y_1$ ,  $[x_1, y_1] = x_0$  es un álgebra de Lie cuadrática con forma bilineal no degenerada  $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que  $\mathfrak{D}_4 \cong \text{ad}(y_0) \ltimes \mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{D}_4$  es soluble. Luego  $B$  no es la forma de Killing de  $\mathfrak{D}_4$ .

3. El álgebra de Lie  $\mathfrak{f}_{3,2}$  con base  $\{e_1, e_{-1}, f_0, y_1, y_{-1}\}$  y corchetes no triviales  $[e_1, e_{-1}] = f_0$ ,  $[e_1, f_0] = y_1$ ,  $[e_{-1}, f_0] = y_{-1}$  es un álgebra de Lie cuadrática con forma bilineal no degenerada  $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Definición 2.6.2.** [PLD12] Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie cuadrática con forma bilineal asociada  $B : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ . Una derivación  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  se dice antisimétrica si:

$$B(D(x), y) + B(x, D(y)) = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

El espacio de todas las derivaciones antisimétricas de  $\mathfrak{g}$  es denotado por  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ . Notar que todas las derivaciones interiores están en  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$  y que  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$  es una subálgebra de Lie de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ .

**Lema 2.6.1.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie cuadrática con forma bilineal no degenerada  $B$ , entonces  $\phi_B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  definida por  $x \mapsto B(x, -)$  es un morfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos.

*Demostración.* Sean  $x, y \in \mathfrak{g}$  y  $D \in \text{Der}_a(\mathfrak{g})$ , entonces

$$\phi_B(D \cdot x)(y) = B(D \cdot x, y) = -B(x, D \cdot y) = -\phi_B(x)(D \cdot y) = [D \cdot \phi_B(x)](y)$$

y por lo tanto  $\phi_B(D \cdot x) = D \cdot \phi_B(x)$ , por lo que el lema queda probado.  $\diamond$

Por el Lema anterior, si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie cuadrática tenemos que  $\phi_B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  es un isomorfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos. Además, vale la siguiente Proposición:

**Proposición 2.6.1.** Para todo  $p \geq 1$ , el morfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos  $\phi_B : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  se extiende a un morfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos  $\phi_B^p : \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$  definiendo  $\phi_B^p(\omega)(x_1, \dots, x_p) = \phi(\omega(x_1, \dots, x_p))$ .

*Demostración.* En efecto, como  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$  extiende su acción por derivación a todo  $\wedge^p \mathfrak{g}^*$ , dada  $D \in \text{Der}_a(\mathfrak{g})$  y  $\omega \in \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$  resulta que:

$$\begin{aligned} \phi_B^p(D \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p) &= \phi_B((D \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p)) \\ &= \phi_B(D \cdot \omega(x_1, \dots, x_p)) - \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_B^p(\omega)(x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) \\ &= D \cdot \phi_B(\omega(x_1, \dots, x_p)) - \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_B^p(\omega)(x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) \\ &= D \cdot \phi_B^p(\omega)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_B^p(\omega)(x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) = [D \cdot \phi_B^p(\omega)](x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

con lo cual  $\phi_B^p : \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*$  es de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos.  $\diamond$

Cada  $\phi^p$  también es un isomorfismo puesto que  $\phi_B$  lo es. Por otro lado, cualquier base  $\{x_1, \dots, x_n\}$  de  $\mathfrak{g}$  tiene asociada una  $B$ -base  $\{y_1, \dots, y_n\}$  de modo que  $B(y_k, -) = x_k^*$  para todo  $1 \leq k \leq n$ . Tenemos así la siguiente Proposición:

**Proposición 2.6.2.** Para todo  $1 \leq q \leq n$  existe un isomorfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos  $\psi^q : \wedge^q \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^q \mathfrak{g}^*$  vía la extensión  $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q} \mapsto \phi(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge \phi(x_{i_q})$ .

*Demostración.* Veamos que  $\psi^q$  es un  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -morfismo. Sean  $D \in \text{Der}_a(\mathfrak{g})$  y  $x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q} \in \wedge^q \mathfrak{g}$ . Luego:

$$\begin{aligned} \psi^q(D \cdot (x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q})) &= \sum_s \psi^q(x_{i_1} \wedge \dots \wedge D \cdot x_{i_s} \wedge \dots \wedge x_{i_q}) \\ &= \sum_s \phi(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge \phi(D \cdot x_{i_s}) \wedge \dots \wedge \phi(x_{i_q}) \\ &= \sum_s \phi(x_{i_1}) \wedge \dots \wedge D \cdot \phi(x_{i_s}) \wedge \dots \wedge \phi(x_{i_q}) \\ &= D \cdot \psi^q(x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q}) \end{aligned}$$

Por último, cada  $\psi^q$  es un isomorfismo puesto que  $\phi$  lo es.  $\diamond$

Finalmente, combinando los resultados anteriores para  $1 \leq p, q \leq n$ , existe un isomorfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos  $\phi_B^{p,q} : \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \wedge^q \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \wedge^q \mathfrak{g}^*$ .

## 2.7. Álgebras graduadas

Un espacio vectorial  $\mathbb{Z}$ -graduado es una suma directa de espacios vectoriales  $\mathfrak{A} = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}_p$ . Cada  $\mathfrak{A}_p$  es llamado la componente de  $\mathfrak{A}$  de grado  $p$  y el grado de un elemento homogéneo  $a \in \mathfrak{A}$  es denotado por  $|a|$ . El espacio vectorial graduado desplazado por  $n$  es  $\mathfrak{A}[n] = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathfrak{A}[n]_p$  donde  $\mathfrak{A}[n]_p = \mathfrak{A}_{n+p}$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.7.1.** Un álgebra graduada es un espacio vectorial graduado  $\mathfrak{A}$  junto con una aplicación bilinear  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{A}_p \cdot \mathfrak{A}_q \subset \mathfrak{A}_{p+q}$ . Se dice que  $\mathfrak{A}$  es súper-conmutativa si para todo par de elementos homogéneos  $a, b \in \mathfrak{A}$  se satisface que:

$$a \cdot b = (-1)^{|a||b|} b \cdot a$$

Por ejemplo, el álgebra tensorial  $T(V) = \bigoplus_{p \geq 0} V^{\otimes p}$  de un espacio vectorial  $V$  es un álgebra graduada cuyo producto está dado por la concatenación de monomios, extendida linealmente:

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_p) \cdot (w_1 \otimes \dots \otimes w_q) = v_1 \otimes \dots \otimes v_p \otimes w_1 \otimes \dots \otimes w_q$$

Tomando el dual  $V^*$  de  $V$  e identificando  $(V^*)^{\otimes p}$  con el espacio vectorial de los funcionales  $p$ -lineales  $\text{Hom}(V \times \cdots \times V, \mathbb{F})$ , si  $f \in (V^*)^{\otimes p}$  y  $g \in (V^*)^{\otimes q}$  el producto tensorial  $f \otimes g$  es el funcional  $(p+q)$ -lineal:

$$(f \otimes g)(x_1, \dots, x_{p+q}) = f(x_1, \dots, x_p)g(x_{p+1}, \dots, x_{p+q})$$

**Observación 2.7.1.** Sea  $\mathfrak{A}$  un álgebra graduada e  $I$  es un ideal homogéneo graduado de  $\mathfrak{A}$ . Es decir,  $I = \bigoplus_{p \geq 0} I_p$  con  $I_p = \mathfrak{A}_p \cap I$  para todo  $p \geq 0$ . Entonces  $\mathfrak{A}/I$  es un álgebra graduada y existe un isomorfismo de espacios vectoriales:

$$\mathfrak{A}/I \cong \bigoplus_{p \geq 0} \mathfrak{A}_p/I_p$$

Además, la multiplicación de  $\mathfrak{A}/I$  es inducida por la multiplicación de  $\mathfrak{A}$ .

Sea  $V$  un espacio vectorial y  $N \subset T(V)$  el ideal graduado generado por los elementos  $u \otimes v + v \otimes u$ . Definimos el álgebra exterior de  $V$  por  $\bigwedge^\bullet V = T(V)/N$ , donde el producto de  $u, v \in \bigwedge^\bullet V$  es denotado por  $u \wedge v$ . Como  $N_p = N \cap V^{\otimes p}$ , los espacios vectoriales  $\bigwedge^p V = V^{\otimes p}/N_p$  inducen la graduación:

$$\bigwedge^\bullet V = \bigoplus_{p \geq 0} \bigwedge^p V$$

Por construcción, el producto  $\wedge$  es súper-conmutativo y si  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es una base de  $V$ , entonces  $\{v_{i_1} \wedge \cdots \wedge v_{i_p} : 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$  es una base de  $\bigwedge^p V$ . Luego  $\dim \bigwedge^p V = \binom{n}{p}$  para todo  $1 \leq p \leq n$ .

El dual  $\bigwedge^\bullet V^*$  también es graduada súper-conmutativa. Si  $\omega \in \bigwedge^k V^*$  y  $\nu \in \bigwedge^l V^*$ , entonces  $\omega \wedge \nu \in \bigwedge^{k+l} V^*$  es identificado con la forma alternante:

$$\omega \wedge \nu(v_1, \dots, v_{k+l}) = \sum_{\sigma} \text{Sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \nu(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

donde  $\text{Sgn}(\sigma)$  es el signo de la permutación  $\sigma$ .

Si  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  son álgebras graduadas súper-conmutativas, entonces el producto tensorial  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  es un álgebra graduada súper-conmutativa cuyo producto está definido por los signos de Koszul:

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|} a_1 \cdot a_2 \otimes b_1 \cdot b_2 \quad (2.11)$$

Llamamos a  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  el producto tensorial súper-conmutativo de  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$ . Una aplicación lineal  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  se dice *homogénea de grado  $k$*  si  $\phi(\mathfrak{A}_p) \subset \mathfrak{B}_{k+p}$  para todo  $p \in \mathbb{Z}$ .

De este modo, como  $\bigwedge^\bullet V$  y  $\bigwedge^\bullet V^*$  son álgebras graduadas súper-conmutativas, obtenemos que  $\bigwedge^\bullet V^* \otimes \bigwedge^\bullet V$  también es un álgebra graduada súper-conmutativa cuyo producto está definido mediante la fórmula 2.11.

**Definición 2.7.2.** Un morfismo de álgebras graduadas es una aplicación lineal  $\phi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  homogénea de grado cero tal que:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}.$$

Una súper-derivación de grado  $k$  sobre un álgebra graduada  $\mathfrak{A}$  es una aplicación lineal  $\delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  homogénea de grado  $k$  que satisface la regla de súper-Leibniz:

$$\delta(xy) = \delta(x)y + (-1)^{k|x|} x\delta(y), \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}. \quad (2.12)$$

**Definición 2.7.3.** (Producto interior) Sea  $x \in V$ , se define el producto interior por  $x$  como la súper-derivación  $\iota_x : \bigwedge^\bullet V^* \rightarrow \bigwedge^{\bullet-1} V^*$  de grado  $-1$  dada por  $\omega \mapsto \omega(x, \dots)$  y  $\iota_x = 0$  sobre  $\mathbb{C}$ .

Notemos que para todo  $\alpha, \beta \in \wedge^\bullet V^*$  vale:

$$\iota_x(\alpha \wedge \beta) = \iota_x(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \iota_x(\beta) \quad (2.13)$$

El producto interior  $\iota_x$  también se extiende para  $\wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  como  $\omega \mapsto \omega(x, \dots)$  y  $\iota_x = 0$  sobre  $\wedge^\bullet V$ . Vale así la siguiente proposición:

**Proposición 2.7.1.** Para todo  $x \in V$ , el producto interior  $\iota_x$  es una súper-derivación de grado  $-1$  sobre  $\wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  cuyo producto graduado está dado por (2.11).

*Demostración.* En efecto, si  $\alpha_1 \otimes u_1, \alpha_2 \otimes u_2 \in \wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  entonces:

$$\begin{aligned} \iota_x((\alpha_1 \otimes u_1) \cdot (\alpha_2 \otimes u_2)) &= (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|} \iota_x(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \otimes u_1 \wedge u_2) \\ &= (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|} \iota_x(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes u_1 \wedge u_2 \\ &= (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|} \iota_x(\alpha_1) \wedge \alpha_2 \otimes u_1 \wedge u_2 + (-1)^{|\alpha_1||\alpha_2|+|\alpha_1|} \alpha_1 \wedge \iota_x(\alpha_2) \otimes u_1 \wedge u_2 \\ &= [\iota_x(\alpha_1) \otimes u_1] \cdot [\alpha_2 \otimes u_2] + (-1)^{|\alpha_1 \otimes u_1|} [\alpha_1 \otimes u_1] \cdot [\iota_x(\alpha_2) \otimes u_2] \\ &= \iota_x(\alpha_1 \otimes u_1) \cdot (\alpha_2 \otimes u_2) + (-1)^{|\alpha_1 \otimes u_1|} (\alpha_1 \otimes u_1) \cdot \iota_x(\alpha_2 \otimes u_2). \end{aligned}$$

◇

Un álgebra diferencial graduada es un par  $(\mathfrak{A}, \delta)$  que consiste de un álgebra graduada  $\mathfrak{A}$  (por lo general  $\mathfrak{A}$  es súper-conmutativa) y una derivación  $\delta : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  de grado 1 tal que  $\delta^2 = 0$ , usualmente llamada diferencial. El núcleo  $\text{Ker}(\delta) = Z^\bullet(\mathfrak{A})$  y la imagen  $\text{Im}(\delta) = B^\bullet(\mathfrak{A})$  son subálgebras graduadas de  $\mathfrak{A}$  cuyos elementos se denominan cociclos y cobordes respectivamente con  $B^\bullet(\mathfrak{A}) \subset Z^\bullet(\mathfrak{A})$  puesto que  $\delta^2 = 0$ . Notar que:

$$\delta(ac) = (-1)^{|a|} a\delta(c), \quad \forall a \in Z^\bullet(\mathfrak{A}), \delta(c) \in B^\bullet(\mathfrak{A}), \quad (2.14)$$

es decir,  $B^\bullet(\mathfrak{A})$  es un ideal graduado de  $Z^\bullet(\mathfrak{A})$ . El álgebra de cohomología de  $(\mathfrak{A}, \delta)$  es el cociente  $H^\bullet(\mathfrak{A}) = Z^\bullet(\mathfrak{A})/B^\bullet(\mathfrak{A})$ .

Si  $\delta_p = \delta|_{\mathfrak{A}^p}$  entonces  $Z^p(\mathfrak{A}) = \text{Ker}(\delta_p)$  y  $B^p(\mathfrak{A}) = \text{Im}(\delta_{p-1})$ . Luego  $H^\bullet(\mathfrak{A}) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(\mathfrak{A})$  con  $H^p(\mathfrak{A}) = Z^p(\mathfrak{A})/B^p(\mathfrak{A})$ . Si  $\mathfrak{A}$  es un álgebra diferencial graduada súper-conmutativa, entonces  $H^\bullet(\mathfrak{A})$  es un álgebra graduada súper-conmutativa. Un morfismo de álgebras graduadas  $\phi : (\mathfrak{A}, \delta_{\mathfrak{A}}) \rightarrow (\mathfrak{B}, \delta_{\mathfrak{B}})$  es un morfismo de álgebras diferenciales graduadas si  $\phi \circ \delta_{\mathfrak{A}} = \delta_{\mathfrak{B}} \circ \phi$ . Es decir,  $\phi$  lleva cociclos en cociclos y cobordes en cobordes e induce un morfismo en la cohomología  $H^\bullet(\phi) : H^\bullet(\mathfrak{A}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{B})$ .

## 2.8. Álgebras de Poisson

**Definición 2.8.1.** [CFL06] Un álgebra de Lie graduada de grado  $n$  es un espacio vectorial graduado  $\mathfrak{g}$  junto con una aplicación bilineal  $\{-, -\} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}[-n]$  que satisface:

1.  $\{a, b\} = (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)+1} \{b, a\}$  (súper-anticonmutativa de grado  $n$ ).
2.  $\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{(|a|+n)(|b|+n)} \{b, \{a, c\}\}$  (súper-Jacobi de grado  $n$ ).

**Definición 2.8.2.** [CFL06] Un álgebra de  $n$ -Poisson es un espacio vectorial graduado  $\mathfrak{g}$  con un producto asociativo súper-conmutativo  $\cdot : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  y un corchete de Lie graduado  $\{-, -\} : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}[-n]$  que satisface la siguiente ley de compatibilidad:

3.  $\{a, b \cdot c\} = \{a, b\} \cdot c + (-1)^{|b|(|a|+n)} b \cdot \{a, c\}$ .

Una **súper-álgebra de Poisson** es un álgebra de 2-Poisson. Un **álgebra de Gerstenhaber** es un álgebra de 1-Poisson. Un **álgebra de Poisson** es un álgebra de 0-Poisson con espacio vectorial subyacente de grado cero.

Es decir, un álgebra de Poisson es un álgebra de Lie cuyo corchete  $\{x, -\}$  deriva el producto asociativo para todo  $x \in \mathfrak{g}$ .

**Ejemplo 2.8.1.** Cualquier álgebra asociativa es un álgebra de Poisson con la estructura de Lie abeliana y cualquier álgebra de Lie graduada es una súper-álgebra de Poisson con el producto asociativo trivial.

**Ejemplo 2.8.2.** Sean  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie cuadrática con forma bilineal no degenerada  $B$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  y  $\{y_1, \dots, y_n\}$  la  $B$ -base de  $\mathfrak{g}$  asociada a  $\{x_1, \dots, x_n\}$ . Consideremos el álgebra graduada  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ . Entonces  $B$  define un súper-corchete de Lie  $\{-, -\}_B : \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \times \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{\bullet-2} \mathfrak{g}^*$  por:

$$\{\Omega_1, \Omega_2\}_B = (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i, j \leq n} B(y_i, y_j) \iota_{x_i}(\Omega_1) \wedge \iota_{x_j}(\Omega_2), \quad \forall \Omega_1 \in C^{k,0}, \Omega_2 \in C^{\bullet,0}. \quad (2.15)$$

donde  $C^{k,0} = \wedge^k \mathfrak{g}^*$ ,  $C^{\bullet,0} = \wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$  y tal definición no depende de la elección de la base de  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$  es una súper-álgebra de Poisson y tomando la 3-forma  $I_B$  asociada a  $B$ , el diferencial de Chevalley  $\delta_t$  sobre  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$  (ver sec. 5.1) está determinado por  $\delta_t(\omega) = -\{I_B, \omega\}_B$  [PU07, HTV19]. Notemos que  $\{I_B, I_B\}_B = 0 \implies \delta_t(I_B) = 0$  con lo cual  $I_B$  es siempre un cociclo sobre  $\wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$ .

**Ejemplo 2.8.3.** Sea  $\mathfrak{A}$  un álgebra arbitraria con producto  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  (no necesariamente asociativa). El asociador de  $(\mathfrak{A}, \cdot)$  es la aplicación trilineal dada por  $A(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z - x \cdot (y \cdot z)$ . Si  $\mathcal{P} = \mathfrak{A}$  con productos  $\{-, -\}$  y  $\diamond$  definidos por:

$$\{x, y\} = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x), \quad x \diamond y = \frac{1}{2}(x \cdot y + y \cdot x),$$

entonces  $(\mathcal{P}, \{-, -\}, \diamond)$  es un álgebra de Poisson si y sólo si  $(\mathfrak{A}, \cdot)$  satisface la siguiente identidad [GR07]:

$$3A(x, y, z) = (x \cdot y) \cdot z + (y \cdot z) \cdot x - (y \cdot x) \cdot z - (z \cdot x) \cdot y \quad (2.16)$$

Cuando  $(\mathfrak{A}, \cdot)$  satisface la ecuación (2.16) se dice que  $(\mathfrak{A}, \cdot)$  es un álgebra de Poisson admisible.

**Definición 2.8.3.** Una aplicación lineal  $\psi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$  entre álgebras de Poisson es un morfismo de álgebras de Poisson si  $\psi$  es simultáneamente un morfismo de álgebras de Lie y un morfismo de álgebras asociativas. Es decir, para todo  $x, y \in \mathfrak{g}_1$  se satisface:

1.  $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ .
2.  $\psi(\{x, y\}) = \{\psi(x), \psi(y)\}$ .

En la versión súper la definición es análoga respetando que sea morfismo de súper-álgebras.

El presente capítulo se cierra dando una nueva familia de álgebras de Poisson  $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$  construidas a partir de un álgebra asociativa  $\mathfrak{A}$ , tal como muestra el siguiente Teorema:

**Teorema 2.10.** Sea  $\mathfrak{A}$  un álgebra asociativa con producto  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  y sea  $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}_0 \oplus \mathfrak{A}_1$  tal que  $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$  para  $i = 0, 1$ . Definamos sobre  $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$  los siguientes productos no nulos:

$$\{x, y\} = \begin{cases} [x, y] \in \mathfrak{A}_0, & x, y \in \mathfrak{A}_0 \\ [x, y] \in \mathfrak{A}_1, & x \in \mathfrak{A}_0, y \in \mathfrak{A}_1 \end{cases}$$

$$\llbracket x, y \rrbracket = x \cdot y + y \cdot x \in \mathfrak{A}_1, \quad x, y \in \mathfrak{A}_0$$

con  $[-, -]$  denotando el conmutador sobre  $\mathfrak{A}$  respectivamente. Entonces  $(\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}, \{-, -\}, \llbracket -, - \rrbracket)$  es un álgebra de Poisson.

*Demostración.* Claramente  $\llbracket -, - \rrbracket$  es un producto asociativo y  $\{-, -\}$  es un corchete de Lie, por lo que resta probar la ley de compatibilidad de la definición 2.8.2. Como  $\llbracket -, - \rrbracket \neq 0$  excepto sobre  $\mathfrak{A}_0$ , basta suponer que  $x, y, z \in \mathfrak{A}_0$ . De este modo:

$$\begin{aligned} \{x, \llbracket y, z \rrbracket\} &= [x, \llbracket y, z \rrbracket] = [x, y \cdot z + z \cdot y] \\ &= x \cdot (y \cdot z + z \cdot y) - (y \cdot z + z \cdot y) \cdot x \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z \cdot y - y \cdot z \cdot x - z \cdot y \cdot x \in \mathfrak{A}_1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \llbracket \{x, y\}, z \rrbracket + \llbracket y, \{x, z\} \rrbracket &= \llbracket [x, y], z \rrbracket + \llbracket y, [x, z] \rrbracket \\ &= (x \cdot y - y \cdot x) \cdot z + z \cdot (x \cdot y - y \cdot x) + y \cdot (x \cdot z - z \cdot x) + (x \cdot z - z \cdot x) \cdot y \\ &= x \cdot y \cdot z + x \cdot z \cdot y - y \cdot z \cdot x - z \cdot y \cdot x \in \mathfrak{A}_1 \end{aligned} \quad (2.18)$$

y por las ecuaciones (2.17) y (2.18) concluimos que los productos  $\{-, -\}, \llbracket -, - \rrbracket$  satisfacen la ley de compatibilidad, lo que concluye la demostración.  $\diamond$

Tomando el caso particular del álgebra de matrices  $M_n(\mathbb{C})$ , obtenemos un álgebra de Poisson cuya estructura de álgebra de Lie subyacente es  $\mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$ . Usando esta construcción, fue posible definir otra familia de álgebras de Poisson  $\mathcal{Q}_n$  con la misma estructura de Lie subyacente pero con otra estructura asociativa. Posteriormente veremos que una subálgebra de la cohomología del álgebra de Lie de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  tiene como estructura de Poisson a una de ellas (ver Cap. 4 para la construcción  $\mathcal{Q}_n$  y Cap. 6 para lo último mencionado).

**Definición 2.8.4.** Sea  $\mathfrak{A} = M_n(\mathbb{C})$  el álgebra de matrices de tamaño  $n \times n$ . Se define  $\mathcal{P}_n$  como el álgebra de Poisson  $\mathcal{P}_{\mathfrak{A}}$  cuya estructura de álgebra de Lie subyacente es  $\mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$ , donde el factor  $\mathfrak{gl}(n)_{ab}$  es visto como un álgebra de Lie abeliana.



# Capítulo 3

## Representaciones de álgebras de Lie no semisimples

El siguiente capítulo es una recopilación de algunas definiciones y propiedades de [CS13] sobre representaciones uniseriales de  $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(m)}$ , donde  $V_{(m)}$  es el  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible de peso máximo  $m \geq 0$ .

Veremos que la representación central sobre la cohomología  $H^{\bullet, \bullet}$  de un álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  (sec. 5.3) tiene bastante relación con ciertas representaciones de  $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(m)}$  cuando  $\mathfrak{sl}(2)$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  por derivación y  $\mathfrak{z} = V_{(m)}$ .

Aunque la representación central sobre  $H^{\bullet, \bullet}$  es una representación de álgebra asociativa y no una representación de álgebra de Lie (en el sentido usual), entender un poco la estructura de las representaciones de  $\mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(m)}$  nos ayuda a entender como actúa cada  $y \in \mathfrak{z}$  sobre los  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulo irreducible de la descomposición de  $H^{\bullet, \bullet}$ .

### 3.1. Módulos uniseriales sobre álgebras de Lie perfectas

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie semisimple, por el Teorema de Weyl sabemos todo  $\mathfrak{g}$ -módulo de dimensión finita es completamente reducible. En el caso de álgebras de Lie simples, la clasificación de los módulos irreducibles de dimensión finita está dado en términos de los pesos dominantes, como en  $\mathfrak{sl}(2)$ . Sin embargo, esto no es cierto para álgebras de Lie en general, lo que motiva a la siguiente definición:

**Definición 3.1.1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  se denomina indescomponible si no existen  $\mathfrak{g}$ -módulos no triviales  $V_1$  y  $V_2$  tales que  $V = V_1 \oplus V_2$ .

Notar que irreducible implica indescomponible. Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo de dimensión finita, una serie de composición de  $V$  de longitud  $n$  es una sucesión creciente de  $\mathfrak{g}$ -submódulos de  $V$ :

$$0 = V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n = V$$

tal que  $V_i/V_{i-1}$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible para todo  $1 \leq i \leq n$ . Cada cociente es llamado factor de composición de la serie. El siguiente resultado muestra que la longitud  $n$  es independiente de la serie de composición que se tome:

**Teorema 3.1.** (Jordan-Hölder) Si  $0 = V_0 \subset \cdots \subset V_n = V$  y  $0 = W_0 \subset \cdots \subset W_m = V$  son dos series de composición de  $V$  entonces  $n = m$  y existe una permutación  $\sigma$  tal que  $W_{j+1}/W_j \cong V_{\sigma(j)+1}/V_{\sigma(j)}$

*Demostración.* Si  $n = 0$  entonces  $V = 0$  y por lo tanto  $m = 0$ . Supongamos que  $n > 0$  y que el resultado vale

para longitud  $n - 1$ . Consideremos además la siguiente sucesión de  $\mathfrak{g}$ -submódulos de  $V$ :

$$\begin{aligned} 0 = W_0 \cap V_{n-1} &\subset W_1 \cap V_{n-1} \subset \cdots \subset W_m \cap V_{n-1} = V_{n-1} \\ &= W_0 + V_{n-1} \subset W_1 + V_{n-1} \subset \cdots \subset W_m + V_{n-1} = V_n \end{aligned}$$

Para  $j < m$  existe una sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \frac{W_{j+1} \cap V_{n-1}}{W_j \cap V_{n-1}} \rightarrow \frac{W_{j+1}}{W_j} \rightarrow \frac{W_{j+1} + V_{n-1}}{W_j + V_{n-1}} \rightarrow 0$$

y como  $\frac{W_{j+1}}{W_j}$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible, tenemos las siguientes situaciones:

1.  $\frac{W_{j+1} \cap V_{n-1}}{W_j \cap V_{n-1}} \cong \frac{W_{j+1}}{W_j}$  con lo cual  $\frac{W_{j+1} + V_{n-1}}{W_j + V_{n-1}} = 0$  ó
2.  $\frac{W_{j+1}}{W_j} \cong \frac{W_{j+1} + V_{n-1}}{W_j + V_{n-1}}$  con lo cual  $\frac{W_{j+1} \cap V_{n-1}}{W_j \cap V_{n-1}} = 0$ .

Como  $\frac{V_n}{V_{n-1}}$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible, existe exactamente un  $i < m$  tal que  $V_{n-1} = W_i + V_{n-1} \subset W_{i+1} + V_{n-1} = V_n$ , por lo que  $\frac{V_n}{V_{n-1}} \cong \frac{W_{i+1}}{W_i}$  y

$$0 = W_0 \cap V_{n-1} \subset W_1 \cap V_{n-1} \subset \cdots \subset W_i \cap V_{n-1} = W_{i+1} \cap V_{n-1} \subset \cdots \subset W_m \cap V_{n-1} = V_{n-1}$$

es una serie de composición de  $V_n$ . Por hipótesis,  $m - 1 = n - 1$  y existe una biyección  $\tilde{\sigma}$  del conjunto  $\{0, 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m-1\}$  al conjunto  $\{0, 1, \dots, n-2\}$  tal que  $W_{j+1}/W_j \cong V_{\tilde{\sigma}(j)+1}/V_{\tilde{\sigma}(j)}$  para todo  $i \neq j$ . Luego, tomamos  $\sigma(j) = \tilde{\sigma}(j)$  para todo  $j \neq i$  y  $\sigma(i) = n - 1$ , concluyendo el resultado.  $\diamond$

Como la suma directa de  $\mathfrak{g}$ -submódulos semisimples es semisimple, todo  $\mathfrak{g}$ -módulo posee un único  $\mathfrak{g}$ -submódulo maximal semisimple.

**Definición 3.1.2.** Sea  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo, se define el zócalo de  $V$  como el único  $\mathfrak{g}$ -submódulo maximal completamente reducible de  $V$  y se denota por  $\text{soc}(V)$ .

Algunas propiedades inmediatas que resultan de la definición anterior son las siguientes:

1. Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo completamente irreducible entonces  $\text{soc}(V) = V$ .
2. Cualquier  $\mathfrak{g}$ -submódulo irreducible de un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  está contenido en  $\text{soc}(V)$ .
3. Si  $W$  es un  $\mathfrak{g}$ -submódulo no nulo de un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$ , entonces  $\text{soc}(V) \cap W \neq 0$ .
4. Si  $T : V \rightarrow W$  es un  $\mathfrak{g}$ -morfismo, entonces  $T(\text{soc}(V)) \subset \text{soc}(W)$ .

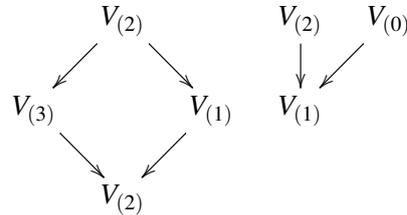
**Definición 3.1.3.** La serie de zócalo de un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  es la sucesión creciente:

$$0 = \text{soc}^0(V) \subset \text{soc}^1(V) \subset \cdots \subset \text{soc}^n(V) = V$$

donde  $\text{soc}^i(V) / \text{soc}^{i-1}(V) = \text{soc}(V / \text{soc}^{i-1}(V))$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Los cocientes  $\text{soc}^i(V) / \text{soc}^{i-1}(V)$  se denominan factores de zócalo de  $V$ .

Notemos que  $\text{soc}^1(V) = \text{soc}(V)$ . Como  $\text{soc}^i(V) / \text{soc}^{i-1}(V)$  es único para cada  $1 \leq i \leq n$ , se define la longitud de la serie de zócalo de  $V$  como  $l_z(V) = n$ .

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie con descomposición de Levi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(1)}$  y supongamos que  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo cuya descomposición en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducibles es  $V = V_{(2)} \oplus V_{(1)} \oplus V_{(3)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(1)} \oplus V_{(0)} \oplus V_{(2)}$  y cuyo radical nilpotente  $V_{(1)}$  de  $\mathfrak{g}$  actúa vía el siguiente diagrama:



Entonces  $\text{soc}(V) = V_{(2)} \oplus V_{(1)}$ . Notemos que  $W = V_{(1)} \oplus V_{(0)} \oplus V_{(2)}$  determinado por los tres submódulos de la parte derecha es un  $\mathfrak{g}$ -submódulo de  $V$  que en si mismo es indescomponible. La serie de zócalo de  $V$  es la siguiente sucesión de  $\mathfrak{g}$ -módulos:

$$\begin{aligned} \text{soc}^1(V) &= V_{(2)} \oplus V_{(1)} \\ \text{soc}^2(V) &= V_{(3)} \oplus V_{(1)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(1)} \\ \text{soc}^3(V) &= V \end{aligned}$$

Es decir,  $l_z(V) = 3$ .

**Definición 3.1.4.** Un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  se denomina uniserial si el conjunto de  $\mathfrak{g}$ -submódulos de  $V$  está totalmente ordenado por inclusión.

Por la definición anterior, un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  es uniserial si y sólo si la serie de zócalo es una serie de composición. También damos la siguiente definición:

**Definición 3.1.5.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  se denomina perfecta si  $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ .

Notemos que si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ , entonces

$$\mathfrak{g} = [\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}] \subset [\mathfrak{s}, \mathfrak{s}] \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \oplus [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$$

por lo que  $\mathfrak{r} \subset [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$ . Pero por maximalidad de  $\mathfrak{r}$  sigue que  $\mathfrak{r} = [\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]$ . La reciproca también es cierta [CS13], es decir, un álgebra de Lie es perfecta si y sólo si su radical soluble coincide con su radical nilpotente. Algunos ejemplos de álgebras de Lie perfectas son:

1. Toda álgebra de Lie semisimple es un álgebra de Lie perfecta.
2. Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes V_{(m)}$  donde  $V_{(m)}$  es el  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible de peso máximo  $m$  con base  $\{v_{m-2i}^m\}_{0 \leq i \leq m}$  tal que  $\mathfrak{sl}(2)$  actúa sobre esta base del siguiente modo:

$$h \cdot v_{m-2i}^m = (m - 2i) v_{m-2i}^m \quad e \cdot v_{m-2i}^m = i(m + 1 - i) v_{m-2i+2}^m \quad f \cdot v_{m-2i}^m = v_{m-2i-2}^m$$

Estas relaciones definen los únicos corchetes no nulo sobre  $\mathfrak{g}$  y  $v_{m-2i}^m \in [\mathfrak{g}, V_{(m)}]$  para todo  $0 \leq i \leq m$ , por lo que  $V_{(m)} \subset [\mathfrak{g}, V_{(m)}]$ . Por otro lado, como  $V_{(m)}$  es un ideal abeliano de  $\mathfrak{g}$  claramente  $[\mathfrak{g}, V_{(m)}] \subset V_{(m)}$ . Es decir  $[\mathfrak{g}, V_{(m)}] = V_{(m)}$  y  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie perfecta.

3. Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathfrak{h}_m$  donde  $\mathfrak{h}_m$  es el álgebra de Heisenberg de dimensión  $2m + 1$ , vista como la suma  $V_{(n)} \oplus V_{(0)}$  donde  $n = 2m - 1$ , tal como en el ejemplo 2.5.2. Si  $\{x_{n-2i}\}_{0 \leq i \leq n}$  y  $\{h_0\}$  son las bases de  $V_{(n)}$  y  $V_{(0)}$  con relaciones de corchetes:

$$\begin{aligned} [h, x_{n-2i}] &= (n - 2i)x_{n-2i} & [e, x_{n-2i}] &= (n + 1 - i)x_{n-2i+2} & [f, x_{n-2i}] &= (i + 1)x_{n-2i-2} \\ [x_{n-2i}, x_{2i-n}] &= (-1)^i \binom{n}{i} h_0 & [x_{n-2i}, h_0] &= 0 & [x_i, x_j] &= 0, i \neq -j \end{aligned}$$

entonces  $[V_{(n)}, \mathfrak{g}] \subset V_{(n)}$  y por lo tanto  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie perfecta.

**Lema 3.1.1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie perfecta con descomposición de Levi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ . Entonces el radical  $\mathfrak{r}$  actúa trivialmente sobre todos los  $\mathfrak{g}$ -módulos irreducibles de dimensión finita.

*Demostración.* Consideremos  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible de dimensión finita. Como  $\mathfrak{r}$  es soluble, por el teorema de Lie existe un autovalor común  $\lambda \in \mathfrak{r}^*$  y por lo tanto el  $\mathfrak{r}$ -submódulo  $W_\lambda = \{v \in V : \mathfrak{r} \cdot v = \lambda(\mathfrak{r})v\}$  de  $V$  es no trivial. Como  $\mathfrak{r}$  es un ideal de  $\mathfrak{g}$ ,  $W_\lambda$  también es un  $\mathfrak{g}$ -submódulo de  $V$  y por irreducibilidad sigue que  $V = W_\lambda$ . Además,  $\text{Tr}(r) = \lambda(r) \dim V$  para todo  $r \in \mathfrak{r}$  y como  $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$  por hipótesis,  $\text{Tr}(r) = 0$  con lo cual  $\lambda(r) = 0$ . En otras palabras  $\mathfrak{r}$  actúa trivialmente sobre  $V$ .  $\diamond$

**Observación 3.1.1.** Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo irreducible, con  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$  un álgebra de Lie perfecta, entonces  $V$  es un  $\mathfrak{s}$ -módulo irreducible y por el Lema 3.1.1,  $\mathfrak{r}$  actúa trivialmente sobre  $V$ .

### 3.2. Representaciones de $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$ con $\mathfrak{r}$ nilpotente

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie con descomposición de Levi  $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$  tal que  $\mathfrak{r}$  es un álgebra de Lie nilpotente con estructura de  $\mathfrak{s}$ -módulo vía derivación, entonces el corchete de Lie sobre  $\mathfrak{g}$  se define como:

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]_\ltimes = ([x_1, x_2], [y_1, y_2] + x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1)$$

Supongamos que  $V_1$  y  $V_2$  son dos  $\mathfrak{s}$ -módulos irreducibles. Queremos construir una representación de  $\mathfrak{s} \ltimes \mathfrak{r}$  sobre  $V_1 \oplus V_2$  de modo que  $\mathfrak{r}$  actúe nilpotentemente. Inicialmente, supongamos que  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1 \oplus V_2)$  es una representación de  $\mathfrak{g}$  con las condiciones pedidas y denotemos por  $\text{Ker } y$  al núcleo de  $\pi(y)$  para cada  $y \in \mathfrak{r}$ . Tenemos así la siguiente proposición:

**Proposición 3.2.1.**  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y$  es un  $\mathfrak{s}$ -submódulo de  $V_1 \oplus V_2$ .

*Demostración.* En efecto, sean  $x \in \mathfrak{s}$ ,  $v \in \bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y$  y notemos que  $x \cdot y = [x, y]_\ltimes$  para todo  $y \in \mathfrak{r}$ . Por lo tanto  $\pi(x \cdot y) = [\pi(x), \pi(y)]$ , de modo que:

$$y \cdot (x \cdot v) = \underbrace{x \cdot (y \cdot v)}_0 - [x, y]_\ltimes \cdot v = [y, x]_\ltimes \cdot v$$

Como  $[y, x]_\ltimes \in \mathfrak{r}$  por ser  $\mathfrak{r}$  un  $\mathfrak{s}$ -módulo, se sigue que  $[y, x]_\ltimes \cdot v = 0$  con lo cual  $x \cdot v \in \bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y$  y la proposición queda probada.  $\diamond$

Por la proposición anterior, vemos que las únicas posibilidades para el  $\mathfrak{s}$ -submódulo  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y \subset V_1 \oplus V_2$  son:

1. 0.
2.  $V_1$  ó  $V_2$ .
3.  $V_1 \oplus V_2$ .

4.  $W \cong V_1 \cong V_2$ .

La opción 1 queda descartada, puesto que por el Lema de Engel 2.3.3 existe un vector no nulo  $v \in V_1 \oplus V_2$  tal que  $y \cdot v = 0, \forall y \in \mathfrak{r}$ . Luego el subespacio generado por  $v$  está contenido en  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y$ .

Si  $V_1 \not\cong V_2$  entonces pueden darse las opciones 2 o 3. En el caso  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y = V_1 \oplus V_2$  obtenemos que  $\pi|_{\mathfrak{r}} = 0$ , pero si  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } y = V_1$  entonces el cociente  $W_2 = (V_1 \oplus V_2)/V_1$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo que es isomorfo a  $V_2$  como  $\mathfrak{s}$ -módulo y por lo tanto irreducible. Repitiendo el argumento con la representación  $\tilde{\pi} : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(W_2)$  concluimos que  $\bigcap_{y \in \mathfrak{r}} \text{Ker } \tilde{y} = W_2$ , con lo cual  $\tilde{\pi}|_{\mathfrak{r}} = 0$ . Esto nos dice que  $V_2 \xrightarrow{\pi(y)} V_1$  para todo  $y \in \mathfrak{r}$  y la restricción  $\pi|_{\mathfrak{r}} : \mathfrak{r} \rightarrow \text{Hom}(V_2, V_1)$  es no trivial.

**Observación 3.2.1.** Para construir una representación  $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(V_1 \oplus V_2)$  de modo que  $\mathfrak{r}$  actúe no trivialmente y de manera nilpotente sobre  $V_1 \oplus V_2$ , partiendo de una representación  $\rho_{\mathfrak{s}}$  de  $\mathfrak{s}$  sobre  $V_1 \oplus V_2$ , se debe construir un morfismo no nulo  $\rho_{\mathfrak{r}} : \mathfrak{r} \rightarrow \text{Hom}(V_2, V_1)$  tal que:

1.  $[\rho_{\mathfrak{s}}(x), \rho_{\mathfrak{r}}(y)] = \rho_{\mathfrak{r}}(x \cdot y) = \rho_{\mathfrak{r}}([x, y]_{\mathfrak{r}})$  para todo  $x \in \mathfrak{s}, y \in \mathfrak{r}$ .
2.  $[\rho_{\mathfrak{r}}(y_1), \rho_{\mathfrak{r}}(y_2)] = \rho_{\mathfrak{r}}([y_1, y_2])$  para todo  $y_1, y_2 \in \mathfrak{r}$ .

Por la condición 2 resulta que  $\rho_{\mathfrak{r}}$  es una representación de  $\mathfrak{r}$  sobre  $V_1 \oplus V_2$  y la condición 1 implica que  $\rho_{\mathfrak{r}}$  es un  $\mathfrak{s}$ -morfismo. En efecto, para todo  $x \in \mathfrak{s}, y \in \mathfrak{r}$  resulta que:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathfrak{r}}(x \cdot y)(v) &= [\rho_{\mathfrak{s}}(x), \rho_{\mathfrak{r}}(y)](v) \\ &= \rho_{\mathfrak{s}}(x) \circ \rho_{\mathfrak{r}}(y)(v) - \rho_{\mathfrak{r}}(y) \circ \rho_{\mathfrak{s}}(x)(v) \\ &= (x \cdot \rho_{\mathfrak{r}}(y))(v). \end{aligned}$$

Luego, cada componente irreducible de  $\mathfrak{r}$  donde  $\rho_{\mathfrak{r}}$  es no trivial debe aparecer en la descomposición de  $\text{Hom}(V_2, V_1) \cong V_1 \otimes V_2$  en  $\mathfrak{s}$ -módulos irreducibles.

**Observación 3.2.2.** Supongamos que  $\mathfrak{s} = \mathfrak{sl}(2)$  y que  $\mathfrak{r} = V_{(k)}$  actúa no trivialmente sobre  $V_{(n)} \oplus V_{(m)}$  de modo que  $V_{(n)} \xrightarrow{\mathfrak{r}} V_{(m)}$ . Sabemos que  $\text{Hom}(V_{(n)}, V_{(m)}) \cong V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  como  $\mathfrak{s}$ -módulo y por el Teorema de Clebsch-Gordan, la descomposición:

$$V_{(n)} \otimes V_{(m)} \cong V_{(n+m)} \oplus V_{(n+m-2)} \oplus \cdots \oplus V_{(|n-m|)}$$

es libre de multiplicidad. Luego, como  $V_{(n)} \xrightarrow{\mathfrak{r}} V_{(m)}$ , existe algún  $0 \leq t \leq \min\{n, m\}$  tal que  $V_{(k)} \cong V_{(n+m-2t)}$ . Por lo tanto, por el Lema de Schur  $V_{(k)} \xrightarrow{\mathfrak{r}} \text{Hom}(V_{(n)}, V_{(m)})$  es única salvo escalar.



# Capítulo 4

## G-álgebras

En este capítulo supondremos que  $G$  es un grupo semisimple en el sentido que toda representación de dimensión finita de  $G$  es completamente reducible y todo espacio vectorial es definido sobre  $\mathbb{C}$  (con excepción de la Subsec. 4.3.7, que consideraremos  $\mathbb{R}$ ).

Si  $\mathfrak{A}$  es un álgebra de dimensión finita  $n$  y base  $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ , la tabla de multiplicar de  $\mathfrak{A}$  con respecto a  $\mathcal{B}$  es la colección de constantes  $c_{i,j}^k$  que satisfacen:

$$e_i \cdot e_j = \sum_{k=1}^n c_{i,j}^k e_k.$$

Cuando  $\mathfrak{A}$  es un  $G$ -módulo, es conveniente considerar bases que se comporten bien en relación a la estructura de  $G$ -módulo. Pero también queremos describir de manera más eficiente y simultánea las estructuras multiplicativa y de  $G$ -módulo de  $\mathfrak{A}$ . Es por ello que estudiamos a continuación el concepto de  $G$ -álgebras y definiremos el concepto de  $G$ -tablas.

### 4.1. Introducción

**Definición 4.1.1.** Una  $G$ -álgebra es un par  $(\mathfrak{A}, \phi)$ , donde  $\mathfrak{A}$  es un álgebra y  $\phi : G \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{A})$  es un morfismo de grupos. Si  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son  $G$ -álgebras, un morfismo de  $G$ -álgebras es un morfismo de álgebras  $f : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$  tal que:

$$f(g \cdot a) = g \cdot f(a), \quad \forall g \in G, a \in \mathfrak{A}$$

Algunos ejemplos naturales de  $G$ -álgebras son los siguientes:

1. Todo  $G$ -módulo  $V$  es una  $G$ -álgebra con producto trivial  $v \cdot w = 0$ .
2. Si  $H < G$  entonces toda  $G$ -álgebra  $\mathfrak{A}$  es una  $H$ -álgebra vía restricción. Tal  $H$ -álgebra es denotada por  $\text{Res}_H^G(\mathfrak{A})$ .
3. El producto tensorial  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  de dos  $G$ -álgebras también es una  $G$ -álgebra vía la acción diagonal  $g \cdot (a \otimes b) = g \cdot a \otimes g \cdot b, \forall g \in G$ .
4. Sea  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[\mathbb{S}_n]$  el álgebra de grupo de  $\mathbb{S}_n$ . Entonces  $\mathbb{S}_n$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por automorfismos a través de la conjugación, por lo que  $\mathfrak{A}$  es una  $\mathbb{S}_n$ -álgebra.

Para una G-álgebra  $\mathfrak{A}$  y  $g \in G$ , definimos el centralizador de  $\mathfrak{A}$  por  $g$  como:

$$C_{\mathfrak{A}}(g) = \{a \in \mathfrak{A} : g \cdot a = a\}$$

Una G-álgebra  $\mathfrak{A}$  es simple si los únicos ideales G-invariantes de  $\mathfrak{A}$  son los triviales. El radical de Jacobson  $\text{Jac}(\mathfrak{A})$  de  $\mathfrak{A}$  es la intersección de todos los ideales maximales de  $\mathfrak{A}$ . Es conocido que  $\text{Jac}(\mathfrak{A}) = 0$  equivale a que  $\mathfrak{A}$  (vista como álgebra y como  $\mathfrak{A}$ -módulo) es semisimple y usando este hecho se tiene el siguiente resultado:

**Lema 4.1.1.** [Tur94, Lema 1.3] Sea  $\mathfrak{A}$  una G-álgebra simple, entonces  $\mathfrak{A}$  es un álgebra semisimple con descomposición dada por:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_n,$$

con cada  $\mathfrak{A}_i$  un ideal simple sobre  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{A}_j = 0$  para todo  $i \neq j$ . Además,  $G$  permuta el conjunto  $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$  transitivamente.

*Demostración.* Si  $\psi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  es un automorfismo de  $\mathfrak{A}$  e  $I \subset \mathfrak{A}$  un ideal maximal, entonces  $\psi(I)$  es un ideal maximal de  $\mathfrak{A}$ . Luego, como  $\text{Jac}(\mathfrak{A})$  es la intersección de todos los ideales maximales, se sigue que  $\psi(\text{Jac}(\mathfrak{A})) = \text{Jac}(\mathfrak{A})$ .

Como  $G$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por automorfismo, tenemos que  $\text{Jac}(\mathfrak{A})$  es un ideal G-invariante propio de  $\mathfrak{A}$ , que por la G-simplicidad de  $\mathfrak{A}$  debe ser 0. Es decir,  $\mathfrak{A}$  es un álgebra semisimple, por lo que existen ideales simples  $\mathfrak{A}_i$  sobre  $\mathfrak{A}$  tales que  $\mathfrak{A}_i \cdot \mathfrak{A}_j = 0$  para todo  $i \neq j$  y  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_n$ .

Como la suma de una G-órbita de  $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$  es un ideal G-invariante no trivial de  $\mathfrak{A}$ , la suma debe ser igual a  $\mathfrak{A}$  y por lo tanto  $G$  actúa transitivamente sobre  $\{\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_n\}$ .  $\diamond$

En el caso que  $G$  es un grupo de Lie y  $\mathfrak{g}$  su correspondiente álgebra de Lie, para una G-álgebra  $\mathfrak{A}$  obtenemos que  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por derivación. En efecto, para todo  $x \in \mathfrak{g}$  la acción de  $x$  sobre  $\mathfrak{A}$  es definida mediante el mapa exponencial como:

$$x \cdot a = \frac{d}{dt} (\exp(tx) \cdot a)_{t=0}, \quad \forall a \in \mathfrak{A}$$

De este modo, puesto que  $\mathfrak{A}$  es una G-álgebra, resulta que:

$$\exp(tx) \cdot (ab) = (\exp(tx) \cdot a) \cdot (\exp(tx) \cdot b), \quad \forall a, b \in \mathfrak{A}$$

y tomando la derivada cuando  $t \rightarrow 0$ :

$$x \cdot (ab) = \frac{d}{dt} (\exp(tx) \cdot a)_{t=0} \cdot (\exp(tx) \cdot b)_{t=0} + (\exp(tx) \cdot a)_{t=0} \cdot \frac{d}{dt} (\exp(tx) \cdot b)_{t=0} = (x \cdot a)b + a(x \cdot b)$$

mostrando que  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por derivación, dando así la siguiente definición:

**Definición 4.1.2.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Una  $\mathfrak{g}$ -álgebra es un álgebra  $\mathfrak{A}$  tal que  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por derivación, es decir:

$$x \cdot (a \cdot b) = x \cdot a \cdot b + a \cdot x \cdot b \quad \forall x \in \mathfrak{g}, a, b \in \mathfrak{A}.$$

Una **G-Lie** ( **$\mathfrak{g}$ -Lie**) es un álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$  tal que  $G$  actúa sobre  $\mathfrak{h}$  por automorfismo ( $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\mathfrak{h}$  por derivación). Las nociones sobre objetos graduados se siguen con la misma idea y serán denotadas por **G-súper-álgebra**,  **$\mathfrak{g}$ -súper-álgebra**, **G-súper-Lie** y  **$\mathfrak{g}$ -súper-Lie** según corresponda.

**Proposición 4.1.1.** Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo, entonces  $\wedge^\bullet V$  es una  $\mathfrak{g}$ -súper-álgebra con la acción natural de  $\mathfrak{g}$ . En consecuencia,  $\wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  también es una  $\mathfrak{g}$ -súper-álgebra.

*Demostración.* En efecto,  $\mathfrak{g}$  induce una acción de manera natural sobre  $\wedge^\bullet V$  por derivación:

$$x \cdot (v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \sum_{i=1}^p v_1 \wedge \cdots \wedge x \cdot v_i \wedge \cdots \wedge v_p, \forall x \in \mathfrak{g},$$

por lo que  $\mathfrak{g}$  deriva el producto wedge. La acción de  $\mathfrak{g}$  sobre  $\wedge^\bullet V^*$  es análoga, recordando que  $(x \cdot f)(v) = -f(x \cdot v)$  para todo  $x \in \mathfrak{g}, v \in V^*$ . De este modo,  $\mathfrak{g}$  actúa sobre  $\wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  por derivación:

$$x \cdot (\omega_p \otimes r_q) = x \cdot \omega_p \otimes r_q + \omega_p \otimes x \cdot r_q$$

y para todo  $\omega_p \otimes r_q, \omega_s \otimes r_t \in \wedge^\bullet V^* \otimes \wedge^\bullet V$  vale que:

$$\begin{aligned} x \cdot ((\omega_p \otimes r_q) \cdot (\omega_s \otimes r_t)) &= (-1)^{qs} x \cdot (\omega_p \wedge \omega_s \otimes r_q \wedge r_t) \\ &= (-1)^{qs} (x \cdot \omega_p \wedge \omega_s \otimes r_q \wedge r_t + \omega_p \wedge x \cdot \omega_s \otimes r_q \wedge r_t + \omega_p \wedge \omega_s \otimes x \cdot r_q \wedge r_t \\ &\quad + \omega_p \wedge \omega_s \otimes r_q \wedge x \cdot r_t) \\ &= x \cdot (\omega_p \otimes r_q) \cdot (\omega_s \otimes r_t) + (\omega_p \otimes r_q) \cdot x \cdot (\omega_s \otimes r_t) \end{aligned}$$

lo que concluye el resultado. ◇

Con estos mismos argumentos, podemos probar que si  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  son  $\mathfrak{g}$ -super-álgebras, entonces el producto tensorial  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$  también es una  $\mathfrak{g}$ -super-álgebra.

## 4.2. G-tablas

Sea  $\hat{G}$  un conjunto de clases de equivalencia de representaciones irreducibles de  $G$  y sea  $S = \{V_i : i \in I\}$  un conjunto de representantes de cada clase de  $\hat{G}$ . Para cada  $i, j, k \in I$ , consideremos

$$\mathcal{B}_{i,j}^k = \left\{ \left( m^{i,j,k} \right)_1, \dots, \left( m^{i,j,k} \right)_{\ell(i,j,k)} \right\}$$

una base fija de  $\text{Hom}_G(V_i \otimes V_j, V_k)$ , que es finita y puede ser vacía para ciertos  $i, j, k \in I$ . Decimos que los productos tensoriales  $V_i \otimes V_j, i, j \in I$ , son libres de multiplicidad<sup>1</sup> si  $\dim \text{Hom}_G(V_i \otimes V_j, V_k) \leq 1, \forall k \in I$ . Si  $\mathfrak{A}$  es un  $G$ -módulo de dimensión finita, elegimos una descomposición de  $\mathfrak{A}$  en  $G$ -submódulos irreducibles:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{A}_n$$

provista de morfismos de  $G$ -módulos  $\tau_r : V_{i(r)} \rightarrow \mathfrak{A}$  cuya imagen es  $\mathfrak{A}_r$ . Sea  $\tau_r^0 : V_{i(r)} \rightarrow \mathfrak{A}_r$  el correspondiente  $G$ -isomorfismo, es decir  $\tau_r = \iota_r \circ \tau_r^0$  con  $\iota_r : \mathfrak{A}_r \rightarrow \mathfrak{A}$  la inclusión canónica. De este modo, identificamos la  $r$ -ésima componente de  $\mathfrak{A}$  con la representación irreducible  $V_{i(r)} \in S$  de  $G$  previamente escogida. Queda así determinada una base de  $\text{Hom}_G(\mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s, \mathfrak{A}_t)$ :

$$\tilde{\mathcal{B}}_{r,s}^t = \left\{ \left( \tilde{m}^{r,s,t} \right)_1, \dots, \left( \tilde{m}^{r,s,t} \right)_{\ell(i(r),i(s),i(t))} \right\}$$

donde  $(\tilde{m}^{r,s,t})_q = \tau_t^0 \circ (m^{i(r),i(s),i(t)})_q \circ (\tau_r^0 \otimes \tau_s^0)^{-1}$  para todo  $1 \leq q \leq \ell(i(r),i(s),i(t))$ . Si ahora  $\mathfrak{A}$  es una  $G$ -álgebra y  $(-\cdot-)_{r,s} : \mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s \rightarrow \mathfrak{A}$  es la restricción del producto de  $\mathfrak{A}$  sobre  $\mathfrak{A}_r \otimes \mathfrak{A}_s$ , podemos expresar la

<sup>1</sup>Generalmente se dice que  $G$  es un “simply reducible group” (**SRG**). La mayoría de los casos que consideramos son de este tipo.

combinación lineal:

$$(- \cdot -)_{r,s} = \sum_{t=1}^n \sum_{q=1}^{\ell(i(r),i(s),i(t))} \gamma'_{r,s,q} (\tilde{m}^{r,s,t})_q, \quad (4.1)$$

donde  $\gamma'_{r,s,q} \in \mathbb{C}$ . Notar que si  $G$  es un SRG, entonces la suma sobre  $q$  desaparece. En un formato simplificado, la ecuación (4.1) se denota por:

$$\mathfrak{A}_r \cdot \mathfrak{A}_s = \sum_{t=1}^n \sum_{q=1}^{\ell(i(r),i(s),i(t))} \gamma'_{r,s,q} \mathfrak{A}_t \quad (4.2)$$

**Definición 4.2.1.** Dada una G-álgebra  $\mathfrak{A}$ , se define **la G-tabla de  $\mathfrak{A}$**  con respecto a la elección de las bases  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  y los morfismos  $\tau_r : V_{i(r)} \rightarrow \mathfrak{A}$  a la colección de coeficientes  $\gamma'_{r,s,q}$ .

#### 4.2.1. Re-escalamiento

Cuando  $G$  es un SRG, la elección  $\mathcal{B}_{i,j}^k = \{m^{i,j,k}\}$  está completamente determinada a excepción de un escalar no nulo. Del mismo modo, una vez elegida la descomposición  $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \dots \oplus \mathfrak{A}_n$ , los G-morfismos  $\tau_i$  también están completamente determinados salvo un escalar no nulo<sup>2</sup>.

En caso que re-escalamos, ya sean las bases  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  o los G-morfismos  $\tau_i$ , esto produce un re-escalamiento de  $\tilde{m}^{r,s,t}$  quedando las nuevas  $\hat{m}^{r,s,t} = x_{r,s}^t \tilde{m}^{r,s,t}$  con  $x_{r,s}^t \in \mathbb{C}^\times$ . Los coeficientes  $\hat{\gamma}'_{r,s}$  en la nueva G-tabla son:

$$\hat{\gamma}'_{r,s} = \frac{1}{x_{r,s}^t} \gamma'_{r,s}.$$

Observemos que si lo único que re-escalamos son los G-morfismos  $\tau_\bullet$ , de modo que  $\hat{\tau}_t = y_t \tau_t$ , entonces:

$$\hat{m}^{r,s,t} = \frac{y_t}{y_r y_s} \tilde{m}^{r,s,t}.$$

Por lo tanto, obtenemos que  $x_{r,s}^t = \frac{y_t}{y_r y_s}$  y  $\hat{\gamma}'_{r,s} = \frac{y_r y_s}{y_t} \gamma'_{r,s}$  para todo  $r, s, t$ .

**Observación 4.2.1.** Por la definición 4.2.1, para construir una G-tabla de  $\mathfrak{A}$  es necesario fijar como paso inicial:

1. Las bases  $\mathcal{B}_{i,j}^k$ , que forman parte de la estructura de la categoría de G-módulos.
2. Los G-morfismos  $\tau_r : V_{i(r)} \rightarrow \mathfrak{A}$ , que describen la estructura de  $\mathfrak{A}$  como G-módulo.

Una G-tabla de  $\mathfrak{A}$  contiene mucha más información que una tabla de  $\mathfrak{A}$  y si conocemos la G-tabla de  $\mathfrak{A}$ , podemos obtener una tabla conveniente de  $\mathfrak{A}$  eligiendo bases de los G-módulos irreducibles  $\{V_i : i \in I\}$ . Sin embargo, el trabajo para obtener la G-tabla es sofisticado. A continuación vemos algunos ejemplos que ilustran estos conceptos.

#### 4.2.2. Ejemplos de $\mathbb{S}_3$ -tablas

Sea  $\mathbb{S}_3 = \{1, (12), (23), (13), (123), (132)\}$ , luego  $\widehat{\mathbb{S}}_3 = \{tr, sg, \sigma\}$  donde  $tr$  y  $sg$  denotan las representaciones trivial y signo mientras que  $\sigma$  denota a la representación estándar dada por:

$$\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Las matrices de  $\sigma$  son obtenidas recordando que la representación estándar es una subrepresentación de la representación regular sobre  $\mathbb{C}^3 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$  con base  $\{v_1 = e_1 - e_3, v_2 = e_2 - e_3\}$ .

Para el producto tensorial de dos representaciones, tomaremos la base obtenida por el producto tensorial de las bases ordenadas del modo 11, 12,  $\dots$ . Primeramente, presentamos todas las bases  $\mathcal{B}_{i,j}^k$  que son no vacías:

<sup>2</sup>Esta elección es independientemente que la descomposición sea o no libre de multiplicidad, el punto es que ya elegimos la descomposición.

- $\mathcal{B}_{tr,k}^k, \mathcal{B}_{k,tr}^k$ , con  $k = tr, sg, \sigma$  y  $\mathcal{B}_{sg,sg}^{tr}$  consta sólo de la matriz identidad del tamaño correspondiente.
- $\mathcal{B}_{sg,\sigma}^\sigma = \mathcal{B}_{\sigma,sg}^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ ,
- $\mathcal{B}_{\sigma,\sigma}^{tr} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ ,
- $\mathcal{B}_{\sigma,\sigma}^{sg} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ ,
- $\mathcal{B}_{\sigma,\sigma}^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ .

Cada una de las bases propuestas se encuentra planteando un morfismo de  $\mathbb{S}_3$ -módulos  $M \in \text{Hom}_{\mathbb{S}_3}(V \otimes \tilde{V}, W)$ , donde  $V, \tilde{V}, W \in \widehat{\mathbb{S}}_3$  y  $W$  es una representación que ocurre en el producto tensorial  $V \otimes \tilde{V}$ . Por ejemplo, para  $m^{sg,\sigma,\sigma} \in \text{Hom}_{\mathbb{S}_3}(sg \otimes \sigma, \sigma)$  consideremos  $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$  tal que  $M(x \cdot v) - x \cdot M(v) = 0, \forall x \in \mathbb{S}_3$ . Evaluando la acción de (1,2) y (2,3) obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_2 + b_1 = 0, \\ a_1 + b_2 = 0, 2a_1 - a_2 = 0, \\ 2b_2 + a_2 = 0, \end{cases}$$

con lo cual  $a_2 = 2a_1, b_2 = -a_1$  y  $b_1 = -2a_1$ . Si  $a_1 = 1$  sigue que  $\mathcal{B}_{sg,\sigma}^\sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$  es una base de  $\text{Hom}_{\mathbb{S}_3}(sg \otimes \sigma, \sigma)$ . Del mismo modo procedemos en los demás casos.

Observar que  $m^{\sigma,\sigma,\sigma} \in \mathcal{B}_{\sigma,\sigma}^\sigma$  define un producto conmutativo en el sentido que  $m^{\sigma,\sigma,\sigma}(e_i \otimes e_j) = m^{\sigma,\sigma,\sigma}(e_j \otimes e_i)$  donde  $\{e_1 \otimes e_1, e_1 \otimes e_2, e_2 \otimes e_1, e_2 \otimes e_2\}$  es la base de  $\sigma \otimes \sigma$ . Sin embargo,  $m^{\sigma,\sigma,\sigma}$  no define un producto asociativo puesto que:

$$\begin{aligned} m^{\sigma,\sigma,\sigma}(e_1, m^{\sigma,\sigma,\sigma}(e_1, e_2)) &= 3e_2 \\ m^{\sigma,\sigma,\sigma}(m^{\sigma,\sigma,\sigma}(e_1, e_1), e_2) &= 3e_1 - 3e_2 \end{aligned}$$

Consideremos ahora el álgebra de grupo  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$ . Sabemos que  $\mathbb{S}_3$  actúa sobre  $\mathfrak{A}$  por automorfismos a través de la conjugación y por el Teorema de Frobenius-Schur sobre la descomposición de la representación regular de un grupo, obtenemos que:

$$\mathfrak{A} \simeq 3tr \oplus sg \oplus \sigma$$

Ahora, para cada una de las representaciones irreducibles que aparecen en la descomposición anterior, elegimos las siguientes bases:

- Para  $3tr$ :  $\{1_1, 1_{(ab)}, 1_{(abc)}\}$  elegimos:

$$\begin{aligned} 1_1 &= 1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0) \\ 1_{(ab)} &= (12) + (23) + (13) = (0, 1, 1, 1, 0, 0) \\ 1_{(abc)} &= (123) + (132) = (0, 0, 0, 0, 1, 1). \end{aligned}$$

La base elegida para las 3 representaciones triviales corresponde a la suma de los elementos de cada clase de conjugación (abajo discutimos otra posibilidad).

- Para  $sg$ :  $\{s_0\}$  elegimos  $s_0 = (123) - (132) = (0, 0, 0, 0, 1, -1)$ .

- Para  $\sigma: \{\sigma_1, \sigma_2\}$  elegimos

$$\sigma_1 = (12) - (23) = (0, 1, -1, 0, 0, 0)$$

$$\sigma_2 = (12) - (13) = (0, 1, 0, -1, 0, 0).$$

En estas bases, los correspondientes morfismos  $\tau_\bullet$  son la identidad. Luego, la tabla de multiplicar de  $\mathfrak{A}$  con respecto a la base  $\{1_1, 1_{(ab)}, 1_{(abc)}, s_0, \sigma_1, \sigma_2\}$  es:

	$1_1$	$1_{(ab)}$	$1_{(abc)}$	$s_0$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$1_1$	$1_1$	$1_{(ab)}$	$1_{(abc)}$	$s_0$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$1_{(ab)}$	$1_{(ab)}$	$3 \cdot 1_1 \oplus 3 \cdot 1_{(abc)}$	$2 \cdot 1_{(ab)}$	0	0	0
$1_{(abc)}$	$1_{(abc)}$	$2 \cdot 1_{(ab)}$	$2 \cdot 1_1 \oplus 1_{(abc)}$	$-s_0$	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$
$s_0$	$s_0$	0	$-s_0$	$-2 \cdot 1_1 \oplus 1_{(abc)}$	$\sigma_1 \oplus -2\sigma_2$	$2 \cdot \sigma_1 \oplus -\sigma_2$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	0	$-\sigma_1$	$-\sigma_1 \oplus 2\sigma_2$	$2 \cdot 1_1 \oplus -1_{(abc)}$	$1_1 \oplus -\frac{1}{2} \cdot 1_{(abc)} \oplus \frac{3}{2} s_0$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	0	$-\sigma_2$	$-2\sigma_1 \oplus \sigma_2$	$1_1 \oplus -\frac{1}{2} \cdot 1_{(abc)} \oplus -\frac{3}{2} s_0$	$2 \cdot 1_1 \oplus -1_{(abc)}$

Esto implica que la  $\mathbb{S}_3$ -tabla de  $\mathfrak{A}$  es:

	$1_1$	$1_{(ab)}$	$1_{(abc)}$	$sg$	$\sigma$
$1_1$	$1_1$	$1_{(ab)}$	$1_{(abc)}$	$sg$	$\sigma$
$1_{(ab)}$	$1_{(ab)}$	$3 \cdot 1_1 \oplus 3 \cdot 1_{(abc)}$	$2 \cdot 1_{(ab)}$	0	0
$1_{(abc)}$	$1_{(abc)}$	$2 \cdot 1_{(ab)}$	$2 \cdot 1_1 \oplus 1_{(abc)}$	$-sg$	$-\sigma$
$sg$	$sg$	0	$-sg$	$-2 \cdot 1_1 \oplus 1_{(abc)}$	$\sigma$
$\sigma$	$\sigma$	0	$-\sigma$	$-\sigma$	$1_1 \oplus -\frac{1}{2} \cdot 1_{(abc)} \oplus \frac{3}{2} s_0$

En el ejemplo anterior, la base elegida sobre las tres representaciones triviales corresponde a la suma de los elementos de cada clase de conjugación, obteniendo así la identidad del álgebra  $\mathfrak{A}$ .

Otra opción es elegir las identidades de cada una de las 3 álgebras de matrices provenientes de la descomposición dada por los Teoremas de Maschke y Artin-Wedderburn. Esta base consiste en  $\{1_{tr}, 1_{sg}, 1_\sigma\}$ , con cada representación trivial obtenida con la Transformada de Fourier discreta inversa sobre  $\sum_{s \in \mathbb{S}_3} c_s^\pi e_s \in \mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$  con  $\pi = tr, sg, \sigma$ . Es decir,

$$c_s^\pi = \frac{1}{6} \dim \pi \cdot \text{Tr}(\pi(s^{-1})),$$

de modo que:

$$1_{tr} = \frac{1}{6}(1_1 + 1_{(ab)} + 1_{(abc)}) = \frac{1}{6}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$$

$$1_{sg} = \frac{1}{6}(1_1 - 1_{(ab)} + 1_{(abc)}) = \frac{1}{6}(1, -1, -1, -1, 1, 1)$$

$$1_\sigma = \frac{1}{3}(2 \cdot 1_1 - 1_{(abc)}) = \frac{1}{3}(2, 0, 0, 0, -1, -1).$$

ya la  $\mathbb{S}_3$ -tabla de  $\mathfrak{A}$  está dada en el Cuadro 4.2.1. En esta tabla vemos la descomposición como suma de álgebras de matrices donde se destaca el álgebra de matrices  $4 \times 4$  que corresponde a los endomorfismos de  $\sigma$ .

Por otro lado, se sabe que  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$  es un álgebra de Hopf y en particular una coálgebra. El coproducto  $\Delta: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}$  está definido por  $\Delta(x) = x \otimes x$ ,  $\forall x \in \mathbb{S}_3$  y la counidad  $\varepsilon: \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{C}$  está definida por  $\varepsilon(x) = 1$ ,  $\forall x \in \mathfrak{A}$ , de modo que  $\Delta$  es un morfismo de  $\mathbb{S}_3$ -módulos.

La estructura de coálgebra de  $\mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$  corresponde a una estructura de álgebra en su dual, que tiene su propia  $\mathbb{S}_3$ -tabla. Nosotros llamamos a esta tabla *la  $\mathbb{S}_3$ -cotabla* de la coálgebra, que es presentada en el Cuadro 4.2.2.

	$1_{tr}$	$1_{sg}$	$1_\sigma$	$sg$	$\sigma$
$1_{tr}$	$1_{tr}$	0	0	0	0
$1_{sg}$	0	$1_{sg}$	0	0	0
$1_\sigma$	0	0	$1_\sigma$	$sg$	$\sigma$
$sg$	0	0	$sg$	$-3 \cdot 1_\sigma$	$\sigma$
$\sigma$	0	0	$\sigma$	$-\sigma$	$\frac{3}{2} \cdot (1_\sigma \oplus sg)$

Cuadro 4.2.1: La  $\mathbb{S}_3$ -tabla de  $\mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$

	$1_{tr}$	$1_{sg}$	$1_\sigma$	$sg$	$\sigma$
$1_{tr}$	$1_{tr}$	$1_{sg}$	$1_\sigma$	$sg$	$\sigma$
$1_{sg}$	$1_{sg}$	$1_{tr}$	$1_\sigma$	$sg$	$-\sigma$
$1_\sigma$	$1_\sigma$	$1_\sigma$	$1_{tr} \oplus 1_{sg} \oplus 1_\sigma$	$-sg$	0
$sg$	$sg$	$sg$	$-sg$	$1_{tr} \oplus 1_{sg} \oplus -2 \cdot 1_\sigma$	0
$\sigma$	$\sigma$	$-\sigma$	0	0	$1_{tr} \oplus -1_{sg} \oplus 6 \cdot \sigma$

Cuadro 4.2.2: La  $\mathbb{S}_3$ -cotabla de  $\mathbb{C}[\mathbb{S}_3]$

Si miramos el álgebra de Lie  $\mathfrak{A}^-$ , entonces las representaciones triviales pasan a ser factores abelianos mientras que  $sg$  y  $\sigma$  forman el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$ . Luego, la  $\mathbb{S}_3$ -tabla de  $\mathfrak{sl}(2)$  es:

	$sg$	$\sigma$
$sg$	0	$2\sigma$
$\sigma$	$-2\sigma$	$3 \cdot sg$

Re-escalando los morfismos  $\tau_\bullet$ , obtenemos que  $\mathfrak{sl}(2)$  presenta la siguiente  $\mathbb{S}_3$ -tabla:

	$sg$	$\sigma$
$sg$	0	$\sigma$
$\sigma$	$-\sigma$	$sg$

Notar que las G-tablas de álgebras de Lie no necesariamente son antisimétricas. De hecho la  $\mathbb{S}_3$ -tabla de  $\mathfrak{sl}(2)$  anterior no tiene la entrada (2,2) igual a cero. Esto ocurre puesto que  $m^{\sigma, \sigma, sg}$  es anticonmutativa. Además, las siguientes dos  $\mathbb{S}_3$ -tablas también son álgebras de Lie:

	$sg$	$\sigma$
$sg$	0	0
$\sigma$	0	$sg$

	$sg$	$\sigma$
$sg$	0	$\sigma$
$\sigma$	$-\sigma$	0

La primera es el álgebra de Lie de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  y la segunda es el producto semidirecto  $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^2$  cuyo corchete de Lie está definido por la fórmula (2.1) mediante  $m^{sg, \sigma, \sigma}$ . Estas dos, junto con el álgebra de Lie abeliana  $\mathbb{C}^3$  y el álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}(2)$  son las únicas álgebras de Lie en que  $\mathbb{S}_3$  actúa por automorfismos descomponiendo como  $sg \oplus \sigma$ .

### 4.3. $\mathfrak{sl}(2)$ -tablas

La mayoría de las estructuras multiplicativas que estudiaremos en esta tesis son estructuras de Poisson sobre  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos. Es por ello que es muy importante preparar todo el terreno para poder describir estas estructuras en términos de  $\mathfrak{sl}(2)$ -tablas.

#### 4.3.1. Desarrollos de Clebsch-Gordan

Supongamos que  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$  son dos  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles de peso máximo  $m, n$  con respectivas bases simétricas  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$  y  $\{v_{m-2j}^m\}_{0 \leq j \leq m}$  (Sec. 2.5). Por el Teorema de Clebsch-Gordan (Teor. 2.9), todo  $V_{(s)}$  que ocurre en la descomposición de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  es generado por el vector de peso máximo:

$$v_s^{n,m,s} = \sum_{r=0}^k C_{r,k-r,0}^{n,m,s} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m, \quad (4.3)$$

cuyos coeficientes son  $C_{r,k-r,0}^{n,m,s} := (-1)^r \binom{k}{r} / \binom{n+m-k}{n-r}$  y  $0 \leq k \leq \min(n, m)$  es tal que  $s = n + m - 2k$ . Si  $\{v_{s-2p}^{n,m,s}\}_{0 \leq p \leq s}$  es la base de peso de  $V_{(s)}$  construida a partir de  $v_s^{n,m,s}$  dentro de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ , existen coeficientes  $C_{i,j,p}^{n,m,s}$  y  $M_{i,j,p}^{n,m,s}$  tales que  $v_{s-2p}^{n,m,s} = \sum_{i,j} C_{i,j,p}^{n,m,s} v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m$  y  $v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m = M_{i,j,p}^{n,m,s} v_{s-2p}^{n,m,s}$ .

Es decir, existen dos aplicaciones  $\iota^{n,m,s} \in \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(s)}, V_{(n)} \otimes V_{(m)})$  y  $m^{n,m,s} \in \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(n)} \otimes V_{(m)}, V_{(s)})$  definidas por:

$$\iota^{n,m,s} : v_{s-2p}^s \mapsto \sum_{i,j} C_{i,j,p}^{n,m,s} v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m \quad (4.4)$$

$$m^{n,m,s} : v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m \mapsto M_{i,j,p}^{n,m,s} v_{s-2p}^s \quad (4.5)$$

con la suma sobre los  $i, j, p$  tales que  $s - 2p = n + m - 2(i + j)$ . En la ecuación (4.5) pedimos la misma condición sobre  $i, j, p$ , caso contrario es cero. Usando el isomorfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos  $V_{(s)} \cong V_{(s)}^*$  dado en la Prop. 2.5.1, tenemos que la composición:

$$V_{(s)}^* \xrightarrow{\Psi_s'} V_{(s)} \xrightarrow{\iota^{n,m,s}} V_{(n)} \otimes V_{(m)} \xrightarrow{\Psi_n \otimes \Psi_m} V_{(n)}^* \otimes V_{(m)}^* \longrightarrow (V_{(n)} \otimes V_{(m)})^*$$

define un morfismo  $(\iota^*)^{n,m,s} \in \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(s)}^*, V_{(n)}^* \otimes V_{(m)}^*)$ . Explícitamente,

$$(v_{s-2p}^s)^* \mapsto (-1)^p v_{s-2(s-p)}^s = \sum_{i,j} (-1)^p C_{i,j,s-p}^{n,m,s} v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m \mapsto \sum_{i,j} (-1)^{i+j+p} C_{i,j,s-p}^{n,m,s} (v_{2i-n}^n)^* \otimes (v_{2j-m}^m)^*,$$

donde la suma es sobre todos los  $i, j$  tales que  $n + m - 2(i + j) = s - 2(s - p) = 2p - s$ . Por la Prop. 2.4.1, existe un isomorfismo explícito  $\text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(s)}^*, V_{(n)}^* \otimes V_{(m)}^*) \cong \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(n)} \otimes V_{(m)}, V_{(s)})$  a través de:

$$\begin{aligned} (\iota^*)^{n,m,s} &\mapsto \sum_p v_{s-2p}^s \otimes (\iota^*)^{n,m,s} ((v_{s-2p}^s)^*) \\ &\mapsto \sum_{(i,j,p)} (-1)^{i+j+p} C_{i,j,s-p}^{n,m,s} v_{s-2p}^s \otimes (v_{2i-n}^n)^* \otimes (v_{2j-m}^m)^* \\ &\mapsto \sum_{(i,j,p)} (-1)^{n-i+m-j+p} C_{n-i,m-j,s-p}^{n,m,s} (v_{n-2i}^n)^* \otimes (v_{m-2j}^m)^* \otimes v_{s-2p}^s \end{aligned}$$

con la suma sobre  $(i, j, p)$  tales que  $s - 2p = n + m - 2(i + j)$ . Por lo tanto,  $M_{i,j,p}^{n,m,s} = (-1)^{n-i+m-j+p} C_{n-i,m-j,s-p}^{n,m,s}$

y  $m^{n,m,s}$  es el  $\mathfrak{sl}(2)$ -morfismo dado por:

$$m^{n,m,s}(v \otimes w) = \sum_{(i,j,p)} (-1)^{n-i+m-j+p} C_{n-i,m-j,s-p}^{n,m,s} (v_{n-2i}^n)^*(v) (v_{m-2j}^m)^*(w) v_{s-2p}^s \quad (4.6)$$

Como  $\dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(2)}(V_{(s)}, V_{(n)} \otimes V_{(m)}) = 1$ , los morfismos  $\iota^{n,m,s}$  y  $m^{n,m,s}$  son únicos salvo escalares.

**Definición 4.3.1.** Se definen los coeficientes de Clebsch-Gordan (resp. los coeficientes multiplicadores) relativos a las bases simétricas de  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$  a los coeficientes  $C_{i,j,p}^{n,m,s}$  que describen los morfismos  $\iota^{n,m,s}$  (resp. a los coeficientes  $M_{i,j,p}^{n,m,s}$  que describen los morfismos  $m^{n,m,s}$ ).

Notemos  $C_{i,j,0}^{n,m,s}$  están dados por la fórmula (4.3) y los restantes coeficientes se determinan por la acción sucesiva de  $f \in \mathfrak{sl}(2)$ . A continuación re-escalaremos los coeficientes  $C_{i,j,p}^{n,m,s}$  para que sean enteros. Estos nuevos coeficientes, denotados por  $B_{i,j,p}^{n,m,s}$ , serán llamados coeficientes de Clebsch-Gordan enteros para distinguirlos de los coeficientes de Clebsch-Gordan “usuales” (ver Subsec. 4.3.3).

### 4.3.2. Coeficientes enteros

Resulta que  $C_{i,j,p}^{n,m,s}$  por lo general no son enteros, por ejemplo  $C_{r,k-r,0}^{n,m,s} := (-1)^r \binom{k}{r} / \binom{n+m-k}{n-r} \in \mathbb{Q}$ . Sin embargo, podemos elegir las inmersiones  $\iota^{n,m,s}$  con coeficientes estrictamente en  $\mathbb{Z}$ . De [DK17], tenemos el siguiente Lema:

**Lema 4.3.1.** Si  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$ ,  $\{v_{m-2j}^m\}_{0 \leq j \leq m}$  son las bases simétricas de  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$ , con  $v_n^n$  y  $v_m^m$  son los vectores de peso máximo. Entonces existen coeficientes  $B_{r,k-r,0}^{n,m,s} = (-1)^r \binom{n-r}{k-r} \binom{m+r-k}{r} \in \mathbb{Z}$  tales que:

$$\tilde{v}_s^{n,m,s} = \sum_{r=0}^k B_{r,k-r,0}^{n,m,s} v_{n-2r}^n \otimes v_{m-2(k-r)}^m \quad (4.7)$$

es un vector de peso máximo en  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  que genera al submódulo  $V_{(s)}$ .

*Demostración.* Como  $v_s^{n,m,s}$  dado por (4.3) es un vector de peso máximo que genera a  $V_{(s)}$  en  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ , es suficiente ver que  $B_{r,k-r,0}^{n,m,s} = \binom{n+m-k}{m-k} \binom{n}{k} C_{r,k-r,0}^{n,m,s} \in \mathbb{Z}$  para todo  $0 \leq k \leq \min(n, m)$  y  $0 \leq r \leq k$ . De este modo,  $\tilde{v}_s^{n,m,s} = \binom{n+m-k}{m-k} \binom{n}{k} v_s^{n,m,s}$  también es un vector de peso máximo.  $\diamond$

Por lo tanto, si  $\tilde{v}_{s-2p}^{n,m,s}$  es el vector de peso  $s-2p$  sobre  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$ , entonces:

$$\tilde{v}_{s-2p}^{n,m,s} = \sum_{i,j} B_{i,j,p}^{n,m,s} v_{n-2i}^n \otimes v_{m-2j}^m, \quad (4.8)$$

donde  $B_{i,j,p}^{n,m,s} = \sum_{l=0}^k (-1)^l \binom{i+j-k}{i-l} \binom{n-l}{k-l} \binom{m-k+l}{l} \in \mathbb{Z}$ . Llamamos a  $B_{i,j,p}^{n,m,s}$  los coeficientes de Clebsch-Gordan enteros relativos a las bases simétricas de  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$ . En este caso, la base  $\{\tilde{v}_{s-2p}^{n,m,s}\}$  también es una base simétrica y los  $B_{i,j,p}^{n,m,s}$  satisfacen la siguiente relación de simetría:

$$B_{j,i,p}^{m,n,s} = (-1)^k B_{i,j,p}^{n,m,s}. \quad (4.9)$$

Usando esta elección y definiendo  $D_{n,m,s} = \binom{n+m-k+1}{k} \binom{s}{n-k}$ , obtenemos que los coeficientes multiplicadores  $M_{i,j,p}^{n,m,s}$  de (4.5) están dados por la fórmula:

$$M_{i,j,p}^{n,m,s} = \frac{(-1)^k}{D_{n,m,s}} B_{n-i,m-j,s-p}^{n,m,s}. \quad (4.10)$$

Como  $\binom{n+m-k+1}{k} \binom{s}{n-k} = \binom{n+m-k+1}{k} \binom{s}{m-k}$  se sigue que  $D_{n,m,s} = D_{m,n,s}$ . Luego, usando la simetría (4.9) vemos que los coeficientes multiplicadores satisfacen la siguiente relación de simetría:

$$M_{j,i,p}^{m,n,s} = (-1)^k M_{i,j,p}^{n,m,s}. \tag{4.11}$$

Además, si  $s_1 = n + m - 2k_1$ ,  $s_2 = n + m - 2k_2$  son dos pesos que ocurren en la descomposición de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  con  $0 \leq k_i \leq \min(n, m)$ , entonces se satisface la siguiente relación de ortogonalidad:

$$\sum_{i+j=p} B_{i,j,p_1}^{n,m,s_1} M_{i,j,p_2}^{n,m,s_2} = \delta_{s_1,s_2} \tag{4.12}$$

donde  $0 \leq \rho \leq n + m$  es tal que  $n + m - 2\rho$  es un peso que ocurre en  $V_{(s_i)}$  y  $p_i = \rho - k_i$  respectivamente.

**Ejemplo 4.3.1.** Veamos cómo son los coeficientes de Clebsch-Gordan enteros  $B_{i,j,p}^{n,m,s}$  para  $1 \leq m \leq n \leq 2$ :

1.  $V_{(1)} \otimes V_{(1)} \cong V_{(2)} \oplus V_{(0)}$

$p=0$	$s$	2	0
$i$	$j$		
0	0	1	
1	0		1
0	1		-1

$p=1$	$s$	2
$i$	$j$	
0	1	1
1	0	1

$p=2$	$s$	2
$i$	$j$	
1	1	2

2.  $V_{(2)} \otimes V_{(1)} \cong V_{(3)} \oplus V_{(1)}$

$p=0$	$s$	3	1
$i$	$j$		
0	0	1	
1	0		1
0	1		-2

$p=1$	$s$	3	1
$i$	$j$		
1	0	1	
0	1	1	
2	0		1
1	1		-1

$p=2$	$s$	3
$i$	$j$	
1	1	2
2	0	1

$p=3$	$s$	3
$i$	$j$	
2	1	3

3.  $V_{(2)} \otimes V_{(2)} \cong V_{(4)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)}$

$p=0$	$s$	4	2	0
$i$	$j$			
0	0	1		
1	0		1	
0	1		-1	
2	0			1
1	1			-1
0	2			1

$p=1$	$s$	4	2	0
$i$	$j$			
1	0	1		
0	1	1		
2	0		1	
0	2		-1	

$p=2$	$s$	4	2
$i$	$j$		
2	0	1	
1	1	2	
0	2	1	
2	1		1
1	2		-1

$p=3$	$s$	4
$i$	$j$	
2	1	3
1	2	3
$p=4$		
$i$	$j$	
2	2	6

### 4.3.3. Coeficientes de Clebsch-Gordan usuales

Los coeficientes de Clebsch-Gordan usuales están definidos al tomar bases de Clebsch-Gordan sobre  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$  (en lugar de bases simétricas). Revisamos de manera breve su definición: Por un lado, decimos que tres enteros o medio enteros  $j_1, j_2, j_3$  satisfacen la condición triangular (c.t.) si  $j_1 + j_2 + j_3 \in \mathbb{Z}$  y  $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq j_1 + j_2$ . Sea

$$\Delta(j_1, j_2, j_3) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(j_1+j_2-j_3)!(j_1-j_2+j_3)!(-j_1+j_2+j_3)!}{(j_1+j_2+j_3+1)!}} & \text{si } j_1, j_2, j_3 \text{ satisfacen la c.t.} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si  $m_1, m_2, m_3$  son tres enteros o medio enteros, el correspondiente *coeficiente de Clebsch-Gordan*  $CG(j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3)$  es cero excepto cuando  $m_1 + m_2 = m_3$  y  $|m_i| \leq j_i$ . Si esto ocurre y  $m_3 \geq 0$ ,  $j_1 \geq j_2$ , entonces:

$$\begin{aligned} CG(j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3) &= \Delta(j_1, j_2, j_3) \sqrt{(2j_3 + 1)} \\ &\cdot \sqrt{(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!(j_3 + m_3)!(j_3 - m_3)!} \\ &\cdot \sum_r \frac{(-1)^r}{r!(j_1 + j_2 - j_3 - r)!(j_1 - m_1 - r)!(j_2 + m_2 - r)!(j_3 - j_2 + m_1 + r)!(j_3 - j_1 - m_2 + r)!}, \end{aligned}$$

donde la suma es sobre todos los  $r \in \mathbb{Z}$  tales que los factoriales son no negativos. En el caso que  $m_3 < 0$  ó  $j_1 < j_2$  podemos recurrir a:

$$\begin{aligned} CG(j_1, m_1; j_2, m_2 | j_3, m_3) &= (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} CG(j_1, -m_1; j_2, -m_2 | j_3, -m_3) \\ &= (-1)^{j_1 + j_2 - j_3} CG(j_2, m_2; j_1, m_1 | j_3, m_3). \end{aligned}$$

Sean  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$  y  $\{v_{m-2j}^m\}_{0 \leq j \leq m}$  las bases de Clebsch-Gordan de  $V_{(n)}$  y  $V_{(m)}$ , se definen los *coeficiente de Clebsch-Gordan* estándares como  $C_{i,j,p}^{n,m,s} = CG(\frac{n}{2}, \frac{n}{2} - i; \frac{m}{2}, \frac{m}{2} - j | \frac{s}{2}, \frac{s}{2} - p)$ . En este contexto, estos coeficientes satisfacen la simetría  $C_{n-i, m-j, s-p}^{n,m,s} = (-1)^{\frac{s-n-m}{2}} C_{i,j,p}^{n,m,s}$  y el morfismo  $m^{n,m,s}$  dado en (4.6) queda escrito como:

$$m^{n,m,s}(v \otimes w) = \sum_{(i,j,p)} (-1)^s C_{i,j,p}^{n,m,s} (v_{n-2i}^n)^*(v) (v_{m-2j}^m)^*(w) v_{s-2p}^s. \quad (4.13)$$

con la suma sobre  $(i, j, p)$  tales que  $s - 2p = n + m - 2(i + j)$ . Por lo tanto, los coeficientes multiplicadores son iguales a  $M_{i,j,p}^{n,m,s} = (-1)^s C_{i,j,p}^{n,m,s}$  para todo  $n, m, s, i, j, p$  donde los pesos tengan sentido.

#### 4.3.4. Obtención de la $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla

En esta subsección nos restringiremos a  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebras **libres de multiplicidad**. Por un lado simplifica la exposición y por otro lado, es suficiente para los casos en que estamos interesados en esta tesis.

En las subsecciones anteriores desarrollamos el punto 1 de la Sec. 4.2, es decir fijar los mapas  $m^{n,m,s}$  correspondientes a la categoría de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos. Ahora debemos fijar una descomposición  $\mathfrak{A} = \bigoplus_{n=0}^N \mathfrak{A}_n$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulos irreducibles y sus correspondientes isomorfismos  $\tau_n^0: V_{(\lambda_n)} \rightarrow \mathfrak{A}_n$ , que corresponde al punto 2 de la Sec. 4.2. Para cada  $\lambda_n$  que aparece en  $\mathfrak{A}$ , la elección de  $\tau_n^0: V_{(\lambda_n)} \rightarrow \mathfrak{A}_n$  se hace mediante la elección de un vector dominante en  $\mathfrak{A}$  de peso  $\lambda_n$  y esta elección determina completamente  $\tau_n^0: V_{(\lambda_n)} \rightarrow \mathfrak{A}_n$ .

Si  $\lambda_s = \lambda_n + \lambda_m - 2\zeta$  con  $0 \leq \zeta \leq \min(\lambda_n, \lambda_m)$  entonces  $\mathcal{B}_{\lambda_n, \lambda_m}^{\lambda_s} = \{m^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s}\}$  está dada por la ecuación (4.5). La  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\mathfrak{A}$  es el conjunto de coeficientes  $\gamma_{n,m}^s$  tales que:

$$(- \cdot -)_{n,m} = \sum_s \gamma_{n,m}^s \tilde{m}^{n,m,s} \quad (4.14)$$

donde  $\tilde{m}^{n,m,s} := \tau_s^0 \circ m^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s} \circ (\tau_n^0 \otimes \tau_m^0)^{-1}$ . Tal como el caso general, la ecuación (4.14) puede escribirse en un formato simplificado por:

$$\mathfrak{A}_n \cdot \mathfrak{A}_m = \sum_s \gamma_{n,m}^s \mathfrak{A}_s \quad (4.15)$$

Para calcular los coeficientes  $\gamma_{n,m}^s$  no es necesario contar con toda la tabla de multiplicar de  $\mathfrak{A}$  (ver 4.2.2). Más bien alcanza con conocer algunos productos estratégicos que nos conducirán a los  $\gamma_{n,m}^s$ . Esto se logra definiendo los productos de Clebsch-Gordan:

**Definición 4.3.2.** Sean  $\mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_m$  dos componentes irreducibles de  $\mathfrak{A}$  y  $V_{(\lambda_n)}, V_{(\lambda_m)}$  los  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles asociados, donde  $\sum_{r=0}^t B_{r,t-r,0}^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s} v_{\lambda_n-2r}^{\lambda_n} \otimes v_{\lambda_m-2(t-r)}^{\lambda_m}$  es el vector de peso máximo  $\lambda_s$  en  $V_{(\lambda_n)} \otimes V_{(\lambda_m)}$  y  $B_{r,t-r,0}^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s}$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan enteros, con  $\lambda_s = \lambda_n + \lambda_m - 2\zeta$  para algún  $0 \leq \zeta \leq \min(\lambda_n, \lambda_m)$ . Definimos el producto de Clebsch-Gordan asociado a  $(n, m, s)$  como el elemento de  $\mathfrak{A}$  en  $\mathfrak{A}_s$  dado por:

$$\sum_{r=0}^t B_{r,t-r,0}^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s} \tau_n^0 \left( v_{\lambda_n-2r}^{\lambda_n} \right) \cdot \tau_m^0 \left( v_{\lambda_m-2(t-r)}^{\lambda_m} \right) \quad (4.16)$$

Notar que (4.16) es un múltiplo de  $\tau_s^0 \left( v_{\lambda_s}^{\lambda_s} \right)$ , por lo que el coeficiente  $\gamma_{n,m}^s$  es determinado por la relación  $\sum_{r=0}^t B_{r,t-r,0}^{\lambda_n, \lambda_m, \lambda_s} \tau_n^0 \left( v_{\lambda_n-2r}^{\lambda_n} \right) \cdot \tau_m^0 \left( v_{\lambda_m-2(t-r)}^{\lambda_m} \right) = \gamma_{n,m}^s \tau_s^0 \left( v_{\lambda_s}^{\lambda_s} \right)$ .

### 4.3.5. Ejemplos

Consideremos el siguiente ejemplo ilustrativo. Sea  $\mathfrak{A} = V_{(2)} \oplus V_{(1)}$  y supongamos que el producto sobre  $\mathfrak{A}$  está definido a través de las relaciones  $V_{(2)} \cdot V_{(2)} = V_{(2)}$ ,  $V_{(2)} \cdot V_{(1)} = -3V_{(1)}$  y  $V_{(1)} \cdot V_{(2)} = -3V_{(1)}$ . Aquí  $\mathfrak{A}$  está formada por dos componentes irreducibles, donde una es isomorfa a  $V_{(2)}$  y otra isomorfa a  $V_{(1)}$ . Luego, si  $\{v_2^2, v_0^2, v_{-2}^2\}$  y  $\{v_1^1, v_{-1}^1\}$  son bases simétricas de  $V_{(2)}$  y  $V_{(1)}$ , tenemos los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

- i.  $v_0^2 \cdot v_2^2 - v_2^2 \cdot v_0^2 = v_2^2$ .
- ii.  $v_0^2 \cdot v_1^1 - 2v_2^2 \cdot v_{-1}^1 = -3v_1^1$ .
- iii.  $2v_{-1}^1 \cdot v_2^2 - v_1^1 \cdot v_0^2 = -3v_1^1$ .

Los productos no listados son triviales y usando la acción de  $\mathfrak{sl}(2)$  obtenemos la siguiente tabla:

·	$v_2^2$	$v_0^2$	$v_{-2}^2$	$v_1^1$	$v_{-1}^1$
$v_2^2$	0	$-\frac{1}{2}v_2^2$	$-\frac{1}{2}v_0^2$	0	$v_1^1$
$v_0^2$	$\frac{1}{2}v_2^2$	0	$-\frac{1}{2}v_{-2}^2$	$-v_1^1$	$v_{-1}^1$
$v_{-2}^2$	$\frac{1}{2}v_0^2$	$\frac{1}{2}v_{-2}^2$	0	$-2v_{-1}^1$	0
$v_1^1$	0	$v_1^1$	$2v_{-1}^1$	0	0
$v_{-1}^1$	$-v_1^1$	$-v_{-1}^1$	0	0	0

(4.17)

Observemos que  $\mathfrak{A}$  es anticonmutativa. En este caso, los morfismos  $m^{2,2,2}$ ,  $m^{1,2,1}$  y  $m^{2,1,1}$  están dados del siguiente modo:

$$\begin{aligned} m^{2,2,2} &= \frac{1}{2} (v_0^2)^* \otimes (v_2^2)^* v_2^2 - \frac{1}{2} (v_2^2)^* \otimes (v_0^2)^* v_2^2 + \frac{1}{2} (v_{-2}^2)^* \otimes (v_2^2)^* v_0^2 - \frac{1}{2} (v_2^2)^* \otimes (v_{-2}^2)^* v_0^2 \\ &\quad - \frac{1}{2} (v_0^2)^* \otimes (v_{-2}^2)^* v_{-2}^2 + \frac{1}{2} (v_{-2}^2)^* \otimes (v_0^2)^* v_{-2}^2 \\ m^{2,1,1} &= \frac{1}{3} (v_0^2)^* \otimes (v_1^1)^* v_1^1 - \frac{1}{3} (v_2^2)^* \otimes (v_{-1}^1)^* v_1^1 - \frac{1}{3} (v_0^2)^* \otimes (v_{-1}^1)^* v_{-1}^1 + \frac{2}{3} (v_{-2}^2)^* \otimes (v_1^1)^* v_{-1}^1 \\ m^{1,2,1} &= \frac{1}{3} (v_{-1}^1)^* \otimes (v_2^2)^* v_1^1 - \frac{1}{3} (v_1^1)^* \otimes (v_0^2)^* v_1^1 + \frac{1}{3} (v_{-1}^1)^* \otimes (v_2^2)^* v_{-1}^1 - \frac{2}{3} (v_1^1)^* \otimes (v_{-2}^2)^* v_{-1}^1 \end{aligned}$$

Es decir,  $m^{1,2,1} = -m^{2,1,1}$  y usando la tabla (4.17) vemos que  $[v_0^2, v_1^1] = -v_1 = -3m^{2,1,1}(v_0^2 \otimes v_1^1)$ .

**Lema 4.3.2.** Las únicas  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebras con descomposición  $\mathfrak{A} = V_{(2)}$  no isomorfas entre sí son  $\mathbb{C}^3$  y  $\mathfrak{sl}(2)$ .

*Demostración.* En efecto, supongamos que  $\mathfrak{A} = V_{(2)}$  es una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra y consideremos  $\{v_2^2, v_0^2, v_{-2}^2\}$  una base simétrica fija de  $V_{(2)}$ , con  $v_2^2$  el vector de peso máximo.

Por el Teorema de Clebsch-Gordan,  $V_{(2)} \otimes V_{(2)} = V_{(4)} \oplus V_{(2)} \oplus V_{(0)}$  y como el producto es cerrado en  $\mathfrak{A}$ , las

únicas posibilidades para la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tablas de  $\mathfrak{A}$  son:

$$V_{(2)} \cdot V_{(2)} = 0 \quad \text{ó} \quad V_{(2)} \cdot V_{(2)} = qV_{(2)}, \quad q \neq 0$$

El primer caso es el álgebra con producto trivial e isomorfa al álgebra de Lie abeliana  $\mathbb{C}^3$ , por lo que resta ver el segundo caso. Partiendo de  $V_{(2)} \cdot V_{(2)} = qV_{(2)}$ , podemos realizar un re-escalado a través de la elección del vector dominante  $v_2^2$  y suponer que  $q = 1$ . Por lo tanto, tenemos los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

1.  $v_2^2 \cdot v_2^2 = 0$ .
2.  $v_0^2 \cdot v_2^2 - v_2^2 \cdot v_0^2 = v_2^2$ .
3.  $v_{-2}^2 \cdot v_2^2 - v_0^2 \cdot v_0^2 + v_2^2 \cdot v_{-2}^2 = 0$ .

Aplicando  $f$  sobre la ecuación 2 y  $f^i$  sobre la ecuación 1 se obtienen las siguientes expresiones:

4.  $v_{-2}^2 \cdot v_2^2 - v_2^2 \cdot v_{-2}^2 = v_0^2$ .
5.  $v_0^2 \cdot v_2^2 + v_2^2 \cdot v_0^2 = 0$ .
6.  $v_{-2}^2 \cdot v_2^2 + 2v_0^2 \cdot v_0^2 + v_2^2 \cdot v_{-2}^2 = 0$ .

De 3-6 tenemos que  $v_0^2 \cdot v_0^2 = 0$  y de 2-5 tenemos que  $v_0^2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}v_2^2$  y  $v_2^2 \cdot v_0^2 = \frac{1}{2}v_2^2$ . Finalmente de 3-4, sigue que  $v_2^2 \cdot v_{-2}^2 = -\frac{1}{2}v_{-2}^2$  y  $v_{-2}^2 \cdot v_2^2 = \frac{1}{2}v_{-2}^2$ . Por lo tanto, la tabla de multiplicar de  $\mathfrak{A}$  en la base  $\{v_2^2, v_0^2, v_{-2}^2\}$  es:

	$v_2^2$	$v_0^2$	$v_{-2}^2$
$v_2^2$	0	$-\frac{1}{2}v_2^2$	$-\frac{1}{2}v_0^2$
$v_0^2$	$\frac{1}{2}v_2^2$	0	$-\frac{1}{2}v_{-2}^2$
$v_{-2}^2$	$\frac{1}{2}v_0^2$	$\frac{1}{2}v_{-2}^2$	0

Es fácil ver que los productos anteriores satisfacen la identidad de Jacobi y resta probar que es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ . Sea  $\{e, h, f\}$  la base estándar de  $\mathfrak{sl}(2)$  y sea  $\psi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{sl}(2)$  dada por  $v_2^2 \mapsto -\frac{1}{2}e$ ,  $v_0^2 \mapsto \frac{1}{4}h$ ,  $v_{-2}^2 \mapsto \frac{1}{4}f$ . Entonces  $\psi$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie con lo cual  $(\mathfrak{A}, \cdot)$  es isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ .  $\diamond$

Consideremos  $\mathfrak{A} = V_{(n)}$ . Si  $n$  es impar, los únicos módulos  $V_{(s)}$  que aparecen en la descomposición de  $V_{(n)} \otimes V_{(n)}$  son con  $s$  pares y la única aplicación  $\mathfrak{sl}(2)$ -invariante  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  es la nula. Si  $n$  es par, entonces  $V_{(n)}$  aparece una única vez sobre  $V_{(n)} \otimes V_{(n)}$  y existe una única aplicación  $\mathfrak{sl}(2)$ -invariante  $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  a menos de un múltiplo escalar. Luego,  $V_{(n)} \cdot V_{(n)} = V_{(n)}$  y  $\gamma_{n,n}^n = 1$ . Además, tenemos el siguiente Lema:

**Lema 4.3.3.** El álgebra  $\mathfrak{A}$  es conmutativa para todo  $n \equiv 0 \pmod{4}$  y anticonmutativa para todo  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .

*Demostración.* Sea  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$  una base de Clebsch-Gordan de  $\mathfrak{A}$ . Para ver cuando el producto en  $\mathfrak{A}$  es conmutativo o anticonmutativo basta con ver como se relacionan  $m^{n,n,n} \left( v_{n-2i}^n \otimes v_{n-2j}^n \right)$  y  $m^{n,n,n} \left( v_{n-2j}^n \otimes v_{n-2i}^n \right)$ . En efecto:

$$\begin{aligned} m^{n,n,n} \left( v_{n-2i}^n \otimes v_{n-2j}^n \right) &= M_{i,j,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n = (-1)^n C_{i,j,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n \\ m^{n,n,n} \left( v_{n-2j}^n \otimes v_{n-2i}^n \right) &= M_{j,i,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n = (-1)^n C_{j,i,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n = (-1)^{\frac{3}{2}n} C_{i,j,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n \end{aligned}$$

con  $i, j, p$  tales que  $n - 2p = 2n - 2(i + j)$ . Para la última expresión usamos la simetría (4.9) que también es cierta sobre los coeficientes de Clebsch-Gordan usuales. De este modo, si  $n = 4t$  vemos que  $(-1)^n = 1$  y  $(-1)^{\frac{3}{2}n} = 1$ , mientras que si  $n = 4t + 2$  vemos que  $(-1)^n = 1$  y  $(-1)^{\frac{3}{2}n} = -1$ . Es decir,  $\mathfrak{A}$  es conmutativa para todo  $n \equiv 0 \pmod{4}$  y anticonmutativa para todo  $n \equiv 2 \pmod{4}$ .  $\diamond$

Vimos que si  $n = 2$  entonces  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{sl}(2)$ . Para  $n \geq 4$  nos preguntarnos en cuales casos  $\mathfrak{A}$  define un álgebra de Lie y por el Lema 4.3.3 necesitamos que  $n \equiv 2 \pmod{4}$ . Sin embargo, con rutinas computacionales vimos que

para  $n = 6, 10$  por ejemplo,  $\mathfrak{A}$  no satisface ni Jacobi ni asociatividad. Con  $n = 6$  se obtienen los octoniones imaginarios (ver 4.3.7) y con  $n = 10$  el álgebra  $\mathfrak{A}$  no es un álgebra de Malcev [BMS07]. Tenemos además la siguiente Proposición:

**Proposición 4.3.1.** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , la  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra  $\mathfrak{A} = V_{(n)}$  no es alternativa.

*Demostración.* Sea  $\{v_{n-2i}^n\}_{0 \leq i \leq n}$  una base de peso de  $\mathfrak{A}$  (simétrica o de Clebsch-Gordan) y notemos que existe una única  $m^{n,n,n} : V_{(n)} \otimes V_{(n)} \rightarrow V_{(n)}$  no nula tal que  $m^{n,n,n}(v_{n-2i}^n \otimes v_{n-2j}^n) = M_{i,j,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n$  con  $0 \leq p \leq n$  tal que  $2n - 2(i+j) = n - 2p$ . Si  $x = v_n^n$  y  $y = v_{n-2j}^n$  vemos que:

$$m^{n,n,n}(v_n^n \otimes v_n^n) = M_{0,0,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n = 0$$

puesto que  $p = -\frac{n}{2} < 0$ . Luego  $m^{n,n,n}(m^{n,n,n}(v_n^n \otimes v_n^n) \otimes v_{n-2j}^n) = 0$ . Por otra parte:

$$m^{n,n,n}(v_n^n \otimes v_{n-2j}^n) = M_{0,j,p}^{n,n,n} v_{n-2p}^n = M_{0,j,j-\frac{n}{2}}^{n,n,n} v_{n-2(j-\frac{n}{2})}^n$$

puesto que  $2n - 2j = n - 2p \Leftrightarrow p = j - \frac{n}{2}$  con  $\frac{n}{2} \leq j \leq n$ . Luego:

$$m^{n,n,n}(v_n^n \otimes m^{n,n,n}(v_n^n \otimes v_{n-2j}^n)) = M_{0,j,j-\frac{n}{2}}^{n,n,n} m^{n,n,n}(v_n^n \otimes v_{n-2(j-\frac{n}{2})}^n) = M_{0,n,\frac{n}{2}}^{n,n,n} M_{0,\frac{n}{2},0}^{n,n,n} v_n^n$$

puesto que  $2n - 2j + n = n - 2r \Leftrightarrow r = j - n$  y como  $0 \leq r \leq n$ ,  $\frac{n}{2} \leq j \leq n$  se sigue que  $j = n$ . Por lo tanto  $(xx)y = 0$  pero  $x(xy) = M_{0,n,\frac{n}{2}}^{n,n,n} M_{0,\frac{n}{2},0}^{n,n,n} \neq 0$  con lo cual  $\mathfrak{A}$  no satisface la ley alternativa a izquierda.  $\diamond$

**Ejemplo 4.3.2.** Hay exactamente tres  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie no isomorfas con descomposición  $\mathfrak{g} = V_{(1)} \oplus V_{(0)}$ .

En efecto, sea  $\mathfrak{g} = V_{(1)} \oplus V_{(0)}$  una  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie y sean  $\{v_1^1, v_{-1}^1\}$ ,  $\{v_0^0\}$  bases simétricas de  $V_{(1)}$  y  $V_{(0)}$ . Por un lado, vemos que  $V_{(0)} \otimes V_{(1)} \cong V_{(1)}$  y  $V_{(1)} \otimes V_{(1)} \cong V_{(2)} \oplus V_{(0)}$  y como  $\dim V_{(0)} = 1$ , claramente  $[V_{(0)}, V_{(0)}] = 0$ . Luego, los únicos casos para la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\mathfrak{A}$  son:

**Caso I:**  $[V_{(0)}, V_{(1)}] = V_{(1)}$  y  $[V_{(1)}, V_{(1)}] = V_{(0)}$ . Por lo tanto, se tienen los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

- i.  $[v_0^0, v_i^1] = v_i^1$ ,
- ii.  $[v_1^1, v_{-1}^1] - [v_{-1}^1, v_1^1] = 2[v_1^1, v_{-1}^1] = v_0^0$ .

Como  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie, debe satisfacer la identidad de Jacobi, es decir:

$$0 = [v_0^0, [v_1^1, v_{-1}^1]] = [[v_0^0, v_1^1], v_{-1}^1] + [[v_0^0, v_1^1], v_{-1}^1] = 2v_0^0$$

de modo que  $v_0^0 = 0$ , lo que resulta absurdo. Luego, no existe  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie  $\mathfrak{g} = V_{(1)} \oplus V_{(0)}$  para el Caso I.

**Caso II:**  $[V_{(0)}, V_{(1)}] = V_{(1)}$  y  $[V_{(1)}, V_{(1)}] = 0$ . Por lo tanto, se tienen los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

- i.  $[v_0^0, v_i^1] = v_i^1$ ,
- ii.  $[v_1^1, v_{-1}^1] = 0$ .

Es decir,  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie con tabla de multiplicar:

	$v_0^0$	$v_1^1$	$v_{-1}^1$
$v_0^0$	0	$v_1^1$	$v_{-1}^1$
$v_1^1$	$-v_1^1$	0	0
$v_{-1}^1$	$-v_{-1}^1$	0	0

No es difícil probar que  $\mathfrak{g}$  es isomorfa al álgebra de Lie soluble  $\mathbb{C} \ltimes \mathbb{C}^2$ .

**Caso III:**  $[V_{(0)}, V_{(1)}] = 0$  y  $[V_{(1)}, V_{(1)}] = V_{(0)}$ . Luego, con argumentos similares a los casos anteriores obtenemos que  $\mathfrak{g}$  es isomorfa al álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$ .

**Caso III:**  $[V_{(0)}, V_{(1)}] = 0$  y  $[V_{(1)}, V_{(1)}] = 0$ . Es decir,  $\mathfrak{g}$  es isomorfa al álgebra de Lie abeliana  $\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^2$ .

Con los ejemplos anteriores vimos que  $\mathfrak{h}_1$ ,  $\mathbb{C}, 1 \ltimes \mathbb{C}^2$  y  $\mathfrak{sl}(2)$  son  $SL(2, \mathbb{C})$ -álgebras. Podemos elegir las bases de los irreducibles  $V_{(k)}$  y los  $SL(2, \mathbb{C})$ -morfismos de modo que las  $SL(2, \mathbb{C})$ -tablas quedan respectivamente

$$\begin{array}{c|cc} & V_{(0)} & V_{(1)} \\ \hline V_{(0)} & 0 & 0 \\ V_{(1)} & 0 & V_{(0)} \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & V_{(0)} & V_{(1)} \\ \hline V_{(0)} & 0 & V_{(1)} \\ V_{(1)} & -V_{(1)} & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|c} & V_{(2)} \\ \hline V_{(2)} & V_{(2)} \end{array}$$

**Ejemplo 4.3.3.** Sea  $\mathfrak{sl}(3)$  con base  $\{e_{31}, e_{32}, e_{21}, h_1 = e_{11} - e_{22}, h_2 = e_{22} - e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}\}$  e identifiquemos a  $\mathfrak{sl}(2)$  en  $\mathfrak{sl}(3)$  a través de  $V_{(2)} = \langle e_{12}, -h_1, -2e_{21} \rangle$ . En este caso  $\mathfrak{sl}(3)$  no es libre de multiplicidad puesto que presenta la descomposición  $\mathfrak{sl}(3) = V_{(0)} \oplus V_{(1)}^1 \oplus V_{(1)}^2 \oplus V_{(2)}$ , donde  $V_{(1)}^1 = \langle e_{13}, e_{23} \rangle$ ,  $V_{(1)}^2 = \langle e_{32}, -e_{31} \rangle$  y  $V_{(0)} = \langle i\mathfrak{d}_2 \rangle$  con  $i\mathfrak{d}_2$  la matriz diagonal  $(1, 1, -2)$ . Como todas las bases de pesos tomadas son bases simétricas en relación a la acción adjunta de  $\mathfrak{sl}(2)$  sobre  $\mathfrak{sl}(3)$ , obtenemos que  $\mathfrak{sl}(3)$  es una  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie con  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla:

$$\begin{array}{c|cccc} [-, -] & V_{(0)} & V_{(2)} & V_{(1)}^1 & V_{(1)}^2 \\ \hline V_{(0)} & 0 & 0 & 3V_{(1)}^1 & -3V_{(1)}^2 \\ V_{(2)} & 0 & -4V_{(2)} & -3V_{(1)}^1 & -3V_{(1)}^2 \\ V_{(1)}^1 & -3V_{(1)}^1 & -3V_{(1)}^1 & 0 & V_{(2)} \oplus V_{(0)} \\ V_{(1)}^2 & 3V_{(1)}^2 & -3V_{(1)}^2 & -V_{(2)} \oplus V_{(0)} & 0 \end{array} \tag{4.18}$$

Para obtener los coeficientes en la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla anterior, basta ver cuanto da cada producto de Clebsch-Gordan, que son listados a continuación:

- $[-h_1, e_{12}] - [e_{12}, -h_1] = -4e_{12}$  y  $[-2e_{21}, e_{12}] - [h_1, h_1] + [e_{12}, -2e_{21}] = 0$ .
- $[-h_1, e_{13}] - 2[e_{12}, e_{23}] = -3e_{13}$  y  $[-h_1, e_{32}] - 2[e_{12}, -e_{31}] = -3e_{31}$ .
- $[e_{23}, e_{13}] - [e_{13}, e_{23}] = 0$ ,  $[e_{13}, e_{32}] = e_{12}$  y  $[e_{23}, e_{32}] + [e_{13}, e_{31}] = i\mathfrak{d}_2$ .
- $[i\mathfrak{d}_2, e_{13}] = 3e_{13}$  y  $[i\mathfrak{d}_2, e_{32}] = -3e_{32}$ .

Por otro lado, podemos preguntarnos cuales son las  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie no abelianas  $\mathfrak{A} = V_{(2)} \oplus V_{(1)}^1 \oplus V_{(1)}^2 \oplus V_{(0)}$  tales que la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla sea:

$$\begin{array}{c|cccc} & V_{(0)} & V_{(2)} & V_{(1)}^1 & V_{(1)}^2 \\ \hline V_{(0)} & 0 & 0 & r_1 V_{(1)}^1 & r_2 V_{(1)}^2 \\ V_{(2)} & 0 & \lambda V_{(2)} & \mu_1 V_{(1)}^1 & \mu_2 V_{(1)}^2 \\ V_{(1)}^1 & -r_1 V_{(1)}^1 & \mu_1 V_{(1)}^1 & 0 & \gamma_1 V_{(2)} \oplus \gamma_2 V_{(0)} \\ V_{(1)}^2 & -r_2 V_{(1)}^2 & \mu_2 V_{(1)}^2 & \gamma_1 V_{(2)} \oplus \gamma_2 V_{(0)} & 0 \end{array}$$

donde  $r_1, r_2, \mu_1, \mu_2, \gamma_1, \gamma_2$  y  $\lambda$  son parámetros no nulos respectivamente. Al igual que en los ejemplos anteriores,

usando los productos de Clebsch-Gordan asociados, podemos ver que  $\mathfrak{A}$  tiene la siguiente tabla de multiplicar:

	$v_0^0$	$v_2^2$	$v_0^2$	$v_{-2}^2$	$v_1^1$	$v_{-1}^1$	$\tilde{v}_1^1$	$\tilde{v}_{-1}^1$
$v_0^0$	0	0	0	0	$r_1 v_1^1$	$r_1 v_{-1}^1$	$r_2 \tilde{v}_1^1$	$r_2 \tilde{v}_{-1}^1$
$v_2^2$	0	0	$-\frac{\lambda}{2} v_2^2$	$-\frac{\lambda}{2} v_0^2$	0	$-\frac{\mu_1}{3} v_1^1$	0	$-\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_1^1$
$v_0^2$	0	$\frac{\lambda}{2} v_2^2$	0	$-\frac{\lambda}{2} v_{-2}^2$	$\frac{\mu_1}{3} v_1^1$	$-\frac{\mu_1}{3} v_{-1}^1$	$\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_1^1$	$-\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_{-1}^1$
$v_{-2}^2$	0	$\frac{\lambda}{2} v_0^2$	$\frac{\lambda}{2} v_{-2}^2$	0	$\frac{2\mu_1}{3} v_{-1}^1$	0	$\frac{2\mu_2}{3} \tilde{v}_{-1}^1$	0
$v_1^1$	$-r_1 v_1^1$	0	$-\frac{\mu_1}{3} v_1^1$	$-\frac{2\mu_1}{3} v_{-1}^1$	0	0	$\gamma_1 v_2^2$	$-\frac{\gamma_2}{2} v_0^0 + \frac{\gamma_1}{2} v_0^2$
$v_{-1}^1$	$-r_1 v_{-1}^1$	$\frac{\mu_1}{3} v_1^1$	$\frac{\mu_1}{3} v_{-1}^1$	0	0	0	$-\frac{\gamma_2}{2} v_0^0 + \frac{\gamma_1}{2} v_0^2$	$\frac{\gamma_1}{2} v_{-2}^2$
$\tilde{v}_1^1$	$-r_2 \tilde{v}_1^1$		$-\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_1^1$	$-\frac{2\mu_2}{3} \tilde{v}_{-1}^1$	$-\gamma_1 v_2^2$	$\frac{\gamma_2}{2} v_0^0 - \frac{\gamma_1}{2} v_0^2$	0	0
$\tilde{v}_{-1}^1$	$-r_2 \tilde{v}_{-1}^1$	$\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_1^1$	$\frac{\mu_2}{3} \tilde{v}_{-1}^1$	0	$\frac{\gamma_2}{2} v_0^0 - \frac{\gamma_1}{2} v_0^2$	$\frac{\gamma_1}{2} v_{-2}^2$	0	0

donde  $\{v_0^0\}$ ,  $\{v_2^2, v_0^2, v_{-2}^2\}$ ,  $\{v_1^1, v_{-1}^1\}$  y  $\{\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_{-1}^1\}$  son las bases simétricas de los  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulos de  $\mathfrak{A}$ . Como  $\mathfrak{A}$  debe satisfacer la identidad de Jacobi, usando la tabla anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \gamma_1(r_1 + r_2) = 0 & \frac{\lambda}{4}\mu_1 - \frac{2}{3}\mu_1^2 = 0 & \gamma_1(3\lambda - 4\mu_1) = 0 & \mu_i(3\lambda - 4\mu_i) = 0 \\ \gamma_2(r_1 + r_2) = 0 & \frac{\lambda}{4}\mu_1 - \frac{2}{3}\mu_2^2 = 0 & \gamma_1(3\lambda - 4\mu_2) = 0 & \gamma_1(3\lambda - 2\mu_1 - 2\mu_2) = 0 \end{cases}$$

que tienen como solución  $\gamma_1 = \frac{4}{3} \frac{r_2 \gamma_2}{\lambda}$ ,  $\mu_1 = \frac{3}{8} \lambda$ ,  $\mu_2 = \frac{3}{8} \lambda$  y  $r_2 = -r_1$ . Tenemos así la siguiente proposición:

**Proposición 4.3.2.** Sea  $\mathfrak{A} = V_{(2)} \oplus V_{(1)}^1 \oplus V_{(1)}^2 \oplus V_{(0)}$  una  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie tal que la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla a través de bases simétricas es dada por:

	$V_{(0)}$	$V_{(2)}$	$V_{(1)}^1$	$V_{(1)}^2$
$V_{(0)}$	0	0	$-rV_{(1)}^1$	$rV_{(1)}^2$
$V_{(2)}$	0	$\lambda V_{(2)}$	$\frac{3}{4}\lambda V_{(1)}^1$	$\frac{3}{4}\lambda V_{(1)}^2$
$V_{(1)}^1$	$rV_{(1)}^1$	$\frac{3}{4}\lambda V_{(1)}^1$	0	$\frac{4}{3} \frac{r\kappa}{\lambda} V_{(2)} \oplus \kappa V_{(0)}$
$V_{(1)}^2$	$-rV_{(1)}^2$	$\frac{3}{4}\lambda V_{(1)}^2$	$-\frac{4}{3} \frac{r\kappa}{\lambda} V_{(2)} \oplus \kappa V_{(0)}$	0

(4.19)

con  $\lambda, r, \kappa$  parámetros arbitrarios no nulos. Entonces  $\mathfrak{A}$  es isomorfa como  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie a  $\mathfrak{sl}(3)$ .

*Demostración.* Sean  $\{u_0^0\}$ ,  $\{u_2^2, u_0^2, u_{-2}^2\}$ ,  $\{u_1^1, u_{-1}^1\}$  y  $\{\tilde{u}_1^1, \tilde{u}_{-1}^1\}$  las bases simétricas de los  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulos de  $\mathfrak{A}$  que definen la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla (4.19) y sean  $\{v_0^0\}$ ,  $\{v_2^2, v_0^2, v_{-2}^2\}$ ,  $\{v_1^1, v_{-1}^1\}$  y  $\{\tilde{v}_1^1, \tilde{v}_{-1}^1\}$  las bases simétricas de los  $\mathfrak{sl}(2)$ -submódulos de  $\mathfrak{sl}(3)$  que definen la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla (4.18). Sea  $\psi: \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{sl}(3)$  el isomorfismo lineal dado por  $u_0^0 \mapsto -\frac{r}{3} v_0^0$ ,  $u_2^2 \mapsto \frac{\lambda}{8} v_2^2$ ,  $u_1^1 \mapsto \frac{r}{3} v_1^1$  y  $\tilde{u}_1^1 \mapsto -\frac{\kappa}{6} \tilde{v}_1^1$ . Entonces  $\psi$  también es un morfismo de  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebras y por lo tanto  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{sl}(3)$ .  $\diamond$

#### 4.3.6. El álgebra de Polinomios $\mathbb{C}[x, y]$ .

Si bien aquí se tratan los casos de dimensión finita, el concepto de  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla también se aplica en algunos casos de dimensión infinita. En efecto, consideremos  $\mathfrak{A} = \mathbb{C}[x, y]$  con el producto usual de polinomios. Sabemos que  $\mathfrak{sl}(2)$  actúa por derivación sobre  $\mathfrak{A}$  a través de

$$e = -y \frac{\partial}{\partial x}, f = -x \frac{\partial}{\partial y}, h = y \frac{\partial}{\partial y} - x \frac{\partial}{\partial x}.$$

Luego,  $y^n$  es un vector de peso máximo  $n$  en  $\mathfrak{A}$  y además:

$$\star e \cdot (x^k y^{n-k}) = -k x^{k-1} y^{n-k+1}.$$

$$\star f \cdot (x^k y^{n-k}) = -(n-k)x^{k+1}y^{n-k-1}.$$

$$\star h \cdot (x^k y^{n-k}) = (n-2k)x^k y^{n-k}.$$

Por lo tanto, obtenemos la graduación  $\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{n \geq 0} V_{(n)}$  donde  $V_{(n)} \cong \mathbb{C}_n[x, y] = \langle y^n \rangle$  para todo  $n \geq 0$ . Esta graduación coincide con la graduación usual de  $\mathfrak{A}$ . Para construir una  $\mathfrak{sl}(2)$  tabla de  $\mathfrak{A}$ , tomemos la base simétrica  $\{v_{n-2i}\}_{i=0}^n$  de  $V_{(n)}$  con:

$$v_{n-2i} = (-1)^i n(n-1) \dots (n-i+1) x^i y^{n-i}$$

Luego,  $V_{(n_1)} \cdot V_{(n_2)} = \gamma_{n_1, n_2}^{n_1+n_2} V_{(n_1+n_2)}$  y como el producto de Clebsch-Gordan asociado a  $(n_1, n_2, n_1+n_2)$  es:

$$v_{n_1} \cdot v_{n_2} = y^{n_1} y^{n_2} = y^{n_1+n_2},$$

se obtiene que  $\gamma_{n_1, n_2}^{n_1+n_2} = 1$ . Por lo tanto, la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\mathfrak{A}$  queda determinada por  $V_{(k)} \cdot V_{(l)} = V_{(k+l)}$ ,  $\forall k+l \geq 0$ .

### 4.3.7. El álgebra de los Octoniones

El álgebra de octoniones  $\mathbb{O}$  (ver [BC18, SSS09]) es una  $\mathbb{R}$ -álgebra con base canónica  $\{e_0, e_1, e_2, \dots, e_7\}$  y tabla de multiplicar presentada por:

$\cdot$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$e_3$	$-e_2$	$e_5$	$-e_4$	$-e_7$	$e_6$
$e_2$	$e_2$	$-e_3$	$-e_0$	$e_1$	$e_6$	$e_7$	$-e_4$	$-e_5$
$e_3$	$e_3$	$e_2$	$-e_1$	$-e_0$	$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$-e_4$
$e_4$	$e_4$	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	$-e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$
$e_5$	$e_5$	$e_4$	$-e_7$	$e_6$	$-e_1$	$-e_0$	$-e_3$	$e_2$
$e_6$	$e_6$	$e_7$	$e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$e_3$	$-e_0$	$-e_1$
$e_7$	$e_7$	$-e_6$	$e_5$	$e_4$	$-e_3$	$-e_2$	$e_1$	$-e_0$

(4.20)

con  $e_0$  la unidad de  $\mathbb{O}$ . Notemos que  $\mathbb{O} = \mathbb{R} \oplus \text{Im } \mathbb{O}$  como  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial, donde  $\mathbb{R} = \langle e_0 \rangle$  y  $\text{Im } \mathbb{O} = \langle e_1, e_2, \dots, e_7 \rangle$ . Todo múltiplo real de  $e_0$  es llamada octonion “real” puro y toda combinación real de los restantes  $e_i$  es llamado octonion “imaginario” puro.

Por un lado, se sabe que  $\mathbb{O}$  es un álgebra alternativa no asociativa, con lo cual  $\mathbb{O}^-$  se torna un álgebra de Malcev vía el conmutador  $[-, -]$  (Sec. 2.1). Como  $[\mathbb{O}, \text{Im } \mathbb{O}] \subset \text{Im } \mathbb{O}$  se sigue que  $\text{Im } \mathbb{O}$  es un ideal de  $\mathbb{O}^-$  y  $\text{Im } \mathbb{O}$  también es un álgebra de Malcev, por lo que satisface la identidad:

$$J(x, y, [x, z]) = [J(x, y, z), x], \forall x, y, z \in \text{Im } \mathbb{O}, \quad (4.21)$$

donde  $J$  es el operador Jacobiano sobre  $\mathbb{O}^-$ . Si bien el conmutador  $[-, -]$  define un producto sobre  $\text{Im } \mathbb{O}$ , por lo general se suele tomar  $x \times y = \frac{1}{2} [x, y] = \frac{1}{2} (xy - yx)$ , que es el producto vectorial 7-dimensional sobre  $\text{Im } \mathbb{O}$ .

El grupo de automorfismo de los octoniones es el grupo simple compacto  $G_2$  y el álgebra de derivaciones de los octoniones es isomorfa al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}_2$ . Una manera de ver que  $\text{Der}(\mathbb{O}) \cong \mathfrak{g}_2$  es la siguiente: Dado  $x \in \mathbb{O}$ , consideremos la aplicación  $C_x : \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O}$  dada por  $C_x(y) = [x, y] = xy - yx$ . Cada  $C_x$  es un endomorfismo de  $\mathbb{O}$  pero no es una derivación de  $\mathbb{O}$ .

Por otro lado, para todo  $x, y \in \mathbb{O}$  sea  $D_{x,y} = [C_x, C_y] + C_{[x,y]}$ . Se puede ver que  $D_{x,y}$  es una derivación sobre  $\mathbb{O}$  cuando  $x, y$  son octoniones imaginarios puros. Como  $\text{Im } \mathbb{O}$  tiene dimensión 7 y las derivaciones  $D_{x,y}$  son antisimétricas en las variables  $x$  y  $y$ , hay un total de 21 derivaciones de  $\mathbb{O}$ . Se prueba que  $\text{Ker } D$  es de dimensión

7, de modo que  $\text{Im } D$  tiene dimensión 14 y es isomorfa a  $\mathfrak{g}_2$ . Como  $x \times y$  es un producto sobre  $\text{Im } \mathbb{O}$ , también concluimos que  $\text{Der}(\text{Im } \mathbb{O}) \cong \mathfrak{g}_2$ .

Como  $\mathfrak{sl}(2)$  es una subálgebra de  $\mathfrak{g}_2$ , se sigue que  $\mathbb{O}$  es una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra con descomposición  $\mathbb{O} = V_{(0)} \oplus V_{(6)}$  donde  $V_{(0)}$  son los octoniones reales puros y  $V_{(6)}$  son los octoniones imaginarios puros. Notemos ahora que la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\mathbb{O}$  debe tener la forma:

$$\begin{array}{c|cc} \cdot & V_{(0)} & V_{(6)} \\ \hline V_{(0)} & V_{(0)} & V_{(6)} \\ V_{(6)} & V_{(6)} & q_1 V_{(0)} \oplus q_2 V_{(6)} \end{array} \quad (4.22)$$

con  $q_1$  y  $q_2$  coeficientes a determinar. Como el producto en  $\text{Im } \mathbb{O}$  está definido por  $\times = \frac{1}{2}[-, -]$ , la  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla de  $\text{Im } \mathbb{O}$  queda determinada por  $V_{(6)} \times V_{(6)} = \frac{q_2^2}{2} V_{(6)}$ .

Veamos ahora como determinar los valores de  $q_1$  y  $q_2$ . Sea  $\mathfrak{A} = V_{(0)} \oplus V_{(6)}$  una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra con  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla dada por 4.22 y supongamos que  $\{v_0^0\}$  y  $\{v_{6-2i}^6\}_{0 \leq i \leq 6}$  son bases de Clebsch-Gordan de  $V_{(0)}$  y  $V_{(6)}$  respectivamente. Los productos de Clebsch-Gordan asociados son:

1.  $v_0^0 \cdot v_6^6 = v_6^6$ ,
2.  $\frac{\sqrt{6}}{6} v_0^6 \cdot v_6^6 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} v_2^6 \cdot v_4^6 + \frac{\sqrt{2}\sqrt{6}}{6} v_4^6 \cdot v_2^6 - \frac{\sqrt{6}}{6} v_6^6 \cdot v_0^6 = -q_2 v_6^6$ ,
3.  $\frac{\sqrt{7}}{7} v_{-6}^6 \cdot v_6^6 - \frac{\sqrt{7}}{7} v_{-4}^6 \cdot v_4^6 + \frac{\sqrt{7}}{7} v_{-2}^6 \cdot v_2^6 - \frac{\sqrt{7}}{7} v_0^6 \cdot v_0^6 + \frac{\sqrt{7}}{7} v_2^6 \cdot v_{-2}^6 - \frac{\sqrt{7}}{7} v_4^6 \cdot v_{-4}^6 + \frac{\sqrt{7}}{7} v_6^6 \cdot v_{-6}^6 = q_1 v_0^0$ .

Por lo tanto, con argumentos similares a los expuestos en la Subsec. 4.3.5 obtenemos la siguiente tabla de multiplicar:

$$\begin{array}{c|cccccccc} \cdot & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \hline x_0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_1 & x_1 & 0 & 0 & 0 & \frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_1 & \frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_2 & \frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_3 & \frac{q_1 \sqrt{7}}{7} x_0 + \frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_4 \\ x_2 & x_2 & 0 & 0 & -\frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_1 & -\frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_2 & 0 & -\frac{q_1 \sqrt{7}}{7} x_0 + \frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_4 & \frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_5 \\ x_3 & x_3 & 0 & -* & 0 & -\frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_3 & \frac{q_1 \sqrt{7}}{7} x_0 - \frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_4 & 0 & \frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_6 \\ x_4 & x_4 & -* & -* & -* & -\frac{q_1 \sqrt{7}}{7} x_2 & -\frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_5 & -\frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_6 & \frac{q_2 \sqrt{6}}{6} x_7 \\ x_5 & x_5 & -* & 0 & *-* & -* & 0 & -\frac{q_2 \sqrt{2}\sqrt{6}}{6} x_7 & 0 \\ x_6 & x_6 & -* & *-* & 0 & -* & -* & 0 & 0 \\ x_7 & x_7 & *-* & -* & -* & -* & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad (4.23)$$

Aquí,  $x_0 = v_0^0$ ,  $x_i = v_{6-2(i-1)}^6$  y los demás productos en la tabla se obtienen por simetría con el cambio de signo especificado en la misma. Notar que  $x_0$  es la unidad en  $\mathfrak{A}$  y como  $\mathfrak{A}$  debe ser alternativa, calculando los productos  $(x_1, x_1, x_7)$  y  $(x_2, x_2, x_6)$  debemos pedir que  $q_1 \frac{\sqrt{7}}{7} + \frac{q_2^2}{6} = 0$  o equivalentemente  $q_1 = -\frac{\sqrt{7}}{6} q_2^2$ . Tomando  $q_2 = \sqrt{6}$  obtenemos que  $q_1 = -\sqrt{7}$  y la tabla (4.23) queda escrita como (4.24).

Para ver que  $\mathfrak{A} \cong \mathbb{O}$  como álgebra fue necesario realizar una rutina computacional para obtener un isomorfismo lineal  $\psi : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{O}$  que traduzca (4.24) a (4.20). Enunciamos así la siguiente Proposición:

**Proposición 4.3.3.** Si  $\mathfrak{A} = V_{(0)} \oplus V_{(6)}$  es una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra cuya  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla es (4.22) con  $q_1 = -\sqrt{7}$  y  $q_2 = \sqrt{6}$ . Entonces  $\mathfrak{A} \cong \mathbb{O}$  como álgebra.

*Demostración.* Sea  $\mathfrak{A}$  una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra en las condiciones mencionadas y sean  $\{v_0^0\}$  y  $\{v_{6-2i}^6\}_{0 \leq i \leq 6}$  las bases de Clebsch-Gordan de  $V_{(0)}$  y  $V_{(6)}$  y denotemos por  $x_0 = v_0^0$ ,  $x_i = v_{6-2(i-1)}^6$  de modo que la tabla (4.23) de  $\mathfrak{A}$  (en este caso) resulte:

$\cdot$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_0$	$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$
$x_1$	$x_1$	0	0	0	$x_1$	$\sqrt{2}x_2$	$\sqrt{2}x_3$	$-x_0 + x_4$
$x_2$	$x_2$	0	0	$-\sqrt{2}x_1$	$-x_2$	0	$x_0 + x_4$	$\sqrt{2}x_5$
$x_3$	$x_3$	0	$\sqrt{2}x_1$	0	$-x_3$	$-x_0 - x_4$	0	$\sqrt{2}x_6$
$x_4$	$x_4$	$-x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_2$	$-x_5$	$-x_6$	$x_7$
$x_5$	$x_5$	$-\sqrt{2}x_2$	0	$-x_0 + x_4$	$x_5$	0	$-\sqrt{2}x_7$	0
$x_6$	$x_6$	$-\sqrt{2}x_3$	$x_0 - x_4$	0	$x_6$	$\sqrt{2}x_7$	0	0
$x_7$	$x_7$	$-x_0 - x_4$	$-\sqrt{2}x_5$	$-\sqrt{2}x_6$	$-x_7$	0	0	0

(4.24)

Fijando la base  $\{e_i\}_{0 \leq i \leq 7}$  de  $\mathbb{O}$  y  $\{x_i\}_{0 \leq i \leq 7}$  de  $\mathfrak{A}$ , sea  $\psi : \mathbb{O} \rightarrow \mathfrak{A}$  el isomorfismo lineal definido por la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} & \frac{\sqrt{2}i}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}i}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \end{pmatrix}$$

Se puede ver que  $\psi$  también es un isomorfismo de álgebras, es decir  $\psi(e_i \cdot e_j) = \psi(e_i) \cdot \psi(e_j) = x_i \cdot x_j$  para todo  $0 \leq i, j \leq 7$ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \psi(e_1) \psi(e_1) &= \left( \frac{\sqrt{2}i}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}i}{2}x_6 \right) \cdot \left( \frac{\sqrt{2}i}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}i}{2}x_6 \right) = \psi(-e_0) \\ \psi(e_1) \psi(e_2) &= \left( \frac{\sqrt{2}i}{2}x_2 + \frac{\sqrt{2}i}{2}x_6 \right) \cdot \left( -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}x_7 \right) = \left( \frac{\sqrt{2}i}{2}x_3 - \frac{\sqrt{2}i}{2}x_5 \right) = \psi(e_3) \end{aligned}$$

con el resto procediéndose del mismo modo. Luego,  $\mathfrak{A} \cong \mathbb{O}$  como álgebras.  $\diamond$

El valor  $q_2 = \sqrt{6}$  fue escogido para simplificar el término fraccionario en la expresión de  $q_1$ . Tomemos ahora  $\mathfrak{A}_t = V_{(0)} \oplus V_{(6)}$  una  $\mathfrak{sl}(2)$ -álgebra con  $\mathfrak{sl}(2)$ -tabla (4.22), donde  $q_1 = -\sqrt{7}$  y  $q_2 = t \cdot \sqrt{6}$  con  $t \neq 0$ . Usando el isomorfismo  $\psi$  anterior, podemos suponer que  $\mathfrak{A}_t$  es un álgebra con de multiplicar dada por:

$\cdot$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_0$	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_1$	$e_1$	$-e_0$	$te_3$	$-te_2$	$te_5$	$-te_4$	$-te_7$	$te_6$
$e_2$	$e_2$	$-te_3$	$-e_0$	$te_1$	$te_6$	$te_7$	$-te_4$	$-te_5$
$e_3$	$e_3$	$te_2$	$-te_1$	$-e_0$	$te_7$	$-te_6$	$te_5$	$-te_4$
$e_4$	$e_4$	$-te_5$	$-te_6$	$-te_7$	$-e_0$	$te_1$	$te_2$	$te_3$
$e_5$	$e_5$	$te_4$	$-te_7$	$te_6$	$-te_1$	$-e_0$	$-te_3$	$te_2$
$e_6$	$e_6$	$te_7$	$te_4$	$-te_5$	$-te_2$	$te_3$	$-e_0$	$-te_1$
$e_7$	$e_7$	$-te_6$	$te_5$	$te_4$	$-te_3$	$-te_2$	$te_1$	$-e_0$

(4.25)

**Proposición 4.3.4.** El álgebra  $\mathfrak{A}_t$  con tabla de multiplicar (4.25) satisface las siguientes propiedades:

1.  $\mathfrak{A}_t$  es un álgebra alternativa si y sólo si  $t = \pm 1$ .
2.  $\mathfrak{A}_t$  no es un álgebra de Malcev para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
3.  $\mathfrak{A}_t^-$  es un álgebra de Malcev para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

En particular,  $\mathbb{O}$  admite deformaciones  $\mathfrak{A}_t$  que no son álgebras alternativas y cuyas álgebras  $\mathfrak{A}_t^-$  asociadas son álgebras de Malcev.

*Demostración.* Para (1), notemos que  $e_i \cdot (e_i \cdot e_j) = -t^2 e_j$  y  $(e_i \cdot e_i) \cdot e_j = -e_0 \cdot e_j$  para todo  $i, j \neq 0$  distintos entre sí. Por lo tanto,  $t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$ . La ley alternativa a derecha se prueba con el mismo argumento. Para (2), basta tomar  $e_0, e_1, e_2$  y calcular la identidad (4.21):

$$\begin{aligned} J(e_1, e_0, e_2) \cdot e_1 &= -t^2 e_2 & J(e_1, e_0, e_1 \cdot e_2) &= t^2 e_2 \\ J(e_1, e_2, e_0) \cdot e_1 &= t^2 e_2 & J(e_1, e_2, e_1 \cdot e_0) &= -e_2 \end{aligned}$$

Luego si  $\mathfrak{A}_t$  fuese un álgebra de Malcev, debería verificarse simultáneamente que  $2t^2 = 0$  y  $t^2 + 1 = 0$ , lo que es absurdo. Finalmente para (3), usando la tabla (4.25) y calculando el producto  $[-, -]$  de  $\mathfrak{A}_t^-$ , obtenemos la tabla de multiplicar:

[,]	$e_0$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$
$e_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$e_1$	0	0	$te_3$	$-te_2$	$te_5$	$-te_4$	$-te_7$	$te_6$
$e_2$	0	$-te_3$	0	$te_1$	$te_6$	$te_7$	$-te_4$	$-te_5$
$e_3$	0	$te_2$	$-te_1$	0	$te_7$	$-te_6$	$te_5$	$-te_4$
$e_4$	0	$-te_5$	$-te_6$	$-te_7$	0	$te_1$	$te_2$	$te_3$
$e_5$	0	$te_4$	$-te_7$	$te_6$	$-te_1$	0	$-te_3$	$te_2$
$e_6$	0	$te_7$	$te_4$	$-te_5$	$-te_2$	$te_3$	0	$-te_1$
$e_7$	0	$-te_6$	$te_5$	$te_4$	$-te_3$	$-te_2$	$te_1$	0

Luego, para todo  $i, j, k \geq 1$  tales que  $J(e_i, e_j, e_k) \neq 0$ , obtenemos que  $J(e_i, e_j, [e_i, e_k]) = \pm 6t^3 e_l$  y  $[e_i, J(e_i, e_j, e_k)] = \pm 6t^3 e_l$  para algún  $l$ . Por mencionar algunos ejemplos:

$$\begin{aligned} J(e_1, e_2, [e_1, e_4]) &= -6t^3 e_6, & [e_1, J(e_1, e_2, e_4)] &= -6t^3 e_6 \\ J(e_1, e_2, [e_1, e_5]) &= -6t^3 e_7, & [e_1, J(e_1, e_2, e_5)] &= -6t^3 e_7 \\ J(e_1, e_3, [e_1, e_6]) &= -6t^3 e_5, & [e_1, J(e_1, e_3, e_6)] &= -6t^3 e_5 \\ J(e_1, e_3, [e_1, e_7]) &= 6t^3 e_4, & [e_1, J(e_1, e_3, e_7)] &= 6t^3 e_4 \end{aligned}$$

Es decir,  $J(e_i, e_j, [e_i, e_k]) = [e_i, J(e_i, e_j, e_k)]$  con lo cual  $\mathfrak{A}_t^-$  es un álgebra de Malcev para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\diamond$

#### 4.4. La $\mathfrak{sl}(n)$ -tabla de familias de álgebras de Poisson

En el Teor. 2.10 mostramos que  $\mathcal{P}_n = \mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$  es un álgebra de Poisson cuyo producto asociativo es dado por el anticonmutador  $\llbracket -, - \rrbracket$  y el corchete de Lie  $\{-, -\}$  es dado por la acción adjunta.

Existe también otro producto asociativo sobre  $\mathfrak{gl}(n) \ltimes \mathfrak{gl}(n)_{ab}$  que define una estructura de álgebra de Poisson y que denotaremos por  $\mathcal{Q}_n$ . En esta sección describiremos este producto y daremos las  $\mathfrak{sl}(n)$ -tablas para cada una de las álgebras de Poisson  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{Q}_n$ .

Primero recordemos que, como en toda álgebra de Lie semisimple, la representación adjunta de  $\mathfrak{sl}(n)$  es autodual y por lo tanto la representación trivial de  $\mathfrak{sl}(n)$  aparece con multiplicidad 1 en producto tensorial de la

adjunta por sí misma (a través de la forma de Killing), es decir:

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(n)}(\mathfrak{sl}(n) \otimes \mathfrak{sl}(n), \mathbb{C}) = 1.$$

En el caso de  $\mathfrak{sl}(n)$ , podemos elegir como base de este espacio directamente a:

$$m_0(A, B) = \text{Tr}(AB + BA)$$

que es lo mismo que  $2\text{Tr}(AB)$ , pero elegimos la expresión anterior para enfatizar su conmutatividad. Por otro lado, la representación adjunta aparece con multiplicidad 2 en el producto tensorial de ella consigo misma, es decir:

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{sl}(n)}(\mathfrak{sl}(n) \otimes \mathfrak{sl}(n), \mathfrak{sl}(n)) = 2.$$

Este espacio tiene una base formada por dos productos, uno anticonmutativo dado por el corchete de matrices  $m_1^{ad}(A, B) = [A, B]$  y el otro conmutativo dado por:

$$m_2^{ad}(A, B) = \llbracket A, B \rrbracket - \frac{1}{n} m_0(A, B)I.$$

Observar que el segundo sumando sirve de corrección para obtener un resultado de traza nula. Definamos  $\mathcal{Q}_n = \mathfrak{gl}(n)_0 \times \mathfrak{gl}(n)_1$  cuyos elementos del primer factor son denotados con un subíndice 0 y los elementos del segundo factor son denotados con un subíndice 1 respectivamente. Como  $\mathfrak{gl}(n)_i = \mathbb{C}I_i \oplus \mathfrak{sl}(n)_i$ , definamos sobre  $\mathcal{Q}_n$  el siguiente producto conmutativo:

$$\begin{aligned} I_0 \diamond B &= B \quad \forall B \in \mathcal{Q}_n \\ I_1 \diamond B &= 0 \quad \forall B \in \mathcal{Q}_n \\ A_0 \diamond B_0 &= m_2^{ad}(A, B)_1 \in \mathfrak{sl}(n)_1 \\ A_0 \diamond B_1 &= m_0(A, B)I_1 \\ A_1 \diamond B_1 &= 0 \end{aligned}$$

y sea  $\{-, -\}$  el mismo corchete definido sobre  $\mathcal{P}_n$  dado por el conmutador de matrices (Teor. 2.10). Notemos que  $\mathcal{P}_n$  con el producto  $\llbracket -, - \rrbracket$  no es unitaria, mientras que  $\mathcal{Q}_n$  con el producto  $\diamond$  si lo es (donde  $I_0$  es la unidad). Tenemos así el siguiente Teorema:

**Teorema 4.1.**  $(\mathcal{Q}_n, \{-, -\}, \diamond)$  es un álgebra de Poisson.

*Demostración.* La demostración es similar a la presentada en el Teor. 2.10. Veamos primero que  $\diamond$  es un producto asociativo. Si  $A_0, B_0, C_0 \in \mathfrak{sl}(n)_0$ , entonces:

$$\begin{aligned} (A_0 \diamond B_0) \diamond C_0 &= m_2^{ad}(A, B)_1 \diamond C_0 \\ &= \left( \llbracket A, B \rrbracket_1 - \frac{1}{n} m_0(A, B)I_1 \right) \diamond C_0 \\ &= C_0 \diamond \llbracket A, B \rrbracket_1 \\ &= m_0(C, \llbracket A, B \rrbracket)I_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_0 \diamond (B_0 \diamond C_0) &= A_0 \diamond m_2^{ad}(B, C)_1 \\ &= A_0 \diamond \left( \llbracket B, C \rrbracket_1 - \frac{1}{n} m_0(B, C)I_1 \right) \\ &= m_0(A, \llbracket B, C \rrbracket)I_1 \end{aligned}$$

Pero  $m_0(C, \llbracket A, B \rrbracket) = m_0(A, \llbracket B, C \rrbracket)$  de modo que  $\diamond$  es un producto asociativo (en los demás casos la prueba es trivial). Veamos ahora que los productos satisfacen la ley de compatibilidad. Si  $A_0, B_0, C_0 \in \mathfrak{sl}(n)_0$  entonces

$$\begin{aligned} \{A_0, B_0 \diamond C_0\} &= \left\{ A_0, \llbracket B, C \rrbracket_1 - \frac{1}{n} m_0(B, C) I_1 \right\} = \{A_0, \llbracket B, C \rrbracket_1\} = \llbracket \{A, B\}, C \rrbracket_1 + \llbracket B, \{A, C\} \rrbracket_1 \\ \{A, B\}_0 \diamond C_0 + B_0 \diamond \{A, C\}_0 &= \llbracket \{A, B\}, C \rrbracket_1 - \frac{1}{n} m_0(\{A, B\}, C) I_1 + \llbracket B, \{A, C\} \rrbracket_1 - \frac{1}{n} m_0(B, \{A, C\}) I_1 \\ &= \llbracket \{A, B\}, C \rrbracket_1 + \llbracket B, \{A, C\} \rrbracket_1 \end{aligned}$$

puesto que  $m_0(\{A, B\}, C) = 0$  por la conmutatividad de la traza. Como en los demás casos la prueba es trivial, se sigue que los productos satisfacen la ley de compatibilidad. Esto concluye la demostración.  $\diamond$

Como  $\mathcal{Q}_n$  es unitaria y  $\mathcal{P}_n$  no lo es, se tiene que  $\mathcal{P}_n \neq \mathcal{Q}_n$  como álgebras asociativas y por consiguiente como álgebras de Poisson. También se puede ver que  $\mathcal{P}_n \neq \mathcal{Q}_n$  como  $\mathfrak{sl}(n)$ -álgebras, cuyas  $\mathfrak{sl}(n)$ -tablas son dadas a continuación:

**Teorema 4.2.** Las  $\mathfrak{sl}(n)$ -tablas correspondientes al producto asociativo  $\llbracket -, - \rrbracket$  sobre  $\mathcal{P}_n$  y al producto asociativo  $\diamond$  sobre  $\mathcal{Q}_n$  son:

$\llbracket -, - \rrbracket$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$I_0$	$I_1$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	0	0
$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$\mathfrak{sl}(n)_1^{(*)} \oplus \frac{1}{n} I_1$	0	0
$\mathfrak{sl}(n)_1$	0	0	0	0
$I_1$	0	0	0	0

$\diamond$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$I_0$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1^{(*)}$	$I_1$	0
$\mathfrak{sl}(n)_1$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$	0	0
$I_1$	$I_1$	0	0	0

La  $\mathfrak{sl}(n)$ -tabla del corchete  $\{-, -\}$  sobre  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{Q}_n$  es igual a:

$\{-, -\}$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(n)_0$	$\mathfrak{sl}(n)_1$	$I_1$
$I_0$	0	0	0	0
$\mathfrak{sl}(n)_0$	0	$\mathfrak{sl}(n)_0^{(**)}$	$\mathfrak{sl}(n)_1^{(**)}$	0
$\mathfrak{sl}(n)_1$	0	$\mathfrak{sl}(n)_1^{(**)}$	0	0
$I_1$	0	0	0	0

donde (\*) se refiere que es vía  $m_2^{ad}$  y (\*\*) se refiere que es vía  $m_1^{ad}$ . Luego, ambas  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{Q}_n$  son  $\mathfrak{sl}(n)$ -Poisson.

*Demostración.* Por un lado, el corchete  $\{-, -\}$ , que es el mismo para  $\mathcal{P}_n$  y  $\mathcal{Q}_n$ , está definido por la acción adjunta de  $\mathfrak{gl}(n)_0$  vía  $m_1^{ad}$  sobre  $\mathfrak{gl}(n)_0$  y  $\mathfrak{gl}(n)_1$ . Por lo tanto, claramente es igual a cero si multiplicamos sobre las identidades  $I_i$  e igual a  $\mathfrak{sl}(n)_i$  si multiplicamos por  $\mathfrak{sl}(n)_0$  y los coeficientes no nulos de la  $\mathfrak{sl}(n)$ -tabla de  $\{-, -\}$  son iguales a 1. Para el producto  $\llbracket -, - \rrbracket$  sobre  $\mathcal{P}_n$  consideremos los siguientes productos:

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \cdot I_0 \otimes \mathbb{C} \cdot I_0 &\rightarrow \mathbb{C} \cdot I_1 & \mathbb{C} \cdot I_0 \otimes \mathfrak{sl}(n)_0 &\rightarrow \mathfrak{sl}(n)_1 & \mathfrak{sl}(n)_0 \otimes \mathbb{C} \cdot I_0 &\rightarrow \mathfrak{sl}(n)_1 \\ I_0 \otimes I_0 &\mapsto \llbracket I, I \rrbracket_1 & I_0 \otimes A_0 &\mapsto \llbracket I, A \rrbracket_1 & A_0 \otimes I_0 &\mapsto \llbracket A, I \rrbracket_1 \\ \mathfrak{sl}(n)_0 \otimes \mathfrak{sl}(n)_0 &\rightarrow \mathfrak{sl}(n)_1 & \mathfrak{sl}(n)_0 \otimes \mathfrak{sl}(n)_0 &\rightarrow \mathbb{C} \cdot I_1 & & \\ A_0 \otimes B_0 &\mapsto m_2^{ad}(A, B)_1 & A_0 \otimes B_0 &\mapsto m_0(A, B) I_1 & & \end{aligned}$$

notar que  $I_0$  actúa como una identidad trasladada (en el sentido que  $\llbracket I_0, A_0 \rrbracket = 2A_1$ ).

Como  $m_2^{ad}(A, B) = \llbracket A, B \rrbracket - \frac{1}{n} m_0(A, B) I$ , claramente  $\llbracket A, B \rrbracket = m_2^{ad}(A, B) + \frac{1}{n} m_0(A, B) I$ . Por lo tanto  $\llbracket \mathfrak{sl}(n)_0, \mathfrak{sl}(n)_0 \rrbracket = \mathfrak{sl}(n)_1 \oplus \frac{1}{n} I_1$  y los coeficientes son 1 y  $\frac{1}{n}$ .

Para el producto  $\diamond$  sobre  $\mathcal{Q}_n$ , sabemos que el factor  $I_0$  es la identidad y considerando los siguientes productos:

$$\begin{array}{ll}
\mathbb{C} \cdot I_0 \otimes \mathcal{Q}_n \rightarrow \mathcal{Q}_n & \mathfrak{sl}(n)_0 \otimes \mathfrak{sl}(n)_0 \rightarrow \mathfrak{sl}(n)_1 \\
I_0 \otimes A \mapsto A & A_0 \otimes B_0 \mapsto m_2^{ad}(A, B)_1 \\
\mathfrak{sl}(n)_1 \otimes \mathfrak{sl}(n)_0 \rightarrow \mathbb{C} \cdot I_1 & \mathfrak{sl}(n)_0 \otimes \mathfrak{sl}(n)_1 \rightarrow \mathbb{C} \cdot I_1 \\
A_1 \otimes B_0 \mapsto m_0(A, B) I_1 & A_0 \otimes B_1 \mapsto m_0(A, B) I_1
\end{array}$$

quedan determinados que todos los coeficientes no nulos de la  $\mathfrak{sl}(n)$ -tabla son iguales a 1.

◇



# Capítulo 5

## La Cohomología $H^{\bullet, \bullet}$

Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  y un  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$ , recordaremos la definición de la cohomología de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $V$  junto con algunas propiedades. Posteriormente nos restringiremos al caso que  $V = \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}$  cuya cohomología usualmente será denotada por  $H^{\bullet, \bullet}$  y le daremos una estructura de súper-álgebra de Poisson (Sec. 5.4). Asumiremos que el lector está familiarizado con conceptos básicos del álgebra homológica.

### 5.1. El complejo de Chevalley-Eilenberg

Esta sección está basada en [HS71] y la mayoría de los conceptos también pueden verse en [Wei94, Kna88, CE56]. Revisaremos la construcción de un complejo de cadenas  $X_{\bullet}(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$  con el que definimos la cohomología de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $V$ .

Sea  $U_{\mathfrak{g}}$  al álgebra universal envolvente de  $\mathfrak{g}$  e identifiquemos a  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(\mathfrak{g}) \subset U_{\mathfrak{g}}$ . Para cada  $p \geq 0$  consideremos el  $U_{\mathfrak{g}}$ -módulo libre  $X_p(\mathfrak{g}) = U_{\mathfrak{g}} \otimes \wedge^p \mathfrak{g}$  con base  $\{1 \otimes x_{k_1} \wedge \cdots \wedge x_{k_p} : 1 \leq k_1 < \cdots < k_p \leq p\}$ , donde  $\{x_k\}_{k \in I}$  es una base de  $\mathfrak{g}$ . Como la categoría  $U_{\mathfrak{g}}\text{-mod}$  es naturalmente isomorfa a la categoría  $\mathfrak{g}\text{-mod}$ , cada  $X_p(\mathfrak{g})$  también es un  $\mathfrak{g}$ -módulo y existe un único morfismo de aumento  $\varepsilon : X_0(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\varepsilon(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ .

**Definición 5.1.1.** Dado  $p \geq 1$  definimos el morfismo  $d_p : X_p(\mathfrak{g}) \rightarrow X_{p-1}(\mathfrak{g})$  por:

- $d_1(u \otimes x) = u \cdot x$ .
- $d_p = d_{p,m} + d_{p,t}$  para todo  $p \geq 2$ , con cada término definido por:

$$d_{p,m}(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} u \cdot x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p$$

$$d_{p,t}(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} u \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p$$

donde la notación  $\hat{x}_i$  significa que el elemento  $x_i$  es omitido.

La idea es probar que  $X_{\bullet}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \rightarrow 0$  es una resolución libre del  $\mathfrak{g}$ -módulo trivial  $\mathbb{C}$ . Esto implica mostrar que:

1.  $X_{\bullet}(\mathfrak{g})$  es un complejo de cadenas con diferencial  $d$ .
2.  $X_{\bullet}(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \rightarrow 0$  es una sucesión exacta.

La afirmación (2) sigue del Teorema 5.1 y la afirmación (1) se obtienen mediante una serie de Lemas que conducen al resultado deseado. Para  $y \in \mathfrak{g}$  definimos los morfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos  $\theta(y) : X_p(\mathfrak{g}) \rightarrow X_p(\mathfrak{g})$  y  $\sigma(y) : X_p(\mathfrak{g}) \rightarrow X_{p+1}(\mathfrak{g})$  como:

$$\theta(y)(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = -y \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} 1 \otimes [y, x_i] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p \quad (5.1)$$

$$\sigma(y)(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = 1 \otimes y \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \quad (5.2)$$

**Lema 5.1.1.** Para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ , valen las siguientes igualdades:

1.  $\theta([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)]$ .
2.  $\theta(x)\sigma(y) - \sigma(y)\theta(x) = \sigma([x, y])$ .

*Demostración.* Por un lado, notemos que  $(-1)^{i+1} 1 \otimes [y, x_i] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p = 1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [y, x_i] \wedge \cdots \wedge x_p$ . De este modo, para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} \theta(y)(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) &= -y \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{i=1}^p 1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [y, x_i] \wedge \cdots \wedge x_p. \\ \theta(x)\theta(y)(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) &= yx \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p - \sum_{i=1}^p y \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [x, x_i] \wedge \cdots \wedge x_p - \sum_{i=1}^p x \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [y, x_i] \wedge \cdots \wedge x_p \\ &\quad + \sum_{i \neq j} 1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [y, x_i] \wedge \cdots \wedge [x, x_j] \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{i=1}^p 1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [x, [y, x_i]] \wedge \cdots \wedge x_p \end{aligned}$$

Por lo tanto, reordenando los términos y usando la identidad de Jacobi obtenemos que:

$$\begin{aligned} [\theta(x), \theta(y)](1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) &= -[x, y] \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{i=1}^p 1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge [[x, y], x_i] \wedge \cdots \wedge x_p \\ &= \theta([x, y])(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \end{aligned}$$

lo que concluye el resultado.  $\diamond$

**Lema 5.1.2.** Para todo  $y \in \mathfrak{g}$  y  $p \geq 0$  valen las siguiente igualdades:

1.  $\sigma(y)d_p + d_{p+1}\sigma(y) = -\theta(y)$ .
2.  $\theta(y)d_p = d_p\theta(y)$ .

*Demostración.* Probaremos sólo la expresión (1). Para esto, basta probar la igualdad sobre los generadores  $1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ . El primer término del lado izquierdo de (1) es igual a:

$$\begin{aligned} \sigma(y)d_p(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} \sigma(y)(x_i \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \sigma(y)(1 \otimes [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p) \\ &= x_1 \otimes y \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p + \sum_{i=2}^p (-1)^{i+1} x_i \otimes y \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} 1 \otimes y \wedge [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p \end{aligned}$$

mientras que el segundo término del lado izquierdo de (1) es igual a:

$$\begin{aligned} d_{p+1}\sigma(y)(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) &= y \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p - x_1 \otimes y \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p \\ &\quad - \sum_{i=2}^p (-1)^{i+1} x_i \otimes y \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_p \\ &\quad - \sum_{j=1}^p (-1)^{j+1} 1 \otimes [y, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} 1 \otimes [x_i, x_j] \wedge y \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_p \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiones obtenemos el lado derecho de (1). Para probar (2), basta aplicar inducción matemática y usar el Lema 5.1.1  $\diamond$

**Corolario 5.1.1.**  $X_\bullet(\mathfrak{g}) \rightarrow 0$  es un complejo de  $\mathfrak{g}$ -módulos libres.

*Demostración.* Apliquemos inducción sobre  $p$ . Para  $p = 1$  vemos que  $d_0 \circ d_1 = 0$  y  $\varepsilon(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$ . Si  $p \geq 2$  entonces  $d_{p-1} \circ d_p(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = d_{p-1} \circ d_p \sigma(x_1)(1 \otimes x_2 \wedge \cdots \wedge x_p)$  y por el Lema 5.1.2:

$$\begin{aligned} d_{p-1} \circ d_p \sigma(x_1) &= -d_{p-1}[\theta(x_1) + \sigma(x_1)d_{p-1}] \\ &= -d_{p-1}\theta(x_1) - d_{p-1}\sigma(x_1)d_{p-1} \\ &= \underbrace{-d_{p-1}\theta(x_1) + \theta(x_1)d_{p-1}}_{(1)} + \underbrace{\sigma(x_1)d_{p-2}d_{p-1}}_{(2)} = 0 \end{aligned}$$

donde (1) es nulo por el Lema 5.1.2 mientras que (2) es nulo por hipótesis inductiva.  $\diamond$

**Teorema 5.1.** (Koszul)  $X_\bullet(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C} \rightarrow 0$  es una resolución libre de  $\mathbb{C}$ .

*Esquema de demostración:* Los detalles de la demostración se encuentran en [HS71, pag 242], cuyos pasos importantes son:

1. Sea  $\{x_k\}_{k \in I}$  una base de  $\mathfrak{g}$  con orden total  $\leq$  y consideremos la base de  $X_n(\mathfrak{g})$  formada por los monomios  $x_{k_1} \cdots x_{k_m} \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_n}$  con  $k_1 \leq \cdots \leq k_m$  y  $l_1 < \cdots < l_n$ .

2. Para todo  $p \geq 0$ , sea  $F_{p,-1}(\mathfrak{g}) = \mathbb{C}$  y  $F_{p,n}(\mathfrak{g})$  el  $\mathbb{C}$ -submódulo de  $X_n(\mathfrak{g})$  generado por todos los productos  $x_{k_1} \cdots x_{k_m} \otimes x_{l_1} \wedge \cdots \wedge x_{l_n}$  con  $m+n \leq p$ .

3. La familia  $F_p(\mathfrak{g}) = \{F_{p,n}(\mathfrak{g})\}_n$  define subcomplejo de  $\mathbb{C}$ -módulos de  $X_\bullet(\mathfrak{g})$  para todo  $p \geq 0$ , con  $d_n(F_{p,n}(\mathfrak{g})) \subset F_{p,n-1}(\mathfrak{g})$ . Además:

$$\star F_p(\mathfrak{g}) \subset F_{p-1}(\mathfrak{g}),$$

$$\star X_\bullet(\mathfrak{g}) = \bigcup_{p \geq 0} F_p(\mathfrak{g}), \text{ donde en cada grado } n \text{ tenemos que } X_n(\mathfrak{g}) = \bigcup_{p \geq 0} F_{p,n}(\mathfrak{g}).$$

4. Los  $F_p(\mathfrak{g})$  son exactos para todo  $p \geq 0$ , con lo cual  $X_\bullet(\mathfrak{g})$  es exacto.  $\diamond$

**Corolario 5.1.2.** (Chevalley-Eilenberg) Si  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo, entonces la homología de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $V$  es la homología del complejo de cadenas:

$$X_\bullet(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathfrak{g}} V \cong \bigwedge^\bullet \mathfrak{g} \otimes V$$

En este complejo, una  $n$ -cadena es un monomio de la forma  $x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes v$  y el diferencial  $d : \bigwedge^n \mathfrak{g} \otimes V \rightarrow \bigwedge^{n-1} \mathfrak{g} \otimes V$  es dado por:

$$\begin{aligned} d(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes v) &= \sum_{i=1}^n (-1)^i x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n \otimes x_i \cdot v \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots \wedge x_n \otimes v \end{aligned}$$

Por otra parte, la cohomología de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $V$  es la cohomología del complejo de cocadenas:

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(X_\bullet(\mathfrak{g}), V) \cong \text{Hom}(\bigwedge^\bullet \mathfrak{g}, V)$$

En este complejo, una  $n$ -cocadena  $\omega : \bigwedge^n \mathfrak{g} \rightarrow V$  es un morfismo  $n$ -lineal alternante y el diferencial  $\delta_n : \text{Hom}(\bigwedge^n \mathfrak{g}, V) \rightarrow \text{Hom}(\bigwedge^{n+1} \mathfrak{g}, V)$  es dado por:

$$\begin{aligned} (\delta_n \phi)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \phi([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_{n+1}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

En ambos complejos, la notación  $\hat{x}_i$  significa que el elemento  $x_i$  es omitido.

Puesto que  $\wedge^p \mathfrak{g} = 0$  para todo  $p > N$ , claramente del Corolario anterior se tiene el siguiente hecho:

**Corolario 5.1.3.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión finita  $\dim \mathfrak{g} = N$ , entonces  $H^p(\mathfrak{g}, V) = H_p(\mathfrak{g}, V) = 0$  para todo  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V$  y  $p > N$ .

Para cada entero no negativo  $n$ , se define el espacio vectorial de  $n$ -cocadenas de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $V$  como:

$$C^n(\mathfrak{g}, V) := \text{Hom}(\wedge^n \mathfrak{g}, V) \cong \wedge^n \mathfrak{g}^* \otimes V,$$

esto es, el espacio de todas las  $n$ -formas lineales alternantes de  $\mathfrak{g}$  en  $V$ . El complejo de Chevalley-Eilenberg es el complejo de cocadenas:

$$0 \xrightarrow{0} C^0(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_0} C^1(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} C^n(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_n} C^{n+1}(\mathfrak{g}, V) \xrightarrow{\delta_{n+1}} \dots \quad (5.4)$$

cuyo diferencial está dado por la ecuación (5.3). Como es usual,  $Z^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Ker}(\delta_n)$  denota a los  $n$ -cociclos y  $B^n(\mathfrak{g}, V) = \text{Im}(\delta_{n-1})$  a los  $n$ -cobordes respectivamente.

Si  $\delta_t$  denota el diferencial sobre el complejo  $C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  entonces  $(C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathbb{C}), \delta_t)$  es un álgebra diferencial graduada. Es decir, para todo  $\omega \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$  y  $\mu \in \wedge^q \mathfrak{g}^*$  vale que:

$$\delta_t(\omega \wedge \mu) = \delta_t(\omega) \wedge \mu + (-1)^p \omega \wedge \delta_t(\mu) \quad (5.5)$$

Por otro lado, si  $V$  es cualquier  $\mathfrak{g}$ -módulo, entonces el espacio vectorial graduado  $C^\bullet(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_{n \geq 0} C^n(\mathfrak{g}, V)$  satisface:

$$\delta(\omega \otimes v) = \delta_t(\omega) \otimes v + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge \delta_0(v) \quad (5.6)$$

donde  $\delta_0 : V \rightarrow \mathfrak{g}^* \otimes V$  es el diferencial sobre  $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  en el grado cero. Notar que en el segundo término de (5.6) se coloca  $\wedge$  puesto que  $\delta_0(v) \in \mathfrak{g}^* \otimes V$ . En este complejo, se define la derivada de Lie relativa a  $x$  como la aplicación  $\theta_x : C^\bullet(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  dada por:

$$\theta_x(\omega)(x_1, \dots, x_n) = x \cdot \omega(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^n \omega(x_1, \dots, [x, x_i], \dots, x_n) \quad (5.7)$$

y el producto interior por  $x \in \mathfrak{g}$  como la súper-derivación  $\iota_x : C^\bullet(\mathfrak{g}, V) \rightarrow C^{\bullet-1}(\mathfrak{g}, V)$  de grado  $-1$  dada por:

$$\iota_x(\omega)(x_1, \dots, x_{n-1}) = \omega(x, x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (5.8)$$

con  $\iota_x(v) = 0, \forall v \in V$ . Notemos que la derivada de Lie  $\theta_\bullet$  define una estructura de  $\mathfrak{g}$ -módulo sobre  $C^n(\mathfrak{g}, V)$  a través de la acción  $x \cdot \phi = \theta_x(\phi)$ . Además, se puede ver que los morfismos  $(\delta, \theta_\bullet, \iota_\bullet)$  satisfacen las siguientes identidades<sup>1</sup>:

$$\delta \iota_x + \iota_x \delta = \theta_x, \quad \theta_x \iota_y - \iota_y \theta_x = \iota_{[x, y]}, \quad \theta_x \delta - \delta \theta_x = 0. \quad (5.9)$$

**Observación 5.1.1.** Sea  $\mathbb{C}$  el  $\mathfrak{g}$ -módulo trivial, entonces  $C^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$  y existe un isomorfismo natural:

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$$

Similarmente,  $C^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \cong \mathfrak{g}$  y  $\delta(\omega)(x, y) = -\omega([x, y])$ , de modo que  $Z^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$  son los operadores lineales que

<sup>1</sup>Aquí la notación multiplicativa denota composición.

se anulan sobre  $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ . Como  $B^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \{0\}$  resulta que:

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \left( \frac{\mathfrak{g}}{[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]} \right)^*$$

Tomemos ahora el  $\mathfrak{g}$ -módulo adjunto  $\mathfrak{g}$ . Entonces  $Z^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  son todos los  $x \in \mathfrak{g}$  tales que  $\delta(x) = 0$ , es decir:

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \mathfrak{z}$$

donde  $\mathfrak{z}$  es el centro de  $\mathfrak{g}$ . Además,  $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  son las derivaciones de  $\mathfrak{g}$  y  $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  son las derivaciones  $\omega \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  tales que  $\omega(x) = x \cdot y = -\text{ad}_x(y)$  para algún  $y \in \mathfrak{g}$ , que son las derivaciones interiores de  $\mathfrak{g}$ . Por lo tanto:

$$H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong \frac{\text{Der}(\mathfrak{g})}{\text{ad}(\mathfrak{g})} = \text{Der}_e(\mathfrak{g})$$

donde  $\text{Der}_e(\mathfrak{g})$  denota a las derivaciones exteriores de  $\mathfrak{g}$ , es decir, aquellas que no son corchetes  $[x, -]$  con  $x \in \mathfrak{g}$ .

### 5.1.1. Notación

Usualmente denotaremos por  $C^{\bullet, \bullet} = \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}$  al complejo de  $\mathfrak{g}$  con coeficientes en  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}$ . Luego,  $C^{p,q} = \bigwedge^p \mathfrak{g}^* \otimes \bigwedge^q \mathfrak{g}$  es la componente  $(p, q)$  que la consideraremos de grado  $|C^{p,q}| = p + q - 2$ . Un monomio típico en  $C^{p,q}$  será denotado por  $x^{i_1} \dots x^{i_p} \otimes x_{j_1} \dots x_{j_q}$  donde  $\{x_1, \dots, x_n\}$  es una base de  $\mathfrak{g}$  con respectiva base dual  $\{x^1, \dots, x^n\}$  en  $\mathfrak{g}^*$ .

Si  $\delta$  es el diferencial de Chevalley-Eilenberg sobre  $C^{\bullet, \bullet}$ , entonces  $Z^{\bullet, \bullet} = \text{Ker}(\delta)$  representa a los cociclos y  $B^{\bullet, \bullet} = \text{Im}(\delta)$  a los cobordes. La cohomología es  $H^{\bullet, \bullet} = \bigoplus_{p,q} H^{p,q} = \bigoplus_{p,q} H^p(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$ . Usaremos la notación  $C^{\bullet, \bullet}(\mathfrak{g})$  cuando sea necesario especificar el álgebra  $\mathfrak{g}$  (similarmenete sobre los demás espacios graduados).

**Observación 5.1.2.**  $C^{\bullet, \bullet}$  es un álgebra graduada súper-conmutativa con el producto  $\cdot : C^{p,q} \times C^{r,s} \rightarrow C^{p+r, q+s}$  dado por:

$$(\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w) = (-1)^{|\psi||v|} \phi \wedge \psi \otimes v \wedge w \quad (5.10)$$

El diferencial de Chevalley-Eilenberg  $\delta$  sobre  $C^{\bullet, \bullet}$  es una súper-derivación puesto que:

$$\delta((\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w)) = \delta(\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w) + (-1)^{|\phi||v|} (\phi \otimes v) \cdot \delta(\psi \otimes w) \quad (5.11)$$

con lo cual  $(C^{\bullet, \bullet}, \cdot, \delta)$  es un álgebra diferencial graduada. Además:

1. Si  $(\phi \otimes v), (\psi \otimes w) \in Z^{\bullet, \bullet}$  entonces  $(\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w) \in Z^{\bullet, \bullet}$ .
2. Si  $(\phi \otimes v) \in Z^{\bullet, \bullet}$ ,  $(\psi \otimes w) \in B^{\bullet, \bullet}$  ó  $(\phi \otimes v) \in B^{\bullet, \bullet}$ ,  $(\psi \otimes w) \in Z^{\bullet, \bullet}$  entonces  $(\phi \otimes v) \cdot (\psi \otimes w) \in B^{\bullet, \bullet}$ .

Es decir,  $Z^{\bullet, \bullet}$  y  $B^{\bullet, \bullet}$  son subálgebras graduadas de  $C^{\bullet, \bullet}$  y  $B^{\bullet, \bullet}$  es un ideal graduado de  $Z^{\bullet, \bullet}$ . Luego, la cohomología  $H^{\bullet, \bullet}$  es un álgebra graduada súper-conmutativa, donde el producto (5.10) pasa al cociente como el producto  $\vee : H^{p,q} \times H^{r,s} \rightarrow H^{p+r, q+s}$ .

Por la proposición 4.1.1,  $C^{\bullet, \bullet}$  es una  $\mathfrak{g}$ -súper-álgebra y por la proposición 2.7.1 cada  $x \in \mathfrak{g}$  define una súper-derivación  $l_x$  de grado  $-1$  sobre  $C^{\bullet, \bullet}$ .

**Proposición 5.1.1.**  $C^{\bullet, \bullet}$  es un  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo por derivación a través de la acción dada por:

$$(D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) = D \cdot \phi(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, x_p), \quad \forall \phi \in C^{p, \bullet}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g}). \quad (5.12)$$

*Demostración.* En efecto, si  $D, E \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  y  $\phi \in C^{p,q}$ , entonces:

$$\begin{aligned} ([D, E] \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) &= [D, E] \cdot \phi(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, [D, E] \cdot x_k, \dots, x_p) \\ &= (DE) \cdot \phi(x_1, \dots, x_p) - (ED) \cdot \phi(x_1, \dots, x_p) \\ &\quad - \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, (DE) \cdot x_k, \dots, x_p) + \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, (ED) \cdot x_k, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} [D \cdot (E \cdot \phi)](x_1, \dots, x_p) &= D \cdot (E \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p (E \cdot \phi)(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, x_p) \\ &= D \cdot (E \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p D \cdot \phi(x_1, \dots, E \cdot x_k, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p E \cdot \phi(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{l=1}^p \sum_{k \neq l} \phi(x_1, \dots, E \cdot x_l, \dots, D \cdot x_k, \dots, x_p) + \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, E \cdot D \cdot x_k, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} [E \cdot (D \cdot \phi)](x_1, \dots, x_p) &= E \cdot (D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p (D \cdot \phi)(x_1, \dots, E \cdot x_k, \dots, x_p) \\ &= (E \cdot D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p E \cdot \phi(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, x_p) - \sum_{k=1}^p D \cdot \phi(x_1, \dots, E \cdot x_k, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{l=1}^p \sum_{k \neq l} \phi(x_1, \dots, D \cdot x_l, \dots, E \cdot x_k, \dots, x_p) + \sum_{k=1}^p \phi(x_1, \dots, D \cdot E \cdot x_k, \dots, x_p) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Luego, de las ecuaciones (5.13), (5.14) y (5.15) vemos que  $[D, E] \cdot \phi = D \cdot (E \cdot \phi) - E \cdot (D \cdot \phi)$ .  $\diamond$

La acción de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  definida en la expresión (5.12) también vale sobre  $C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$  cuando  $V$  es un  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo. Con respecto al producto interior  $\iota_x$  se tiene lo siguiente:

**Proposición 5.1.2.** Si  $V$  es un  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo entonces  $D \cdot \iota_z(\omega) - \iota_z(D \cdot \omega) = \iota_{D \cdot z}(\omega)$  para todo  $z \in \mathfrak{g}$ ,  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$  y  $\omega \in C^\bullet(\mathfrak{g}, V)$ .

*Demostración.* En efecto, notemos que:

$$\begin{aligned} [\iota_z(D \cdot \omega)](x_1, \dots, x_p) &= \iota_z(D \cdot \omega)(x_1, \dots, x_p) \\ &= D \cdot \omega(z, x_1, \dots, x_p) - \omega(D \cdot z, x_1, \dots, x_p) - \sum_{i=1}^p \omega(z, x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) \\ [D \cdot \iota_z(\omega)](x_1, \dots, x_p) &= D \cdot \iota_z(\omega)(x_1, \dots, x_p) - \sum_{i=1}^p \iota_z(\omega)(x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) \\ &= D \cdot \omega(z, x_1, \dots, x_p) - \sum_{i=1}^p \omega(z, x_1, \dots, D \cdot x_i, \dots, x_p) \end{aligned}$$

con lo cual  $D \cdot \iota_z(\omega) - \iota_z(D \cdot \omega) = \iota_{D \cdot z}(\omega)$  de manera inmediata.  $\diamond$

El resultado anterior naturalmente vale sobre los complejos  $C^{\bullet,q}$  y  $C^{\bullet,\bullet}$ . De la Proposición 5.1.1 vemos que  $D \cdot (\omega_p \otimes r_q) = D \cdot \omega_p \otimes r_q + \omega_p \otimes D \cdot r_q$  para todo  $\omega_p \otimes r_q \in C^{\bullet,\bullet}$  y  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Usando el producto asociativo (5.10) tenemos que  $C^{\bullet,\bullet}$  es una  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -súper-álgebra. Por lo tanto:

**Proposición 5.1.3.** Si  $\delta$  es el diferencial de Chevalley-Eilenberg sobre  $C^{\bullet,\bullet}$ , entonces  $\delta(D \cdot \phi) - D \cdot \delta(\phi) = 0$  para todo  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Luego, la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  es una  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -súper-álgebra con el producto copa.

*Demostración.* Sean  $\phi \in C^{p,\bullet}$  y  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ . Desarrollando  $\delta(D \cdot \phi)$  y  $D \cdot \delta(\phi)$ , notemos que:

$$\begin{aligned} \delta(D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_i \cdot (D \cdot \phi)(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} (D \cdot \phi)([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} x_i \cdot [D \cdot \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)] + \sum_{l=1}^p \sum_{k \neq i} (-1)^{i+2} x_i \cdot \phi(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} D \cdot \phi([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \phi(D \cdot [x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} \sum_{k \neq i, j} \phi([x_i, x_j], \dots, D \cdot x_k, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [D \cdot \delta(\phi)](x_1, \dots, x_p) &= \sum_{i=1}^p (-1)^{i+1} D \cdot [x_i \cdot \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p)] + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} D \cdot \phi([x_i, x_j], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{i \neq k} (-1)^{i+2} x_i \cdot \phi(x_1, \dots, D \cdot x_k, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) + \sum_{i=1}^p (-1)^{i+2} (D \cdot x_i) \cdot \phi(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{i < k} (-1)^{i+k+1} \phi([x_i, D \cdot x_k], \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{k=1}^p \sum_{j > k} (-1)^{k+j+1} \phi([D \cdot x_k, x_j], \dots, \hat{x}_k, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \sum_{k \neq i, j} \phi([x_i, x_j], \dots, D \cdot x_k, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Respetando el orden en cada uno de los sumandos de las expresiones anteriores vemos que  $\delta(D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p) = S + T + P + Q + R$  y  $[D \cdot \delta(\phi)](x_1, \dots, x_p) = S_1 + P + T + S_2 + Q_1 + Q_2 + R$ . Como  $[D, x_i] \cdot \omega = D \cdot (x_i \cdot \omega) - x_i \cdot (D \cdot \omega)$ , se sigue que  $S_2 = -S_1 + S$ , con lo cual:

$$\begin{aligned} [D \cdot \delta(\phi)](x_1, \dots, x_p) &= S_1 + P + T - S_1 + S + Q_1 + Q_2 + R \\ &= S + T + P + Q + R \\ &= \delta(D \cdot \phi)(x_1, \dots, x_p), \end{aligned}$$

Es decir,  $\delta(D \cdot \phi) - D \cdot \delta(\phi) = 0$  y  $H^{\bullet,\bullet}$  es un  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo. La conclusión final es debido que  $C^{\bullet,\bullet}$  es una  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -súper-álgebra cuyo producto (5.10) pasa al cociente como el producto copa sobre  $H^{\bullet,\bullet}$ .  $\diamond$

## 5.2. Dualidad de Poincaré y Operador de Hodge

En la presente sección recordamos el Teorema de la Dualidad de Poincaré, que nos ayudará en algunos cálculos de la acción central sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  (ver sec. 5.3). Como la demostración es técnica, la misma no será desarrollada y los detalles pueden encontrarse en [Kna88].

**Teorema 5.2.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión  $n$  y  $V$  un  $\mathfrak{g}$ -módulo. Para todo  $p \leq n$  existen isomorfismos de espacios vectoriales:

- (A)  $H^p(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_p(\mathfrak{g}, V)^*$ .
- (B)  $H^p(\mathfrak{g}, V) \cong H_{n-p}(\mathfrak{g}, V \otimes \wedge^n \mathfrak{g}^*)$ .
- (C)  $H^p(\mathfrak{g}, V^*) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, V \otimes \wedge^n \mathfrak{g}^*)$ .

*Demostración.* Ver [Kna88, pag. 288].  $\diamond$

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión  $n$ , aplicando (A) y (B) sobre  $V^*$  obtenemos los siguientes isomorfismos:

$$H^p(\mathfrak{g}, V) \cong H_p(\mathfrak{g}, V^*)^* \text{ y } H^p(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_{n-p}(\mathfrak{g}, V^* \otimes \wedge^n \mathfrak{g}^*).$$

Luego,  $H^p(\mathfrak{g}, V^*) \cong H_{n-p}(\mathfrak{g}, V^* \otimes (\wedge^n \mathfrak{g})^*) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, V \otimes \wedge^n \mathfrak{g})^*$  y obtenemos el ítem (C). Por ejemplo, cuando  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie **unimodular** (Def. 2.3.4) entonces  $\wedge^n \mathfrak{g} \cong \mathbb{C}$  como  $\mathfrak{g}$ -módulos y

$$H^p(\mathfrak{g}, V) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, V^*)^*. \quad (5.16)$$

**Definición 5.2.1.** Se dice que  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  satisface la dualidad de Poincaré si  $H^{n-p}(\mathfrak{g}, V) \cong H^p(\mathfrak{g}, V)$  para todo  $0 \leq p \leq n$ .

En el caso de  $\mathfrak{g}$  unimodular, usando 5.16 vemos que  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  no necesariamente satisface la dualidad de Poincaré. Para estas álgebras de Lie también obtenemos algunos isomorfismos sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \wedge^{\bullet} \mathfrak{g})$ . En efecto, tomando el  $\mathfrak{g}$ -módulo  $\wedge^q \mathfrak{g}$  con  $0 < q \leq n$  obtenemos que:

$$H^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}^*)^* \Rightarrow H^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}^*) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g})^* \quad (5.17)$$

Además, extendiendo linealmente el producto interior  $\iota_{\bullet}$  al álgebra  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{g}$  por  $\iota_{\omega}(\varphi) = \iota_{x_{i_q}} \dots \iota_{x_{i_1}}(\varphi)$  cuando  $\omega = x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_q} \in \wedge^q \mathfrak{g}$  y  $\varphi \in \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*$ , definimos  $\Lambda_q : \wedge^q \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*$  como  $\Lambda_q(\omega) = \iota_{\omega}(\vartheta)$  con  $\vartheta \in \wedge^n \mathfrak{g}^* \setminus \{0\}$  fijo. Primeramente, obtenemos el siguiente Lema:

**Lema 5.2.1.**  $\Lambda_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-1} \mathfrak{g}^*$  es un morfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos.

*Demostración.* En efecto, tomando  $x, y \in \mathfrak{g}$  notemos que:

$$\Lambda_1(x \cdot y) = \iota_{[x,y]}(\vartheta)^* \stackrel{*}{=} \theta_x \iota_y(\vartheta) - \iota_y \theta_x(\vartheta) \stackrel{**}{=} \theta_x \iota_y(\vartheta) = x \cdot \Lambda_1(y)$$

donde  $*$  vale por 5.9 y  $**$  vale puesto que  $x$  actúa trivialmente sobre  $\wedge^n \mathfrak{g}$ . Luego,  $\Lambda_1$  es un  $\mathfrak{g}$ -morfismo.  $\diamond$

Para  $\Lambda_2 : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-2} \mathfrak{g}^*$  el proceso es similar. En efecto, si  $x, y_1, y_2 \in \mathfrak{g}$  notemos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x \cdot (y_1 \wedge y_2)) &= \Lambda_2(x \cdot y_1 \wedge y_2) + \Lambda_2(y_1 \wedge x \cdot y_2) \\ &= \iota_{y_2} \iota_{x \cdot y_1}(\vartheta) + \iota_{x \cdot y_2} \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= \iota_{y_2}(\theta_x \iota_{y_1}(\vartheta) - \iota_{y_1} \theta_x(\vartheta)) + \theta_x \iota_{y_2} \iota_{y_1}(\vartheta) - \iota_{y_2} \theta_x \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= \iota_{y_2} \theta_x \iota_{y_1}(\vartheta) + \theta_x \iota_{y_2} \iota_{y_1}(\vartheta) - \iota_{y_2} \iota_{y_1} \theta_x(\vartheta) - \iota_{y_2} \theta_x \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= \theta_x \iota_{y_2} \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= x \cdot \Lambda_2(y_1 \wedge y_2) \end{aligned}$$

por lo que  $\Lambda_2$  también es un  $\mathfrak{g}$ -morfismo. En forma general extendemos lo anterior mencionado a la siguiente Proposición:

**Proposición 5.2.1.** Para todo  $q \geq 1$ ,  $\Lambda_q : \wedge^q \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*$  es un morfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos que se extiende a un morfismo de complejos de cocadenas  $\Lambda_q^{\bullet} : C^{\bullet}(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \rightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{g}, \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*)$  mediante  $\Lambda_q^p(\omega)(x_1, \dots, x_p) = \Lambda_q(\omega(x_1, \dots, x_p))$ .

*Demostración.* Veamos la primera parte. Sean  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $y_1 \wedge \dots \wedge y_q \in \wedge^q \mathfrak{g}$  y usando la tercera relación de (5.9) notemos que:

$$\begin{aligned} \Lambda_q(x \cdot (y_1 \wedge \dots \wedge y_q)) &= \sum_{k=1}^q \Lambda_q(y_1 \wedge \dots \wedge x \cdot y_k \wedge \dots \wedge y_q) \\ &= \sum_{k=1}^q \iota_{y_q} \dots \iota_{x \cdot y_k} \dots \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= \sum_{k=1}^q \iota_{y_q} \dots \theta_x \iota_{y_k} \dots \iota_{y_1}(\vartheta) - \sum_{k=1}^q \iota_{y_q} \dots \iota_{y_k} \theta_x \dots \iota_{y_1}(\vartheta) \end{aligned}$$

No es difícil ver que todos los primeros  $q - 1$  términos de la primera sumatoria se simplifican con los últimos  $q - 1$  términos de la segunda sumatoria, quedando así:

$$\begin{aligned}\Lambda_q(x \cdot (y_1 \wedge \cdots \wedge y_q)) &= \theta_x \iota_{y_q} \cdots \iota_{y_1}(\vartheta) - \iota_{y_q} \cdots \iota_{y_1} \theta_x(\vartheta) \\ &= \theta_x \iota_{y_q} \cdots \iota_{y_1}(\vartheta) \\ &= x \cdot \Lambda_q(y_1 \wedge \cdots \wedge y_q)\end{aligned}$$

con lo cual  $\Lambda_q$  es un  $\mathfrak{g}$ -morfismo. Para la segunda parte, notemos que para todo  $p \geq 0$ :

$$\begin{aligned}\Lambda_q^{p+1}(\delta_p(\omega))(x_1, \dots, x_{p+1}) &= \Lambda_q(\delta_p(\omega)(x_1, \dots, x_{p+1})) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \Lambda_q(x_i \cdot \omega(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Lambda_q(\omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \Lambda_q(\omega(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Lambda_q(\omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \Lambda_q^p(\omega)(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Lambda_q^p(\omega)([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \delta_p(\Lambda_q^p(\omega))(x_1, \dots, x_{p+1})\end{aligned}$$

Es decir,  $\Lambda_q \circ \delta = \delta \circ \Lambda_q$  y  $\Lambda_q^\bullet$  es un morfismo de complejos.  $\diamond$

Por la Proposición anterior,  $\Lambda_q$  induce un morfismo en la cohomología  $\Lambda_q^\bullet : H^\bullet(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*)$  y como  $\Lambda_q$  también es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos, concluimos que:

$$H^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \cong H^p(\mathfrak{g}, \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*) \quad (5.18)$$

**Observación 5.2.1.** Si  $\mathfrak{g}$  es unimodular de dimensión  $n$ , de (5.17) y (5.18) se sigue que  $H^{p,q}(\mathfrak{g}) \cong H^{n-p, n-q}(\mathfrak{g})$ .

Si  $\mathfrak{D} \subset \text{Der}(\mathfrak{g})$  son las derivaciones que actúan trivialmente sobre  $\wedge^n \mathfrak{g}$  generalizamos los resultados anteriores como:

**Lema 5.2.2.** El morfismo  $\Lambda_1 : \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-1} \mathfrak{g}^*$  dado por  $x \mapsto \iota_x(\vartheta)$  es de  $\mathfrak{D}$ -módulos.

*Demostración.* Similar al Lema 5.2.1 y usando la Prop. 5.1.2, puesto que  $D \cdot \vartheta = 0$  para todo  $D \in \mathfrak{D}$ .  $\diamond$

**Proposición 5.2.2.** El morfismo  $\Lambda_q : \wedge^q \mathfrak{g} \rightarrow \wedge^{n-q} \mathfrak{g}^*$  dado por  $x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \mapsto \iota_{x_q} \cdots \iota_{x_1}(\vartheta)$  es de  $\mathfrak{D}$ -módulos.

*Demostración.* Similar a la Prop. 5.2.1 y usando la Prop. 5.1.2.  $\diamond$

Veamos ahora que el isomorfismo  $H^p(\mathfrak{g}) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g})$  es inducido por el operador de Hodge (ver [CJ03]). Para esta parte vamos a considerar que  $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n}$  es una base ordenada de  $\mathfrak{g}$  con respectiva base dual  $\{x^i\}_{1 \leq i \leq n}$ .

**Definición 5.2.2.** El *operador de Hodge*  $\star : \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^\bullet \mathfrak{g}^*$  es la única transformación lineal definida sobre los monomios como:

$$\star(x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_p}) = (-1)^{\text{Sgn}(i_1 \dots i_p k_1 \dots k_{n-p})} \cdot x^{k_1} \wedge \cdots \wedge x^{k_{n-p}}$$

donde  $\text{Sgn}(r_1 \dots r_n)$  es el signo de la permutación  $\sigma \in \mathbb{S}_n$  que mapea  $l$  en  $r_l$  respectivamente.

Notar que, dado  $a = x^{i_1} \wedge \cdots \wedge x^{i_p} \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$ ,  $\star a$  es el único monomio en  $\wedge^{n-p} \mathfrak{g}^*$  tal que  $a \wedge \star a = x^1 \wedge \cdots \wedge x^n$  y  $\star \star a = (-1)^{p(n-p)} a$ . Además,  $\star$  es inyectiva y cada restricción  $\star : \wedge^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{n-p} \mathfrak{g}^*$  es un isomorfismo de espacios vectoriales. Sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle_\star : \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \otimes \wedge^\bullet \mathfrak{g}^* \rightarrow \mathbb{C}$  la aplicación bilinear tal que para los monomios  $a \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$  y  $b \in \wedge^q \mathfrak{g}^*$ , es igual a

$$\langle a, b \rangle_\star = \begin{cases} \star(a \wedge \star b) & p = q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

Como  $\langle \alpha, \beta \rangle_{\star} = \star(x^1 \wedge \cdots \wedge x^n) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ , resulta que  $\langle, \rangle_{\star}$  ortogonaliza a los espacios  $\wedge^p \mathfrak{g}^*$  y  $\langle, \rangle_{\star}$  es no degenerada.

Sea  $\delta_t : \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$  el diferencial de Chevalley-Eilenberg sobre el complejo  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$  y sea  $\partial_t : \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$  el adjunto de  $\delta_t$  relativo a  $\langle, \rangle_{\star}$ . Entonces la aplicación  $\gamma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por  $\gamma(x) = \text{Tr}(\text{ad}x)$ ,  $\forall x \in \mathfrak{g}$  es un cociclo y la restricción de  $\delta_t$  a  $\wedge^{n-1} \mathfrak{g}^*$  es la multiplicación a izquierda por  $\gamma$  [Ame13, Lema 2.3.3]. Como  $\mathfrak{g}$  es unimodular, obtenemos que  $\gamma = 0$  y vale el siguiente Lema:

**Lema 5.2.3.** El operador adjunto  $\partial_t$  está dada por  $\partial_t = (-1)^{n(p+1)+1} \star \delta_t \star$ .

*Demostración.* Sean  $\alpha \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$  y  $\beta \in \wedge^{p+1} \mathfrak{g}^*$ , luego  $\alpha \wedge \star \beta \in \wedge^{n-1} \mathfrak{g}^*$  y  $\delta_t(\alpha \wedge \star \beta) = 0$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \langle \alpha, (-1)^{n(p+2)+1} \star \delta_t \star \beta \rangle_{\star} &= (-1)^{n(p+2)+1} \star (\alpha \wedge \star \star \delta_t \star \beta) \\ &= (-1)^{n(p+2)+1+p(n-p)} \star (\alpha \wedge \delta_t \star \beta) \\ &= (-1)^{(p+1)} \star (\alpha \wedge \delta_t \star \beta) \\ &= \star (\delta_t \alpha \wedge \star \beta) \\ &= \langle \delta_t \alpha, \beta \rangle_{\star} \end{aligned}$$

Luego por unicidad de la adjunta, se sigue el resultado.  $\diamond$

Se define el operador Laplaciano  $\Delta_t : \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$  por  $\Delta_t = \delta_t \partial_t + \partial_t \delta_t$  y los elementos de  $\text{Ker} \Delta_t$  son usualmente llamados formas armónicas de  $\mathfrak{g}$ . Tenemos así el siguiente Teorema [Ame13]:

**Teorema 5.3.** (Descomposición de Hodge) Se satisface las siguientes propiedades:

- (1) El Laplaciano  $\Delta_t$  es un operador autoadjunto.
- (2) La descomposición  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* = \text{Ker} \Delta_t \oplus \text{Im} \Delta_t$  es ortogonal.
- (3)  $\text{Ker} \Delta_t = \text{Ker} \delta_t \cap \text{Ker} \partial_t$ .
- (4) La descomposición  $\text{Ker} \delta_t = \text{Ker} \Delta_t \oplus \text{Im} \delta_t$  es ortogonal.
- (5) Existe un isomorfismo de espacios vectoriales  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}) \cong \text{Ker} \Delta_t$ .

*Demostración.* Veamos (1). Tomemos  $\mu, \lambda \in \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$ , entonces:

$$\begin{aligned} \langle \Delta_t \lambda, \mu \rangle_{\star} &= \langle \delta_t \partial_t \lambda, \mu \rangle_{\star} + \langle \partial_t \delta_t \lambda, \mu \rangle_{\star} \\ &= \langle \lambda, \partial_t \delta_t \mu \rangle_{\star} + \langle \lambda, \delta_t \partial_t \mu \rangle_{\star} \\ &= \langle \lambda, \Delta_t \mu \rangle_{\star} \end{aligned}$$

por lo que  $\Delta_t$  es autoadjunto. Para (2), sabemos que si  $T$  es cualquier operador lineal, entonces  $\text{Ker} T = (\text{Im} \bar{T})^{\perp}$  donde  $\bar{T}$  denota al adjunto de  $T$  con respecto a  $\langle, \rangle_{\star}$ . Como  $\Delta_t$  es autoadjunto,  $\text{Ker} \Delta_t = (\text{Im} \Delta_t)^{\perp}$  y por lo tanto la descomposición  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^* = \text{Ker} \Delta_t \oplus \text{Im} \Delta_t$  es ortogonal. Por otro lado, para  $\lambda \in \text{Ker} \Delta_t$  notemos que:

$$0 = \langle \Delta_t \lambda, \lambda \rangle_{\star} = \langle \partial_t \lambda, \partial_t \lambda \rangle_{\star} + \langle \delta_t \lambda, \delta_t \lambda \rangle_{\star}$$

y como  $\langle, \rangle_{\star}$  es definida positiva, obtenemos  $\delta_t \lambda = \partial_t \lambda = 0$  y  $\text{Ker} \Delta_t \subset \text{Ker} \delta_t \cap \text{Ker} \partial_t$ . La otra inclusión es obvia y por lo tanto (3) queda probado. Para (4), notemos que  $\text{Ker} \partial_t = (\text{Im} \delta_t)^{\perp}$  y  $\text{Im} \Delta_t = \text{Im} \partial_t \oplus \text{Im} \delta_t$ . Usando los ítems (2) y (3), se concluye que  $\text{Ker} \delta_t \subset \text{Ker} \Delta_t \oplus \text{Im} \delta_t$ . Como cada sumando está contenido en  $\text{Ker} \delta_t$ , la otra inclusión es inmediata y se sigue la igualdad. Finalmente para (5), como  $\text{Ker} \delta_t = \text{Ker} \Delta_t \oplus \text{Im} \delta_t$ , se sigue que  $\text{Ker} \delta_t / \text{Im} \delta_t \cong \text{Ker} \Delta_t$ .  $\diamond$

Por el Teorema 5.3 cualquier clase de cohomología de  $\mathfrak{g}$  admite un único representante armónico y  $H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  puede ser vista como el espacio de las formas armónicas sobre  $\mathfrak{g}$ . Además:

**Lema 5.2.4.** Si  $\mathfrak{g}$  es unimodular, entonces  $\star\omega \in \text{Ker } \Delta_t$  para todo  $\omega \in \text{Ker } \Delta_t$ . Más aún,  $\text{Ker } \Delta_t = Z^\bullet(\mathfrak{g}) \cap \star Z^\bullet(\mathfrak{g})$ . *Demostración.* Para la primera parte, si  $\omega \in \text{Ker } \Delta_t = \text{Ker } \delta_t \cap \text{Ker } \partial_t$  entonces  $\partial_t(\star\omega) = \pm \star \delta_t \omega = 0$  y  $\partial_t(\omega) = \pm \star \delta_t(\star\omega) = 0$ , por lo que  $\delta_t(\star\omega) = 0$ . Es decir,  $\star\omega \in \text{Ker } \Delta_t$ .

De este modo, como  $0 = \partial_t \omega = \pm \star \delta_t(\star\omega)$  para todo  $\omega \in \text{Ker } \Delta_t$ , tenemos que  $\star\omega \in Z^\bullet(\mathfrak{g})$ , con lo cual  $\text{Ker } \Delta_t \subset Z^\bullet(\mathfrak{g}) \cap \star Z^\bullet(\mathfrak{g})$ . Para la otra inclusión, si  $\omega \in Z^\bullet(\mathfrak{g})$  es tal que  $\star\omega \in Z^\bullet(\mathfrak{g})$ , aplicando la definición de  $\Delta_t$  obtenemos que  $\Delta_t(\omega) = \delta_t \partial_t(\omega) = \pm \delta_t \star(\delta_t(\star\omega)) = \pm \delta_t \star(0) = 0$ .  $\diamond$

Esto muestra que  $\star : \wedge^p \mathfrak{g}^* \rightarrow \wedge^{n-p} \mathfrak{g}^*$  lleva  $p$ -formas de  $\text{Ker } \Delta_t$  a  $(n-p)$ -formas de  $\text{Ker } \Delta_t$ . Además, la restricción  $\star : \text{Ker } \Delta_t \rightarrow \text{Ker } \Delta_t$  es sobreyectiva e inyectiva, es decir un isomorfismo lineal. Queda probado así el siguiente Teorema:

**Teorema 5.4.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie unimodular de dimensión finita  $n$  y  $0 \leq p \leq n$  entonces existe un isomorfismo de espacios vectoriales  $H^p(\mathfrak{g}) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g})$  inducido por el mapa de Hodge  $\star$ .

Ahora, si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie **cuadrática** con forma bilineal no degenerada  $B$ , entonces  $B$  induce un isomorfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  vía la asignación  $x \mapsto B(x, -)$  (Sec. 2.6).

**Proposición 5.2.3.** El isomorfismo  $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}^*$  se extiende a un morfismo de complejos de cocadenas  $\phi^\bullet : C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow C^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$  mediante  $\phi^p(\omega)(x_1, \dots, x_p) = \phi(\omega(x_1, \dots, x_p))$  que también es un morfismo de  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulos.

*Demostración.* En efecto, por un lado notemos que para todo  $p \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \phi^{p+1}(\delta_p(\omega))(x_1, \dots, x_{p+1}) &= \phi(\delta_p(\omega)(x_1, \dots, x_{p+1})) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \phi(x_i \cdot \omega(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \phi(\omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \phi(\omega(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1})) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \phi(\omega([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p)) \\ &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \phi^p(\omega)(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_{p+1}) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \phi^p(\omega)([x_i, x_j], x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_p) \\ &= \delta_p(\phi^p(\omega))(x_1, \dots, x_{p+1}) \end{aligned}$$

Es decir,  $\phi^\bullet \circ \delta = \delta \circ \phi^\bullet$ . La demostración que  $\phi^\bullet$  es un  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -morfismo se sigue del Lema 2.6.1 y la Proposición 2.6.1.  $\diamond$

En particular, cada  $\phi^p$  es un isomorfismo de  $\mathfrak{g}$ -módulos dado que las derivaciones antisimétricas  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$  contiene a las derivaciones interiores. Como  $\phi^\bullet$  es un morfismo de complejos, este preservar cociclos y cobordes, por lo que  $\phi^\bullet$  induce un morfismo  $\hat{\phi}^\bullet : H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \rightarrow H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*)$  donde  $\hat{\phi}^\bullet = H(\phi^\bullet)$ . Luego, para todo  $0 \leq p \leq n$  obtenemos los siguientes isomorfismos de espacios vectoriales:

$$H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \cong H^p(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^*) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})^* \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}). \quad (5.19)$$

Más aún, dado que  $\wedge^q \mathfrak{g} \cong \wedge^q \mathfrak{g}^*$ ,  $\forall 1 \leq q \leq n$  como  $\text{Der}_a(\mathfrak{g})$ -módulo (Prop. 2.6.2), aplicando los isomorfismos obtenidos en (5.17, 5.18) con  $p$  y  $n-p$  obtenemos los isomorfismos de espacios vectoriales:

$$H^p(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \wedge^q \mathfrak{g}) \cong H^p(\mathfrak{g}, \wedge^{n-q} \mathfrak{g}) \cong H^{n-p}(\mathfrak{g}, \wedge^{n-q} \mathfrak{g}), \quad (5.20)$$

**Observación 5.2.2.** Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie unimodular y cuadrática de dimensión  $n$ , entonces existen isomorfismos de espacios vectoriales  $H^{p,q} \cong H^{n-p,q} \cong H^{p,n-q} \cong H^{n-p,n-q}$  para todo  $0 \leq p, q \leq n$ .

### 5.3. Acción Central

Una representación de un álgebra asociativa  $\mathfrak{A}$  es un morfismo de álgebras asociativas  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}(W)$  con  $W$  un espacio vectorial. Se dice que  $\rho$  es fiel si  $\rho$  es inyectiva y un subespacio  $U \subset W$  es  $\rho$ -estable si  $\rho(a)(U) \subset U$  para todo  $a \in \mathfrak{A}$ . Luego,  $\rho|_U : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}(U)$  es una subrepresentación de  $\rho : \mathfrak{A} \rightarrow \text{End}(W)$ .

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie y  $V$  es un  $\mathfrak{g}$ -módulo de dimensión finita, de la eq. 5.9 vimos que  $(\delta, \theta_\bullet, \iota_\bullet)$  satisfacen  $\delta\iota_z + \iota_z\delta = \theta_z, \forall z \in \mathfrak{g}$ . Como la asignación  $z \mapsto \iota_z$  es lineal y  $\iota_z\iota_y = -\iota_y\iota_z$ , existe una representación de álgebras asociativas  $\wedge^{\bullet}\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}C^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  extendiendo linealmente  $\iota_{z_1 \wedge \dots \wedge z_l} = \iota_{z_1} \dots \iota_{z_l}$  para  $C^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ .

Notemos que si el centro  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{g}$  actúa trivialmente sobre  $V$ , entonces  $\delta\iota_z + \iota_z\delta = 0, \forall z \in \mathfrak{z}$  y la acción de  $\mathfrak{z}$  pasa a la cohomología  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ . Denotemos por  $\iota : \wedge^{\bullet}\mathfrak{z} \rightarrow C^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  a la representación restringida a  $\wedge^{\bullet}\mathfrak{z}$  y observemos que  $\delta\iota_\zeta = (-1)^l \iota_\zeta\delta, \forall \zeta = z_1 \wedge \dots \wedge z_l \in \wedge^{\bullet}\mathfrak{z}$ . Es decir, la representación inducida en la cohomología  $\check{\iota} : \wedge^{\bullet}\mathfrak{z} \rightarrow \text{End}H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  torna a  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  un  $\wedge^{\bullet}\mathfrak{z}$ -módulo a través de:

$$\zeta \cdot \omega = \check{\iota}_\zeta(\omega), \forall \zeta \in \wedge^{\bullet}\mathfrak{z}, \omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V).$$

**Definición 5.3.1.** Se define la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  a la aplicación  $\check{\iota} : \wedge^{\bullet}\mathfrak{z} \rightarrow \text{End}H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ . Cada  $\check{\iota}_z$  con  $z \in \mathfrak{z}$  se denomina operación primaria sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ .

La representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  para diferentes familias de álgebras de Lie nilpotentes fueron estudiadas por Grant Cairns, Barry Jessup y Nikolayevsky en [CJ08, CJ03, CJN20]. En [CJ03] se conjetura lo siguiente:

**Conjetura 5.3.1.** La acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g})$  es no trivial para toda álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita.

Por ejemplo, tal conjetura es cierta para las álgebras de Lie  $\mathfrak{f}_{3,2} \oplus \mathbb{C}^k$ , el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_m$  [CJ03], el álgebra de Lie 2-pasos nilpotentes libre en  $k$  generadores [Ame13] y las álgebras de Lie nilpotentes con ideal abeliano de codimensión 1 junto con sus extensiones centrales 1-dimensionales [CJ03].

El siguiente cuadro, construido a partir de la clasificación de Grunewald [Gru88], muestra que la acción central sobre  $H^{\bullet,0}$  y  $H^{\bullet,1}$  es no trivial para las álgebras de Lie nilpotentes de dimensión  $\leq 5$  no abelianas. Mas aún, la representación central sobre  $H^{\bullet,1}$  también es fiel (ver 5.3.2).

alg. Lie	$\dim \mathfrak{z}$	$\dim H^{\bullet,0}$	rep. central fiel	$\dim H^{\bullet,1}$	rep. central fiel
$\mathfrak{g}_3 \cong \mathfrak{h}_1$	1	1, 2, 2, 1	✓	1, 4, 5, 2	✓
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}$	2	1, 3, 4, 3, 1	✓	2, 8, 13, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_4^1$	1	1, 2, 2, 2, 1	✓	1, 4, 6, 5, 2	✓
$\mathfrak{g}_4^1 \oplus \mathbb{C}$	2	1, 3, 4, 4, 3, 1	✓	2, 8, 14, 15, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}^2$	3	1, 4, 7, 7, 4, 1	✓	3, 14, 28, 30, 17, 9	✓
$\mathfrak{g}_5^1 \cong \mathfrak{h}_2$	1	1, 4, 5, 5, 4, 1	✓	1, 11, 20, 21, 15, 4	✓
$\mathfrak{g}_5^2$	2	1, 3, 6, 6, 3, 1	✓	2, 10, 19, 20, 12, 3	✓
$\mathfrak{g}_5^3$	1	1, 3, 4, 4, 3, 1	✓	1, 6, 13, 15, 10, 3	✓
$\mathfrak{g}_5^4 \cong \mathfrak{f}_{3,2}$	2	1, 2, 3, 3, 2, 1	×	2, 7, 9, 9, 7, 2	✓
$\mathfrak{g}_5^5$	1	1, 2, 3, 3, 2, 1	✓	1, 5, 8, 8, 6, 2	✓
$\mathfrak{g}_5^6$	1	1, 2, 3, 3, 2, 1	✓	1, 4, 7, 8, 6, 2	✓

Usando los corchetes definidos en [Gru88] para cada una de las álgebras de Lie anteriores, obtenemos las siguientes  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie no abelianas.

$\mathfrak{gl}(2)$ -Lie	Desc. $\mathfrak{g}$	Desc. $\mathfrak{z}$	Corchetes
$\mathfrak{g}_3 \cong \mathfrak{h}_1$	$V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)}$	$V_{(0,2)}$	$[x_1, x_{-1}] = h_0$
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}$	$V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)} \oplus V_{(0,1)}$	$V_{(0,2)} \oplus V_{(0,1)}$	$[x_1, x_{-1}] = h_0$
$\mathfrak{g}_3 \oplus \mathbb{C}^2$	$V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)} \oplus V_{(1,1)}$	$V_{(0,2)} \oplus V_{(1,1)}$	$[x_1, x_{-1}] = h_0$
$\mathfrak{g}_5^1 \cong \mathfrak{h}_2$	$V_{(3,1)} \oplus V_{(0,2)}$	$V_{(0,2)}$	$[x_3, x_{-3}] = [x_1, x_{-1}] = h_0$
$\mathfrak{g}_5^2$	$V_{(0,1)} \oplus V_{(1,1)} \oplus V_{(1,2)}$	$V_{(1,2)}$	$[z_0, x_1] = y_1, [z_0, x_{-1}] = y_{-1}$
$\mathfrak{g}_5^4 \cong \mathfrak{f}_{3,2}$	$V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)} \oplus V_{(1,3)}$	$V_{(1,3)}$	$[e_1, e_{-1}] = f_0, [e_1, f_0] = y_1, [e_{-1}, f_0] = y_{-1}$

En estos casos, se puede aprovechar la estructura de  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie junto con la Dualidad de Poincaré para construir los respectivos diagramas de cohomología sobre cada  $H^{\bullet,q}$ . Para estas descripciones utilizamos la notación  $V_{(m,k)}^{p,q}$  para referirnos a una  $\mathfrak{gl}(2)$ -componente irreducible de  $H^{p,q}$  de peso  $(m,k)$ . Una flecha  $V_{(m,k)}^{p,q} \rightarrow V_{(\bar{m},\bar{k})}^{p-1,q}$  entre dos módulos indica la acción del centro sobre la componente  $V_{(m,k)}^{p,q}$  respectivamente.

Los cálculos explícitos para la representación central sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  con  $\mathfrak{h}_1$  y  $\mathfrak{f}_{3,2}$  son desarrollados en los Capítulos 6 y 7. La acción central sobre  $H^{\bullet,0}$  y  $H^{\bullet,1}$  para algunos casos  $\mathfrak{h}_1 \oplus \mathbb{C}^k$  y  $\mathfrak{f}_{3,2} \oplus \mathbb{C}^k$  se puede ver en el Apéndice A. Podemos extender la conjetura 5.3.1 para todo  $H^{\bullet,\bullet}$  del siguiente modo:

**Conjetura 5.3.2.** *La acción central sobre  $H^{\bullet,q}$  es no trivial, en cada  $0 \leq q \leq \dim \mathfrak{g}$ , para toda álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  de dimensión finita.*

La hipótesis de nilpotencia sobre  $\mathfrak{g}$  es necesaria. Por ejemplo, en el álgebra de diamante  $\mathfrak{D}_4$  (que es un álgebra soluble y cuadrática) se tiene que  $H^{\bullet,2} = 0$  y la acción central en este caso es trivial (ver el Apéndice A).

### 5.3.1. Entrelazamiento

Por la Proposición 5.1.2, si  $z \in \mathfrak{z}$  y  $\omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  vemos que  $D \cdot \check{\iota}_z(\omega) - \check{\iota}_z(D \cdot \omega) = \check{\iota}_{D \cdot z}(\omega)$ . Por abuso de notación escribimos  $D \cdot (z \cdot \omega) - z \cdot (D \cdot \omega) = (D \cdot z) \cdot \omega$  y decimos que las acciones de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  y  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  se entrelazan. Si  $\mathfrak{z}$  es el álgebra de Lie definida por  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{z}$ , entonces el producto semidirecto  $\text{Der}(\mathfrak{g}) \ltimes \mathfrak{z}$  con corchete:

$$[(D_1, \zeta_1), (D_2, \zeta_2)]_{\ltimes} = ([D_1, D_2], [\zeta_1, \zeta_2] + D_1 \cdot \zeta_2 - D_2 \cdot \zeta_1) \quad (5.21)$$

tiene una representación sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  puesto que:

$$\rho(D \cdot \zeta) = [\tilde{\rho}(D), \rho(\zeta)], \quad \forall D \in \text{Der} \mathfrak{g}, \zeta \in \mathfrak{z}$$

donde  $\tilde{\rho} : \text{Der}(\mathfrak{g}) \rightarrow \text{End} H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  y  $\rho : \mathfrak{z} \rightarrow \text{End} H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  son las respectivas representaciones de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$  y  $\mathfrak{z}$  sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ . Por el entrelazamiento de las acciones  $\rho : \wedge^{\bullet} \mathfrak{z} \rightarrow \text{End} H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$  es un morfismo de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo. En efecto, para todo  $D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ ,  $z \in \mathfrak{z}$  y  $\omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V)$ :

$$\begin{aligned} \rho(D \cdot z)(\omega) &= (D \cdot z) \cdot \omega = D \cdot (z \cdot \omega) - z \cdot (D \cdot \omega) \\ &= D \cdot (\rho(z)(\omega)) - \rho(z)(D \cdot \omega) = [D \cdot \rho(z)](\omega) \end{aligned}$$

Luego,  $\varphi : \mathfrak{z} \otimes H^{\bullet}(\mathfrak{g}, V) \rightarrow H^{\bullet-1}(\mathfrak{g}, V)$  dada por  $z \otimes \omega \mapsto \rho(z)(\omega)$  también  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -morfismo puesto que  $\varphi(D \cdot (z \otimes \omega)) = \rho(D \cdot z)(\omega) + \rho(z)(D \cdot \omega) = D \cdot \varphi(z \otimes \omega)$ . En particular, si  $\mathfrak{gl}(2) \subset \text{Der}(\mathfrak{g})$  y  $\mathfrak{z} = V_{(m,s)}$  actúa no trivialmente sobre  $V_{(k,l)}^{p,q} \subset H^{p,q}$ , entonces:

$$V_{(m,s)} \otimes V_{(k,l)}^{p,q} \xrightarrow{\varphi} V_{(m+k,s+l)}^{p-1,q} \oplus V_{(m+k-2,s+l)}^{p-1,q} \oplus V_{(|m-k|,s+l)}^{p-1,q}$$

y algunos de los  $\mathfrak{gl}(2)$ -irreducibles del lado derecho deben aparecer en la descomposición de  $H^{p-1,q}$ . Más aún, si  $\omega_{k,l}^{p,q}$  es un vector de peso máximo en  $V_{(k,l)}^{p,q}$  y  $z_{m,s}$  es un vector de peso máximo en  $\mathfrak{z}$  tal que  $z_{m,s} \cdot \omega_{k,l}^{p,q} \neq 0$ ,

entonces  $z_{m,s} \cdot \omega_{k,l}^{p,q}$  es un vector de peso máximo  $m+k$  en  $H^{p-1,q}$ .

### 5.3.2. Acción central fiel

La acción central está vinculada con la conjetura del Rango Toral [CJ08, CJ03]. En efecto, toda álgebra de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}$  con representación central fiel sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g})$  satisfacen la CRT.

Algunas álgebras de Lie con representación central fiel sobre la cohomología trivial son:

- \* El álgebra de Lie abeliana  $\mathbb{C}^n$  de dimensión  $n$ .
- \* El álgebra de Lie filiforme  $\mathfrak{f}_4$  de dimensión 4.
- \* El álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_m$  de dimensión  $2m+1$ .

En [CJ08] se muestra que la representación central sobre  $H^{\bullet,0}$  para toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotentes libre con mas de dos generadores no es fiel, sin embargo esta familia si satisface la CRT. Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie con centro  $\mathfrak{z}$  y tomamos el  $\mathfrak{g}$ -módulo  $V = \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{g}$ , entonces el Teorema 3.1.8 de [Ame13, Teorema 3.1.8] (ó bien [CJ03, Lema 4.1]) se generaliza para la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  con  $q \geq 1$ , cuyo enunciado es el siguiente:

**Teorema 5.5.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita con centro  $\mathfrak{z}$  y sea  $\vartheta \in \bigwedge^{\dim \mathfrak{z}} \mathfrak{z} \setminus \{0\}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. La representación central  $\check{\iota} : \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z} \rightarrow \text{End} H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  es fiel.
2. Existe  $\omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  tal que  $\check{\iota}_{\vartheta} \omega \neq 0$ .
3.  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  contiene un  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$ -submódulo libre.

*Demostración.* (2)  $\Rightarrow$  (1) Sea  $\rho \in \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  no nulo, entonces  $\rho \wedge \star \rho$  es un elemento no nulo en  $\bigwedge^{\dim \mathfrak{z}} \mathfrak{z}$  por lo que existe  $k \in \mathbb{C}^{\times}$  tal que  $\rho \wedge \star \rho = k\vartheta$ . Luego,

$$0 \neq k\check{\iota}_{\vartheta} \omega = \check{\iota}_{k\vartheta} \omega = \check{\iota}_{\rho \wedge \star \rho} \omega = \check{\iota}_{\rho} \check{\iota}_{\star \rho} \omega = -\check{\iota}_{\star \rho} \check{\iota}_{\rho} \omega$$

y en particular,  $\check{\iota}_{\rho} \omega \neq 0$  y por lo tanto  $\check{\iota}_{\rho} \neq 0$ . Es decir  $\check{\iota}$  es inyectiva.

(1)  $\Rightarrow$  (3) Supongamos que  $\check{\iota}$  es inyectiva, entonces  $\check{\iota}_{\vartheta} \neq 0$  y por lo tanto debe existir  $\omega \in H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  no nulo tal que  $\check{\iota}_{\vartheta} \omega \neq 0$ . Usando el mismo argumento anterior, para cualquier elemento no nulo  $\rho \in \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  vale que  $\check{\iota}_{\star \rho} \check{\iota}_{\rho} \omega \neq 0$  y por consiguiente  $\check{\iota}_{\rho} \omega \neq 0$ . Así, el morfismo lineal  $K_{\omega} : \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z} \rightarrow H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  dado por  $\rho \mapsto \rho \cdot \omega = \check{\iota}_{\rho} \omega$  es inyectivo y la órbita de  $\omega$  bajo la acción de  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  es un  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$ -submódulo libre de  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$ .

(3)  $\Rightarrow$  (2) Supongamos que  $M \subset H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  es un  $\bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z}$ -submódulo libre con base  $\{\omega_i\}$  y supongamos que  $\check{\iota}_{\vartheta} \omega = 0$  para todo  $\omega \in M$ . En particular sobre cada  $\omega_i$  tenemos que  $\vartheta \cdot \omega_i = 0$  y por consiguiente  $\sum_i \vartheta \cdot \omega_i = 0$  que es una combinación lineal nula con  $\vartheta \neq 0$ . Esto contradice que  $\{\omega_i\}$  es una base de  $M$  y por lo tanto debe existir  $\omega_i$  tal que  $\check{\iota}_{\vartheta} \omega_i \neq 0$ .  $\diamond$

Por lo tanto, para mostrar que la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \bigwedge^q \mathfrak{g})$  es fiel, fijando una base  $\{z_1, \dots, z_m\}$  de  $\mathfrak{z}$  basta encontrar algún representante de cohomología  $\omega \in H^{\bullet,q}$  tal que la sucesión de operaciones primarias  $\check{\iota}_{z_1 \wedge \dots \wedge z_m} = \check{\iota}_{z_1} \dots \check{\iota}_{z_m}$  es no nula sobre  $\omega$ . En otras palabras,  $\check{\iota}_{\vartheta} \omega \neq 0$  para cualquier  $\vartheta \in \bigwedge^{\bullet} \mathfrak{z} \setminus \{0\}$ .

**Proposición 5.3.1.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión  $n$  tal que  $\mathfrak{gl}(2) \subset \text{Der}_e(\mathfrak{g})$  y cuya identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa sobre  $\mathfrak{g}$  por escalar. Entonces la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  es no trivial.

*Demostración.* Como  $\mathfrak{g}$  es un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo, existe una descomposición en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles:

$$\mathfrak{g} = V_{(n_1, k_1)} \oplus \dots \oplus V_{(n_s, k_s)}$$

con cada  $V_{(n_i, k_i)}$  un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible de peso máximo  $n_i$  tal que la identidad la identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa con peso  $k_i$ . Supongamos que  $\mathfrak{z} = V_{(n_1, k_1)} \oplus \dots \oplus V_{(n_s, k_s)}$  es el centro de  $\mathfrak{g}$ , que se corresponde con  $H^0(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ .

Sea  $\{v_j^{n_i}\}_{j=0}^{n_i}$  una base de peso de  $V_{(n_i, k_i)}$  tal que  $v_0^{n_i}$  es el vector de peso máximo y  $f \cdot v_j^{n_i} = v_{j+1}^{n_i}$  para todo  $0 \leq j < n_i$ . Sea  $\{\phi_j^{n_i}\}_{j=0}^{n_i}$  la base de  $V_{(n_i, k_i)}^*$  tal que  $\phi_0^{n_i}$  es el vector de peso máximo y  $f \cdot \phi_j^{n_i} = -\phi_{j+1}^{n_i}$  para todo  $0 \leq j < n_i$ . Podemos también elegir los  $\phi_j^{n_i}$  tales que  $\phi_j^{n_i}(v_{n_i-k}^{n_i}) = \delta_{j, n_i-k}$  para todo  $0 \leq j, k \leq n_i$  (ver sec. 2.5). Así,  $\text{id}_2$  es la derivación:

$$\text{id}_2 = k_1 \phi_0^{n_1} \otimes v_{n_1}^{n_1} + \dots + k_1 \phi_{n_1}^{n_1} \otimes v_0^{n_1} + \dots + k_s \phi_0^{n_s} \otimes v_{n_s}^{n_s} + \dots + k_s \phi_{n_s}^{n_s} \otimes v_0^{n_s}$$

y genera un  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulo irreducible  $V_{(0,0)}$  en  $H^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ . Aplicando la operación primaria definida por  $v_0^{n_l}$  sobre  $V_{(0,0)}$ , obtenemos que  $V_{(0,0)} \rightarrow V_{(n_l, k_l)}$  para todo  $t \leq l \leq s$  y la representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  es no trivial.  $\diamond$



Figura 5.3.1: Acción central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{h}_1, \wedge^q \mathfrak{h}_1)$ ,  $q = 1, 2$

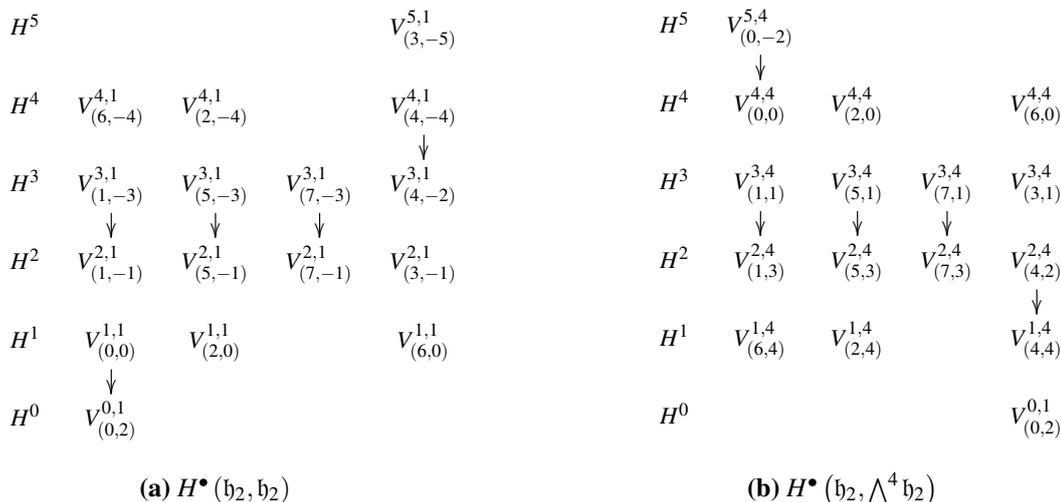


Figura 5.3.2: Acción central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{h}_2, \wedge^q \mathfrak{h}_2)$ ,  $q = 1, 4$

**Corolario 5.3.1.** Si  $\mathfrak{g}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie de dimensión  $n$  y  $\dim \mathfrak{z} = 1$ , entonces la representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$  es fiel.

Por ejemplo, para el álgebra de Lie de Heisenberg  $\mathfrak{h}_m$  la representación central sobre  $H^{\bullet,0}$  es fiel [CJ03]. Por

el corolario anterior, la representación central sobre la cohomología adjunta  $H^{\bullet,1}$  es fiel y por la dualidad de Poincaré también es fiel sobre  $H^{\bullet,m-1}$ , donde  $V_{(0,-2)}^{m,m-1} \rightarrow V_{(0,0)}^{m-1,m-1}$  no trivial.

Calculando explícitamente los cociclos y cobordes de  $C^{\bullet,\bullet}(b_1)$  y evaluando la acción central sobre cada representante dominante sobre  $H^{\bullet,1}$  y  $H^{\bullet,2}$  (ver Cap. 6) obtenemos los diagramas de la Figura 5.3.1.

Por otro lado, calculando computacionalmente los cociclos y cobordes de  $H^{\bullet,q}(b_2)$  con  $q = 1, 4$  y evaluando la acción central sobre los representantes dominantes, obtenemos los diagramas de la Figura 5.3.2.

#### 5.4. Las álgebras de súper-Poisson $C^{\bullet,\bullet}$ y $H^{\bullet,\bullet}$

Esencialmente, un álgebra de súper-Poisson (ó súper-álgebra de Poisson) es un álgebra graduada<sup>2</sup>  $\mathfrak{A}$  con un producto asociativo súper-conmutativo  $\cdot : \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$  y un súper-corchete de Lie  $\{-, -\}$  tal que  $\{x, -\}$  súper-deriva el producto asociativo, para todo  $x \in \mathfrak{A}$  (Sec. 2.8).

Si  $\mathfrak{g}$  es un álgebra de Lie de dimensión  $n$  y  $C^{\bullet,\bullet}$  es el álgebra graduada súper-conmutativa con producto asociativo  $\cdot : C^{p,q} \times C^{r,s} \rightarrow C^{p+r,q+s}$  (Subsec. 5.1.1) y  $|C^{p,q}| = p + q - 2$ . Este producto pasa al cociente como el producto copa  $\vee : H^{p,q} \times H^{r,s} \rightarrow H^{p+r,q+s}$  de modo que  $(H^{\bullet,\bullet}, \vee)$  es un álgebra graduada súper-conmutativa.

**Definición 5.4.1.** [KS96] Sea  $\{-, -\} : C^{p,q} \otimes C^{r,s} \rightarrow C^{p+r-1,q+s-1}$  el único súper-corchete de Lie sobre  $C^{\bullet,\bullet}$  determinado por :

- (i).  $\{\mathfrak{g}, \mathfrak{g}\} = \{\mathfrak{g}^*, \mathfrak{g}^*\} = 0$ ,
- (ii).  $\{a, b\} = -(-1)^{|a||b|} \{b, a\}$ ,
- (iii).  $\{a \cdot b, c\} = a \cdot \{b, c\} + (-1)^{|a||b|} b \cdot \{a, c\}$ ,
- (iv).  $\{\phi, x\} = \phi(x) = \{x, \phi\}$ ,

donde  $a, b, c$  son elementos homogéneos de  $C^{\bullet,\bullet}$  y  $x \in \mathfrak{g}$ ,  $\phi \in \mathfrak{g}^*$  respectivamente.

La propiedad (iii) es llamada *Identidad de Poisson*. Este corchete satisface la identidad de súper-Jacobi:

$$\{a, \{b, c\}\} = \{\{a, b\}, c\} + (-1)^{|a||b|} \{b, \{a, c\}\}$$

por lo que  $\{-, -\}$  es un corchete de súper-Poisson sobre  $C^{\bullet,\bullet}$ . Observar que  $\{-, -\}$  es homogéneo de grado  $-2$  con  $\{C^{p,q}, C^{r,s}\} \subset C^{p+r-1,q+s-1}$  y usando (ii), (iii) concluimos que  $\{a, -\}$  súper-deriva el producto asociativo.

Por lo tanto  $(C^{\bullet,\bullet}, \cdot, \{-, -\})$  es un álgebra de súper-Poisson.

Por ejemplo, tomando una base  $\{x_i\}$  de  $\mathfrak{g}$  con respectiva base dual  $\{x^i\}$  y  $x \in \mathfrak{g}$ , algunos corchetes en los grados bajos son:

- $\{x^i \cdot x_k, x\} = \{x^i \otimes x_k, x\} = x^i \cdot \{x_k, x\} + (-1)^{1 \cdot 1} x_k \cdot \{x^i, x\} = -x^i(x) x_k$ .
- $\{x^i \cdot x^k, x\} = \{x^i \wedge x^k, x\} = x^i \cdot \{x^k, x\} + (-1)^{1 \cdot 1} x^k \cdot \{x^i, x\} = x^k(x) x^i - x^i(x) x^k$ .
- $\{x^j \cdot (x^i \cdot x_k), x\} = \{x^j \wedge x^i \otimes x_k, x\} = x^j \cdot \{x^i \otimes x_k, x\} + (-1)^{1 \cdot 2} x^i \otimes x_k \cdot \{x^j, x\} = x^j(x) x^i \otimes x_k - x^i(x) x^j \otimes x_k$ .

Luego, si  $D = \sum_i \phi_i \otimes u_i$ ,  $E = \sum_k \psi_k \otimes v_k \in C^{1,1} \cong \text{End}(\mathfrak{g})$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \{D, E\} &= \sum_{i,k} \{\phi_i \otimes x_i, \psi_k \otimes y_k\} \\ &= \sum_{i,k} \psi_k(u_i) \phi_i \otimes v_k - \phi_i(v_k) \psi_k \otimes u_i \\ &= E \circ D - D \circ E = [E, D] \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Al igual que la Sec. 2.8, nos referimos “súper” a un espacio vectorial  $\mathbb{Z}$ -graduado en lugar de  $\mathbb{Z}_2$ -graduado.

que es el conmutador sobre  $C^{1,1}$ . Por lo tanto,  $C^{1,1}$  es una subálgebra de Lie de  $C^{\bullet,\bullet}$  isomorfa a  $\text{End}(\mathfrak{g})^{op}$ . En un formato más general, si  $a^p \otimes b_q \in C^{p,q}$  y  $c^r \otimes d_s \in C^{r,s}$ , vemos que

$$\{a^p \otimes b_q, c^r \otimes d_s\} = (-1)^{q(r+s)+rs+1} a^p \otimes d_s \cdot \{c^r, b_q\} + (-1)^{(p+q)r+pq} c^r \otimes b_q \cdot \{a^p, d_s\}$$

En particular, sobre 2-formas alternantes vale la siguiente proposición:

**Proposición 5.4.1.** Sea  $f : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  una 2-forma alternante, entonces para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$  vale:

$$\{\{f, x\}, y\} = f(y, x)$$

*Demostración.* En efecto, supongamos que  $f = f_{i,j}^k x^i x^j \otimes x_k \in \wedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \{\{f, x\}, y\} &= \left\{ \left\{ f_{i,j}^k x^i x^j \otimes x_k, x \right\}, y \right\} = f_{i,j}^k \{x^i(x) x^j \otimes x_k - x^j(x) x^i \otimes x_k, y\} \\ &= f_{i,j}^k x^j(x) x^i(y) x_k - f_{i,j}^k x^i(x) x^j(y) x_k \\ &= f(y, x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, extendiendo por linealidad lo anterior probado obtenemos que  $\{\{f, x\}, y\} = f(y, x)$  para cualquier  $f \in \wedge^2 \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ .  $\diamond$

Si identificamos con  $\mu : \wedge^2 \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \in C^{2,1}$  al corchete de  $\mathfrak{g}$ , por la Proposición anterior obtenemos que  $\{\{\mu, x\}, y\} = [y, x]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Por otro lado,  $\{\mu, -\} : C^{p,q} \rightarrow C^{p+1,q}$  es una súper-derivación sobre  $C^{0,\bullet} = \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}$  con respecto al producto wedge puesto que:

$$\begin{aligned} \{\mu, x \wedge y\} &= y \cdot \{x, \mu\} - x \cdot \{y, \mu\} \\ &= \{\mu, x\} \cdot y - x \cdot \{\mu, y\}, \forall x, y \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

Más generalmente, si  $\omega \in C^{0,p}$ ,  $\nu \in C^{0,q}$  entonces:

$$\begin{aligned} \{\mu, \omega \wedge \nu\} &= (-1)^{p+q+1} (-1)^q \{\omega, \mu\} \cdot \nu + (-1)^{p+q+1} \omega \cdot \{\nu, \mu\} \\ &= (-1)^{p+1} \{\omega, \mu\} \cdot \nu + (-1)^{p+q+1} \omega \cdot \{\nu, \mu\} \\ &= \{\mu, \omega\} \cdot \nu + (-1)^p \omega \cdot \{\mu, \nu\} \end{aligned}$$

Análogamente,  $\{\mu, -\}$  también es una súper-derivación sobre  $C^{\bullet,0} = \wedge^{\bullet} \mathfrak{g}^*$  con respecto al producto wedge y una súper-derivación con respecto al corchete de Poisson, puesto que  $\{\cdot, \cdot\}$  satisface la identidad de súper-Jacobi.

Además,  $\{\mu, -\}$  coincide a menos de signo con el diferencial de Chevalley-Eilenberg  $\delta$  sobre  $C^{\bullet,\bullet}$ . En efecto, como  $\delta$  es una súper-derivación sobre  $C^{\bullet,\bullet}$ , podemos ver que  $\delta$  se descompone sobre  $C^{\bullet,\bullet}$  como:

$$\delta(\omega \otimes \nu) = \delta_t(\omega) \otimes \nu + (-1)^p \omega \wedge \delta_0(\nu), \forall \omega \otimes \nu \in C^{p,q} \quad (5.22)$$

donde  $\delta_t$  es el diferencial trivial sobre  $C^{\bullet,0}$  y  $\delta_0$  el diferencial en el grado cero  $C^{0,\bullet}$  respectivamente. Luego, si  $\mu = \sum \gamma_{i,j}^k x^i x^j x_k$  y  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$  entonces:

$$\{\mu, \alpha\} = \sum \left\{ \gamma_{i,j}^k x^i x^j x_k, \alpha \right\} = \sum \gamma_{i,j}^k x^i x^j \{x_k, \alpha\} = \sum \gamma_{i,j}^k \alpha(x_k) x^i x^j,$$

y  $\{\mu, \alpha\} = -\delta_t(\alpha)$ . Como  $\{\mu, -\}$  súper-deriva sobre  $C^{\bullet,0}$ , por argumento inductivo en  $\omega_p \in \wedge^p \mathfrak{g}^*$  y  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ :

$$\begin{aligned}\{\mu, \omega_p \wedge \alpha\} &= \{\mu, \omega_p\} \cdot \alpha + (-1)^p \omega_p \cdot \{\mu, \alpha\} \\ &= -\delta_t(\omega_p) \cdot \alpha - (-1)^p \omega_p \cdot \delta_t(\alpha) \\ &= -\delta_t(\omega_p \wedge \alpha),\end{aligned}$$

probando que  $\{\mu, -\} = -\delta_t$  sobre el  $C^{\bullet,0}$ . Similarmente, para cualquier  $x \in \mathfrak{g}$  notemos que:

$$\{\mu, x\} = \sum \gamma_{i,j}^k (x^i(x) x^j x_k - x^j(x) x^i x_k) = \mu(x, -) = -\delta_0(x)$$

y como  $\{\mu, -\}$  súper-deriva sobre  $C^{0,\bullet}$ , para todo  $r_q \in \wedge^q \mathfrak{g}$  y  $x \in \mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned}\{\mu, r_q \wedge x\} &= \{\mu, r_q\} \cdot x + (-1)^q r_q \cdot \{\mu, x\} \\ &= -\delta_0(r_q) \cdot x - (-1)^q r_q \cdot \delta_0(x) \\ &= -\delta_t(\omega_q \wedge x)\end{aligned}$$

Si  $\omega_p \otimes r_q \in C^{p,q}$ , usando (ii), (iii) junto con la súper-commutatividad del producto asociativo en  $C^{\bullet,\bullet}$ , se sigue que:

$$\{\mu, \omega_p \otimes r_q\} = \{\mu, \omega_p\} \cdot r_q + (-1)^p \omega_p \cdot \{\mu, r_q\}.$$

Luego, de la ecuación (5.22) sobre  $\omega_p \otimes r_q \in C^{p,q}$  y las dos partes mostradas anteriormente, resulta que:

$$\begin{aligned}\{\mu, \omega_p \otimes r_q\} &= \{\mu, \omega_p\} \cdot r_q + (-1)^p \omega_p \cdot \{\mu, r_q\} \\ &= -\delta_t(\omega_p) \cdot r_q - (-1)^p \omega_p \cdot \delta_0(r_q) \\ &= -\delta(\omega_p \otimes r_q)\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\{\mu, -\} = -\delta$  sobre  $C^{\bullet,\bullet}$  y la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  hereda la estructura de súper-Poisson de  $C^{\bullet,\bullet}$ . Notemos que, con respecto a la graduación de  $H^{\bullet,\bullet}$ , el producto copa  $\vee$  y el súper-corchete de Poisson  $\{-, -\}$  satisfacen:

1.  $H^{p,q} \vee H^{r,s} \subset H^{p+r,q+s}$ .
2.  $\{H^{p,q}, H^{r,s}\} \subset H^{p+r-1,q+s-1}$ .

Como  $H^{1,1} \cong \text{Der}(\mathfrak{g})$ , la estructura de  $\text{Der}(\mathfrak{g})$ -módulo de  $H^{\bullet,\bullet}$  definida en la Proposición 5.1.1 está dada por los corchetes  $\{-, D\}$  con  $D \in H^{1,1}$ . Además,  $H^{\bullet,\bullet}$  tiene las siguientes subálgebras de Poisson distinguidas:

$$H^{0,\bullet} = (\wedge^{\bullet} \mathfrak{g})^{\mathfrak{g}} \quad H^{\bullet,0} = H^{\bullet}(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) \quad H_{diag}^{\bullet,\bullet} := \bigoplus_p H^{p,p} \quad H_E^{\bullet,\bullet} := \bigoplus_{p+q=0(2)} H^{p,q}$$

con las dos primeras abelianas respecto al corchete de Poisson y  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  una subálgebra de Poisson de  $H_E^{\bullet,\bullet}$ . Como el súper-corchete  $\{-, -\}$  sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es un corchete de Lie mientras que el producto  $\vee$  es conmutativo en el sentido usual, concluimos que ambas son álgebras de Poisson.

Como  $\{H^{1,1}, H^{1,1}\} \subset H^{1,1}$ , se sigue que  $H^{1,1}$  es una subálgebra de Lie de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . Notemos además que  $\mathcal{H} = H^{2,0} \oplus H^{1,1} \oplus H^{0,2}$  es un álgebra de Lie, puesto que  $\{H^{2,0}, H^{0,2}\} \subset H^{1,1}$ . Luego  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es un  $\mathcal{H}$ -módulo definiendo la acción  $\omega \cdot \nu = \{\omega, \nu\}$ ,  $\forall \omega \in \mathcal{H}, \nu \in H_E^{\bullet,\bullet}$ .

La siguiente proposición obtiene la acción central a través de los corchetes de Poisson con los elementos del centro  $\mathfrak{z}$  de  $\mathfrak{g}$ :

**Proposición 5.4.2.** Para todo  $z \in \mathfrak{z}$ ,  $\{z, -\}$  es la acción central de  $z$  sobre  $H^{\bullet,\bullet}$ . Es decir,  $\{z, \omega\} = \iota_z(\omega)$  para todo  $\omega \in H^{\bullet,\bullet}$ .

*Demostración.* Sea  $z \in \mathfrak{z}$  y  $\omega = \phi \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \in C^{1,q}$ . Entonces:

$$\begin{aligned} \{z, \omega\} &= \{z, \phi \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_q\} \\ &= (-1)^q \{\phi \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_q, z\} \\ &= (-1)^{2q} x_1 \wedge \cdots \wedge x_q \vee \{\phi, z\} \\ &= \phi(z) x_1 \wedge \cdots \wedge x_q = \iota_z(\omega) \end{aligned}$$

Supongamos que  $\iota_z(\omega) = \{z, \omega\}$  para todo  $\omega \in C^{p,q}$ . Si  $\phi_{p+1} \wedge \omega \in C^{p+1,q}$  entonces

$$\begin{aligned} \{z, \phi_{p+1} \wedge \omega\} &= (-1)^{p+q} \{\phi_{p+1} \wedge \omega, z\} \\ &= (-1)^{p+q} \phi_{p+1} \cdot \{\omega, z\} + \omega \cdot \{\phi_{p+1}, z\} \\ &= (-1)^{2(p+q)+1} \phi_{p+1} \cdot \{z, \omega\} + \phi_{p+1}(z) \omega \\ &= -\phi_{p+1} \cdot \iota_z(\omega) + \iota_z(\phi_{p+1}) \cdot \omega \\ &= \iota_z(\phi_{p+1} \wedge \omega) \end{aligned}$$

puesto que  $\iota_z$  súper-deriva sobre  $C^{\bullet,\bullet}$ . Extendiendo linealmente a  $C^{\bullet,\bullet}$  probamos que  $\{z, -\} = \iota_z$ . Como  $\{\mathfrak{z}, H^{p,q}\} = \{H^{0,1}, H^{p,q}\} \subset H^{p-1,q}$  se sigue que  $\{z, -\}$  es la acción central de  $z$  sobre  $H^{\bullet,\bullet}$ .  $\diamond$

Si  $\mathfrak{g}$  es no abeliana y  $\dim \mathfrak{z} = k < n$  entonces  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{z} \subset H^{0,0} \oplus H^{0,1} \oplus \cdots \oplus H^{0,k}$ . Luego, por la Proposición 5.4.2 aplicada sucesivamente sobre  $\zeta_s = z_1 \wedge \cdots \wedge z_s \in \wedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  vemos que  $\check{\iota}_{\zeta_s}(\omega) = \{z_1, \{z_2, \dots, \{z_s, \omega\} \dots\}\}$ . Es decir, la acción central sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  se obtiene a través de los corchetes de Poisson sobre  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{z}$ .

**Proposición 5.4.3.** Sea  $\mathfrak{h}_m$  el álgebra de Heisenberg de dimensión  $2m + 1$ . Entonces:

1.  $\{H^{2,0}, H^{0,2}\} = V_{(2,0)}^{1,1}$  cuando  $m = 1$ .
2.  $\{H^{2,0}, H^{0,2}\} = 0$  cuando  $m > 1$ .

*Demostración.* Por el Ejemplo 2.5.2, tenemos que  $\mathfrak{h}_m$  admite una base  $\{x_{n-2i}\}_{0 \leq i \leq n} \cup \{h_0\}$  con  $n = 2m - 1$  y cuyos corchetes son:

$$[x_{n-2i}, x_{2i-n}] = (-1)^i \binom{n}{i} h_0, \quad [x_{n-2i}, h_0] = 0, \quad [x_i, x_j] = 0, \quad i \neq -j$$

Además  $\mathfrak{sl}(2)$  actúa sobre  $\mathfrak{h}_m$  de manera que descompone en  $\mathfrak{h}_m = V_{(n)} \oplus V_{(0)}$  y como la identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa por escalar con peso 1 sobre  $V_{(n)}$  y peso 2 sobre  $V_{(0)}$ , se sigue que  $\mathfrak{h}_m = V_{(n,1)} \oplus V_{(0,2)}$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie y  $[V_{(n,1)}, V_{(n,1)}] = V_{(0,2)}$ . Tenemos así los siguientes casos:

• Si  $m = 1$  entonces  $H^{2,0} = \langle x^1 h^0 \rangle = V_{(1,-3)}^{2,0}$  por el Teorema de Santharuobane [San83], mientras que para  $H^{0,2}$  notemos que:

$$\delta_0(x_1 h_0)(x) = x \cdot (x_1 h_0) = [x, x_1] h_0 + x_1 [x, h_0] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{h}_1.$$

Como no hay cobordes en el grado cero, obtenemos que  $H^{0,2} = \langle x_1 h_0 \rangle = V_{(1,3)}^{0,2}$ . Por otro lado, la descomposición de  $C^{1,1}$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos es:

$$C^{1,1} = \langle x^1 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle h^0 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle h^0 \otimes h_0 \rangle.$$

Aplicando el diferencial  $\delta$  en cada representante dominante obtenemos que:

$$Z^{1,1} = \langle x^1 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes h_0 \rangle.$$

Pero  $\delta_0(x_1) = x^1 \otimes h_0$  y como  $H^{1,1} \cong \text{Der}_e(\mathfrak{h}_1)$ , concluimos que:

$$H^{1,1} = \langle x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_1 \rangle = V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} = \mathfrak{gl}(2).$$

Por lo tanto  $x^1 \otimes x_1$  genera a  $\mathfrak{sl}(2)$  y  $\text{id}_2 = x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0$  en  $H^{1,1}$ . Como  $\{x_1 h_0, x^1 h^0\} = x^1 \otimes x_1$ , se sigue que  $\{H^{2,0}, H^{0,2}\} = V_{(2,0)}^{1,1}$ .

• Si  $m > 1$  entonces la identidad  $\text{id}_2$  actúa con peso cero sobre cada  $\mathfrak{sl}(2)$ -irreducible de  $H^{1,1}$ . Por un lado, por el Teorema de Santharuobane [San83] obtenemos que  $Z^{2,0} = \wedge^2 V_{(n,1)}^* = \wedge^2 \langle x^n \rangle$  donde  $x^n = x_{-n}^*$  y ningún representante de cohomología de  $H^{2,0}$  contiene a  $h^0$  es sus monomios. Por otro lado,  $C^{0,2} = \wedge^2 V_{(n,1)} \oplus V_{(n,1)} \wedge V_{(0,2)}$  y notemos que todos los monomios que definen los vectores dominantes en  $\wedge^2 V_{(n,1)}$  son de la forma  $f^i \cdot x_n f^j \cdot x_n = x_{n-2i} x_{n-2j}$ . Como

$$d_0(x_{n-2i} x_{n-2j})(y) = [y, x_{n-2i}] x_{n-2j} + x_{n-2i} [y, x_{n-2j}]$$

obtenemos que  $d_0(x_{n-2i} x_{n-2j}) = (-1)^{i+1} \binom{n}{i} h_0 x_{n-2j}$  ó  $d_0(x_{n-2i} x_{n-2j}) = (-1)^j \binom{n}{j} h_0 x_{n-2i}$  de modo que  $H^{0,2} = \langle x_n h_0 \rangle$ . Luego,

$$H^{0,2} = V_{(n,3)}^{0,2}, \quad H^{2,0} = \bigoplus_{r=0(4)} V_{(r,-2)}^{2,0}.$$

Por lo tanto  $\left\{ V_{(r,-2)}^{2,0}, V_{(n,3)}^{0,2} \right\} = \bigoplus_s V_{(s,1)}^{1,1} = 0$  en  $H^{1,1}$ , concluyendo que  $\{H^{2,0}, H^{0,2}\} = 0$ .  $\diamond$

# Capítulo 6

## Estructura de Poisson en $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$

### 6.1. Estructura de $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo en $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$

Sea  $\mathfrak{h}_1$  el álgebra de Lie de Heisenberg de dimensión 3 con base estándar  $\{x_1, x_{-1}, h_0\}$  y corchete no trivial  $[x_1, x_{-1}] = h_0$ . Por el ejemplo 2.5.2, tenemos que  $\mathfrak{h}_1$  es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo cuya identidad  $\text{id}_2$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa por escalar con peso 1 sobre  $x_i$  y peso 2 sobre  $h_0$ . Por lo tanto  $\text{id}_2 = x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0$  y  $\mathfrak{h}_1$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie con descomposición:

$$\mathfrak{h}_1 = \langle x_1 \rangle \oplus \langle h_0 \rangle = V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)}$$

Sea  $C^{\bullet,\bullet} = C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  junto con su estructura graduada y  $H^{\bullet,\bullet} = H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{h}_1)$  su cohomología. Por un lado, la descomposición de cada  $C^{p,q} = \wedge^p \mathfrak{h}_1^* \otimes \wedge^q \mathfrak{h}_1$  en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles se obtiene por el Teorema de Clebsch-Gordan (subsec. 2.5.1). Por ejemplo,  $C^{\bullet,1}$  se descompone en:

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_1^* \otimes \mathfrak{h}_1 &= \langle x^1 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle h^0 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle h^0 \otimes h_0 \rangle \\ \wedge^2 \mathfrak{h}_1^* \otimes \mathfrak{h}_1 &= \langle x^{-1} x^1 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^{-1} x^1 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 \otimes x_{-1} + x^{-1} h^0 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 \otimes h_0 \rangle \\ \wedge^3 \mathfrak{h}_1^* \otimes \mathfrak{h}_1 &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^{-1} x^1 h^0 \otimes h_0 \rangle \end{aligned}$$

**Lema 6.1.1.** Las descomposiciones en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles de cada  $H^{p,q}$ , junto con sus representantes de clase de cohomología dominantes resultan:

$$\begin{aligned} H^{0,0} &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} & H^{0,3} &= \langle x_1 x_{-1} h_0 \rangle = V_{(0,4)}^{0,3} \\ H^{1,0} &= \langle x^1 \rangle = V_{(1,-1)}^{1,0} & H^{1,3} &= \langle x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0 \rangle = V_{(1,3)}^{1,3} \\ H^{2,0} &= \langle x^1 h^0 \rangle = V_{(1,-3)}^{2,0} & H^{2,3} &= \langle x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0 \rangle = V_{(1,1)}^{2,3} \\ H^{3,0} &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \rangle = V_{(0,-4)}^{3,0} & H^{3,3} &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0 \rangle = V_{(0,0)}^{3,3} \\ H^{0,1} &= \langle h_0 \rangle = V_{(0,2)}^{0,1} & H^{0,2} &= \langle x_1 h_0 \rangle = V_{(1,3)}^{0,2} \\ H^{1,1} &= \langle x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_1 \rangle & H^{1,2} &= \langle x^1 \otimes x_1 x_{-1} + h^0 \otimes x_1 h_0 \rangle \oplus \langle x^1 \otimes x_1 h_0 \rangle \\ &= V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} & &= V_{(1,1)}^{1,2} \oplus V_{(2,2)}^{1,2} \\ H^{2,1} &= \langle x^{-1} x^1 \otimes x_1 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 \otimes x_1 \rangle & H^{2,2} &= \langle x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1} \rangle \oplus \langle x^1 h^0 \otimes x_1 h_0 \rangle \\ &= V_{(1,-1)}^{2,1} \oplus V_{(2,-2)}^{2,1} & &= V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \\ H^{3,1} &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 \rangle = V_{(1,-3)}^{3,1} & H^{3,2} &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} \rangle = V_{(0,-2)}^{3,2} \end{aligned}$$

Es decir, las dimensiones de cada  $H^{\bullet,q}$  son  $(1, 2, 2, 1)$ ,  $(1, 4, 5, 2)$ ,  $(2, 5, 4, 1)$  y  $(1, 2, 2, 1)$  respectivamente.

*Demostración.* La cohomología trivial  $H^{\bullet,0}$  sigue del Teorema de Santharuobane [San83] y para calcular  $H^{\bullet,3}$  basta realizar el producto copa entre  $H^{\bullet,0}$  y  $H^{0,3} = \langle x_1 x_{-1} h_0 \rangle$ . Para  $H^{\bullet,1}$  calculamos el diferencial de Chevalley-Eilenberg  $d : C^{\bullet,1} \rightarrow C^{\bullet+1,1}$  sobre cada representante dominante de  $C^{\bullet,1}$ , junto con los cociclos y cobordes. Es decir,

$$\begin{array}{ll} h^0 \otimes h_0 & \rightarrow x^{-1} x^1 \otimes h_0 & x^1 h^0 \otimes h_0 & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 & \rightarrow -2x^{-1} x^1 \otimes h_0 & x^{-1} x^1 \otimes h_0 & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes h_0 & \rightarrow 0 & x^{-1} h^0 \otimes x_1 + x^1 h^0 \otimes x_{-1} & \rightarrow -2x^{-1} x^1 h^0 \otimes h_0 \\ h^0 \otimes x_1 & \rightarrow x^{-1} x^1 \otimes x_1 + x^1 h^0 \otimes h_0 & x^1 h^0 \otimes x_1 & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes x_1 & \rightarrow 0 & x^{-1} x^1 \otimes x_1 & \rightarrow 0 \end{array}$$

Para  $H^{\bullet,2}$  procedemos de la misma manera calculando diferencial  $d : C^{\bullet,2} \rightarrow C^{\bullet+1,2}$  sobre cada representante dominante, obteniendo así:

$$\begin{array}{ll} h^0 \otimes x_1 h_0 & \rightarrow x^{-1} x^1 \otimes x_1 h_0 & x^1 h^0 \otimes x_1 h_0 & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes x_{-1} h_0 + x^{-1} \otimes x_1 h_0 & \rightarrow 0 & x^{-1} x^1 \otimes x_1 h_0 & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes x_1 h_0 & \rightarrow 0 & x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0 + x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 & \rightarrow 0 \\ h^0 \otimes x_1 x_{-1} & \rightarrow x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1} - x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0 & x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} & \rightarrow -x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 h_0 \\ & -x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 & x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1} & \rightarrow 0 \\ x^1 \otimes x_1 x_{-1} & \rightarrow -x^{-1} x^1 \otimes x_1 h_0 & & \end{array}$$

Con los cociclos y cobordes anteriores elegimos los representantes dominantes para cada  $H^{p,q}$ , lo que concluye el resultado.  $\diamond$

## 6.2. Acción central sobre $H^{\bullet,\bullet}$

Como el centro de  $\mathfrak{h}_1$  es  $\mathfrak{z} = \langle h_0 \rangle$ , existe una única operación primaria que denotaremos por  $\iota_0$ . Además  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa sobre  $\wedge^{\bullet} \mathfrak{z}$  por derivación de modo que  $H^{\bullet,\bullet}$  es un  $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{C}$ -módulo. Por el entrelazamiento entre las acciones de  $\mathfrak{gl}(2)$  y  $\mathfrak{z}$ , basta evaluar  $\iota_0$  sobre los representantes dominantes de  $H^{\bullet,\bullet}$  descritos en el Lema 6.1.1.

**Lema 6.2.1.** La representación central sobre cada  $H^{\bullet,q}$  en el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$  es no trivial.

*Demostración.* En efecto,

1. Sobre  $H^{\bullet,0}$  notemos que  $\iota_0$  actúa trivialmente sobre  $H^{p,0}$  excepto para  $\iota_0(x^1 h^0) = -x^1$ .
2. Sobre  $H^{\bullet,1}$  tenemos que  $\iota_0(x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) = 2h_0$ ,  $\iota_0(x^1 h^0 \otimes x_1) = -x^1 \otimes x_1$  y  $\iota_0(x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1) = x^{-1} x^1 \otimes x_1$  y son las únicas no triviales.
3. Sobre  $H^{\bullet,2}$  podemos ver que las únicas  $\iota_0$ -acciones no triviales son  $\iota_0(x^1 \otimes x_1 x_{-1} + h^0 \otimes x_1 h_0) = x_1 h_0$ ,  $\iota_0(x^1 h^0 \otimes x_1 h^0) = -x^1 \otimes x_1 h_0$  y  $\iota_0(x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1}) = x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}$ .
4. Finalmente, sobre  $H^{\bullet,3}$  podemos ver que  $\iota_0(x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0) = -x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0$ .

Como fueron analizados todas las cohomologías  $H^{\bullet,q}$ , se concluye el resultado.  $\diamond$

Por el Teorema 5.5 (ver también Cor. 5.3.1), la representación central sobre cada  $H^{\bullet,q}$  es fiel. Por otro lado, usando las dimensiones del Lema 6.1.1, vemos que  $H^{\bullet,q}$  satisface la dualidad de Poincaré solamente cuando  $q = 0, 3$ .

Para el álgebra de Lie  $\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*$  con  $\mathfrak{h}_1^*$  abeliana, tenemos que  $[x, \beta]_{\ltimes} = x \cdot \beta, \forall x \in \mathfrak{h}_1, \beta \in \mathfrak{h}_1^*$  y el centro de  $\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*$  es  $\mathfrak{z}_{\ltimes} = \langle x^1 \rangle \oplus \langle h_0 \rangle$ . Por lo tanto, para describir la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  debemos definir 3 operaciones primarias correspondientes a  $x^1, x^{-1}$  y  $h_0$  respectivamente.

En este contexto, las operaciones primarias asociadas a  $x^i$  contraen el grado en los coeficientes de  $q$  a  $q-1$  en lugar del grado cohomológico como lo hace  $h_0$ . Por ejemplo  $x^1 \cdot (x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) = x^1, x^1 \cdot (x^1 \otimes x_1 x_{-1} + h^0 \otimes x_1 h_0) = x^1 \otimes x_1, x^1 \cdot (x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}) = -x^{-1} x^1 \otimes x_1, x^1 \cdot (x_1 x_{-1} h_0) = -x_1 h_0$  y así con los restantes representantes del Lema 6.1.1.

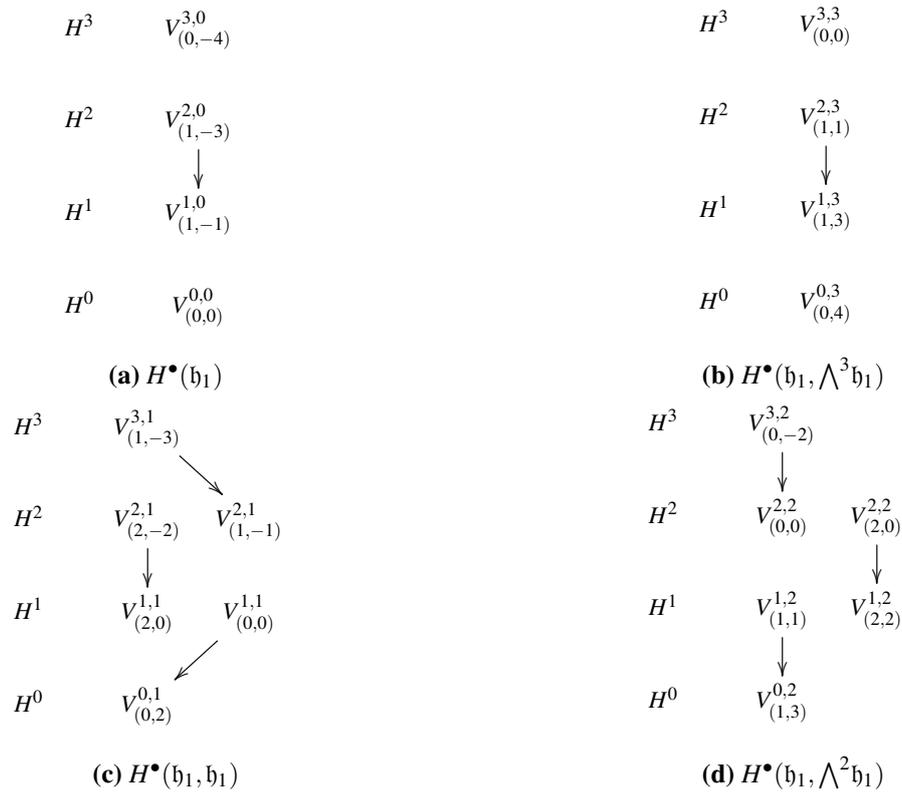


Figura 6.2.1: Representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1, \wedge^{\bullet} \mathfrak{h}_1)$

Es sabido que  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*) \cong \bigoplus_{p,q} H^{p,q}(\mathfrak{h}_1, \wedge^q \mathfrak{h}_1)$  y esto implica que el diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  es obtenido completando la acción de los  $x^i$  sobre los diagramas 6.2.1, con cada  $x^i$  disminuyendo el grado en el sentido  $H^{p,q} \rightarrow H^{p,q-1}$  como ya fue mencionado. Resumimos en el siguiente cuadro la acción (no trivial) de las operaciones primarias definidas por los  $x^i$  sobre los  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos de  $H^{\bullet,\bullet}$ , donde  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  es denotado por  $H_{\ltimes}^{\bullet}$  para acortar la notación.

$H_{\ltimes}^2 \rightarrow H_{\ltimes}^1$	$V_{(0,0)}^{1,1} \rightarrow V_{(1,-1)}^{1,0}$ $V_{(2,0)}^{1,1} \rightarrow V_{(1,-1)}^{1,0}$ $V_{(1,3)}^{0,2} \rightarrow V_{(0,2)}^{0,1}$	$H_{\ltimes}^4 \rightarrow H_{\ltimes}^3$	$V_{(1,-3)}^{3,1} \rightarrow V_{(0,-4)}^{3,0}$ $V_{(0,0)}^{2,2} \rightarrow V_{(1,-1)}^{2,1}$ $V_{(2,0)}^{2,2} \rightarrow V_{(1,-1)}^{2,1}$ $V_{(1,3)}^{1,3} \rightarrow V_{(2,2)}^{1,2}$
$H_{\ltimes}^3 \rightarrow H_{\ltimes}^2$	$V_{(2,-2)}^{2,1} \rightarrow V_{(1,-3)}^{2,0}$ $V_{(1,1)}^{1,2} \rightarrow V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1}$ $V_{(0,4)}^{0,3} \rightarrow V_{(1,3)}^{0,2}$	$H_{\ltimes}^5 \rightarrow H_{\ltimes}^4$	$V_{(0,-2)}^{3,2} \rightarrow V_{(1,-3)}^{3,1}$ $V_{(1,1)}^{2,3} \rightarrow V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2}$

El diagrama de cohomología de  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  está dado por la Figura 6.2.2. Como la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  está determinada por el centro  $\mathfrak{z}$ , podemos pensar a  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$  como un  $\mathfrak{sl}(2) \ltimes (V_{(0)} \oplus V_{(1)})$ -módulo cuya serie de zócalo es:

$$\begin{aligned} \text{soc}^1 &= V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(1,-1)}^{1,0} \oplus V_{(0,2)}^{0,1} \oplus V_{(0,-4)}^{3,0} \oplus V_{(1,-1)}^{2,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,2} \oplus V_{(0,0)}^{3,3} \\ \frac{\text{soc}^2}{\text{soc}^1} &= V_{(1,-3)}^{2,0} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(1,3)}^{0,2} \oplus V_{(1,-3)}^{3,1} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(1,3)}^{1,3} \\ \frac{\text{soc}^3}{\text{soc}^2} &= V_{(2,-2)}^{2,1} \oplus V_{(1,1)}^{1,2} \oplus V_{(0,4)}^{0,3} \oplus V_{(0,-2)}^{3,2} \oplus V_{(1,1)}^{2,3} \end{aligned}$$

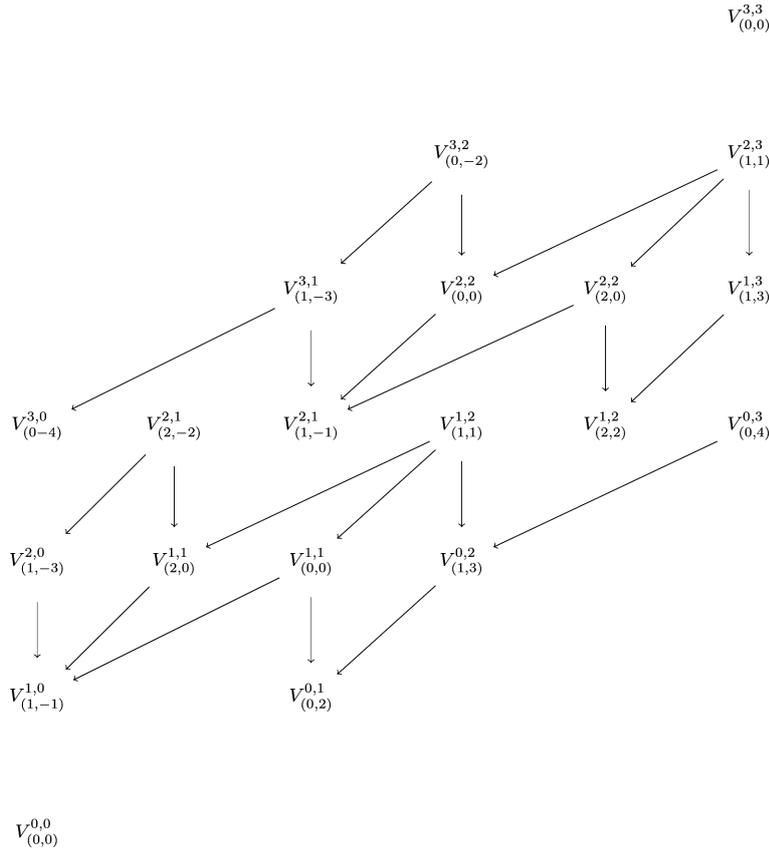


Figura 6.2.2: Representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{h}_1 \ltimes \mathfrak{h}_1^*)$

### 6.3. Producto Copa sobre $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ y $H_E^{\bullet,\bullet}$

Sean  $v_{m,k}^{p,q}$  los representantes de clase de cohomología dominantes definidos en la Sec. 6.1. La descomposición de  $H_E^{\bullet,\bullet}$  en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles es:

$$H_E^{\bullet,\bullet} = V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(1,-3)}^{2,0} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(1,-3)}^{3,1} \oplus V_{(1,3)}^{0,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(1,3)}^{1,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$$

con  $H_{diag}^{\bullet,\bullet} \subset H_E^{\bullet,\bullet}$ . Queremos calcular las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla del producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$  y para ello necesitamos calcular los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,q}$  de la ecuación (4.15, Subsec. 4.3.4) mediante los productos de Clebsch-Gordan asociados al producto copa. Tenemos así el siguiente Lema:

**Lema 6.3.1.** La cohomología  $H_E^{\bullet,\bullet}$  tiene los siguientes productos de Clebsch-Gordan no triviales asociados al producto copa:

$$\begin{aligned}
v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{1,1} &= -6v_{0,0}^{2,2} & f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{1,3}^{0,2} - 2v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{1,3}^{0,2} &= -3v_{1,3}^{1,3} \\
v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{2,2} &= 2v_{0,0}^{3,3} & f \cdot v_{1,-3}^{3,1} \vee v_{1,3}^{0,2} - v_{1,-3}^{3,1} \vee f \cdot v_{1,3}^{0,2} &= -2v_{0,0}^{3,3} \\
v_{0,0}^{1,1} \vee v_{1,3}^{0,2} &= -v_{1,3}^{1,3} & f \cdot v_{1,-3}^{2,0} \vee v_{1,3}^{0,2} - v_{1,-3}^{2,0} \vee f \cdot v_{1,3}^{0,2} &= -v_{0,0}^{2,2} \\
v_{0,0}^{1,1} \vee v_{1,-3}^{2,0} &= v_{1,-3}^{3,1} & f \cdot v_{1,-3}^{2,0} \vee v_{1,3}^{1,3} - v_{1,-3}^{2,0} \vee f \cdot v_{1,3}^{1,3} &= 2v_{0,0}^{3,3} \\
v_{0,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{1,1} &= -2v_{2,0}^{2,2} & f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{1,-3}^{2,0} - 2v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{1,-3}^{2,0} &= -3v_{1,-3}^{3,1} \\
v_{1,-3}^{2,0} \vee v_{1,3}^{0,2} &= v_{2,0}^{2,2} & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{2,2} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{2,2} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} &= 6v_{0,0}^{3,3} \\
&& f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{1,1} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{1,1} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} &= -6v_{0,0}^{2,2}
\end{aligned} \tag{6.1}$$

*Demostración.* Como  $\vee : H^{p,q} \times H^{r,s} \rightarrow H^{p+r,q+s}$  necesariamente  $p+r \leq 3$  y  $q+s \leq 3$ . Esta condición descarta aquellos  $(p, q, r, s)$  cuyos productos se escapan de la graduación de  $H^{\bullet,\bullet}$ , y en particular, de  $H_E^{\bullet,\bullet}$ . Por otro lado,  $\vee : V_{(n_1, k_1)}^{p,q} \otimes V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \rightarrow H^{\bullet,\bullet}$  es  $\mathfrak{gl}(2)$ -invariante y por el Teorema de Clebsch-Gordan, sabemos que:

$$V_{(n_1, k_1)}^{p,q} \vee V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \subset V_{(n_1+n_2, k_1+k_2)}^{p+r, q+s} \oplus V_{(n_1+n_2-2, k_1+k_2)}^{p+r, q+s} \oplus \dots \oplus V_{(|n_1-n_2|, k_1+k_2)}^{p+r, q+s}.$$

Luego, si  $V_{(n_1, k_1)}^{p,q} \vee V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \neq 0$ , entonces algunas componentes irreducibles del lado derecho deben aparecer en la descomposición de  $H^{p+r, q+s}$ . Si nos restringimos a  $H_E^{\bullet,\bullet}$  y usamos la Definición 4.3.2, obtenemos los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

- $\vee : H^{\bullet,0} \otimes H^{\bullet,q} \rightarrow H^{\bullet,q}$  con  $q \geq 1$ :

$$x^1 h^0 \vee x_1 h_0 = x^1 h^0 \otimes x_1 h_0.$$

$$x^1 h^0 \vee (x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) = x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$

$$-x^{-1} h^0 \vee x_1 h_0 - x^1 h^0 \vee x_{-1} h_0 = -x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}.$$

$$-x^{-1} h^0 \vee (x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0) + x^1 h^0 \vee (x^{-1} \otimes x_1 x_{-1} h_0) = 2x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

- $\vee : H^{\bullet,1} \otimes H^{\bullet,q} \rightarrow H^{\bullet, q+1}$  con  $q \geq 1$ :

$$(x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) \vee (x^1 \otimes x_1) = -2x^1 h^0 \otimes x_1 h_0.$$

$$(x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) \vee (x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) = -6x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}.$$

$$(x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) \vee x_1 h_0 = -x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$(x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1) \vee x_1 h_0 - 2(x^1 \otimes x_1) \vee x_{-1} h_0 = -3x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$(x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0) \vee (x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}) = 2x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$(x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_{-1}) \vee x_1 h_0 - (x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1) \vee x_{-1} h_0 = -2x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$(x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1) \vee x^1 h^0 + (2x^1 \otimes x_1) \vee x^{-1} h^0 = -3x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$

$$(-2x^{-1} \otimes x_{-1}) \vee (x^1 \otimes x_1) - (x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1) \vee (x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1) - (2x^1 \otimes x_1) \vee (x^{-1} \otimes x_{-1}) = 6x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}.$$

$$(-2x^{-1} \otimes x_{-1}) \vee (x^1 h^0 \otimes x_1 h_0) - (x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1) \vee (x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 - x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0)$$

$$- (2x^1 \otimes x_1) \vee (x^{-1} h^0 \otimes x_{-1} h_0) = 6x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

Re-escribiendo los representantes anteriores con la notación  $v_{m,k}^{p,q}$  obtenemos los productos (6.1).  $\diamond$

Notemos que la parte par de la cohomología  $H^{\bullet,\bullet}$  es la suma directa  $H_E^{\bullet,\bullet} = H_{diag}^{\bullet,\bullet} \oplus R$ , donde:

$$\begin{aligned}
H_{diag}^{\bullet,\bullet} &= V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{3,3} \\
R &= V_{(1,-3)}^{2,0} \oplus V_{(1,-3)}^{3,1} \oplus V_{(1,3)}^{0,2} \oplus V_{(1,3)}^{1,3}
\end{aligned}$$

Veamos primero la parte diagonal  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . Por un lado, en base a los productos copas (6.1) obtenemos que:

$$\begin{aligned}
V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{1,1} &= -6V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{2,2} &= 2V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{2,2} &= 6V_{(0,0)}^{3,3} \\
V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= -2V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= -6V_{(0,0)}^{2,2}
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $\tilde{v}_{0,0}^{1,1} = \mu_1 v_{0,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{2,2} = \mu_2 v_{0,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{3,3} = \mu_3 v_{0,0}^{3,3}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{1,1} = \lambda_1 v_{2,0}^{1,1}$  y  $\tilde{v}_{2,0}^{2,2} = \lambda_2 v_{2,0}^{2,2}$  son re-escalados arbitrarios de los representantes  $v_{m,k}^{p,q}$  elegidos inicialmente. En este caso, los productos de Clebsch-Gordan (6.1) de la parte diagonal queda escritos como:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{0,0}^{1,1} \vee \tilde{v}_{0,0}^{1,1} &= -6 \frac{\mu_1^2}{\mu_2} \tilde{v}_{0,0}^{2,2} & f^2 \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee \tilde{v}_{2,0}^{2,2} - f \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot \tilde{v}_{2,0}^{2,2} + \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot \tilde{v}_{2,0}^{2,2} &= 6 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_3} \tilde{v}_{0,0}^{3,3} \\ \tilde{v}_{0,0}^{1,1} \vee \tilde{v}_{2,0}^{1,1} &= -2 \frac{\mu_1 \lambda_1}{\lambda_2} \tilde{v}_{2,0}^{2,2} & f^2 \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee \tilde{v}_{2,0}^{1,1} - f \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} + \tilde{v}_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot \tilde{v}_{2,0}^{1,1} &= -6 \frac{\lambda_1^2}{\mu_2} \tilde{v}_{0,0}^{2,2} \\ \tilde{v}_{0,0}^{1,1} \vee \tilde{v}_{0,0}^{2,2} &= 2 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} \tilde{v}_{0,0}^{3,3} \end{aligned}$$

y estos producen un re-escalamiento de los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,q}$  determinados anteriormente. Si consideramos el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} 6 \frac{\mu_1^2}{\mu_2} = -1 & 2 \frac{\mu_1 \lambda_1}{\lambda_2} = -1 & 2 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_3} = 1 \\ 6 \frac{\lambda_1^2}{\mu_2} = -1 & 6 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_3} = 1 \end{cases}$$

obtenemos como solución  $\mu_1 = \lambda_1$ ,  $\mu_2 = -6\lambda_1^2$ ,  $\mu_3 = 12\lambda_1^3$ ,  $\lambda_2 = 2\lambda_1^2$ . Luego, renombrando  $\lambda_1 = \lambda \neq 0$ , podemos re-escalar los vectores dominantes originales como  $\tilde{v}_{0,0}^{1,1} = \lambda v_{0,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{2,2} = -6\lambda^2 v_{0,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{3,3} = -12\lambda^3 v_{0,0}^{3,3}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{1,1} = \lambda v_{2,0}^{1,1}$  y  $\tilde{v}_{2,0}^{2,2} = -2\lambda^2 v_{2,0}^{2,2}$  y obtener que:

$$\begin{aligned} V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{1,1} &= V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{2,2} &= V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{2,2} &= V_{(0,0)}^{3,3} \\ V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= V_{(0,0)}^{2,2} \end{aligned}$$

Acabamos de probar el siguiente Lema:

**Lema 6.3.2.** El producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  queda descrito por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

∨	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$	
$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$		
$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$			
$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$				
$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$					

(6.2)

Con la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla anterior, no es difícil ver que se satisfacen las siguientes relaciones:

$$\left(V_{(0,0)}^{1,1}\right)^3 = V_{(0,0)}^{3,3}, \quad \left(V_{(0,0)}^{1,1}\right)^2 = \left(V_{(2,0)}^{1,1}\right)^2 = V_{(0,0)}^{2,2}, \quad \left(V_{(0,0)}^{1,1}\right)^3 = V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{2,2} = V_{(0,0)}^{1,1} \vee \left(V_{(2,0)}^{1,1}\right)^2$$

donde  $\left(V_{(m,k)}^{p,q}\right)^r$  denota el producto copa del  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo  $V_{(m,k)}^{p,q}$  consigo mismo  $r$  veces. Por lo tanto, podemos ver que todo producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  es generado por  $V_{(2,0)}^{1,1}$  y  $V_{(0,0)}^{1,1}$  a través de los productos de Clebsch-Gordan asociados.

En cierto sentido, si pensamos que los  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos son letras, es decir  $\zeta = V_{(0,0)}^{1,1}$  y  $\eta = V_{(2,0)}^{1,1}$ , entonces la  $\mathfrak{gl}(2)$ -álgebra  $\left(H_{diag}^{\bullet,\bullet}, \vee\right)$  define un álgebra asociativa presentada por:

$$\mathbb{C}[\zeta, \eta] / \langle \zeta^4, \zeta^2 - \eta^2, \eta^2 \zeta \rangle \quad (6.3)$$

cuya tabla de multiplicación asociada es:

·	1	$\zeta$	$\eta$	$\zeta\eta$	$\zeta^2$	$\zeta^3$
1	1	$\zeta$	$\eta$	$\zeta\eta$	$\zeta^2$	$\zeta^3$
$\zeta$	$\zeta$	$\zeta^2$	$\zeta\eta$		$\zeta^3$	
$\eta$	$\eta$	$\zeta\eta$	$\zeta^2$	$\zeta^3$		
$\zeta\eta$	$\zeta\eta$		$\zeta^3$			
$\zeta^2$	$\zeta^2$	$\zeta^3$				
$\zeta^3$	$\zeta^3$					

Para la parte par  $H_E^{\bullet,\bullet}$ , consideremos los re-escalados arbitrarios  $\tilde{v}_{1,-3}^{2,0} = t_1 v_{1,-3}^{2,0}$ ,  $\tilde{v}_{1,3}^{0,2} = t_2 v_{1,3}^{0,2}$ ,  $\tilde{v}_{1,-3}^{3,1} = t_3 v_{1,-3}^{3,1}$  y  $\tilde{v}_{1,3}^{1,3} = t_4 v_{1,3}^{1,3}$  junto con los  $\tilde{v}_{n,k}^{p,p}$  definidos en  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . Usando los productos de Clebsch-Gordan dados en (6.1) obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{1,-3}^{2,0} \vee \tilde{v}_{1,3}^{0,2} &= -\frac{t_1 t_2}{2\lambda^2} \tilde{v}_{2,0}^{2,2} & f \cdot \tilde{v}_{1,-3}^{2,0} \vee \tilde{v}_{1,3}^{1,3} - \tilde{v}_{1,-3}^{2,0} \vee f \cdot \tilde{v}_{1,3}^{1,3} &= -\frac{t_1 t_4}{6\lambda^3} \tilde{v}_{0,0}^{3,3} \\ f \cdot \tilde{v}_{1,-3}^{2,0} \vee \tilde{v}_{1,3}^{0,2} - \tilde{v}_{1,-3}^{2,0} \vee f \cdot \tilde{v}_{1,3}^{0,2} &= \frac{t_1 t_2}{6\lambda^2} \tilde{v}_{0,0}^{2,2} & f \cdot \tilde{v}_{1,-3}^{3,1} \vee \tilde{v}_{1,3}^{0,2} - \tilde{v}_{1,-3}^{3,1} \vee f \cdot \tilde{v}_{1,3}^{0,2} &= \frac{t_3 t_2}{6\lambda^3} \tilde{v}_{0,0}^{3,3} \end{aligned}$$

Con el mismo argumento que lo realizado para  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ , si consideramos el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} \frac{t_1 t_2}{6\lambda^2} = 1 & \frac{t_1 t_4}{6\lambda^3} = -1 & \frac{t_3 t_2}{6\lambda^3} = 1 \end{cases}$$

obtenemos como solución  $t_1 = -\frac{6\lambda^3}{t_4}$ ,  $t_2 = \frac{-t_4}{\lambda}$  y  $t_3 = \frac{-6\lambda^4}{t_4}$ , con lo cual  $-\frac{t_1 t_2}{2\lambda^2} = -3$ . Es decir, renombrando  $t_4 = t$ , podemos re-escalar los representantes dominantes de  $H_E^{\bullet,\bullet}$  como  $\tilde{v}_{0,0}^{1,1} = \lambda v_{0,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{2,2} = -6\lambda^2 v_{0,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{3,3} = -12\lambda^3 v_{0,0}^{3,3}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{1,1} = \lambda v_{2,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{2,2} = -2\lambda^2 v_{2,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{1,-3}^{2,0} = -\frac{6\lambda^3}{t} v_{1,-3}^{2,0}$ ,  $\tilde{v}_{1,3}^{0,2} = -\frac{t}{\lambda} v_{1,3}^{0,2}$ ,  $\tilde{v}_{1,-3}^{3,1} = -\frac{6\lambda^4}{t} v_{1,-3}^{3,1}$  y  $\tilde{v}_{1,3}^{1,3} = t v_{1,3}^{1,3}$  con  $\lambda, t \neq 0$  y obtener que:

$$\begin{aligned} V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{1,1} &= V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{2,2} &= V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(1,-3)}^{2,0} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= 3V_{(1,-3)}^{3,1} \\ V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= V_{(2,0)}^{2,2} & V_{(1,-3)}^{2,0} \vee V_{(1,3)}^{1,3} &= V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(1,-3)}^{2,0} \vee V_{(0,0)}^{1,1} &= V_{(1,-3)}^{3,1} \\ V_{(0,0)}^{1,1} \vee V_{(0,0)}^{2,2} &= V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(1,-3)}^{3,1} \vee V_{(1,3)}^{0,2} &= V_{(0,0)}^{3,3} & V_{(1,3)}^{0,2} \vee V_{(0,0)}^{1,1} &= V_{(1,3)}^{1,3} \\ V_{(2,0)}^{1,1} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(1,-3)}^{2,0} \vee V_{(1,3)}^{0,2} &= -3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} & V_{(1,3)}^{0,2} \vee V_{(2,0)}^{1,1} &= -3V_{(1,3)}^{1,3} \end{aligned}$$

Luego, el producto copa sobre  $H_E^{\bullet,\bullet}$  está presentado por el siguiente Lema:

**Lema 6.3.3.** El producto copa sobre  $H_E^{\bullet,\bullet}$  queda descrito por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\vee$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$
$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$				
$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$-3V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,3)}^{1,3}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$			
$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,-3)}^{3,1}$		$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2}$				$V_{(0,0)}^{3,3}$	
$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$	$-3V_{(1,3)}^{1,3}$	$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus -V_{(0,0)}^{2,2}$				$-V_{(0,0)}^{3,3}$		
$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$								
$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$							
$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$V_{(1,-3)}^{3,1}$				$V_{(0,0)}^{3,3}$					
$V_{(1,3)}^{1,3}$	$V_{(1,3)}^{1,3}$			$-V_{(0,0)}^{3,3}$						
$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$									

(6.4)

**Observación 6.3.1.** No es posible elegir representantes dominantes  $\tilde{v}_{n,k}^{p,q}$  en  $H_E^{\bullet,\bullet}$  tales que los coeficientes  $\gamma_{n,k}^{p,q}$  sean todos iguales a 1. En efecto, si fuera posible debemos pedir que  $-\frac{t_1 t_2}{2\lambda^2} = 1$  y  $\frac{t_1 t_2}{6\lambda^2} = 1$  con lo cual  $\lambda = 0$ , lo que es absurdo.

Al igual que en  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ , si pensamos a los  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos como  $\tau_1 = V_{(1,-3)}^{2,0}$ ,  $\tau_2 = V_{(1,3)}^{0,2}$  entonces la  $\mathfrak{gl}(2)$ -álgebra  $(H_E^{\bullet,\bullet}, \vee)$  define un álgebra asociativa presentada por:

$$\mathbb{C}[\zeta, \eta, \tau_1, \tau_2] / \langle \zeta^4, \zeta^2 - \eta^2, \eta^2 \zeta, \tau_1(3\zeta - \eta), \tau_2(3\zeta + \eta), \tau_1 \eta + \eta \tau_1, \tau_2 \eta + \eta \tau_2 \rangle \quad (6.5)$$

cuya tabla de multiplicación asociada es:

$\cdot$	1	$\zeta$	$\eta$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\zeta^2$	$\zeta\eta$	$\zeta\tau_1$	$\zeta\tau_2$	$\zeta^3$
1	1	$\zeta$	$\eta$	$\tau_1$	$\tau_2$	$\zeta^2$	$\zeta\eta$	$\zeta\tau_1$	$\zeta\tau_2$	$\zeta^3$
$\zeta$	$\zeta$	$\zeta^2$	$\zeta\eta$	$\zeta\tau_1$	$\zeta\tau_2$	$\zeta^3$				
$\eta$	$\eta$	$\zeta\eta$	$\zeta^2$	$-3\zeta\tau_1$	$3\zeta\tau_2$		$\zeta^3$			
$\tau_1$	$\tau_1$	$\zeta\tau_1$	$3\zeta\tau_1$		$-3\zeta\eta + \zeta^2$				$\zeta^3$	
$\tau_2$	$\tau_2$	$\zeta\tau_2$	$-3\zeta\tau_2$	$-3\zeta\eta - \zeta^2$				$-\zeta^3$		
$\zeta^2$	$\zeta^2$	$\zeta^3$								
$\zeta\eta$	$\zeta\eta$		$\zeta^3$							
$\zeta\tau_1$	$\zeta\tau_1$				$\zeta^3$					
$\zeta\tau_2$	$\zeta\tau_2$			$-\zeta^3$						
$\tau^3$	$\tau^3$									

#### 6.4. Corchete de Poisson sobre $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ y $H_E^{\bullet,\bullet}$

Ahora queremos calcular las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas del corchete de Poisson sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$ . Usando los representantes de peso máximo  $v_{m,k}^{p,q}$  de la Sec. 6.1 obtenemos el siguiente Lema:

**Lema 6.4.1.** La cohomología  $H_E^{\bullet,\bullet}$  tiene los siguientes productos de Clebsch-Gordan no triviales asociados al corchete de Poisson:

$$\begin{aligned}
\left\{ v_{1,-3}^{2,0}, v_{0,0}^{1,1} \right\} &= -3v_{1,-3}^{2,0} & \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 4v_{2,0}^{1,1} \\
\left\{ v_{1,-3}^{2,0}, v_{0,0}^{2,2} \right\} &= v_{1,-3}^{3,1} & \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{2,2} \right\} &= 4v_{2,0}^{2,2} \\
\left\{ v_{1,-3}^{2,0}, v_{1,3}^{0,2} \right\} &= -v_{2,0}^{1,1} & \left\{ f \cdot v_{1,-3}^{2,0}, v_{1,3}^{0,2} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{2,0}, f \cdot v_{1,3}^{0,2} \right\} &= v_{0,0}^{1,1} \\
\left\{ v_{1,-3}^{2,0}, v_{1,3}^{1,3} \right\} &= v_{2,0}^{2,2} & \left\{ f \cdot v_{1,-3}^{2,0}, v_{1,3}^{1,3} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{2,0}, f \cdot v_{1,3}^{1,3} \right\} &= 3v_{0,0}^{2,2} \\
\left\{ v_{1,-3}^{3,1}, v_{0,0}^{1,1} \right\} &= -3v_{1,-3}^{3,1} & \left\{ f \cdot v_{1,-3}^{3,1}, v_{1,3}^{0,2} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{3,1}, f \cdot v_{1,3}^{0,2} \right\} &= -3v_{0,0}^{2,2} \\
\left\{ v_{1,-3}^{3,1}, v_{1,3}^{0,2} \right\} &= -v_{2,0}^{2,2} & \left\{ 2f \cdot v_{1,-3}^{2,0}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{2,0}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,-3}^{2,0} \\
\left\{ v_{1,3}^{0,2}, v_{0,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,3}^{0,2} & \left\{ 2f \cdot v_{1,-3}^{2,0}, v_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{2,0}, f \cdot v_{2,0}^{2,2} \right\} &= 3v_{1,-3}^{3,1} \\
\left\{ v_{1,3}^{0,2}, v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,3}^{0,2} & \left\{ 2f \cdot v_{1,-3}^{3,1}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{1,-3}^{3,1}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,-3}^{3,1} \\
\left\{ v_{1,3}^{0,2}, v_{0,0}^{2,2} \right\} &= v_{1,3}^{1,3} & \left\{ 2f \cdot v_{1,3}^{0,2}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{1,3}^{0,2}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,3}^{0,2} \\
\left\{ v_{1,3}^{1,3}, v_{0,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,3}^{1,3} & \left\{ 2f \cdot v_{1,3}^{0,2}, v_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{1,3}^{0,2}, f \cdot v_{2,0}^{2,2} \right\} &= -3v_{1,3}^{1,3} \\
&& \left\{ 2f \cdot v_{1,3}^{1,3}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{1,3}^{1,3}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 3v_{1,3}^{1,3}
\end{aligned} \quad (6.6)$$

*Demostración.* Como  $\{-, -\} : H^{p,q} \times H^{r,s} \rightarrow H^{p+r-1, q+s-1}$  necesariamente  $p+r-1 \leq 3$  y  $q+s-1 \leq 3$ . Esta condición descarta aquellos  $(p, q, r, s)$  cuyos corchetes se escapan de la graduación de  $H^{\bullet,\bullet}$ . Al igual que el producto copa,  $\{-, -\} : V_{(n_1, k_1)}^{p,q} \otimes V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \rightarrow H^{\bullet,\bullet}$  es  $\mathfrak{gl}(2)$ -invariante y

$$\left\{ V_{(n_1, k_1)}^{p,q}, V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \right\} \subset V_{(n_1+n_2, k_1+k_2)}^{p+r-1, q+s-1} \oplus V_{(n_1+n_2-2, k_1+k_2)}^{p+r-1, q+s-1} \oplus \dots \oplus V_{(|n_1-n_2|, k_1+k_2)}^{p+r-1, q+s-1}.$$

Por lo tanto, si  $\left\{ V_{(n_1, k_1)}^{p,q}, V_{(n_2, k_2)}^{r,s} \right\} \neq 0$  entonces algunos de los sumandos del lado derecho deben aparecer en la descomposición de  $H^{\bullet,\bullet}$ . Restringiéndonos a  $H_E^{\bullet,\bullet}$  y usando la Definición 5.4.1, obtenemos los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

- $\{-, -\} : H^{\bullet,0} \otimes H^{\bullet,q} \rightarrow H^{\bullet,q-1}$  con  $q \geq 1$ :
 
$$\{x^1 h^0, x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0\} = -3x^1 h^0.$$

$$\{x^1 h^0, x_1 h_0\} = -x^1 \otimes x_1.$$

$$\{x^1 h^0, x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}\} = x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$

$$\{x^1 h^0, x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0\} = x^1 h^0 \otimes x_1 h_0.$$

$$\{-x^{-1} h^0, x_1 h_0\} - \{x^1 h^0, x_{-1} h_0\} = x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0.$$

$$\{-x^{-1} h^0, x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0\} + \{x^1 h^0, x^{-1} \otimes x_1 x_{-1} h_0\} = 3x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}.$$

$$\{-2x^{-1} h^0, x^1 \otimes x_1\} - \{x^1 h^0, x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1\} = 3x^1 h^0.$$

$$\{-2x^{-1} h^0, x^1 h^0 \otimes x_1 h_0\} - \{x^1 h^0, x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 - x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0\} = 3x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$
- $\{-, -\} : H^{\bullet,q} \otimes H^{\bullet,s} \rightarrow H^{\bullet,q+s-1}$  con  $q, s \geq 1$ :
 
$$\{x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0, x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1\} = 3x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$

$$\{x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0, x_1 h_0\} = -3x_1 h_0.$$

$$\{x^1 \otimes x_{-1} + x^{-1} \otimes x_1 + 2h^0 \otimes h_0, x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0\} = -3x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$\{x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1, x_1 h_0\} = x^1 h^0 \otimes x_1 h_0.$$

$$\{x_1 h_0, x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}\} = x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$\{x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1, x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0\} - 2\{x^1 \otimes x_1, -x^{-1} \otimes x_1 x_{-1} h_0\} = 3x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

$$\{2x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1, x^1 \otimes x_1\} = 4x^1 \otimes x_1.$$

$$\{x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1, x^1 h^0 \otimes x_1 h_0\} - \{x^1 \otimes x_1, x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 - x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0\} = 4x^1 h^0 \otimes x_1 h_0.$$

$$\{2x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_{-1}, x^1 \otimes x_1\} - \{x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1, x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1\} = 3x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1.$$

$$\{x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_{-1}, x_1 h_0\} - \{x^{-1} x^1 h^0 \otimes x_1, x_{-1} h_0\} = -3x^{-1} x^1 \otimes x_1 x_{-1}.$$

$$\{2x_{-1} h_0, x^1 \otimes x_1\} - \{x_1 h_0, x^1 \otimes x_{-1} - x^{-1} \otimes x_1\} = 3x_1 h_0.$$

$$\{2x_{-1} h_0, x^1 h^0 \otimes x_1 h_0\} - \{x_1 h_0, x^1 h^0 \otimes x_{-1} h_0 - x^{-1} h^0 \otimes x_1 h_0\} = -3x^1 \otimes x_1 x_{-1} h_0.$$

Re-escribiendo los representantes anteriores con la notación  $v_{m,k}^{p,q}$  obtenemos los productos (6.6).  $\diamond$

Como  $\tilde{v}_{2,0}^{1,1} = \lambda v_{2,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{2,2} = -2\lambda^2 v_{2,0}^{2,2}$ , los corchetes de Poisson no triviales sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  están definidos por  $\left\{ V_{(2,0)}^{1,1}, V_{(2,0)}^{1,1} \right\} = \Lambda V_{(2,0)}^{1,1}$  y  $\left\{ V_{(2,0)}^{1,1}, V_{(2,0)}^{2,2} \right\} = \Lambda V_{(2,0)}^{2,2}$ , donde  $\Lambda = 4\lambda$  respectivamente.

Por lo tanto, los representantes dominantes de  $H_E^{\bullet,\bullet}$  quedan re-escalados como  $\tilde{v}_{0,0}^{-1,1} = \frac{\Lambda}{4} v_{0,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{-2,2} = -\frac{3\Lambda^2}{8} v_{0,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{0,0}^{-3,3} = -\frac{3\Lambda^3}{16} v_{0,0}^{3,3}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{1,1} = \frac{\Lambda}{4} v_{2,0}^{1,1}$ ,  $\tilde{v}_{2,0}^{-2,2} = -\frac{\Lambda^2}{8} v_{2,0}^{2,2}$ ,  $\tilde{v}_{1,-3}^{2,0} = \frac{3\Lambda^3}{32t} v_{1,-3}^{2,0}$ ,  $\tilde{v}_{1,3}^{0,2} = -\frac{4t}{\Lambda} v_{1,3}^{0,2}$ ,  $\tilde{v}_{1,-3}^{3,1} = -\frac{3\Lambda^4}{128t} v_{1,-3}^{3,1}$ ,  $\tilde{v}_{1,3}^{-1,3} = t v_{1,3}^{1,3}$  con  $\Lambda, t \neq 0$ .

Usando estos re-escalamiento y re-escribiendo los productos de Clebsch-Gordan (6.1)-(6.6) vemos que el producto copa sobre  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es presentado por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.4) y el corchete de Poisson es presentado por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{-, -\}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$					
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{2,0}$	$-\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$\Lambda V_{(2,0)}^{1,1}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{2,0}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{2,0}$		$-\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{2,0}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{2,0}$		$\frac{3\Lambda}{2}(-V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(0,0)}^{1,1})$
$V_{(1,3)}^{0,2}$		$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{0,2}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{0,2}$	$\frac{3\Lambda}{2}(V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(0,0)}^{1,1})$	
$V_{(0,0)}^{2,2}$				$\frac{3\Lambda}{2}V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-\frac{3\Lambda}{2}V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$\Lambda V_{(2,0)}^{2,2}$	$-\frac{3\Lambda}{2}V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-\frac{3\Lambda}{2}V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{3,1}$		$-\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{3,1}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{3,1}$		$\frac{3\Lambda}{4}(V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2})$
$V_{(1,3)}^{1,3}$		$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{1,3}$	$\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,3)}^{1,3}$	$\frac{3\Lambda}{4}(-V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2})$	
$V_{(0,0)}^{3,3}$					

(6.7)

con el resto obtenido por simetría. Cualquier  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.7) define un corchete de Poisson compatible con el producto copa definido por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.4), es decir que los productos definidos por ambas satisfacen la ley de compatibilidad (3) de la Definición 2.8.2.

Además, si  $g_i$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie definida por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.7) con parámetro  $\Lambda_i$ , entonces se puede ver que  $g_1 \cong g_2$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie a través del cambio de base diagonal  $\psi : g_1 \rightarrow g_2$  definido por  $x \mapsto \Lambda_1/\Lambda_2 \tilde{x}$ , por lo que basta tomar un valor fijo de  $\Lambda$ . Si  $\lambda = 1$ , ó equivalentemente  $\Lambda = 4$ , obtenemos el siguiente Lema:

**Lema 6.4.2.** El corchete de Poisson sobre  $H_E^{\bullet,\bullet}$  está definido por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{-, -\}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$					
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$-3V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$4V_{(2,0)}^{1,1}$	$3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$3V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{2,0}$		$-3V_{(1,-3)}^{2,0}$	$3V_{(1,-3)}^{2,0}$		$-6V_{(2,0)}^{1,1} \oplus 6V_{(0,0)}^{1,1}$
$V_{(1,3)}^{0,2}$		$3V_{(1,3)}^{0,2}$	$3V_{(1,3)}^{0,2}$	$6V_{(2,0)}^{1,1} \oplus 6V_{(0,0)}^{1,1}$	
$V_{(0,0)}^{2,2}$				$6V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-6V_{(1,3)}^{1,3}$
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$4V_{(2,0)}^{2,2}$	$-6V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-6V_{(1,3)}^{1,3}$
$V_{(1,-3)}^{3,1}$		$-3V_{(1,-3)}^{3,1}$	$3V_{(1,-3)}^{3,1}$		$3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus 3V_{(0,0)}^{2,2}$
$V_{(1,3)}^{1,3}$		$3V_{(1,3)}^{1,3}$	$3V_{(1,3)}^{1,3}$	$-3V_{(2,0)}^{2,2} \oplus 3V_{(0,0)}^{2,2}$	
$V_{(0,0)}^{3,3}$					

(6.8)

### 6.4.1. Subálgebras

**Teorema 6.1.**  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie isomorfa a  $\mathfrak{gl}(2) \times \mathfrak{gl}(2)_{ab} \oplus \mathbb{C}^2$  donde  $\mathfrak{gl}(2)_{ab}$  es vista como álgebra de Lie abeliana.

*Demostración.* En efecto, por el Lema 4.3.2 de la Subsec. 4.3.4, la expresión  $\{V_{(2,0)}^{1,1}, V_{(2,0)}^{1,1}\} = \Lambda V_{(2,0)}^{1,1}$  define una  $\mathfrak{sl}(2)$ -Lie isomorfa a  $\mathfrak{sl}(2)$ . Además,  $\{V_{(2,0)}^{1,1}, V_{(2,0)}^{2,2}\} = \Lambda V_{(2,0)}^{2,2}$  también muestra que  $V_{(2,0)}^{2,2}$  es un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo por la acción adjunta y por cuestiones de grado sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  vemos que  $\{V_{(2,0)}^{2,2}, V_{(2,0)}^{2,2}\} = 0$ . Por lo tanto  $\mathfrak{sl}(2)_{ab} \cong V_{(2,0)}^{2,2}$  y como  $V_{(0,0)}^{1,1}, V_{(0,0)}^{2,2}$  se corresponden con las respectivas identidades  $\text{id}_2$  sobre cada módulo, obtenemos que  $H_{diag}^{\bullet,\bullet} \cong \mathfrak{gl}(2) \times \mathfrak{gl}(2)_{ab} \oplus \mathbb{C}^2$ , donde el factor abeliano  $\mathbb{C}^2$  está dado por  $V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$ .  $\diamond$

Como previo paso para la descripción de  $H_E^{\bullet,\bullet}$ , obtuvimos las siguientes  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie:

**Proposición 6.4.1.**  $\mathcal{H}_1 = \mathfrak{gl}(2) \ltimes (\mathfrak{gl}(2)_{ab} \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$  y  $\mathcal{H}_2 = \mathfrak{gl}(2) \ltimes (\mathfrak{gl}(2)_{ab} \ltimes \mathbb{C}^2 \oplus \mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}^2$  son  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie con  $H_{diag}^{\bullet,\bullet} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ .

*Demostración.* En efecto, notemos que  $\mathcal{H}_1 = H_{diag}^{\bullet,\bullet} \oplus V_{(1,-3)}^{3,1}$  y el corchete  $\{V_{(1,-3)}^{3,1}, V_{(m,0)}^{1,1}\} = -\frac{3\Lambda}{4}V_{(1,-3)}^{3,1}$  implica que  $\mathfrak{gl}(2)$  actúa por adjunta sobre  $V_{(1,-3)}^{3,1}$ . Un razonamiento similar ocurre con  $\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \oplus V_{(1,-3)}^{2,0}$  y además  $\mathfrak{gl}(2)_{ab}$  actúa por adjunta sobre  $V_{(1,-3)}^{2,0}$ . La parte de las contenciones es inmediata.  $\diamond$

**Teorema 6.2.**  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie isomorfa a  $\mathfrak{gl}(3) \ltimes \mathfrak{gl}(3)_{ab}$ , donde  $\mathfrak{gl}(3)_{ab}$  es vista como álgebra de Lie abeliana.

*Demostración.* Por un lado, sean  $\mathfrak{A} = V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(1,-3)}^{2,0} \oplus V_{(1,3)}^{0,2}$  y  $\mathfrak{A}' = V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(1,-3)}^{3,1} \oplus V_{(1,3)}^{1,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$  respectivamente. Entonces  $\mathfrak{A}'$  es un álgebra de Lie abeliana, pues su  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla es nula. Aplicando la proposición 4.3.2 con  $\lambda = 4$ ,  $r = -3$  y  $\kappa = -6$ , se sigue que  $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{gl}(3)$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie. Aplicando nuevamente la proposición 4.3.2 entre  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{A}'$ , concluimos que  $\mathfrak{A}$  actúa por adjunta sobre  $\mathfrak{A}'$ .

Es decir,  $H_E^{\bullet,\bullet} = \mathfrak{A} \ltimes \mathfrak{A}' \cong \mathfrak{gl}(3) \ltimes \mathfrak{gl}(3)_{ab}$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie, donde  $\mathfrak{gl}(3)_{ab}$  es visto como álgebra de Lie abeliana puesto que por cuestiones de grado su corchete es nulo, lo que concluye el resultado.  $\diamond$

Notar que por cuestiones de grados sobre ambos productos, las únicas  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie mencionadas anteriormente que son álgebras de Poisson son  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$ . Por último, tenemos el siguiente Teorema:

**Teorema 6.3.**  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es una  $\mathfrak{sl}(3)$ -álgebra de Poisson isomorfa a  $\mathcal{Q}_3$ .

*Demostración.* Por el Teorema 6.2, la estructura de Lie subyacente sobre  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es  $\mathfrak{gl}(3) \ltimes \mathfrak{gl}(3)_{ab}$ . Denotemos ahora  $\mathfrak{gl}(3) = \mathfrak{gl}(3)_0$  y  $\mathfrak{gl}(3)_{ab} = \mathfrak{gl}(3)_1$ , con lo cual  $I_0, I_1$  denotarán las respectivas identidades sobre cada álgebra.

Además, usando la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.4) del producto copa, notamos  $I_0 = V_{(0,0)}^{0,0}$  es la identidad del producto,  $\mathfrak{sl}(3)_0 \vee \mathfrak{sl}(3)_0 = k_1 \mathfrak{sl}(3)_1$  y  $\mathfrak{sl}(3)_0 \vee \mathfrak{sl}(3)_1 = k_2 I_1$  por lo que (inicialmente) obtenemos la siguiente  $\mathfrak{sl}(3)$ -tabla:

$\vee$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$
$I_0$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$
$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$k_1 \mathfrak{sl}(3)_1$	$k_2 I_1$	0
$\mathfrak{sl}(3)_1$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$k_2 I_1$	0	0
$I_1$	$I_1$	0	0	0

Sin embargo, por lo visto en la Sec. 4.2, es posible hacer un re-escalamiento en los morfismos  $\hat{\tau}_i = \lambda_i \tau_i$  de modo que  $k_1 \lambda_1^2 = \lambda_2$  y  $k_2 \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_3$ , con lo cual la  $\mathfrak{sl}(3)$ -tabla final del producto copa nos queda como:

$\vee$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$
$I_0$	$I_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$
$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_0$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$	0
$\mathfrak{sl}(3)_1$	$\mathfrak{sl}(3)_1$	$I_1$	0	0
$I_1$	$I_1$	0	0	0

que justamente es la  $\mathfrak{sl}(3)$ -tabla del producto  $\diamond$  en  $\mathcal{Q}_3$ . Luego, por la Proposición 4.1,  $H_E^{\bullet,\bullet} \cong \mathcal{Q}_3$  como  $\mathfrak{sl}(3)$ -álgebra de Poisson.  $\diamond$

## 6.4.2. Observación

Sean  $\Lambda \neq 0$  y  $t_1, t_2, t_3, t_4 \neq 0$  parámetros arbitrarios y definamos la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla con los  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos de  $H_E^{\bullet,\bullet}$ :

$\{-, -\}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$					
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$-t_1 V_{(1,-3)}^{2,0}$	$t_1 V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$\Lambda V_{(2,0)}^{1,1}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,-3)}^{2,0}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{2,0}$	$t_1 V_{(1,-3)}^{2,0}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,-3)}^{2,0}$			$-\frac{4t_2 t_3 t_5}{3t_4 \Lambda} V_{(2,0)}^{1,1} \oplus -\frac{t_2 t_3 t_5}{t_1 t_4} V_{(0,0)}^{1,1}$
$V_{(1,3)}^{0,2}$	$-t_1 V_{(1,3)}^{0,2}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,3)}^{0,2}$	$-\frac{t_2 t_3 t_5}{t_1 t_4} V_{(2,0)}^{1,1} \oplus \frac{4t_2 t_3 t_5}{3t_4 \Lambda} V_{(0,0)}^{1,1}$		
$V_{(0,0)}^{2,2}$				$\frac{t_2 t_3}{t_4} V_{(1,-3)}^{3,1}$	$-t_3 V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(2,0)}^{2,2}$		$\Lambda V_{(2,0)}^{2,2}$		$t_2 V_{(1,-3)}^{3,1}$	$t_4 V_{(1,3)}^{0,2}$
$V_{(1,-3)}^{3,1}$	$t_1 V_{(1,-3)}^{3,1}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,-3)}^{3,1}$			$-\frac{t_3 t_5}{t_4} V_{(2,0)}^{2,2} \oplus t_5 V_{(0,0)}^{2,2}$
$V_{(1,3)}^{1,3}$	$-t_1 V_{(1,3)}^{1,3}$	$\frac{3\Lambda}{4} V_{(1,3)}^{1,3}$	$\frac{t_2 t_3 t_5}{t_4^2} V_{(2,0)}^{2,2} \oplus \frac{t_2 t_5}{t_4} V_{(0,0)}^{2,2}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$					

(6.9)

Entonces esta  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla define un corchete de Lie y este corchete de Lie satisface la ley de compatibilidad con el producto copa definido por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.4) si y sólo si  $t_1 = -\frac{3\Lambda}{4}$ ,  $t_2 = -\frac{3\Lambda}{2}$ ,  $t_3 = \frac{3\Lambda}{2}$ ,  $t_4 = -\frac{3\Lambda}{2}$ ,  $t_5 = \frac{3\Lambda}{4}$ . Sustituyendo estos parámetros en la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (6.9) se obtiene (6.7)

# Capítulo 7

## Estructura de Poisson en $H^{\bullet, \bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$

### 7.1. Álgebras de Lie nilpotentes libres

**Definición 7.1.1.** Un álgebra de Lie libre generada por un conjunto  $X$  es un par  $(\mathfrak{f}, \iota)$  donde  $\mathfrak{f}$  es un álgebra de Lie y  $\iota : X \rightarrow \mathfrak{f}$  una aplicación con la propiedad universal que para toda aplicación  $\theta : X \rightarrow \mathfrak{g}$  con  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie, existe un único morfismo de Lie  $\tilde{\theta} : \mathfrak{f} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $\theta = \iota \tilde{\theta}$ .

Si  $X = \{x_1, \dots, x_r\}$  decimos que  $\mathfrak{f}$  es libre de rango  $r$  y se denota por  $\mathfrak{f}_r$ . Para construir el objeto  $\mathfrak{f}_r$  tomemos el espacio vectorial  $V$  generado por  $X$  y su álgebra tensorial  $T(V) = \mathbb{C} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \dots$  con la estructura de Lie dada por el conmutador.

Sea  $\mathfrak{f}_r$  la subálgebra de Lie de  $T(V)$  generada por  $X$ , es decir, la intersección de todas las subálgebras de Lie de  $T(V)$  que contienen a  $X$  y  $\iota : X \rightarrow T(V)$  la inclusión canónica. Luego  $(\mathfrak{f}_r, \iota)$  es un álgebra de Lie libre sobre  $X$  y  $\mathfrak{f}_r$  coincide con el subespacio vectorial de  $T(V)$  generado por los elementos de la forma:

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_m}] = [x_{i_1}, [x_{i_2}, \dots, [x_{i_{m-1}}, x_{i_m}]]], \quad (7.1)$$

con  $1 \leq i_k \leq r$ ,  $m \in \mathbb{N}$  y  $[x_k, x_l] = x_k \otimes x_l - x_l \otimes x_k$ . En efecto, por la identidad de Jacobi tal subespacio es una subálgebra de  $\mathfrak{f}_r$  y como contiene a los generadores  $x_i$ , debe coincidir con  $\mathfrak{f}_r$  [Jac79]. Si  $\mathfrak{f}_r(m)$  es el submódulo de  $\mathfrak{f}_r$  generado por las expresiones (7.1) de grado  $m$ , entonces  $\mathfrak{f}_r$  presenta la graduación:

$$\mathfrak{f}_r = \mathfrak{f}_r(1) \oplus \mathfrak{f}_r(2) \oplus \mathfrak{f}_r(3) \oplus \dots \subset V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots,$$

donde  $\mathfrak{f}_r(m) = [V, \mathfrak{f}_r(m-1)]$  y  $\mathfrak{f}_r(1) = V$ .

**Definición 7.1.2.** Para todo natural  $t \geq 1$ , definimos el álgebra de Lie libre  $t$ -pasos nilpotente de rango  $r$  como el cociente  $\mathfrak{f}_{t,r} = \frac{\mathfrak{f}_r}{\mathfrak{f}_r^{t+1}}$ , donde  $\mathfrak{f}_r^{t+1}$  es el ideal de  $\mathfrak{f}_r$  definido por:

$$\mathfrak{f}_r^{t+1} = \sum_{k \geq t+1} \langle [x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] : 1 \leq i_s \leq r \rangle$$

Usualmente  $\mathfrak{f}_{t,r}$  es llamada álgebra de Lie libre  $t$ -pasos nilpotentes en  $r$  generadores [Jac79, PRL19]. Notemos que  $\mathfrak{f}_{t,r}$  presenta la graduación  $\mathfrak{f}_{t,r} = \mathfrak{f}_r(1) \oplus \mathfrak{f}_r(2) \oplus \dots \oplus \mathfrak{f}_r(t)$  y la dimensión de  $\mathfrak{f}_r(m)$  se calcula mediante la función de Möebius  $\mu$  por:

$$\dim \mathfrak{f}_r(m) = \frac{1}{m} \sum_{k|m} \mu(k) r^{m/k} \quad (7.2)$$

Además, cualquier morfismo lineal  $\phi : V \rightarrow \mathfrak{f}_{t,r}$  se extiende a una única derivación  $d_\phi$  de  $\mathfrak{f}_{t,r}$  y a un único morfismo de Lie  $\Phi_\phi$  de  $\mathfrak{f}_{t,r}$  definiendo:

$$\begin{aligned} d_\phi([x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]) &= \sum_{s \leq k} [x_{i_1}, \dots, \phi(x_{i_s}), \dots, x_{i_k}], \\ \Phi_\phi([x_{i_1}, \dots, x_{i_k}]) &= [\phi(x_{i_1}), \dots, \phi(x_{i_k})]. \end{aligned}$$

El álgebra de derivaciones de  $\mathfrak{f}_{t,r}$  es  $\text{Der} \mathfrak{f}_{t,r} = \{d_\phi : \phi \in \text{Hom}(V, \mathfrak{f}_{t,r})\}$  y el grupo de automorfismos de  $\mathfrak{f}_{t,r}$  es  $\text{Aut} \mathfrak{f}_{t,r} = \{\Phi_\phi : \phi \in \text{Hom}(V, V) \text{ es biyectiva}\}$ . El factor de Levi  $\mathcal{S}_{t,r}$  de  $\text{Der} \mathfrak{f}_{t,r}$  está dado por los morfismo lineales  $d_\phi$  tales que  $\phi \in \mathfrak{sl}(V)$ , es decir,  $\mathcal{S}_{t,r} \cong \mathfrak{sl}(r)$ . El grupo de automorfismo  $\text{Aut} \mathfrak{f}_{t,r}$  es el producto semidirecto  $\text{GL}(r) \ltimes \text{NL}(r)$  donde el grupo general lineal  $\text{GL}(r)$  es obtenido de los automorfismos  $\Phi_\phi$  tales que  $\phi \in \text{GL}(V)$  y el grupo nilpotente  $\text{NL}(r)$  es obtenido de los automorfismos  $\Phi_\sigma$ , donde  $\sigma = I_V + \psi$  y  $\psi \in \text{Hom}(V, \mathfrak{f}_{t,r}^2)$  [PRL19]. Usando estos hechos tenemos la siguiente proposición:

**Proposición 7.1.1.** Toda álgebra de Lie  $\mathfrak{f}_{t,r}$  es una  $\text{GL}(r) \ltimes \text{NL}(r)$ -Lie y en particular una  $\mathfrak{gl}(r)$ -Lie respectivamente.

En esta tesis consideramos algunos casos con  $r = 2$ . Observemos que  $\text{Der} \mathfrak{f}_{t,2}$  es un álgebra de Lie graduada con graduación dada por [Pil14b]:

$$\text{Der} \mathfrak{f}_{t,2} = \bigoplus_{k=1}^t \text{Der}_k \mathfrak{f}_{t,2},$$

donde  $\text{Der}_k \mathfrak{f}_{t,2} = \{d_\phi : \phi \in \text{Hom}(V, \mathfrak{f}_2(k))\}$  y el corchete es dado por el conmutador graduado  $[\phi_i, \phi_j] = \phi_i \phi_j - \phi_j \phi_i \in \text{Der}_{i+j-1} \mathfrak{f}_{t,2}$ , para todo  $\phi_s \in \text{Der}_s \mathfrak{f}_{t,2}$ . Aquí se tiene que  $\text{Der}_1 \mathfrak{f}_{t,2} \cong \mathfrak{gl}(2) = \mathfrak{sl}(2) \oplus \mathbb{C} \cdot \text{id}_{t,2}$  donde  $\text{id}_{t,2}$  es la extensión por derivación de la identidad  $\text{id}_V$  en el sentido:

$$\text{id}_{t,2} |_{\mathfrak{f}_r(k)} = k \cdot \text{id}_{\mathfrak{f}_r(k)}, \quad \forall k \geq 1.$$

El radical soluble  $\mathcal{R}_{t,2}$  y nilradical  $\mathcal{N}_{t,2}$  de  $\text{Der} \mathfrak{f}_{t,2}$  están dados por:

$$\mathcal{N}_{t,2} = \bigoplus_{k=2}^t \text{Der}_k \mathfrak{f}_{t,2}, \quad \mathcal{R}_{t,2} = \mathbb{C} \cdot \text{id}_{t,2} \oplus \mathcal{N}_{t,2}$$

**Ejemplo 7.1.1.** [Pil14a] Como  $\mathfrak{f}_{t,2}$  es un  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo, tiene una descomposición  $\mathfrak{f}_{t,2} = V_{(m_1, l_1)} \oplus \dots \oplus V_{(m_s, l_s)}$ , donde  $V_{(m,l)}$  denota al  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible de peso  $(m, l)$  (Sec. 4.1). Como  $V \cong \mathbb{C}^2$ , necesariamente el primer sumando en la descomposición de  $\mathfrak{f}_{t,2}$  es  $\mathfrak{f}_2(1) = V_{(1,1)}$  y podemos suponer que  $\{e_1, e_{-1}\}$  es la base de peso de  $V_{(1,1)}$ . Luego para los primeros  $t \geq 2$  obtenemos las siguientes descomposiciones:

- \* Por la fórmula 7.2, se sigue que  $\mathfrak{f}_2(2)$  es 1-dimensional y  $\mathfrak{f}_2(2) = [V, \mathfrak{f}_2(1)] = [V_{(1,1)}, V_{(1,1)}]$ . Como  $\mathfrak{f}_2(2) \subset V_{(1,1)} \otimes V_{(1,1)} \cong V_{(2,2)} \oplus V_{(0,2)}$ , necesariamente  $\mathfrak{f}_2(2) = \langle f_0 \rangle = V_{(0,2)}$  con  $f_0 = [e_1, e_{-1}]$ . Por lo tanto, una base para  $\mathfrak{f}_{2,2}$  está dada por los símbolos  $\{e_1, e_{-1}, f_0\}$ .
- \* Por la fórmula 7.2, se sigue que  $\mathfrak{f}_2(3)$  es 2-dimensional y  $\mathfrak{f}_2(3) = [V, \mathfrak{f}_2(2)]$ . Como  $\mathfrak{f}_2(3) \subset V_{(1,1)} \otimes V_{(0,2)} \cong V_{(1,3)}$ , necesariamente  $\mathfrak{f}_2(3) = V_{(1,3)} = \langle y_1, y_{-1} \rangle$  con  $y_i = [e_i, f_0]$ . Por lo tanto, una base para  $\mathfrak{f}_{3,2}$  está dada por los símbolos  $\{e_1, e_{-1}, f_0, y_1, y_{-1}\}$ .
- \* Por la fórmula 7.2, se sigue que  $\mathfrak{f}_2(4)$  es 3-dimensional y  $\mathfrak{f}_2(4) \subset V_{(1,1)} \otimes V_{(1,3)} \cong V_{(2,4)} \oplus V_{(0,4)}$ . Luego  $\mathfrak{f}_2(4) = V_{(2,4)} = \langle w_2, w_0, w_{-2} \rangle$  con  $w_2 = [e_1, y_1]$ ,  $w_0 = 2[e_1, y_{-1}] = 2[e_{-1}, y_1]$  y  $w_{-2} = [e_{-1}, y_{-1}]$ . Por lo tanto, una base para  $\mathfrak{f}_{4,2}$  es dada por los símbolos  $\{e_1, e_{-1}, f_0, y_1, y_{-1}, w_2, w_0, w_{-2}\}$ .

## 7.2. Estructura de $(\mathfrak{gl}(2) \ltimes \Omega_2)$ -módulo de $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$

Consideremos el álgebra de Lie 3-pasos nilpotente libre en dos generadores  $\mathfrak{f}_{3,2}$  con base ordenada  $\{e_1, e_{-1}, f_0, y_1, y_{-1}\}$  y corchetes no triviales:

$$[e_1, e_{-1}] = f_0, \quad [e_1, f_0] = y_1, \quad [e_{-1}, f_0] = y_{-1},$$

Luego,  $\mathfrak{f}_{3,2} = V_{(1,1)} \oplus V_{(0,2)} \oplus V_{(1,3)}$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo, donde  $V_{(1,1)} = \langle e_1 \rangle$ ,  $V_{(0,2)} = \langle f_0 \rangle$  y  $V_{(1,3)} = \langle y_1 \rangle$ , el centro es el ideal  $\mathfrak{z}_{3,2} = \langle y_1 \rangle$  y el  $\mathfrak{f}_{3,2}$ -módulo coadjunto es  $\mathfrak{f}_{3,2}^* = V_{(1,-1)} \oplus V_{(0,-2)} \oplus V_{(1,-3)}$ , donde  $V_{(1,-1)} = \langle e^1 \rangle = \langle e_{-1}^* \rangle$ ,  $V_{(0,-2)} = \langle f^0 \rangle = \langle f_0^* \rangle$  y  $V_{(1,-3)} = \langle y^1 \rangle = \langle y_{-1}^* \rangle$ . Notar que la identidad  $\text{id}_{3,2}$  de  $\mathfrak{gl}(2)$  es la derivación definida como:

$$\text{id}_{3,2} = e^1 \otimes e_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 + 2f^0 \otimes f_0 + 3y^{-1} \otimes y_1 + 3y^1 \otimes y_{-1}.$$

Denotemos por  $C^{\bullet,\bullet} = C^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$  y  $H^{\bullet,\bullet} = H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2})$  su cohomología. Al igual que en el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$ , la descomposición en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles de cada  $C^{p,q}$  se obtiene por el Teorema de Clebsch-Gordan. Por ejemplo, en los grados  $(2,0)$ ,  $(1,1)$  y  $(0,2)$  obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Lambda^2 \mathfrak{f}_{3,2}^* &= \langle e^{-1}e^1 \rangle \oplus \langle y^{-1}y^1 \rangle \oplus \langle e^1f^0 \rangle \oplus \langle y^1f^0 \rangle \oplus \langle e^1y^1 \rangle \oplus \langle e^1y^{-1} - e^{-1}y^1 \rangle \\ \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2} &= \langle y^{-1} \otimes y_1 + y^1 \otimes y_{-1} \rangle \oplus \langle e^{-1} \otimes y_1 + e^1 \otimes y_{-1} \rangle \oplus \langle y^1 \otimes y_1 \rangle \oplus \langle f^0 \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes y_1 \rangle \oplus \\ &\quad \langle y^1 \otimes f_0 \rangle \oplus \langle f^0 \otimes f_0 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes f_0 \rangle \oplus \langle y^{-1} \otimes e_1 + y^1 \otimes e_{-1} \rangle \oplus \langle e^{-1} \otimes e_1 + e^1 \otimes e_{-1} \rangle \oplus \\ &\quad \langle y^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle f^0 \otimes f_0 \rangle \\ \Lambda^2 \mathfrak{f}_{3,2} &= \langle e_1e_{-1} \rangle \oplus \langle y_1y_{-1} \rangle \oplus \langle e_1f_0 \rangle \oplus \langle f_0y_1 \rangle \oplus \langle e_1y_1 \rangle \oplus \langle e_{-1}y_1 - e_1y_{-1} \rangle \end{aligned}$$

Como  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es un álgebra de Lie cuadrática (Sec. 2.6) con forma bilineal asociada  $B : \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}^* \rightarrow \mathbb{C}$  dada por:

$$B = e^{-1} \otimes y^1 + y^1 \otimes e^{-1} - (e^1 \otimes y^{-1} + y^{-1} \otimes e^1) + f^0 \otimes f^0, \quad (7.3)$$

obtenemos que la  $B$ -base de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  asociada a  $\{e_1, e_{-1}, f_0, y_1, y_{-1}\}$  es  $\{y_{-1}, -y_1, f_0, -e_{-1}, e_1\}$  y la 3-forma alterante  $I_B : \Lambda^3 \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \mathbb{C}$  es  $I_B = e^{-1}e^1f^0$ . Luego,  $B$  define un corchete de súper-Poisson  $\{\cdot, \cdot\}_B : C^{\bullet,0} \times C^{\bullet,0} \rightarrow C^{\bullet-2,0}$  sobre  $C^{\bullet,0}$  (Sec. 2.6) mediante la fórmula  $\{\Omega_1, \Omega_2\}_B = (-1)^{k+1} \{\Omega_1, \Omega_2\}'_B, \forall \Omega_1 \in C^{k,0}, \Omega_2 \in C^{\bullet,0}$ , donde:

$$\{\Omega_1, \Omega_2\}'_B = \iota_{y_{-1}}(\Omega_1) \wedge \iota_{e_1}(\Omega_2) - \iota_{y_1}(\Omega_1) \wedge \iota_{e_{-1}}(\Omega_2) + \iota_{f_0}(\Omega_1) \wedge \iota_{f_0}(\Omega_2) - \iota_{e_{-1}}(\Omega_1) \wedge \iota_{y_1}(\Omega_2) + \iota_{e_1}(\Omega_1) \wedge \iota_{y_{-1}}(\Omega_2)$$

El diferencial de Chevalley  $\delta_t$  en  $C^{\bullet,0}$  está dado por  $\delta_t(\omega) = -\{I_B, \omega\}_B$ , lo que equivale a:

$$\delta_t(\omega) = -\iota_{f_0}(e^{-1}e^1f^0) \wedge \iota_{f_0}(\omega) + \iota_{e_{-1}}(e^{-1}e^1f^0) \wedge \iota_{y_1}(\omega) - \iota_{e_1}(e^{-1}e^1f^0) \wedge \iota_{y_{-1}}(\omega), \quad (7.4)$$

**Lema 7.2.1.** Las descomposiciones en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles de cada  $H^{p,q}$ , con  $0 \leq q \leq 2$ , junto con sus representantes de clase de cohomología dominantes resultan:

$$\begin{aligned} H^{0,0} &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} \\ H^{1,0} &= \langle e^1 \rangle = V_{(1,-1)}^{1,0} \\ H^{2,0} &= \langle e^1y^1 \rangle = V_{(2,-4)}^{2,0} \\ H^{3,0} &= \langle e^1f^0y^1 \rangle = V_{(2,-6)}^{3,0} \\ H^{4,0} &= \langle e^1f^0y^{-1}y^1 \rangle = V_{(1,-9)}^{4,0} \\ H^{5,0} &= \langle e^{-1}e^1f^0y^{-1}y^1 \rangle = V_{(0,-10)}^{5,0} \\ H^{0,1} &= \langle y_1 \rangle = V_{(1,3)}^{0,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{1,1} &= \langle e^1 \otimes e_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 + 2f^0 \otimes f_0 + 3y^1 \otimes y_{-1} + 3y^{-1} \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 + y^1 \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes y_1 \rangle \\
&= V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1} \\
H^{2,1} &= \langle e^1 y^1 \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \otimes y_{-1} - e^{-1} e^1 \otimes e_1 + e^1 y^{-1} \otimes y_1 \rangle \\
&= V_{(3,-1)}^{2,1} \oplus V_{(2,-2)}^{2,1} \oplus V_{(1,-1)}^{2,1} \\
H^{3,1} &= \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^1 y^{-1} y^1 \otimes y_1 - e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_{-1} - e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 + 2e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 \rangle \\
&= V_{(3,-5)}^{3,1} \oplus V_{(2,-4)}^{3,1} \oplus V_{(1,-5)}^{3,1} \\
H^{4,1} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 \rangle \\
&= V_{(2,-6)}^{4,1} \oplus V_{(2,-8)}^{4,1} \oplus V_{(0,-6)}^{4,1} \\
H^{5,1} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 \rangle = V_{(1,-9)}^{5,1} \\
H^{0,2} &= \langle y_1 y_{-1} \rangle = V_{(0,6)}^{0,2} \\
H^{1,2} &= \langle 2e^1 \otimes e_1 y_{-1} - e^1 \otimes e_{-1} y_1 + e^{-1} \otimes e_1 y_1 + 3y^1 \otimes y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 y_1 \rangle \\
&= V_{(1,3)}^{1,2} \oplus V_{(3,3)}^{1,2} \\
H^{2,2} &= \langle 2e^{-1} e^1 \otimes e_1 e_{-1} + e^{-1} y^1 \otimes e_1 y_{-1} - e^1 y^{-1} \otimes e_1 y_{-1} - e^{-1} y^1 \otimes e_{-1} y_1 + e^1 y^{-1} \otimes e_{-1} y_1 + \\
&\quad f^0 y^{-1} \otimes f_0 y_1 + f^0 y^1 \otimes f_0 y_{-1} + 3y^{-1} y^1 \otimes y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \otimes f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \otimes e_1 y_1 \rangle \oplus \\
&\quad \langle 4e^1 f^0 \otimes e_1 f_0 - e^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1 + 3e^1 y^{-1} \otimes e_1 y_1 + e^1 y^1 \otimes e_1 y_{-1} + e^1 y^1 \otimes e_{-1} y_1 \rangle \\
&= V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(3,1)}^{2,2} \oplus V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \\
H^{3,2} &= \langle e^{-1} e^1 y^{-1} \otimes e_1 f_0 + e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_{-1} f_0 + e^{-1} y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_1 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_{-1} + 2f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 y_{-1} \rangle \oplus \\
&\quad \langle e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 f_0 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 y_1 \rangle \\
&= V_{(0,-2)}^{3,2} \oplus V_{(2,-2)}^{3,2} \oplus V_{(3,-3)}^{3,2} \oplus V_{(4,-2)}^{3,2} \\
H^{4,2} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1 \rangle \\
&= V_{(1,-5)}^{4,2} \oplus V_{(3,-5)}^{4,2} \\
H^{5,2} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 e_{-1} \rangle = V_{(0,-8)}^{5,2}
\end{aligned}$$

Las dimensiones de  $H^{\bullet,q}$  para  $0 \leq q \leq 2$  son  $(1, 2, 3, 3, 2, 1)$ ,  $(2, 7, 9, 9, 7, 2)$  y  $(1, 6, 13, 13, 6, 1)$  respectivamente.

*Demostración.* † Para calcular  $H^{\bullet,0}$  usamos la expresión 7.4, teniendo como paso previo las descomposiciones en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles de cada  $C^{p,0}$ . Por ejemplo, para  $C^{1,0} = \langle e^1 \rangle \oplus \langle f^0 \rangle \oplus \langle y^1 \rangle$  vemos que:

$$\begin{aligned}
\delta_i(e^1) &= -\iota_{f_0}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{f_0}(e^1) + \iota_{e_{-1}}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_1}(e^1) - \iota_{e_1}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_{-1}}(e^1) = 0 \\
\delta_i(y^1) &= -\iota_{f_0}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{f_0}(y^1) + \iota_{e_{-1}}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_1}(y^1) - \iota_{e_1}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_{-1}}(y^1) = -e^1 f^0 \\
\delta_i(f^0) &= -\iota_{f_0}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{f_0}(f^0) + \iota_{e_{-1}}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_1}(f^0) - \iota_{e_1}(e^{-1} e^1 f^0) \wedge \iota_{y_{-1}}(f^0) = -e^{-1} e^1
\end{aligned}$$

Luego  $H^{1,0} = \langle e^1 \rangle$ . Procediendo de manera similar con el resto de  $C^{\bullet,0}$ , obtenemos que:

$$\begin{array}{lll}
y^1 & \rightarrow & -e^1 f^0 & f^0 & \rightarrow & -e^{-1} e^1 & e^1 & \rightarrow & 0 \\
y^{-1} y^1 & \rightarrow & -e^{-1} f^0 y^1 + e^1 f^0 y^{-1} & f^0 y^1 & \rightarrow & -e^{-1} e^1 y^1 & e^1 y^1 & \rightarrow & 0 \\
e^1 y^{-1} - e^{-1} y^1 & \rightarrow & -2e^{-1} e^1 f^0 & e^1 f^0 & \rightarrow & 0 & e^{-1} e^1 & \rightarrow & 0 \\
f^0 y^{-1} y^1 & \rightarrow & -e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 & e^1 y^{-1} y^1 & \rightarrow & -e^{-1} e^1 f^0 y^1 & e^1 f^0 y^1 & \rightarrow & 0 \\
e^1 f^0 y^{-1} - e^{-1} f^0 y^1 & \rightarrow & 0 & e^{-1} e^1 y^1 & \rightarrow & 0 & e^{-1} e^1 f^0 & \rightarrow & 0 \\
e^1 f^0 y^{-1} y^1 & \rightarrow & 0 & e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 & \rightarrow & 0 & e^{-1} e^1 f^0 y^1 & \rightarrow & 0
\end{array}$$

Con los cálculos anteriores, vemos que  $Z^{2,0} = \langle e^1 y^1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 \rangle$ ,  $B^{2,0} = \langle e^1 f^0 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 \rangle$ ,

$Z^{3,0} = \langle e^1 f^0 y^1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} - e^{-1} f^0 y^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 y^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 \rangle$ ,  $B^{3,0} = \langle e^1 f^0 y^{-1} - e^{-1} f^0 y^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 y^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 \rangle$ , con lo cual  $H^{2,0} = \langle e^1 y^1 \rangle$  y  $H^{3,0} = \langle e^1 f^0 y^1 \rangle$ . Las descomposiciones de  $H^{4,0}$  y  $H^{5,0}$  son inmediatas. † Para  $H^{\bullet,1}$ , sabemos que  $H^{0,1} = \langle y_1 \rangle$  y  $\delta_0(x) = -\text{ad}(x)$ , con lo cual:

$$e_1 \rightarrow e^1 \otimes f_0 + f^0 \otimes y_1 \quad e_{-1} \rightarrow -e^{-1} \otimes f_0 + f^0 \otimes y_{-1} \quad f_0 \rightarrow -e^{-1} \otimes y_1 - e^1 \otimes y_{-1}$$

El cálculo de  $\delta : C^{\bullet,1} \rightarrow C^{\bullet+1,1}$  se realiza aplicando la fórmula (5.6) sobre los vectores dominantes de  $C^{p,1}$  y obteniendo los cociclos y cobordes de grado  $p$  a partir de los grados  $p-1$ . Por ejemplo, como  $\delta(\alpha \otimes x) = \delta_t(\alpha) \otimes x - \alpha \delta_0(x)$ , los cobordes A.3.1 se obtienen multiplicando  $\delta_t$  con los de grado 0. Por ejemplo,

$$\delta(f^0 \otimes f_0) = e^{-1} e^1 \otimes f_0 + f^0 (e^{-1} \otimes y_1 + e^1 \otimes y_{-1}) = e^{-1} e^1 \otimes f_0 - e^{-1} f^0 \otimes y_1 + e^1 f^0 \otimes y_{-1}$$

Calculados los de grado 1, como  $\delta(\alpha\beta \otimes x) = \delta_t(\alpha\beta) \otimes x + \alpha\beta \delta_0(x) = \delta_t(\alpha)\beta \otimes x - \alpha\delta(\beta \otimes x)$  podemos obtener los cobordes A.3.2 de grado 2. Realizamos este mismo procedimiento hasta el grado 4 para luego obtener los representantes de  $H^{\bullet,1}$ .

† Para  $H^{\bullet,2}$ , como  $\delta_0(x_1 x_2) = -\text{ad}(x_1) \vee x_2 - x_1 \vee \text{ad}(x_2)$  sobre el grado cero, vemos que:

$$\begin{aligned} y_1 y_{-1} &\rightarrow 0 & e_{-1} y_1 - e_1 y_{-1} &\rightarrow -e^{-1} \otimes f_0 y_1 - e^1 \otimes f_0 y_{-1} - 2f^0 \otimes y_1 y_{-1} \\ e_1 y_1 &\rightarrow e^1 \otimes f_0 y_1 & e_1 f_0 &\rightarrow -e^{-1} \otimes e_1 y_1 - e^1 \otimes e_1 y_{-1} - f^0 \otimes f_0 y_1 \\ f_0 y_1 &\rightarrow e^1 \otimes y_1 y_{-1} & e_1 e_{-1} &\rightarrow -e^{-1} \otimes e_1 f_0 + f^0 \otimes e_1 y_{-1} - f^0 \otimes e_1 y_1 - e^1 \otimes e_{-1} f_0 \end{aligned}$$

y  $H^{0,2} = \langle y_1 y_{-1} \rangle$ . Los cociclos y cobordes en el grado  $p$  se obtienen como el caso anterior, aplicando la fórmula (5.6) sobre los representantes dominantes de  $C^{p,2}$ .  $\diamond$

### 7.2.1. Acción de $\Omega_2$

Vimos que  $H^{1,1} = V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1}$  con  $\text{id}_{3,2}$  actuando con peso 2 sobre  $V_{(2,2)}^{1,1} = \Omega_2 = \langle e^1 \otimes y_1 \rangle$ . Como  $H^{1,1} = \mathfrak{gl}(2) \ltimes \Omega_2$  está en correspondencia con las derivaciones exteriores de  $\mathfrak{f}_{3,2}$ , tenemos que  $H^{\bullet,\bullet}$  es un  $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \Omega_2$ -módulo. Notar que  $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \Omega_2$  es un álgebra de Lie no semisimple.

Si suponemos que  $\{\omega_2 = e^1 \otimes y_1, \omega_0 = f \cdot \omega_2 = e^1 \otimes y_{-1} - e^{-1} \otimes y_1, \omega_{-2} = \frac{1}{2} f^2 \cdot \omega_2 = -e^{-1} \otimes y_{-1}\}$  es la base de peso de  $\Omega_2$  y  $\Omega_2$  actúa no trivialmente sobre  $V_{(m,k)}^{p,q} \oplus V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,q}$  de modo que  $V_{(m,k)}^{p,q} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,q}$ , entonces por la Obs. 3.2.2 el peso 2 debe ocurrir en la descomposición de  $V_{(m,k)}^{p,q} \otimes V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,q}$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles. Si  $v_{m,k}^{p,q}$  es el vector de peso máximo en  $V_{(m,k)}^{p,q}$ , notemos que:

$$\begin{aligned} \omega_i \cdot (h \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) &= h \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) - (h \cdot \omega_i) \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} \\ (m-2s)\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} &= h \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) - i\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} \end{aligned}$$

con lo cual  $h \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) = (m-2s+i)\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}$ . Del mismo modo,

$$\begin{aligned} \omega_i \cdot (\text{id}_2 \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) &= \text{id}_2 \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) - (\text{id}_2 \cdot \omega_i) \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} \\ k\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} &= \text{id}_2 \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) - 2\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q} \end{aligned}$$

por lo que  $\text{id}_2 \cdot (\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}) = (k+2)\omega_i \cdot v_{m-2s,k}^{p,q}$ . Es decir, si  $V_{(m,k)}^{p,q} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,q}$  es no trivial, necesariamente  $\tilde{k} = k+2$ . Usando esta observación, tenemos el siguiente Lema:

**Lema 7.2.2.** El  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible  $\Omega_2$  actúa trivialmente sobre  $H^{p,1}$  excepto para  $p = 1, 4$ .

*Demostración.* Consideremos las descomposiciones en  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos irreducibles de  $H^{\bullet,\bullet}$  dadas por el Lema

7.2.1. Luego:

(1) Como  $H^{1,1} = V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1} = \langle v_{0,0}^{1,1} \rangle \oplus \langle v_{2,0}^{1,1} \rangle \oplus \langle v_{2,2}^{1,1} \rangle$ , es sencillo ver que cada  $\omega_i$  actúa del siguiente modo:

$$\begin{array}{llll} \omega_2 \cdot v_{2,0}^{1,1} = 0 & \omega_0 \cdot v_{2,0}^{1,1} = -2v_{2,2}^{1,1} & \omega_{-2} \cdot v_{2,0}^{1,1} = -f \cdot v_{2,2}^{1,1} & \omega_2 \cdot v_{0,0}^{1,1} = -2v_{2,2}^{1,1} \\ \omega_2 \cdot f \cdot v_{2,0}^{1,1} = 2v_{2,2}^{1,1} & \omega_0 \cdot f \cdot v_{2,0}^{1,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot f \cdot v_{2,0}^{1,1} = -2f \cdot v_{2,2}^{1,1} & \omega_0 \cdot v_{0,0}^{1,1} = -2f \cdot v_{2,2}^{1,1} \\ \omega_2 \cdot f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} = f \cdot v_{2,2}^{1,1} & \omega_0 \cdot f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} = 2f^2 \cdot v_{2,2}^{1,1} & \omega_{-2} \cdot f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot v_{0,0}^{1,1} = -f^2 \cdot v_{2,2}^{1,1} \end{array}$$

puesto que no es necesario recurrir a los cobordes  $B^{1,1}$  para obtener un representante equivalente a definidos en el Lema 7.2.1.

(2) Como  $H^{2,1} = V_{(3,-1)}^{2,1} \oplus V_{(2,-2)}^{2,1} \oplus V_{(1,-1)}^{2,1} = \langle v_{3,-1}^{2,1} \rangle \oplus \langle v_{2,-2}^{2,1} \rangle \oplus \langle v_{1,-1}^{2,1} \rangle$  vemos que  $\Omega_2$  actúa trivialmente sobre  $H^{2,1}$ . En efecto, si tal acción no fuera trivial, entonces el peso 1 ó 0 de  $\text{id}_2$  debería aparecer en la descomposición de  $H^{2,1}$ , lo que no ocurre. Por ejemplo, sobre  $V_{(3,-1)}^{2,1}$  obtenemos que:

$$\begin{array}{lll} \omega_2 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 & \omega_0 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot v_{3,-1}^{2,1} = -e^{-1}e^1 \otimes y_1 \\ \omega_2 \cdot f \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 & \omega_0 \cdot f \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 2e^{-1}e^1 \otimes y_1 & \omega_{-2} \cdot f \cdot v_{3,-1}^{2,1} = -f \cdot (e^{-1}e^1 \otimes y_1) \\ \omega_2 \cdot f^2 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = -2e^{-1}e^1 \otimes y_1 & \omega_0 \cdot f^2 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 4e^{-1}e^1 \otimes y_1 & \omega_{-2} \cdot f^2 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 \\ \omega_2 \cdot f^3 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = -6f \cdot (e^{-1}e^1 \otimes y_{-1}) & \omega_0 \cdot f^3 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot f^3 \cdot v_{3,-1}^{2,1} = 0 \end{array}$$

y como  $e^{-1}e^1 \otimes y_{-1}$  es un coborde tenemos que  $\pi(\omega_i) = 0$  sobre  $V_{(3,-1)}^{2,1}$ .

(3) Como  $H^{3,1} = V_{(3,-5)}^{3,1} \oplus V_{(2,-4)}^{3,1} \oplus V_{(1,-5)}^{3,1}$ , tenemos que  $\Omega_2$  actúa trivialmente sobre  $H^{3,1}$ . En efecto, tal como en la situación anterior, si tal acción no fuera trivial, entonces el peso  $-3$  ó  $-2$  de  $\text{id}_2$  debería aparecer en la descomposición de  $H^{3,1}$ , lo que no es cierto.

(4) Como  $H^{4,1} = V_{(2,-8)}^{4,1} \oplus V_{(2,-6)}^{4,1} \oplus V_{(0,-6)}^{4,1} = \langle v_{2,-8}^{4,1} \rangle \oplus \langle v_{2,-6}^{4,1} \rangle \oplus \langle v_{0,-6}^{4,1} \rangle$ , vemos que la única posibilidad donde  $\Omega_2$  actúa no trivialmente es  $V_{(2,-8)}^{4,1} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(2,-6)}^{4,1}$ . En este caso, cada  $\omega_i$  actúa del siguiente modo:

$$\begin{array}{lll} \omega_2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 & \omega_0 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot v_{2,-8}^{4,1} = -v_{0,-6}^{4,1} \\ \omega_2 \cdot f \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 & \omega_0 \cdot f \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 4v_{0,-6}^{4,1} & \omega_{-2} \cdot f \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 \\ \omega_2 \cdot f^2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = -f \cdot v_{2,-6}^{4,1} - 2v_{0,-6}^{4,1} & \omega_0 \cdot f^2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 & \omega_{-2} \cdot f^2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0 \end{array}$$

Para probar la primera columna, la igualdad  $\omega_2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = 0$  es inmediata. Pero  $\omega_2 \cdot f \cdot v_{2,-8}^{4,1} = e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 - e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 = b_1 - b_2$  es un coborde. Además,  $-\omega_2 \cdot f^2 \cdot v_{2,-8}^{4,1} = f \cdot (b_1 + b_2) + z_1 + z_2$  donde  $z_1, z_2$  son los cociclos:

$$\begin{aligned} z_1 &= e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 \\ z_2 &= e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 + e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_{-1} \end{aligned}$$

donde  $z_2 - z_1 - 2e^{-1}e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0$  y  $z_1 - 2e^{-1}e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0$  son cobordes, por lo que  $z_1 + z_2$  también genera a  $V_{(0,-6)}^{4,1}$ .

Es decir,  $V_{(0,0)}^{1,1} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(2,2)}^{1,1}$ ,  $V_{(2,0)}^{1,1} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(2,2)}^{1,1}$  y  $V_{(2,-8)}^{4,1} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(2,-6)}^{4,1} \oplus V_{(0,-6)}^{4,1}$  y la acción de  $\Omega_2$  sobre  $H^{1,1}$  y  $H^{4,1}$  es no trivial.  $\diamond$

**Lema 7.2.3.** El  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible  $\Omega_2$  actúa trivialmente sobre  $H^{\bullet,2}$ .

*Demostración.* Si  $V_{(m,k)}^{p,2} \xrightarrow{\Omega_2} V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,2}$  entonces el peso 2 debe aparecer en la descomposición de  $V_{(m,k)}^{p,2} \otimes V_{(\tilde{m},\tilde{k})}^{p,2}$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles y  $\tilde{k} = k + 2$ . Usando la descomposición de  $H^{\bullet,2}$  dada por el Lema 7.2.1, vemos que en ningún  $H^{p,2}$  se satisface la condición sobre el peso de  $\text{id}_2$ , por lo que la acción de  $\Omega_2$  es trivial.  $\diamond$

### 7.2.2. Dualidades sobre $H^{\bullet,\bullet}$

En la sección 5.2 vimos que el operador de Hodge  $\star : \Lambda^{\bullet} \mathfrak{f}_{3,2}^* \rightarrow \Lambda^{\bullet} \mathfrak{f}_{3,2}^*$  induce la dualidad de Poincaré sobre  $H^{\bullet,0}$ , es decir:

$$H^{p,0} \cong H^{5-p,0}, \quad \forall 0 \leq p \leq 5. \quad (7.5)$$

Notemos que el isomorfismo  $\star : H^{p,0} \rightarrow H^{5-p,0}$  satisface  $\star \alpha = \pm \iota_{\alpha^*}(\vartheta)$  donde  $\vartheta = e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \in \Lambda^{\bullet} \mathfrak{f}_{3,2}^*$ . Sin embargo, este isomorfismo no es de  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos, puesto que:

$$\begin{aligned} \star e^1 &= -e^{-1} f^0 y^{-1} y^1 = f \cdot (e^1 f^0 y^{-1} y^1) & \star (e^1 f^0 y^1) &= -e^{-1} y^{-1} = -\frac{1}{2} f^2 \cdot (e^1 y^1) \\ \star (e^1 y^1) &= e^{-1} f^0 y^{-1} = \frac{1}{2} f^2 \cdot (e^1 f^0 y^1) & \star (e^1 f^0 y^{-1} y^1) &= e^{-1} = -f \cdot e^1 \end{aligned}$$

Es decir,  $\star$  envía vectores dominantes en vectores antidominantes. Por otro lado, tenemos el siguiente Lema sobre la forma bilinear  $B$  de  $\mathfrak{f}_{3,2}$ :

**Lema 7.2.4.** La forma bilinear  $B : \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}^* \rightarrow \mathbb{C}$  definida en (7.3) satisface las siguientes propiedades:

1.  $B$  es  $\mathfrak{sl}(2)$ -invariante.
2.  $B$  no es  $\mathfrak{gl}(2)$ -invariante.
3.  $B$  es  $\Omega_2$ -invariante.

*Demostración.* Por un lado, los generadores  $e, h, f$  de  $\mathfrak{sl}(2)$  aparecen en  $\mathfrak{f}_{3,2}$  a través de siguientes matrices:

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es decir,  $e = e^1 \otimes e_1 + y^1 \otimes y_1$ ,  $h = e^{-1} \otimes e_1 - e^1 \otimes e_{-1} + y^{-1} \otimes y_1 - y^1 \otimes y_{-1}$  y  $f = e^{-1} \otimes e_{-1} + y^{-1} \otimes y_{-1}$ . Luego, es fácil ver que  $X^t \cdot B + B \cdot X = 0$  cuando  $X = e, h, f$ , mostrando que  $B$  es  $\mathfrak{sl}(2)$ -invariante.

Sin embargo,  $B$  no es  $\mathfrak{gl}(2)$ -invariante, puesto que  $\text{id}_{\mathfrak{f}_{3,2}}^t \cdot B + B \cdot \text{id}_{\mathfrak{f}_{3,2}} \neq 0$ , por lo que (2) queda demostrado. Finalmente, como  $\omega_2 = e^1 \otimes y_1$  tiene la matriz asociada:

$$\omega_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es fácil ver que  $\omega^t \cdot B + B \cdot \omega = 0$ , por lo que  $B$  también es  $\Omega_2$ -invariante y (3) queda probado.  $\diamond$

**Corolario 7.2.1.** La subálgebra de las derivaciones exteriores antisimétricas de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es  $\text{Der}_{ea}(\mathfrak{f}_{3,2}) = \mathfrak{sl}(2) \ltimes \Omega_2$ .

En la Sec. 5.2 vimos que existen isomorfismos de espacios vectoriales  $H^{p,q} \cong H^{5-p,q} \cong H^{p,5-q} \cong H^{5-p,5-q}$ . Como  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es una  $\text{Der}_{ea}(\mathfrak{f}_{3,2})$ -Lie cuadrática, podemos decir un poco más acerca de los isomorfismos anteriores. Si  $\vartheta = e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1$  recordemos que:

**Proposición 7.2.1.** El morfismo  $\Lambda_q : \Lambda^q \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \Lambda^{5-q} \mathfrak{f}_{3,2}^*$  dado por  $y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \mapsto \iota_{y_q} \cdots \iota_{y_1}(\vartheta)$  es de  $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \Omega_2$ -módulos.

*Demostración.* Ver el Lema 5.2.2 y la Prop. 5.2.2  $\diamond$

Usando el isomorfismo de  $\text{Der}_a(\tilde{f}_{3,2})$ -módulo  $\psi^{5-q}$  dado por la Prop. 2.6.2, obtenemos que  $\tilde{\psi}^{5-q} \circ \Lambda_q$  es un isomorfismo de  $\text{Der}_a(\tilde{f}_{3,2})$ -módulo entre  $\wedge^q \tilde{f}_{3,2}$  y  $\wedge^{5-q} \tilde{f}_{3,2}$ , donde  $\tilde{\psi}^{5-q} = (\psi^{5-q})^{-1}$ . Luego, el isomorfismo inducido en la cohomología  $H^{p,q} \cong H^{p,5-q}$  es de  $\text{Der}_a(\tilde{f}_{3,2})$ -módulo.

**Lema 7.2.5.** La descomposición en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles de  $H^{\bullet,4}$  junto con sus representantes de clase de cohomología dominantes es:

$$\begin{aligned}
H^{0,4} &= \langle e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle = V_{(1,9)}^{0,4} \\
H^{1,4} &= \langle e^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 + y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \\
&\quad + 2f^0 \otimes e_1 e_{-1} y_1 y_{-1} + 3y^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 y_{-1} + 3y^{-1} \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle \\
&= V_{(2,8)}^{1,4} \oplus V_{(2,6)}^{1,4} \oplus V_{(0,6)}^{1,4} \\
H^{2,4} &= \langle e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 y_{-1} - e^{-1} e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 + e^1 y^{-1} \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \rangle \\
&= V_{(3,5)}^{2,4} \oplus V_{(2,4)}^{2,4} \oplus V_{(1,5)}^{2,4} \\
H^{3,4} &= \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} - e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_{-1} \\
&\quad - e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 - 2e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_{-1} \rangle \\
&= V_{(3,1)}^{3,4} \oplus V_{(2,2)}^{3,4} \oplus V_{(1,1)}^{3,4} \\
H^{4,4} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 e_{-1} y_1 y_{-1} \rangle \\
&= V_{(2,0)}^{4,4} \oplus V_{(2,-2)}^{4,4} \oplus V_{(0,0)}^{4,4} \\
H^{5,4} &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 \rangle = V_{(1,-1)}^{5,4}
\end{aligned}$$

*Demostración.* Basta aplicar el isomorfismo  $\tilde{\psi}^4 \circ \Lambda_1$  en cada representante de peso máximo  $\omega$  de  $H^{\bullet,1}$  del Lema 7.2.1 y evaluar  $\text{id}_2$ , obteniendo así la descomposición de  $H^{\bullet,4}$  en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulo irreducibles y sus representante dominante. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
* \quad \tilde{\psi}^4 \circ \Lambda_1(y_1) &= \tilde{\psi}^4(-e^{-1} e^1 f^0 y^1) = e_1 f_0 y_1 y_{-1} \\
* \quad \tilde{\psi}^4 \circ \Lambda_1(e^1 \otimes e_1 + y^1 \otimes y_1) &= \tilde{\psi}^4(e^1 \otimes e^1 f^0 y^{-1} y^1 - y^1 \otimes e^{-1} e^1 f^0 y^1) = e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 + y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \\
* \quad \tilde{\psi}^4 \circ \Lambda_1(e^1 \otimes y_1) &= \tilde{\psi}^4(-e^1 \otimes e^{-1} e^1 f^0 y^1) = e^1 \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1} \\
* \quad \tilde{\psi}^4 \circ \Lambda_1(e^1 \otimes e_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 + 2f^0 \otimes f_0 + 3y^1 \otimes y_{-1} + 3y^{-1} \otimes y_1) &= e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 e_{-1} f_0 y_1 + \\
&\quad 2f^0 \otimes e_1 e_{-1} y_1 y_{-1} + 3y^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 y_{-1} + 3y^{-1} \otimes e_1 f_0 y_1 y_{-1}
\end{aligned}$$

Realizamos el mismo procedimiento sobre los restantes representantes.  $\diamond$

**Lema 7.2.6.** La descomposición en  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos irreducibles de  $H^{\bullet,3}$  junto con sus representantes de clase de cohomología dominantes es:

$$\begin{aligned}
H^{0,3} &= \langle f_0 y_1 y_{-1} \rangle = V_{(0,8)}^{0,3} \\
H^{1,3} &= \langle 2e^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 - e^1 \otimes e_1 f_0 y_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 f_0 y_1 + 3y^1 \otimes f_0 y_{-1} y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 f_0 y_1 \rangle \\
&= V_{(1,5)}^{1,3} \oplus V_{(3,5)}^{1,3} \\
H^{2,3} &= \langle e^1 y^1 \otimes e_1 y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 \rangle \oplus \langle 4e^1 f^0 \otimes e_1 e_{-1} y_1 - e^{-1} y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 + 3e^1 y^{-1} \otimes e_1 f_0 y_1 + \\
&\quad e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 y_{-1} + e^1 y^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 \rangle \oplus \langle 2e^{-1} e^1 \otimes e_1 e_{-1} f_0 - e^{-1} y^1 \otimes e_1 f_0 y_{-1} + e^1 y^{-1} \otimes e_1 f_0 y_{-1} + \\
&\quad f^0 y^{-1} \otimes e_1 y_1 y_{-1} + e^{-1} y^1 \otimes e_{-1} f_0 y_1 - e^1 y^{-1} \otimes e_{-1} f_0 y_1 + f^0 y^1 \otimes e_{-1} y_1 y_{-1} + 3y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_1 y_{-1} \rangle \\
&= V_{(3,3)}^{2,3} \oplus V_{(4,2)}^{2,3} \oplus V_{(2,2)}^{2,3} \oplus V_{(0,2)}^{2,3} \\
H^{3,3} &= \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 e_{-1} y_1 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 f_0 y_1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 e_{-1} y_1 + \\
&\quad e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1 y_{-1} \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 \otimes e_1 e_{-1} f_0 \rangle \\
&= V_{(3,-1)}^{3,3} \oplus V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(2,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^{4,3} &= \langle -2e^{-1}e^1y^{-1}y^1 \otimes e_1e_{-1}y_1 + e^{-1}f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1f_0y_1 + e^1f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1f_0y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1f_0y_1 \rangle \\
&= V_{(1,-3)}^{4,3} \oplus V_{(3,-3)}^{4,3} \\
H^{5,3} &= \langle e^{-1}e^1f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1e_{-1}f_0 \rangle = V_{(0,-6)}^{5,3}
\end{aligned}$$

*Demostración.* Basta aplicar el isomorfismo  $\tilde{\Psi}^3 \circ \Lambda_2$  en cada representante de peso máximo  $\omega$  de  $H^{\bullet,2}$  del Lema 7.2.1 y evaluar  $\text{id}_2$ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
* \quad \tilde{\Psi}^3 \circ \Lambda_2(y_1y_{-1}) &= \tilde{\Psi}^3(e^{-1}e^1f^0) = f_0y_1y_{-1} \\
* \quad \tilde{\Psi}^3 \circ \Lambda_2(2e^1 \otimes e_1y_{-1} - e^1 \otimes e_{-1}y_1 + e^{-1} \otimes e_1y_1 + 3y^1 \otimes y_1y_{-1}) &= 2e^1 \otimes e_{-1}f_0y_1 - e^1 \otimes e_1f_0y_{-1} + e^{-1} \otimes e_1f_0y_1 + 3y^1 \otimes f_0y_{-1}y_1 \\
* \quad \tilde{\Psi}^3 \circ \Lambda_2(e^1 \otimes e_1y_1) &= \tilde{\Psi}^3(e^1 \otimes e^1f^0y^1) = e^1 \otimes e_1f_0y_1
\end{aligned}$$

Realizamos el mismo procedimiento sobre los restantes representantes. ◇

**Corolario 7.2.2.** El  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo irreducible  $\Omega_2$  actúa trivialmente sobre  $H^{p,4}$  excepto para  $p = 1, 4$  y actúa trivialmente sobre  $H^{\bullet,3}$ .

La descomposición de  $H^{\bullet,5}$  se obtiene rápidamente por el producto copa entre  $H^{\bullet,0}$  y  $H^{0,5}$ . Resumimos toda la descomposición de  $H^{\bullet,\bullet}$  con el siguiente cuadro:

$p \backslash q$	0	1	2	3	4	5
0	$0^0$	$1^3$	$0^6$	$0^8$	$1^9$	$0^{10}$
1	$1^{-1}$	$0^0, 2^0, 2^2$	$1^3, 3^3$	$1^5, 3^5$	$0^6, 2^6, 2^8$	$1^9$
2	$2^{-4}$	$1^{-1}, 2^{-2}, 3^{-1}$	$4^0, 3^1, 2^0, 0^0$	$4^2, 3^3, 2^2, 0^2$	$1^5, 2^4, 3^5$	$2^6$
3	$2^{-6}$	$1^{-5}, 2^{-4}, 3^{-5}$	$4^{-2}, 3^{-3}, 2^{-2}, 0^{-2}$	$4^0, 3^{-1}, 2^0, 0^0$	$1^1, 2^2, 3^1$	$2^4$
4	$1^{-9}$	$0^{-6}, 2^{-6}, 2^{-8}$	$1^{-5}, 3^{-5}$	$1^{-3}, 3^{-3}$	$0^0, 2^0, 2^{-2}$	$1^1$
5	$0^{-10}$	$1^{-9}$	$0^{-8}$	$0^{-6}$	$1^{-3}$	$0^0$

En los diagramas 7.3.2 y 7.3.3 de la sección 7.3 se representa la acción de  $\Omega_2$  sobre  $H^{\bullet,\bullet}$  junto con la acción central que será desarrollada en la siguiente Sección.

### 7.3. Acción central sobre $H^{\bullet,\bullet}$

Como el centro de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es  $\mathfrak{z} = \langle y_1 \rangle = V_{(1,3)}$ , existen dos operaciones primarias denotadas por  $\check{y}_1, \check{y}_{-1}$ . En este caso  $\mathfrak{z} = \mathbb{C} \oplus \langle y_1 \rangle \oplus \langle y_1y_{-1} \rangle$  con corchete no nulo  $[y_1, y_{-1}] = 2y_1y_{-1}$  y  $\mathfrak{z} \cong \mathfrak{h}_1 \oplus \mathbb{C}$ . Luego,  $H^{\bullet,\bullet}$  es un  $\mathfrak{gl}(2) \ltimes (\Omega_2 \oplus \mathfrak{h}_1)$ -módulo y como las acciones de  $\text{Der}_e(\mathfrak{f}_{3,2})$  y  $\mathfrak{z}$  se entrelazan (Subsec. 5.3.1) basta calcular las operaciones primarias  $\check{y}_1, \check{y}_{-1}$  sobre los representantes de peso máximo de  $H^{\bullet,\bullet}$ .

Por lo visto en la Subsec. 5.3.1, si  $\mathfrak{z}$  actúa no trivialmente sobre  $V_{(m,l)}^{p,q}$  entonces algunos de los pesos de la forma  $(m+1-2s, 3+l)$  aparecen en la descomposición de  $H^{p-1,q}$ , donde  $0 \leq s \leq \min\{m, 1\}$ . Además, por la Observación 3.2.2 sabemos que el peso 1 debe aparecer en la descomposición de  $V_{(m)} \otimes V_{(m+1-2s)}$ .

En el caso que  $m \geq 1$  las únicas posibilidades son  $V_{(m,l)}^{p,q} \rightarrow V_{(m+1,l+3)}^{p-1,q}$  o  $V_{(m,l)}^{p,q} \rightarrow V_{(m-1,l+3)}^{p-1,q}$  y en el caso que  $m = 0$  la única posibilidad es  $V_{(0,l)}^{p,q} \rightarrow V_{(1,l+3)}^{p-1,q}$ . Esto descarta todos los factores irreducibles dados en los Lemas 7.2.1, 7.2.6 y 7.2.5 que no satisfacen las condiciones anteriores. Por ejemplo,  $\mathfrak{z}$  no puede actuar sobre  $V_{(2,2)}^{1,1}$  de modo que  $V_{(2,2)}^{1,1} \rightarrow V_{(1,3)}^{0,1}$ .

**Lema 7.3.1.** Las representaciones centrales sobre la cohomología  $H^{\bullet,q}$ , con  $0 \leq q \leq 2$ , son no triviales.

*Demostración.* Notemos que  $y_{-1} \cdot (e^1 y^1) = -e^1$  y  $y_{-1} \cdot (e^1 f^0 y^{-1} y^1) = e^1 f^0 y^1$ , con los otros casos claramente triviales. Simplificaremos la notación con  $v_{m,k}^{p,q}$  para referirnos al representante de peso máximo  $(m,k)$  en  $H^{p,q}$  listados en el Lema 7.2.1. Luego, sobre  $H^{\bullet,1}$  basta con ver los siguientes casos:

$$\begin{aligned} y_{-1} \cdot v_{2,0}^{1,1} &= v_{1,3}^{0,1} & y_{-1} \cdot v_{3,-5}^{3,1} &= v_{2,-2}^{2,1} & y_{-1} \cdot v_{2,-8}^{4,1} &= v_{3,-5}^{3,1} \\ y_{-1} \cdot v_{0,0}^{1,1} &= 3v_{1,3}^{0,1} & y_{-1} \cdot v_{2,-4}^{3,1} &= -v_{3,-1}^{2,1} & y_{-1} \cdot v_{2,-8}^{4,1} &= \frac{1}{3}f \cdot v_{3,-5}^{3,1} - \frac{1}{3}v_{1,-5}^{3,1} \\ y_{-1} \cdot v_{3,-1}^{2,1} &= -v_{2,2}^{1,1} & y_{-1} \cdot v_{2,-4}^{3,1} &= \frac{2}{3}v_{1,-1}^{2,1} - \frac{1}{3}f \cdot v_{3,-1}^{2,1} + \theta_1 & y_{-1} \cdot v_{0,-9}^{5,1} &= -v_{2,-6}^{3,1} \\ y_{-1} \cdot v_{1,-1}^{2,1} &= -v_{2,2}^{1,1} & y_{-1} \cdot v_{1,-5}^{3,1} &= 2v_{2,-2}^{2,1} & y_{-1} \cdot v_{0,-9}^{5,1} &= \frac{1}{2}f \cdot v_{2,-6}^{3,1} + \frac{1}{2}v_{0,-6}^{3,1} + \theta_2 \end{aligned}$$

donde es sencillo ver que  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son cobordes usando los listados en A.3.1, A.3.2 y A.3.3. Finalmente, sobre  $H^{\bullet,2}$  vemos los siguientes casos:

$$\begin{aligned} y_{-1} \cdot v_{1,3}^{1,2} &= 3v_{0,6}^{0,2} & y_{-1} \cdot v_{4,-2}^{3,2} &= -v_{3,1}^{2,2} + \theta_4 & y_{-1} \cdot v_{3,-5}^{4,2} &= v_{4,-2}^{3,2} \\ y_{-1} \cdot v_{4,0}^{2,2} &= -v_{3,3}^{1,2} & y_{-1} \cdot v_{3,-3}^{3,2} &= -v_{4,0}^{2,2} & y_{-1} \cdot v_{3,-5}^{4,2} &= \frac{1}{4}f \cdot v_{4,-2}^{3,2} - \frac{3}{4}v_{2,-2}^{3,2} - \frac{1}{4}\theta_7 \\ y_{-1} \cdot v_{0,0}^{2,2} &= v_{1,3}^{1,2} + \theta_3 & y_{-1} \cdot v_{3,-3}^{3,2} &= \frac{1}{4}v_{2,0}^{2,2} + \frac{1}{4}f \cdot v_{4,0}^{2,2} & &= \frac{3}{4}\theta_8 + \frac{1}{2}\theta_9 \\ y_{-1} \cdot v_{2,0}^{2,2} &= -3v_{3,3}^{1,2} & y_{-1} \cdot v_{2,-2}^{3,2} &= -v_{3,1}^{2,2} & y_{-1} \cdot v_{0,-8}^{5,2} &= -v_{1,-5}^{4,2} \\ y_{-1} \cdot v_{2,0}^{2,2} &= -f \cdot v_{3,3}^{1,2} & y_{-1} \cdot v_{1,-5}^{4,2} &= \frac{1}{2}(\theta_5 + \theta_6) - \frac{1}{2}v_{0,-2}^{3,2} & y_{-1} \cdot v_{0,-8}^{5,2} &= f \cdot v_{1,-5}^{4,2} \end{aligned}$$

donde  $\theta_i$  son los cobordes dados a continuación:

$$\begin{aligned} \theta_3 &= e^1 \otimes e_1 y_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 y_1 + f^0 \otimes f_0 y_1 = \delta(e_1 e_{-1}) \\ \theta_4 &= e^1 f^0 \otimes e_1 y_1 + e^1 y^1 \otimes f_0 y_1 = -\delta(y^1 \otimes e_1 y_1) \\ \theta_5 &= 2e^{-1} e^1 f^0 \otimes e_1 e_{-1} - e^{-1} e^1 y^{-1} \otimes e_1 f_0 + e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 y_{-1} - e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 y_{-1} - e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_{-1} f_0 \\ &\quad - e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_{-1} y_1 + e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_{-1} y_1 = \delta(e^1 y^{-1} \otimes e_1 e_{-1} - e^{-1} y^1 \otimes e_1 e_{-1}) \\ \theta_6 &= -e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 y_{-1} + e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 y_{-1} + e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_{-1} y_1 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_{-1} y_1 - e^{-1} y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_1 \\ &\quad - e^{-1} y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_{-1} - 2f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 y_{-1} = \delta(y^{-1} y^1 \otimes e_{-1} y_1 - y^{-1} y^1 \otimes e_{-1} y_1) \\ \theta_7 &= -e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 - e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 y_{-1} + e^1 f^0 y^1 \otimes e_{-1} y_1 = \delta(e^1 y^1 \otimes e_1 e_{-1}) \\ \theta_8 &= e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 y_1 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 y_1 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 y_1 = \delta(y^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1) \\ \theta_9 &= e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 f_0 - e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 y_1 - e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 y_{-1} = \delta(f^0 y^1 \otimes e_1 f_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto las representaciones centrales mencionadas son no triviales.  $\diamond$

Con los resultados anteriores procedemos a construir los diagramas de cohomología correspondientes a cada  $H^{\bullet,q}$ , tal como se describe a continuación:

- \* La Figura 7.3.1 describe la acción central sobre  $H^{\bullet,0}$ . Notar que no existen clases de cohomología  $\omega \in H^{\bullet,0}$  tales que  $y_{-1} \cdot y_{-1} \cdot \omega \neq 0$  ó  $y_{-1} \cdot y_1 \cdot \omega \neq 0$ , es decir la representación central sobre  $H^{\bullet,0}$  no es fiel.
- \* La Figura 7.3.2 describe la acción central sobre  $H^{\bullet,1}$  junto con la acción del módulo  $\Omega_2$ . Notar que  $y_{-1} \cdot y_1 \cdot (e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1) = e^1 f^0 \otimes e_1$  y  $y_{-1} \cdot y_1 \cdot (-e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1 + e^1 y^{-1} y^1 \otimes y_1) = e^1 \otimes y_1$ . Es decir, existen representantes dominantes  $\omega \in H^{\bullet,1}$  tales que  $\rho \cdot \omega \neq 0$ , para cualquier  $\rho \in \wedge^2 \mathfrak{g} \setminus \{0\}$ . Por el Teorema 5.5, la representación central sobre  $H^{\bullet,1}$  es fiel.
- \* La Figura 7.3.2 describe la acción central sobre  $H^{\bullet,2}$ . Como  $y_{-1} \cdot y_1 \cdot (e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes e_1 y_1) = e^1 f^0 \otimes e_1 y_1$ , por el Teorema 5.5 la representación central sobre  $H^{\bullet,2}$  también es fiel.

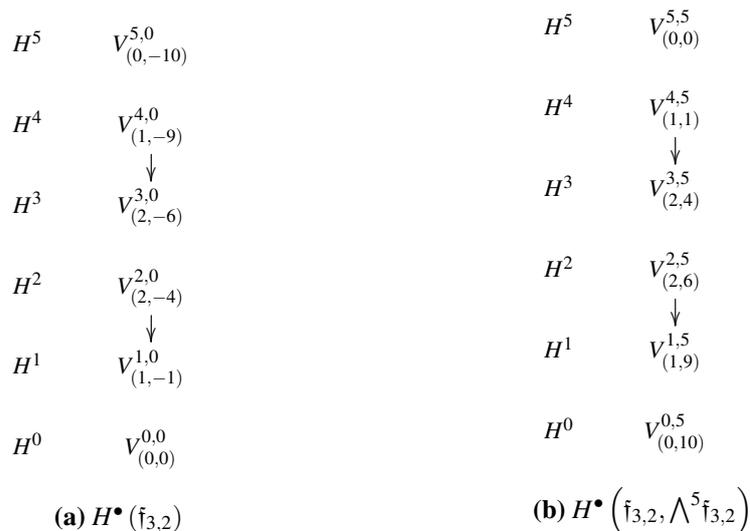


Figura 7.3.1: Representación central sobre  $H^\bullet(\tilde{f}_{3,2}, \wedge^\bullet \tilde{f}_{3,2})$  (parte 1)

Por otro lado, con una rutina computacional se calcularon las representaciones centrales sobre  $H^{\bullet,q}$  con  $3 \leq q \leq 5$  y los diagramas de cohomología resultantes están dados en la Figura 7.3.3. Si bien la mayoría de las flechas que describen los diagramas se obtienen simplemente al aplicar la acción de  $y_1$  y  $y_{-1}$  sobre los representantes de cohomología descriptos (puestos que el resultado ya da un representante listado o cero por la condición sobre los pesos), en algunos casos fue necesario ver a que clase de cohomología se correspondía lo obtenido, tal como ocurre por ejemplo con  $y_{-1} \cdot v_{1,-5}^{4,2}$ .

Podemos ver que el diagrama correspondiente a  $H^{\bullet,1}$  es igual al diagrama correspondiente a  $H^{\bullet,4}$ . Lo mismo ocurre con los diagramas de  $H^{\bullet,2}$  y  $H^{\bullet,3}$ .

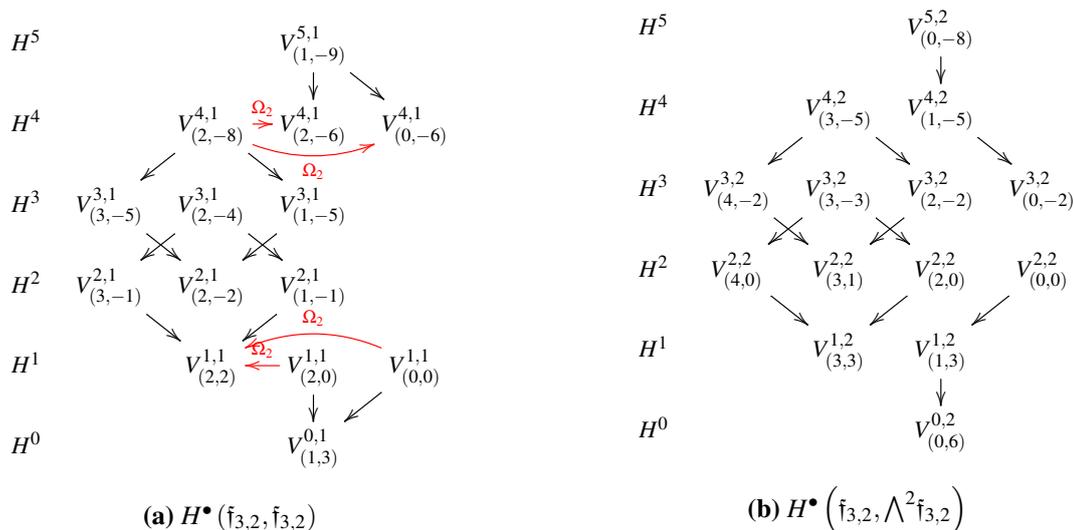


Figura 7.3.2: Representación central sobre  $H^\bullet(\tilde{f}_{3,2}, \wedge^\bullet \tilde{f}_{3,2})$  (parte 2)

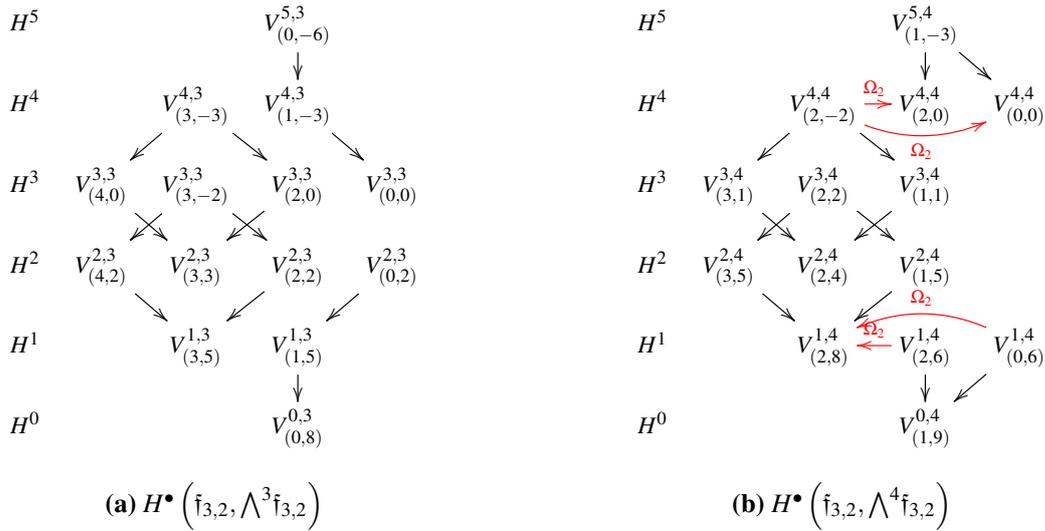


Figura 7.3.3: Representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2}, \wedge^\bullet \mathfrak{f}_{3,2})$  (parte 3)

Se sabe también que  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*) \cong H^{\bullet,\bullet}$  (ver [CT04]) y como el centro de  $\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*$  es  $\mathfrak{z}_\infty = \langle y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle$  concluimos que la representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*)$  está determinada por 4 operaciones primarias.

El diagrama de cohomología de  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*)$  es dado por la Figura 7.3.4.

Mientras que la acción de  $y_1, y_{-1}$  disminuye el grado cohomológico  $H^{p,q} \rightarrow H^{p-1,q}$  se puede observar que la acción de  $e^1, e^{-1}$  disminuye el grado sobre los coeficientes  $H^{p,q} \rightarrow H^{p,q-1}$ . El siguiente cuadro muestra la acción de  $e^j$  sobre los  $\mathfrak{gl}(2)$ -submódulos de  $H^{\bullet,q}$  para  $q = 0, 1, 2$  y el cuadro completo se construye por dualidad.

$H_\infty^2 \rightarrow H_\infty^1$	$V_{(0,0)}^{1,1} \rightarrow V_{(1,-1)}^{1,0}$ $V_{(2,0)}^{1,1} \rightarrow V_{(1,-1)}^{1,0}$
$H_\infty^3 \rightarrow H_\infty^2$	$V_{(1,3)}^{1,2} \rightarrow V_{(2,2)}^{1,1}$ $V_{(3,3)}^{1,2} \rightarrow V_{(2,2)}^{1,1}$
$H_\infty^4 \rightarrow H_\infty^3$	$V_{(0,0)}^{2,2} \rightarrow V_{(1,-1)}^{2,1}$ $V_{(1,-5)}^{3,1} \rightarrow V_{(2,-6)}^{3,0}$ $V_{(1,9)}^{0,4} \rightarrow V_{(0,8)}^{0,3}$ $V_{(3,-5)}^{3,1} \rightarrow V_{(2,-6)}^{3,0}$ $V_{(4,0)}^{2,2} \rightarrow V_{(3,-1)}^{2,1}$ $V_{(2,0)}^{2,2} \rightarrow V_{(3,-1)}^{2,1} \oplus V_{(1,-1)}^{2,1}$
$H_\infty^5 \rightarrow H_\infty^4$	$V_{(2,2)}^{2,3} \rightarrow V_{(3,1)}^{2,2}$ $V_{(3,-3)}^{3,2} \rightarrow V_{(2,-4)}^{3,1}$ $V_{(2,-8)}^{4,1} \rightarrow V_{(1,-9)}^{4,0}$ $V_{(0,6)}^{1,4} \rightarrow V_{(1,5)}^{1,3}$ $V_{(2,6)}^{1,4} \rightarrow V_{(3,5)}^{1,3} \oplus V_{(1,5)}^{1,3}$ $V_{(4,2)}^{2,3} \rightarrow V_{(3,1)}^{2,2}$ $V_{(0,10)}^{0,5} \rightarrow V_{(1,9)}^{0,4}$

Como la representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*)$  es determinada por el centro  $\mathfrak{z}_\infty$ , podemos pensar a  $H^\bullet(\mathfrak{f}_{3,2} \ltimes \mathfrak{f}_{3,2}^*)$  como un  $\mathfrak{gl}(2) \ltimes (V_{(1)} \oplus V_{(1)})$ -módulo cuya serie de zócalo es:

$$\begin{aligned} \text{soc}^1 = & V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(1,-1)}^{1,0} \oplus V_{(2,-6)}^{3,0} \oplus V_{(0,-10)}^{5,0} \oplus V_{(1,3)}^{0,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1} \oplus V_{(2,-2)}^{2,1} \oplus V_{(2,-6)}^{4,1} \oplus V_{(0,-6)}^{4,1} \oplus V_{(0,6)}^{0,2} \oplus V_{(3,1)}^{2,2} \oplus \\ & V_{(0,-2)}^{3,2} \oplus V_{(0,8)}^{0,3} \oplus V_{(3,5)}^{1,3} \oplus V_{(3,3)}^{2,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3} \oplus V_{(2,8)}^{1,4} \oplus V_{(2,0)}^{4,4} \oplus V_{(0,0)}^{4,4} \oplus V_{(2,4)}^{3,5} \oplus V_{(0,0)}^{5,5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\text{soc}^2}{\text{soc}^1} &= V_{(2,-4)}^{2,0} \oplus V_{(1,-9)}^{4,0} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(3,-1)}^{2,1} \oplus V_{(1,-1)}^{2,1} \oplus V_{(3,-5)}^{3,1} \oplus V_{(1,-5)}^{3,1} \oplus V_{(1,-9)}^{5,1} \oplus V_{(1,3)}^{1,2} \oplus V_{(3,3)}^{1,2} \oplus \\ &V_{(4,-2)}^{3,2} \oplus V_{(2,-2)}^{3,2} \oplus V_{(1,-5)}^{4,2} \oplus V_{(1,5)}^{1,3} \oplus V_{(4,2)}^{2,3} \oplus V_{(2,2)}^{2,3} \oplus V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(2,0)}^{3,3} \oplus V_{(1,-3)}^{4,3} \oplus V_{(1,9)}^{0,4} \oplus V_{(3,5)}^{2,4} \oplus \\ &V_{(2,4)}^{2,4} \oplus V_{(1,5)}^{2,4} \oplus V_{(1,-3)}^{5,4} \oplus V_{(1,9)}^{1,5} \oplus V_{(1,1)}^{4,5} \\ \frac{\text{soc}^3}{\text{soc}^2} &= V_{(2,-4)}^{3,1} \oplus V_{(2,-8)}^{4,1} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(3,-5)}^{4,2} \oplus V_{(0,-8)}^{5,2} \oplus V_{(0,2)}^{2,3} \oplus V_{(3,-1)}^{3,3} \oplus V_{(3,-3)}^{4,3} \oplus V_{(0,-6)}^{5,3} \oplus \\ &V_{(0,6)}^{1,4} \oplus V_{(2,6)}^{1,4} \oplus V_{(3,1)}^{3,4} \oplus V_{(2,2)}^{3,4} \oplus V_{(1,1)}^{3,4} \oplus V_{(0,10)}^{0,5} \oplus V_{(2,6)}^{2,5} \\ \frac{\text{soc}^4}{\text{soc}^3} &= V_{(3,-3)}^{3,2} \oplus V_{(2,-2)}^{4,4} \end{aligned}$$

### 7.3.1. Representantes para $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$

Para la siguiente Sección vamos a tener presente los siguientes representares dominantes sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ :

$$\begin{aligned} H^{0,0} &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} \\ H^{1,1} &= \langle e^1 \otimes e_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 + 2f^0 \otimes f_0 + 3y^1 \otimes y_{-1} + 3y^{-1} \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes e_1 + y^1 \otimes y_1 \rangle \oplus \langle e^1 \otimes y_1 \rangle \\ &= V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1} \\ H^{2,2} &= \langle 2e^{-1}e^1 \otimes e_1e_{-1} + e^{-1}y^1 \otimes e_1y_{-1} - e^1y^{-1} \otimes e_1y_{-1} - e^{-1}y^1 \otimes e_{-1}y_1 + e^1y^{-1} \otimes e_{-1}y_1 + \\ &f^0y^{-1} \otimes f_0y_1 + f^0y^1 \otimes f_0y_{-1} + 3y^{-1}y^1 \otimes y_1y_{-1} \rangle \oplus \langle e^1y^1 \otimes f_0y_1 \rangle \oplus \langle e^1y^1 \otimes e_1y_1 \rangle \oplus \\ &\langle 4e^1f^0 \otimes e_1f_0 - e^{-1}y^1 \otimes e_1y_1 + 3e^1y^{-1} \otimes e_1y_1 + e^1y^1 \otimes e_1y_{-1} + e^1y^1 \otimes e_{-1}y_1 \rangle \\ &= V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(3,1)}^{2,2} \oplus V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \\ H^{3,3} &= \langle e^1f^0y^1 \otimes e_1e_{-1}y_1 + e^1y^{-1}y^1 \otimes e_1f_0y_1 \rangle \oplus \langle e^1f^0y^1 \otimes e_1f_0y_1 \rangle \oplus \langle e^{-1}e^1y^1 \otimes e_1e_{-1}y_1 + \\ &e^1y^{-1}y^1 \otimes e_1y_1y_{-1} \rangle \oplus \langle e^{-1}e^1f^0 \otimes e_1e_{-1}f_0 \rangle \\ &= V_{(3,-1)}^{3,3} \oplus V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(2,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3} \\ H^{4,4} &= \langle e^{-1}e^1f^0y^1 \otimes e_1e_{-1}f_0y_1 \rangle \oplus \langle e^1f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1e_{-1}f_0y_1 \rangle \oplus \langle e^{-1}e^1y^{-1}y^1 \otimes e_1e_{-1}y_1y_{-1} \rangle \\ &= V_{(2,0)}^{4,4} \oplus V_{(2,-2)}^{4,4} \oplus V_{(0,0)}^{4,4} \\ H^{5,5} &= \langle e^{-1}e^1f^0y^{-1}y^1 \otimes e_1e_{-1}f_0y_1y_{-1} \rangle = V_{(0,0)}^{5,5} \end{aligned}$$

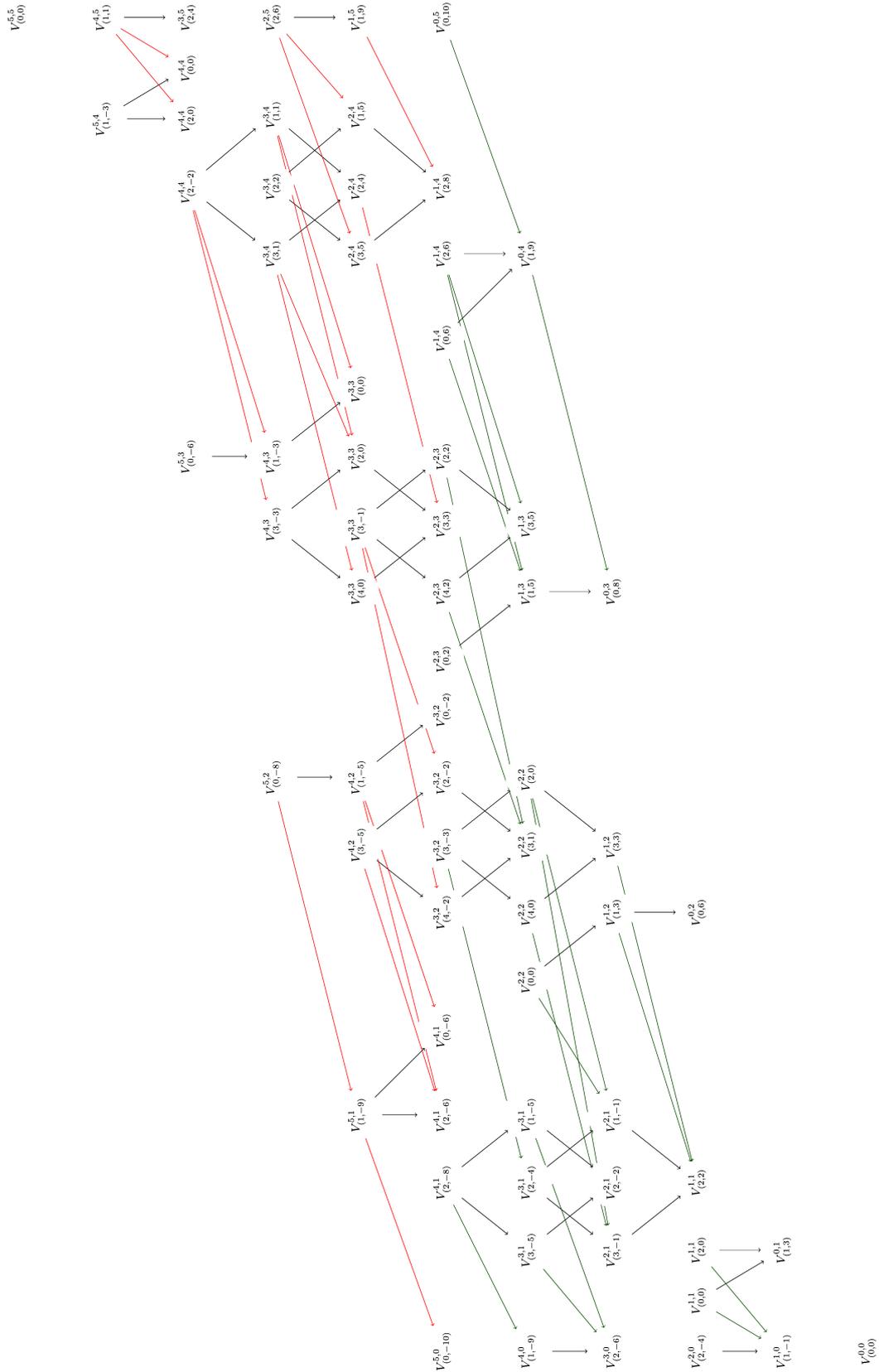


Figura 7.3.4: Representación central sobre  $H^{\bullet,\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2} \times \mathfrak{f}_{3,2}^*)$

## 7.4. Producto copa y corchete de Poisson en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$

Sean  $v_{m,k}^{p,q}$  los representantes de cohomología de pesos máximos de la Subsec. 7.3.1 y supongamos que  $\{v_{m-2i,k}^{p,q}\}_{0 \leq i \leq m}$  es una base simétrica de  $V_{(m,k)}^{p,q}$  en el sentido que  $f \cdot v_{m-2i,k}^{p,q} = v_{m-2i-2,k}^{p,q}$ . Notemos que la descomposición de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  en  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo es:

$$H_{diag}^{\bullet,\bullet} = V_{(0,0)}^{0,0} \oplus V_{(0,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,0)}^{1,1} \oplus V_{(2,2)}^{1,1} \oplus V_{(0,0)}^{2,2} \oplus V_{(2,0)}^{2,2} \oplus V_{(3,1)}^{2,2} \oplus V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(3,-1)}^{3,3} \oplus V_{(2,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3} \oplus V_{(2,-2)}^{4,4} \oplus V_{(2,0)}^{4,4} \oplus V_{(0,0)}^{4,4} \oplus V_{(0,0)}^{5,5}$$

Para calcular las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas del producto copa y del corchete de Poisson en  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  necesitamos calcular los coeficientes  $\gamma_{m,k}^{p,p}$  mediante los productos de Clebsch-Gordan asociados a cada producto.

### 7.4.1. Producto copa en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$

**Lema 7.4.1.** La cohomología  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  tiene los siguientes productos de Clebsch-Gordan no triviales asociados al producto copa:

$$\begin{array}{lll} v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{1,1} = -6v_{0,0}^{2,2} & v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{2,2} = 4v_{4,0}^{3,3} & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{1,1} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{1,1} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} = -2v_{0,0}^{2,2} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{1,1} = -v_{2,0}^{2,2} & v_{2,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{3,3} = -v_{2,0}^{4,4} & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{2,2} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{2,2} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} = 30v_{0,0}^{3,3} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{2,2} = 20v_{0,0}^{3,3} & v_{0,0}^{2,2} \vee v_{0,0}^{2,2} = 30v_{0,0}^{4,4} & 6f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{4,0}^{2,2} - 3f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{4,0}^{2,2} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} = 20v_{2,0}^{3,3} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{2,2} = 30v_{2,0}^{3,3} & v_{0,0}^{2,2} \vee v_{2,0}^{2,2} = 20v_{2,0}^{4,4} & 6f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{4,0}^{3,3} - 3f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{4,0}^{3,3} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{4,0}^{3,3} = -40v_{2,0}^{4,4} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{4,0}^{2,2} = 2v_{4,0}^{3,3} & v_{0,0}^{2,2} \vee v_{0,0}^{3,3} = 3v_{0,0}^{5,5} & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{3,3} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{3,3} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{3,3} = -12v_{0,0}^{4,4} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{3,3} = -4v_{2,0}^{4,4} & & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{4,4} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,0}^{4,4} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{4,4} = 6v_{0,0}^{5,5} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{3,3} = -9v_{0,0}^{4,4} & & f^2 \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,-2}^{4,4} - f \cdot v_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot v_{2,-2}^{4,4} + v_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot v_{2,-2}^{4,4} = -6v_{0,0}^{5,5} \\ v_{0,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{4,4} = 2v_{0,0}^{5,5} & & f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee v_{2,0}^{2,2} - f \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee f \cdot v_{2,0}^{2,2} + v_{2,0}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} = 360v_{0,0}^{4,4} \\ v_{2,0}^{1,1} \vee v_{2,0}^{1,1} = -2v_{2,0}^{2,2} & & f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee v_{2,0}^{3,3} - f \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee f \cdot v_{2,0}^{3,3} + v_{2,0}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{2,0}^{3,3} = 24v_{0,0}^{5,5} \\ v_{2,0}^{1,1} \vee v_{0,0}^{2,2} = 5v_{2,0}^{3,3} & & 6f^2 \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee v_{4,0}^{2,2} - 3f \cdot v_{2,0}^{2,2} \vee f \cdot v_{4,0}^{2,2} + v_{2,0}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} = 80v_{2,0}^{4,4} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f^3 \cdot v_{3,1}^{2,2} \vee v_{3,-1}^{3,3} - f^2 \cdot v_{3,1}^{2,2} \vee f \cdot v_{3,-1}^{3,3} + f \cdot v_{3,1}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{3,-1}^{3,3} - v_{3,1}^{2,2} \vee f^3 \cdot v_{3,-1}^{3,3} = -24v_{0,0}^{5,5} \\ f^4 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee v_{4,0}^{2,2} - f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f \cdot v_{4,0}^{2,2} + f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} - f \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2} + v_{4,0}^{2,2} \vee f^4 \cdot v_{4,0}^{2,2} = 120v_{0,0}^{4,4} \\ f^4 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee v_{4,0}^{3,3} - f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f \cdot v_{4,0}^{3,3} + f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f^2 \cdot v_{4,0}^{3,3} - f \cdot v_{4,0}^{2,2} \vee f^3 \cdot v_{4,0}^{3,3} + v_{4,0}^{2,2} \vee f^4 \cdot v_{4,0}^{3,3} = 120v_{0,0}^{5,5} \end{array}$$

*Demostración.* Como  $\vee : H^{p,p} \times H^{q,q} \rightarrow H^{p+q,p+q}$  necesariamente  $p + q \leq 5$ . Esto descarta todos los  $(p, q)$  cuyos productos se escapan de la graduación de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . Del Teorema de Clebsch-Gordan, si  $V_{(n_1, k_1)}^{p,p} \vee V_{(n_2, k_2)}^{q,q} \neq 0$  entonces algunas componentes irreducible de su descomposición deben aparecer en  $H^{p+q,p+q}$ .

Luego, usando la Definición 4.3.2 y los representantes de la Subsec. 7.3.1, obtenemos los productos de Clebsch-Gordan dados en el enunciado.  $\diamond$

Así como en el álgebra de Heisenberg  $\mathfrak{h}_1$ , queremos presentar una  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla del producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  lo mas parecida a las dadas por los Lemas 6.3.2 y 6.3.3. Esto implica cambiar los representantes dominantes en cada componente irreducible de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  (ver Subsec. 4.2.1).

Para este objetivo se analizó de manera independiente las  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas que definen un producto asociativo con los  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulos de la descomposición de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ , concluyendo que existe una  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla tal que  $\gamma_{m,k}^{p,p} = 1$  excepto en ciertos productos de grado  $\geq 2$  donde  $\gamma_{m,k}^{p,p} = 4$ , tal como muestra la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (7.7). Supongamos entonces que:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{0,0}^{1,1} &= \lambda_1 v_{0,0}^{1,1}, & \hat{v}_{2,0}^{1,1} &= \lambda_2 v_{2,0}^{1,1}, & \hat{v}_{2,2}^{1,1} &= \lambda_3 v_{2,2}^{1,1}, \\
\hat{v}_{0,0}^{2,2} &= \mu_1 v_{0,0}^{2,2}, & \hat{v}_{2,0}^{2,2} &= \mu_2 v_{2,0}^{2,2}, & \hat{v}_{3,1}^{2,2} &= \mu_3 v_{3,1}^{2,2}, & \hat{v}_{4,0}^{2,2} &= \mu_4 v_{4,0}^{2,2}, \\
\hat{v}_{0,0}^{3,3} &= \rho_1 v_{0,0}^{3,3}, & \hat{v}_{2,0}^{3,3} &= \rho_2 v_{2,0}^{3,3}, & \hat{v}_{3,-1}^{3,3} &= \rho_3 v_{3,-1}^{3,3}, & \hat{v}_{4,0}^{3,3} &= \rho_4 v_{4,0}^{3,3}, \\
\hat{v}_{0,0}^{4,4} &= v_1 v_{0,0}^{4,4}, & \hat{v}_{2,0}^{4,4} &= v_2 v_{2,0}^{4,4}, & \hat{v}_{2,-2}^{4,4} &= v_3 v_{2,-2}^{4,4}, & \hat{v}_{0,0}^{5,5} &= v_4 v_{0,0}^{5,5}
\end{aligned}$$

son re-escalados arbitrarios de los  $v_{m,k}^{p,p}$  elegidos inicialmente, queremos encontrar valores en los parámetros tales que nos permitan presentar la  $gl(2)$ -tabla del producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  con los coeficientes como se mencionó anteriormente.

En este caso el procedimiento de re-escalar los vectores dominantes es más complejo y fue realizado por partes, teniendo en cuenta los productos entre elementos cuyos grados son  $(1,1)$ ,  $(1,2)$ ,  $(1,3)$ ,  $(1,4)$ ,  $(2,2)$  y  $(2,3)$  respectivamente. Comencemos tomando los productos copas anteriores con elementos de grados  $(1,1)$ , es decir:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{0,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{0,0}^{1,1} &= -6 \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} \hat{v}_{0,0}^{2,2} & f^2 \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{1,1} - f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} + \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} &= -2 \frac{\lambda_2^2}{\mu_1} \hat{v}_{2,0}^{2,2} \\
\hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{1,1} &= -2 \frac{\lambda_2^2}{\mu_4} \hat{v}_{4,0}^{2,2} & \hat{v}_{0,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{1,1} &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_2} \hat{v}_{2,0}^{2,2}
\end{aligned}$$

De este modo, resolviendo el sistema no lineal

$$\begin{cases} 6 \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} = -1 & 2 \frac{\lambda_2^2}{\mu_4} = -1 \\ 2 \frac{\lambda_2^2}{\mu_1} = -1 & \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\mu_2} = -1 \end{cases}$$

obtenemos la solución  $\lambda_2 = \sqrt{3}\lambda_1$ ,  $\mu_1 = -6\lambda_1^2$ ,  $\mu_2 = -\sqrt{3}\lambda_1^2$  y  $\mu_4 = -6\lambda_1^2$ . Tomemos ahora los productos copas con elementos de grado  $(1,2)$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{0,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{0,0}^{2,2} &= 20 \frac{\lambda_1 \mu_1}{\rho_1} \hat{v}_{0,0}^{3,3} & f^2 \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{2,2} - f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2} + \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2} &= 40 \frac{\lambda_2 \mu_2}{\rho_1} \hat{v}_{0,0}^{3,3} \\
\hat{v}_{0,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{2,2} &= 30 \frac{\lambda_1 \mu_2}{\rho_2} \hat{v}_{2,0}^{3,3} & 6f^2 \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{4,0}^{2,2} - 3f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} + \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee f^2 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} &= 20 \frac{\lambda_2 \mu_4}{\rho_2} \hat{v}_{2,0}^{3,3} \\
\hat{v}_{0,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{4,0}^{2,2} &= 2 \frac{\lambda_1 \mu_4}{\rho_4} \hat{v}_{4,0}^{3,3} & \hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{2,0}^{2,2} &= 4 \frac{\lambda_2 \mu_2}{\rho_4} \hat{v}_{4,0}^{3,3} \\
\hat{v}_{2,0}^{1,1} \vee \hat{v}_{0,0}^{2,2} &= 5 \frac{\lambda_2 \mu_1}{\rho_4} \hat{v}_{2,0}^{3,3}
\end{aligned}$$

y resolviendo el sistema no lineal

$$\begin{cases} 10 \frac{\lambda_1 \mu_1}{\rho_1} = 1 & 2 \frac{\lambda_1 \mu_4}{\rho_4} = 4 & 4 \frac{\lambda_2 \mu_2}{\rho_4} = 4 & 20 \frac{\lambda_2 \mu_2}{\rho_1} = 1 \\ 30 \frac{\lambda_1 \mu_2}{\rho_2} = 1 & 5 \frac{\lambda_2 \mu_1}{\rho_4} = 1 & 20 \frac{\lambda_2 \mu_4}{\rho_2} = 1 \end{cases}$$

obtenemos la solución  $\rho_1 = -120\lambda_1^3$ ,  $\rho_3 = -30\sqrt{3}\lambda_1^3$  y  $\rho_4 = -3\lambda_1^3$ . Finalmente, si tomamos los restantes productos copas con elementos en los demás grados y los reescribimos con sus respectivos  $\hat{v}_{m,k}^{p,p}$ , obtenemos un sistema no lineal de ecuaciones que depende de los parámetros  $\lambda_1, \lambda_3$  y  $v_i$  con  $1 \leq i \leq 4$ . Resolviendo este sistema no lineal concluimos que podemos re-escalar los vectores dominantes  $\hat{v}_{m,k}^{p,q}$  como:

$$\begin{aligned}
\hat{v}_{0,0}^{1,1} &= \lambda v_{0,0}^{1,1}, & \hat{v}_{2,0}^{1,1} &= \lambda \sqrt{3} v_{2,0}^{1,1}, & \hat{v}_{2,2}^{1,1} &= \frac{-360\lambda^5}{v} v_{2,2}^{1,1}, \\
\hat{v}_{0,0}^{2,2} &= -6\lambda^2 v_{0,0}^{2,2}, & \hat{v}_{2,0}^{2,2} &= -\lambda^2 \sqrt{3} v_{2,0}^{2,2}, & \hat{v}_{3,1}^{2,2} &= \frac{-90\lambda^5}{p} v_{3,1}^{2,2}, & \hat{v}_{4,0}^{2,2} &= -6\lambda^2 v_{4,0}^{2,2} \\
\hat{v}_{0,0}^{3,3} &= -120\lambda^3 v_{0,0}^{3,3}, & \hat{v}_{2,0}^{3,3} &= -30\sqrt{3}\lambda^3 v_{2,0}^{3,3}, & \hat{v}_{3,-1}^{3,3} &= \rho v_{3,-1}^{3,3}, & \hat{v}_{4,0}^{3,3} &= -3\lambda^3 v_{4,0}^{3,3}, \\
\hat{v}_{0,0}^{4,4} &= 1080\lambda^4 v_{0,0}^{4,4}, & \hat{v}_{2,0}^{4,4} &= 120\lambda^4 \sqrt{3} v_{2,0}^{4,4}, & \hat{v}_{2,-2}^{4,4} &= v v_{2,-2}^{4,4}, & \hat{v}_{0,0}^{5,5} &= 2160\lambda^5 v_{0,0}^{5,5},
\end{aligned} \tag{7.6}$$

donde  $\lambda, \rho, v \neq 0$  son parámetros libres arbitrarios. Luego, cualquier elección de los representantes dominantes

sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  dados por (7.6) permiten presentar al producto copa con el siguiente Lema:

**Lema 7.4.2.** La  $gl(2)$ -tabla del producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  es (con el resto obtenido por simetría):

$\vee$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$		$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$		$4V_{(4,0)}^{3,3}$
$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2} \oplus V_{(0,0)}^{2,2}$		$V_{(2,0)}^{3,3}$	$4V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$		$4V_{(2,0)}^{3,3}$
$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$							
$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$		$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		
$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$4V_{(4,0)}^{3,3} \oplus V_{(0,0)}^{3,3}$		$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$		$4V_{(2,0)}^{4,4}$
$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$							
$V_{(4,0)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$	$4V_{(4,0)}^{3,3}$	$4V_{(2,0)}^{3,3}$			$4V_{(2,0)}^{4,4}$		$4V_{(0,0)}^{4,4}$
$V_{(4,0)}^{3,3}$	$V_{(4,0)}^{3,3}$		$V_{(2,0)}^{4,4}$					$V_{(0,0)}^{5,5}$
$V_{(3,-1)}^{3,3}$	$V_{(3,-1)}^{3,3}$						$-V_{(0,0)}^{5,5}$	
$V_{(2,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{3,3}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$			$V_{(0,0)}^{5,5}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{3,3}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		$V_{(0,0)}^{5,5}$			
$V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,-2)}^{4,4}$			$V_{(0,0)}^{5,5}$				
$V_{(2,0)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4}$		$V_{(0,0)}^{5,5}$					
$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{4,4}$	$V_{(0,0)}^{5,5}$						
$V_{(0,0)}^{5,5}$	$V_{(0,0)}^{5,5}$							

Si identificamos por  $V_{(0,0)}^{0,0} = 1$ ,  $V_{(0,0)}^{1,1} = \eta_1$ ,  $V_{(2,0)}^{1,1} = \eta_2$ ,  $V_{(2,2)}^{1,1} = \beta_1$ ,  $V_{(3,1)}^{2,2} = \gamma_1$ ,  $V_{(3,-1)}^{3,3} = \gamma_2$  y  $V_{(2,-2)}^{4,4} = \beta_2$ , entonces la  $gl(2)$ -álgebra  $(H_{diag}^{\bullet,\bullet}, \vee)$  define un álgebra asociativa presentada por:

$$\mathbb{C}[\eta_1, \eta_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2] / \langle \eta_1^6 = 0, \eta_2^5 = 0, \eta_2^4 = 5\eta_1^4, \beta_1\beta_2 = \eta_1^5 = \gamma_1\gamma_2, \eta_2^3 - 5\eta_1^2\eta_2 = 0, \eta_1^2\eta_2^2 = \eta_1^4 \rangle.$$

#### 7.4.2. Corchete de Poisson en $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$

Tomando nuevamente los representantes de pesos máximos  $v_{m,k}^{p,q}$  dados en la Subsec. 7.3.1 obtenemos el siguiente Lema:

**Lema 7.4.3.** La cohomología  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  tiene los siguientes productos de Clebsch-Gordan no triviales asociados al corchete de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\{ v_{0,0}^{1,1}, v_{2,2}^{1,1} \right\} &= -2v_{2,2}^{1,1} & \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,-2}^{4,4} \right\} &= 4v_{2,-2}^{4,4} \\ \left\{ v_{0,0}^{1,1}, v_{3,1}^{2,2} \right\} &= -v_{3,1}^{2,2} & \left\{ f \cdot v_{2,2}^{1,1}, v_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ v_{2,2}^{1,1}, f \cdot v_{2,-2}^{4,4} \right\} &= -4v_{2,0}^{4,4} \\ \left\{ v_{0,0}^{1,1}, v_{3,-1}^{3,3} \right\} &= v_{3,-1}^{3,3} & \left\{ 3f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 2v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} &= 15v_{3,-1}^{3,3} \\ \left\{ v_{0,0}^{1,1}, v_{2,-2}^{4,4} \right\} &= 2v_{2,-2}^{4,4} & \left\{ 3f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{3,1}^{2,2} \right\} - \left\{ 2v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{3,1}^{2,2} \right\} &= 15v_{3,1}^{2,2} \\ \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{1,1} \right\} &= 4v_{2,0}^{1,1} & \left\{ 2f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{4,0}^{2,2} \right\} &= 12v_{4,0}^{2,2} \\ \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,2}^{1,1} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,2}^{1,1} \right\} &= 4v_{2,2}^{1,1} & \left\{ 2f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{4,0}^{3,3} \right\} &= 12v_{4,0}^{3,3} \\ \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{2,2} \right\} &= 4v_{2,0}^{2,2} & \left\{ 3f \cdot v_{2,0}^{2,2}, v_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{2,2}, f \cdot v_{4,0}^{2,2} \right\} &= -24v_{4,0}^{3,3} \\ \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{3,3} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{3,3} \right\} &= 4v_{2,0}^{3,3} & \left\{ f \cdot v_{2,0}^{2,2}, v_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{2,2}, f \cdot v_{2,0}^{2,2} \right\} &= -120v_{2,0}^{3,3} \\ \left\{ f \cdot v_{2,0}^{1,1}, v_{2,0}^{4,4} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{1,1}, f \cdot v_{2,0}^{4,4} \right\} &= 4v_{2,0}^{4,4} & \left\{ f \cdot v_{2,0}^{2,2}, v_{2,0}^{3,3} \right\} - \left\{ v_{2,0}^{2,2}, f \cdot v_{2,0}^{3,3} \right\} &= 16v_{2,0}^{4,4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ f^2 \cdot v_{2,2}^{1,1}, v_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ f \cdot v_{2,2}^{1,1}, f \cdot v_{2,-2}^{4,4} \right\} + \left\{ v_{2,2}^{1,1}, f^2 \cdot v_{2,-2}^{4,4} \right\} = 6v_{0,0}^{4,4} \\
& \left\{ 3f^2 \cdot v_{3,1}^{2,2}, v_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 4f \cdot v_{3,1}^{2,2}, f \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} + \left\{ 3v_{3,1}^{2,2}, f^2 \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} = -60v_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ 2f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2}, v_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ 3f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2}, f \cdot v_{4,0}^{2,2} \right\} + \left\{ 3f \cdot v_{4,0}^{2,2}, f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ 2v_{4,0}^{2,2}, f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2} \right\} = -120v_{2,0}^{3,3} \\
& \left\{ 2f^3 \cdot v_{4,0}^{2,2}, v_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ 3f^2 \cdot v_{4,0}^{2,2}, f \cdot v_{4,0}^{3,3} \right\} + \left\{ 3f \cdot v_{4,0}^{2,2}, f^2 \cdot v_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ 2v_{4,0}^{2,2}, f^3 \cdot v_{4,0}^{3,3} \right\} = 240v_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ f^3 \cdot v_{3,1}^{2,2}, v_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ f^2 \cdot v_{3,1}^{2,2}, f \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} + \left\{ f \cdot v_{3,1}^{2,2}, f^2 \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 2v_{3,1}^{2,2}, f^3 \cdot v_{3,-1}^{3,3} \right\} = 12v_{0,0}^{4,4}
\end{aligned}$$

*Demostración.* Como  $\{-, -\} : H^{p,p} \times H^{q,q} \rightarrow H^{p+q-1, p+q-1}$  necesariamente  $p+q-1 \leq 5$ . Esto descarta todos los  $(p, q)$  cuyos corchetes se escapan de la graduación de  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$ . Del Teorema de Clebsch-Gordan, si  $\left\{ V_{(n_1, k_1)}^{p,p}, V_{(n_2, k_2)}^{q,q} \right\} \neq 0$ , entonces algunas componentes irreducibles de su descomposición deben aparecer en  $H^{p+q-1, p+q-1}$ . Luego, usando la Definición 5.4.1 y los representantes de la Subsec. 7.3.1, obtenemos los productos de Clebsch-Gordan dados en el enunciado.  $\diamond$

Si re-escribimos los corchetes anteriores en término de los vectores dominantes  $\hat{v}_{m,k}^{p,q}$  presentados en (7.6), obtenemos los siguientes productos de Clebsch-Gordan:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \hat{v}_{0,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,2}^{1,1} \right\} = -2\lambda \hat{v}_{2,2}^{1,1} & \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \\
& \left\{ \hat{v}_{0,0}^{1,1}, \hat{v}_{3,1}^{2,2} \right\} = -\lambda \hat{v}_{3,1}^{2,2} & \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,2}^{1,1}, \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,2}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ \hat{v}_{0,0}^{1,1}, \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} = \lambda \hat{v}_{3,-1}^{3,3} & \left\{ 3f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 2\hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} = 15\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \\
& \left\{ \hat{v}_{0,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} = 2\lambda \hat{v}_{2,-2}^{4,4} & \left\{ 3f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{3,1}^{2,2} \right\} - \left\{ 2\hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2} \right\} = 15\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{3,1}^{2,2} \\
& \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,0}^{1,1} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{1,1} & \left\{ 2f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} = 12\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{4,0}^{2,2} \\
& \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,2}^{1,1} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,2}^{1,1} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,2}^{1,1} & \left\{ 2f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} = 12\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{4,0}^{3,3} \\
& \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{2,2} & \left\{ 3f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2}, \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} = 48\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{4,0}^{3,3} \\
& \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,0}^{3,3} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{3,3} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{3,3} & \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2}, \hat{v}_{2,0}^{2,2} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{3,3} \\
& \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{1,1}, \hat{v}_{2,0}^{4,4} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{4,4} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{4,4} & \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,0}^{2,2}, \hat{v}_{2,0}^{3,3} \right\} - \left\{ \hat{v}_{2,0}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{2,0}^{3,3} \right\} = 4\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ f^2 \cdot \hat{v}_{2,2}^{1,1}, \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} - \left\{ f \cdot \hat{v}_{2,2}^{1,1}, f \cdot \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} + \left\{ \hat{v}_{2,2}^{1,1}, f^2 \cdot \hat{v}_{2,-2}^{4,4} \right\} = -2\lambda \hat{v}_{0,0}^{4,4} \\
& \left\{ 3f^2 \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2}, \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 4f \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} + \left\{ 3\hat{v}_{3,1}^{2,2}, f^2 \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} = 15\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ 2f^3 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ 3f^2 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} + \left\{ 3f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, f^2 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} - \left\{ 2\hat{v}_{4,0}^{2,2}, f^3 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2} \right\} = 48\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{3,3} \\
& \left\{ 2f^3 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ 3f^2 \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} + \left\{ 3f \cdot \hat{v}_{4,0}^{2,2}, f^2 \cdot \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} - \left\{ 2\hat{v}_{4,0}^{2,2}, f^3 \cdot \hat{v}_{4,0}^{3,3} \right\} = 12\lambda \sqrt{3} \hat{v}_{2,0}^{4,4} \\
& \left\{ f^3 \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2}, \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ f^2 \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2}, f \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} + \left\{ f \cdot \hat{v}_{3,1}^{2,2}, f^2 \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} - \left\{ 2\hat{v}_{3,1}^{2,2}, f^3 \cdot \hat{v}_{3,-1}^{3,3} \right\} = -\lambda \hat{v}_{0,0}^{4,4}
\end{aligned}$$

Como estos productos determinan los coeficientes  $\gamma_{n,m}^{p,q}$  de la  $gl(2)$ -tabla, obtenemos el siguiente Lema:

**Lema 7.4.4.** El corchete de Poisson sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  está definido por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{ \cdot, \cdot \}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$								
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$-2\lambda V_{(2,2)}^{1,1}$			$-\lambda V_{(3,1)}^{2,2}$	
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{1,1}$	$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,2)}^{1,1}$		$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{2,2}$	$15\sqrt{3}\lambda V_{(3,1)}^{2,2}$	$12\sqrt{3}\lambda V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(2,2)}^{1,1}$		$2\lambda V_{(2,2)}^{1,1}$	$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,2)}^{1,1}$					
$V_{(0,0)}^{2,2}$								
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{2,2}$			$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{3,3}$		$48\sqrt{3}\lambda V_{(4,0)}^{3,3}$
$V_{(3,1)}^{2,2}$		$\lambda V_{(3,1)}^{2,2}$	$15\sqrt{3}\lambda V_{(3,1)}^{2,2}$					
$V_{(4,0)}^{2,2}$			$12\sqrt{3}\lambda V_{(4,0)}^{2,2}$			$48\sqrt{3}\lambda V_{(4,0)}^{3,3}$		$48\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{3,3}$
$V_{(4,0)}^{3,3}$			$12\sqrt{3}\lambda V_{(4,0)}^{3,3}$					$12\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{4,4}$
$V_{(3,-1)}^{3,3}$		$-\lambda V_{(3,-1)}^{3,3}$	$15\sqrt{3}\lambda V_{(3,-1)}^{3,3}$				$-15\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{4,4} \oplus -\lambda V_{(0,0)}^{4,4}$	
$V_{(2,0)}^{3,3}$			$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{3,3}$			$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{4,4}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$								
$V_{(2,-2)}^{4,4}$		$-2\lambda V_{(2,-2)}^{4,4}$	$\sqrt{3}\lambda V_{(2,-2)}^{4,4}$	$4\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{4,4} \oplus 2\lambda V_{(0,0)}^{4,4}$				
$V_{(2,0)}^{4,4}$			$\sqrt{3}\lambda V_{(2,0)}^{4,4}$					
$V_{(0,0)}^{4,4}$								
$V_{(0,0)}^{5,5}$								

Dado que dos  $\mathfrak{gl}(2)$ -tablas como en el Lema anterior definen dos  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie isomorfismos a través de un cambio de base diagonal, basta tomar un valor particular de  $\lambda$ . Luego, tomando  $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{4}$  y simplificando el valor  $4\sqrt{3}\lambda$  conseguimos la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

**Teorema 7.1.** La cohomología  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -álgebra de Poisson cuyo producto copa está definido por la  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla (7.7) y el corchete de Poisson es definido por la siguiente  $\mathfrak{gl}(2)$ -tabla:

$\{ \cdot, \cdot \}$	$V_{(0,0)}^{0,0}$	$V_{(0,0)}^{1,1}$	$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(0,0)}^{2,2}$	$V_{(2,0)}^{2,2}$	$V_{(3,1)}^{2,2}$	$V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(0,0)}^{0,0}$								
$V_{(0,0)}^{1,1}$				$-\frac{\sqrt{3}}{6} V_{(2,2)}^{1,1}$			$-\frac{\sqrt{3}}{12} V_{(3,1)}^{2,2}$	
$V_{(2,0)}^{1,1}$			$V_{(2,0)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$		$V_{(2,0)}^{2,2}$	$\frac{15}{4} V_{(3,1)}^{2,2}$	$3V_{(4,0)}^{2,2}$
$V_{(2,2)}^{1,1}$		$\frac{\sqrt{3}}{6} V_{(2,2)}^{1,1}$	$V_{(2,2)}^{1,1}$					
$V_{(0,0)}^{2,2}$								
$V_{(2,0)}^{2,2}$			$V_{(2,0)}^{2,2}$			$V_{(2,0)}^{3,3}$		$12V_{(4,0)}^{3,3}$
$V_{(3,1)}^{2,2}$		$\frac{\sqrt{3}}{12} V_{(3,1)}^{2,2}$	$\frac{15}{4} V_{(3,1)}^{2,2}$					
$V_{(4,0)}^{2,2}$			$3V_{(4,0)}^{2,2}$			$12V_{(4,0)}^{3,3}$		$12V_{(2,0)}^{3,3}$
$V_{(4,0)}^{3,3}$			$3V_{(4,0)}^{3,3}$					$3V_{(2,0)}^{4,4}$
$V_{(3,-1)}^{3,3}$		$-\frac{\sqrt{3}}{12} V_{(3,-1)}^{3,3}$	$\frac{15}{4} V_{(3,-1)}^{3,3}$				$-\frac{15}{4} V_{(2,0)}^{4,4} \oplus -\frac{\sqrt{3}}{12} V_{(0,0)}^{4,4}$	
$V_{(2,0)}^{3,3}$			$V_{(2,0)}^{3,3}$			$V_{(2,0)}^{4,4}$		
$V_{(0,0)}^{3,3}$								
$V_{(2,-2)}^{4,4}$		$-\frac{\sqrt{3}}{6} V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,-2)}^{4,4}$	$V_{(2,0)}^{4,4} \oplus \frac{\sqrt{3}}{6} V_{(0,0)}^{4,4}$				
$V_{(2,0)}^{4,4}$			$V_{(2,0)}^{4,4}$					
$V_{(0,0)}^{4,4}$								
$V_{(0,0)}^{5,5}$								

(7.8)



# Apéndice A

## Comentarios finales

### A.1. Acciones centrales sobre $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$

Sean  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  dos álgebras de Lie cuyos centros son  $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2$  respectivamente. Supongamos también que  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  son  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie, entonces  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie con centro  $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2$ , de modo que la cantidad de operaciones primarias (sec. 5.3) es igual a  $\dim \mathfrak{z}_1 + \dim \mathfrak{z}_2$ .

Si  $z \in \mathfrak{z}$ , por la proposición 5.4.2 vimos que la operación primaria  $\iota_z$  está definida por el corchete de Poisson  $\{z, -\} : H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}) \rightarrow H^{\bullet-1,0}(\mathfrak{g})$ . Por otro lado, para calcular la cohomología trivial  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g})$  usamos la fórmula de Künneth, cuyo enunciado es el siguiente:

**Teorema A.1.** Existe un isomorfismo de álgebras graduadas:

$$H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \cong H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1) \otimes H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_2) \quad (\text{A.1})$$

Luego, para todo  $0 \leq n \leq \dim \mathfrak{g}_1 + \dim \mathfrak{g}_2$  vale la descomposición:

$$H^{n,0}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) \cong \bigoplus_{p+q=n} H^{p,0}(\mathfrak{g}_1) \otimes H^{q,0}(\mathfrak{g}_2) \quad (\text{A.2})$$

*Demostración.* La fórmula (A.2) es un caso particular de la fórmula general que puede verse en [CE56, Wei94]. Está fórmula también puede encontrarse en [BT82] en contextos de la cohomología de *De Rham*.  $\diamond$

Supongamos entonces que  $z \in \mathfrak{g}$  y sean  $\omega_p \in H^{p,0}(\mathfrak{g}_1)$ ,  $\omega_q \in H^{q,0}(\mathfrak{g}_2)$ . Por el teorema anterior  $\omega_p \wedge \omega_q \in H^{n,0}(\mathfrak{g})$  donde  $n = p + q$  y de este modo:

$$\begin{aligned} \iota_z(\omega_p \wedge \omega_q) &= \{z, \omega_p \wedge \omega_q\} = \{z, \omega_p\} \wedge \omega_q + (-1)^{pq} \omega_p \wedge \{z, \omega_q\} \\ &= \iota_z(\omega_p) \wedge \omega_q + (-1)^{pq} \omega_p \wedge \iota_z(\omega_q) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Luego, si  $z \in \mathfrak{z}_1$  se sigue que  $\iota_z(\omega_q) = 0$  y por consiguiente  $\iota_z(\omega_p \wedge \omega_q) = \iota_z(\omega_p) \wedge \omega_q$ . Similarmente, si  $z \in \mathfrak{z}_2$  entonces  $\iota_z(\omega_p \wedge \omega_q) = \omega_p \wedge \iota_z(\omega_q)$ . Por lo tanto, para calcular la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g})$  usamos el desarrollo de Clebsch-Gordan (ver 4.3.2) entre los representantes dominantes de cohomología de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1)$  y  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_2)$ , junto con la ecuación (A.3) que evalúa la representación central.

**Ejemplo A.1.1.** Sea  $\mathfrak{f}_{3,2}$  el álgebra de Lie 3-pasos nilpotentes libre en dos generadores y denotemos por  $\mathfrak{f}_{3,2,k} = \mathfrak{f}_{3,2} \oplus \mathbb{C}^k$ . El centro de  $\mathfrak{f}_{3,2,k}$  es  $V_{(1,3)} \oplus V_{(k-1,1)}$  donde  $V_{(1,3)} = \langle y_1 \rangle$  es el centro de  $\mathfrak{f}_{3,2}$  y  $\mathbb{C}^k \cong V_{(k-1,1)}$  como  $\mathfrak{gl}(2)$ -módulo.

Veamos los diagramas de cohomología para  $k = 1, 2$ . Para  $k = 1$ , sea  $\mathbb{C} = \langle a_0 \rangle = V_{(0,1)}$ . Como los representantes dominantes de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{f}_{3,2})$  del Lema 7.2.1 son monomios, usando la fórmula (A.1) tenemos que los representantes dominantes de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{f}_{3,2,1})$  son:

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} \\ H^1(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle a^0 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle = V_{(0,-1)}^{1,0} \oplus V_{(1,-1)}^{1,0} \\ H^2(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle e^1 a^0 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \rangle = V_{(1,-2)}^{2,0} \oplus V_{(2,-4)}^{2,0} \\ H^3(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle e^1 y^1 a^0 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \rangle = V_{(2,-5)}^{3,0} \oplus V_{(2,-6)}^{3,0} \\ H^4(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle e^1 f^0 y^1 a^0 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 \rangle = V_{(2,-7)}^{4,0} \oplus V_{(1,-9)}^{4,0} \\ H^5(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^0 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \rangle = V_{(1,-10)}^{5,0} \oplus V_{(0,-10)}^{5,0} \\ H^6(\mathfrak{f}_{3,2,1}) &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^0 \rangle = V_{(0,-11)}^{6,0} \end{aligned}$$

Evaluando las operaciones primarias  $\iota_{y_1}, \iota_{y^{-1}}$  y  $\iota_{a_0}$  sobre cada representante anterior, obtenemos el diagrama de la Figura A.1.1-(a). Para  $k = 2$ , si  $\mathbb{C}^2 = \langle a_1 \rangle = V_{(1,1)}$ , entonces los representantes de cohomología en  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{f}_{3,2,2})$  son:

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} \\ H^1(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle a^1 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle = V_{(1,-1)}^{1,0} \oplus V_{(1,-1)}^{1,0} \\ H^2(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle a^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^1 a^1 \rangle \oplus \langle e^1 a^{-1} - e^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 \rangle = V_{(0,-2)}^{2,0} \oplus V_{(2,-2)}^{2,0} \oplus V_{(0,-2)}^{2,0} \oplus V_{(2,-4)}^{2,0} \\ H^3(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle e^1 a^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^1 y^1 a^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} y^1 a^1 + e^1 y^{-1} a^1 - 2e^1 y^1 a^{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 \rangle \\ &= V_{(1,-3)}^{3,0} \oplus V_{(3,-5)}^{3,0} \oplus V_{(1,-5)}^{3,0} \oplus V_{(2,-6)}^{3,0} \\ H^4(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle e^1 y^1 a^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^1 a^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} f^0 y^1 a^1 - e^1 f^0 y^1 a^{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 \rangle \\ &= V_{(2,-6)}^{4,0} \oplus V_{(3,-7)}^{4,0} \oplus V_{(1,-7)}^{4,0} \oplus V_{(1,-9)}^{4,0} \\ H^5(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle e^1 f^0 y^1 a^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} f^0 y^{-1} y^1 a^1 - e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^{-1} \rangle \oplus \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 \rangle \\ &= V_{(2,-8)}^{5,0} \oplus V_{(0,-10)}^{5,0} \oplus V_{(2,-10)}^{5,0} \oplus V_{(0,-10)}^{5,0} \\ H^6(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^{-1} a^1 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^1 \rangle = V_{(1,-11)}^{6,0} \oplus V_{(1,-11)}^{6,0} \\ H^7(\mathfrak{f}_{3,2,2}) &= \langle e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} y^1 a^{-1} a^1 \rangle = V_{(0,-12)}^{7,0} \end{aligned}$$

Luego, el diagrama de cohomología de  $H^{\bullet}(\mathfrak{f}_{3,2,2})$  es dado por la Figura A.1.1-(b).

**Ejemplo A.1.2.** Sea  $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1$  y supongamos que, para diferenciar cada sumando, el primer término tiene base  $\{x_1, x_{-1}, h_0\}$  y el segundo término tiene base  $\{e_1, e_{-1}, f_0\}$ . Luego, con los representantes de cohomología dados en 6.1 y la fórmula (A.1) obtenemos la siguiente descomposición de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1)$

$$\begin{aligned} H^0(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle 1 \rangle = V_{(0,0)}^{0,0} \\ H^1(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^1 \rangle \oplus \langle e^1 \rangle = V_{(1,-1)}^{1,0} \oplus V_{(1,-1)}^{1,0} \\ H^2(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^1 h^0 \rangle \oplus \langle x^1 e^1 \rangle \oplus \langle x^1 e^{-1} - x^{-1} e^1 \rangle \oplus \langle e^1 f^0 \rangle = V_{(1,-3)}^{2,0} \oplus V_{(2,-2)}^{2,0} \oplus V_{(0,-2)}^{2,0} \oplus V_{(1,-3)}^{2,0} \\ H^3(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^{-1} x^1 h^0 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 e^1 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 e^{-1} - x^{-1} h^0 e^1 \rangle \oplus \langle x^1 e^1 f^0 \rangle \oplus \langle x^1 e^{-1} f^0 - x^{-1} e^1 f^0 \rangle \oplus \langle e^{-1} e^1 f^0 \rangle \\ &= V_{(0,-4)}^{3,0} \oplus V_{(2,-4)}^{3,0} \oplus V_{(0,-4)}^{3,0} \oplus V_{(2,-4)}^{3,0} \oplus V_{(0,-4)}^{3,0} \oplus V_{(2,-4)}^{3,0} \\ H^4(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^{-1} x^1 h^0 e^1 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 e^1 f^0 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 e^{-1} f^0 - e^{-1} h^0 e^1 f^0 \rangle \oplus \langle x^1 e^{-1} e^1 f^0 \rangle \\ &= V_{(1,-5)}^{4,0} \oplus V_{(2,-6)}^{4,0} \oplus V_{(0,-6)}^{4,0} \oplus V_{(1,-5)}^{4,0} \\ H^5(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^{-1} x^1 e^1 f^0 \rangle \oplus \langle x^1 h^0 e^{-1} e^1 f^0 \rangle = V_{(1,-5)}^{5,0} \oplus V_{(1,-5)}^{5,0} \\ H^6(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1) &= \langle x^{-1} x^1 h^0 e^{-1} e^1 f^0 \rangle = V_{(0,-7)}^{6,0} \end{aligned}$$

Note que las descomposiciones no son libres de multiplicidad. Evaluando las operaciones primarias definidas

por  $h^0$  y  $f^0$  sobre cada representante anterior, obtenemos el diagrama de la Figura A.1.2.

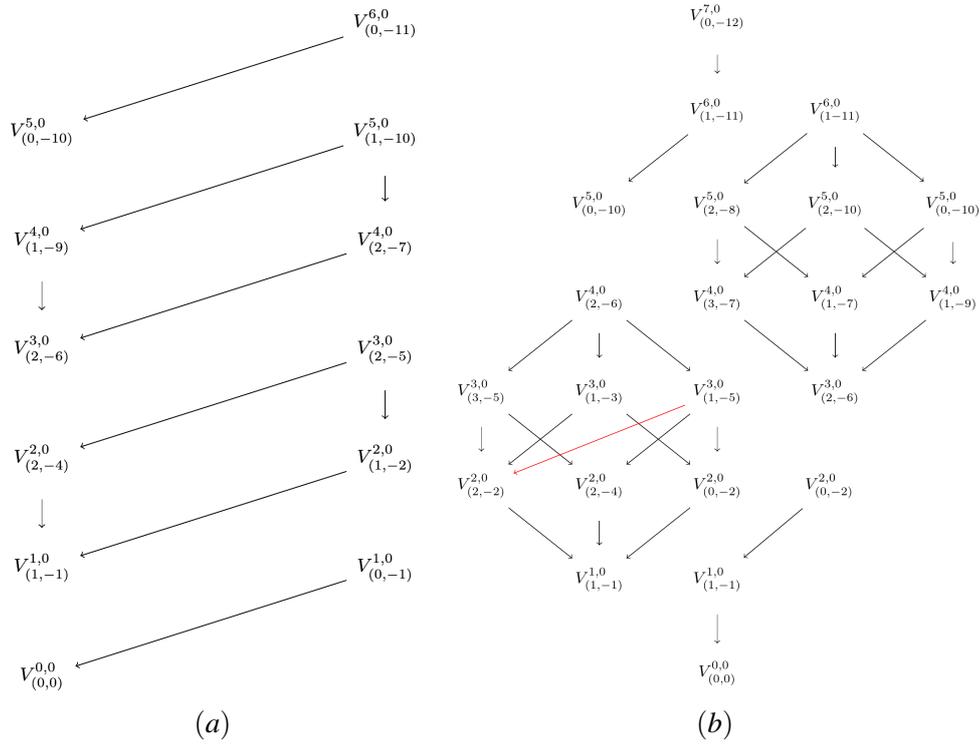


Figura A.1.1: Representación central sobre  $H^\bullet(\tilde{\mathfrak{f}}_{3,2,1})$  y  $H^\bullet(\tilde{\mathfrak{f}}_{3,2,2})$

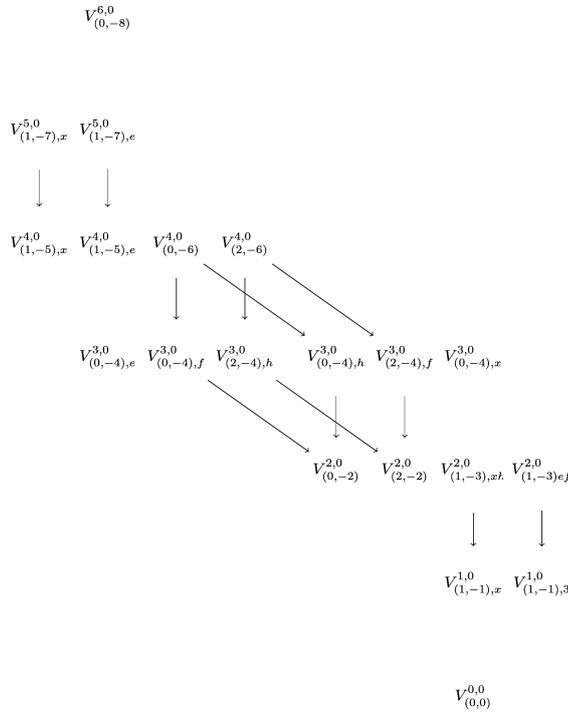


Figura A.1.2: Representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1)$

**A.1.1. Producto  $\otimes$  de grafos**

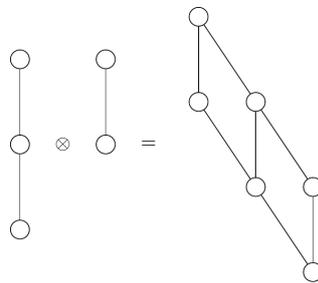
Resulta que la acción central sobre  $H^{\bullet,0}$  de los ejemplos anteriores de  $\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$  se puede obtener realizando el producto  $\otimes$  entre los diagramas de cohomología de la acción central correspondiente a cada sumando  $\mathfrak{g}_i$ . La definición del producto  $\otimes$  entre dos grafos se encuentra en [HI11] y la recordamos a continuación:

**Definición A.1.1.** Sean  $G = (V_G, E_G)$  y  $H = (V_H, E_H)$  dos grafos. Se define el grafo  $G \otimes H$  como aquel cuyo conjunto de vértices y aristas es dado a continuación:

$$V_{G \otimes H} = \{(g, h) : g \in V_G, h \in V_H\}$$

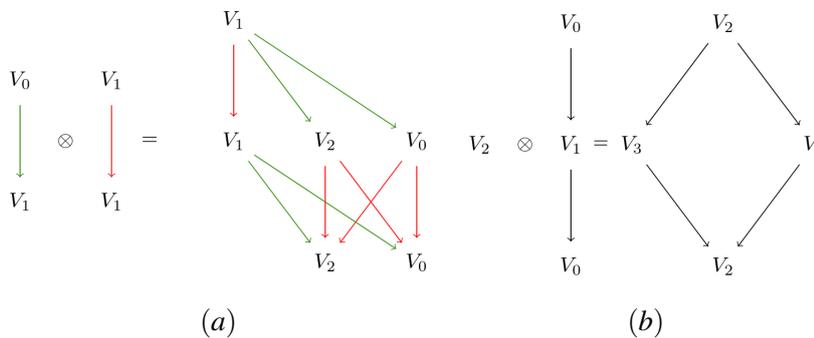
$$E_{G \otimes H} = \{(g, h)(g', h') : g = g', hh' \in E_H \text{ ó } gg' \in E_G, h = h'\}$$

Los grafos  $G$  y  $H$  se denominan factores de  $G \otimes H$ . Por ejemplo, en la siguiente figura se muestran dos grafos  $G$  y  $H$  junto con el producto  $\otimes$  entre tales grafos:

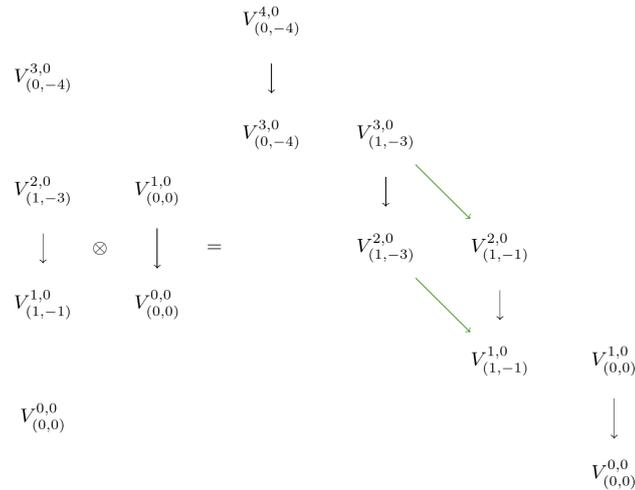


Supongamos ahora que  $G$  y  $H$  son grafos cuyos vértices están etiquetados por  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulos irreducibles  $V_{(n)}$ . Entonces se puede definir el producto de grafos  $G \otimes H$  cuyo conjunto de vértices está definido por los factores irreducibles para cada descomposición de  $V_{(n)} \otimes V_{(m)}$  donde  $V_{(n)}$  es un vértice en  $G$  y  $V_{(m)}$  es un vértice en  $H$ . Si  $V_{(m_k)} \rightarrow V_{(m_l)}$  es una arista en  $H$  entonces existe una arista que nace en  $V_{(n+m_k-2i)}$  y termina en  $V_{(n+m_l-2j)}$  para todo  $0 \leq i \leq n+m_k$  y  $0 \leq j \leq n+m_l$  con  $V_{(n)}$  un vértice en  $G$ . Del mismo modo cambiando los roles de  $G$  y  $H$ .

**Ejemplo A.1.3.** Si  $G : V_{(0)} \rightarrow V_{(1)}$  y  $H : V_{(1)} \rightarrow V_{(1)}$ , entonces el producto  $G \otimes H$  es representado por el grafo de la Figura (a). Similarmente, si  $G : V_{(2)}$  y  $H : V_{(0)} \rightarrow V_{(1)} \rightarrow V_{(0)}$ , entonces el producto  $G \otimes H$  es representado por el grafo de la Figura (b).



**Ejemplo A.1.4.** Sea  $G$  el grafo del diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{h}_1)$  (Fig. 6.2.1) y sea  $H$  el grafo del diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathbb{C})$ , es decir,  $H : V_{(0,0)}^{1,0} \rightarrow V_{(0,0)}^{0,0}$ . Si calculamos la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathbb{C})$  como en el ejemplo A.1.1 vemos que se obtiene el siguiente diagrama:



que es el producto  $\otimes$  de los diagramas de cohomología de cada factor (que pueden mirarse en el lado izquierdo de la imagen).

Por lo tanto, si  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  son  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie con centros  $\mathfrak{z}_i = V_{(n_i)}$  y  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ , el diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$  se obtiene a partir del producto  $\otimes$  entre los grafos  $G_i$  definidos por los diagramas de cohomología  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_i)$  sobre cada factor. Notar que si  $\mathfrak{z}_i$  actúa no trivialmente sobre un  $\mathfrak{sl}(2)$ -módulo irreducible  $V_{(s)}^{\bullet,0}$  de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_i)$  entonces  $\mathfrak{z}_i$  debe enviar  $V_{(s)}^{\bullet,0} \rightarrow V_{(s-n_i)}^{\bullet-1,0}$  ó  $V_{(s)}^{\bullet,0} \rightarrow V_{(s+n_i)}^{\bullet-1,0}$  (puesto que la acción de  $\mathfrak{sl}(2)$  se entrelaza con la acción central, ver Capítulo 3), con lo cual, una vez hecho el producto  $G_1 \otimes G_2$  eliminamos del diagrama resultante todas aquellas aristas que no siguen lo dicho anteriormente.

**Ejemplo A.1.5.** Los diagramas de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{f}_{3,2} \oplus \mathbb{C}^k)$ ,  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathbb{C}^k)$  y  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_1)$  se obtienen por el producto  $\otimes$  de los diagramas de cohomología correspondiente a cada factor (en cada situación).

**Conjetura A.1.1.** Para toda  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie  $\mathfrak{g}_1$  y  $\mathfrak{g}_2$  el diagrama de cohomología de la acción central sobre  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)$  se obtiene por el producto  $\otimes$  sobre los diagramas de  $H^{\bullet,0}(\mathfrak{g}_i)$ .

## A.2. El álgebra de Diamante $\mathfrak{D}_4$

El álgebra de diamante  $\mathfrak{D}_4$  es un álgebra de Lie soluble de dimensión 4 definida por:

$$\mathfrak{D}_4 = \langle x_1, x_0, y_0, y_1 : [x_1, y_0] = -x_1, [x_1, y_1] = x_0, [y_0, y_1] = -y_1 \rangle$$

Observar que el centro de  $\mathfrak{D}_4$  es  $\mathfrak{z} = \langle x_0 \rangle$  y se puede ver que  $\mathfrak{D}_4 = \langle y_0 \rangle \ltimes \mathfrak{h}_1$  donde  $y_0$  actúa sobre  $\mathfrak{h}_1$  por adjunta. Resulta que  $\mathfrak{D}_4$  es un álgebra de Lie soluble y cuadrática cuya forma bilineal no degenerada  $B : \mathfrak{D}_4 \otimes \mathfrak{D}_4 \rightarrow \mathfrak{D}_4$  está definida por:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y que no corresponde a la forma de Killing de  $\mathfrak{D}_4$ . Las derivaciones exteriores de  $\mathfrak{D}_4$  es el álgebra soluble  $\text{Der}_e(\mathfrak{D}_4) = \langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle$  donde:

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir,  $\Phi_1$  es la derivación de la identidad y  $\Phi_2 : y_0 \mapsto x_0$ . Para calcular la cohomología  $H^{\bullet,0}$  usamos la fórmula  $\delta_t(\omega) = -\{I_B, \omega\}_B$ , de modo que:

$$\begin{aligned} \delta_t(x^1) &= x^1x^0 & \delta_t(x^1x^0) &= -x^1x^0y^0 & \delta_t(x^0y^1) &= -x^0y^0y^1 \\ \delta_t(x^0) &= -x^1y^1 & \delta_t(x^1y^0) &= 0 & \delta_t(y^0y^1) &= 0 \\ \delta_t(y^0) &= 0 & \delta_t(x^1y^1) &= 0 & \delta_t(x^1x^0y^i) &= 0 \\ \delta_t(y^1) &= y^0y^1 & \delta_t(x^0y^0) &= x^1y^0y^1 & \delta_t(x^iy^0y^1) &= 0 \end{aligned}$$

y para el resto de la cohomología  $H^{\bullet,q}$  se calculan explícitamente los cociclos y cobordes en cada coeficientes, obteniendo así las siguientes descomposiciones:

$$\begin{aligned} H^{4,0} &= \langle x^1x^0y^0y^1 \rangle = W_{-4}^{4,0} & H^{4,1} &= \langle x^1x^0y^0y^1 \otimes y_0 \rangle = W_{-4}^{4,1} \\ H^{3,0} &= \langle x^1x^0y^1 \rangle = W_{-4}^{3,0} & H^{3,1} &= \langle x^1x^0y^1 \otimes y_0 \rangle \oplus \langle x^0y^0y^1 \otimes y_1 - x^1x^0y^0 \otimes x_1 \rangle = W_{-4}^{3,1} \oplus W_{-2}^{3,1} \\ H^{2,0} &= \langle 0 \rangle & H^{2,1} &= \langle x^1y^1 \otimes y_0 \rangle \oplus \langle x^0y^0 \otimes x_1 - x^0y^0 \otimes x_0 \rangle = W_{-2}^{2,1} \oplus W_0^{2,1} \\ H^{1,0} &= \langle y^0 \rangle = W_0^{1,0} & H^{1,1} &= \langle x^1 \otimes x_1 + x^0 \otimes x_0 \rangle \oplus \langle y^0 \otimes x_0 \rangle = W_0^{4,1} \oplus W_2^{4,1} \\ H^{0,0} &= \langle 1 \rangle = W_0^{0,0} & H^{0,1} &= \langle x_0 \rangle = W_2^{4,1} \\ H^{4,4} &= \langle x^1x^0y^0y^1 \otimes x^1x^0y^0y^1 \rangle = W_0^{4,4} & H^{4,3} &= \langle x^1x^0y^0y^1 \otimes x_1y_0y_1 \rangle = W_{-2}^{4,3} \\ H^{3,4} &= \langle x^1x^0y^1 \otimes x^1x^0y^0y^1 \rangle = W_0^{3,4} & H^{3,3} &= \langle x^1x^0y^1 \otimes x_1y_0y_1 \rangle \oplus \langle x^1x^0y^0 \otimes x_1x_0y_0 + x^0y^0y^1 \otimes x_0y_0y_1 \rangle \\ & & &= W_{-2}^{3,3} \oplus W_0^{3,3} \\ H^{2,4} &= \langle 0 \rangle & H^{2,3} &= \langle x^1y^0 \otimes x_1x_0y_1 - x^1y^0 \otimes x_1x_0y_0 \rangle \oplus \langle x^0y^1 \otimes x_1y_0y_1 - x^1x^0 \otimes x_1x_0y_0 \rangle \\ & & &= W_0^{2,3} \oplus W_2^{2,3} \\ H^{1,4} &= \langle y^0 \otimes x^1x^0y^0y^1 \rangle = W_4^{1,4} & H^{1,3} &= \langle y^0 \otimes x_1x_0y_1 \rangle \oplus \langle x^0 \otimes x_1x_0y_1 - x^1 \otimes x_1x_0y_0 \rangle = W_4^{1,3} \oplus W_2^{1,3} \\ H^{0,4} &= \langle x^1x^0y^0y^1 \rangle = W_4^{0,4} & H^{0,3} &= \langle x_1x_0y_1 \rangle = W_4^{0,3} \end{aligned}$$

Usaremos  $w_r^{p,q}$  para denotar a un representante de clase de cohomología en  $H^{p,q}$  (listado anteriormente), tal que  $\Phi_1$  actúa con autovalor  $r$  y  $W_r^{p,q}$  para denotar al correspondiente módulo generado (que son todos unidimensionales).

En esta álgebra tenemos que la cohomología  $H^{\bullet,2} = 0$  y las acciones centrales sobre  $H^{\bullet,0}$ ,  $H^{\bullet,2}$  y  $H^{\bullet,4}$  son triviales. Este es un ejemplo claro de un álgebra de Lie soluble no nilpotente que no satisface la Conjetura 5.3.2.

El diagrama de cohomología para la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{D}_4 \ltimes \mathfrak{D}_4^*)$  es dado en la Figura A.2.1. El centro de  $\mathfrak{D}_4 \ltimes \mathfrak{D}_4^*$  es  $\mathfrak{z}_{\ltimes} = \langle x_0 \rangle \oplus \langle y^0 \rangle$ , con lo cual hay definidas dos operaciones primarias. Las representaciones centrales sobre  $H^{\bullet, \bullet} = H^{\bullet}(\mathfrak{D}_4, \wedge^{\bullet} \mathfrak{D}_4)$  están determinadas por  $\iota_{x_0}$  y el diagrama de la representación central sobre  $H^{\bullet}(\mathfrak{D}_4 \ltimes \mathfrak{D}_4^*)$  se completa por como actúa  $\iota_{y^0}$ . Los diagramas formados por las columnas del diagrama anterior corresponden a las acciones centrales para cada cohomología  $H^{\bullet,q}$ .

Notar que  $\mathfrak{D}_4$  no es una  $\mathfrak{gl}(2)$ -Lie, puesto que el álgebra de derivaciones de  $\mathfrak{D}_4$  es un álgebra soluble de dimensión 2. Por lo tanto, para describir las tablas de multiplicar del producto copa y el corchete de Poisson en  $H^{\bullet, \bullet}$  no tiene tanta relevancia el concepto de  $\mathfrak{g}$ -tablas.

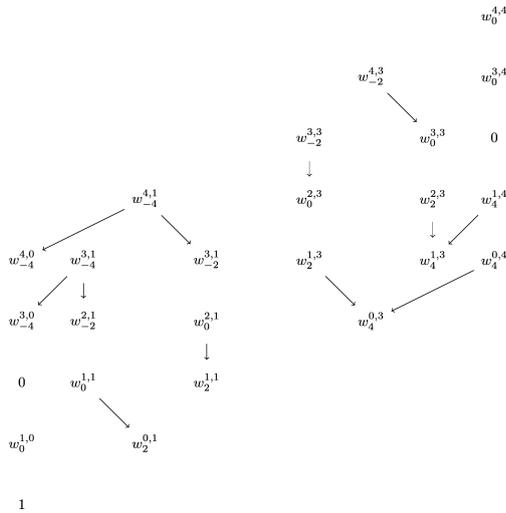


Figura A.2.1: Representación central sobre  $H^\bullet(\mathfrak{D}_4 \ltimes \mathfrak{D}_4^*)$

**A.2.1. Producto copa sobre  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  y  $H_E^{\bullet,\bullet}$**

La parte diagonal  $H_{diag}^{\bullet,\bullet}$  de la cohomología de  $\mathfrak{D}_4$  es igual a

$$H_{diag}^{\bullet,\bullet} = 1 \oplus W_0^{1,1} \oplus W_2^{1,1} \oplus W_{-2}^{3,3} \oplus W_0^{4,4}$$

y los productos copas no triviales son  $w_2^{1,1} \vee w_{-2}^{3,3} = w_0^{4,4}$  y  $w_0^{1,1} \vee w_0^{3,3} = -w_0^{4,4}$ . Sustituyendo  $\chi_1 = w_0^{1,1}$ ,  $v_1 = w_2^{1,1}$ ,  $v_2 = w_{-2}^{3,3}$  y  $\chi_2 = -w_0^{3,3}$  obtenemos la siguiente tabla de multiplicar:

$\vee$	1	$\chi_1$	$v_1$	$v_2$	$\chi_2$	$\chi_1\chi_2$
1	1	$\chi_1$	$v_1$	$v_2$	$\chi_2$	$\chi_1\chi_2$
$\chi_1$	$\chi_1$				$\chi_1\chi_2$	
$v_1$	$v_1$			$\chi_1\chi_2$		
$v_2$	$v_2$		$\chi_1\chi_2$			
$\chi_2$	$\chi_2$	$\chi_1\chi_2$				
$\chi_1\chi_2$	$\chi_1\chi_2$					

Con la tabla anterior, podemos ver que se satisfacen las siguientes relaciones

$$\chi_1\chi_2 = v_1v_2 \quad \chi_i^2 = 0 \quad v_i^2 = 0 \quad \chi_1v_2 = v_1\chi_2 = \chi_1v_1 = \chi_2v_2 = 0$$

de modo que:

$$H_{diag}^{\bullet,\bullet} \cong \mathbb{C}[\chi_1, \chi_2, v_1, v_2] / \langle \chi_1\chi_2 - v_1v_2, \chi_i^2, v_i^2, \chi_1v_2, v_1\chi_2, \chi_1v_1, \chi_2v_2 \rangle$$

Por otro lado, la parte par  $H_E^{\bullet,\bullet}$  es igual a

$$H_E^{\bullet,\bullet} = H_{diag}^{\bullet,\bullet} \oplus W_{-4}^{4,0} \oplus W_{-4}^{3,1} \oplus W_2^{1,3} \oplus W_4^{1,3} \oplus W_0^{0,4}$$

y denotando por  $r = w_{-4}^{4,0}$ ,  $s_1 = w_{-4}^{3,1}$ ,  $t_1 = w_{-2}^{3,1}$ ,  $t_2 = w_2^{1,3}$ ,  $s_2 = w_4^{1,3}$ ,  $u = w_4^{0,4}$ , la tabla de multiplicar del producto copa es igual a:



A.3. Cociclos y Cobordes de  $C^{\bullet,1}(\check{f}_{3,2})$ A.3.1.  $d : \check{f}_{3,2}^* \otimes \check{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^2 \check{f}_{3,2}^* \otimes \check{f}_{3,2}$ 

P	$B^{2,1}$	$Z^{1,1}$
0	$1 \quad f^0 \otimes f_0 \rightarrow e^{-1}e^1 \otimes f_0 - e^{-1}f^0 \otimes y_1 - e^1f^0 \otimes y_{-1}$ $2 \quad e^1 \otimes e_{-1} + e^{-1} \otimes e_1 \rightarrow -2e^{-1}e^1 \otimes f_0 - e^{-1}f^0 \otimes y_1 - e^1f^0 \otimes y_{-1}$ $3 \quad e^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} \otimes y_1 \rightarrow 0$ $4 \quad y^1 \otimes e_{-1} + y^{-1} \otimes e_1 \rightarrow -e^{-1}y^1 \otimes f_0 + e^1y^{-1} \otimes f_0 + e^1f^0 \otimes e_{-1}$ $\quad \quad \quad + e^{-1}f^0 \otimes e_1 + f^0y^{-1} \otimes y_1 + f^0y^1 \otimes y_{-1}$ $5 \quad y^1 \otimes y_{-1} + y^{-1} \otimes y_1 \rightarrow e^{-1}f^0 \otimes y_1 + e^1f^0 \otimes y_{-1}$	<p>(3)</p> <p>(2) + 2(1) + 3(5)</p>
1	$1 \quad e^1 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1}e^1 \otimes y_1$ $2 \quad f^0 \otimes e_1 \rightarrow e^1f^0 \otimes f_0 + e^{-1}e^1 \otimes e_1$ $3 \quad f^0 \otimes y_1 \rightarrow e^{-1}e^1 \otimes y_1$ $4 \quad y^1 \otimes f_0 \rightarrow e^1f^0 \otimes f_0 - e^{-1}y^1 \otimes y_1 - e^1y^1 \otimes y_{-1}$	(1) + (3)
2	$1 \quad e^1 \otimes e_1 \rightarrow -e^1f^0 \otimes y_1$ $2 \quad e^1 \otimes y_1 \rightarrow 0$ $3 \quad y^1 \otimes y_1 \rightarrow e^1f^0 \otimes y_1$ $4 \quad y^1 \otimes e_1 \rightarrow e^1y^1 \otimes f_0 + f^0y^1 \otimes y_1 + e^1f^0 \otimes e_1$	<p>(2)</p> <p>(1) + (3)</p>

A.3.2.  $d : \wedge^2 \check{f}_{3,2}^* \otimes \check{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^3 \check{f}_{3,2}^* \otimes \check{f}_{3,2}$ 

P	$B^{3,1}$	$Z^{2,1}$
0	$1 \quad e^1f^0 \otimes e_{-1} + e^{-1}f^0 \otimes e_1 \rightarrow -2e^{-1}e^1f^0 \otimes f_0$ $2 \quad f^0y^1 \otimes e_{-1} + f^0y^{-1} \otimes e_1 \rightarrow -e^{-1}f^0y^1 \otimes f_0 + e^1f^0y^{-1} \otimes f_0 + e^{-1}e^1y^{-1} \otimes e_1$ $\quad \quad \quad + e^{-1}e^1y^1 \otimes e_{-1}$ $3 \quad e^{-1}e^1 \otimes f_0 \rightarrow 0$ $4 \quad y^{-1}y^1 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1}y^{-1}y^1 \otimes y_1 - e^1y^{-1}y^1 \otimes y_{-1}$ $\quad \quad \quad + e^{-1}f^0y^1 \otimes f_0 - e^1f^0y^{-1} \otimes f_0$ $5 \quad e^1f^0 \otimes y_{-1} + e^{-1}f^0 \otimes y_1 \rightarrow 0$ $6 \quad e^1y^{-1} \otimes f_0 - e^{-1}y^1 \otimes f_0 \rightarrow 2e^{-1}e^1 \wedge f^0 \otimes f_0 - e^{-1}e^1y^{-1} \otimes y_1 - e^{-1}e^1y^1 \otimes y_{-1}$ $7 \quad f^0y^1 \otimes y_{-1} + f^0y^{-1} \otimes y_1 \rightarrow e^{-1}e^1y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1}e^1y^{-1} \otimes y_1$	<p>(3)</p> <p>(5)</p> <p>(1) + (6) + (7)</p>
1	$1 \quad e^{-1}e^1 \otimes e_1 \rightarrow e^{-1}e^1f^0 \otimes y_1$ $2 \quad y^{-1}y^1 \otimes e_1 \rightarrow e^1y^{-1}y^1 \otimes f_0 + f^0y^{-1}y^1 \otimes y_1 + e^{-1}f^0y^1 \otimes e_1$ $\quad \quad \quad - e^1f^0y^{-1} \otimes e_1$ $3 \quad e^1y^1 \otimes e_{-1} + e^{-1}y^1 \otimes e_1 \rightarrow -e^{-1}e^1f^0 \otimes e_1 - 2e^{-1}e^1y^1 \otimes f_0 - e^{-1}f^0y^1 \otimes y_1$ $\quad \quad \quad - e^1f^0y^1 \otimes y_{-1}$ $4 \quad e^{-1}e^1 \otimes y_1 \rightarrow 0$ $5 \quad (e^1y^{-1} - e^{-1}y^1) \otimes e_1 \rightarrow e^{-1}e^1y^1 \otimes f_0 + e^{-1}f^0y^1 \otimes y_1 - e^1f^0y^{-1} \otimes y_1$ $\quad \quad \quad + 2e^{-1}e^1f^0 \otimes e_1$ $6 \quad e^1y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1}y^1 \otimes y_1 \rightarrow -e^{-1}e^1f^0 \otimes y_1$	(4)

P	$B^{3,1}$	$Z^{2,1}$
1	7 $(e^1 y^{-1} - e^{-1} y^1) \otimes y_1 \rightarrow 2e^{-1} e^1 f^0 \otimes y_1$	(4) (7) + (1) + (8) (7) + 2(8)
	8 $e^1 f^0 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1} e^1 f^0 \otimes y_1$	
	9 $f^0 y^1 \otimes f_0 \rightarrow e^{-1} e^1 y^1 \otimes f_0 - e^{-1} f^0 y^1 \otimes y_1 - e^1 f^0 y^1 \otimes y_{-1}$	
	10 $y^{-1} y^1 \otimes y_1 \rightarrow e^{-1} f^0 y^1 \otimes y_1 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes y_1$	
2	1 $e^1 f^0 \otimes e_1 \rightarrow 0$	(1) (3) (4) + (5)
	2 $f^0 y^1 \otimes e_1 \rightarrow e^1 f^0 y^1 \otimes f_0 + e^{-1} e^1 y^1 \otimes e_1$	
	3 $e^1 f^0 \otimes y_1 \rightarrow 0$	
	4 $f^0 y^1 \otimes y_1 \rightarrow e^{-1} e^1 y^1 \otimes y_1$	
	5 $e^1 y^1 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1} e^1 y^1 \otimes y_1$	
3	1 $e^1 y^1 \otimes e_1 \rightarrow -e^1 f^0 y^1 \otimes y_1$	(2)
	2 $e^1 y^1 \otimes y_1 \rightarrow 0$	

### A.3.3. $d : \wedge^3 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2} \rightarrow \wedge^4 \mathfrak{f}_{3,2}^* \otimes \mathfrak{f}_{3,2}$

P	$B^{4,1}$	$Z^{3,1}$
0	1 $e^{-1} e^1 f^0 \otimes f_0 \rightarrow 0$	(1) (3) (2) + (7) (5) + (7)
	2 $e^1 e^{-1} y^1 \otimes e_{-1} + e^1 e^{-1} y^{-1} \otimes e_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} \otimes y_1$	
	3 $e^1 e^{-1} y^1 \otimes y_{-1} + e^1 e^{-1} y^{-1} \otimes y_1 \rightarrow 0$	
	4 $y^1 y^{-1} e^1 \otimes e_{-1} + y^1 y^{-1} e^{-1} \otimes e_1 \rightarrow -e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 - e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_{-1} - e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0 - e^{-1} f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 + e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1$	
	5 $y^1 y^{-1} e^1 \otimes y_{-1} + y^1 y^{-1} e^{-1} \otimes y_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} \otimes y_1$	
	6 $y^1 y^{-1} f^0 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1} f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 - e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_{-1} + e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes f_0$	
	7 $e^{-1} f^0 y^1 \otimes f_0 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_{-1} - e^{-1} e^1 f^0 y^{-1} \otimes y_1$	
1	1 $e^1 e^{-1} f^0 \otimes e_1 \rightarrow 0$	(1) (2) (3) (4) + (6) - (7) (8) (9) - $\frac{3}{2}$ (7) (10)
	2 $e^1 e^{-1} f^0 \otimes y_1 \rightarrow 0$	
	3 $e^1 e^{-1} y^1 \otimes f_0 \rightarrow 0$	
	4 $y^1 y^{-1} e^1 \otimes f_0 \rightarrow -e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes y_1 + e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes f_0$	
	5 $y^1 y^{-1} f^0 \otimes e_1 \rightarrow e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1 + e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes f_0$	
	6 $y^1 y^{-1} f^0 \otimes y_1 \rightarrow e^{-1} e^1 y^{-1} y^1 \otimes y_1$	
	7 $e^{-1} f^0 y^1 \otimes e_1 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes e_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes f_0$	
	8 $e^{-1} f^0 y^1 \otimes y_1 - e^1 f^0 y^{-1} \otimes y_1 \rightarrow 0$	
	9 $e^1 f^0 y^1 \otimes e_{-1} + \frac{1}{2}(e^{-1} f^0 y^1 + e^1 f^0 y^{-1}) \otimes e_1 \rightarrow \frac{3}{2}e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes f_0$	
	10 $e^1 f^0 y^1 \otimes y_{-1} + \frac{1}{2}(e^{-1} f^0 y^1 + e^1 f^0 y^{-1}) \otimes y_1 \rightarrow 0$	
P	$B^{4,1}$	$Z^{3,1}$
2	1 $e^1 e^{-1} y^1 \otimes e_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_1$	(1) - (4) (2) (4) - (5)
	2 $e^1 e^{-1} y^1 \otimes y_1 \rightarrow 0$	
	3 $e^1 y^{-1} y^1 \otimes e_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 - e^1 f^0 y^{-1} y^1 \otimes y_1$	
	4 $y^1 y^{-1} e^1 \otimes y_1 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_1$	
	5 $e^1 f^0 y^1 \otimes f_0 \rightarrow e^{-1} e^1 f^0 y^1 \otimes y_1$	
3	1 $e^1 f^0 y^1 \otimes e_1 \rightarrow 0$	(1), (2)
	2 $e^1 f^0 y^1 \otimes y_1 \rightarrow 0$	

# Bibliografía

- [Ame13] Steven Amelotte, *Cohomology operations and the Toral Rank Conjecture for Nilpotent Lie algebras*, Master's thesis, Department of Mathematics and Statistics, Faculty of Science, University of Ottawa, 2013.
- [BC18] Āestmir Burdik and Sultan Catto, *Hurwitz algebras and the octonion algebra*, *Journal of Physics: Conference Series* **965** (2018), 012009.
- [BMS07] Murray Bremner, Lucia Murakami, and Ivan Shestakov, *Nonassociative Algebras*, *Handbook of Linear Algebra* (2007).
- [BT82] Raoul Bott and Loring Tu, *Differential forms in algebraic topology*, 1 ed., *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1982.
- [CE56] H. Cartan and S. Eilenberg, *Homological algebra*, Princeton University Press, 1956.
- [CFL06] Alberto Cattaneo, Domenico Fiorenza, and Riccardo Longoni, *Graded Poisson Algebras*, <https://arxiv.org/pdf/1811.07395.pdf>, 2006.
- [CJ03] Grant Cairns and Barry Jessup, *Cohomology operations for Lie algebras*, *Transactions of The American Mathematical Society* **356** (2003), no. 4, 1569–1583.
- [CJ08] Grant Cairn and Barry Jessup, *Free submodules for the Central Representation in the cohomology of Lie algebras*, *Proceedings of the American Math. Society* **136** (2008), no. 6, 1919–1923.
- [CJN20] Grant Cairns, Barry Jessup, and Yuri Nikolayevsky, *A class of nilpotent Lie algebras whose center acts nontrivially in cohomology*, *Proceedings of the american mathematical society* **148** (2020), no. 5, 1945–1952.
- [CS13] Leandro Cagliero and Fernando Szechtman, *The classification of uniserial  $sl(2) \ltimes V(m)$ -modules and a new interpretation of the Racah-Wigner  $6j$ -symbol*, *Journal of Algebra* **386** (2013), 142–175.
- [CT02] Leandro Cagliero and Paulo Tirao, *The Adjoint Homology of the free 2-step nilpotent Lie algebra*, *Quart. J. Math* **53** (2002), 125–145.
- [CT04] ———, *The cohomology of the cotangent bundle of Heisenberg groups*, *Advances in Mathematics* **181** (2004), no. 2, 276–307.

- [dG07] Willem de Graaf, *Classification of 6-dimensional nilpotent Lie algebras over fields of characteristic not 2*, Journal of Algebra (2007).
- [DK17] Robert Donley and Won Geun Kim, *A rational theory for Clebsch-Gordan coefficients*, <https://arxiv.org/abs/1707.03022>, 2017.
- [DL57] J. Dixmier and W. G. Listern, *Derivations of nilpotent Lie algebras*, American Math. Society **8** (1957), no. 1, 155–158.
- [FH91] William Fulton and Joe Harris, *Representation theory, A first course*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [FP20] Alice Fialowski and Michael Penkava, *On the cohomology of Lie algebras with an invariant inner product*, 2020.
- [GR07] Michel Goze and Elisabeth Remm, *Poisson algebras in terms of non-associative algebras*, Journal of Algebra (2007).
- [Gre58] J. A. Green, *On the indecomposable representations of a finite group*, Mathematische Zeitschrift (1958).
- [Gre62] ———, *Blocks of modular representations*, Mathematische Zeitschrift (1962).
- [Gru88] Fritz Grunewald, *Varieties of nilpotent Lie algebras of dimension less than six*, Journal of Algebra (1988).
- [GW98] Roe Goodman and Nolan Wallach, *Representations and invariants of the Classical groups*, Cambridge University Press, 1998.
- [GW09] ———, *Symmetry, Representations and Invariants*, Springer, 2009.
- [HI11] R. Hammack and W. Imrich, *Handbook of product graphs*, CRC Press, 2011.
- [HS71] P. J. Hilton and U. Stambach, *A course in homological algebra*, Springer-Verlag, New York, 1971.
- [HTV19] Cao Tran Tu Hai, Duong Minh Thanh, and Le Anh Vu, *Cohomology of some families of Lie algebras and quadratic Lie algebras*, <https://arxiv.org/abs/1903.11537>, 2019.
- [Hum78] James Humphreys, *Intruduction to Lie algebras and Representation theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [Jac79] Nathan Jacobson, *Lie algebras.*, Dover Publications, 1979.
- [Kna88] Anthony Knapp, *Lie groups, Lie algebras and Cohomology*, Princeton University Press, 1988.
- [Kos61] Bertram Kostant, *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. **74** (1961), no. 2, 329–387.
- [KS96] Yvette Kosmann-Schwarzbach, *From Poisson algebras to Gerstenhaber algebras*, Annales de l’Institut Fourier **46** (1996), no. 5, 1243–1274.

- [LGPV12] Camille Laurent-Gengoux, Anne Pichereau, and Pol Vanhaecke, *Poisson Structures*, 2013 ed., Springer, 2012.
- [Mag08] L. Magnin, *Adjoint and Trivial Cohomologies of Nilpotent Complex Lie algebras of dimension  $\leq 7$* , International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **2008** (2008), 12.
- [MR06] Martin Markl and Elisabeth Remm, *Algebras with one operation including Poisson and other Lie-admissible algebras*, Journal of Algebra (2006).
- [Pil14a] B. Pilar, *An overview of free nilpotent Lie algebras*, Comment. Math. Univ. Carolin. **55** (2014), no. 3, 325–339.
- [Pil14b] ———, *On extensions of free nilpotent lie algebras of type 2*, Linear Algebra and its Applications **457** (2014), 363–382.
- [PLD12] Tien Dat Pham, Anh Vu Le, and Minh Thanh Duong, *Solvable quadratic Lie algebras in low dimensions*, <https://arxiv.org/abs/1204.4787>, 2012.
- [PRL19] B. Pilar and J Roldán-López, *Derivations and automorphisms of free nilpotent Lie algebras and their quotients*, <https://arxiv.org/abs/1911.01897>, 2019.
- [PU07] G. Pinczon and R. Ushirobira, *New applications of graded Lie algebras to Lie algebras, generalized Lie algebras, and cohomology*, Journal of Lie Theory **17** (2007), no. 3.
- [San83] L. J. Santharoubane, *Cohomology of Heisenberg Lie Algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society **87** (1983), no. 1.
- [SSS09] Irene Sabadini, Michael Shapiro, and Frank Sommen, *Hypercomplex analysis*, 1 ed., Trends in mathematics, Birkhauser, 2009.
- [The95] Jacques Thevénaz, *G-algebras and modular representation theory*, Oxford, 1995.
- [Tur94] Alexandre Turull, *Clifford theory with Schur indices*, Journal of Algebra **170** (1994), 661–677.
- [Tur95] ———, *Some invariants for equivalent G-algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **98** (1995), 209–222.
- [Wei94] Charles Weibel, *An introduction to Homological algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [YD13] Zaili Yan and Shaoqiang Deng, *The classification of two step nilpotent complex Lie algebras of dimension 8*, Czechoslovak Mathematical Journal **63** (2013).