

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de la Licenciatura en Física

Solitones en la Esfera: un estudio numérico

Autor: Federico Carrasco

Director: Oscar Reula

Marzo 2011

Agradecimientos

A mi familia, por todo el apoyo en estos años de carrera. En particular a mi vieja, por bancarme en mis períodos más ausentes.

A mis amigos y a los compañeros de facultad.

A Leco, mi director, por su buena onda y su generosa predisposición a la docencia.

Y un agradecimiento especial para Naty, mi novia, quien soportó con gran entusiasmo extensas charlas sobre skyrmiones.

Resumen

El presente trabajo está abocado al estudio numérico y analítico de ciertos sistemas de tipo *Skyrmiones*. Estos modelos se presentan en el contexto de teorías de campos clásicas que, al ser consideradas en su forma no-lineal completa, presentan soluciones con estructura topológica no trivial.

En particular, se estudia un modelo (2+1) dimensional, en donde el bien conocido $O(3)$ *sigma model* es estabilizado mediante la inclusión de un campo vectorial. Para ello, se cuenta con dos códigos adaptados a la geometría particular del problema (S^2 , la esfera unidad), con los cuales es posible investigar la existencia y características de soluciones estáticas en diferentes densidades¹, y también, aspectos referidos a la dinámica del modelo. Se observan interesantes estructuras para altas densidades, y un buen acuerdo con la literatura afín en bajas densidades.

Palabras Claves

solitones - carga topológica - skyrmiones - campo escalar - campo vectorial
modelo sigma - esfera unidad

Clasificación

12.39.Dc Skyrmions

04.25.D- Numerical relativity

¹Nos referimos aquí a la proporción espacial entre estas estructuras (solitones) y el espacio.

Índice general

Agradecimientos	2
Resumen	3
1. Introducción	6
1.1. Solitones	6
1.2. Un poco de historia	7
1.3. Modelos en bajas dimensiones	8
1.4. Modelos sigma	8
1.5. Estabilidad via campo vectorial de mesones	9
1.6. Solitones en espacios compactos	9
1.7. Objetivos generales	10
2. Marco Teórico	11
2.1. <i>O(3) Sigma Model</i>	11
2.1.1. Acción	12
2.1.2. Carga Topológica	12
2.1.3. Formulación Restringida	13
2.1.4. Proyecciones	14
2.1.5. Soluciones Estáticas	14
2.2. Modelo Sigma estabilizado mediante un campo vectorial ω	17
2.2.1. Acción	18
2.2.2. Formulación Restringida	18
2.2.3. Elección de las Variables Dinámicas	19
2.2.4. Ecuaciones de Evolución	19
2.2.5. Energía	20
2.2.6. Soluciones Estáticas	21

2.2.7. <i>Well-posedness</i> para los problemas en el continuo	22
3. Códigos	25
3.1. Esquema de Grillas	25
3.2. Esquema Numérico	26
3.3. Penalizaciones	27
3.4. Test de Convergencia	28
4. Resultados	32
4.1. Configuraciones Estáticas	32
4.1.1. Estudio Numérico	37
4.2. Dinámica del Modelo	47
4.2.1. Estudio Numérico	47
5. Conclusiones	51
5.1. Breve Recapitulación	51
5.2. Reseña de lo Encontrado	52
5.3. Extensiones y Posibles Líneas de Continuación	53
A. Coordenadas <i>cubed sphere</i>	55
A.1. Parches	55
A.2. Jacobiano	57
B. Datos	59
B.1. Parámetros	59
B.2. Configuraciones y Energías	61
Bibliografía	63

Capítulo 1

Introducción

Aquí se intentarán incluir los aspectos generales referidos a los sistemas de tipo skyrmiones: sus propiedades características, su historia, sus variantes, etc. Luego, intentaremos introducirnos más específicamente al modelo que se considerará en este trabajo, los antecedentes de investigación al respecto y relacionados.

Finalmente, se delimitarán los ejes centrales y los objetivos generales de este estudio.

1.1. Solitones

En los años 60 y principios de los 70's, una aproximación novedosa a la teoría cuántica de campos se desarrolló y popularizó. Físicos y matemáticos comenzaron a estudiar seriamente las ecuaciones de campos clásicos en su forma no-lineal completa, e interpretaron algunas de las soluciones como candidatos a partículas de las teorías. Estas nuevas partículas eran diferentes de las partículas elementales que se derivan de la cuantización a las excitaciones ondulatorias de los campos. La característica central y novedosa de éstas, es su estructura topológica, que difiere del vacío.

Este tipo de soluciones deben su estabilidad a esta distintividad topológica: aunque frecuentemente posean gran energía, no pueden simplemente decaer en un número de partículas elementales. En muchos casos, el carácter topológico del campo es captado por un simple número entero W , denominado carga topológica o *winding number*. Esta carga topológica puede ser identificada como el número neto del nuevo tipo de partícula.

La partícula básica tiene $W = 1$, mientras que su anti-partícula es considerada aquella con $W = -1$. En estas configuraciones, la densidad de energía es siempre suave y concentrada en una región finita del espacio. Son llamadas genéricamente “soliton” (anti-soliton), en clara alusión a su identificación como partícula.

1.2. Un poco de historia

Existieron algunos antecedentes al descubrimiento de solitones topológicos en teoría de campos. Uno de los primeros fue el modelo de *vórtices* de Kelvin, como modelo atómico. Kelvin sugirió que los átomos podían ser representados por estructuras de tipo nudos (*knots*) en un fluido ideal. La topología de estos *nudos* sería inmutable, correspondiéndose con la inmutabilidad química de los átomos. Los diferentes tipos de *nudos* clasificarían los distintos elementos de la tabla periódica.

Otro antecedente importante fue el monopolo de Dirac. Es una solución singular de las ecuaciones electromagnéticas usuales, con una carga magnética neta. Tiene un punto singular y energía infinita. Sin embargo, los campos, a una distancia fija de la fuente son topológicamente interesantes, y su topología está relacionada con la carga magnética. (Para una descripción más amplia ver [19])

Historicamente, el primer ejemplo concreto de modelo de partícula con estas características fue el Skyrmion. Éste, surge del modelo de Yukawa, una teoría de campo para nucleones de espín $\frac{1}{2}$ y los tres tipos de piones (π^+ , π^- , π^0). Skyrme creía que los nucleones en el núcleo se movían en un medio no-lineal clásico de piones. Esto lo hizo reconsiderar los términos de interacción de piones. Luego, argumentos de simetría lo llevaron a una forma particular de Lagrangeano para las componentes del campo de piones, con una estructura topológica no trivial que permitía la aparición de una solución solitónica estable de las ecuaciones de campo. Estos Skyrmiones tienen grados de libertad rotacionales, y Skyrme tuvo la visión, de que al cuantizar estos campos, era perfectamente admisible que los estados tuvieran espín $\frac{1}{2}$. De esta forma, una teoría netamente bosónica podía llevar a estados fermiónicos, que podían ser identificados con nucleos. Por ello, dentro de este modelo, se vuelve innecesaria la inclusión de nucleones independientes acoplados a los campos de piones. Éstos emergen naturalmente como los estados solitónicos de la teoría.

Esta atractiva idea de representar nucleones como solitones de un campo efectivo de piones fue propuesta por Skyrme mucho antes del advenimiento de la cromodinámica cuántica (QCD). Sin embargo, en el contexto actual de QCD la idea permanece igualmente atractiva, y la aproximación se vuelve exacta en el límite de grandes valores de N_c [28]. El modelo de Skyrme ofrece, por lo tanto, una imagen clásica, no-perturbativa de *hadrones* en el límite de bajas energías de QCD. Este dominio de bajas energías o grandes longitudes de onda es notoriamente difícil de describir en el ámbito de la cromodinámica cuántica standard. La aproximación de Skyrme incluye simetría *chiral*; bariones (y anti-bariones); piones; el potencial de intercambio de piones; y mediante cuantificación, nucleones y deltas.

1.3. Modelos en bajas dimensiones

A pesar de haber sido originalmente propuestos para describir bariones en el contexto de teorías no-lineales de piones, los skyrmiones están teniendo un creciente rol en otras áreas de la física y en diversos contextos.

En dos dimensiones espaciales, existen análogos a teorías de Yang-Mills 4-dimensionales. Suelen surgir como modelos aproximativos en el contexto, tanto de física de partículas, como en física del estado sólido. Por ejemplo, skyrmiones 2-dimensionales son usados para modelar burbujas que aparecen en ciertos sistemas de materia condensada en presencia de un campo magnético externo; pueden proveer un mecanismo asociado con la desaparición de antiferromagnetismo y el inicio de superconductividad HT_c ; también ha sido sugerido [23], que pueden ser responsables de muchas propiedades del efecto Hall cuántico (QHE). Baby-skyrmions, como suele denominarse, han sido estudiados también en el contexto de interacciones fuertes como un *modelo de juguete*, con fines de entender las interacciones dinámicas más complicadas de los skyrmiones usuales, que viven obviamente en 3 dimensiones espaciales.

1.4. Modelos sigma

Los modelos sigma son los sistemas más simples que admiten solitones estáticos entre sus soluciones. Estas soluciones constituyen ejemplos simples de mapas armónicos estudiados por matemáticos en geometría diferencial, y como tales, interesantes en sí mismos.

A pesar de que estos modelos son integrables en dos dimensiones (parte espacial), pareciera que sólo casos muy especiales resultan integrables en (2+1) dimensiones [26]. Al dejar de lado la dimensión temporal, estos modelos exhiben ecuaciones estáticas reducibles a primer orden que resultan sistemas integrables. Esto significa que las soluciones estáticas *multi-solitons* están relacionadas a sistemas integrables. Aunque, curiosamente la dinámica no es integrable.

Desde la perspectiva de física de partículas y relatividad, los modelos interesantes son aquellos invariantes de Lorentz. Pero todos los modelos sigma en (2+1) dimensiones invariantes de Lorentz parecen ser no-integrables, y por lo tanto es natural considerar evoluciones numéricas en estos casos.

El modelo sigma invariante de Lorentz más simple en (2+1) dimensiones es el $O(3)$ *sigma model*, que será presentado en más detalle en el siguiente capítulo. Aquí sólo observaremos, que si bien los solitones de dicho modelo son topológicamente estables, poseen una inestabilidad dinámica asociada a la energía. Por lo tanto, resulta necesario efectuar

alguna modificación mediante la inclusión de nuevos términos en el Lagrangeano. La modificación clásica es la incorporación de un término cuártico en derivadas del campo escalar y un potencial. Este es el análogo bidimensional del modelo de Skyrme, denominado frecuentemente *Baby-Skyrme model*. En este trabajo se buscará en cambio, la estabilidad por medio de la inclusión de un nuevo campo: un campo vectorial.

1.5. Estabilidad via campo vectorial de mesones

Cerca de 30 años atrás se mostró cómo, mediante una generalización de la teoría no-lineal de piones para incluir mesones vectoriales, el tamaño de los Skyrmiones puede ser estabilizado sin la necesidad del término de Skyrme[1]. El trabajo original sólo incluía el mesón ω , pero extensiones subsiguientes agregaron otros mesones, como por ejemplo el ρ . Estas investigaciones produjeron resultados prometedores, revelando algunas mejoras con respecto al modelo de Skyrme standard. Aunque todas estaban restringidas al sector topológico de carga uno.

Más adelante, surgieron trabajos con resultados numéricos de soluciones estáticas para algunos sectores de carga topológica mayores (“Multi-Skyrmions”) en 3 dimensiones espaciales [24], así como también para el caso bidimensional [14]. En ellos, se observan configuraciones estáticas muy similares a los modelos de Skyrme y Baby-Skyrme, respectivamente.

También existen algunos estudios [2, 16] relativos a la dinámica de estos sistemas: procesos de scattering entre dos solitones para distintos parámetros de impacto y *grooming*¹, y proceso de aniquilación de pares soliton/anti-soliton.

Existe un substancial progreso, tanto en aproximaciones numéricas como analíticas, a los skyrmiones standard, y puede decirse que son actualmente satisfactoriamente entendidos. (Para una *review* ver [19]). Mientras que este modelo presenta algunas dificultades numéricas y desafíos analíticos que aún no han sido resueltos por completo.

1.6. Solitones en espacios compactos

Los solitones topológicos son usualmente estudiados en el espacios plano \mathbb{R}^3 (o análogamente \mathbb{R}^2). Los requerimientos de energía finita en el espacio imponen condiciones de contorno a los campos que son cruciales para la clasificación topológica. Puede pensarse entonces, que el espacio plano es compactificado a S^3 (S^2), con radio infinito, para dar lugar a la estructura topológica antes mencionada.

¹ Rotaciones relativas en el espacio de isospin. Ver [2].

Sin embargo, hay muchas razones por las cuales considerar un espacio compacto² como espacio de partida puede ser interesante (aparte de la más obvia, que pueden ser aplicaciones cosmológicas). Primero, esto revela propiedades matemáticas interesantes: existen ahora dos escalas de longitud distintas, el tamaño de los solitones y el radio de curvatura de la geometría subyacente. Además, físicamente esto permite modelar una densidad finita de solitones, y la transición entre las fases de alta y baja densidad. Esto tiene gran potencial en aplicaciones en física de materia condensada, ya que se ha notado [20, 21] que muchos de los resultados cualitativos para arreglos periódicos de skyrmiones pueden ser obtenidos mucho más fácilmente estudiando el comportamiento de algunos pocos skyrmiones en un espacio compacto.

Existen trabajos sobre el modelo Baby-Skyrme en una esfera de radio finito [10, 22], donde se estudian estas transiciones de fase entre soluciones estáticas de bajas y altas densidades, en relación a los distintos parámetros de la teoría.

1.7. Objetivos generales

Luego de este breve recorrido por algunos de los modelos que presentan soluciones solitónicas, sus características centrales y motivaciones, se intentará a continuación delimitar el marco del presente estudio.

Se trabajará con un modelo (2+1) dimensional de tipo Baby-Skyrmion pensado en el espacio compacto S^2 , pero estabilizado con un campo vectorial de mesones ω , en lugar del más clásico término de Skyrme. Esta combinación resulta novedosa, y abre un amplio panorama de interrogantes.

Se intentará en primer lugar, analizar la posibilidad de existencia de configuraciones estáticas estables en el sector topológico de carga uno, y comparar estos resultados con los obtenidos para Baby-Skyrmions clásicos en esta configuración espacial [10]. Luego, se buscará extender este estudio a los sectores topológicos de carga más alta. En este proceso resulta crucial comprender el rol de los distintos parámetros de la teoría.

También se intentará decir algo respecto de la dinámica, en comparación con investigaciones pre-existentes en modelos similares.

²Como puede ser S^3 y S^2 , pero con radio finito.

Capítulo 2

Marco Teórico

En este capítulo se presentarán las ecuaciones y la descripción matemática de los modelos de interés.

Se comenzará con el modelo sigma, del cual es sabido que presenta soluciones con estructura topológica (solitones). Las configuraciones estáticas nos llevan a un sistema integrable de ecuaciones (ec. de Bogomolny) que pueden resolverse de forma explícita (mapas racionales). Luego, se comentarán las inestabilidades que posee el modelo asociadas a la energía, y se presentará la estabilización del sistema a través de la incorporación de un nuevo campo. Desarrollaremos en cierta profundidad el modelo resultante: el $O(3)$ *sigma model* estabilizado por un campo vectorial de mesones.

2.1. $O(3)$ *Sigma Model*

Un modelo sigma es un mapa ϕ entre un espacio-tiempo (M, g_{ab}) en cualquier dimensión, y un espacio Riemanniano (N, H_{AB}) .

Nos ocuparemos aquí del caso en $(2 + 1)$ dimensiones, donde el espacio-tiempo está dado por $M = \mathbb{R} \times S^2$ y el espacio de llegada es $N = S^2$.

El modelo sigma invariante de Lorentz más simple posible es el conocido $O(3)$ *sigma model*. Donde $O(3)$ se refiere a la simetría global del espacio de llegada, que es respetada por las ecuaciones del modelo.

2.1.1. Acción

La acción de cuya minimización resultan las ecuaciones de movimiento está dada por,

$$S(\phi) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^B H_{AB} dV \quad (2.1)$$

esto es, la integral sobre una foliación espacial de la traza del pullback de la métrica Riemanniana sobre el espacio-tiempo. Se observa que ésta, depende del mapa diferencial $\nabla_a \phi^A$ y del mapa mismo, ϕ , sólo a través de la métrica $H_{AB} := H_{AB}(\phi)$.

La variación de esta acción es:

$$\begin{aligned} \delta S(\phi) \cdot \delta \phi &= \int_{\Sigma_t} \left\{ g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \delta \phi^B H_{AB} + g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^B \frac{\partial H_{AB}}{\partial \phi^C} \delta \phi^C \right\} dV \\ &= \int_{\Sigma_t} \left\{ -\nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi^A) H_{AB} \right. \\ &\quad \left. - g^{ab} \nabla_a \phi^A \frac{\partial H_{AB}}{\partial \phi^C} \nabla_b \phi^C + g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \delta \phi^C \frac{\partial H_{AC}}{\partial \phi^B} \right\} \delta \phi^B dV \\ &= \int_{\Sigma_t} \left\{ -\nabla_b (g^{ab} \nabla_a \phi^A) H_{AB} - \Gamma_{AC}^D g^{ab} \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^C H_{DB} \right\} \delta \phi^B dV \end{aligned}$$

donde se ha asumido que los términos de borde son nulos. De aquí puede verse, que la ecuación de evolución resulta:

$$g^{ab} \nabla_a \nabla_b \phi^A + \Gamma_{BC}^A g^{ab} \nabla_a \phi^B \nabla_b \phi^C = 0 \quad (2.2)$$

donde, $\Gamma_{BC}^A = \frac{H^{AD}}{2} (\partial_C H_{BD} + \partial_B H_{CD} - \partial_D H_{BC})$.

Se observa que la expresión (2.2) se corresponde a la ecuación de geodésicas.

2.1.2. Carga Topológica

El grupo de homotopía relevante para un mapa $\phi : S^2 \mapsto S^2$ es $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, lo que implica que cada configuración del campo está caracterizada por un entero W , denominado carga topológica.

Dado el elemento de superficie canónico del espacio de llegada, ε_{AB} , se define su pullback en el espacio-tiempo por la 2-forma,

$$\omega_{ab} = \omega_{[ab]} := \nabla_a \phi^A \nabla_b \phi^B \varepsilon_{AB}$$

Observamos que esta forma es cerrada, es decir:

$$\nabla_{[c}\omega_{ab]} = \nabla_{[a}\phi^A\nabla_b\phi^B\partial_C\varepsilon_{AB}\nabla_{c]}\phi^C = 0$$

(dado que sólo incluye la parte antisimétrica de $\partial_C\varepsilon_{AB}$, que es nula pues tiene rango > 2)

Por lo tanto, se puede integrar sobre una foliación Σ_t y obtener una cantidad conservada. Normalizando con la superficie de la esfera unidad, se obtiene una cantidad entera que se identifica con la carga topológica:

$$W = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_t} \omega_{ab} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) d^2x \quad (2.3)$$

2.1.3. Formulación Restringida

Es posible definir el modelo sigma como mapas restringidos de (M, g_{ab}) en $(\mathbb{R}^{n+1}, E_{AB})$ de la forma usual, a través de la utilización de un multiplicador de Lagrange,

$$S(\phi) := \frac{1}{2} \int_{\Sigma_t} \{g^{ab}\nabla_a\phi^A\nabla_b\phi^B E_{AB} + \lambda\tau(\phi)\} dV \quad (2.4)$$

donde, $\tau(\phi)$ es una función de nivel definida en la variedad (N, H) .

Por ejemplo, para obtener las ecuaciones del modelo sigma entre (M, g) y una esfera con métrica canónica (S^n, H) embebida en \mathbb{R}^{n+1} , tomamos $\tau(\phi) := (1 - E_{AB}\phi^A\phi^B)$.

La ecuación resultante sería ahora:

$$g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi^A + \lambda\phi^A = 0 \quad (2.5)$$

Para hallar el multiplicador de Lagrange, se debe pedir se satisfaga la relación, $(1 - E_{AB}\phi^A\phi^B) = 0$. Para ello, se considera lo siguiente:

$$\begin{aligned} g^{ab}\nabla_a\nabla_b(E_{AB}\phi^A\phi^B) &= 2 \left[E_{AB}\phi^B g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi^A + E_{AB}g^{ab}\nabla_a\phi^A\nabla_b\phi^B \right] \\ &= 2 \left[-\lambda E_{AB}\phi^A\phi^B + E_{AB}g^{ab}\nabla_a\phi^A\nabla_b\phi^B \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se desea mantener constante este campo, se necesita:

$$\lambda = \frac{E_{AB}g^{ab}\nabla_a\phi^A\nabla_b\phi^B}{E_{AB}\phi^A\phi^B} \quad (2.6)$$

Luego, si se elige $\vec{\phi}$ de tal forma que inicialmente $E_{AB}\phi^A\phi^B = 1$ y $\partial_t\vec{\phi}$ sea perpendicular

a $\vec{\phi}$, de modo que $\partial_t(E_{AB}\phi^A\phi^B) = 2E_{AB}\phi^A\partial_t\phi^B = 0$. Entonces, la unicidad de la solución a la ecuación de onda implica $E_{AB}\phi^A\phi^B = 1$ para todo tiempo.

2.1.4. Proyecciones

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) son equivalentes a las ecuaciones:

$$\begin{aligned} g^{ab}\nabla_a\nabla_b(E_{AB}\phi^A\phi^B) &:= \square\phi^2 = 0 \\ H_B^A g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi^B &:= P\square\phi = 0 \end{aligned}$$

La primera, se sigue simplemente de reemplazar (2.6) en (2.5) y contraer con $E_{AB}\phi^B$. Mientras que la segunda proviene de considerar la proyección $H_B^A = E_B^A - \frac{\phi^A\phi_B}{\phi^2}$ sobre (2.5). Observamos entonces que si se tiene $\phi^2 = cte$, entonces,

$$\begin{aligned} \phi_{tt}^A &= H_B^A\Delta\phi^B + \frac{\phi^A\phi_B}{\phi^2}\Delta\phi^B + \lambda\phi^A \\ &= H_B^A\Delta\phi^B + \frac{\phi^A}{2\phi^2}\Delta\phi^2 - \phi^A\phi_t^B\phi_{Bt} \\ &= H_B^A\Delta\phi^B - \phi^A\phi_t^B\phi_{Bt} \end{aligned} \tag{2.7}$$

y se tiene así una ecuación para la evolución del sistema.

2.1.5. Soluciones Estáticas

La energía total del sistema está dada por la expresión,

$$E = \frac{1}{2} \int_{S^2} (\dot{\phi}^A\dot{\phi}_A + \nabla_k\phi^A\nabla^k\phi_A)\sqrt{-g}d^2x \tag{2.8}$$

En el caso estático sólo se tiene el término correspondiente a la energía potencial,

$$V = \frac{1}{2} \int_{S^2} \nabla_k\phi^A\nabla^k\phi_A\sqrt{-g}d^2x \tag{2.9}$$

Bogomolny Bounds

Dentro de cada sector topológico existe una cota inferior para la energía potencial del sistema. Estos límites a la energía asociados a la carga topológica fueron propuestos por Bogomolny [8], y pueden derivarse de la siguiente manera:

Se considera la desigualdad,

$$\int_{S^2} g^{ij} (\nabla_i \vec{\phi} \pm \epsilon_{ik} \vec{\phi} \times \nabla^k \vec{\phi}) \cdot (\nabla_j \vec{\phi} \pm \epsilon_{jk} \vec{\phi} \times \nabla^k \vec{\phi}) \sqrt{-g} d^2x \geq 0 \quad (2.10)$$

Usando las expresiones (2.3) y (2.9) para la carga topológica y la energía potencial, esta desigualdad puede reacomodarse como,

$$V \geq 4\pi|W| \quad (2.11)$$

Esto nos da una cota inferior para la energía en términos de la carga topologica. La igualdad será alcanzada, sí y sólo sí, el campo es una solución de alguna de las ecuaciones de Bogomolny de primer orden,

$$\nabla_i \vec{\phi} \pm \epsilon_{ik} \vec{\phi} \times \nabla^k \vec{\phi} = 0 \quad (2.12)$$

Las soluciones de las ecuaciones de Bogomolny minimizan por tanto la energía.

Rational maps

Para analizar las ecuaciones de Bogomolny es conveniente usar otra formulación equivalente de la teoría [6], en términos de un campo complejo independiente R . De esta forma, $R = (\phi_1 + i\phi_2)/(1 + \phi_3)$ es la coordenada en el espacio de llegada y $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$ es la coordenada del plano complejo, en término de las coordenadas angulares standard. Genéricamente entonces, $R = R(z, \bar{z})$.

La densidad Lagrangeana ahora toma la forma,

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu R \partial^\mu \bar{R}}{(1 + |R|^2)^2} \quad (2.13)$$

que es referido como \mathbb{CP}^1 sigma model, y en cuanto a sus soluciones clásicas, es equivalente al $O(3)$ sigma model.

De manera análoga reescribimos la energía y la carga topológica

$$V = 4 \int \frac{|\partial_z R|^2 + |\partial_{\bar{z}} R|^2}{(1 + |R|^2)^2} d^2x, \quad W = \frac{1}{\pi} \int \frac{|\partial_z R|^2 - |\partial_{\bar{z}} R|^2}{(1 + |R|^2)^2} d^2x \quad (2.14)$$

Luego, la ecuaciones de Bogomolny (2.12) son equivalentes a las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\partial_{\bar{z}} R = 0 (+) \quad \text{ó} \quad \partial_z R = 0 (-) \quad (2.15)$$

cuyas soluciones son funciones holomórficas $R(z)$, y anti-holomórficas $R(\bar{z})$, respectivamente.

Los requerimientos que $R(z)$ tenga un límite definido cuando $z \rightarrow \infty$, y que la energía total sea finita, fuerzan a $R(z)$ a ser una función racional de z .

$$R(z) = \frac{p(z)}{q(z)} \quad (2.16)$$

donde p y q no tengan raíces comunes. Además, por conteo de pre-imágenes [19], puede verse que el grado del mapa racional $k_{alg} = \max\{\deg(p), \deg(q)\}$ coincide con la carga topológica W .

Moduli Space

La condición de que numerador y denominador no tengan raíces comunes, se traduce en una única desigualdad polinomial en los coeficientes,

$$Res(p_0, \dots, p_W, q_1, \dots, q_W) \neq 0 \quad (2.17)$$

donde Res es denominado *resultante* o *eliminante* de p y q .

El espacio moduli (*moduli space*) \mathcal{M}_W de mapas racionales de grado W es naturalmente una variedad compleja de dimensión compleja $2W + 1$. Por tanto, dimensión real $4W + 2$. Es el complemento, en \mathbb{C}^{2W+1} , de la hipersuperficie definida por la ecuación $Res = 0$. Multiplicar cualquier mapa racional por una fase compleja arbitraria no tiene efecto sobre la densidad de energía del mapa, y existe por tanto, un grupo de simetría global interna $U(1)$, que actúa sobre el espacio moduli.

Existe una sutil diferencia entre el modelo definido en el plano y el modelo definido en la esfera unidad, ya que en el primer caso hay un arbitrario, pero fijo, valor del campo en el infinito espacial que rompe la simetría global $O(3)$ en una $O(2)$. Esta condición de *punto base*, impone sobre los mapas racionales la propiedad extra, $\deg(p) < \deg(q)$ (*based rational maps*), y por tanto, la dimensión del espacio moduli se reduce en estos casos a $4W$. Para mapas sobre la esfera unidad no existe tal ruptura, y el grupo completo $O(3)$ actúa sobre las configuraciones del campo.

Estabilidad

Se observa que, como la densidad de energía estática es cuadrática en las derivadas y el espacio es 2-dimensional, un reescalo espacial no altera dicha energía. Y el modelo es,

de hecho, conformemente invariante.

Sin embargo este argumento, como se ha visto, no descarta soluciones estáticas. Simplemente significa que el modelo admite la existencia de solitones de tamaños arbitrarios. Es decir, que cada solución vive en una familia mono-paramétrica de soluciones relacionadas entre sí por reescalamientos. Es por tanto posible, que ante pequeñas perturbaciones los solitones puedan expandirse indefinidamente o contraerse hasta el colapso [17].

La primera, y quizás más obvia, manera de remover la inestabilidad asociada con el tamaño, es rompiendo la invariancia conforme de la energía estática. Esto se logra introduciendo términos extra en el Lagrangeano que escaleen de formas opuestas frente al factor de escala. Un ejemplo claro de ello es el modelo baby-Skyrme, el equivalente 2-dimensional del modelo de Skyrme para nucleones, cuyo Lagrangeano puede escribirse,

$$\mathcal{L}^{B-S} := \frac{1}{2} \nabla^a \vec{\phi} \cdot \nabla_a \vec{\phi} + \frac{\kappa^2}{4} (\nabla_a \vec{\phi} \times \nabla_b \vec{\phi}) \cdot (\nabla^a \vec{\phi} \times \nabla^b \vec{\phi}) + \alpha V(\vec{\phi}) \quad (2.18)$$

Aquí, el término de cuarto orden en derivadas y el término potencial (que no posee derivadas del campo) escalean de formas opuestas en la expresión de la energía, y por lo tanto, introducen una escala espacial definida para las soluciones y estabilizan el modelo.

Existe otra alternativa que consiste en incluir un nuevo campo, un campo vectorial, acoplado a la corriente topológica del mapa ϕ . Esta alternativa fue propuesta por primera vez en [1], y explorada posteriormente en algunos trabajos [2, 16, 24] en 3 dimensiones espaciales e incluso en su versión bidimensional [14]. A continuación se intentará desarrollar en detalle este modelo, que es el que motiva el presente estudio.

2.2. Modelo Sigma estabilizado mediante un campo vectorial ω

Esta variante aparece en un contexto de física más razonable. Los campos elementales del modelo sigma son los campos de bosones (piones) y las excitaciones solitónicas proveen los bariones (nucleones), cuyas masas están en el rango del GeV. Por lo tanto, resulta lógica la inclusión en la teoría de los campos vectoriales de mesones como el ω y el ρ , cuyas masas son menores a las de los bariones. De esta forma, pareciera que puede lograrse la estabilidad, sin necesidad de incluir un término cuártico en derivadas (término de Skyrme).

Se desarrollará entonces la versión en 2 dimensiones espaciales de dicho modelo.

2.2.1. Acción

$$S := \int_{\Sigma_t} \mathcal{L}(\phi^A, \omega_a, \nabla_a \phi^A, \nabla_b \omega_a) \epsilon$$

donde aquí ϵ es el elemento de superficie de S^2 .

El lagrangeano del campo escalar acoplado al campo vectorial incluye ahora un potencial dependiente del campo escalar, un término correspondiente al nuevo campo vectorial (de masa M), y un término de interacción, de parámetro g , que acopla el campo vectorial a la corriente topológica B^a del modelo sigma.

$$\mathcal{L} := \frac{1}{2} \nabla^a \phi^A \nabla_a \phi^B H_{AB} + V(\vec{\phi}) + \frac{1}{2} \nabla_a \omega_b (\nabla^a \omega^b - \nabla^b \omega^a) + \frac{1}{2} M^2 \omega_a \omega^a + g \omega_a B^a \quad (2.19)$$

donde,

$$B^a = -\frac{1}{8\pi} \epsilon^{abc} \vec{\phi} \cdot (\nabla_b \vec{\phi} \times \nabla_c \vec{\phi}) \quad (2.20)$$

Pueden obtenerse las ecuaciones de Euler-Lagrange de considerar la variación de la acción ante pequeñas variaciones de los campos.

Variando el campo escalar, se tiene,

$$\delta S = \int_{\Sigma_t} \epsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} \delta \phi^A + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_a \phi^A)} \delta (\nabla_a \phi^A) \right] = \int_{\Sigma_t} \epsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^A} - \nabla_a \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_a \phi^A)} \right) \right] \delta \phi^A$$

Análogamente, para una variación $\delta \omega_a$,

$$\delta S = \int_{\Sigma_t} \epsilon \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_a} - \nabla_b \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\nabla_b \omega_a)} \right) \right] \delta \omega_a$$

2.2.2. Formulación Restringida

Nuevamente se considera aquí el mapa restringido mediante la inclusión de un multiplicador de Lagrange. Con lo cual se tiene,

$$\mathcal{L}_\lambda := \frac{1}{2} \nabla^a \phi^A \nabla_a \phi^B E_{AB} + \frac{1}{2} \lambda (1 - \phi^2) + V(\vec{\phi}) + \frac{1}{2} \nabla_a \omega_b (\nabla^a \omega^b - \nabla^b \omega^a) + \frac{1}{2} M^2 \omega_a \omega^a + g \omega_a B^a \quad (2.21)$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen las ecuaciones de movimiento para los campos.

$$\square \omega_a - \nabla^b \nabla_a \omega_b - M^2 \omega_a - g B_a = 0 \quad (2.22)$$

$$\square\phi^A + \lambda\phi^A + \frac{g}{8\pi}\epsilon^{abc}\epsilon^{ABC} [3\omega_a\nabla_b\phi_B + 2\phi_B\nabla_b\omega_a] \nabla_c\phi_C = \frac{\delta V}{\delta\phi^A} \quad (2.23)$$

Para hallar el multiplicador de Lagrange se procede igual que antes (sección 2.1.3) y se pide $\phi^2 = 1$, con lo cual $g^{ab}\nabla_a\nabla_b\phi^2 = 0$, y resulta finalmente:

$$\lambda = \nabla^a\phi_A\nabla_a\phi^A + 3g\omega_a B^a + \frac{\delta V}{\delta\phi^A}\phi^A \quad (2.24)$$

2.2.3. Elección de las Variables Dinámicas

Para llevar a cabo la evolución numérica del sistema es necesario seleccionar adecuada-mente las variables que serán evolucionadas.

Para los campos escalares se necesita llevar registro de los campos mismos y de sus primeras derivadas, es decir: $\vec{\phi}$, $\vec{\phi}_t$, $\vec{\phi}_x$, y $\vec{\phi}_y$. Mientras que para el campo vectorial se consideran las componentes del campo, ω_a ; el escalar $F := \frac{1}{2}\epsilon^{ij}F_{ij}$; y el covector $E_i := F_{i0}$. Donde F_{ab} se define como $F_{ab} := \nabla_{[a}\omega_{b]} = \partial_a\omega_b - \partial_b\omega_a$, y es el análogo del tensor electromagnético.

2.2.4. Ecuaciones de Evolución

Se desarrollan por tanto, a continuación, las ecuaciones de evolución para nuestras variables dinámicas.

Para el campo escalar, donde se llevará registro del conjunto de variables $(\phi^A, \phi_t^A, \phi_x^A, \phi_y^A)$, sólo es necesario computar ϕ_{tt}^A , que se deriva fácilmente de (2.23) y (2.24):

$$\begin{aligned} \phi_{tt}^A &= \Delta\phi^A - \square\phi^A \\ &= \Delta\phi^A + \lambda\phi^A + \frac{g}{8\pi}\epsilon^{abc}\epsilon^{ABC} (3\omega_a\nabla_b\phi_B + 2\phi_B\nabla_b\omega_a)\nabla_c\phi_C - \frac{\delta V}{\delta\phi^A} \\ &= H_D^A \left\{ \Delta\phi^D + \frac{g}{8\pi}\epsilon^{abc}\epsilon^{DBC} (3\omega_a\nabla_b\phi_B + 2\phi_B\nabla_b\omega_a)\nabla_c\phi_C + \left(\frac{\delta V}{\delta\phi^B}\phi^B\phi^D - \frac{\delta V}{\delta\phi^D} \right) \right\} - \phi^A\phi_t^D\phi_{Dt} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Donde al igual que en la sección 2.1.3, se consideró la proyección $H_B^A = E_B^A - \frac{\phi^A\phi_B}{\phi^2}$.

Aquí es necesaria una última observación. Dado que $\vec{\phi}$ es un vector unitario, todas sus derivadas $\nabla_a\vec{\phi}$ son perpendiculares a él. Por lo tanto, el término $\frac{3g}{8\pi}\epsilon^{abc}\epsilon^{DBC}\omega_a\nabla_b\phi_B\nabla_c\phi_C$ dentro de la proyección, resulta paralelo a ϕ^D , y en consecuencia su proyección es en realidad nula.

Reescribimos (2.26) de la forma,

$$\phi_{tt}^A = H_D^A \left\{ \Delta \phi^D + \frac{g}{4\pi} \epsilon^{abc} \epsilon^{DBC} \phi_B \nabla_b \omega_a \nabla_c \phi_C + \left(\frac{\delta V}{\delta \phi^B} \phi^B \phi^D - \frac{\delta V}{\delta \phi^D} \right) \right\} - \phi^A \phi_t^D \phi_{Dt} \quad (2.26)$$

En términos de las variables ω_a y F_{ab} , la ecuación (2.22) se convierte en:

$$\nabla^a F_{ab} = M^2 \omega_b + g B_b \quad (2.27)$$

$$\nabla^a \omega_a = 0 \quad (2.28)$$

$$\nabla_{[a} F_{bc]} = 0 \quad (2.29)$$

Aquí, (2.27) se deriva de (2.22) y del hecho de que la corriente B^a tiene divergencia nula. Vemos que la masa no-nula M rompe la simetría de gauge y fija así el gauge de Lorentz. Por otro lado, (2.29) es una propiedad geométrica intrínseca del mapa $d : \Lambda^p \rightarrow \Lambda^{p+1}$ (derivada exterior). Esta propiedad se enuncia como $d^2 = 0$, y es conocida como lema de Poincaré [25].

Nuestro conjunto de ecuaciones para hacer evolución quedaría, por lo tanto, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \phi_{tt}^A &= H_D^A \left\{ \Delta \phi^D + \frac{g}{8\pi} \epsilon^{abc} \epsilon^{DBC} \phi_B F_{ba} \partial_c \phi_C + \left(\frac{\delta V}{\delta \phi^B} \phi^B \phi^D - \frac{\delta V}{\delta \phi^D} \right) \right\} - \phi^A \phi_t^D \phi_{Dt} \\ \partial_t E_i &= g^{jk} \nabla_k (\epsilon_{ij} F) + M^2 \omega_i + g B_i \\ \partial_t \omega_0 &= g^{ij} \nabla_i \omega_j \\ \partial_t F &= \epsilon^{ij} \partial_j E_i \\ \partial_t \omega_i &= \partial_i \omega_0 - E_i \end{aligned} \quad (2.30)$$

Se tienen además los vínculos,

$$g^{jk} \nabla_k E_j = M^2 \omega_0 + g B_0 \quad (2.31)$$

$$F = \epsilon^{ij} \partial_i \omega_j \quad (2.32)$$

2.2.5. Energía

El tensor de energía momento está dado [25] por:

$$T_{ab} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{ab}} \quad (2.33)$$

Donde, S_M es la acción de los campos de materia y α_M una constante.

Para una acción invariante ante difeomorfismos, y en virtud de las ecuaciones de los campos de materia, puede verse que T_{ab} es siempre conservada, (i.e: $\nabla^a T_{ab} = 0$). Con lo cual la energía total del sistema será conservada y está dada por:

$$E := \int_{\Sigma_t} T_{00} \epsilon \quad (2.34)$$

Se tiene entonces,

$$T_{ab} = \left(-\frac{\alpha_M}{8\pi}\right) \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\sqrt{-g} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} + \mathcal{L} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}} \right]$$

con,

$$\begin{aligned} \frac{\delta(\sqrt{-g})}{\delta g^{ab}} &= -\frac{1}{2} g_{ab} \sqrt{-g} \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{ab}} &= \frac{1}{2} (\nabla_a \phi^A)(\nabla_b \phi_A) + \frac{1}{2} F_{ae} F_b^e + \frac{1}{2} M^2 \omega_a \omega_b + g_{\omega e} \frac{\delta B^e}{\delta g^{ab}} \end{aligned}$$

Y finalmente se haya la densidad de energía total del sistema¹:

$$T_{00} = \left[\frac{1}{2} (\dot{\phi}^A \dot{\phi}_A + \nabla_k \phi^A \nabla^k \phi_A) + V(\vec{\phi}) + \frac{1}{2} (E_k E^k + F^2) + \frac{1}{2} M^2 (\omega_0^2 + \omega_k \omega^k) \right] \quad (2.35)$$

Aquí puede identificarse claramente la contribución de cada campo. Cabe destacarse, que si bien no aparece explícitamente el término de interacción en esta expresión, su contribución viene dada a través del vínculo (2.31).

2.2.6. Soluciones Estáticas

Se considerarán ahora únicamente campos estáticos. Es decir, las derivadas temporales de todos los campos serán nulas.

Para estos campos estáticos las componentes espaciales de la corriente topológica son nulos (i.e: $B^i = 0$) y por lo tanto se puede elegir $\omega_i = 0$, ya que la corriente topológica B^μ actúa como fuente para ω_μ . (Llamaremos aquí $\omega_0 \equiv \omega$ por conveniencia de notación).

En estas condiciones, se tiene también $F = 0$ y $E_k = \partial_k \omega$.

De las ecuaciones de vínculo (2.31) y de evolución para $\vec{\phi}$, se obtienen las siguientes

¹Aquí se ha fijado la constante irrelevante $\alpha_M = -16\pi$

ecuaciones para los campos estáticos:

$$g^{jk}\nabla_k(\partial_j\omega) - M^2\omega - gB_0 = 0 \quad (2.36)$$

$$H_D^A \left\{ \Delta\phi^D + \frac{g}{4\pi}\epsilon^{DBC}\epsilon^{ij}\phi_B(\partial_i\omega)(\partial_j\phi_C) + \left(\frac{\delta V}{\delta\phi^B}\phi^B\phi^D - \frac{\delta V}{\delta\phi^D} \right) \right\} = 0 \quad (2.37)$$

La energía estática resulta,

$$E_{est} = \int_{\Sigma_t} \epsilon \left[\frac{1}{2}\nabla_k\phi^A\nabla^k\phi_A + V(\vec{\phi}) + \frac{1}{2}E_kE^k + \frac{1}{2}M^2\omega^2 \right] \quad (2.38)$$

Para buscar configuraciones estáticas entonces se considerarán las ecuaciones de tipo *difusión del calor* siguientes:

$$\omega_t = \Delta\omega - M^2\omega - gB_0 \quad (2.39)$$

$$\phi_t^A = H_D^A \left\{ \Delta\phi^D + \frac{g}{4\pi}\epsilon^{DBC}\epsilon^{ij}\phi_B(\partial_i\omega)(\partial_j\phi_C) + \left(\frac{\delta V}{\delta\phi^B}\phi^B\phi^D - \frac{\delta V}{\delta\phi^D} \right) \right\} \quad (2.40)$$

Puede notarse que si el sistema disipa energía y se establece en alguna configuración fija para los campos. Entonces, significa que la derivadas temporales son nulas, y por tanto, valen las ecuaciones (2.36) y (2.37). Se está en presencia de una solución estática.

2.2.7. *Well-posedness* para los problemas en el continuo

Ecuaciones de Evolución para la Dinámica completa

La parte principal de las ecuaciones (2.31) resulta diagonal por bloques, y puede separarse por tanto su análisis, en un bloque asociado a los campos del mapa ϕ , y otro a las restantes variables asociadas al campo vectorial.

- Ecuaciones asociadas al campo escalar

La parte principal de estas ecuaciones es del tipo ecuación de ondas, de las cuales es sabido que son *fuertemente hiperbólicas*. No se detallará por tanto todo el proceso aquí. Estas ecuaciones se corresponden al modelo sigma, cuyo código ya estaba implementado y funcionando correctamente.

Nos detendremos un poco más en el análisis del subespacio restante, dado que es el que involucra los nuevos campos introducidos al código, y fue necesario hallar explícitamente los autovalores para introducir las penalizaciones al paso de los nuevos campos por las interfases. (Ver sección 3.3)

■ Ecuaciones asociadas al campo vectorial

Se considera el vector \mathbf{u} formado por las 6 variables dinámicas asociadas al campo vectorial.

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \omega_0 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \\ F \\ E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Reescribiendo las ecuaciones (2.31) en forma matricial, se tiene la siguiente ecuación diferencial de primer orden:

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}_x \mathbf{u}_x + \mathbf{A}_y \mathbf{u}_y + \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{C} \quad (2.42)$$

Donde, las matrices \mathbf{A}_x , \mathbf{A}_y , \mathbf{B} y \mathbf{C} se derivan trivialmente de las ecuaciones.

Para estudiar la estabilidad de esta ecuación sólo se necesita considerar la parte principal:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_x n_x + \mathbf{A}_y n_y = \begin{pmatrix} 0 & n^x & n^y & 0 & 0 & 0 \\ n_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{|g|}} n_y & \frac{-1}{\sqrt{|g|}} n_x \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{|g|} n^y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{|g|} n^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

Resulta fácil de aquí, ver que todos los autovalores de \mathbf{A} son reales y generan un conjunto completo de autovectores.

Luego, se sigue [15] que el sistema completo es *fuertemente hiperbólico*, y que por tanto, el problema de Cauchy para estas ecuaciones está *bien puesto*.

Esto implica que no va a haber crecimientos exponenciales en las soluciones, que permitan que un pequeño apartamiento numérico (o bien en el dato inicial) desencadene rápidos crecimientos que hagan estallar la solución. Es esperable entonces, que el sistema de ecuaciones pueda ser implementado numéricamente.

Ecuaciones de Difusión para el problema estático

Las ecuaciones (2.40) constituyen un sistema parabólico del tipo difusión del calor. Se sabe [15] que el problema de datos iniciales está entonces *bien puesto*. Tampoco será analizado esto de forma exhaustiva aquí. Pero nuevamente, resulta esperable que este sistema pueda ser implementado numéricamente sin dificultades.

Capítulo 3

Códigos

En este trabajo se han utilizado dos códigos. Uno permite simular la evolución dinámica del sistema, mientras que el otro permite explorar las configuraciones estáticas de mínima energía del mismo. Estos códigos están adaptados a la geometría particular del problema, y pueden emplearse las configuraciones obtenidas en uno de ellos como dato inicial para el otro. Por ejemplo, puede verificarse si las soluciones estáticas halladas haciendo difusión sean verdaderamente estáticas, introduciéndolas como dato inicial para el código de evolución del modelo dinámico completo.

En este capítulo se intentará describir, de un modo no exhaustivo ni demasiado técnico, las características centrales de dichos códigos. El esquema de grillas que posibilita la geometría referida y el esquema numérico adoptado. Finalmente, se presentará un test de convergencia para verificar el correcto funcionamiento de los mismos.

3.1. Esquema de Grillas

Como se ha mencionado, la topología del espacio de partida del mapa, y por tanto, nuestro dominio numérico es S^2 , la esfera unidad. Dado que no es posible abarcar la esfera con un solo sistema de coordenadas que sea regular en todas partes, se utilizan varios parches para cubrirla.

Un conjunto conveniente de parches es definido por las coordenadas “cubed sphere” (para más detalles ver Apéndice A). Éste, está conformado por 6 parches, cuyas coordenadas son obtenidas mediante proyección estereográfica. Cada uno de estos parches constituye una grilla plana uniforme, de una cantidad variable de puntos, que se unen unas a otras formando una caja cúbica. (ver Fig 3.1)

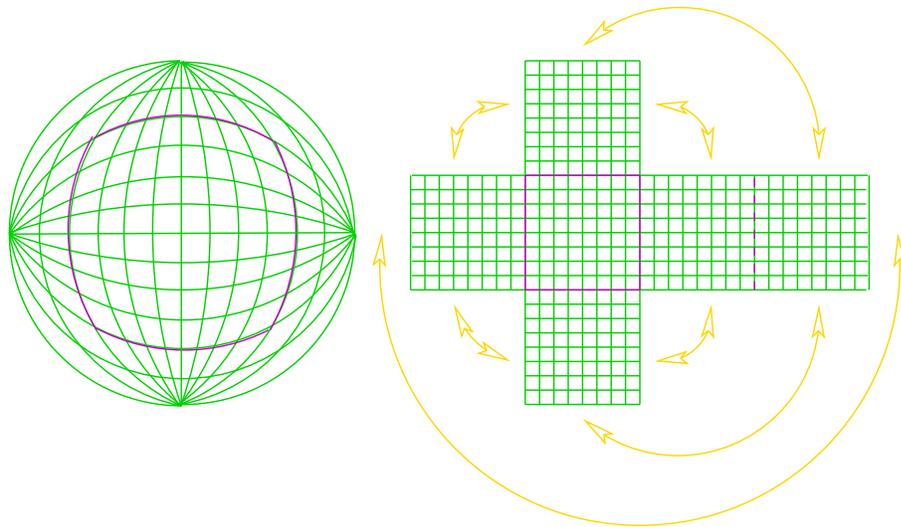


Figura 3.1: Esquema de Grillas

3.2. Esquema Numérico

Los dos problemas numéricos a implementar son problemas de valores iniciales asociados a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por un lado, el conjunto de ecuaciones hiperbólicas de evolución (2.31), y por el otro, las ecuaciones de tipo *difusión del calor* (2.40).

El esquema numérico empleado en ambos casos, está basado en el *método de líneas* [15]. Esto significa que primero se discretizan las derivadas espaciales, obteniendo un gran sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, usualmente llamado *sistema semi-discreto*. Esta discretización se lleva a cabo mediante operadores en diferencias finitas.

Luego, se discretizan independientemente las derivadas temporales y se obtiene el sistema (totalmente discretizado) a ser implementado.

Para asegurar la estabilidad del esquema numérico se utilizará el *Método de Energía* siguiendo el tratamiento descrito en [9].

Primero se observa que el problema de valores iniciales en el continuo sea *well posed*, y las soluciones satisfagan una *estimación de energía* que acote alguna norma de la solución. Luego, se eligen los operadores discretos de forma tal que satisfagan suma por partes en la versión discreta de dicha norma (el equivalente a integración por partes para el discreto).

Además, se impone una *técnica de penalizaciones* para transferir la información entre las grillas [18] (ver sección 3.4). Con estos elementos, puede asegurarse que la estimación de energía sea válida también en el nivel discreto.

Finalmente sólo resta elegir adecuadamente el integrador temporal, de forma tal que posea la región de estabilidad necesaria para el problema dado. En ambos casos, el integrador utilizado fue el tradicional Runge-Kutta de cuarto orden.

3.3. Penalizaciones

Para resolver un problema de evolución en esta estructura de grillas, se debe asegurar una adecuada transferencia de información entre las diferentes grillas. Utilizaremos para ello la técnica “Multi-Block” [18], que se aplica en casos donde no hay superposición entre los parches, y sólo los puntos sobre las fronteras son compartidos por más de una grilla. La parte fundamental de dicha técnica es la adición de términos de penalización sobre las interfaces adecuados a las ecuaciones de evolución. En el caso de sistemas hiperbólicos, estos términos penalizan las posibles discrepancias entre los valores que puedan tomar los campos característicos sobre estas fronteras en las distintas grillas.

Al definirse la norma discreta (diagonal), de la forma,

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = h \sum_i \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i \quad (3.1)$$

en el *método de energía* antes mencionado, (donde h es el paso espacial), y pedirle a los operadores en diferencias finitas D que satisfagan suma por partes en dicha norma, se tienen pares (D, σ) asociados posibles.

Luego, se considera la parte principal en (2.42),

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{A}^j \mathbf{u}_j \quad (3.2)$$

y se recuerda que \mathbf{A} es diagonalizable, con base $\{\mathbf{g}_i\}$ (y co-base $\{\theta^i\}$).

$$\mathbf{A} \mathbf{g}_i = \lambda_i \mathbf{g}_i \quad (3.3)$$

Entonces, si ahora se considera una interface, con campos \mathbf{u} y \mathbf{u}^n , correspondientes a una y otra grilla. Puede verse [18], que las ecuaciones semidiscretas para \mathbf{u}_i quedan:

$$\mathbf{u}_{it} = \mathbf{A}^j D_j \mathbf{u}_i - \frac{\delta_{i0} \lambda_j P_j}{h \sigma_0} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_i^n) \quad (3.4)$$

donde $P_j = \mathbf{g}_j \theta^j$ es la proyección sobre el subespacio asociado al autovalor en cuestión.

El segundo término del lado derecho es, por tanto, la penalización sobre los puntos de la interfase. Puede obtenerse fácilmente de (2.43), (cuyos autovalores resultan $\lambda_0 = 0$, y $\lambda_{\pm} = \pm \sqrt{n^i n_i}$ para ambos sub-bloques); del operador en diferencias finitas ($D \rightarrow \sigma_0$); y del paso temporal h utilizado.

3.4. Test de Convergencia

Se ha sometido a ambos códigos a un test de convergencia, para chequear que se encuentran funcionando correctamente.

No es la intención entrar en mucho detalle formal sobre este test en particular. Pero sí se intentará describir un poco en qué consiste el mismo, y los resultados obtenidos al aplicarlo a los códigos empleados en este trabajo.

Breve descripción

Las soluciones que se obtienen numéricamente de nuestros códigos pueden ser representadas por un vector \mathbf{u} que depende del tiempo y las coordenadas espaciales de la grilla, pero que también dependen de los pasos temporales (Δt) y espaciales (Δx) escogidos. Esto es, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x; \Delta t, \Delta x)$.

En todo esquema numérico, al tomar el límite $(\Delta t, \Delta x) \rightarrow 0$, se recuperan las ecuaciones diferenciales originales y las soluciones tienden idealmente a las soluciones “reales”. Lo que sería deseable por tanto, es que al disminuir sucesivamente los pasos (temporal y espacial), las soluciones numéricas converjan a una misma solución.

Por lo tanto, se realizan 3 corridas del código con pasos espaciales sucesivamente menores, en la proporción 4 : 2 : 1, (manteniendo la relación entre Δt y Δx dada por la condición de estabilidad). Es decir, se obtienen los resultados,

$$\mathbf{u}^{(1)}(t, x; \Delta t, \Delta x) \quad \mathbf{u}^{(2)}(t, x; \Delta t', \frac{\Delta x}{2}) \quad \mathbf{u}^{(3)}(t, x; \Delta t'', \frac{\Delta x}{4})$$

Puede verse (aunque no se demostrará aquí), que las soluciones numéricas admiten una expansión en los pasos Δt y Δx de forma que,

$$\mathbf{u}^{(1)}(t, x; \Delta t, \Delta x) - \mathbf{u}(t, x) = (\Delta t)^\alpha f(t, x) + (\Delta x)^\beta g(t, x) + \mathcal{O}(\Delta t^{\alpha+1}, \Delta x^{\beta+1}) \quad (3.5)$$

donde α es el orden de precisión asociado al integrador temporal, y β la precisión del operador en diferencias finitas utilizado. Mientras que las funciones f y g , son funciones

de \mathbf{u} y sus derivadas parciales, provenientes del desarrollo en serie de Taylor. Hay que destacar, por tanto, que no dependen de los pasos elegidos.

Se define un *coeficiente de precisión* $Q(t)$ de la siguiente manera:

$$Q(t) := \frac{\|\mathbf{u}^{(1)}(t, x; \Delta t, \Delta x) - \mathbf{u}^{(2)}(t, x; \Delta t', \frac{\Delta x}{2})\|}{\|\mathbf{u}^{(2)}(t, x; \Delta t', \frac{\Delta x}{2}) - \mathbf{u}^{(3)}(t, x; \Delta t'', \frac{\Delta x}{4})\|} \quad (3.6)$$

donde $\|\cdot\|$ es alguna norma tomada en el espacio discreto. Con lo cual, el coeficiente posee sólo dependencia temporal.

Puede verse entonces que,

$$Q(t) \approx 2^p \quad (3.7)$$

donde $p = \min\{\alpha, \beta\}$, y resulta un buen indicador de la precisión global alcanzada por el código.

Resultados del test

Se graficarán a continuación los coeficientes de precisión como función del tiempo para ambos códigos.

Para el caso hiperbólico se ha tomado el test utilizando el campo ϕ_1 , en una grilla donde el campo no es nulo, y presenta una dinámica activa. Puede verse que el coeficiente se mantiene bien por encima de 1 en todo momento, y que finalmente converge hacia un valor cercano a 16. (Fig 3.2)

En el código parabólico también se utilizó el campo ϕ_1 para aplicar el test. Se ha tomado una grilla que posee inicialmente valores nulos del campo, pero que luego recibe prácticamente la totalidad de la concentración. Esto se ve reflejado en la precisión, que posee valores muy elevados al principio, luego disminuye, y parece estabilizarse. (Fig 3.3)

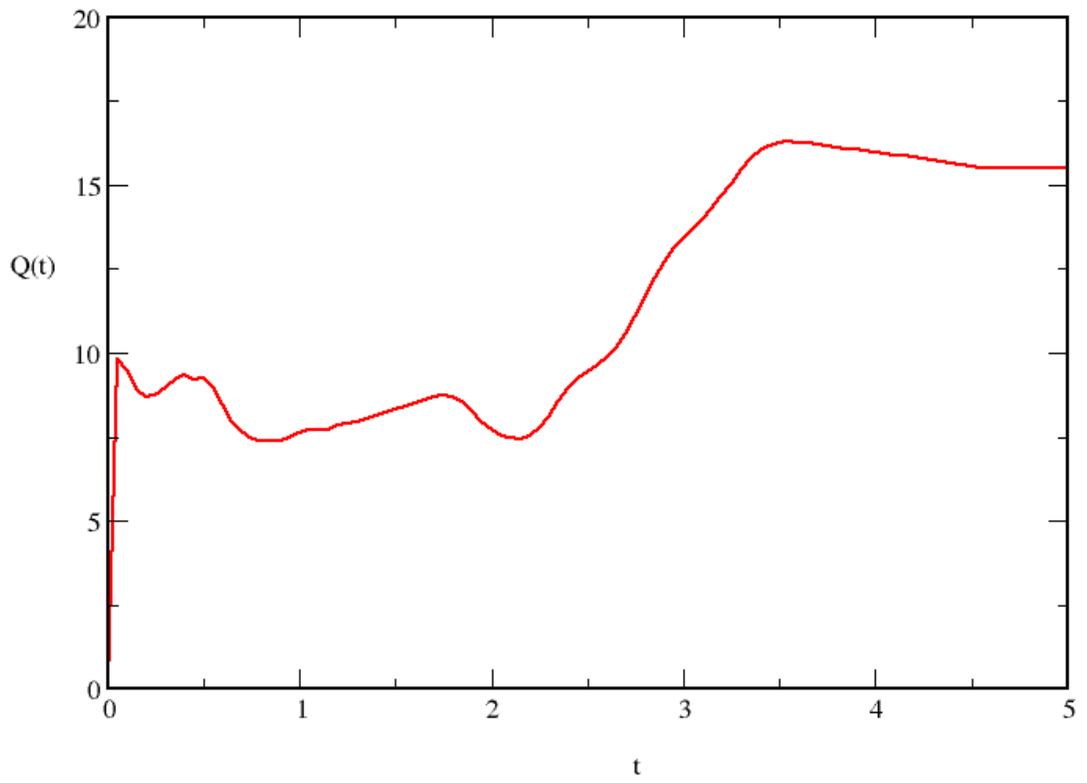


Figura 3.2: Convergencia. Código Hiperbólico.

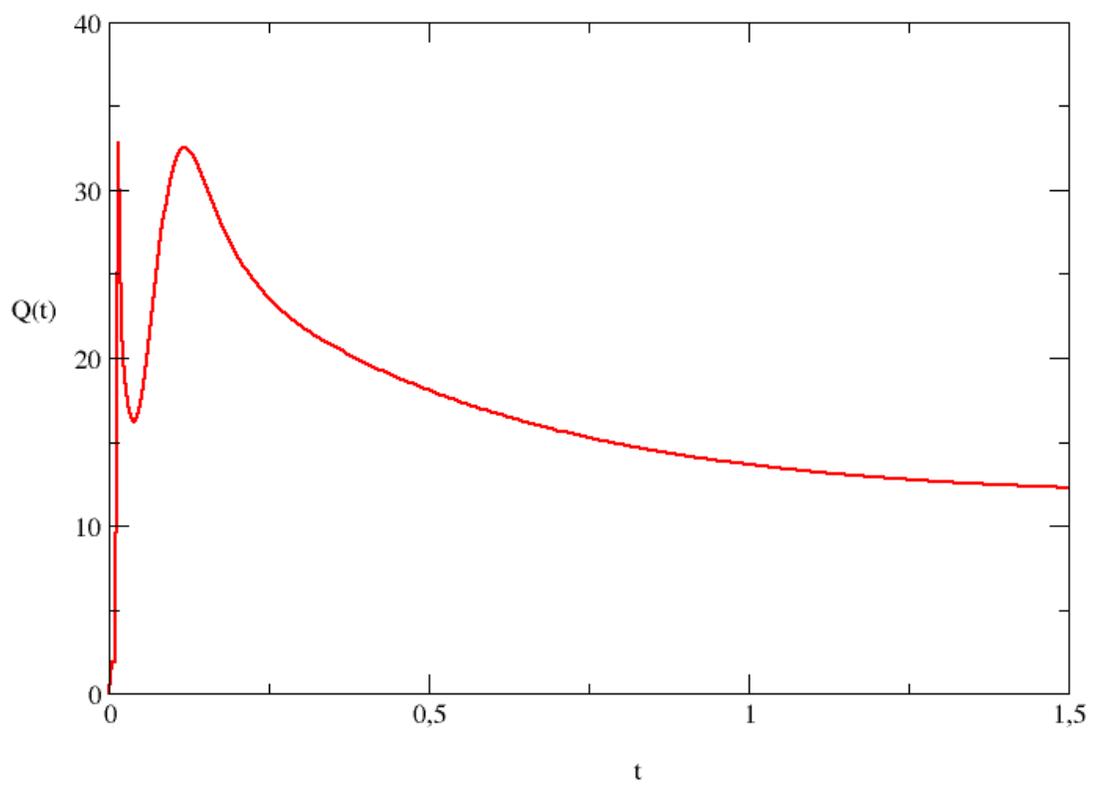


Figura 3.3: Convergencia. Código Parabólico.

Capítulo 4

Resultados

Este capítulo está dividido en dos bloques centrales: soluciones estáticas y soluciones dinámicas. En el primero, se buscará comprender, previamente al estudio numérico, algunos aspectos relacionados a la energía estática y la posibilidad de una cota de tipo Bogomolny para la misma. A su vez, se intentará ganar alguna intuición sobre los parámetros relevantes de la teoría, que ayuden a guiar y organizar la búsqueda numérica.

En el segundo, se intentará reportar algunos aspectos cualitativos acerca de la dinámica del modelo, comparando con los comportamientos típicos hallados en la literatura para modelos similares.

4.1. Configuraciones Estáticas

Partiendo de la expresión (2.38) para la energía de las soluciones estáticas, intentaremos ahora reescribirla, a través de las ecuaciones (2.36) y (2.37) para los campos estáticos, de forma tal que sólo involucre al campo escalar ϕ y sus derivadas.

Se desarrolla entonces el término de la energía asociada al campo vectorial,

$$\begin{aligned} E_\omega &:= \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[(\nabla_k \omega)(\nabla^k \omega) + M^2 \omega^2 \right] = \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[\nabla_k \{ \omega(\nabla^k \omega) \} - \omega \Delta \omega + M^2 \omega^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[M^2 \omega^2 - \omega \Delta \omega \right] = \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon g \omega B^0 \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[\frac{g}{M^2} \{ \Delta \omega + g B^0 \} B^0 \right] = \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[\frac{g}{M^2} \Delta \omega B^0 + \frac{g^2}{M^2} (B^0)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[\frac{g^2}{M^2} (B^0)^2 - \frac{g}{M^2} (\nabla_k B^0)(\nabla^k \omega) \right] \end{aligned}$$

Se contrae (2.37) con un vector arbitrario $(n^k \nabla_k \phi^A)$ del espacio de la proyección H_D^A (espacio tangente a la esfera),

$$(n^k \nabla_k \phi_A) \epsilon^{ABC} \epsilon^{ij} \phi_B (\nabla_i \omega) (\nabla_j \phi_C) = -\frac{4\pi}{g} \left\{ f^A(\vec{\phi}) + \Delta \phi^A \right\} (n^k \nabla_k \phi_A) \quad (4.1)$$

donde $f^A(\vec{\phi}) = \left(\frac{\delta V}{\delta \phi^B} \phi^B \phi^A - \frac{\delta V}{\delta \phi^A} \right)$.

Desarrollando ahora el lado izquierdo se obtiene,

$$\begin{aligned} (n^k \nabla_k \phi_A) \epsilon^{ABC} \epsilon^{ij} \phi_B (\nabla_i \omega) (\nabla_j \phi_C) &= -n^k \epsilon^{ij} (\nabla_i \omega) \vec{\phi} \cdot (\nabla_k \vec{\phi} \times \nabla_j \vec{\phi}) \\ &= -(n^k \nabla_k \omega) \sqrt{h} \vec{\phi} \cdot (\nabla_1 \vec{\phi} \times \nabla_2 \vec{\phi}) \\ &= 4\pi (n^k \nabla_k \omega) B^0 \end{aligned}$$

Con lo cual, resulta,

$$(n^k \nabla_k \omega) = -\frac{1}{g B^0} \left\{ f^A(\vec{\phi}) + \Delta \phi^A \right\} (n^k \nabla_k \phi_A) \quad (4.2)$$

Finalmente, se llega a la siguiente expresión para la energía estática:

$$E_{est} = \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[(\nabla \phi)^2 + 2V(\vec{\phi}) + \frac{1}{M^2 B^0} (\nabla_k B^0) (\nabla^k \phi_A) \left\{ f^A(\vec{\phi}) + \Delta \phi^A \right\} + \frac{g^2}{M^2} (B^0)^2 \right] \quad (4.3)$$

(Caso $V(\vec{\phi}) = 0$):

Como ha sido mencionado en la sección 2.1.5, en el modelo Baby-Skyrmion en el plano, la presencia de un término potencial (o algún término que no contenga derivadas del campo) es necesaria para evadir el argumento de Derrick [11] y posibilitar la existencia de soluciones estáticas. Mientras que tal término potencial resulta prescindible en el modelo de Skyrme tridimensional original.

Se intentará mostrar a continuación, que para el caso plano, el modelo bidimensional estabilizado mediante mesones vectoriales también requiere la inclusión de este término potencial para posibilitar la existencia de soluciones estáticas.

Para ello, se reescribe la energía estática para la situación donde $V(\vec{\phi})$ es nulo.

$$E_{est} = \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[(\nabla \phi)^2 + \frac{1}{M^2 B^0} (\nabla_k B^0) (\nabla^k \phi_A) \Delta \phi^A + \frac{g^2}{M^2} (B^0)^2 \right] \quad (4.4)$$

Puede observarse que el tercer término de esta expresión se corresponde con el término

de Skyrme (ver (2.18)) mediante la identificación $\kappa^2 = \frac{g^2}{M^2}$. El segundo término, en cambio, no tiene correlación con dicho modelo, aunque puede verse que escala espacialmente de la misma forma que el de skyrme. Con lo cual, para el caso plano, el argumento de Derrick descarta nuevamente la posibilidad de soluciones estáticas también para este modelo.

En el caso de un dominio compacto, que es el caso de interés en este trabajo, el argumento de Derrick no aplica, y se torna necesaria una mayor atención para responder acerca de la existencia y estabilidad de soluciones estáticas.

Se intentará volver a estos interrogantes desde los resultados numéricos. Pero antes, se expondrá aquí una solución concreta para el sector $W = 1$, que podría servir de precedente en lo relativo a esta discusión.

El *ansatz* es el siguiente: se propone el mapa racional¹

$$R(z) = \frac{1}{z} \tag{4.5}$$

En formulación de la sección 2.1.5, la densidad de carga topológica puede escribirse [19] como,

$$B^0 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1 + |z|^2}{1 + |R|^2} |\partial_z R| \right)^2 \tag{4.6}$$

Introduciendo el *ansatz*, se obtiene entonces $B^0 = \frac{1}{4\pi} = cte.$

Puede chequearse a esta altura, que tomando $\omega = \frac{g}{M^2} B^0$ se satisfacen las ecuaciones (2.36) y (2.37), y por lo tanto, estamos efectivamente en presencia de una solución estática. Además, se sigue fácilmente que el segundo término en (4.4) es nulo. Si a esto se agrega que el primer término es minimizado por esta solución, puesto que se trata de un mapa racional (recordar sección 2.1.5). Entonces, todo parece indicar que esta solución estática es la de mínima energía, y consecuentemente estable.

(Caso $V(\vec{\phi}) \neq 0$):

En este trabajo consideraremos principalmente el siguiente potencial:

$$V(\vec{\phi}) = m^2(1 - \phi_3) \tag{4.7}$$

Se observa que depende exclusivamente de la componente ϕ_3 del campo, y posee su mínimo en un único punto del espacio de llegada, $\vec{\phi} = (0, 0, 1)$. Esto provoca la ruptura de la simetría $O(3)$ de la teoría, conservándose sólo el subgrupo $O(2)$.

¹También puede ser $R(z) = z$. En cierta forma son equivalentes

Esta forma particular del potencial es la elección más usual en la literatura y está motivada por analogía con el potencial tradicionalmente utilizado en el modelo de Skyrme tridimensional. La sugestiva elección del parámetro proviene de la interpretación del potencial como un término de masa para el campo de piones (campo escalar).

Sin embargo, esta forma del potencial está lejos de ser única, ya que en principio cualquiera que no dependa de las derivadas del campo funciona igualmente bien para evadir el teorema de Derrick. De hecho, han sido investigadas otras posibilidades [13, 27], y los resultados indican, para el caso del modelo Baby-Skyrmion por ejemplo, que diferentes opciones llevan a resultados cualitativos muy diferentes. Al punto tal, de determinar la existencia, o no, de estados ligados para los sectores de carga topológica mayores que uno.

Cotas a la energía y análisis dimensional de parámetros

Como se ha visto, en el modelo sigma existe una cota inferior para la energía que es proporcional a la carga topológica. Se vió además, que esa cota podía ser saturada por los llamados mapas racionales, soluciones a las ecuaciones de Bogomolny. Para el caso de Baby-Skyrmions en la esfera [10, 22] se puede construir una cota similar, con la única salvedad que ahora no resulta tan claro que pueda ser saturada².

Dado que, como se ha visto, nuestro modelo (mediante una simple identificación de parámetros) contiene los 3 términos de energía del modelo Baby-Skyrmion, se desarrollará la cota a continuación. Por un lado, se intenta ganar alguna “intuición” sobre los parámetros libres de la teoría y además quedará marcado el interrogante acerca del término extra. ¿Puede este término ser acotado de la misma manera?

El primer término de la energía (4.3) es simplemente el correspondiente al modelo sigma, del cual ya se ha visto que (independientemente de las ecuaciones!) puede ser acotado por la carga topológica como se vió en (2.11).

Luego, se analizan los restantes términos análogos a Baby-Skyrme.

²Se intentará decir algo sobre este punto más adelante.

Escribiendo $V(\vec{\phi}) = G^2/2$, se tiene,

$$\begin{aligned}
 \int_{S^2} \epsilon \left[V(\vec{\phi}) + \frac{g^2}{2M^2} (B^0)^2 \right] &= \frac{1}{2} \int_{S^2} \epsilon \left[\left(\frac{g}{M} B^0 - G \right)^2 + 2 \frac{g}{M} G B^0 \right] \\
 &\geq \frac{g}{4\pi M} \int_{S^2} G(\vec{\phi}) \vec{\phi} \cdot (\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi}) dx^1 dx^2 \\
 &= \left(\frac{g}{4\pi M} \right) |W| \int_{S^2} G(\vec{\phi}) \vec{\phi} \cdot (d\vec{\phi} \times d\vec{\phi}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{mg}{4\pi M} \right) (4\pi |W|) \int_{-1}^1 \sqrt{V(\phi_3)} d\phi^3
 \end{aligned}$$

donde la desigualdad se sigue de completar cuadrados, y la igualdad de la tercera línea resulta de aplicar el *teorema de grado* $\int \phi^*(G\Omega) = W \int G\Omega$, con $\Omega = \vec{\phi} \cdot (d\vec{\phi} \times d\vec{\phi})$ siendo el elemento de área del espacio de llegada.

Finalmente, se llega entonces a la siguiente desigualdad:

$$E_{est} \geq 4\pi |W| \left(1 + \left(\frac{mg}{3\pi M} \right) \right) + \mathcal{I} \quad (4.8)$$

donde el término extra es,

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2M^2} \int_{S^2} \epsilon \left[\frac{1}{B^0} (\nabla_k B^0) (\nabla^k \phi_A) \left\{ f^A(\vec{\phi}) + \Delta \phi^A \right\} \right] \quad (4.9)$$

No se ha logrado acotar aquí este término de forma análoga a los anteriores. De hecho, no se ha podido determinar siquiera que resulte, o no, definido positivo³. Esto impide un análisis completo, siquiera cualitativo, acerca de cuales serían las posibles configuraciones que minimicen la energía.

Sin embargo, puede resultar enriquecedor analizar la igualdad en (4.8), pasando por alto el hecho de que esas configuraciones no necesariamente minimizarán \mathcal{I} en simultáneo. Puede verse entonces, que para que valga la igualdad en (4.8) debe satisfacerse simultáneamente las ecuaciones de Bogomolny (2.12) y la ecuación,

$$B^0 = \pm \left(\frac{mM}{g} \right) \sqrt{2V(\phi_3)} \quad (4.10)$$

Podría resultar interesante analizar esta igualdad en más profundidad. Aquí sólo la

³Está claro, sin embargo, que la energía total asociada al campo ω sí lo es.

reescribiremos a través de (4.6) como,

$$|\partial_z R|^2 = 8\pi \left(\frac{mM}{g} \right) \frac{(1 + |R|^2)^{3/2}}{(1 + |z|^2)^2} \quad (4.11)$$

observando, que al considerar $R(z)$ como mapa racional, difícilmente pueda valer esta expresión. Aunque resulta factible, que dentro de los $(4|W| + 2)$ parámetros del *moduli space*, esta expresión pueda aproximarse razonablemente.

Más allá de estas especulaciones (que podrían ameritar un estudio detallado), lo interesante para destacar a este punto, es que la combinación de parámetros dada por $\beta := \left(\frac{mM}{g} \right)^{-1/2}$ introduce una escala en la teoría. Dimensionalmente, puede verse que tiene unidades de longitud (i.e: $[\beta] = [L]$). Esto es muy importante, porque está relacionado con la intención original al estabilizar el modelo sigma: dotar a los solitones de una escala espacial natural, que rompa la invariancia conforme de la teoría y los prevenga de la expansión indefinida o el colapso.

Como ya era sabido, el espacio mismo (al considerarse el caso compacto S^2 en lugar del plano), introduce una escala espacial, el radio de curvatura. Por lo tanto, será interesante considerar la interrelación entre estas escalas, que introducen una noción de “densidad”⁴.

Al estar considerando una curvatura fija en nuestros códigos (la esfera unidad), esta noción de densidad quedará asociada directamente al parámetro β .

Por otro lado, en (4.8) aparece otra combinación de parámetros $\alpha = \left(\frac{mg}{M} \right)$. La cual puede verse dimensionalmente que posee unidades de energía (i.e: $[\alpha] = [E]$).

Podrían sugerirse α y β como los únicos parámetros relevantes de la teoría, y descartar así al menos uno de los tres parámetros del modelo. Sin embargo, el término extra \mathcal{I} en la energía nos previene de hacer eso. Y de hecho, se ha encontrado numéricamente que los 3 parámetros parecieran tener relevancia. Por ejemplo: si bien la interpretación de β ha sido respetada en gran medida por los resultados numéricos, solitones de igual β pero con distintas combinaciones de parámetros, produjeron solitones de distintos tamaños.

4.1.1. Estudio Numérico

Se comenzará la búsqueda numérica de configuraciones estáticas, intentando sustentar y profundizar las discusiones anteriores.

Como medio principal de representación se han elegido los gráficos correspondientes a la densidad de carga topológica B^0 . Aunque cabe destacar, que los gráficos obtenidos para

⁴En un sentido un tanto amplio. Notesé que no se trata siquiera del tamaño de los solitones, sino más bien una escala.

la densidad de energía son muy similares a éstos.

Sector $W = 1$

Se llevaron a cabo diversas corridas del código de difusión para distintos conjuntos de parámetros (g, M^2, m^2) . El dato inicial fue en todos los casos construido a partir de un mapa racional del mismo sector, de la forma,

$$R(z) = \frac{\lambda}{(z - a)} \quad (4.12)$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, y se recuerda, $R := \frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 + \phi_3}$, y $z = \tan \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}$.

Cualitativamente esta configuración es una densidad de carga topológica B^0 concentrada simétricamente alrededor de $z = a$, con un “radio” dado por λ .

Mientras que la condición inicial para el campo ω fue aproximada⁵ por,

$$\omega = \frac{g}{M^2} B^0 \quad (4.13)$$

Se ha observado entonces el siguiente resultado cualitativo. La densidad de carga continúa concentrada simétricamente en torno al punto en la esfera dado por $z = a$, mientras que su tamaño disminuye o se agranda hasta alcanzar un límite bien definido, en donde se estabiliza. Ese tamaño final, bien definido para cada terna de parámetros, respeta en gran medida la interpretación física del parámetro β . Es decir, a menor β , más concentrada la densidad.

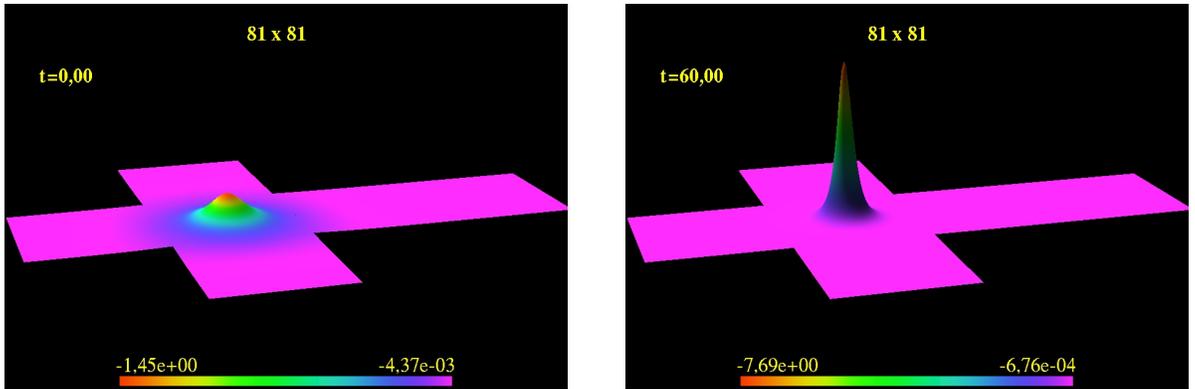


Figura 4.1: $W=1$. Dato inicial y final luego de difusión. ($g = 2$, $M^2 = 16$, $m^2 = 0, 1$)

Para el caso $V(\vec{\phi}) = 0$ se logró verificar que, aún partiendo de un mapa racional distinto

⁵Motivado de la ec. (2.36), despreciando el laplaciano.

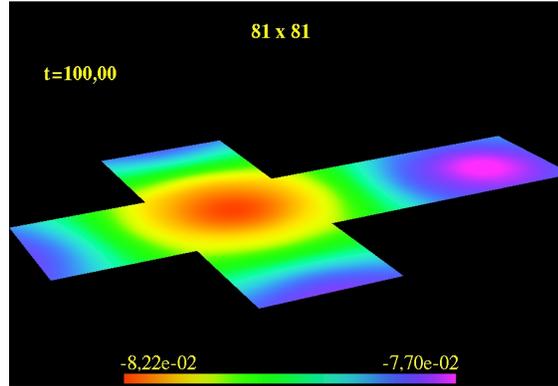


Figura 4.2: $W=1$. Caso $V(\vec{\phi}) = 0$ alcanzando solución estática.

del *ansatz* (4.5), el código evoluciona hacia la solución estática presentada en la discusión anterior. Puede verse (Fig 4.2), como $B^0 \rightarrow \frac{1}{4\pi}$, y la energía obtenida para los parámetros utilizados concuerda con la expresión analítica,

$$E_{min} = 4\pi + \frac{1}{4\pi} \frac{g^2}{M^2} \quad (4.14)$$

Estabilidad

Se han tomado posteriormente estos resultados como datos iniciales para una corrida en el código hiperbólico de evolución. En todos los casos el resultado es el mismo: el soliton permanece inalterado. Esto pareciera indicar que, al menos para este sector topológico, el campo vectorial junto con el término potencial logran estabilizar al soliton. Y además, parece sugerir que el código de difusión nos acerca a la configuración estática de mínima energía.

Para el caso $V(\vec{\phi}) = 0$ se encuentra además, que al partir de una configuración ligeramente perturbada, la evolución temporal presenta una oscilación en torno de la solución estática reportada (i.e: $B^0 = \frac{1}{4\pi}$).

Sector $W = 2$

Al igual que antes, para este sector se consideraron distintas ternas de parámetros (g, M^2, m^2). Ahora los datos iniciales utilizados fueron dos mapas racionales distintos.

El primero,

$$R(z) = \frac{\lambda}{z^2} \quad (4.15)$$

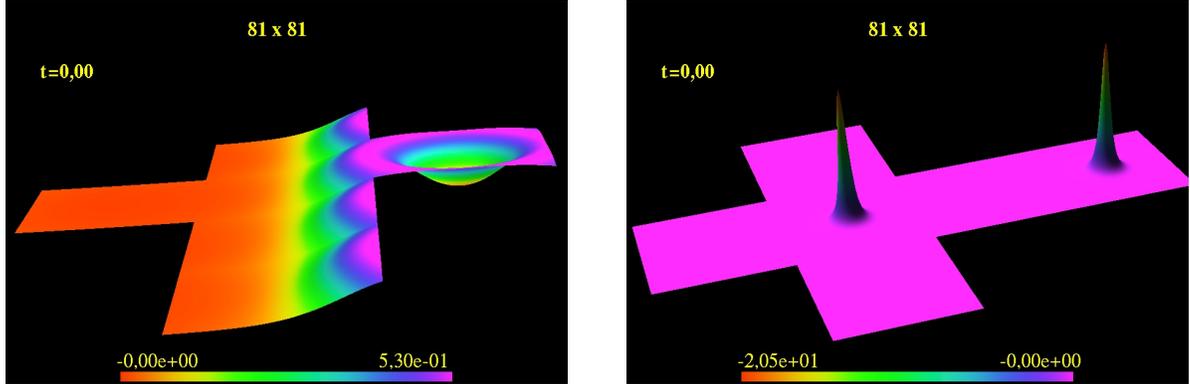


Figura 4.3: $W=2$. Datos iniciales: Anillo y solitones sobre el ecuador.

simétrico, representa una densidad de carga con forma de anillo (con radio dependiente de λ) alrededor de un polo. Mientras que el segundo,

$$R(z) = \lambda(z^2 - 1) \quad (4.16)$$

representa 2 solitones sobre el ecuador, sobre puntos opuestos de la esfera.

Nuevamente, y como en todos los casos en que se haga uso del código de difusión, se utiliza para ω inicial, (4.13).

Para el primer tipo de dato inicial los comportamientos cualitativos son los siguientes: en la mayoría de los casos se conserva la simetría, reduciéndose o expandiéndose el radio de los anillos hasta llegar a un límite que nuevamente parece estar relacionado al *parámetro de densidad* β . Para densidades muy altas, el anillo parece acomodarse sobre el ecuador de la esfera. Sólo en algunos casos donde β es pequeño, en algún punto de la contracción del anillo, éste se separa en 2 solitones individuales que tienden a posicionarse bien separados sobre el ecuador⁶.

Para el segundo dato inicial (solitones individuales) se observa que esta configuración se mantiene, y análogamente a lo visto para $W = 1$, ambos solitones relajan al tamaño que corresponda a su conjunto de parámetros. (Ver Cuadro 4.1)

Estabilidad

Resulta muy interesante destacar que las energías correspondientes a los dos tipos de configuraciones (anillo y solitones individuales distantes) son iguales, o al menos muy

⁶En un caso, luego de la separación los solitones se achicaron hasta colapsar. Pero se verificó luego que fue sólo un efecto numérico, debido la baja resolución de la grilla.

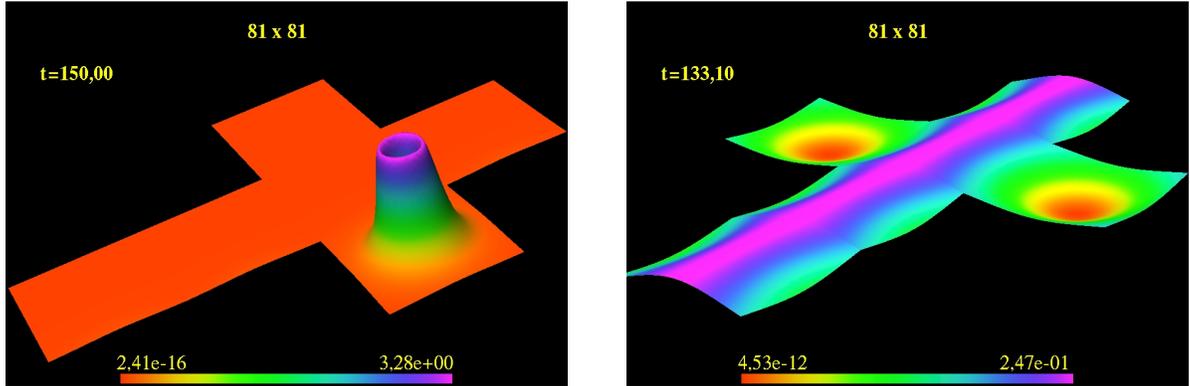


Figura 4.4: $W=2$. Config. estáticas. $\beta = 1,06$ y $\beta = 6,16$, respectivamente.

Parámetros			Altura Picos		Energías		
terna	α	β	$W = 1$	$W = 2$ (indiv.)	$W = 1$	$W = 2$ (indiv.)	$W = 2$ (anillo)
e	0,11	1,26	7,70	7,66	12,87	25,74	25,74
g	0,26	1,06	16,5	16,4	13,03	25,86	26,06
h	0,25	1,54	4,99	4,96	13,46	26,34	27,12
i	2,24	1,26	13,7	13,7	16,48	32,99	?
k	0,07	1,78	1,95	1,92	12,94	25,61	25,94

Cuadro 4.1: Solitones Individuales. Tamaños y Energías

cercanas. (Ver Cuadro 4.1). Usualmente los estados ligados deben ser energéticamente menores, puesto que si el *gap* es muy pequeño, es esperable que ante una pequeña perturbación se pierda la ligadura. Sin embargo, el posicionamiento de los solitones en el segundo caso pareciera un equilibrio bastante peculiar, en donde las fuerzas de repulsión entre ellos los separan lo máximo posible. Por lo tanto, parece razonable pensar que los estados intermedios entre una eventual escisión de la configuración ligada y la configuración de los solitones sobre el ecuador, serán energéticamente más altos. Se plantea entonces un escenario bastante interesante en torno del interrogante de estabilidad para estos dos casos.

Nuevamente son introducidas estas configuraciones de mínima energía como dato inicial para evolución en el código hiperbólico.

Los resultados obtenidos parecen indicar que los solitones separados no constituyen una solución estática estable, dado que existe una fuerza entre ellos, que los lleva eventualmente a interactuar dinámicamente. Mientras que las configuraciones simétricas (anillos), permanecen inalteradas al ser introducidas sin perturbación, y parecen erigirse como configuraciones estáticas estables.

Sin embargo, de la discusión anterior se puede inferir que no constituyen un mínimo

absoluto de la energía (o al menos no el único). Con lo cual, es esperable que ante una perturbación lo suficientemente grande, la simetría se rompa, y la configuración se torne inestable.

Sector $W > 2$

Para estos sectores de mayor carga topológica, nuevamente se ha utilizado como dato inicial un mapa racional simétrico (anillo), ahora generalizado para el caso de carga W :

$$R(z) = \frac{\lambda}{z^W} \quad (4.17)$$

Resulta esperable que, al menos para distribuciones localizadas de carga topológica (β pequeño), la simetría inicial no se mantenga y dé lugar a configuraciones de simetría discreta (análogamente a lo sucedido en la literatura para el caso plano [14]). Por ello, se ha introducido en el código de difusión una perturbación numérica artificial, con el fin de evitar que la simetría resultante sea “dictada” por la distribución particular de las grillas, dado que existe una pequeña perturbación numérica inherente a las interfaces.

El método consiste en la adición a cada campo, de un número aleatorio en cada punto de la grilla, para cada cada paso temporal. Estos números aleatorios son elegidos dentro del rango $(-1, 1)$, y son modulados por un coeficiente δ , que en general fue fijado en $\delta = 10^{-3}$. Se ha observado, que además el mecanismo parece estimular favorablemente el proceso de difusión hacia soluciones de menor energía.

Fueron examinados los sectores de carga topológica desde $W = 3$ hasta $W = 7$, realizando corridas de difusión con un grupo de aproximadamente 10 ternas de parámetros (g, M^2, m^2) distintas. (Ver cuadro B.3)

El panorama cualitativo de los resultados obtenidos es amplio y diverso. Se intentará a continuación una descripción de este panorama, sin pretensiones de completitud, ni de gran profundidad en el análisis. Aún así, estarán siempre presentes los interrogantes sobre la interpretación y relevancia de los parámetros α y β ; sobre el límite $m \rightarrow 0$; y sobre la posibilidad de estabilidad de cada una de las configuraciones obtenidas. Y como podrá verse, algunos patrones (siquiera algo especulativos) emergerán.

La primera categorización que salta a la vista es: β grande - β pequeño.

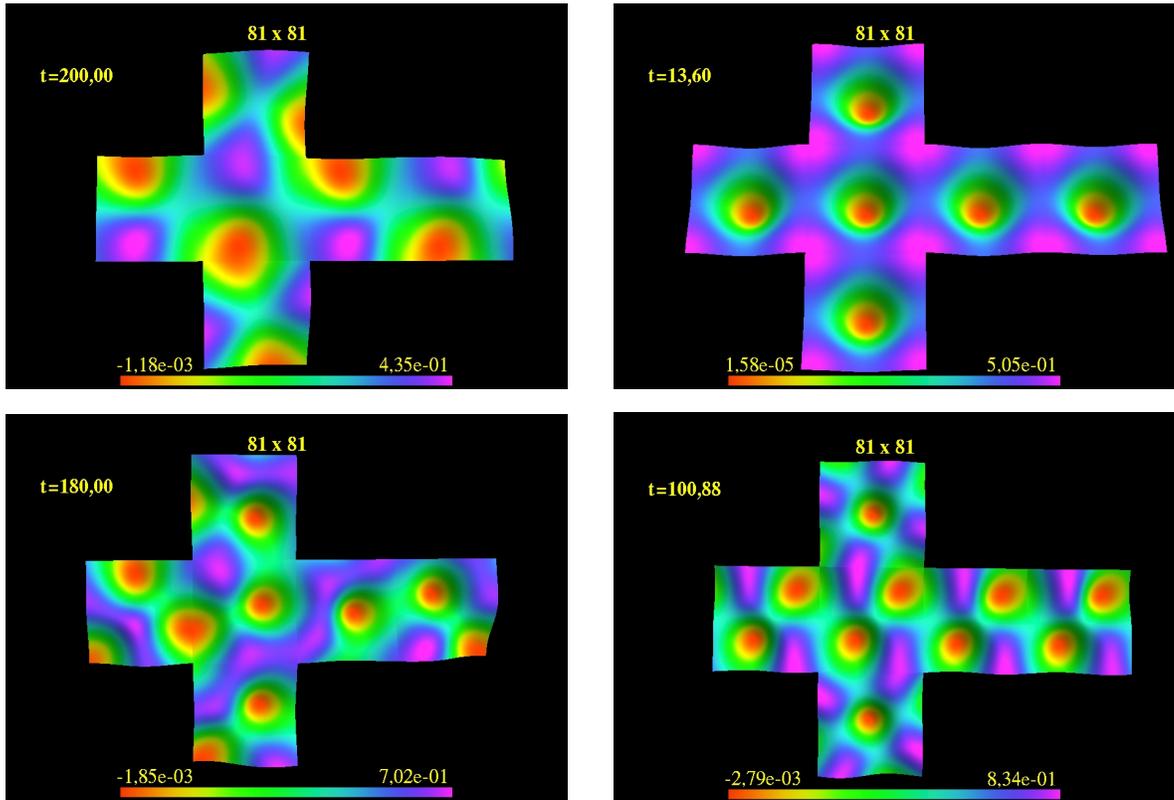


Figura 4.5: *Texturas*. $W = 3$; $W = 4$; $W = 5$; $W = 6$. ($\alpha = 3, 8$; $\beta = 6, 2$).

β grande:

En estos casos, el anillo inicial se aplatina y se dirige hacia una posición cercana al ecuador⁷, donde se queda por unos instantes. Luego, se observa una ruptura de la simetría y las configuraciones relajan a una especie de “textura” que recubre toda la esfera. (Ver Fig 4.5)

Hay que destacar aquí un hecho muy interesante. Las concentraciones de carga en estos casos están distribuidas por todo el espacio a modo de arreglo periódico, pero en un número que no coincide con la carga topológica. No pueden ser interpretados, por lo tanto, como solitones en el sentido más estricto. Llamaremos a estas distribuciones, *texturas*.

Estabilidad

Todas estas *texturas*, al ser corridas en el código hiperbólico de evolución, permanecen inalteradas. Pareciera que al menos en el límite $\beta \rightarrow \infty$, ($m \rightarrow 0$), este tipo de configura-

⁷Recordamos aquí que en el sector $W = 2$ esa configuración simétrica resultaba estable

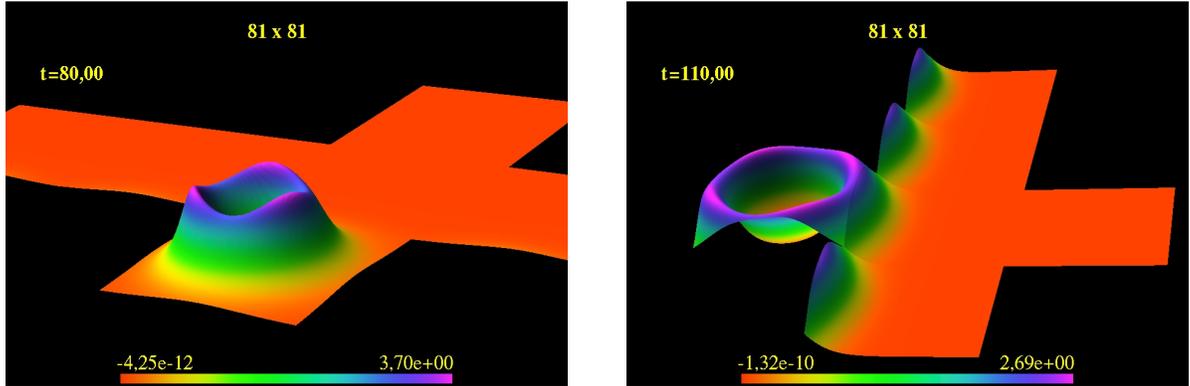


Figura 4.6: Picos sobre anillo. $W = 3$. ($\alpha = 0,28$; $\beta = 1,06$) ; $W = 4$. ($\alpha = 0,16$; $\beta = 1,26$).

ciones resultan estables.

β pequeño:

En estos casos la situación es un poco más compleja. El anillo inicial decrece su radio hasta un punto donde se rompe la simetría. Esto puede darse de una forma suave, mediante la aparición de picos⁸ sobre el anillo todavía visible, que después se separan (ó no) en solitones independientes. O bien, de una forma más repentina, separandose en grupos ligados ó solitones individuales, y formando eventualmente (en algunos casos) estructuras localizadas de simetría discreta muy similares a las halladas en [14].

Se intentará ir presentando y analizando los distintos casos por separado.

■ Anillo y picos sobre anillo:

En estos procesos en donde la ruptura de la simetría se dá de forma muy gradual, las configuraciones suelen formar picos en el borde mismo del anillo. (Ver Fig 4.6)

En algunos casos, estos picos se van demarcando cada vez más, hasta emerger como solitones independientes. En algunos pocos casos ha sucedido también, que los picos no llegan a formarse y parece mantenerse la simetría anular original. Sin embargo, en todos los casos pareciera que no hay estabilidad al ser corridos en el código hiperbólico.

Observando el cuadro B.3 con atención, puede verse que estas situaciones son propiciadas por valores de α pequeños (siempre que β no sea demasiado pequeño también). Esto puede verse claramente si se concentra la atención sobre los casos dados por los

⁸En una cantidad que se corresponde exactamente con la carga del sector.

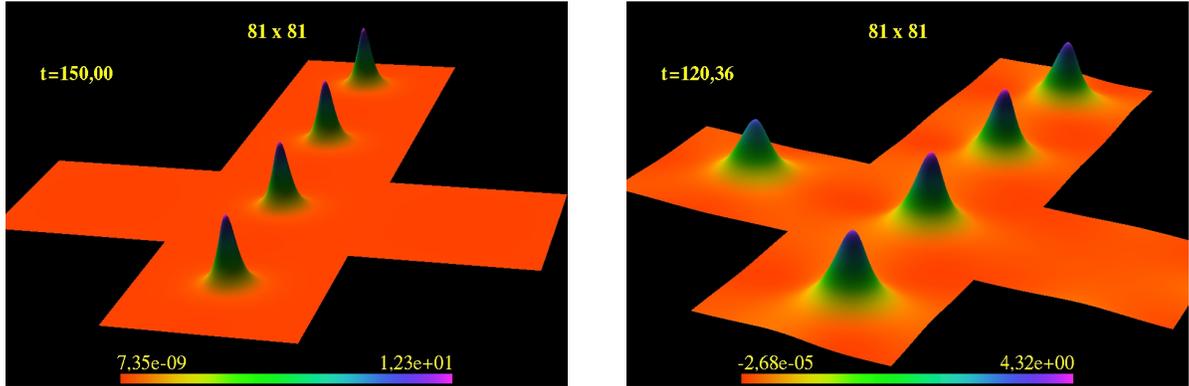


Figura 4.7: Solitones Individuales. $W = 4$ ($\alpha = 3,16$; $\beta = 1,26$) ; $W = 5$ ($\alpha = 0,47$; $\beta = 1,54$).

conjuntos de parámetros e , i y j . Estos presentan la particularidad de tener la misma densidad $\beta = 1,26$ y valores bien distintos de α . (Fig B.1)

Podría interpretarse entonces el parámetro α como la intensidad, en términos de energía, de la interacción con el campo vectorial. Donde puede pensarse el límite $\alpha \rightarrow 0$ como el límite donde se recupera el modelo sigma, en el que la configuración simétrica es una solución estática posible (entre muchas otras), aunque inestable. Y el extremo opuesto $\alpha \rightarrow \infty$, la interacción es tan intensa que parece no permitir soluciones estables tampoco.

■ Solitones individuales:

Estos casos parecen ser sólo transiciones hacia estados ligados o agrupamientos. Aunque en algunos casos en que se establecen sobre el ecuador pareciera que se constituyen como los estados de mínima energía. (Ver Fig 4.7)

Sin embargo, como era de esperarse, este tipo de configuraciones no resultan estables al ser corridos con el código hiperbólico de evolución. Análogamente a lo visto en $W = 2$, existen fuerzas entre los solitones (repulsivas en este tipo de situaciones) que los llevan a interactuar, y eventualmente a colapsar⁹.

■ Estado ligado de simetría discreta:

En muchos casos los solitones se unen de a pares y se conforman estructuras ligadas entre estos pares o entre solitones individuales. Esta tendencia a constituirse en pares

⁹Estos colapsos podrían ser en principio sólo debidos a la falta de resolución numérica. Al interactuar, los solitones suelen presentar alteraciones en su tamaño, y la resolución sólo permite que se achiquen hasta cierto límite.

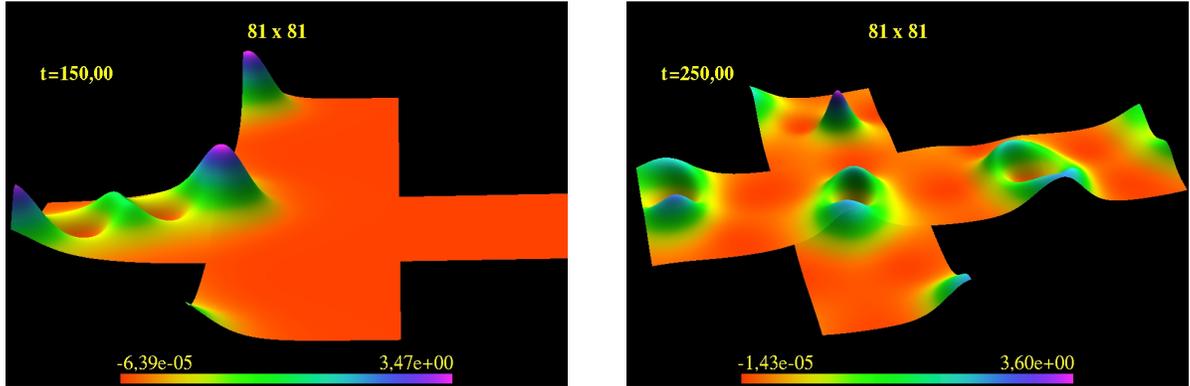


Figura 4.8: Estados ligados. $W = 3$ y $W = 7$. ($\alpha = 1, 58$; $\beta = 1, 26$).

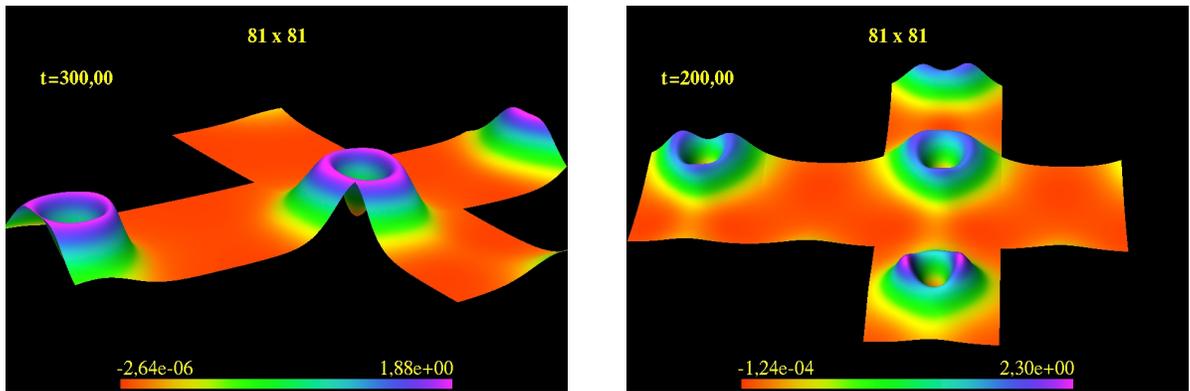


Figura 4.9: Estados ligados. $W = 4$ y $W = 6$. ($\alpha = 1, 58$; $\beta = 1, 26$).

como bloques fundamentales fue reportada en algunos trabajos sobre Skyrmiones o baby-Skyrmions [5, 27]. Esto distingue ligeramente los casos de sectores topológicos pares e impares. En los casos impares, o bien queda un soliton desapareado que suele atrapar (ligar) a los demás pares, o se forman ligaduras más particulares, en el sentido que la distinción entre solitones individuales se difumina. (Fig 4.8)

Estas soluciones vendrían a ser los análogos bidimensionales de las estructuras cristalinas tridimensionales del modelo de Skyrme clásico [4, 5] como aproximaciones de baja energía para los estados nucleares.

Sobre el interrogante de estabilidad en estos casos, resulta difícil decir algo demasiado categórico. En algunos casos, como en $W = 3$ o en algunos casos con $W = 4$, el estado ligado parece ser estable. En otros casos, en cambio, cuando las parejas de solitones no están muy fuertemente ligadas entre sí, éstas pueden moverse ligeramente u oscilar en torno de alguna posición.

4.2. Dinámica del Modelo

Existe en la literatura una rica estructura en cuanto a la dinámica del modelo para el caso plano en 3 dimensiones espaciales [2]. Esto incluye fenómenos de scattering como captura y órbitas; radiación; y hasta excursiones fuera del plano de scattering. También ha sido posible un estudio numérico del proceso de aniquilación para el caso soliton-antisoliton [16]. Estos trabajos han agregado al gran, y a veces sorprendente, compendio de resultados en el modelo de Skyrme. Y a su vez, han contribuido a reforzar la idea de que el mesón ω puede estabilizar al modelo sigma sin la necesidad de inclusión del término de Skyrme.

Se intentará presentar en esta sección, en un nivel cualitativo, algunos pocos aspectos sobre la dinámica, para el modelo bidimensional que se viene considerando en el presente trabajo.

4.2.1. Estudio Numérico

Scattering Frontal

Se analizará el caso de scattering frontal (i.e: parámetro de impacto nulo) para distintas velocidades. Los datos iniciales para este proposito resultan fáciles de obtener, dado que en el estudio de soluciones estáticas nos encontramos con casos de 2 solitones individuales localizados sobre el ecuador. (Fig 4.3)

Sólo resta darles el impulso inicial para que se encuentren frontalmente. Pero ello resulta muy sencillo, ya que se encuentran sobre parches distintos, y por tanto puede impartirse a uno una velocidad v sobre el ecuador, y al otro, la velocidad opuesta. De esta forma, se tiene un scattering simétrico respecto del *centro de carga*, de velocidad total $2v$.

Como fue observado en [2], se puede actuar con el grupo de simetría de la teoría¹⁰ en el espacio de llegada del mapa ϕ , obteniendo distintos *canales* para el scattering.

Para el caso de scattering frontal en 2 dimensiones que aquí se estudia, los “canales” posibles son sólo dos. El primero es repulsivo, y resulta de no aplicar ninguna rotación. Mientras que el segundo canal es atractivo, y surge de aplicar una rotación de π al dato inicial, alrededor del eje ϕ_3 en el espacio de llegada.

- **Canal Repulsivo:**

El scattering frontal para el caso repulsivo no presenta nada sorprendente para pequeños impulsos iniciales. Los solitones comienzan a contraerse apenas entran en

¹⁰Recordemos que el grupo de simetría de nuestro modelo es $O(2)$, luego de haber sido introducido el potencial (4.7).

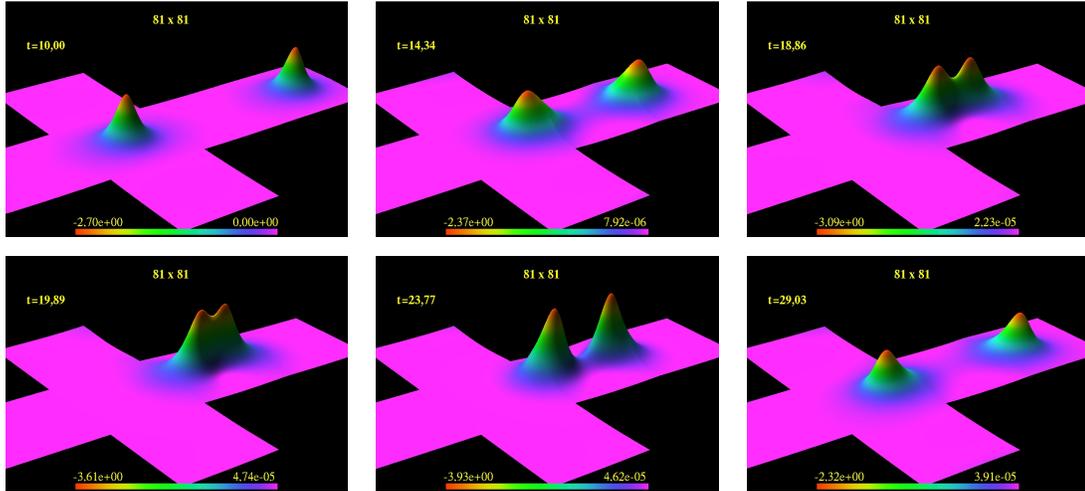


Figura 4.10: Canal Repulsivo. Colisión Elástica (pequeños impulsos).

contacto. Se van frenando mientras continúan contrayendo su tamaño, hasta que se detienen y comienzan a alejarse en el sentido opuesto al original, recuperando su tamaño nuevamente. En la figura 4.10 se muestra una secuencia del proceso.

La *colisión* resulta prácticamente elástica. No se han podido detectar cantidades significativas de radiación durante la interacción, y las velocidades de los solitones parecen ser las mismas, antes y después del encuentro.

Sin embargo, para energías relativistas (i.e: $2v \approx 1$) se ha encontrado un comportamiento notable. De la colisión, emergen ondas de radiación con una frecuencia característica y a una velocidad bien definida, y sólo un soliton, que permanece en el lugar del impacto (desplazándose ligeramente en dirección perpendicular a la dirección de incidencia). (Fig 4.11). El campo parece haber atravesado una singularidad, pasando del sector topológico $W = 2$, al sector $W = 1$.

■ **Canal Atractivo:**

En el canal atractivo los solitones emergen a 90° con respecto a la dirección de incidencia. Este scattering de ángulo recto es bien conocido [3], y es el comportamiento análogo al mencionado para el caso tridimensional [2].

Al efectuar la rotación en espacio del mapa ϕ , los solitones, originalmente iguales, pasan a ser de distintos tamaños. Se aplanan y agrandan al acercarse, para pasar luego por la configuración simétrica del sector $W = 2$ (anillo), donde los solitones pierden su identidad individual. Finalmente, se forman dos solitones de igual tamaño que salen perpendiculares a la dirección original y en sentidos opuestos. (Fig 4.12).

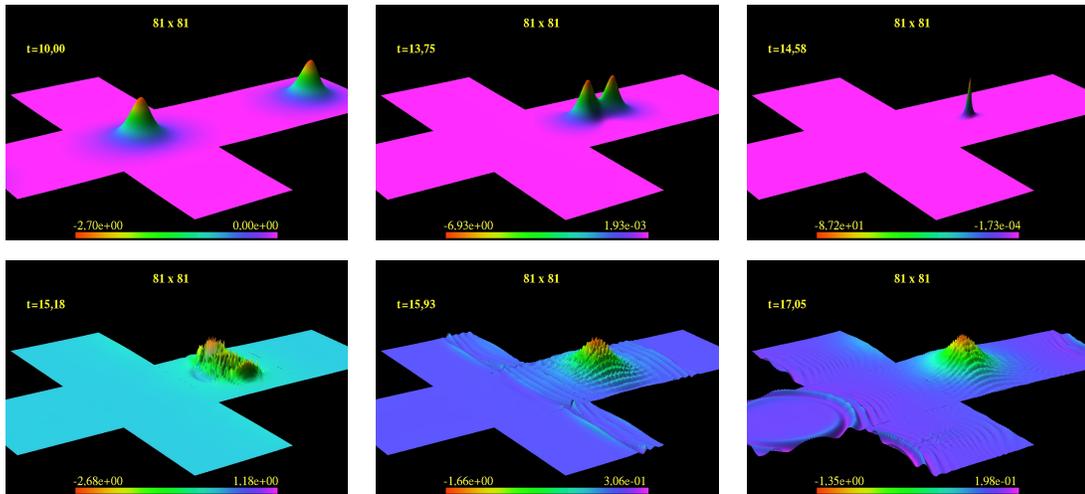


Figura 4.11: Canal Repulsivo. Colisión Relativista ($2v = 0,8$).

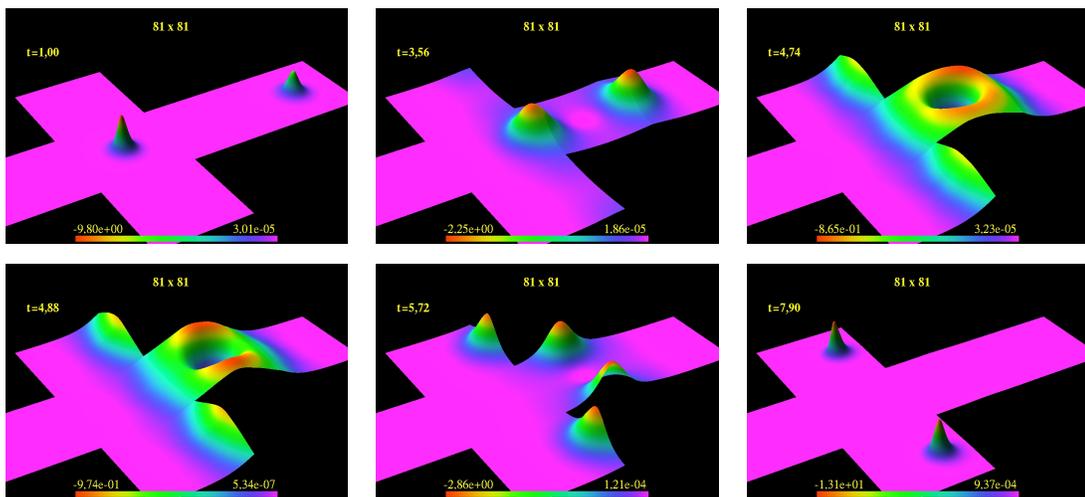


Figura 4.12: Canal Atractivo. Scattering en ángulo recto.

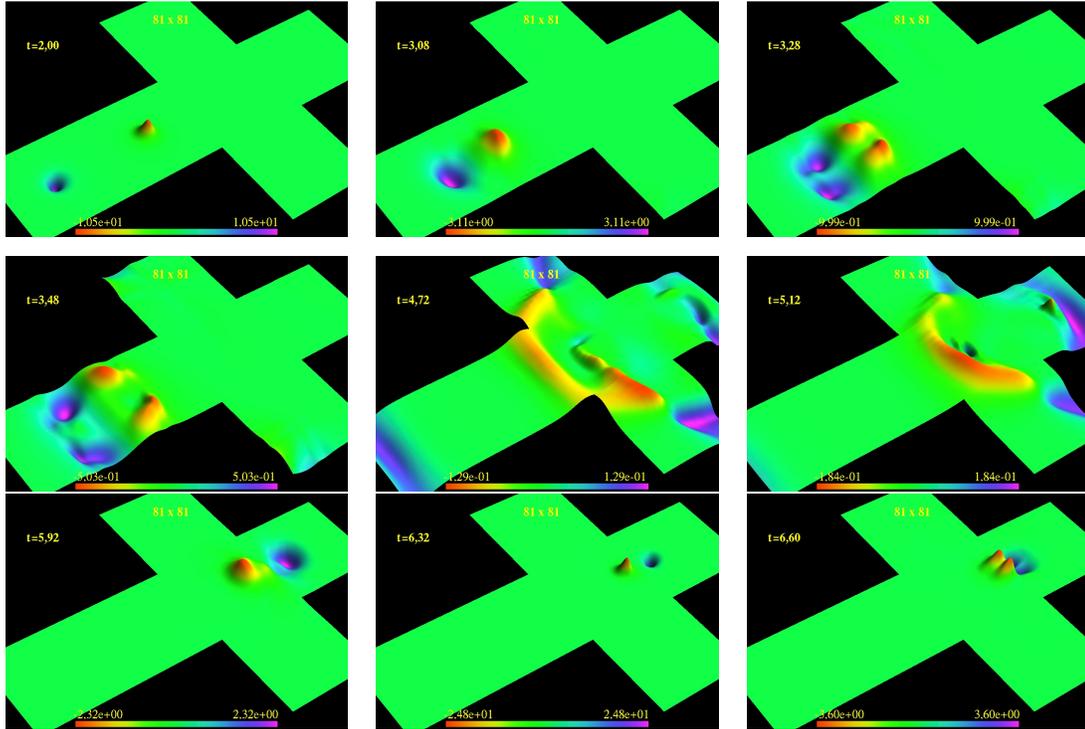


Figura 4.13: Soliton/Anti-soliton.

Soliton/Anti-Soliton

Se intenta aquí generar un proceso de aniquilación en que un soliton-antisoliton se encuentren y anulen entre sí. Para ello, partiremos como es habitual de una configuración de tipo mapa racional. Pero esta vez, $R = R(z, \bar{z})$ ¹¹, de la forma:

$$R(z, \bar{z}) = \lambda(z - a)(\bar{z} - b) \quad (4.18)$$

donde $a, b \in \mathbb{C}$ representan las posiciones del soliton y antisoliton respectivamente.

Lo hallado fue distinto a lo que se esperaba. Soliton y antisoliton presentan una fuerza atractiva entre ellos. Pero al acercarse uno con otro, se van agrandando y aplanando; disminuyen su velocidad; y se separa cada uno en dos partes que salen perpendicularmente a la dirección original en sentidos opuestos, para luego volver a juntarse en el sector opuesto de la esfera. (Fig 4.13)

¹¹ No será, por tanto, solución de las ecuaciones de Bogomolny.

Capítulo 5

Conclusiones

En este capítulo, se presentará un breve resumen de los resultados obtenidos, tanto concernientes a las configuraciones estáticas, como a los aspectos dinámicos del modelo.

Complementariamente, se intentará introducir y/o ampliar las discusiones, y presentar los interrogantes que surgan de las mismas, junto con las posibles líneas de continuación para un futuro trabajo.

5.1. Breve Recapitulación

La pregunta central, que atraviesa todo el estudio aquí presentado, es la de la posibilidad de estabilizar el modelo sigma mediante la inclusión del campo vectorial, en analogía con el más conocido modelo Baby-Skyrmion (y su término de Skyrme). Esta similitud entre los modelos mencionados ha sido referida abiertamente en [14] para el caso plano. Y estudiada también para el caso tridimensional [2, 16, 24].

El abordaje novedoso, si se quiere, ha sido extender la pregunta para el caso de un espacio compacto: la esfera unidad. En este espacio particular existen algunos trabajos para Baby-Skyrmions [10, 22], y se han encontrado algunas características interesantes, como por ejemplo, la existencia de dos escalas espaciales y su interrelación. Cabe destacarse además, que a diferencia de estos últimos trabajos mencionados, en donde se propone simetría axial y se estudia el problema reducido (unidimensional), contamos aquí con dos códigos bidimensionales adaptados a la geometría del problema completo.

5.2. Reseña de lo Encontrado

Restringiendo la atención a una forma particular de potencial, se ha hallado un vasto y rico espectro de posibles soluciones estáticas para el modelo, sobre todo para los sectores de mayor carga topológica (*multi-skyrmions*). Esto se debe en gran medida a la cantidad de parámetros que han sido considerados libres (i.e: g , M^2 , m^2).

Por ello, resultó necesaria una identificación de los parámetros más relevantes, junto con la interpretación física (aún de una forma aproximada) de los mismos. El parámetro α , está relacionado de alguna manera con la intensidad de la interacción con el campo vectorial, puesto que fija una escala de energía que involucra a este nuevo campo en relación con la energía del mapa ϕ . Mientras que la combinación β , fija una escala espacial para los solitones, y por tanto, también la “proporción” o “densidad” de éstos sobre la esfera. Puede verse que el caso plano como el visto en [14], se corresponde en este contexto¹ a la combinación $\beta = 0$, $\alpha \propto g$. Esto refuerza la interpretación dada a los parámetros. Y si bien numéricamente está claro que no puede implementarse directamente este caso límite, se ha encontrado que para valores pequeños de β , en un cierto equilibrio con los valores de α (ver cuadro B.3), se obtienen configuraciones localizadas y con simetrías discretas muy similares a las halladas en [14].

Al igual que en los estudios [7, 27] para baby-skyrmions, notamos que sólo los sectores $W = 1$ y $W = 2$ parecen tener soluciones simétricas estables, mientras que los sectores de carga mayores parecen conformarse en “estructuras cristalinas” a partir de parejas de solitones y solitones individuales ligados.

Para valores suficientemente grandes de β , en cambio, aparecen configuraciones que abarcan todo el espacio de forma regular, presentando ciertos patrones interesantes en los sectores topológicos altos (llamados aquí *texturas*). Estas *texturas* incluyen como un caso límite al caso $V(\vec{\phi}) = 0$, y parecieran ser estables (al menos en dicho límite).

Se encontró además una solución explícita para el sector $W = 1$, para este límite de potencial nulo: la distribución uniforme ($B^0 = cte$). Y pudo chequearse numéricamente que el código de difusión relajaba a dicha solución. Queda ilustrado, por tanto, el argumento de Derrick, y la necesidad de este término potencial para el caso plano.

En cuanto a la dinámica, se han hallado fenómenos presentes en la literatura como choque elástico, y scattering de ángulo recto. Se ha encontrado además, un fenómeno muy interesante para una colisión relativista, en donde el sistema parece pasar por una singularidad al “saltar” de un sector topológico a otro. En este proceso, se libera radiación

¹Esto se deriva de un análisis dimensional. Llevando el radio de la esfera a infinito se tiene $m, M \rightarrow \infty$ (i.e: $\beta \rightarrow 0$). Por otra parte, suele fijarse $\frac{m}{M} = cte$.

con un interesante patrón de ondas, que pareciera poseer una frecuencia característica de emisión, y una velocidad de propagación bien definidas. Luego, se ha intentado reproducir un proceso de aniquilación referido en un estudio tridimensional sobre el plano [16]. Esto no ha resultado posible en este estudio preliminar. Sería interesante poder entender las causas de esta situación. Se abre entonces el interrogante sobre la posibilidad de realización de este fenómeno sobre un espacio compacto.

En líneas generales, podría decirse que se acuerda en este trabajo con la idea, cada vez más asentada en la literatura, de la posibilidad de estabilización del modelo vía la inclusión de estos campos vectoriales de mesones ω . Aún para sectores topológicos mayores que uno.

5.3. Extensiones y Posibles Líneas de Continuación

Una de las preguntas centrales que queda abierta en este trabajo, es si puede hallarse una cota de tipo Bogomolny para el modelo estabilizado por medio de vectores ω . En realidad, la existencia de la cota no es lo interesante en sí, sino el hecho que pueda eventualmente ser saturada. Lo cual implicaría la posibilidad de un acercamiento más firme al interrogante de existencia de soluciones estáticas estables.

La pregunta podría reformularse de la siguiente manera: asumiendo que existan soluciones estáticas de mínima energía en los distintos sectores topológicos, ¿Crece la energía de estas configuraciones linealmente con W ?

El estudio numérico, que si bien parece sugerir que esto podría no ser cierto, está lejos de ser conclusivo². (Cuadro B.2). Y desde lo analítico, no se ha logrado acotar el término “extra” (4.9). Si hubiera evidencia numérica favorable, intentar acotar este término podría resultar muy interesante.

Otro asunto, muy relacionado al anterior, que queda como posible línea para continuar, es la saturación de la cota del modelo Baby-Skyrme. La pregunta quedó expresada en términos de la posibilidad de satisfacer la ecuación (4.11) mediante un mapa racional. O en su defecto, en qué medida puede esta expresión ser aproximada por uno.

En cuanto a la dinámica del modelo, ha quedado mucho por ser explorado. Simplemente nos hemos limitado en este trabajo a unos pocos aspectos cualitativos asociados al scattering frontal, y al proceso de aniquilación de un par soliton-antisoliton. Ha quedado en torno a este último punto mucho para ser analizado y profundizado. ¿Puede lograrse aniquilación en el espacio compacto? ¿Depende ésto de los parámetros?.

²No resulta tan claro que las configuraciones halladas sean verdaderamente las soluciones estáticas de cada sector.

Podrían modificarse también las direcciones de los impulsos en el canal atractivo del scattering y ver si se obtiene el fenómeno de órbitas, o captura a un estado ligado. O incluso, podría intentarse estudiar scattering entre 2 parejas de solitones en el estado ligado $W = 2$.

Por último, una de las más importantes extensiones que podrían hacerse al presente estudio, es la investigación de otras posibles formas para el potencial $V(\vec{\phi})$. Como ha sido mencionado, la elección de dicho potencial es en gran medida arbitraria.

Existe en la literatura sobre baby-skyrmions una serie de trabajos que muestran cómo este potencial tiene un efecto crucial en la existencia y estructura de configuraciones estáticas *multi-solitons* [13, 27]. Al menos dos potenciales más, aparte del considerado aquí, han sido estudiados en cierto detalle: el modelo holomórfico y el denominado *new baby-skyrme model*. El modelo holomórfico posee una única solución estable posible (que pertenece al sector $W = 1$), y esta solución tiene una forma analítica cerrada simple [12]. El otro ha sido estudiado en detalle en [27], donde se ha mostrado que admite soluciones con simetría axial aún en los sectores $W > 2$.

Podría entonces ampliarse el estudio a los distintos tipos de potenciales para el modelo estabilizado por mesones ω . La estructura de las soluciones, su dependencia con la forma de potencial, y las semejanzas con el modelo Baby-Skyrme.

Apéndice A

Coordenadas *cubed sphere*

Aquí se especifican las coordenadas utilizadas en el esquema de grillas y las transformaciones de las mismas sobre las distintas interfases. Esta última información es necesaria para el traspaso de los campos entre los distintos parches.

A.1. Parches

Se considera el siguiente sistema de coordenadas:

$$x = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$y = \sin(\theta) \sin(\phi)$$

$$z = \cos(\theta)$$

$$x = \sin(\eta) \cos(\xi)$$

$$y = \cos(\eta)$$

$$z = \sin(\eta) \sin(\xi)$$

Se quiere usar como parche de coordenadas cerca de $x = 1$ en la esfera unidad, las coordenadas (ϕ, ξ) . Para hallar el elemento de superficie necesitamos solamente encontrar θ como función de esas dos coordenadas. Dado que el elemento de superficie es:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$$

Ahora,

$$\tan(\xi) = z/x = 1/(\tan \theta \cos(\phi))$$

Usando $(1 + \tan^2(\alpha)) = 1/\cos^2(\alpha)$, (válido $\forall \alpha$) se obtiene,

$$\tan(\theta) = \frac{(1 + \tan^2(\phi))^{1/2}}{\tan(\xi)}$$

y definiendo $a = \tan(\xi)$; $b = \tan(\phi)$, tenemos,

$$d\theta = \frac{\sqrt{1+b^2}}{1+a^2+b^2} \{abd\phi - (1+a^2)d\xi\}$$

Dado que,

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta) &= \frac{\tan^2(\theta)}{1 + \tan^2(\theta)} \\ &= \frac{(1+b^2)}{1+a^2+b^2} \end{aligned}$$

y el elemento de superficie se transforma en:

$$ds^2 = \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{(1+a^2+b^2)^2} \{(1+a^2)d\xi^2 + (1+b^2)d\phi^2 - 2abd\xi d\phi\}$$

Aquí todo es suave, regular y simétrico.

Si se toman las variables a y b , la métrica se transforma en:

$$ds^2 = \frac{1}{1+a^2+b^2} \{(1+b^2)da^2 + (1+a^2)db^2 - 2abdadb\} \quad (\text{A.1})$$

La inversa de la métrica es:

$$g^{AB} = D^2 \begin{pmatrix} 1+a^2 & ab \\ ab & 1+b^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

y

$$\det(g_{AB}) = 1/D^6 \quad (\text{A.3})$$

Donde $D := \sqrt{1+a^2+b^2}$.

Los 6 parches, en estas coordenadas, quedarían finalmente:

- Parche 0 (alrededor de $x = 1$): $a = \frac{z}{x}$; $b = \frac{y}{x}$
- Parche 1 (alrededor de $y = 1$): $a = \frac{z}{y}$; $b = \frac{-x}{y}$
- Parche 2 (alrededor de $x = -1$): $a = \frac{-z}{x}$; $b = \frac{y}{x}$
- Parche 3 (alrededor de $y = -1$): $a = \frac{-z}{x}$; $b = \frac{-x}{y}$
- Parche 4 (alrededor de $z = 1$): $a = \frac{-x}{z}$; $b = \frac{y}{z}$
- Parche 5 (alrededor de $z = -1$): $a = \frac{-x}{z}$; $b = \frac{-y}{z}$

A.2. Jacobiano

Como fue mencionado, resulta necesario conocer las transformación de coordenadas entre un parche y otro para realizar la transferencia de información por las interfases.

Sólamente es necesario el Jacobiano de un solo lado, pues todos los demás se siguen por simetría. Lo haremos sobre la interface del parche $x = 1$ y el parche $y = 1$.

Para el primero se tiene, como antes,

$$\begin{aligned} x &= \sin(\theta) \cos(\phi) \\ y &= \sin(\theta) \sin(\phi) \\ z &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \sin(\eta) \cos(\xi) \\ y &= \cos(\eta) \\ z &= \sin(\eta) \sin(\xi) \end{aligned}$$

Mientras que para el segundo:

$$\begin{aligned} x &= -\sin(\tilde{\theta}) \sin(\tilde{\phi}) \\ y &= \sin(\tilde{\theta}) \cos(\tilde{\phi}) \\ z &= \cos(\tilde{\theta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= \sin(\eta') \cos(\xi') \\
 x &= \cos(\eta') \\
 z &= \sin(\eta') \sin(\xi')
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y} &= \tan(\tilde{\phi}) = -\frac{1}{\tan(\phi)} \\
 \frac{z}{y} &= \tan(\xi') = \frac{1}{\tan(\theta) \sin(\phi)} = \frac{\tan(\xi)}{\tan(\phi)} = \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
 d\tilde{\phi} &= d\phi \\
 d\xi' &= \frac{1}{a^2 + b^2} \{b(1 + a^2)d\xi - a(1 + b^2)d\phi\}
 \end{aligned}$$

En el borde $\phi = \frac{\pi}{4}$ $\tilde{\phi} = -\frac{\pi}{4}$, y $b = 1$, por lo que $d\xi' = d\xi - \frac{2a}{1+a^2}d\phi$
 La transformación inversa es $d\xi = d\xi' + \frac{2a}{1+a^2}d\tilde{\phi}$

Apéndice B

Datos

En este apéndice se resume gran parte de la información obtenida numéricamente. Se detallan los parámetros utilizados y se incluyen algunas tablas comparativas entre los distintos tipos de configuraciones y sus energías.

B.1. Parámetros

Rótulo	g	M^2	m^2	α	β
a	18	2,25	0,1	3,79	6,16
b	8,75	2,25	0,1	1,84	4,29
c	18	1	0,05	4,02	8,97
d	9	5	0,2	1,80	3
e	2	16	0,1	0,16	1,26
f	1	20	0,1	0,07	0,84
g	2,25	16	0,25	0,28	1,06
h	3	8	0,2	0,47	1,54
i	5	5	2	3,16	1,26
j	8	25,6	1	1,58	1,26
k	3	18	0,05	0,16	1,78
l	12	45	0,5	1,26	1,59
m	15	65	1	1,86	1,36
n	15	25	5	6,71	1,16
o	12	32	4	4,24	1,03

Cuadro B.1: Parámetros Utilizados

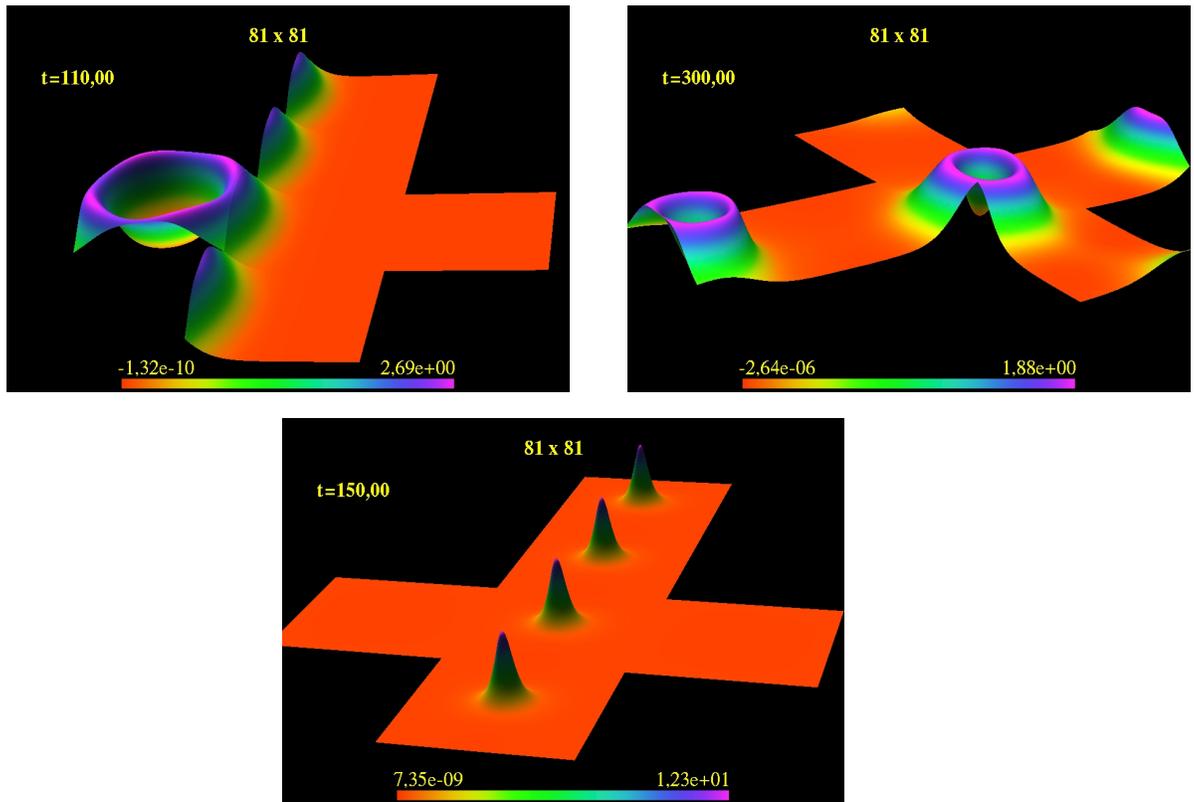


Figura B.1: Parámetro α . $W = 4$ y $\beta = 1, 26$. ($\alpha = 0, 16$; $\alpha = 1, 58$; $\alpha = 3, 16$).

Aquí puede verse cómo el parámetro α influye en las configuraciones resultantes. Determina la intensidad de la interacción entre los campos: para valores pequeños la simetría inicial apenas parece romperse, mientras que para valores más grandes la ruptura se dá de forma inmediata, y las configuraciones resultantes están dadas por solitones individuales. Ninguno de estos extremos pareciera permitir estabilidad.

B.2. Configuraciones y Energías

Se presentará aquí una tabla con las energías por solitón. Esto apunta al interrogante sobre la existencia de una cota de tipo Bogomolny análoga a la obtenida para el modelo baby-skyrmion para el modelo que se ha considerado en este trabajo. ¿Crece la energía de las configuraciones estáticas linealmente con W ?

Parámetros			Energía por Solitón (i.e: E/W)						
terna	α	β	$W = 1$	$W = 2$	$W = 3$	$W = 4$	$W = 5$	$W = 6$	$W = 7$
a	3,79	6,16	25,8	37,3	23,8	36,3	69,6	47,8	34,1
e	0,16	1,26	12,9	13,0	13,0	13,1	13,1	13,0	13,0
f	0,07	0,84	12,5	12,6	12,6	12,7	12,8	—	—
g	0,28	1,06	13,0	13,0	13,1	13,3	13,5	13,6	13,4
h	0,47	1,54	13,5	13,6	13,2	13,8	13,5	13,7	13,2
i	3,16	1,26	16,5	16,5	18,0	16,7	19,1	19,2	—
j	1,58	1,26	15,7	15,8	16,8	16,5	16,7	16,2	16,4
k	0,16	1,78	12,9	13,0	12,8	12,9	12,8	13,0	12,8

Cuadro B.2: Energía por solitón para las distintas configuraciones.

A continuación se presentan las configuraciones halladas con una breve descripción, sus energías y la energía E_{B-S}^1 correspondiente a la cota (4.8).

Se ha encontrado una discrepancia mayor entre estas dos energías para las configuraciones de mayor densidad (β grandes). Al parecer, en estos casos, el mapa ϕ se aparta ligeramente de constituir un mapa racional, y por tanto, de la cota básica de Bogomolny.

¹ Excluyendo el aporte del término extra \mathcal{I} .

$W = 3$	α	β	Configuración	Energía	E_{B-S}	Estabilidad
a	3,79	6,16	textura	71,3	52,9	si
e	0,16	1,26	3 picos sobre anillo	38,9	38,3	no
f	0,07	0,84	solitones individuales	37,8	37,9	no
g	0,28	1,06	3 picos sobre anillo	39,4	38,8	no
h	0,47	1,54	3 picos sobre anillo	39,6	39,6	no
i	3,16	1,26	solitones individuales	53,9	50,4	no
j	1,58	1,26	estado ligado	50,5	44,0	si
k	0,16	1,78	Anillo	38,4	38,3	no
$W = 4$	α	β	Configuración	Energía	E_{B-S}	Estabilidad
a	3,79	6,16	textura	145,3	70,5	si
e	0,16	1,26	4 picos sobre anillo	52,2	51,1	no
f	0,07	0,84	solitones individuales	50,6	50,6	no
g	0,28	1,06	2 pares	53,3	51,8	si
h	0,47	1,54	2 pares	55,1	52,8	si
i	3,16	1,26	solitones individuales	66,7	67,1	no
j	1,58	1,26	2 anillos	65,9	58,7	si
k	0,16	1,78	Anillo	52,5	51,1	no
m	1,86	1,36	2 anillos	69,0	60,2	si
o	4,24	1,03	2 anillos	71,9	72,9	si
$W = 5$	α	β	Configuración	Energía	E_{B-S}	Estabilidad
a	3,79	6,16	textura	347,9	88,1	si
c	4,02	8,97	textura	390,0	89,7	si
d	1,80	3,00	textura	82,6	74,8	si
e	0,16	1,26	individuales ligados	65,4	63,9	si
f	0,07	0,84	solitones individuales	64,1	63,3	no
h	0,47	1,54	solitones individuales	67,4	66,0	no
i	3,16	1,26	solitones individuales	95,3	83,9	no
j	1,58	1,26	estado ligado	83,4	73,4	si
k	0,16	1,78	estado ligado	64,0	63,9	si
l	1,26	1,59	estado ligado	71,9	71,3	si
$W = 6$	α	β	Configuración	Energía	E_{B-S}	Estabilidad
a	3,79	6,16	textura	287,0	105,8	si
e	0,16	1,26	? (falta tiempo)	77,9	76,7	?
h	0,47	1,54	? (falta tiempo)	82,3	79,2	no
i	3,16	1,26	solitones individuales	115,1	100,7	no
j	1,58	1,26	estado ligado (3 pares)	97,3	88,1	si
k	0,16	1,78	? (falta tiempo)	78,2	76,7	?
m	1,86	1,36	estado ligado (3 pares)	90,9	90,3	si
n	6,71	1,16	3 anillos	126,5	129,1	si
$W = 7$	α	β	Configuración	Energía	E_{B-S}	Estabilidad
a	3,79	6,16	textura	238,4	123,4	si
e	0,16	1,26	3 pares + 1 indiv. (falta tiempo)	90,9	89,4	?
h	0,47	1,54	estado ligado (3 pares + 1 ind.)	92,2	92,4	si
j	1,58	1,26	estado ligado (3 pares + 1 ind.)	115,1	102,7	si
k	0,16	1,78	estado ligado	89,6	89,4	si

Cuadro B.3: Configuraciones obtenidas

Bibliografía

- [1] Gregory S. Adkins y Chiara R. Nappi. Stabilization of chiral solitons via vector mesons. *Physics Letters B*, 137(3-4):251–256, 1984. ISSN 0370-2693. doi:DOI:10.1016/0370-2693(84)90239-9.
- [2] R.D. Amado, M.A. Halasz, y P. Protopapas. Two skyrmion dynamics with omega mesons. Inf. Téc. UPR-860-T, 2000. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/9909426>.
- [3] M. F. Atiyah y N. S. Manton. Geometry and kinematics of two skyrmions. *Communications in Mathematical Physics*, 153:391–422, 1993. ISSN 0010-3616. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF02096649>. 10.1007/BF02096649.
- [4] Richard Battye y Paul Sutcliffe. Skyrmions and the pion mass. *Nucl.Phys. B*, 705:384–400, 2005. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0410157>.
- [5] Richard Battye y Paul Sutcliffe. Skyrmions with massive pions. *Phys.Rev. C*, 73:055205, 2006. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0602220>.
- [6] A. A. Belavin y A. M. Plyakov. Metastable states of two-dimensional isotropic ferromagnets. *JETP Lett.*, 22:445, 1975.
- [7] B.M.A.G.Piette, B.J.Schroers, y W.J.Zakrzewski. Multisolitons in a two-dimensional skyrme model. *Z.Phys. C*, 65:165–174, 1995. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9406160>.
- [8] E. B. Bogomolny. Stability of Classical Solutions. *Sov. J. Nucl. Phys.*, 24:449, 1976.
- [9] Gioel Calabrese, Luis Lehner, Oscar Reula, Olivier Sarbach, y Manuel Tiglio. Summation by parts and dissipation for domains with excised regions. Inf. Téc. LSU-REL-080103, 2004. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0308007>.
- [10] M. de Innocentis y R.S. Ward. Skyrmions on the two-sphere. Inf. Téc. DCPT/01/21, 2001. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0103046>.

- [11] G. H. Derrick. Comments on nonlinear wave equations as models for elementary particles. *J. Math. Phys.*, 5:1252, 1964. ISSN 0022-2488. doi:DOI:10.1063/1.1704233.
- [12] A. M. Din y W. J. Zakrzewski. Skyrmion dynamics in 2 + 1 dimensions. *Nuclear Physics B*, 259(4):667–676, 1985. ISSN 0550-3213. doi:DOI:10.1016/0550-3213(85)90006-9.
- [13] Parvin Eslami, Mohsen Sarbishaei, y Wojtek Zakrzewski. Baby skyrme models for a class of potentials. *Nonlinearity*, 13(5):1867, 2000. URL <http://stacks.iop.org/0951-7715/13/i=5/a=322>.
- [14] David Foster y Paul Sutcliffe. Baby skyrmions stabilized by vector mesons. Inf. Téc. DCPT-09/07, 2009. URL <http://arxiv.org/abs/0901.3622>.
- [15] B. Gustafsson J. Olinger H. Kreiss. *Time Dependent Problems And Difference Methods*. John Wiley and Sons, Inc., 1995.
- [16] M. A. Halasz y R. D. Amado. Skyrmion-anti-skyrmion annihilation with omega mesons. Inf. Téc. UPR-902-T, 2001. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0009260>.
- [17] R A Leese, M Peyrard, y W J Zakrzewski. Soliton stability in the o(3) sigma -model in (2+1) dimensions. *Nonlinearity*, 3(2):387, 1990. URL <http://stacks.iop.org/0951-7715/3/i=2/a=007>.
- [18] Luis Lehner, Oscar Reula, y Manuel Tiglio. Multi-block simulations in general relativity: high order discretizations, numerical stability, and applications. *Class.Quant.Grav.*, 22:5283–5322, 2005. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/0507004>.
- [19] N. Manton y P. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, 2004.
- [20] N. S. Manton. Geometry of skyrmions. *Communications in Mathematical Physics*, 111:469–478, 1987. ISSN 0010-3616. URL <http://dx.doi.org/10.1007/BF01238909>. 10.1007/BF01238909.
- [21] N. S. Manton y P. J. Ruback. Skyrmions in flat space and curved space. *Physics Letters B*, 181(1-2):137–140, 1986. ISSN 0370-2693. doi:DOI:10.1016/0370-2693(86)91271-2.
- [22] N.N. Scoccola y D.R. Bes. Baby skyrmions on the sphere. Inf. Téc. TAN-FNT-97-05, 1998. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9708146>.

-
- [23] Sondhi, Karlhede, Kivelson, y Rezayi. Skyrmions and the crossover from the integer to fractional quantum hall effect at small zeeman energies. *Phys Rev B Condens Matter*, 47(24):16419–16426, 1993. ISSN 0163-1829. URL <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pubmed/10006073>.
- [24] Paul Sutcliffe. Multi-skyrmions with vector mesons. Inf. Téc. DCPT-08/59, 2009. URL <http://arxiv.org/abs/0810.5444>.
- [25] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, 1984.
- [26] R.S. Ward. Integrability of the chiral equations with torsion term. *Nonlinearity*, 1(4):671–679, 1988. doi:10.1088/0951-7715/1/4/009.
- [27] Tom Weidig. The baby skyrme models and their multi-skyrmions. 1999. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/9811238>.
- [28] I. Zahed y G. E. Brown. The skyrme model. *Physics Reports*, 142(1-2):1–102, 1986. ISSN 0370-1573. doi:DOI:10.1016/0370-1573(86)90142-0.