FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Cruces y Capturas de Asteroides en la Resonancia de Movimientos Medios 3:1 con Júpiter por Efecto Yarkovsky.

Hugo Alberto Folonier Director: Dr. Cristián Beaugé

Córdoba, 25 de Febrero de 2011

Resumen

La resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter es el límite entre el cinturón de asteroides interno y el intermedio, la cual se encuentra asociada a una de las más importantes lagunas de Kirkwood. El fuerte caos que domina la dinámica de la región provoca que los asteroides resonantes sean removidos por encuentros cercanos con los planetas terrestres en intervalos de cientos de miles de años. No obstante, Roig et al. (2008) muestran que ciertas órbitas de bajas excentricidades pueden llegar a cruzar la separatriz con la ayuda de una fuerza disipativa como el efecto Yarkovsky. Esto podría explicar la existencia de asteroides basálticos en el cinturón intermedio como provenientes de la familia de Vesta. En este trabajo analizamos la probabilidad de este fenómeno, integrando numéricamente las órbitas de varias poblaciones de asteroides ficticios. Estudiamos varios sistemas físicos de creciente complejidad. La simulaciones fueron realizadas con un código de N-Cuerpos y con un integrador algebraico.

Clasificación PACS 2010:

46.40.Ff Resonance, damping, and dynamic stability 95.10.Ce Celestial mechanics (including n-body problems) 96.30.Ys Asteroid, meteoroids

Palabras claves:

Asteroides, Resonancia de movimientos medios, Efecto Yarkovsky, Probabilidad de captura en resonancia, Mapas algebraicos.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecerle a mi director, el Dr. Cristián Beaugé, por su gran paciencia para orientarme, por su buena onda y por darme libertad para trabajar.

Al Dr. Fernando Roig, por ofrecerme este maravilloso tema de investigación y por haberme dado la oportunidad ir a trabajar con él a Río de Janeiro.

Al tribunal de este trabajo especial, formado por mi director, el Dr. Javier Ahumada y el Dr. Martin Leiva.

A mi novia, por hacerme tan feliz. TE AMO MUCHISIMO MI CHANCHITO! Gracias por los gráficos en Corel!

A mis viejos y a mi familia, por apoyarme desde chico con esta carrera fantástica y apasionante. Sin ellos nada de esto hubiese sido posible.

A Anita, Belén, Dani, Gus, Hebe, Lea, Marquitos, Mati y Xime, por todos los momentos tan lindos compartidos y a todos mis amigos y compañeros del obse.

A mis amigos de Santiago, que a pesar de la distancia están siempre.

A los chicos de 27 "al lado" y "27 central" de la RUS y a Chosqui.

A María Jose y a todo el personal del despacho de alumno por ayudarme cada vez que lo necesité.

A todos MUCHISIMAS GRACIAS!!!!!

Índice general

1.	Intr	oducción	1
	1.1.	El cinturón de asteroides	1
	1.2.	Familias de asteroides	3
	1.3.	Objetivos del trabajo	7
2.			8
			8
	2.2.	Desarrollo de la Función Perturbadora	0
		2.2.1. Expansión en Polinomios de Legendre $\dots \dots \dots$	0
		2.2.2. Expansión de Kaula	3
		2.2.3. Expansión de Laplace	4
		2.2.4. Expansión Literal de Segundo Orden	6
		2.2.5. Otras expansiones	4
		2.2.6. Estructura General de R y las Reglas de D'Alembert	6
	2.3.	Formalismo Hamiltoniano	6
		2.3.1. Definición y Construcción	7
		2.3.2. Transformaciones Canónicas	9
		2.3.3. Variables Angulo-Acción	1
3.	Teo	ría de Perturbaciones 3	4
	3.1.	Complejidad de las Ecuaciones de Movimiento	4
	3.2.	El Concepto de Perturbación	4
	3.3.	Método de Hori	4
		3.3.1. Conceptos Previos	5
		3.3.2. Método de Hori Versión Acción-Angulo	8
		3.3.3. Resolución de la Ecuación Homológica	C
		3.3.4. Convergencia, Integrabilidad y Caoticidad	1
4.	Esti	ructura del Problema Asteroidal en la Resonancia 3:1	2
	4.1.	El Hamiltoniano	2
	4.2.	Caso Planar Circular	0
		4.2.1. Ecuaciones de Movimiento	0
		4.2.2. Puntos de Equilibrio	
		4.2.3. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio	3
		4.2.4. Separatriz del Problema Circular	7
		4.2.5. Acciones y Frecuencias	
	4.3.	Caso Elíptico	
	-	4.3.1. Ecuaciones de Movimiento	
		4.3.2. Puntos de Equilibrio	
	4.4.	Indicadores de Caos	

ÍNDICE GENERAL IV

		4.4.1. Exponentes Característicos de Lyapunov	64							
		4.4.2. M.E.G.N.O. ("Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits") $$	66							
5.	Simulaciones Numéricas 69									
	5.1.	El Efecto Yarkovsky	69							
			69							
		5.1.2. Modelo Matemático	70							
	5.2.	Evolución Orbital de Asteroides por el Efecto Yarkovsky	72							
	5.3.	Pasajes por la Resonancia 3/1: Cruces y Capturas	75							
6.	El N	Mapa Algebraico	83							
	6.1.	Introducción	83							
	6.2.	Mapas Algebraicos	84							
		• 9	84							
			85							
	6.3.	1	86							
			86							
		•	88							
	6.4.		89							
			89							
		1 0	90							
			90							
			91							
	6.5.		94							
		-								
7 .		<u>.</u>	98							
	7.1.		98							
		1	.00							
		1	02							
	7.4.		.03							
	7.5.	1 0	19							
	7.6.	1	20							
	7.7.	Estructura del Espacio de Condiciones Iniciales	22							
8.	Con	iclusiones y Perspectivas 1	31							
Α.	Exp	ansiones elípticas para el problema de dos cuerpos	34							
			34							
	A.2.	Funciones de Bessel de primera especie	35							
	A.3.	Inversión de la ecuación de Kepler	36							
			37							

Capítulo 1

Introducción

1.1. El cinturón de asteroides

En el año 1766, Johann Titius formula una simple regla nemotécnica, en la que relaciona la distancia media (en unidades astronómicas) de cada uno de los planetas conocidos al Sol, por una simple sucección

$$d_i = 0.4 + 0.3 \times (2)^i \tag{1.1}$$

donde $i = -\infty, 0, 1, 2, 4, 5$ y representan a Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter y Saturno respectivamente. La ley fué popularizada por Johann Elert Bode (director del Observatorio de Berlín) en el año 1772 como la Ley de Bode (años más tarde se conocería como la Ley de Titius-Bode), el cual, a pesar de no poseer fundamentos físicos en donde sustentarla, sugería la presencia de un planeta no conocido para la órbita localizada en i = 3. El descubrimiento de Urano en 1781 a 19.18 UA del Sol (i = 6) condujo a la búsqueda del planeta perdido.

No fué hasta el primero de enero de 1801, cuando el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi observó por primera vez a (1) Ceres, con casi 500 km de radio y situado a 2.77 UA tal cual lo predecía la Ley de Titius-Bode. Para mayor sorpresa, en el año 1802 el astrónomo y médico alemán Heinrich Wilheln Olbers descubre un segundo objeto, al que llama (2) Palas, de unos 260 km de radio y un semieje mayor de 2.77 UA similar a Ceres. En septiembre de 1804, el astrónomo alemán Karl Ludwing Harding descubre (3) Juno, con un radio de 115 km y un semieje de 2.67 UA y en marzo de 1807 Heinrich Olbers observa por primera vez a (4) Vesta, con un radio de 250 km y un semieje de 2.36 UA. Si bien el radio de estos objetos aún no era conocido en esos tiempos, lo único que se sabía era que no presentaban discos aparentes al ser observados a través de los mejores telescopios de la época, por eso fueron llamados asteroides o sea "semejantes a estrellas", aunque durante muchos años también fueron llamados "pequeños planetas". La principal crítica que hacían los opositores a la ley de Titius-Bode era que había más de un planeta en el lugar donde la ley predecía un único planeta.

No obstante, tal fue la popularidad ganada por la ley Titius-Bode, que llevó a los astrónomos Adams (1847 [1]) y Le Verrier (1847 [2]) a usarla como base para sus cálculos en la búsqueda del octavo planeta. Sin embargo, el descubrimiento de Neptuno a 30.1 UA, cuando la ley predecía una distancia de 38.8, marcó el principio del fin para ésta, la cual recibió su golpe definitivo en 1929 con el descubrimiento de Plutón a 39.4 UA cuando se esperaba un semieje de 77.2 UA. La Tabla 1.1 muestra los valores que la ley predice para cada planeta y los semiejes reales (Murray y Dermott 1999a [3]).

Después del descubrimiento de Palas en marzo de 1802, luego de estudiar la naturaleza las

Planeta	i	Semieje Mayor [UA]	Ley T-B [UA]
Mercurio	$-\infty$	0.39	0.4
Venus	0	0.72	0.7
Tierra	1	1.00	1.0
Marte	2	1.52	1.6
Ceres	3	2.77	2.8
Júpiter	4	5.20	5.2
Saturno	5	9.54	10.0
Urano	6	19.18	19.6
Neptuno	7	30.06	38.8
Plutón	8	39.44	77.2

Cuadro 1.1: Ley de Titius-Bode

dimensiones de éste y de Ceres, William Herschel propuso denominar asteroides a estos objetos, a los que se sumaron los descubrimientos de Juno y Vesta. Sin embargo, hubo que esperar hasta diciembre de 1845 para el descubrimiento de un nuevo asteroide. A partir de entonces comenzaron a descubrirse muchos objetos más a medida que se construían telescopios más grandes. Actualmente se conocen más de 500000 asteroides, de los cuales sólo 250000 poseen órbitas bien determinadas (Bowell, 2010 [4]). A estos últimos se les asigna un número el cual los identifica según el orden en el que fueron descubiertos, por ejemplo Ceres se denota por (1) Ceres. Por esta razón estos asteroides son llamados numerados.

La distribución de semiejes mayores es una característica muy bien conocida de los asteroides. Esta no es homogénea sino que presenta regiones vacías o con muy pocos objetos. La Figura 1.1 muestra la distribución de todos los asteroides numerados en el Sistema Solar interno, mientras que la Figura 1.3 es una ampliación de la región donde se encuentran la mayoría de los asteroides, la cual llamamos cinturón de asteroides. Las regiones vacías se encuentran localizadas en semiejes para los cuales el cociente entre el movimiento medio del asteroide y el movimiento medio de alguno de los planetas gigantes es un número racional. Dichas conmensurabilidades son llamadas resonancias de movimientos medios. Esta característica fué observada por primera vez por el astrónomo Daniel Kirkwood (1867 [5]) hace más de 140 años. Además, las grandes lagunas ubicadas en 2.5 UA (resonancia 3:1 con Júpiter) y en 2.82 UA (resonancia 5:2 con Júpiter) dividen en tres partes al cinturón de asteroides, el cinturón interno (2.1 UA - 2.5 UA), el cinturón intermedio (2.5 UA - 2.82 UA) y el cinturón externo (2.82 UA - 3.27 UA).

El estudio de las resonancias de movimientos medios y las lagunas de Kirkwood ha sido tema de numerosos trabajos (Hagihara 1961 [6], Peale 1976 [7], Greenberg 1977 [8], Chapman et al. 1978 [9], Greenberg y Scholl 1979 [10], Scholl 1979 [11] y 1987 [12], Schubart 1979 [13], Froeschlé y Scholl 1983 [14]), por lo que han existido muchas hipótesis para intentar comprender las lagunas, sin embargo no fué hasta 1980 cuando se logra explicar este fenómeno. Las dos hipótesis principales eran: i) Las lagunas se formaron junto con el Sistema Solar mismo (son primordiales). ii) Son debidas puramente a perturbaciones gravitacionales de los planetas gigantes. Heppenheimer (1978 [15]) propone que estas lagunas son primordiales y que representan regiones donde los asteroides no se pudieron formar debido a las fuertes variaciones en excentricidad (esto produce fuertes variaciones en las velocidades relativas) lo que no permite

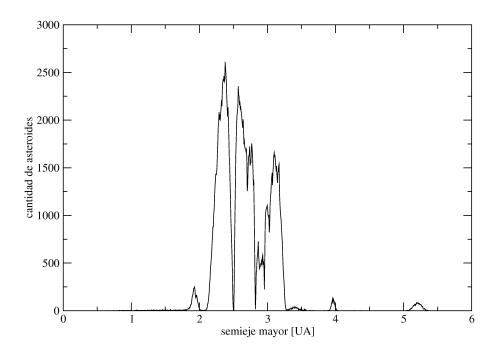


Figura 1.1: Distribución de asteroides reales en el Sistema Solar interno.

que los planetesimales se formen mediante acreción. En contraposición Torbett y Smoluchowski (1982 [16] y 1983 [17]), Henrard y Lemaître (1983 [18]) y Lemaître (1984 [19]) afirmaron que las lagunas se formaron por el efecto del desplazamiento de las resonancias jovianas. Asumiendo que Júpiter se formó primero, luego su fuerza gravitacional es la que afectó la formación o el movimiento de los asteroides.

Wisdom (1982 [21], 1983 [22] y 1985 [23]) construye un mapa algebraico 1000 veces más rápido que otros integradores numéricos de la época para mostrar que, dentro de la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter, asteroides ficticios pueden evolucionar en excentricidades bajas (<0.05) y repentinamente saltar a excentricidades más altas (>0.3), convirtiéndose en cruzadores de la órbita de Marte, lo cual produce un vaciamiento de la región próxima a la resonancia, lo que explica las lagunas. Hoy en día, esta hipótesis se encuentra ampliamente estudiada y aceptada. Trabajos como los de Murray et al. 1985 [24], Henrard et al. (1989 [25]), Yoshikawa (1990 [20]), Hadjidemetriou (1991 [26], 1992 [27] y 1993 [28]) y Guillens et al. (2002 [29]) han sido realizados para la resonancia 3:1.

1.2. Familias de asteroides

La evolución orbital de un asteroide está dada por la variación temporal de los elementos orbitales instantáneos, usualmente llamados *elementos osculadores*. En casos donde el caos es despreciable, el semieje mayor, la excentricidad y la inclinación osculadoras pueden ser representadas por una constante más una función periódica, mientras que las longitudes media, de

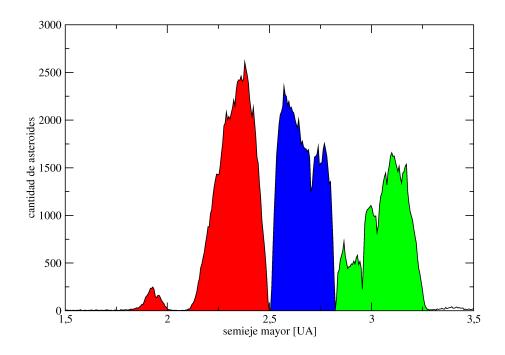


Figura 1.2: Distribución de asteroides reales en el cinturón de asteroides. *Rojo:* cinturón interno. *Azul:* cinturón intermedio. *Verde:* cinturón externo.

pericentro y del nodo ascendente pueden representarse por un término lineal más funciones periódicas, la cuales son provocadas por las perturbaciones planetarias. Por medio de la teoría de perturbaciones es posible promediar los términos periódicos y determinar las pendientes de los términos lineales, o los valores constantes, según sea el caso. A éstos los denominamos elementos propios.

El término familia de asteroides está ligado al astrónomo japones Kiyotsugu Hirayama (1918 [30], 1928 [31] y 1933 [32]) quien fué el primero en utilizar el concepto de elementos propios para identificar grupos de asteroides con órbitas "cercanas". En su interpretación, Hirayama supone que tales cercanías no pueden ser producto del azar y propone que los miembros de una familia son los fragmentos dispersados de un cuerpo progenitor que sufrió una colisión. Además, en primera aproximación, la estructura de una familia en el espacio de elementos propios guarda una relación directa con el campo original de velocidades de eyección de los fragmentos. Esta interpretación es aceptada en la actualidad y se encuentra apoyada en resultados teóricos y observacionales (Cellino et al., 2003 [33] y Zappalà et al., 2003 [34]).

En el cinturón de asteroides existen alrededor de 20 familias (Mothé-Diniz et al. 2005 [35]) y su estudio es de gran importancia básicamente por dos motivos: i) la mineralogía de los fragmentos se encuentra directamente vinculada a la composición química del cuerpo progenitor. ii) Los fragmentos, si provienen de una misma colisión, tienen una misma edad en el sentido en que sus superficies han estado expuestas a la radiación solar y al espacio interplanetario por el mismo intervalo de tiempo. Esto es muy importante ya que ciertas características en los espec-

tros de reflexión, los cuales dependen de la mineralogía en la superficie del objeto observado, pueden llegar a modificarse a causa de estos efectos. Esto es conocido como "space weathering".

Una característica fundamental de los asteroides es su color. La luz solar incidente es dispersada o absorbida por la superficie de los mismos, por lo que la fracción de luz reflejada a una longitud de onda dada dependerá de las propiedades ópticas de los materiales que forman dicha superficie (Bus et al., 2002 [36]), con lo cual el espectro de reflexión de un asteroide se obtiene por cociente entre su espectro observado y el espectro de una estrella análoga solar. A este espectro de reflexión se le asigna una clase taxonómica denotándola por una letra según las características que presente. Si bien existen diversas taxonomías (Chapman et al., 1975 [37], Tholen, 1984 [38] y Bus et al., 1999 [39]), las cuales se diferencian principalmente en la definición de los espectros (distintos catálogos de asteroides con distintos tipos de detectores), todas dividen a los asteroides en dos grandes grupos:

- Espectros sin bandas de absorción: Según la taxonomía de Tholen, se tratan de espectros rectos, con inclinaciones que van desde levemente negativas (clase B), nulas (clase C), levemente positivas (clases E, M y P) o muy positivas (clase D). Las clases E, M y P corresponden a espectros con la misma pendiente que se distinguen solamente por su albedo: albedo alto (clase E), albedo intermedio (clase M) y albedo bajo (clase P). En la taxonomía de Bus, las clases E, M y P se encuentran agrupadas en una única (clase X). Algunos asteroides, como espectros de clases B y C son semejantes a los de los meteoritos condritos carbonáceos (de allí la letra C). Otros, como la clase M son similares a los meteoritos de hierro (metálicos, de allí la letra M).
- Espectros con bandas de absorción: Se trata de espectros constituídos por un continuo y una o más bandas de absorción. La clasificación se realiza según la posición, el ancho y la profundidad de la banda en ~ 1 μm. Bandas poco profundas (clase A), profundidad moderada (clase S) y muy profundas (V). Los espectros tipo S se parecen a los espectros de los meteoritos condritos ordinarios, los tipo V son parecidos a los acondritos basálticos, mientras que los tipo A son semejantes al espectro de la olivina pura.

Un ejemplo de asteroides con bandas son los tipo V, que presentan dos bandas de absorción alrededor de 1 μ m y 2 μ m y son compatibles con una mezcla de piroxeno y olivina. Estos espectros son semejantes a los de meteoritos acondritos basálticos. Estos deben haber sufrido procesos de calentamiento y fusión muy intensos, los cuales están vinculados a fenómenos de vulcanismo. Tanto la olivina como el basalto son minerales característicos de objetos que sufrieron un proceso de diferenciación mineralógica por calentamiento. Se piensa que luego de una etapa de condensación y aglutinamiento, en un cuerpo de grandes dimensiones (\sim 100 km o más) el decaimiento de ciertos isótopos radiactivos elevarían la temperatura en el interior del mismo produciendo una diferenciación por capas. Los minerales más pesados como el hierro y otros metales tenderían a amontonarse en el centro formando un núcleo, mientras que los más livianos como el basalto y los silicatos emergerían a la superficie formando una corteza poco profunda. Entre la costra y el núcleo se formaría un manto principalmente de olivina.

En el cinturón de asteroides, el único asteroide de grandes dimensiones que posee una superficie basáltica es Vesta (McCord et al., 1970 [40]). Lo interesante es que éste se encuentra asociado a una familia (la familia de Vesta), la cual está formada por asteroides pequeños (del orden de los 5 km), la mayoría con espectros tipo V y semiejes mayores comprendidos entre 2.22 UA y 2.47 UA aproximadamente. Las imágenes del hemisferio sur de Vesta muestran un cráter de gran dimensión, lo que sugieren que la colisión que lo formó, también es la que dió origen a la familia. Sin embargo, también existe un gran número de asteroides basálticos

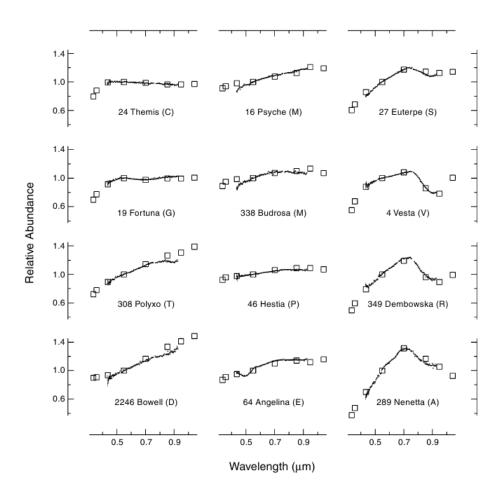


Figura 1.3: Espectros de 12 asteroides reales y su clasificación taxoómica. Los cuadrados corresponden al catálogo ECAS (Eight-Color Asteroid Survey), el cual sirvió de base para la taxonoía de Tholen. Los puntos corresponden al catálogo SMASSII (Small Main-belt Asteroid Spectroscopic Survey), el cual es la base de la taxonomía de Bus. Bus et al. 2002 [36]

próximos a la familia pero que no forman parte de ella. Carruba et al. (2005 [41]) muestran que algunos de dichos asteroides pueden haber migrado de la familia a sus configuraciones actuales mediante diferentes mecanismos dinámicos como las resonancias (Nesvorný et al., 2002 [42]) y el efecto Yarkovsky (Bottke et al., 2003 [43]). A estos objetos se los conoce con el nombre de "fugitivos" de la familia de Vesta. Aún así, estos mecanismos no son suficientes para explicar la presencia de todos los asteroides tipo V en las proximidades de la familia.

Otro problema es el vinculado a los objetos basálticos encontrados fuera del cinturón interno como es el caso extremo de (1459) Magnya. Este cuerpo de 15 km de diámetro se encuentra ubicado en el cinturón externo a 3.14 UA del Sol (Lazzaro et al., 2000 [44]), con lo cual está demasiado lejos como para ser un fugitivo de la familia de Vesta. El origen de Magnya constituye un enigma, ya que no se conoce ningún asteroide tipo V en las cercanías. Además, deberían existir también otros objetos basálticos como Magnya o menores, sin embargo, ésto no es lo que se observa.

La presencia de asteroides tipo V en el cinturón intermedio como lo son (21238) 1995WV7 (Binzel et al., 2006 [45] y Hammergren et al., 2006 [46]), (40521) 1999RL95 y (66905) 1999VC160

(Roig et al. 2008 [47]), el cual si bien no está confirmado espectroscópicamente, es un fuerte candidato fotométrico, plantean el interrogante sobre su posible origen. Sin la presencia de un asteroide basáltico de grandes dimensiones en las proximidades, existe la posibilidad que sean fugitivos de la familia de Vesta. Sin embargo, para alcanzar sus actuales configuraciones, estos asteroides deben cruzar la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter, la cual es altamente caótica. El problema de cruces y capturas de asteroides en resonancias ha sido un tema estudiado por muchos autores. Yoder (1979 [48]) deduce la probabilidad de captura en resonancia para el caso de un péndulo simple. Henrard (1982 [49]) utiliza el formalismo Hamiltoniano para un parámetro que varía adiabáticamente. Borderies y Goldreich (1984 [50]) deducen la probabilidad de captura para resonancias de primer y segundo orden. Malhotra (1990 [51]) estudia el problema agregando la inclinación de los asteroides, y Gomes (1995 [52]) la aproximación no adiabática para una partícula sujeta al efecto Poynting-Robertson. Sin bien existen algunos trabajos de cruces y capturas para la resonancia 3:1, ninguno trata el caso no adiabático para dicha resonancia.

1.3. Objetivos del trabajo

A partir de lo expuesto, y teniendo en cuenta la importancia que significa el poder entender el origen de los asteroides basálticos en el cinturón intermedio, uno de los objetivos de este trabajo es comprender la dinámica detrás de los saltos y capturas a través de la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter, producto de una migración debida al efecto Yarkovsky, así como la probabilidad que tienen estos asteroides de cruzar del cinturón interno al intermedio, mediante simulaciones numéricas. Para ello, primero es necesario entender la dinámica de dicha resonancia.

En el capítulo 2 se presentan distintos desarrollos de la función perturbadora del problema de tres cuerpos restringido así como su estructura general dadas por las reglas de D'Alembert y el formalismo Hamiltoniano necesario para poder plantear correctamente el problema. En el capítulo 3 se describe una introducción a la teoría de perturbaciones, necesaria para la construcción de los elementos propios y los modelos analíticos y mapas simplécticos. La estructura general del problema de tres cuerpos restringido está dada en el capítulo 4. En el capítulo 5 explicamos el efecto Yarkovsky y mostramos como introducirlo en las integraciones numéricas de N-cuerpos. Estas simulaciones muestran que en el problema restringido de tres cuerpos, los asteroides tiene una alta probabilidad de cruzar la resonancia. Sin embargo simulaciones numéricas realizadas por Roig (2004 [53]), donde se integra al Sistema Solar completo sin Mercurio, muestran que la probabilidad es muy baja. Para ésto, en el capítulo 6, se construye un mapa simpléctico donde es posible añadir por separado distintos efectos gravitatorios, como la perturbación secular de los planetas gigantes sobre Júpiter, por lo que el segundo objetivo de este trabajo será comprender que efectos producen un aumento significativo en la probabilidad de captura, analizando modelos con distintos grados de complejidad. En el capítulo 7 se discuten dichas probabilidades de captura a la vez que se presenta un estudio estadístico y su comparación con la distribución real de asteroides. Los resultados y las perspectivas futuras se presentan en el capítulo 8.

Capítulo 2

Dinámica Asteroidal Resonante

2.1. Ecuaciones de Movimiento

El problema de tres cuerpos consta de tres masas puntuales m_0 , m_1 y m_2 . Respecto de un sistema de referencia inercial arbitrario con origen en O, la posición del i-esimo cuerpo está dado por el vector \vec{R}_i (Figura 2.1). Si usamos las leyes de Newton y la ley de gravitación universal, obtenemos las ecuaciones de movimiento para las tres masas respecto de dicho sistema inercial

$$m_{0}\ddot{\vec{R}}_{0} = -Gm_{0}m_{1}\frac{\vec{R}_{0} - \vec{R}_{1}}{\Delta_{01}^{3}} - Gm_{0}m_{2}\frac{\vec{R}_{0} - \vec{R}_{2}}{\Delta_{02}^{3}}$$

$$m_{1}\ddot{\vec{R}}_{1} = -Gm_{1}m_{0}\frac{\vec{R}_{1} - \vec{R}_{0}}{\Delta_{10}^{3}} - Gm_{1}m_{2}\frac{\vec{R}_{1} - \vec{R}_{2}}{\Delta_{12}^{3}}$$

$$m_{2}\ddot{\vec{R}}_{2} = -Gm_{2}m_{0}\frac{\vec{R}_{2} - \vec{R}_{0}}{\Delta_{20}^{3}} - Gm_{2}m_{1}\frac{\vec{R}_{2} - \vec{R}_{1}}{\Delta_{21}^{3}}, \qquad (2.1)$$

donde $\Delta_{ij} = |\vec{R}_i - \vec{R}_j|$ es la distancia del cuerpo m_i al cuerpo m_j por lo que $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$. Además $G = 4\pi^2 \frac{UA^3}{a\tilde{n}o^2m_0}$ es la constante universal de gravitación.

Si pasamos dividiendo las masas obtenemos

$$\ddot{\vec{R}}_{0} = -Gm_{1}\frac{\vec{R}_{0} - \vec{R}_{1}}{\Delta_{01}^{3}} - Gm_{2}\frac{\vec{R}_{0} - \vec{R}_{2}}{\Delta_{02}^{3}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{1} = -Gm_{0}\frac{\vec{R}_{1} - \vec{R}_{0}}{\Delta_{10}^{3}} - Gm_{2}\frac{\vec{R}_{1} - \vec{R}_{2}}{\Delta_{12}^{3}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{2} = -Gm_{0}\frac{\vec{R}_{2} - \vec{R}_{0}}{\Delta_{20}^{3}} - Gm_{1}\frac{\vec{R}_{2} - \vec{R}_{1}}{\Delta_{21}^{3}}.$$
(2.2)

Definiendo la posición del cuerpo m_i respecto del de m_0 como $\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{R}_0$ obtenemos las ecuaciones

$$\ddot{\vec{R}}_{0} = Gm_{1}\frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}} + Gm_{2}\frac{\vec{r}_{2}}{r_{2}^{3}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{1} = -Gm_{0}\frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}} + Gm_{2}\frac{\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}}{|\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}|^{3}}$$

$$\ddot{\vec{R}}_{2} = -Gm_{0}\frac{\vec{r}_{2}}{r_{2}^{3}} - Gm_{1}\frac{\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}}{|\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}|^{3}}.$$
(2.3)

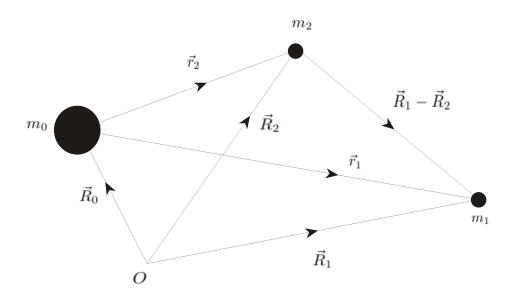


Figura 2.1: La posición de m_0 , m_1 y m_2 respecto de O.

Ya que $\ddot{\vec{r}}_{i} = \ddot{\vec{R}}_{i} - \ddot{\vec{R}}_{0}$ $\ddot{\vec{r}}_{1} = -G(m_{0} + m_{1})\frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}} + Gm_{2}\left[\frac{\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}}{|\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}|^{3}} - \frac{\vec{r}_{2}}{r_{2}^{3}}\right]$ $\ddot{\vec{r}}_{2} = -G(m_{0} + m_{2})\frac{\vec{r}_{2}}{r_{2}^{3}} - Gm_{1}\left[\frac{\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}}{|\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}|^{3}} + \frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}}\right]. \tag{2.4}$

Tomando a m_2 como una partícula de prueba, esto es $m_2 = 0$, obtenemos las ecuaciones

$$\ddot{\vec{r}}_{1} = -G(m_{0} + m_{1}) \frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}}
\ddot{\vec{r}}_{2} = -Gm_{0} \frac{\vec{r}_{2}}{r_{2}^{3}} - Gm_{1} \left[\frac{\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}}{|\vec{r}_{2} - \vec{r}_{1}|^{3}} + \frac{\vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}} \right].$$
(2.5)

La ecuación para r_1 queda desacoplada del sistema y su solución es la del problema de dos cuerpos, por lo que respecto de m_0 , m_1 se moverá sobre una cónica, la cual en este trabajo asumiremos como una elipse fija, con elementos orbitales a_1 , e_1 , I_1 , ϖ_1 y Ω_1 (semieje mayor, excentricidad, inclinación, longitud de pericentro y longitud del nodo ascendente respectivamente) constantes y $\lambda_1 = n_1 t + \lambda_{10}$ (longitud media) lineal con el tiempo, donde $n_1 = \sqrt{G(m_0 + m_1)/a_1^3}$ es el movimiento medio y λ_{10} la longitud verdadera en el instante t = 0. Cuando $m_2 = 0$, el problema se llama problema de tres cuerpos restringido.

Esto significa que sólo queda por resolver la ecuación diferencial para r_2 . Para ahorrar notación vamos a obviar todos los subíndices 2 para dicha partícula de prueba, por lo que tenemos

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} - \mu_1 \left[\frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} + \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right], \tag{2.6}$$

con $\mu = Gm_0$ y $\mu_1 = Gm_1$. Para el caso en el que tenemos al Sol (m_0) y a Júpiter (m_1) se tiene que $\mu >> \mu_1$.

Si $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ es el gradiente respecto de las coordenadas de r, entonces podemos escribir la Ecuación (2.6) como

$$\ddot{\vec{r}} + \nabla U_0 = \nabla R,\tag{2.7}$$

donde el escalar $U_0 = -\mu/r$ es el potencial central, y

$$R = \mu_1 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \right]. \tag{2.8}$$

es la función perturbadora. Al primer término de R se le llama parte directa mientras que al segundo se le llama parte indirecta. Esto es porque el primero proviene de la interacción directa entre los cuerpos, mientras que el segundo término es consecuencia de estar parado en un sistema no inercial y refleja la influencia de m_1 sobre el origen del sistema (m_0) .

La parte izquierda de la Ecuación (2.7) representa la parte homogénea de de ecuación diferencial, mientras que la derecha es la parte inhomogénea. En el caso en el que R=0, la solución es una cónica (problema de dos cuerpos). Si $R \neq 0$ obtenemos una cónica distorsionada siempre que la perturbación no sea demasiado grande.

2.2. Desarrollo de la Función Perturbadora

La función perturbadora es una función intrínsecamente complicada. No posee una forma cerrada cuando la expresamos en elementos orbitales, por lo que tenemos que utilizar desarrollos en series. Estas series tienen la desventaja de no ser convergentes para todos los puntos del espacio de fases y son bastantes complicadas de manejar. El principal problema reside en que el potencial gravitatorio diverge cuando la distancia entre el perturbador y la partícula tiende a cero, por lo que no existen desarrollos convergentes cuando las órbitas se intersectan. Lo que vamos a mostrar en ésta sección son algunos expansiones clásicas siguiendo de referencia a Murray & Dermott (1999b [54]).

2.2.1. Expansión en Polinomios de Legendre

Lo primero que haremos será dividir a la función perturbadora R en dos partes, considerando un perturbador externo

$$R = \frac{\mu_1}{a_1} R_D + \frac{\mu_1}{a_1} \alpha R_I, \tag{2.9}$$

donde $\alpha = a/a_1 < 1$, R_D es la parte directa y R_I es la parte indirecta definidas por

$$R_{D} = \frac{a_{1}}{|\vec{r}_{1} - \vec{r}|}$$

$$R_{I} = -\frac{a_{1}}{\alpha} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_{1}}{r_{1}^{3}}.$$
(2.10)

Estas pueden ser expresadas en función de los polinomios de Legendre P_l

$$R_{D} = \left(\frac{a_{1}}{r_{1}}\right) \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_{1}}\right)^{l} P_{l}\left(\cos\psi\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^{l} \left(\frac{r}{a}\right)^{l} \left(\frac{a_{1}}{r_{1}}\right)^{l+1} P_{l}\left(\cos\psi\right)$$

$$R_{I} = \frac{a_{1}}{\alpha} \frac{r r_{1}}{r_{1}^{3}} \cos\psi = \left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{a_{1}}{r_{1}}\right)^{2} P_{1}\left(\cos\psi\right), \tag{2.11}$$

usando que $\vec{r} \cdot \vec{r}_1 = rr_1 \cos \psi$, donde ψ es el ángulo entre los vectores \vec{r} y \vec{r}_1 , como lo muestra la Figura (2.2). Con ésto, la función perturbadora nos queda

$$R = \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^l \left(\frac{r}{a}\right)^l \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^{l+1} P_l(\cos \psi), \qquad (2.12)$$

ya que cancelamos el término l=1 de R_D con R_I , y desechamos el correspondiente a l=0 por ser constante.

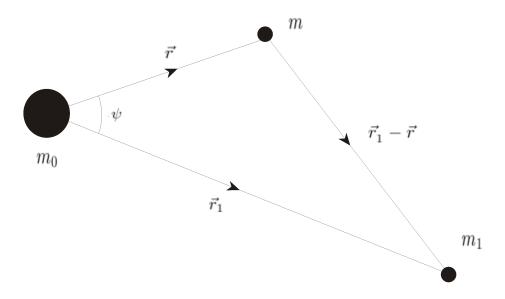


Figura 2.2: La posición r y r_1 de las masas m y m_1 respecto de la masa central m_0 . El ángulo entre estas direcciones es ψ .

Ahora nuestro problema es encontrar la relación entre cada coeficiente y los elementos orbitales. De las expansiones elípticas, las cuales presentamos en el apéndice A (Ecuaciones (A.16) y (A.28)) encontramos las primeras

$$\frac{a_1}{r_1} = g(e_1, M_1 = \lambda_1 - \varpi_1) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_k(ke_1)\cos(kM_1)$$

$$\frac{r}{a} = f(e, M = \lambda - \varpi) = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e}{k^2} J'_k(ke)\cos(kM), \tag{2.13}$$

donde $J_k(ke)$ y $J'_k(ke)$ son la función de Bessel de primera especie y su derivada respecto de e, y M es la anomalía media. Las funciones de Bessel y alguna de sus propiedades se encuentran en el apéndice (A.5).

Por otra parte tenemos que

$$P_l(\cos\psi) = \sum_{k=0}^{l} A_k \cos^k \psi, \qquad (2.14)$$

y a $\cos \psi$ lo podemos escribir como

$$\cos \psi = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1},\tag{2.15}$$

donde x, y, z, x_1, y_1 y z_1 son las coordenadas cartesianas de la masa m y m_1 respecto de m_0 . Estas se pueden poner en término de los elementos orbitales

$$\frac{x}{r} = \cos \Omega \cos(\omega + f) - \sin \Omega \sin(\omega + f) \cos I$$

$$\frac{y}{r} = \sin \Omega \cos(\omega + f) + \cos \Omega \sin(\omega + f) \cos I$$

$$\frac{z}{r} = \sin(\omega + f) \sin I,$$
(2.16)

donde ω es el argumento de pericentro. En general se suele trabajar con la longitud de pericentro ϖ , la cual se define como

$$\varpi = \begin{cases} \omega + \Omega, & I < \frac{\pi}{2} \\ \Omega - \omega, & I \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$
 (2.17)

donde f la anomalía verdadera. Para el caso en que $I < \pi/2$, decimos que la órbita es di-recta, mientras que si $I \ge \pi/2$, decimos que es una órbita retrógrada. En este capítulo todos los cálculos se harán para órbitas directas. Para las coordenadas del perturbador tenemos las mismas ecuaciones, con subíndices 1.

Usando la fórmula de adición para el seno y el coseno

$$\cos(\omega + f) = \cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f$$

$$\sin(\omega + f) = \cos \omega \sin f + \sin \omega \cos f,$$
 (2.18)

pues conocemos $\cos f$ y $\sin f$ de las expansiones elípticas

$$\cos f = -e + \frac{(1 - e^2)}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos(kM)$$

$$\sin f = 2\sqrt{1 - e^2} \sum_{k=1}^{\infty} J'_k(ke) \sin(kM). \tag{2.19}$$

Por último definimos $s=\sin\frac{I}{2}$ y ponemos al $\cos I$ y al $\sin I$ en función de s

$$\cos I = 1 - 2\sin^2 \frac{I}{2} = 1 - 2s^2$$

$$\sin I = 2\sin \frac{I}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{I}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^{2k+1}.$$
(2.20)

Con todo ésto ya estamos en condiciones de encontrar la función perturbadora del orden deseado. Como pequeño ejemplo mostraremos R a primer orden en excentricidad para el problema planar (I=0)

$$\psi = (f_1 + \varpi_1) - (f + \varpi), \tag{2.21}$$

por lo tanto

$$\cos \psi = (\cos f_1 \cos \varpi_1 - \sin f_1 \sin \varpi_1) (\cos f \cos \varpi - \sin f \sin \varpi) + + (\sin f_1 \cos \varpi_1 + \cos f_1 \sin \varpi_1) (\sin f \cos \varpi + \cos f \sin \varpi).$$
 (2.22)

Ya que

$$\cos f \approx \cos M + e \left[-1 + \frac{\cos 2M}{2} \right]$$

$$\sin f \approx \sin M + e \sin 2M, \tag{2.23}$$

y usando que $M = \lambda - \omega$, después de algunas cuentas obtenemos

$$\cos \psi \approx \cos(\lambda - \lambda_1) - e \cos(\lambda_1 - \varpi) - e_1 \cos(\lambda - \varpi_1) + e \cos(2\lambda - \lambda_1 - \varpi) + e_1 \cos(2\lambda_1 - \lambda - \varpi_1). \tag{2.24}$$

Por otro lado tenemos que

$$\frac{r}{a} \approx 1 - e \cos M$$

$$\frac{a_1}{r_1} \approx 1 + e_1 \cos M_1, \qquad (2.25)$$

por lo que

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 \approx 1 - 2e\cos(\lambda - \varpi)$$

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3 \approx 1 + 3e_1\cos(\lambda_1 - \varpi_1).$$
(2.26)

El principal problema de éste método radica en la dificultad en calcular $\cos \psi$ sumado a que $P_l(\cos \psi) \propto \cos^l \psi$.

2.2.2. Expansión de Kaula

Kaula (1961 [55] y 1962 [56]) dá una expresión explícita para esta expansión

$$R = \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \sum_{l=2}^{\infty} \alpha^{l} \sum_{m=0}^{l} (-1)^{l-m} \kappa_{m} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}$$

$$\times \sum_{p,p_{1}=0}^{l} F_{lmp}(I) F_{lmp_{1}}(I_{1}) \sum_{q,q_{1}=-\infty}^{\infty} X_{l-2p+q}^{l,l-2p}(e) X_{l-2p_{1}+q_{1}}^{-l-1,l-2p_{1}}(e_{1})$$

$$\times \cos \left[-(l-2p+q)\lambda + (l-2p_{1}+q_{1})\lambda_{1} + q\varpi - q_{1}\varpi_{1} -(m-l+2p)\Omega + (m-l+2p_{1})\Omega_{1} \right], \tag{2.27}$$

donde $\kappa_0=1$ y $\kappa_m=2$ si $m\neq 0$. Por otro lados las funciones F_{lmp} y $X_c^{a,b}$ están definidas como

$$F_{lmp}(I) = \sum_{k=k_{min}}^{k_{max}} \Theta_k^{l,m,p} c^{3l-m-2p-2k} s^{m-l+2p+2k}$$

$$X_c^{a,b}(e) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \Lambda_{\sigma+\gamma,\sigma+\delta}^{a,b} e^{2\sigma+|c-b|}, \qquad (2.28)$$

con

$$\Theta_k^{l,m,p} = \frac{i^{l-m}(l+m)!}{2^l p! (l-p)!} (-1)^k \binom{2l-2p}{k} \binom{2p}{l-m-k}, \tag{2.29}$$

 $\begin{aligned} &\operatorname{donde}\left(\begin{array}{c} a\\ b \end{array}\right) = \frac{a!}{b!(a-b)!}; \ k_{min} = \operatorname{máx}(0,l-m-2p), \ k_{max} = \operatorname{mín}(l-m,2l-2p), \ \gamma = \operatorname{máx}(0,q), \\ &\delta = \operatorname{máx}(0,-q), \ c = \cos(I/2) \ \ y \ s = \sin(I/2). \ \ \text{Las funciones} \ \ X_c^{a,b} \ \ \text{son también llamadas} \\ &\operatorname{coeficientes} \ de \ Hansen \ \ y \ \text{se encuentran en función de los } \operatorname{operadores} \ de \ Newcomb \ \Lambda_{c,d}^{a,b} \ \ \text{(Murray et al. 1999c [57])}. \ \ \text{Si relacionamos las cantidades} \ \ l, \ m, \ p, \ p_1, \ q \ y \ q_1 \ \ \text{con los enteros} \ j_i \end{aligned}$

$$j_1 = -(l - 2p + q)
 j_2 = l - 2p_1 + q_1
 j_3 = q
 j_4 = -q_1
 j_5 = -(m - l + 2p)
 j_6 = m - l + 2p_1,$$
(2.30)

es fácil mostrar que

$$F_{lmp}(I) = \sum_{\xi_1=0}^{\infty} K_{\xi_1}^{l,m,p} s^{2\xi_1+|j_5|}$$

$$X_{-j_1}^{a,-j_1+j_3}(e) = \sum_{\xi_2=0}^{\infty} H_{\xi_2}^{l,p,q} e^{2\xi_2+|j_3|},$$
(2.31)

donde $K_{\xi_1}^{l,m,p}$ y $H_{\xi_2}^{l,p,q}$ son coeficientes. Definiendo

$$S_{\xi}(\alpha, l, m, p, q, p_1, q_1) = Z_{lm}(\alpha) K_{\xi_1}^{l, m, p} H_{\xi_2}^{l, q} K_{\xi_3}^{l, m, p_1} H_{\xi_4}^{-l-1, q_1},$$
(2.32)

con $Z_{lm}(\alpha) = \alpha^l(-1)^{l-m} \kappa_m \frac{(l-m)!}{l+m!!}$ y $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, podemos escribir

$$R = \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{l} \sum_{p_{1}=0}^{l} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{q_{1}=-\infty}^{\infty}$$

$$\times \left[\sum_{\xi_{1}=0}^{\infty} \sum_{\xi_{2}=0}^{\infty} \sum_{\xi_{3}=0}^{\infty} \sum_{\xi_{4}=0}^{\infty} S_{\xi}(\alpha) e^{|j_{3}|+2\xi_{2}} e_{1}^{|j_{4}|+2\xi_{2}} s^{|j_{5}|+2\xi_{1}} s_{1}^{|j_{6}|+2\xi_{1}} \right]$$

$$\times \cos \left[-(l-2p+q)\lambda + (l-2p_{1}+q_{1})\lambda_{1} + q\varpi - q_{1}\varpi_{1} -(m-l+2p)\Omega + (m-l+2p_{1})\Omega_{1} \right],$$
(2.33)

donde lo que está dentro del corchete lo podemos relacionar con $C_{\vec{I}}$ de (2.79).

2.2.3. Expansión de Laplace

Antes de comenzar, vale la pena aclarar que si bien la mayoría de las cuentas realizadas aquí se pueden encontrar en Murray & Dermott (1999b [54]), no siempre se encuentran detallados los pasos intermedios y además contiene errores tipográficos no publicados (Murray 2007 [58]). Por otro lado, la escasez de bibliografía en español hacen de gran utilidad esta sección.

La expansión de la función perturbadora en polinomios de Legendre tiene el problema que converge lentamente cuando $\alpha \approx 1$ (o sea $a \approx a_1$). Una alternativa es utilizar el desarrollo de Laplace de $1/\Delta$, para esto usamos la división de la función perturbadora (2.9).

$$R_D = a_1 \left[r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos \psi \right]^{-1/2} = \frac{a_1}{\Delta}$$

$$R_I = -\left(\frac{r}{a}\right) \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 \cos \psi, \tag{2.34}$$

y la desarrollamos alrededor de órbitas coplanares y circulares, por lo que no tendremos problemas de convergencia para α cercanos a 1.

Para encontrar R_I usamos las Ecuaciones (2.13) y (2.14)-(2.20). Para expandir la parte directa definimos

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta_1), \tag{2.35}$$

donde $\theta = f + \varpi$ y $\theta_1 = f_1 + \varpi_1$ son las longitudes verdaderas del asteroide y del perturbador respectivamente. Con ésto construímos el desarrollo de Taylor alrededor de Ψ , lo que equivale formalmente a un desarrollo alrededor de órbitas coplanares.

$$\frac{1}{\Delta} = \left[\Delta_0^2 - 4\left(\frac{1}{2}rr_1\Psi\right)\right]^{-1/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2}rr_1\Psi\right)^i \frac{1}{\Delta_0^{2i+1}},\tag{2.36}$$

con

$$\frac{1}{\Delta_0} = \left[r^2 + r_1^2 - 2rr_1 \cos(\theta - \theta_1) \right]^{-1/2}.$$
 (2.37)

Ahora, expandiendo $1/\Delta_0^{2i+1}$ alrededor de a y a_1 , lo que equivale formalmente a un desarrollo alrededor de órbitas circulares, obtenemos

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{\rho_0^{2i+1}} + (r-a)\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + (r_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial a_1} \left(\frac{1}{\rho_0^{2i+1}}\right) + \cdots, \tag{2.38}$$

donde

$$\frac{1}{\rho_0} = \left[a^2 + a_1^2 - 2aa_1 \cos(\theta - \theta_1) \right]^{-1/2}.$$
 (2.39)

Denotando $D_{m,n}$ al operador diferencial

$$D_{m,n} = a^m a_1^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a_1^n}, \tag{2.40}$$

y a las variables

$$\varepsilon = \frac{r}{a} - 1$$

$$\varepsilon_1 = \frac{r_1}{a_1} - 1 \tag{2.41}$$

entonces podemos reescribir

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \left[1 + \varepsilon D_{1,0} + \varepsilon_1 D_{0,1} + \frac{1}{2!} \left(\varepsilon^2 D_{2,0} + \varepsilon \varepsilon_1 D_{1,1} + \varepsilon_1^2 D_{0,2} \right) + \cdots \right] \frac{1}{\rho_0^{2i+1}}.$$
 (2.42)

A ρ_0 podemos expresarlo en función de los *coeficientes de Laplace* $b_s^{(j)}(\alpha)$ (Brouwer et al. 1961 [59])

$$\frac{1}{\rho_0^{2i+1}} = a_1^{2i+1} \left[1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(\theta - \theta_1) \right]^{-i + \frac{1}{2}}$$

$$= a_1^{2i+1} \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos j(\theta - \theta_1), \qquad (2.43)$$

ésta serie en α es uniformemente convergente siempre que $\alpha < 1$. Ya que el operador $D_{m,n}$ actúa sobre los coeficientes de Laplace podemos definir la función

$$A_{i,j,m,n} = D_{m,n} \left(a_1^{-2i+1} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right) = a^m a_1^n \frac{\partial^{m+n}}{\partial a^m \partial a_1^n} \left(a_1^{-2i+1} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) \right). \tag{2.44}$$

De lo anterior obtenemos

$$\frac{1}{\Delta_0^{2i+1}} = \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \varepsilon_1^{l-k} A_{i,j,k,l-k} \right] \cos j(\theta - \theta_1), \tag{2.45}$$

por lo que el desarrollo de la parte directa queda

$$R_D = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2i)!}{(i!)^2} \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r_1}{a_1} \Psi\right)^i \frac{a^i a_1^{i+1}}{2} \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \sum_{k=0}^{l} {l \choose k} \varepsilon_1^{l-k} A_{i,j,k,l-k}\right] \cos j(\theta - \theta_1).$$
 (2.46)

2.2.4. Expansión Literal de Segundo Orden

Empezaremos por la parte indirecta R_I dada por la Ecuación (2.34). De las Ecuaciones (2.13) obtenemos

$$\frac{r}{a} \approx 1 - e \cos M + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2M)$$

$$\frac{a_1}{r_1} \approx 1 + e_1 \cos M_1 + \frac{e_1^2}{2} (1 + 5 \cos 2M_1)$$
(2.47)

y usando que $M = \lambda - \varpi$

$$-\left(\frac{r}{a}\right)\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2 \approx -1 + e\cos(\lambda - \varpi) - 2e_1\cos(\lambda_1 - \varpi_1) - \\ + ee_1\left[\cos(\lambda + \lambda_1 - \varpi - \varpi_1) + \cos(\lambda - \lambda_1 - \varpi + \varpi_1)\right] - \\ -\frac{e^2}{2}\left[1 - \cos(\lambda - \varpi)\right] - \frac{e_1^2}{2}\left[1 + 5\cos(\lambda_1 - \varpi_1)\right]. \tag{2.48}$$

Por otro lado de las Ecuaciones (2.19) tenemos que

$$\cos f \approx \cos M + e(\cos 2M - 1) + e^2 \left(\frac{9}{8}\cos 3M - \frac{9}{8}\cos M\right)$$

$$\sin f \approx \sin M + e\sin 2M + e^2 \left(\frac{9}{8}\sin 3M - \frac{7}{8}\sin M\right), \tag{2.49}$$

lo cual nos sirve para poder escribir

$$\cos(\omega + f) = \cos \omega \cos f - \sin \omega \sin f$$

$$\approx \cos(\omega + M) + e \left[\cos(\omega + 2M) - \cos(\omega)\right] +$$

$$+ e^{2} \left[\frac{9}{8}\cos(\omega + 3M) - \frac{1}{8}\cos(\omega - M) - \cos(\omega + M)\right]$$

$$\sin(\omega + f) = \sin \omega \cos f + \cos \omega \sin f$$

$$\approx \sin(\omega + M) + e \left[\sin(\omega + 2M) - \sin(\omega)\right] +$$

$$+ e^{2} \left[\frac{9}{8}\sin(\omega + 3M) - \frac{1}{8}\sin(\omega - M) - \sin(\omega + M)\right]. \tag{2.50}$$

Además para las inclinaciones, de (2.20) sabemos que

$$\cos I = 1 - 2\sin^2\frac{I}{2} = 1 - 2s^2$$

 $\sin I \approx 2s.$ (2.51)

Con todo ésto, las Ecuaciones (2.16) y considerando $\omega = \varpi - \Omega$ llegamos a que

$$\frac{x}{r} \approx \cos \lambda + e \left[\cos(2\lambda - \varpi) - \cos \varpi\right] + \\
+ e^{2} \left[\frac{9}{8}\cos(3\lambda - 2\varpi) - \frac{1}{8}\cos(-\lambda + 2\varpi) - \cos \lambda\right] + s^{2} \left[\cos(\lambda - 2\Omega) - \cos \lambda\right] \\
\frac{y}{r} \approx \sin \lambda + e \left[\sin(2\lambda - \varpi) - \sin \varpi\right] + \\
+ e^{2} \left[\frac{9}{8}\sin(3\lambda - 2\varpi) - \frac{1}{8}\sin(-\lambda + 2\varpi) - \sin \lambda\right] - s^{2} \left[\sin(\lambda - 2\Omega) + \sin \lambda\right] \\
\frac{z}{r} \approx 2s \sin(\lambda - \Omega) + 2es \sin(\varpi - \Omega), \tag{2.52}$$

y a expresiones equivalentes para el perturbador. Sí ahora las multiplicamos

$$\frac{x}{r} \frac{x_1}{r_1} \approx \cos \lambda \cos \lambda_1 + e \left[\cos \lambda_1 \cos(2\lambda - \varpi) - \cos \lambda_1 \cos \varpi\right] \\ + e_1 \left[\cos \lambda \cos(2\lambda_1 - \varpi_1) - \cos \lambda \cos \varpi_1\right] + \\ + e^2 \left[\frac{9}{8} \cos \lambda_1 \cos(3\lambda - 2\varpi) - \frac{1}{8} \cos \lambda_1 \cos(-\lambda + 2\varpi) - \cos \lambda_1 \cos \lambda\right] + \\ + e_1^2 \left[\frac{9}{8} \cos \lambda \cos(3\lambda_1 - 2\varpi_1) - \frac{1}{8} \cos \lambda \cos(-\lambda_1 + 2\varpi_1) - \cos \lambda \cos \lambda_1\right] + \\ + ee_1 \left[\cos(2\lambda - \varpi) \cos(2\lambda_1 - \varpi_1) - \cos(2\lambda - \varpi) \cos \varpi - \\ - \cos(2\lambda_1 - \varpi_1) \cos \varpi + \cos \varpi \cos \varpi_1\right] + \\ + s^2 \left[\cos \lambda_1 \cos(\lambda - 2\Omega) - \cos \lambda_1 \cos \lambda\right] + s_1^2 \left[\cos \lambda \cos(\lambda_1 - 2\Omega_1) - \cos \lambda \cos \lambda_1\right]$$

$$\frac{y}{r} \frac{y_1}{r_1} \approx \sin \lambda \sin \lambda_1 + e \left[\sin \lambda_1 \sin(2\lambda - \varpi) - \sin \lambda_1 \sin \varpi\right] + \\ + e_1 \left[\sin \lambda \sin(2\lambda_1 - \varpi_1) - \sin \lambda \sin \varpi_1\right] + \\ + e^2 \left[\frac{9}{8} \sin \lambda_1 \sin(3\lambda - 2\varpi) - \frac{1}{8} \sin \lambda_1 \sin(-\lambda_1 + 2\varpi) - \sin \lambda_1 \sin \lambda\right] + \\ + ee_1 \left[\sin(2\lambda - \varpi) \sin(2\lambda_1 - \varpi_1) - \sin(2\lambda - \varpi) \sin \varpi - \\ - \sin(2\lambda_1 - \varpi_1) \sin \varpi + \sin \varpi \sin \varpi_1\right] + \\ - s^2 \left[\sin \lambda_1 \sin(\lambda - 2\Omega) + \sin \lambda_1 \sin \lambda\right] - s_1^2 \left[\sin \lambda \sin(\lambda_1 - 2\Omega_1) + \sin \lambda \sin \lambda_1\right]$$

$$\frac{z}{r} \frac{z_1}{r_1} \approx 4ss_1 \sin(\lambda - \Omega) \sin(\lambda_1 - \Omega_1), \qquad (2.53)$$

y sumamos éstos tres términos, finalmente obtenemos

$$\cos \psi \approx \left[1 - e^2 - e_1^2 - s^2 - s_1^2\right] \cos(\lambda - \lambda_1) + \\
+ e\left[\cos(2\lambda - \lambda_1 - \varpi) - \cos(\lambda_1 - \varpi)\right] + \\
+ e_1\left[\cos(2\lambda_1 - \lambda - \varpi_1) - \cos(\lambda - \varpi_1)\right] + \\
+ e^2\left[\frac{9}{8}\cos(3\lambda - \lambda_1 - 2\varpi) - \frac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda_1 - 2\varpi)\right] + \\
+ e^2\left[\frac{9}{8}\cos(3\lambda_1 - \lambda - 2\varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\lambda + \lambda_1 - 2\varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\lambda - 2\lambda_1 - \varpi + \varpi_1) - \cos(2\lambda - \varpi - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\lambda + \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\lambda - 2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \frac{1}{8}\cos(\omega_1 - \omega_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] + \\
+ ee_1\left[\cos(2\omega_1 - \omega_1) - \cos(2\omega_1 - \varpi_1)\right] +$$

$$-\cos(2\lambda - \varpi - \varpi_1) + \cos(\varpi - \varpi_1)] +$$

$$+s^2 \cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega) + s_1^2 \cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega_1) +$$

$$+2ss_1[\cos(\lambda - \lambda_1 - \omega + \omega_1) - \cos(\lambda + \lambda_1 - \omega - \omega_1)]. \tag{2.54}$$

Haciendo el producto de (2.54) con (2.48) finalmente obtenemos la parte indirecta

$$R_{I} \approx \left[\frac{e^{2}}{2} + \frac{e_{1}^{2}}{2} + s^{2} + s_{1}^{2} - 1 \right] \cos(\lambda - \lambda_{1}) +$$

$$+ e \left[\frac{3}{2} \cos(\lambda_{1} - \varpi) - \frac{1}{2} \cos(2\lambda - \lambda_{1} - \varpi) \right] - 2e_{1} \cos(2\lambda_{1} - \lambda - \varpi_{1}) -$$

$$- e^{2} \left[\frac{3}{8} \cos(3\lambda - \lambda_{1} - 2\varpi) + \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda_{1} - 2\varpi) \right] +$$

$$+ ee_{1} \left[3\cos(2\lambda_{1} - \varpi - \varpi_{1}) - \cos(2\lambda - 2\lambda_{1} - \varpi + \varpi_{1}) \right] -$$

$$- e_{1}^{2} \left[\frac{27}{8} \cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\varpi_{1}) + \frac{1}{8} \cos(\lambda + \lambda_{1} - 2\varpi_{1}) \right] -$$

$$- s^{2} \cos(\lambda + \lambda_{1} - 2\Omega) - s_{1}^{2} \cos(\lambda + \lambda_{1} - 2\Omega_{1}) +$$

$$+ 2ss_{1} \left[\cos(\lambda + \lambda_{1} - \Omega - \Omega_{1}) - \cos(\lambda - \lambda_{1} - \Omega + \Omega_{1}) \right].$$

$$(2.55)$$

Ahora para la parte directa lo primero será calcular Ψ , para ésto veamos $\cos(\theta - \theta_1)$. Usando que $\theta = \omega + \Omega + f$

$$\cos(\theta - \theta_1) = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1
= [\cos\Omega \cos(\omega + f) - \sin\Omega \sin(\omega + f)] \times
\times [\cos\Omega_1 \cos(\omega_1 + f_1) - \sin\Omega_1 \sin(\omega_1 + f_1)] +
+ [\sin\Omega \cos(\omega + f) - \cos\Omega \sin(\omega + f)] \times
\times [\sin\Omega_1 \cos(\omega_1 + f_1) - \cos\Omega_1 \sin(\omega_1 + f_1)].$$
(2.56)

Comparando con las Ecuaciones (2.16) es trivial observar que solo difiere en los términos donde aparece s ó s_1 por lo que, de la Ecuación (2.54) obtenemos

$$\Psi = \cos \psi - \cos(\theta - \theta_1)$$

$$\approx s^2 \cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega) + s_1^2 \cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega_1) +$$

$$+2ss_1[\cos(\lambda - \lambda_1 - \Omega + \Omega_1) - \cos(\lambda + \lambda_1 - \Omega - \Omega_1)].$$
(2.57)

Dado que el orden más bajo de Ψ es 2 entonces

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} J'_s(se) \cos(sM) \approx 1$$

$$\frac{r_1}{a_1} = 1 + \frac{e_1^2}{2} - 2e \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^2} J'_s(se_1) \cos(sM_1) \approx 1,$$
(2.58)

por lo que tenemos

$$\left(\frac{1}{2}\frac{r}{a}\frac{r_1}{a_1}\Psi\right) \approx \frac{s^2}{2}\cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega) + \frac{s_1^2}{2}\cos(\lambda + \lambda_1 - 2\Omega_1) + ss_1\left[\cos(\lambda - \lambda_1 - \Omega + \Omega_1) - \cos(\lambda + \lambda_1 - \Omega - \Omega_1)\right].$$
(2.59)

De la Ecuación (2.46) se observa que i sólo puede tomar los valores 0 y 1 (expansión de segundo orden), por lo que podemos despreciar el resto de los términos tal que i > 1.

De todas las cuentas para encontrar el desarrollo de la función perturbadora, sin dudas el calculo más laborioso es el de cos $j(\theta - \theta_1)$. Para hacerlo partimos de la expansión en series de la anomalía verdadera

$$f \approx (\lambda - \varpi) + 2e\sin(\lambda - \varpi) + \frac{5}{4}e^2\sin(2\lambda - 2\varpi) = \lambda - \varpi + \phi, \tag{2.60}$$

por lo que

$$j\theta = j(\Omega + \omega + f) = j(\Omega + \varpi - \Omega + \lambda - \varpi + \phi) = j\lambda + j\phi. \tag{2.61}$$

Ya que

$$\cos(j\theta) = \cos(j\lambda)\cos(j\phi) - \cos(j\lambda)\cos(j\phi)$$

$$\sin(j\theta) = \sin(j\lambda)\cos(j\phi) + \cos(j\lambda)\sin(j\phi),$$
(2.62)

podemos expandir a $\cos(j\phi)$ y $\sin(j\phi)$ en series de Taylor

$$\cos(j\phi) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(j\phi)^{2l-2}}{(2l-2)!}$$

$$\approx 1 - \frac{(j\phi)^2}{2} = 1 - j^2 e^2 + j^2 e^2 \cos(2\lambda - 2\varpi)$$

$$\sin(j\phi) = \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^{l-1} \frac{(j\phi)^{2l-1}}{(2l-1)!}$$

$$\approx (j\phi) = 2je \sin(\lambda - \varpi) + \frac{5}{4}j^2 e^2 \sin(2\lambda - 2\varpi). \tag{2.63}$$

Con ésto llegamos a que

$$\cos(j\theta) = [1 - j^{2}e^{2}]\cos(j\lambda) + \\
+ \left[\frac{j^{2}e^{2}}{2} + \frac{5je}{8}\right]\cos((2+j)\lambda - 2\varpi) + \left[\frac{j^{2}e^{2}}{2} - \frac{5je}{8}\right]\cos((2-j)\lambda - 2\varpi) + \\
+ je\left[\cos((1+j)\lambda - \varpi) - \cos((1-j)\lambda - \varpi)\right] \\
\sin(j\theta) = [1 - j^{2}e^{2}]\sin(j\lambda) + \\
+ \left[\frac{j^{2}e^{2}}{2} + \frac{5je}{8}\right]\sin((2+j)\lambda - 2\varpi) - \left[\frac{j^{2}e^{2}}{2} - \frac{5je}{8}\right]\sin((2-j)\lambda - 2\varpi) + \\
+ je\left[\sin((1+j)\lambda - \varpi) + \sin((1-j)\lambda - \varpi)\right], \tag{2.64}$$

e idénticas expresiones para $\cos(j\theta_1)$ y a $\sin(j\theta_1)$.

Con éstas ecuaciones y usando que $\cos j(\theta - \theta_1) = \cos(j\theta)\cos(j\theta_1) + \sin(j\theta)\sin(j\theta_1)$ encontramos que

$$\cos j(\theta - \theta_{1}) \approx [1 - j^{2}e^{2} - j^{2}e_{1}^{2}]\cos j(\lambda - \lambda_{1}) + \\
+ e \left[\cos ((1 + j)\lambda - j\lambda_{1} - \varpi) - \cos ((1 - j)\lambda + j\lambda_{1} - \varpi)\right] + \\
+ e_{1} \left[\cos (j\lambda - (1 + j)\lambda_{1} - \varpi_{1}) - \cos (j\lambda + (1 - j)\lambda_{1} - \varpi_{1})\right] + \\
+ \left(\frac{j^{2}}{2} + \frac{5j}{8}\right)e^{2}\cos ((2 + j)\lambda - j\lambda_{1} - 2\varpi) + \\
+ \left(\frac{j^{2}}{2} - \frac{5j}{8}\right)e^{2}\cos ((2 - j)\lambda + j\lambda_{1} - 2\varpi) + \\
+ \left(\frac{j^{2}}{2} + \frac{5j}{8}\right)e_{1}^{2}\cos (j\lambda - (2 + j)\lambda_{1} + 2\varpi_{1}) +$$

$$+ \left(\frac{j^{2}}{2} - \frac{5j}{8}\right) e_{1}^{2} \cos(j\lambda + (2 - j)\lambda_{1} - 2\varpi_{1}) +$$

$$+ j^{2} e e_{1} \left[\cos((1 + j)\lambda - (1 + j)\lambda_{1} - \varpi + \varpi_{1}) + \right.$$

$$+ \cos((1 - j)\lambda - (1 - j)\lambda_{1} - \varpi + \varpi_{1}) -$$

$$- \cos((1 + j)\lambda - (1 - j)\lambda_{1} - \varpi - \varpi_{1}) -$$

$$- \cos((1 - j)\lambda - (1 + j)\lambda_{1} - \varpi - \varpi_{1}) \right].$$
(2.65)

Por otro lado tenemos que

$$\varepsilon = -e\cos(\lambda - \varpi) + \frac{e^2}{2} \left(1 - \cos(2\lambda - 2\varpi) \right)$$

$$\varepsilon_1 = -e_1 \cos(\lambda_1 - \varpi_1) + \frac{e_1^2}{2} \left(1 - \cos(2\lambda_1 - 2\varpi_1) \right)$$

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{2} \left(1 + \cos(2\lambda - 2\varpi) \right)$$

$$\varepsilon_1^2 = \frac{e_1^2}{2} \left(1 + \cos(2\lambda_1 - 2\varpi_1) \right)$$

$$\varepsilon\varepsilon_1 = \frac{ee_1}{2} \left[\cos(\lambda + \lambda_1 - \varpi - \varpi_1) + \cos(\lambda - \lambda_1 - varpi + \varpi_1) \right], \qquad (2.66)$$

y definiendo los siguientes coeficientes que dependen de α , $b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$, $Db_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$ y $D^2b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$, donde D es el operador derivada respecto de α $\left(D = \frac{d}{d\alpha}\right)$

$$C_{1}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,0,0} = b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{2}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,1,0} = \alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{3}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,0,1} = -\alpha D b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{4}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,2,0} = \alpha^{2}D^{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{5}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,1,1} = -\alpha^{2}D^{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - 2\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{6}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,0,2} = \alpha^{2}D^{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 4\alpha D b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + 2b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$C_{7}(j,\alpha) = a_{1}A_{0,j,0,0} = \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$(2.67)$$

encontramos, mediante la Ecuación (2.46), el término j-ésimo de la parte directa

$$R_D^{(j)} = \left[\frac{1}{2} \left[C_1 + C_2 \varepsilon + C_3 \varepsilon_1 + \frac{C_4}{2} \varepsilon^2 + C_5 \varepsilon \varepsilon_1 + \frac{C_6}{2} \varepsilon_1^2 \right] + \left(\frac{1}{2} \frac{r}{a} \frac{r_1}{a_1} \Psi \right) C_7 \right] \cos j(\theta - \theta_1). \tag{2.68}$$

Utilizando las expresiones (2.59), (2.65) y (2.66) en (2.68) obtenemos

$$R_D^{(j)} = \frac{C_1}{2} \cos j(\lambda - \lambda_1) + e \left\{ \left[\frac{jC_1}{2} - \frac{C_2}{4} \right] \cos \left((1+j)\lambda - j\lambda_1 - \varpi \right) - \right\}$$

$$-\left[\frac{jC_1}{2} + \frac{C_2}{4}\right] \cos\left((1-j)\lambda + j\lambda_1 - \varpi\right) \right\} + \\ + e_1 \left\{ \left[\frac{jC_1}{2} - \frac{C_3}{4}\right] \cos\left(j\lambda - (1+j)\lambda_1 + \varpi_1\right) - \\ - \left[\frac{jC_1}{2} + \frac{C_3}{4}\right] \cos\left(j\lambda + (1-j)\lambda_1 - \varpi_1\right) \right\} + \\ + e^2 \left\{ \left[\frac{C_2}{4} + \frac{C_4}{8} - \frac{j^2C_1}{2}\right] \cos\left(j\lambda - \lambda_1\right) + \\ + \frac{1}{16} \left[4j^2C_1 + j(5C_1 - 4C_2) + C_4 - 2C_2\right] \cos\left((2+j)\lambda - j\lambda_1 - 2\varpi\right) + \\ + \frac{1}{16} \left[4j^2C_1 - j(5C_1 - 4C_2) + C_4 - 2C_2\right] \cos\left((2-j)\lambda + j\lambda_1 - 2\varpi\right) \right\} + \\ + e_1^2 \left\{ \left[\frac{C_3}{4} + \frac{C_6}{8} - \frac{j^2C_1}{2}\right] \cos\left(j\lambda - \lambda_1\right) + \\ + \frac{1}{16} \left[4j^2C_1 - j(5C_1 - 4C_3) + C_6 - 2C_3\right] \cos\left(j\lambda - (2+j)\lambda_1 + 2\varpi_1\right) + \\ + \frac{1}{16} \left[4j^2C_1 - j(5C_1 - 4C_3) + C_6 - 2C_3\right] \cos\left(j\lambda - (2+j)\lambda_1 - 2\varpi_1\right) \right\} + \\ + ee_1 \left\{ \frac{1}{8} \left[4j^2C_1 - 2j(C_2 + C_3) + C_5\right] \cos\left((1+j)\lambda - (1+j)\lambda_1 - \varpi + \varpi_1\right) + \\ + \frac{1}{8} \left[4j^2C_1 + 2j(C_2 + C_3) + C_5\right] \cos\left((1-j)\lambda - (1-j)\lambda_1 - \varpi + \varpi_1\right) + \\ + \frac{1}{8} \left[-4j^2C_1 + 2j(C_2 - C_3) + C_5\right] \cos\left((1+j)\lambda + (1-j)\lambda_1 - \varpi - \varpi_1\right) + \\ + \frac{1}{8} \left[-4j^2C_1 - 2j(C_2 - C_3) + C_5\right] \cos\left((1-j)\lambda + (1+j)\lambda_1 - \varpi - \varpi_1\right) \right\} + \\ + s^2 \frac{C_7}{4} \left\{ -\cos\left((1+j)\lambda - (1+j)\lambda_1\right) - \cos\left((1-j)\lambda - (1-j)\lambda_1\right) + \\ + \cos\left((1+j)\lambda + (1-j)\lambda_1 - 2\Omega\right) + \cos\left((1-j)\lambda - (1-j)\lambda_1\right) + \\ + \cos\left((1+j)\lambda + (1-j)\lambda_1 - 2\Omega_1\right) + \cos\left((1-j)\lambda - (1-j)\lambda_1\right) + \\ + \cos\left((1+j)\lambda - (1+j)\lambda_1 - \Omega - \Omega_1\right) - \\ - \cos\left((1+j)\lambda - (1-j)\lambda_1 - \Omega - \Omega_1\right) - \\ - \cos\left((1+j)\lambda + (1-j)\lambda_1 - \Omega - \Omega_1\right) \right\}.$$
 (2.69)

Sin embargo aún es posible simplificar bastante ésta expresión, ya que j toma valores entre $-\infty$ y ∞ se puede realizar cualquier trasformación del tipo $j \to \pm j + k$, donde k es un entero. Por ejemplo

$$\frac{s^2}{4} \left[\alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos((1+j)(\lambda-\lambda_1)) + \alpha b_{\frac{3}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos((1-j)(\lambda-\lambda_1)) \right],$$

si al primer término le aplicamos la transformación $j\to -1+j$, al segundo $j\to 1+j$ y utilizamos la identidad $b_{\frac{3}{2}}^{(j)}(\alpha)=b_{\frac{3}{2}}^{(-j)}(\alpha)$ obtenemos

$$\frac{s^2}{4}\alpha \left[b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) + b_{\frac{3}{2}}^{(1+j)}(\alpha) \right] \cos j(\lambda - \lambda_1).$$

Haciendo ésto podemos agrupar términos, por lo que obtenemos

$$\begin{split} R_D &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2} b_{\frac{j}{2}}^{(j)}(\alpha) + \left(\frac{e^2 + e_1^2}{8} \right) \left[\alpha^2 D^2 + 2\alpha D - 4j^2 \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j)}(\alpha) + \left(\frac{s^2 + s_1^2}{4} \right) \left[-\alpha \right] \left(b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) + b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}(\alpha) \right) \right] \cos j(\lambda - \lambda_1) + \\ &+ \frac{ee_1}{4} \left[4j^2 + 6j + 2 - \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j+1)}(\alpha) \cos(-j(\lambda - \lambda_1) - \varpi + \varpi_1) + \\ &+ ss_1 \left[\alpha \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j+1)}(\alpha) \cos(-j(\lambda - \lambda_1) - \Omega + \Omega_1) + \\ &+ \frac{e}{2} \left[-2j - \alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos((1 - j)\lambda + j\lambda_1 - \varpi) + \\ &+ \frac{e_1}{2} \left[2j - 1 + \alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j-1)}(\alpha) \cos((1 - j)\lambda + j\lambda_1 - \varpi_1) + \\ &+ \frac{e^2}{8} \left[4j^2 - 5j + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - \varpi - \varpi_1) + \\ &+ \frac{ee_1}{4} \left[-4j^2 + 6j - 2 - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2 + 2\alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j-1)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - \varpi - \varpi_1) + \\ &+ \frac{ee_1^2}{8} \left[4j^2 - 7j + 2 + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{j}{2}}^{(j-2)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - 2\varpi_1) + \\ &+ \frac{s^2}{2} \left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - 2\Omega) + \\ &+ ss_1 \left[-\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - \Omega - \Omega_1) + \\ &+ \frac{s^2}{2} \left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) \cos((2 - j)\lambda + j\lambda_1 - 2\Omega_1) \right\}. \end{split}$$
 (2.70)

Definiendo los coeficientes

$$A_{0j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq 1 \\ \frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - \alpha, & j = 1 \end{cases}$$

$$A_{1j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left[\alpha^{2}D^{2} + 2\alpha D - 4j^{2}\right]b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq 1 \\ \frac{1}{8} \left[\alpha^{2}D^{2} + 2\alpha D - 4j^{2}\right]b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + \frac{\alpha}{2}, & j = 1 \end{cases}$$

$$A_{2j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[-\alpha\right] \left(b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) + b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}(\alpha)\right), & j \neq 1 \\ \frac{1}{4} \left[-\alpha\right] \left(b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha) + b_{\frac{3}{2}}^{(j+1)}(\alpha)\right) + \alpha, & j = 1 \end{cases}$$

$$A_{3j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[4j^2 + 6j + 2 - \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}(\alpha), & j \neq 2 \\ \frac{1}{4} \left[4j^2 + 6j + 2 - \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}(\alpha) - \alpha, & j = 2 \end{cases}$$

$$A_{4j}(\alpha) = \begin{cases} \left[\alpha \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}(\alpha), & j \neq 1 \\ \left[\alpha \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j+1)}(\alpha) - 2\alpha, & j = 1 \end{cases}$$

$$B_{1j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[-2j - \alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq -1, 1 \\ \frac{1}{2} \left[-2j - \alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - \frac{\alpha}{2}, & j = -1 \\ \frac{1}{2} \left[-2j - \alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) + \frac{3\alpha}{2}, & j = 1 \end{cases}$$

$$B_{2j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[2j - 1 + \alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 2 \\ \frac{1}{2} \left[2j - 1 + \alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}(\alpha) - 2\alpha, & j = 2 \end{cases}$$

$$B_{3j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left[4j^2 - 5j + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq -1, 1 \\ \frac{1}{8} \left[4j^2 - 5j + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - \frac{\alpha}{8}, & j = -1 \\ \frac{1}{8} \left[4j^2 - 5j + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha) - \frac{\alpha}{8}, & j = 1 \end{cases}$$

$$B_{4j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4} \left[-4j^2 + 6j - 2 - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2 + 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 2 \\ \frac{1}{4} \left[-4j^2 + 6j - 2 - 4j\alpha D - \alpha^2 D^2 + 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j-1)}(\alpha) + 3\alpha, & j = 2 \end{cases}$$

$$B_{5j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{8} \left[4j^2 - 7j + 2 + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq 1, 3 \\ \frac{1}{8} \left[4j^2 - 7j + 2 + 4j\alpha D + \alpha^2 D^2 - 2\alpha D \right] b_{\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha), & j \neq 1, 3 \end{cases}$$

$$B_{6j}(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \\ \frac{1}{2} \left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^{(j-1)}(\alpha), & \alpha, j \neq 1 \end{cases}$$

$$\left[\alpha \right] b_{\frac{3}{2}}^$$

podemos escribir la función perturbadora finalmente como

$$+B_{6j}s^{2}\cos((2-j)\lambda+j\lambda_{1}-2\Omega)+B_{7j}ss_{1}\cos((2-j)\lambda+j\lambda_{1}-\Omega-\Omega_{1})+$$

$$+B_{8j}s_{1}^{2}\cos((2-j)\lambda+j\lambda_{1}-2\Omega_{1})$$
(2.72)

2.2.5. Otras expansiones

Hasta aquí solo hemos visto dos desarrollos de la función perturbadora. El primero consiste en desarrollar la función $1/\Delta$ en términos de los polinomios $P_l(x)$ de Legendre, los cuales son polinomios de orden l en $x = \cos \psi$. Esto puede llegar a ser una tarea muy complicada, incluso para órdenes relativamente bajos, lo cual es algo altamente no deseable, pues para valores de α cercanos a 1 éste desarrollo converge lentamente.

Para solucionar este inconveniente desarrollamos la función $1/\Delta$ en series de Taylor. Primero en términos de Ψ y luego alrededor de $1/\Delta_0$. Esto equivale formalmente a desarrollar alrededor de órbitas coplanares primero y alrededor de órbitas circulares después, con lo cual solucionamos el problema de convergencia.

Si bien la expansión de Laplace soluciona el problema en la convergencia cuando α era próximo a la unidad, esta tiene un pobre convergencia para altas excentricidades e inclinaciones (Ferraz-Melo, 1994 [60]). Un ejemplo típico donde no podemos usar este desarrollo son las resonancias de primer orden en el cinturón de asteroides (Murray, 1986 [61]). En las resonancias 2:1 y 3:2, el radio de convergencia de la expansión de Laplace en excentricidad es de 0.2 y 0.09 respectivamente, por lo no es aplicable a asteroides pertenecientes a la familia de Griquas (2:1) ni a Hildas (3:2), ya que poseen excentricidades mayores que estos valores.

Si bien éstos desarrollos de la función perturbadora son muy utilizados, no son los únicos. Por ejemplo Ellis y Murray (1999 [62]) encuentran una variación de la expansión de Kaula, incorporando algunas características de la expansión en términos de los coeficientes de Laplace.

La expansión resultante para la parte directa es

$$R_{D} = \sum_{i=0}^{i_{max}} \frac{(2i)!}{i!} \frac{(-1)^{i}}{2^{2i+1}} \alpha^{i}$$

$$\times \sum_{s=s_{min}}^{i} \sum_{n=0}^{N_{max}} \frac{(2s-4n+1)(s-n)!}{2^{2n}n!(2s-2n+1)!} \sum_{m=0}^{s-2n} \kappa_{m} \frac{(s-2n-m)!}{(s-2n+m)!}$$

$$\times (-1)^{s-2n-m} F_{s-2n,m,p}(I) F_{s-2n,m,p_{1}}(I_{1}) \sum_{l=0}^{i-s} \frac{(-1)^{s} 2^{2s}}{(i-s-l)! l!}$$

$$\times \sum_{\ell=0}^{\ell_{max}} \frac{(-1)^{\ell}}{\ell!} \sum_{k=0}^{\ell} {\ell \choose k} (-1)^{k} \alpha^{\ell} \frac{d^{\ell}}{d\alpha \ell} b_{i+\frac{1}{2}}^{(j)}(\alpha)$$

$$\times X_{-j_{2}}^{i+k,-j_{2}-j_{4}}(e) X_{j_{1}}^{-(i+k+1),j_{1}+j_{3}}(e_{1})$$

$$\times \cos(j_{1}\lambda + j_{2}\lambda_{1} + j_{3}\omega + j_{4}\omega_{1} + j_{5}\Omega + j_{6}\Omega_{1}), \qquad (2.73)$$

donde si N_{max} es el orden máximo del desarrollo, $\kappa_0=1$ y $\kappa_m=2$ si $m\neq 0$. Además

$$q = j_4$$

$$q_1 = -j_3$$

$$\ell_{max} = N_{max} - |j_{5}| - |j_{6}|$$

$$p_{min} = \begin{cases} -(j_{5} + j_{6})/2, & j_{5} + j_{6} < 0 \\ 0, & j_{5} + j_{6} \ge 0 \end{cases}$$

$$p'_{min} = \begin{cases} 0, & j_{5} + j_{6} < 0 \\ (j_{5} + j_{6})/2, & j_{5} + j_{6} \ge 0 \end{cases}$$

$$s_{min} = \max(p_{min}, p'_{min}, j_{6} + 2p_{min}, -j_{5} + 2p'_{min})$$

$$i_{max} = [(N_{max} - |j_{3}| - |j_{4}|)/2], \qquad (2.74)$$

donde el corchete denota la parte entera de la expresión. Los números involucrados en las sumas internas están dados por

$$n_{max} = [(s - s_{min})/2]$$

$$m_{min} = \begin{cases} 0, & s, j_5 \text{ 'ambos iguales o 'ambos impares} \\ 1, & s, j_5 \text{ 'ambos distintos o 'ambos pares} \end{cases}$$

$$p = (-j_6 - m + s - 2n)/2 \quad \text{con } p \le s - 2n \text{ y } p \ge p_{min}$$

$$p_1 = (j_5 - m + s - 2n)/2 \quad \text{con } p_1 \le s - 2n \text{ y } p_1 \ge p'_{min}$$

$$j = |j_2 + i - 2l - 2n - 2p + q|. \tag{2.75}$$

$$R_{I} = -\kappa_{m} \frac{(1-m)!}{(1+m)!} F_{1,m,p}(I) F_{1,m,p_{1}}(I_{1}) X_{-j_{2}}^{1,-j_{2}-j_{4}}(e) X_{-j_{2}}^{-2,j_{1}+j_{3}}(e_{1}) \times \cos(j_{1}\lambda + j_{2}\lambda_{1} + j_{3}\varpi + j_{4}\varpi_{1} + j_{5}\Omega + j_{6}\Omega_{1}),$$
(2.76)

donde las cantidades p, p_1 y m tienen que ser enteros iguales a 0 o 1. Un análisis de los enteros involucrados en la expansión de la parte indirecta muestra que

$$q = j_4$$

$$q_1 = -j_3$$

$$p = (j_2 + j_4 + 1)/2$$

$$p_1 = -(j_1 + j_3 - 1)/2$$

$$m = j_5 - 2p_1 + 1.$$
(2.77)

Woltjer (1928 [63]) fué el primero en proponer un desarrollo de Taylor fuera del origen, sin embargo esto no garantiza que no tengamos los mismos problemas de convergencia. Los radios de convergencia son cada vez más pequeños a medida que nos alejamos del origen. Sin embargo, puede llegar a ser una muy buena opción para describir la dinámica alrededor de un centro de libración. La expansión asimétrica de Woljer permitió hacer una buena predicción para la resonancia 3:4 entre Titan e Hyperion.

Ferraz-Mello (1987 [64]) reformuló esta idea en forma de una expansión analítica en el marco del problema planar de tres cuerpos para resonancias de primer orden, y fué extendido a resonancias de cualquier orden por Ferraz-Mello y Sato (1989 [65]). Ferraz-Mello y Klafke (1991 [66]) aplican este desarrollo y descubren una zona de libración a muy altas excentricidades para la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter (RMMJ 3:1). Siguiendo con esta misma idea, Roig et al. (1998 [67]) extienden este desarrollo asimétrico al problema no planar.

Otra expansión del problema de tres cuerpos restringido fué propuesta por Beaugé (1996 [68]), la cual basándose en series de Taylor permite cubrir todo el espacio de fase, excluyendo la

vecindad próxima al punto de colisión. En particular, este desarrollo es válido para altas excentricidades, y para el caso de resonancias internas, resulta fácilmente promediable respecto del ángulo sinódico, permitiendo obtener una expresión para $\langle R \rangle$ válida para altas excentricidades. Sin embargo, aunque en teoría es posible determinar esta función con un error despreciable, esto es extremadamente complicado de realizar en la práctica.

2.2.6. Estructura General de R y las Reglas de D'Alembert

La función perturbadora, como bien hemos visto, es intrínsecamente complicada. Cuando la expresamos en función de los elementos orbitales, en general es posible demostrar que puede escribirse de la forma

$$R = \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{\vec{J} = -\infty}^{\infty} C_{\vec{J}}(\alpha, e, e_1, I, I_1) \cos \varphi, \qquad (2.78)$$

donde $\vec{J}=(j_1,j_2,j_3,j_4,j_5,j_6)$ con $j_i\in Z$ y $\varphi=j_1\lambda+j_2\lambda_1+j_3\varpi+j_4\varpi_1+j_5\Omega+j_6\Omega_1$. Una característica importante de este tipo de desarrollos es que existe una vinculación entre los exponentes mínimos de e,e_1,s y s_1 con los armónicos de ϖ,ϖ_1,Ω y Ω_1 , ya que los coeficientes $C_{\vec{J}}$ pueden ser escritos como

$$C_{\vec{j}} = \sum_{\vec{k}} S_{\vec{J}, \vec{k}}(\alpha) e^{|j_3| + 2k_1} e_1^{|j_4| + 2k_2} s^{|j_5| + 2k_3} s_1^{|j_6| + 2k_4}, \tag{2.79}$$

con $\vec{k} = (k_1, k_2, k_3, k_4)$ y $k_i \in Z \ge 0$.

Además cumple con ciertas propiedades llamadas reglas de D'Alambert, las cuales se encuentran asociadas a las simetrias del problema. La primera regla nos dice que los armónicos no son todos independientes entren sí, pues

$$\sum_{i=0}^{6} j_i = 0. (2.80)$$

Esta propiedad proviene de la invariancia de la función perturbadora ante una rotación cualquiera del sistema de coordenandas. Mientras que la segunda regla de D'Alambert nos que dice que la suma de j_5+j_6 es un número par, y esto se debe a la simetría de la función perturbadora en relación al plano de referencia (las inclinaciones siempre aparecen en potencias pares).

2.3. Formalismo Hamiltoniano

Existen básicamente dos formalismos en la mecánica. El primero, el cual tiene un origen en la dinámica de Newton, es la mecánica vectorial. En nuestro caso, el sistema dinámico que estamos estudiando (problema de tres cuerpos restringido) se encuentra descripto con este formalismo, como podemos observarlo en la Ecuación (2.7). Cualquier sistema dinámico puede describirse con este formalismo.

El segundo, es llamado mecánica analítica (sistemas Lagrangeanos y Hamiltonianos), el cual trabaja con funciones escalares, con lo que puede resultar más sencillo. Para que un sistema dinámico sea Hamiltoniano, debe cumplir dos condiciones:

- 1. El sistema físico debe ser conservativo, o sea, el campo vectorial de fuerzas debe poder ser escrito como el gradiente de una función escalar.
- 2. Las coordenadas o variables, deben ser adecuadas (pares conjugados).

No todo sistema conservativo es Hamiltoniano, pero todo sistema Hamiltoniano es conservativo. Esto hace que el formalismo Hamiltoniano sea limitado a este tipo de sistemas. Otra contra es el hecho de que la matemática que involucra es bastante extensa, y las variables canónicas generalmente usadas, pueden hacer perder cierto significado físico del problema original.

Entonces, ¿qué ventajas tiene sobre la mecánica vectorial?

- En primer lugar, un sistema Newtoniano de dimensión 2N, precisa 2N-1 integrales de movimiento, mientras que aquí solo precisamos N-1.
- El campo vectorial es sustituido por el gradiente de una función escalar, esto significa que toda la información del sistema se encuentra contenida en dicha función, la cual llamamos Hamiltoniano. Además, trabajar con funciones escalares es mucho más simple que trabajar con un campo vectorial.
- Todas las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Hamilton) tienen la misma forma, lo único que cambia es la función Hamiltoniana. Esto permite desarrollar métodos perturbativos, los cuales en principio son totalmente generales. Esto no ocurre en el caso Newtoniano.

2.3.1. Definición y Construcción

Para poder construir nuestro Hamiltoniano, supondremos un sistema dinámico de dimensión 2N (N grados de libertad), donde q_k y \dot{q}_k , con $k=1,\ldots,N$, son las coordenadas y velocidades generalizadas. El Lagrangeano de este sistema estará dado por la ecuación

$$L = T - V, (2.81)$$

donde T es la energía cinética y V la energía potencial. Entonces definimos el momento conjugado p_k de la coordenada q_k como

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. (2.82)$$

El par de variables (p_k,q_k) es un par conjugado, el cual es el necesario para encontrar el Hamiltoniano

$$F(p,q) = \sum_{k=1}^{N} p_k \dot{q}_k - L.$$
 (2.83)

Para sistemas naturales (la energía cinética es cuadrática en la velocidad), el Hamiltoniano es la energía total del sistema

$$F(p,q) = T + V. \tag{2.84}$$

Con ésto, las ecuaciones de Hamilton están dadas por

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k}
\frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k}.$$
(2.85)

Un sistema dinámico es Hamiltoniano si lo podemos escribir de la forma (2.85).

Para encontrar el Hamiltoniano del problema de tres cuerpos restringido partimos de la Ecuación (2.7), que es la aceleración que sufre la partícula de prueba, o la fuerza por unidad de masa. Esta fuerza proviene de un potencial que es la suma del potencial del problema de dos cuerpos más la función perturbadora, por lo que el potencial es

$$V = U_0 - R = -\frac{\mu}{r} - \mu_1 \left[\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_1}{r_1^3} \right]. \tag{2.86}$$

Mientras que la energía cinética por unidad de masa es

$$T = \frac{1}{2}\dot{r}^2. (2.87)$$

Por lo tanto, el Lagrangeano (también por unidad de masa) tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{\mu}{r} + R. \tag{2.88}$$

Con esta relación obtenemos el momento conjugado p de la coordenada r

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r},\tag{2.89}$$

por lo que el Hamiltoniano buscado es

$$F = T + V = \frac{p^2}{2} - \frac{\mu}{r} - R. \tag{2.90}$$

Usando que el cuadrado de la velocidad (o el momento p) puede escribirse como

$$p^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right),\tag{2.91}$$

y obtenemos que

$$F = -\frac{\mu}{2a} - \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(\alpha, e, s) e^{i(j_1\lambda + j_2\lambda_1 + j_3\varpi + j_4\varpi_1 + j_5\Omega + j_6\Omega_1)}.$$
 (2.92)

Ahora tenemos nuestro Hamiltoniano en función de los elementos orbitales. El problema es que éstos no forman pares conjugados. Para poder solucionar esto introducimos las variables canónicas de Delaunay como

$$L = \sqrt{\mu a}$$

$$G = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2}$$

$$H = \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2} (1 - 2s^2).$$
(2.93)

Sin embargo, se suelen usar las variables de Delaunay modificadas, las cuales son

$$J_1 = L = \sqrt{\mu a}$$

 $J_2 = L - G = \sqrt{\mu a} \left(1 - \sqrt{1 - e^2} \right)$
 $J_3 = G - H = -2s^2 \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^2},$ (2.94)

tales que los ángulos sean

$$\theta_1 = \lambda
\theta_2 = -\varpi
\theta_3 = -\Omega.$$
(2.95)

Trivialmente tenemos los elementos orbitales en función de los J_i

$$a = \frac{J_1^2}{\mu}$$

$$e^2 = 1 - \left[1 - \frac{J_2}{J_1}\right]^2$$

$$s^2 = -\frac{J_3}{2[J_1 - J_2]}.$$
(2.96)

Por otro lado tenemos que el Hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, ya que $\lambda_1 = n_1 t + \lambda_{10}$. En estos casos decimos que el Hamiltoniano es no autónomo. Para solucionar ésto pasamos al espacio de fase extendido, tomando $\theta_4 = \lambda_1$ como variable y $J_4 = \Lambda$ como su para conjugado. Ya que tienen que cumplir con las ecuaciones de Hamilton, tenemos

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Lambda} = n_1,\tag{2.97}$$

por lo que el Hamiltoniano queda

$$F(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1 \Lambda - \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(L, L - G, G - H)e^{i\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\theta}},$$
 (2.98)

donde $\mathbf{j} \cdot \mathbf{\theta} = j_1 \lambda + j_2 \lambda_1 + j_3 \omega + j_4 \omega_1 + j_5 \Omega + j_6 \Omega_1$.

2.3.2. Transformaciones Canónicas

Sean las variables (p,q) y una transformación donde las nuevas variables se encuentran definidas por las 2N ecuaciones

$$Q_j = Q_j(p,q,t)$$

$$P_j = P_j(p,q,t),$$
(2.99)

con j = 1, ..., N. Si la transformación preserva la forma canónica de las ecuaciones de Hamilton, diremos que es una transformación canónica, aun cuando la forma del Hamiltoniano no quede invariante, por lo que las nuevas ecuaciones de movimiento serán

$$\dot{Q}_{j} = \frac{\partial K}{\partial P_{j}}$$

$$\dot{P}_{j} = -\frac{\partial K}{\partial Q_{j}},$$
(2.100)

donde K es el nuevo Hamiltoniano en función de las nuevas variables (P,Q). Una definición equivalente, es decir que una transformación es canónica si preserva el principio de Hamilton. En las nuevas variables, esto es

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{N} P_j \dot{Q}_j - K(P_j, Q_j, t) \right] dt = 0.$$
 (2.101)

Al mismo tiempo tiene que cumplirse para las viejas variables, por lo que

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_{j=1}^{N} p_j \dot{q}_j - H(p_j, q_j, t) \right] dt = 0.$$
 (2.102)

La validez simultánea de las Ecuaciones (2.101) y (2.102) no significa que los integrandos sean iguales, por lo que tendremos

$$\lambda(p_j \dot{q}_j - H) = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dS}{dt}.$$
(2.103)

La función S es cualquier función del espacio de fase con derivadas segundas continuas y λ es una constante independiente de las variables canónicas y del tiempo. La constante multiplicativa λ se encuentra relacionada con una simple transformación canónica conocida como transformación de escala (Goldstein et al., 2002 [69]). Tomando $\lambda = 1$, obtenemos la relación

$$p_j \dot{q}_j - H = P_j \dot{Q}_j - K + \frac{dS}{dt}. \tag{2.104}$$

El término $\frac{dS}{dt}$ contribuye a la variación de la integral de acción (2.101) sólo en los puntos extremos t_1 y en t_2 , por lo que ésta será nula si S es función de (p,q,t), de (P,Q,t) o de cualquier combinación de variables del espacio de fase, dado que la variación de éstas es nula en dichos puntos. Esta función es llamada función generatriz de la transformación canónica.

Tomando la función generatriz $S = S_1(q, Q, t)$ y derivando, obtenemos

$$p_{j}\dot{q}_{j} - H = P_{j}\dot{Q}_{j} - K + \frac{dS_{1}}{dt}$$

$$= P_{j}\dot{Q}_{j} - K + \frac{\partial S_{1}}{\partial t} + \frac{\partial S_{1}}{\partial q_{j}}\dot{q}_{j} + \frac{\partial S_{1}}{\partial Q_{j}}\dot{Q}_{j}.$$
(2.105)

Juntando términos que dependen de \dot{q}_j y Q_j , finalmente obtenemos

$$p_{j} = \frac{\partial S_{1}}{\partial q_{j}}$$

$$P_{j} = -\frac{\partial S_{1}}{\partial Q_{i}}, \qquad (2.106)$$

y el nuevo Hamiltoniano

$$K = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}. (2.107)$$

La tabla (2.1) muestra las cuatro formas básicas que adquiere la función generatriz, dependiendo del par de variables que tomemos.

Un tipo de transformaciones canónicas muy importante para nuestro trabajo, como veremos más adelante, son las transformaciones autónomas, las cuales se obtienen tomando una función generatriz independiente del tiempo. Las variables viejas se relacionan con las nuevas mediante la relación

$$\sum_{j=1}^{N} p_j dq_j = \sum_{j=1}^{N} P_j dQ_j, \tag{2.108}$$

mientras que el Hamiltoniano permanece invariante.

Función generatriz	Derivadas de la fun	ción generatriz	Nuevo Hamiltoniano
$S = S_1(q, Q, t)$ $S = S_2(q, P, t) - Q_j P_j$ $S = S_3(p, Q, t) + q_j p_j$ $S = S_4(p, P, t) + q_j p_j - Q_j P_j$	$p_{j} = \frac{\partial S_{1}}{\partial q_{j}}$ $p_{j} = \frac{\partial S_{2}}{\partial q_{j}}$ $q_{j} = -\frac{\partial S_{3}}{\partial p_{j}}$ $q_{j} = -\frac{\partial S_{4}}{\partial p_{j}}$	$P_{j} = -\frac{\partial S_{1}}{\partial Q_{j}}$ $Q_{j} = \frac{\partial S_{2}}{\partial P_{j}}$ $P_{j} = -\frac{\partial S_{3}}{\partial Q_{j}}$ $Q_{j} = \frac{\partial S_{4}}{\partial P_{j}}$	$K = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}$ $K = H + \frac{\partial S_2}{\partial t}$ $K = H + \frac{\partial S_3}{\partial t}$ $K = H + \frac{\partial S_4}{\partial t}$

Cuadro 2.1: Formas básicas de una función generatriz de una transformación canónica (Goldstein et al., 2002 [69])

2.3.3. Variables Angulo-Acción

Sea un sistema Hamiltoniano ligado de un único grado de libertad tal que su movimiento ocurre en un subespacio finito y compacto, entonces el movimiento puede ser de dos tipos: i) periódico o ii) asintótico a un punto de equilibrio inestable. Un ejemplo es el caso del péndulo, para el que tenemos el Hamiltoniano

$$F(p,q) = \frac{1}{2}p^2 - b\cos q,$$
 (2.109)

y cuyo diagrama de fase esta dado en la Figura 2.3.

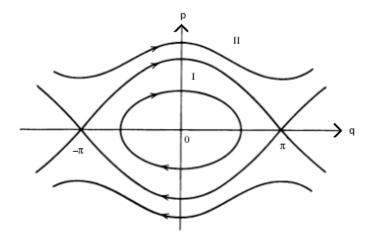


Figura 2.3: Espacio de fases de un péndulo. Región I corresponde a la zona de libración y la región II a la zona de circulación (Lichtenberg 1992 [70]).

El comportamiento periódico se produce cuando tenemos una condición inicial en la región I o en la región II, mientras que el comportamiento asintótico se produce sobre la separatriz. Entre los movimientos periódicos podemos separar una zona de libración (región I) y una zona de circulación.

Libración: Es una trayectoria "dentro" de la separatriz donde q oscila entre dos valores a y b (> 0, < 2π), como vemos en la primera Figura 2.4.a. Matemáticamente se cumple que $\forall t_0$,

$$\exists T \ / \ q(t_0 + T) = q(t_0).$$

Circulación: Es una trayectoria "fuera" de la separatriz donde q adquiere todos los valores posibles entre 0 y 2π (Figura 2.4.b). En este caso tenemos que $\forall t_0, \exists T / q(t_0+T) = q(t_0) + 2\pi$.

Separatriz: Dada una condición inicial sobre la separatriz, esta demora un tiempo infinito en llegar al punto de equilibrio hiperbólico.

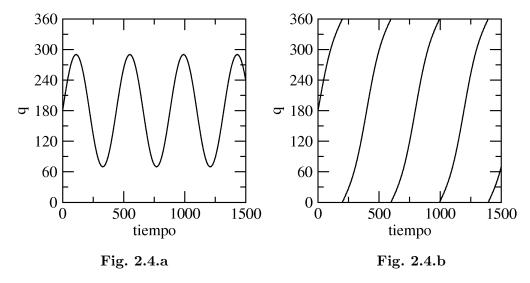


Figura 2.4: a) Libración de $q \in [a,b]$. b) Circulación de $q \in [0,360]$. Los ángulos están en grados.

Las variables ángulo-acción, son variables cíclicas periódicas. Para encontrarlas partimos de las variables (p,q) y mediante una transformación canónica pasamos a las variables (J,ψ) tal que el nuevo Hamiltoniano F'(J) solo dependa de la acción J. Si esto ocurre tendremos las ecuaciones

$$\begin{split} \frac{dJ}{dt} &= -\frac{\partial F'}{\partial \psi} = 0\\ \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\partial F'}{\partial J} = \nu(J) = cte, \end{split} \tag{2.110}$$

cuya solución es la trivial

$$J = J_0$$

 $\psi = \nu(J_0)t + \psi_0.$ (2.111)

Como ψ varía de 0 a 2π en un período T, entonces

$$\psi = \frac{2\pi}{T}t + \psi_0. \tag{2.112}$$

Para obtener la acción usamos la función generatriz de la transformación canónica , tal que $S(q,J):(p,q)\to (J,\psi)$, así tenemos la condición

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial S}{\partial J} \right) = \frac{\partial}{\partial J} \left(\frac{\partial S}{\partial J} \right) \dot{q} = \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial J} \dot{q}, \tag{2.113}$$

Así integrando en un período tenemos

$$2\pi = \int_0^T \frac{d\psi}{dt} dt = \oint \frac{\partial^2 S}{\partial q \partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial S}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint p \ dq, \tag{2.114}$$

por lo tanto la acción nos queda

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p \ dq. \tag{2.115}$$

Además resulta últil introducir las variables rectangulares o variables canónicas de Poincaré

$$x = \sqrt{2J}\cos\psi$$

$$y = \sqrt{2J}\sin\psi.$$
(2.116)

Cabe destacar que $2\pi J$ representa el área barrida por la trayectoria en el plano (p,q).

Capítulo 3

Teoría de Perturbaciones

3.1. Complejidad de las Ecuaciones de Movimiento

En el capítulo anterior llegamos a una expresión para el Hamiltoniano del problema de tres cuerpos restringido. Sabemos que este problema contiene menos integrales de movimiento que grados de libertad, lo que significa que no es posible encontrar una solución analítica. Una posible solución a este problema es buscar una aproximación que represente la solución real del sistema. La teoría de perturbaciones proporciona un método para encontrar estas aproximaciones.

3.2. El Concepto de Perturbación

Supongamos que nuestro Hamiltoniano puede ser escrito de la forma

$$F(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = F_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon F_1(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}), \tag{3.1}$$

donde $F_0(\mathbf{J})$ es un Hamiltoniano integrable, $O(F_1) = 1$ y $\varepsilon << 1$ es un parámetro muy chico. En este caso, podemos considerar que el sistema es casi integrable, pues el Hamiltoniano F es aproximadamente F_0 a menos de un factor de orden ε . Lo importante es que las soluciones también serán próximas a las soluciones del sistema integrable, por lo que nuestro problema ahora se traduce, no a encontrar una solución nueva, sino a buscar como la solución original varía con la presencia de la perturbación $\varepsilon F_1(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$.

En el caso del problema de tres cuerpos restringido, F_0 es el Hamiltoniano del problema de dos cuerpos (el cual es integrable), F_1 es la función perturbadora y $\varepsilon = m_1/m_0$.

3.3. Método de Hori

Este método fué propuesto por Hori (1966 [71]) y tiene como idea buscar una transformación canónica tal que el Hamiltoniano nuevo dependa sólo de las nuevas acciones. Esto tiene por solución trivial $J_i^* = cte$ y $\theta_i^* = \nu_i^* t + \theta_{0i}^*$. Luego, en el sistema no trivial, antitransformamos y encontramos la solución del sistema. Ya que el método requiere de ciertas herramientas matemáticas complejas, haremos un breve repaso de ellas.

3.3.1. Conceptos Previos

Series de Taylor Sea f(x) analítica en un entorno abierto $I \subset R$, $x_0 \in I$ y definimos $\varepsilon = x - x_0$ entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varepsilon^k \frac{d^k f}{dx^k}.$$
 (3.2)

Las series de Taylor tienen un cierto radio de convergencia ε_c , el cual es el intervalo máximo donde la serie converge a la función f(x). Además, cuanto más pequeño sea ε , más rápido convergerá la serie.

Teorema de Cauchy Dado un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = Y(x, y) \tag{3.3}$$

donde $Y: \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$ es analítica en algún dominio $\mathbf{D} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ con condición inicial $y(x_0) = y_0 \in \mathbf{D}$, entonces el sistema posee una solución y(x) en un dominio no infinitesimal $\mathbf{D}_1 \subset \mathbf{D}$.

Del teorema de existencia de Cauchy podemos escribir esta solución y(x) como una serie de Taylor alrededor de x_0

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k y}{dx^k} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^k.$$
 (3.4)

Sin embargo, es más interesante reescribirla en función de las derivadas de Y

$$\frac{d^{k}y}{dx^{k}} = \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^{k-1}Y}{dx^{k-1}},\tag{3.5}$$

ya que a éstas las conocemos por la Ecuación (3.3), mientras que a las derivadas temporales de y podemos no conocerlas. Por lo tanto, la solución nos queda

$$y(x) = y(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}Y}{dx^{k-1}} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^k.$$
 (3.6)

Si lo aplicamos a un sistema dinámico

$$\frac{dx}{dt} = X(x),\tag{3.7}$$

entonces con Taylor y Cauchy, suponiendo la condición inicial $x(t_0) = x_0$, podemos escribir la solución

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k x}{dt^k} (t - t_0)^k.$$
 (3.8)

Sustituyendo las derivadas de x

$$\frac{dx}{dt} = X(x_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dX}{dt}(x_0) = \frac{dX}{dx}\frac{dx}{dt}(x_0) = \frac{dX}{dx}X$$

$$\vdots$$

obtenemos

$$x(t) = x(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}X}{dx^{k-1}} \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^k.$$
(3.10)

Además tenemos que existe un t_c para el cual la serie converge $\forall t < t_c$ y esta convergencia será más rápida, cuanto menor sea t.

Lo que hacemos es sustituir la derivada temporal de x por el gradiente del campo vectorial de fuerzas, esto es equivalente a ir evaluando la derivada a lo largo de la órbita definida por el campo X(x). Este método es ideal para resolver numéricamente la Ecuación diferencial (3.7).

Operador de Lie Para el estudio de un sistema mecánico Hamiltoniano con N grados de libertad resulta útil considerar el subconjunto de todas las funciones reales y analíticas \mathcal{A} , definidas en $\Omega \subset \mathbf{R}^{2N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dependientes de las coordenadas y momentos generalizados $\mathbf{q} = (q_1, \dots q_N)$ y $\mathbf{p} = (p_1, \dots p_N)$, y también del tiempo t. Sí $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, entonces

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right). \tag{3.11}$$

Usando las ecuaciones de Hamilton

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_i}
\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_i},$$
(3.12)

donde F es el Hamiltoniano del sistema, podemos reescribir la Ecuación (3.11) como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right). \tag{3.13}$$

Definimos el corchete de Poisson para dos funciones $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ y $g(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ como

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right), \tag{3.14}$$

con lo que la Ecuación (3.13) puede escribirse como

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, F\}. \tag{3.15}$$

Definimos al operador de Lie $L_F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ del sistema dinámico dado por el Hamiltoniano $F \in \mathcal{A}$ con coordenadas generalizadas $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$ y momentos canónicos conjugados $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_N)$ como

$$L_F = \{ , F \} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} - \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{\partial F}{\partial q_i} \right). \tag{3.16}$$

Cuando aplicamos el operador de Lie a una función $L_F f$, decimos que esta es la derivada de Lie de dicha función.

Con ésto las ecuaciones de Hamilton quedan

$$\frac{dq_i}{dt} = L_F q_i
\frac{dp_i}{dt} = L_F p_i,$$
(3.17)

esto significa que podemos asociar el operador $\frac{d}{dt}$ al operador de Lie L_F .

Series de Lie El teorema de Cauchy toma fuerzas en sistemas Hamiltonianos. Si utilizamos los operadores de Lie, la solución puede escribirse como

$$q(t) = q(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} L_F^{(k)} q(t) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^k = E_F [(t - t_0) L_F q_0]$$

$$p(t) = p(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} L_F^{(k)} p(t) \Big|_{t=t_0} (t - t_0)^k = E_F [(t - t_0) L_F p_0], \qquad (3.18)$$

donde definimos

$$L_F^{(0)} = 1$$

 $L_F^{(k)} = L_F \left(L_F^{(k-1)} \right),$ (3.19)

y a la $transformación de Lie E_F$ como al operador que nos da la evolución del sistema a un tiempo t tal que

$$E_F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L_F^{(k)}.$$
 (3.20)

Teorema de Lie Sean (\mathbf{p}, \mathbf{q}) variables canónicas generalizadas y una transformación $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = (\mathbf{P}(\mathbf{p}, \mathbf{q}), \mathbf{Q}(\mathbf{p}, \mathbf{q}))$. Sí $\exists \ \varepsilon \in \mathbf{R} \ y \ S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ analítica tales que

$$\mathbf{Q} = E_S \mathbf{q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} L_F^{(k)} \mathbf{q}$$

$$\mathbf{P} = E_S \mathbf{p} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!} L_F^{(k)} \mathbf{p},$$
(3.21)

entonces la transformación es canónica y $S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ es llamada la "función generatriz de Lie" de la transformación.

Teorema de Conmutación Sea $F(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ analítica en (\mathbf{p}, \mathbf{q}) y supongamos que $S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$: $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \to (\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ es una transformación de Lie, entonces

$$F(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = E_F F(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L_F^{(k)} F(\mathbf{p}, \mathbf{q}).$$
(3.22)

3.3.2. Método de Hori Versión Acción-Angulo

Sean un sistema dinámico de N grados de libertad cuyo Hamiltoniano es de la forma

$$F(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}; \varepsilon) = F_0(\mathbf{J}) + R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}; \varepsilon) = F_0(\mathbf{J}) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F_k(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta})$$
(3.23)

variables canónicas $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = (J_1, \dots, J_N, \theta_1, \dots, \theta_N)$. Supongamos una transformacón canónica $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) \to (\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$ definida por la función generatriz de Lie

$$S(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), \tag{3.24}$$

y pedimos que el nuevo Hamiltoniano en las nuevas variables se pueda escribir como

$$F^*(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon) = F_0^*(\mathbf{J}^*) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F_k^*(\mathbf{J}^*).$$
 (3.25)

El teorema de Lie garantiza que la transformación es canónica y ya que el Hamiltoniano es autónomo, este se conserva

$$F^*(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon) = F(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}; \varepsilon) \tag{3.26}$$

mientras que por el teorema de conmutación tenemos que

$$F(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}; \varepsilon) = E_S F(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon). \tag{3.27}$$

Juntando ambas expresiones

$$F^*(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon) = E_S F(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon)$$
(3.28)

con (3.20) y (3.25) obtenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k^*(\mathbf{J}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} L_S^{(k)} F(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*; \varepsilon).$$
 (3.29)

Ahora veamos un poco más en detalle cada uno de los término de la suma del lado derecho de la última ecuación

$$L_{S}^{(0)}F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} F_{k}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*})$$

$$L_{S}^{(1)}F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) = \{F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon), S(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon)\}$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^{k} F_{k}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{l} S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*})\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{k+l} \{F_{k}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*})\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \left[\sum_{l=1}^{k} \{F_{k-l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*})\}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \Phi_{k}^{1}$$

$$(3.31)$$

$$L_{S}^{(2)}F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) = \left\{ \left\{ F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon), S(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) \right\}, S(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^{k} \Phi_{k}^{1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{l} S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{k+l} \left\{ \Phi_{k}^{1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\}$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k} \left[\sum_{l=1}^{k} \left\{ \Phi_{k-l}^{1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\} \right]$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^{k} \Phi_{k}^{2}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$L_{S}^{(n)}F(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*};\varepsilon) = \left\{ \sum_{k=n-1}^{\infty} \varepsilon^{k} \Phi_{k}^{n-1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{l} S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\}$$

$$= \sum_{k=n-1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon^{k+l} \left\{ \Phi_{k}^{n-1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\}$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon^{k} \left[\sum_{l=1}^{k} \left\{ \Phi_{k-l}^{n-1}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*},\boldsymbol{\theta}^{*}) \right\} \right]$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon^{k} \Phi_{k}^{n}, \qquad (3.33)$$

donde

$$\begin{split} &\Phi_k^0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) &= F_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \\ &\Phi_k^1(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) &= \sum_{l=1}^k \left\{ F_{k-l}(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_l(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \right\} \\ &= \left\{ F_0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \right\} + \sum_{l=1}^{k-1} \left\{ F_{k-l}(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_l(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \right\} \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ \end{split}$$

$$\Phi_k^n(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) = \sum_{l=1}^k \left\{ \Phi_{k-l}^{n-1}(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_l(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \right\}$$
(3.34)

así, obtenemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k^*(\mathbf{J}^*) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \left[\sum_{l=0}^k \frac{1}{l!} \Phi_k^l \right]. \tag{3.35}$$

Para que se cumpla la igualdad tiene que cumplirse término a término, por lo que tenemos

$$F_0^*(\mathbf{J}^*) = \Phi_0^0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$$

$$= F_0(\mathbf{J}^*)$$

$$F_1^*(\mathbf{J}^*) = \Phi_1^0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) + \Phi_1^1(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$$

$$= F_1(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) + \{F_0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_1(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)\}$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

.

$$F_{k}^{*}(\mathbf{J}^{*}) = \Phi_{k}^{0} + \Phi_{k}^{1} + \dots + \frac{1}{k!} \Phi_{k}^{k} = \Phi_{k}^{0} + \Phi_{k}^{1} + \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l!} \Phi_{k}^{l}$$

$$= F_{k}(\mathbf{J}^{*}, \boldsymbol{\theta}^{*}) + \{F_{0}(\mathbf{J}^{*}, \boldsymbol{\theta}^{*}), S_{k}(\mathbf{J}^{*}, \boldsymbol{\theta}^{*})\} + \sum_{l=2}^{k-1} \{F_{k-l}(\mathbf{J}^{*}, \boldsymbol{\theta}^{*}), S_{l}(\mathbf{J}^{*}, \boldsymbol{\theta}^{*})\} + \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l!} \Phi_{k}^{l}.$$

$$(3.36)$$

Definiendo

$$\Psi_k = F_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) + \sum_{l=1}^{k-1} \{ F_{k-l}(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_l(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \} + \sum_{l=2}^{k} \frac{1}{l!} \Phi_k^l$$
(3.37)

obtenemos la ecuación homológica para el término k-ésimo

$$F_k^*(\mathbf{J}^*) = \{F_0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)\} + \Psi_k.$$
 (3.38)

Ya que $\Psi_k = (F_1, \dots, F_k, S_1, \dots, S_{k-1})$ es conocida habiendo resuelto las k-1 anteriores (hay que resolverlas desde el orden más bajo), usamos la ecuación homológica para encontrar $F_k^*(\mathbf{J}^*)$ y $S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)$.

3.3.3. Resolución de la Ecuación Homológica

Para resolver la ecuación homológica tenemos que encontrar

$$\{F_0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial F_0}{\partial \theta_i^*} \frac{\partial S_k}{\partial J_i^*} - \frac{\partial F_0}{\partial J_i^*} \frac{\partial S_k}{\partial \theta_i^*} \right]. \tag{3.39}$$

Aquí es donde se ve la ventaja de trabajar con las variables ángulo acción. Ya que $F_0(\mathbf{J}^*)$ entonces

$$\frac{\partial F_0}{\partial \theta_i^*} = 0$$

$$\frac{\partial F_0}{\partial J_i^*} = \nu_i^* \quad \forall i,$$
(3.40)

por lo tanto

$$\{F_0(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*), S_k(\mathbf{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)\} = -\sum_{i=1}^N \nu_i^* \frac{\partial S_k}{\partial \theta_i^*} = -\boldsymbol{\nu}^* \cdot \frac{\partial S_k}{\partial \boldsymbol{\theta}^*}.$$
 (3.41)

Como Ψ_k es una función conocida, la ecuación a resolver es una ecuación en derivadas parciales

$$\boldsymbol{\nu}^* \cdot \frac{\partial S_k}{\partial \boldsymbol{\theta}^*} = \Psi_k - F_k^*(\mathbf{J}^*). \tag{3.42}$$

En el próximo capítulo veremos como resolver esta ecuación diferencial aplicando un método de media.

3.3.4. Convergencia, Integrabilidad y Caoticidad

El método de Hori proporciona una solución formal, sin embargo las series resultantes no pueden converger en el caso general, ya que esto equivaldría a encontrar tantas integrales de movimiento como grados de libertad tiene el problema. En sistemas físicos reales, como aquel que es discutido en este trabajo, uno observa regiones de movimiento caótico, esto significa que el sistema no es integrable.

Aunque este método no converge, es un ejemplo de lo que Poincaré llamó series asintóticas y por lo tanto, una expresión truncada podrá ser una buena aproximación de la solución general del sistema, siempre que el caos no sea excesivo.

Una última limitación del método de Hori es que solo es válida fuera de resonancias, que son causantes de pequeños divisores en la función generatriz. En el próximo capítulo veremos como adecuar dicho método al caso en que tengamos resonancias.

Capítulo 4

Estructura del Problema Asteroidal en la Resonancia 3:1

4.1. El Hamiltoniano

Ahora aplicaremos el método de Hori al Hamiltoniano encontrado en la sección (2.2.4) al cual lo tenemos expresado en elementos orbitales

$$F = -\frac{\mu}{2a} - \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(\alpha, e, s) e^{i(j_1\lambda + j_2\lambda_1 + j_3\varpi + j_4\varpi_1 + j_5\Omega + j_6\Omega_1)}.$$
 (4.1)

Como queremos trabajar con sistemas Hamiltonianos, debemos introducir variables adecuadas. Definimos las variables canónicas de Delaunay como

$$J_{1} = L = \sqrt{\mu a}$$

$$J_{2} = L - G = \sqrt{\mu a} \left(1 - \sqrt{1 - e^{2}} \right)$$

$$J_{3} = G - H = -2s^{2} \sqrt{\mu a} \sqrt{1 - e^{2}},$$
(4.2)

tales que los ángulos sean

$$\theta_1 = \lambda
\theta_2 = -\omega
\theta_3 = -\Omega.$$
(4.3)

Trivialmente tenemos los elementos orbitales en función de los J_i

$$a = \frac{J_1^2}{\mu}$$

$$e^2 = 1 - \left[1 - \frac{J_2}{J_1}\right]^2$$

$$s^2 = -\frac{J_3}{2[J_1 - J_2]}.$$
(4.4)

Por otro lado tenemos que el Hamiltoniano depende explícitamente del tiempo, ya que $\lambda_1 = n_1 t + \lambda_{10}$, por lo que es no autónomo. Esto se soluciona pasando al espacio de fase extendido, tal que $J_4 = \Lambda$ y $\theta_4 = \lambda_1$. Ya que tiene que cumplir con las ecuaciones de Hamilton, tenemos que

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \Lambda} = n_1,\tag{4.5}$$

por lo que el Hamiltoniano queda

$$F(\boldsymbol{J},\boldsymbol{\theta}) = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1 \Lambda - \frac{\mu_1}{a_1} \sum_{j=-\infty}^{\infty} A_j(L, L - G, G - H) e^{i\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{\theta}}, \tag{4.6}$$

donde $\mathbf{j} \cdot \mathbf{\theta} = j_1 \lambda + j_2 \lambda_1 + j_3 \varpi + j_4 \varpi_1 + j_5 \Omega + j_6 \Omega_1$.

Este es un sistema degenerado, ya que F_0 no depende de L-G ni de G-H, por lo que no se le puede aplicar el método de Hori tal y como lo hemos visto. Una solución es aplicar el método de Von Zeipel, el cual consiste en dividir a la función perturbadora en una parte secular y una parte periódica. Hasta segundo orden en las excentricidades e inclinaciones, las expresiones son

$$R_{sec} = \sum_{\substack{j=-\infty\\ j_1=j_2=0}}^{\infty} A_j(L, L-G, G-H) e^{i(j_1\lambda + j_2\lambda_1 + j_3\varpi + j_4\varpi_1 + j_5\Omega + j_6\Omega_1)}$$

$$= A_{00} + A_{10}(e^2 + e_1^2) + A_{20}(s^2 + s_1^2) + A_{30}ee_1\cos(\varpi_1 - \varpi) + + A_{40}ss_1\cos(\Omega_1 - \Omega)$$

$$R_{per} = \sum_{\substack{j=-\infty\\ j_1, j_2 \neq 0}}^{\infty} A_j(L, L-G, G-H) e^{i(j_1\lambda + j_2\lambda_1 + j_3\varpi + j_4\varpi_1 + j_5\Omega + j_6\Omega_1)}$$

$$= \frac{a_1}{\mu_1} R - R_{sec}. \tag{4.7}$$

Los coeficientes A_{ij} dependen únicamente de $\alpha = a/a_1$, sin embargo es posible demostrar que permanecen prácticamente constantes si α no sufre variaciones importantes. Si queremos ser más rigurosos podemos redefinir

$$R_{sec} = A_{10}(e^2 + e_1^2) + A_{20}(s^2 + s_1^2) + A_{30}ee_1\cos(\varpi_1 - \varpi) + A_{40}ss_1\cos(\Omega_1 - \Omega)$$

tal que

$$R = \frac{\mu_1}{a_1} [A_{00} + R_{sec} + R_{per}]$$

por lo que la parte integrable F_0 nos quedaría (tomando $\varepsilon = \mu_1/a_1 << 1$)

$$F_0 = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1 \Lambda - \varepsilon A_{00}(L) \approx -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1 \Lambda.$$

El término εA_{00} entraría como una pequeña corrección.

De cualquier manera, ya que la parte secular solo contiene términos de segundo orden, tenemos que $R_{sec} < R_{per}$. Esto nos permite definir un Hamiltoniano reducido tal que

$$F_{red}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\theta}) = F_0(L, \Lambda) - \varepsilon R_{per}(L, \Lambda, \lambda, \lambda_1), \tag{4.8}$$

con lo cual nos queda

$$F_{0}(L,\Lambda) = -\frac{\mu^{2}}{2L^{2}} + n_{1}\Lambda$$

$$F_{1}(L,\Lambda,\lambda,\lambda_{1}) = -\sum_{\substack{j=-\infty\\j_{1},j_{2}\neq0}}^{\infty} \bar{A}_{j}(L)e^{i(j_{1}\lambda+j_{2}\lambda_{1})}$$

$$(4.9)$$

con

$$\bar{A}_{\mathbf{j}}(L) = A_{\mathbf{j}}(L, L - G, G - H)e^{i(j_3\varpi + j_4\varpi_1 + j_5\Omega + j_6\Omega_1)}. \tag{4.10}$$

Ahora queremos encontrar la transformación canónica $(L, L - G, G - H, \Lambda) \rightarrow (L^*, L^* - G^*, G^* - H^*, \Lambda^*)$ y el nuevo Hamiltoniano F^* tal que éste solo dependa de las nuevas acciones. De la sección anterior tenemos que

$$F_0^*(L^*, \Lambda^*) = F_0(L^*, \Lambda^*) = -\frac{\mu^2}{2L^{*2}} + n_1 \Lambda^*.$$

$$F_1^*(L^*, \Lambda^*) = F_1(L^*, \Lambda^*, \lambda^*, \lambda_1^*) + \{F_0, S_1\}.$$
(4.11)

Si definimos

$$\langle F_1(\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \rangle_{\boldsymbol{\theta}^*} = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} F_1(\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) d\theta_1^* \dots d\theta_N^*$$

$$[F_1(\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*)]_{\boldsymbol{\theta}^*} = F_1(\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) - \langle F_1(\boldsymbol{J}^*, \boldsymbol{\theta}^*) \rangle_{\boldsymbol{\theta}^*}, \tag{4.12}$$

y pedimos

$$[F_1(L^*, \Lambda^*, \lambda^*, \lambda_1^*)]_{\theta^*} + \{F_0, S_1\} = 0$$
(4.13)

obtenemos

$$F_{1}^{*}(L^{*}, \Lambda^{*}) = \langle F_{1}(L^{*}, \Lambda^{*}, \lambda^{*}, \lambda^{*}_{1}) \rangle_{\boldsymbol{\theta}^{*}}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2}} \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{2\pi} \left[- \sum_{\boldsymbol{j}=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{\boldsymbol{j}}(L^{*}) e^{i(j_{1}\lambda^{*}+j_{2}\lambda^{*}_{1})} \right] d\lambda^{*} d\lambda^{*}_{1}$$

$$= - \sum_{\boldsymbol{j}=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{A}_{\boldsymbol{j}}(L^{*})}{(2\pi)^{2}} \left(\int_{0}^{2\pi} e^{ij_{1}\lambda^{*}} d\lambda^{*} \right) \left(\int_{0}^{2\pi} e^{ij_{2}\lambda^{*}_{1}} d\lambda^{*}_{1} \right) = 0, \quad (4.14)$$

$$= - \sum_{\boldsymbol{j}=-\infty}^{\infty} \frac{\bar{A}_{\boldsymbol{j}}(L^{*})}{(2\pi)^{2}} \left(\int_{0}^{2\pi} e^{ij_{1}\lambda^{*}} d\lambda^{*} \right) \left(\int_{0}^{2\pi} e^{ij_{2}\lambda^{*}_{1}} d\lambda^{*}_{1} \right) = 0, \quad (4.14)$$

ya que j_1 y j_2 no pueden ser simultáneamente nulos.

Por lo tanto nuestro Hamiltoniano queda

$$F_{red}^*(L^*, \Lambda^*) = -\frac{\mu^2}{2L^{*2}} + n_1 \Lambda^*$$
(4.15)

con lo que las ecuaciones de Hamilton son

$$\frac{dL^*}{dt} = -\frac{\partial F_{red}^*}{\partial \lambda^*} = 0$$

$$\frac{d\Lambda^*}{dt} = -\frac{\partial F_{red}^*}{\partial \lambda_1^*} = 0$$

$$\frac{d\lambda^*}{dt} = \frac{\partial F_{red}^*}{\partial L^*} = \frac{\mu^2}{L^{*3}} = n^* = \nu_L^*$$

$$\frac{d\lambda_1^*}{dt} = \frac{\partial F_{red}^*}{\partial \Lambda^*} = n_1 = \nu_{\Lambda}^*.$$
(4.16)

Con todo ésto, la condición (4.13) queda

$$\nu_L^* \frac{\partial S_1}{\partial \lambda^*} + \nu_\Lambda^* \frac{\partial S_1}{\partial \lambda_1^*} = -\sum_{\substack{j = -\infty \\ j_1, j_2 \neq 0}}^{\infty} \bar{A}_j(L) e^{i(j_1 \lambda + j_2 \lambda_1)}. \tag{4.17}$$

La solución para ésta ecuación en derivadas parciales es

$$S_1(L^*, \Lambda^*, \lambda^*, \lambda_1^*) = \sum_{\substack{\boldsymbol{j} = -\infty\\ j_1, j_2 \neq 0}}^{\infty} \frac{iA_{\boldsymbol{j}}(L^*)}{j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_{\Lambda}^*} \sin(\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{\theta}^*). \tag{4.18}$$

Esto vale siempre que $j_1\nu_L^*+j_2\nu_\Lambda^*\neq 0$. Si existen enteros j_1 y j_2 tales que

$$j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_\Lambda^* = j_1 n^* + j_2 n_1 = 0 \tag{4.19}$$

no podemos aplicar el método y decimos que el asteroide está en una Resonancia de Movimientos Medios (RMM). Si tenemos en cuenta que la órbita del perturbador está fija entonces si

$$-\frac{j_1}{j_2} = \frac{n_1}{n^*} = \frac{\sqrt{G(m_0 + m_1)}}{\sqrt{Gm_0}} \frac{a^{*3/2}}{a_1^{3/2}}$$

la condición de resonancia se traduce a

$$a_{res}^* = a_1 \left(\frac{j_1}{j_2}\right)^{2/3} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^{1/3}.$$
 (4.20)

Además notemos que j_1 y j_2 cumplen la condición de resonancia y l es un entero, entonces $j_1'=lj_1$ y $j_2'=lj_2$ también la cumplirán pues

$$j_1'n^* + j_2'n_1 = l(j_1n^* + j_2n_1) = 0$$

Ahora supongamos que p y q son dos enteros tales que $pn^* - (p+q)n_1 = 0$, entonces lo que haremos será separar de nuestro R_{per} todos los términos que contengan $j_1 = p$, $j_2 = -(p+q)$ y a múltiplos de ellos tal que

$$R_{per} = \sum_{\substack{l=-\infty \\ l\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{j=-\infty \\ j_1=lp \\ j_2=-l(p+q)}}^{\infty} \bar{A}_{j} e^{i(j_1\lambda+j_2\lambda_1)} + \sum_{\substack{j=-\infty \\ j_1,j_2\neq 0 \\ j_1\neq p,j_2\neq -(p+q)}}^{\infty} \bar{A}_{j} e^{i(j_1\lambda+j_2\lambda_1)}$$

$$= R_{res} + R'_{per}. \tag{4.21}$$

y redefinimos al Hamiltoniano reducido como

$$F_{red}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = F_0(L, \Lambda) - \varepsilon R'_{per}(L, \Lambda, \lambda, \lambda_1), \tag{4.22}$$

retirando no solamente la parte secular, sino también la parte resonante. Luego éste Hamiltoniano no posee pequeños divisores, por lo que se le puede aplicar Hori, y su solución es la que ya hemos encontrado.

En este texto trabajaremos con la Resonancia de Movimientos Medios 3:1 con Júpiter (RMMJ 3:1), por lo que los tenemos que p=1 y q=2 (resonancia de segundo orden), entonces

$$R_{res} = \sum_{\substack{l=-\infty\\l\neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{\mathbf{j}=-\infty\\j_1=lp\\j_2=-l(p+q)}}^{\infty} \bar{A}_{\mathbf{j}} e^{i(j_1\lambda+j_2\lambda_1)}. \tag{4.23}$$

Es fácil de ver que los únicos términos que satisfacen la condición de resonancia son tales que l=-1 y j=3, por lo que nos queda

$$R_{res} = B_{33}e^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\varpi) + B_{43}ee_{1}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - \varpi - \varpi_{1}) + + B_{53}e_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\varpi_{1}) + B_{63}s^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\Omega) + + B_{73}ss_{1}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - \Omega - \Omega_{1}) + B_{83}s_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\Omega_{1}).$$
(4.24)

Aplicando Hori al Hamiltoniano (4.22) obtenemos el Hamiltoniano (4.15) y las Ecuaciones de movimiento (4.16). La función generatriz la misma que (4.18), pero sin los términos resonantes, por lo que nos queda

$$S_{1}(L^{*}, \Lambda^{*}, \lambda^{*}, \lambda_{1}^{*}) = \sum_{\substack{j=-\infty\\j_{1}, j_{2} \neq 0\\j_{1} \neq -1, j_{2} \neq 3}}^{\infty} \frac{A_{j}(L^{*})}{j_{1}\nu_{L}^{*} + j_{2}\nu_{\Lambda}^{*}} \sin(j \cdot \theta^{*}). \tag{4.25}$$

Para encontrar cual es la relación entre las viejas variables y las nuevas, usamos (3.21)

$$J_{i} = E_{S}J_{i}^{*} = J_{i}^{*} + \{J_{i}^{*}, S_{1}\} = J_{i}^{*} + \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial J_{i}^{*}}{\partial \theta_{j}^{*}} \frac{\partial S_{1}}{\partial J_{j}^{*}} - \frac{\partial J_{i}^{*}}{\partial J_{j}^{*}} \frac{\partial S_{1}}{\partial \theta_{j}^{*}} \right]$$

$$= J_{i}^{*} + \sum_{j=1}^{N} \left[0 \frac{\partial S_{1}}{\partial J_{j}^{*}} - \delta_{ij} \frac{\partial S_{1}}{\partial \theta_{j}^{*}} \right] = J_{i}^{*} - \frac{\partial S_{1}}{\partial \theta_{i}^{*}}$$

$$\theta_{i} = E_{S}\theta_{i}^{*} = \theta_{i}^{*} + \{\theta_{i}^{*}, S_{1}\} = \theta_{i}^{*} + \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{\partial \theta_{i}^{*}}{\partial \theta_{j}^{*}} \frac{\partial S_{1}}{\partial J_{j}^{*}} - \frac{\partial \theta_{i}^{*}}{\partial J_{j}^{*}} \frac{\partial S_{1}}{\partial \theta_{j}^{*}} \right].$$

$$= \theta_{i}^{*} + \sum_{j=1}^{N} \left[\delta_{ij} \frac{\partial S_{1}}{\partial J_{i}^{*}} - 0 \frac{\partial S_{1}}{\partial \theta_{i}^{*}} \right] = \theta_{i}^{*} + \frac{\partial S_{1}}{\partial J_{i}^{*}}, \tag{4.26}$$

con lo que obtenemos que

$$L = L^* - \sum_{\substack{j = -\infty \\ j_1, j_2 \neq 0 \\ j_1 \neq -1, j_2 \neq 3}}^{\infty} \frac{j_1 A_{j}(L^*)}{j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_\Lambda^*} \cos(j \cdot \theta^*) = L_0^* - \delta L^*$$

$$\Lambda = \Lambda^* - \sum_{\substack{j = -\infty \\ j_1, j_2 \neq 0 \\ j_1 \neq -1, j_2 \neq 3}}^{\infty} \frac{j_2 A_{j}(L^*)}{j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_\Lambda^*} \cos(j \cdot \theta^*) = \Lambda_0^* - \delta \Lambda^*$$

$$\lambda = \lambda^* - \sum_{\substack{j = -\infty \\ j_1, j_2 \neq 0 \\ j_1 \neq -1, j_2 \neq 3}}^{\infty} \frac{\partial A_{j}(L^*)}{\partial L^*} \frac{\sin(j \cdot \theta^*)}{j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_\Lambda^*} = n^* t + \lambda_0^* - \delta \lambda^*$$

$$\lambda_1 = \lambda_1^* - \sum_{\substack{j = -\infty \\ j_1, j_2 \neq 0 \\ j_1 \neq -1, j_2 \neq 3}}^{\infty} \frac{\partial A_{j}(L^*)}{\partial \Lambda^*} \frac{\sin(j \cdot \theta^*)}{j_1 \nu_L^* + j_2 \nu_\Lambda^*} = \lambda_1^* = n_1 t + \lambda_{10}, \tag{4.27}$$

donde $L_0^*, \Lambda_0^*, \lambda_0^*, \lambda_{10}, n^*$ y n_1 son constantes mientras que $\delta L, \delta \Lambda$ y $\delta \lambda$ son términos periódicos.

Por último al Hamiltoniano reducido le agregamos los términos seculares y resonantes que quitamos, evaluados en las nuevas variables, por lo que el Hamiltoniano del problema de 3 cuerpos restringido hasta segundo orden en excentricidad e inclinación, promediado en los ángulos de corto período y en la vecindad de la RMMJ 3:1 es

$$F = -\frac{\mu^{2}}{2L^{*2}} + n_{1}\Lambda^{*} - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \Big[A_{00} + A_{10}(e^{*2} + e_{1}^{2}) + A_{20}(s^{*2} + s_{1}^{2}) + A_{30}e^{*}e_{1}\cos(\varpi_{1}^{*} - \varpi^{*}) + A_{40}s^{*}s_{1}\cos(\Omega_{1}^{*} - \Omega^{*}) + A_{40}e^{*}e_{1}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - 2\varpi^{*}) + B_{43}e^{*}e_{1}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - \varpi^{*} - \varpi_{1}^{*}) + A_{53}e_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - 2\varpi_{1}^{*}) + B_{63}s^{*2}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - 2\Omega^{*}) + A_{73}s^{*}s_{1}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - \Omega^{*} - \Omega_{1}^{*}) + B_{83}s_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1}^{*} - \lambda^{*} - 2\Omega_{1}^{*}),$$

$$(4.28)$$

donde los coeficientes A_{i0} y B_{i3} están evaluados en la resonancia exacta dadas por

$$\alpha_{3:1}^* = \frac{a_{res}^*}{a_1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2/3} \left(\frac{m_0}{m_0 + m_1}\right)^{1/3} \approx 0.480596949,$$
(4.29)

tomando $m_0 = 1m_{\odot}$ y $m_1 = 9.54786 \times 10^{-4} m_{\odot}$. Tomando éste valor para α^* definimos los coeficientes A_k como

$$A_{0} = A_{00} = \frac{1}{2}b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 1.06671$$

$$A_{1} = A_{10} = \frac{1}{8}[\alpha_{3:1}^{*2}D^{2} + 2\alpha_{3:1}^{*}D]b_{\frac{1}{2}}^{(0)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 0.142097$$

$$A_{2} = A_{20} = \frac{1}{2}[-\alpha_{3:1}^{*}]b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{3:1}^{*}) = -0.568387$$

$$A_{3} = A_{30} = \frac{1}{4}[-\alpha_{3:1}^{*2}D^{2} - 2\alpha_{3:1}^{*}D + 2]b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha_{3:1}^{*}) = -0.165406$$

$$A_{4} = A_{40} = [\alpha_{3:1}^{*}]b_{\frac{3}{2}}^{(1)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 1.13677$$

$$A_{5} = A_{33} = \frac{1}{8}[\alpha_{3:1}^{*2}D^{2} + 10\alpha_{3:1}^{*}D + 21]b_{\frac{1}{2}}^{(3)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 0.5981$$

$$A_{6} = A_{43} = \frac{1}{4}[-\alpha_{3:1}^{*2}D^{2} - 10\alpha_{3:1}^{*}D - 20]b_{\frac{1}{2}}^{(2)}(\alpha_{3:1}^{*}) = -2.21124$$

$$A_{7} = A_{53} = \frac{1}{8}[\alpha_{3:1}^{*2}D^{2} + 10\alpha_{3:1}^{*}D + 17]b_{\frac{1}{2}}^{(1)}(\alpha_{3:1}^{*}) - \frac{27\alpha_{3:1}^{*}}{8} = 0.362954$$

$$A_{8} = B_{63} = \frac{1}{2}[\alpha_{3:1}^{*}]b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 0.330812$$

$$A_{9} = B_{73} = [-\alpha_{3:1}^{*}]b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{3:1}^{*}) = -0.661625$$

$$A_{10} = B_{83} = \frac{1}{2}[\alpha_{3:1}^{*}]b_{\frac{3}{2}}^{(2)}(\alpha_{3:1}^{*}) = 0.330812,$$

$$(4.30)$$

y obviando todos lo asteriscos, el Hamiltoniano finalmente nos queda

$$F = -\frac{\mu^{2}}{2L^{2}} + n_{1}\Lambda - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \Big[A_{0} + A_{1}(e^{2} + e_{1}^{2}) + A_{2}(s^{2} + s_{1}^{2}) + A_{3}ee_{1}\cos(\varpi_{1} - \varpi) + A_{4}ss_{1}\cos(\Omega_{1} - \Omega) + A_{5}e^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\varpi) + A_{6}ee_{1}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - \varpi - \varpi_{1}) + A_{7}e_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\varpi_{1}) + A_{8}s^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\Omega) + A_{9}ss_{1}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - \Omega - \Omega_{1}) + A_{10}s_{1}^{2}\cos(3\lambda_{1} - \lambda - 2\Omega_{1}) \Big].$$

$$(4.31)$$

Como estamos interesados en estudiar la dinámica asteroidal del P3CR, vamos a mostrar que es posible simplificar éste Hamiltoniano sin pérdida de generalidad. Como el plano orbital de Júpiter es constante, ya que estamos en el caso restringido, siempre es posible encontrar un sistema de coordenadas con origen en el Sol y cuyo eje z sea perpendicular a dicho plano. En éste sistema de coordenadas $s_1=0$, con lo cual, obviando los términos constantes, el Hamiltoniano queda

$$F = -\frac{\mu^2}{2L^2} + n_1 \Lambda - \frac{\mu_1}{a_1} \Big[e^2 [A_1 + A_5 \cos(3\lambda_1 - \lambda - 2\varpi)] + \\ + ee_1 [A_3 \cos(\varpi_1 - \varpi) + A_6 \cos(3\lambda_1 - \lambda - \varpi - \varpi_1)] + \\ + A_7 e_1^2 \cos(3\lambda_1 - \lambda - 2\varpi_1) + s^2 [A_2 + A_8 \cos(3\lambda_1 - \lambda - 2\Omega)] \Big].$$
 (4.32)

Como estamos trabajando alrededor de una resonancia de movimientos medios, es necesario introducir las variables resonantes $(S, M, P, \bar{\Lambda}, \sigma, \nu, \sigma_z, Q)$ las cuales resultan ser las variables naturales del problema. Estas, se encuentran definidas por los ángulos

$$\sigma = \frac{1}{2}(3\lambda_1 - \lambda - 2\varpi)$$

$$\nu = -\frac{1}{2}(3\lambda_1 - \lambda - 2\varpi_1)$$

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(3\lambda_1 - \lambda - 2\Omega)$$

$$Q = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda),$$
(4.33)

y pueden ser encontradas mediante una transformación canónica autónoma, usando la Ecuación (2.108), de tal manera que obtenemos

$$\begin{bmatrix} L \\ L - G \\ G - H \\ \Lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S \\ M \\ P \\ \bar{\Lambda} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Invirtiendo la relación

$$\begin{bmatrix} S \\ M \\ P \\ \bar{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L \\ L - G \\ G - H \\ \Lambda \end{bmatrix}. \tag{4.35}$$

Ya que el Hamiltoniano no depende del ángulo Q entonces $\bar{\Lambda}$ es constante, la cual podemos tomar $\bar{\Lambda} = 0$. Con ésta elección tenemos que $\Lambda = -3L$, con lo cual finalmente obtenemos que

$$S = (L - G) = \sqrt{\mu a}(1 - \sqrt{1 - e^2})$$

$$M = (L - G) + (G - H) + 2L = \sqrt{\mu a}(3 - \sqrt{1 - e^2}(1 - 2s^2))$$

$$P = (G - H) = \sqrt{\mu a}\sqrt{1 - e^2}2s^2,$$

$$(4.36)$$

mientras que los elementos orbitales quedan

$$a = \frac{(M - P - S)^{2}}{4\mu}$$

$$e^{2} = 1 - \left(\frac{M - P - 3S}{M - P - S}\right)^{2}$$

$$s^{2} = \frac{P}{M - P - 3S}.$$
(4.37)

Si $e \ll 1$ entonces $x = S/(M-P) \ll 1$, por lo que tomando la serie de Taylor alrededor de x = 0 y quedándonos a primer orden, podemos aproximar el cuadrado de la excentricidad por

$$e^2 = 1 - \left(\frac{1 - 3x}{1 - x}\right)^2 \approx \frac{4S}{M - P}.$$
 (4.38)

Además si $s \ll 1$, también tenemos que

$$s^2 = \frac{P}{M - P} \left(\frac{1}{1 - 3x} \right) \approx \frac{P}{M - P} (1 + 3x) \approx \frac{P}{M - P}.$$
 (4.39)

Por último, para mayor comodidad, dividimos la función perturbadora en tres funciones

$$R_{C} = \frac{4S}{M - P} \Big[A_{1} + A_{5} \cos(2\sigma) \Big]$$

$$R_{E} = \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{M - P}} \Big[A_{3} \cos(\sigma + \nu) + A_{6} \cos(\sigma - \nu) \Big] + e_{1} A_{7} \cos(2\nu)$$

$$R_{I} = \frac{P}{M - P} \Big[A_{2} + A_{8} \cos(2\sigma_{z}) \Big], \tag{4.40}$$

donde cada una ellas representa un modelo distinto (circular, elíptico e inclinado) y a la parte integrable como

$$F_0 = -\frac{2\mu^2}{(M - P - S)^2} - \frac{3n_1}{2}(M - P - S)$$
(4.41)

Con todo esto el Hamiltoniano finalmente queda

$$F = F_0(S, M, P) - \frac{\mu_1}{a_1} R_C(S, M, P, \sigma) - \frac{\mu_1 e_1}{a_1} R_E(S, M, P, \sigma, \nu) - \frac{\mu_1}{a_1} R_I(M, P, \sigma_z), \tag{4.42}$$

mientras que las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{split} \frac{dS}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\mu_1}{a_1} \frac{\partial R_C}{\partial \sigma} + \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\partial R_E}{\partial \sigma} \\ &= -\frac{\mu_1}{a_1} \frac{8S}{M - P} A_5 \sin(2\sigma) - \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{M - P}} \Big[A_3 \sin(\sigma + \nu) + A_6 \sin(\sigma - \nu) \Big] \\ \frac{dM}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \nu} = \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\partial R_E}{\partial \nu} \\ &= -\frac{\mu_1 e_1^2}{a_1} 2A_7 \sin(2\nu) - \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{M - P}} \Big[A_3 \sin(\sigma + \nu) - A_6 \sin(\sigma - \nu) \Big] \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \sigma_z} = \frac{\mu_1}{a_1} \frac{\partial R_I}{\partial \sigma_z} \\ &= -\frac{\mu_1}{a_1} \frac{2P}{M - P} A_8 \sin(2\sigma_z) \\ \frac{d\sigma}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial S} = \frac{\partial F_0}{\partial S} - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{\partial R_C}{\partial S} - \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\partial R_E}{\partial S} \\ &= -\frac{4\mu^2}{(M - P - S)^3} + \frac{3n_1}{2} - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{4}{M - P} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big] - \\ &- \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{M - P}} \Big[A_3 \cos(\sigma + \nu) + A_6 \cos(\sigma - \nu) \Big] \\ \frac{d\nu}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial M} = \frac{\partial F_0}{\partial M} - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{\partial R_C}{\partial M} - \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\partial R_E}{\partial M} - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{\partial R_I}{\partial M} \end{split}$$

$$= \frac{4\mu^{2}}{(M-P-S)^{3}} - \frac{3n_{1}}{2} + \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{4S}{(M-P)^{2}} \Big[A_{1} + A_{5} \cos(2\sigma) \Big] + \frac{\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\sqrt{S}}{(M-P)^{3/2}} \Big[A_{3} \cos(\sigma+\nu) + A_{6} \cos(\sigma-\nu) \Big] + \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{P}{(M-P)^{2}} \Big[A_{2} + A_{8} \cos(2\sigma_{z}) \Big]$$

$$\frac{d\sigma_{z}}{dt} = \frac{\partial F}{\partial P} = \frac{\partial F_{0}}{\partial P} - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{\partial R_{C}}{\partial P} - \frac{\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\partial R_{E}}{\partial P} - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{\partial R_{I}}{\partial P}$$

$$= -\frac{4\mu^{2}}{(M-P-S)^{3}} + \frac{3n_{1}}{2} - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{4S}{(M-P)^{2}} \Big[A_{1} + A_{5} \cos(2\sigma) \Big] - \frac{\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\sqrt{S}}{(M-P)^{3/2}} \Big[A_{3} \cos(\sigma+\nu) + A_{6} \cos(\sigma-\nu) \Big] - \frac{\mu_{1}}{a_{1}} \frac{M}{(M-P)^{2}} \Big[A_{2} + A_{8} \cos(2\sigma_{z}) \Big].$$

$$(4.43)$$

Antes de analizar casos particulares, es necesario hacer algunas aclaraciones:

- 1. De las Ecuaciones (4.36) es fácil ver que tanto M-P como M-P-S son positivos si $e, |s| \leq 1$, por lo que no producen singularidades en las ecuaciones de movimiento.
- 2. La ecuación para $\dot{\sigma}$ es singular para S=0. Siempre se puede utilizar variables canónicas rectangulares de la forma

$$x = \sqrt{2J}\cos(\theta)$$
$$y = \sqrt{2J}\sin(\theta)$$

y encontrar sus derivadas para demostrar que ésta es una singularidad ficticia como consecuencia que las coordenadas polares no están definidas en el origen. Sin embargo, para no hacer esas cuentas podemos razonar de la siguiente manera: S=0 solamente si e=0, esto significa que la órbita es circular, pero si ocurre ésto, el ángulo ϖ no está definido por lo que σ tampoco lo estaría, entonces para este caso particular no hay que tener en cuenta la ecuación $\dot{\sigma}$, independientemente de si ésta se encuentra definida o no.

- 3. En el caso circular la excentricidad de Júpiter $e_1=0$, esto significa que ϖ_1 no está definido por lo que ν tampoco lo estará, luego no tendremos en cuenta la ecuación para $\dot{\nu}$. Además $\dot{M}=0$ por lo que M es una constante de movimiento que como ya veremos parametriza el problema.
- 4. De igual manera si s=0 entonces Ω no estará definido por lo que σ_z tampoco, luego no tendremos en cuenta la ecuación para $\dot{\sigma}_z$. Además tendremos que inicialmente P=0 con lo cual la ecuación $\dot{P}=0$ nos dice que P=0 en todo instante de tiempo.

4.2. Caso Planar Circular

4.2.1. Ecuaciones de Movimiento

En este caso el Hamiltoniano toma la forma

$$F(S,\sigma;M) = -\frac{2\mu^2}{(M-S)^2} - \frac{3n_1}{2}(M-S) - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{4S}{M} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big], \tag{4.44}$$

ya que P=0 y M es un valor constante. Este último, para el caso circular, solo depende del semieje mayor y la excentricidad, por lo que dadas las condiciones iniciales (a_0, e_0) el

movimiento en el plano (a-e) será sobre la curva donde el valor de M permanezca constante. De la Ecuación (4.36) podemos encontrar una expresión para dicha curva

$$e(a) = \sqrt{1 - \left[3 - \frac{M(a_0, e_0)}{\sqrt{\mu a}}\right]} = \sqrt{1 - \left[3 - \sqrt{\frac{a_0}{a}}\left(3 - \sqrt{1 - e_0^2}\right)\right]}.$$
 (4.45)

En la Figura 4.1 se muestran distintas curvas en el plano (a,e) alrededor de la resonancia 3:1 $(a_{res} \approx 2.5 \text{ UA})$ para distintos valores de M.

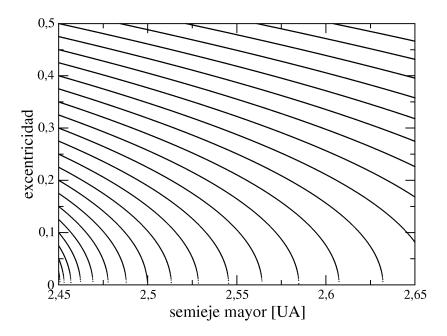


Figura 4.1: Curvas de M constantes.

Es importante remarcar que S solo depende del semieje y de la excentricidad, por lo que a cada punto en el plano (a - e) solo le corresponde un par de valores (S, M).

Finalmente las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{8\mu_1 A_5}{a_1 M} S \sin(2\sigma)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{4\mu^2}{(M-S)^3} + \frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1}{a_1 M} \left[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \right].$$
(4.46)

Cabe destacar que el caso planar circular es un problema de un grado de libertad y es por lo tanto totalmente integrable.

4.2.2. Puntos de Equilibrio

Los puntos de equilibrio ocurren para todos los valores de S y σ tales que sus derivadas sean nulas, por lo que tendremos el sistema de ecuaciones

$$0 = -\frac{8\mu_1 A_5}{a_1 M} S \sin(2\sigma)$$

$$0 = -\frac{4\mu^2}{(M-S)^3} + \frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1}{a_1 M} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big]. \tag{4.47}$$

La primera de las ecuaciones nos dice que necesariamente S=0 o que $\sigma=\frac{n\pi}{2}$, donde n es cualquier número entero.

En el caso en que S=0, la segunda ecuación no es necesaria ya que σ no se encuentra definido, por lo que el punto de equilibrio es

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ M_0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ned \\ ned \\ ned \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

donde ned significa que no está definido.

En cambio si $\sigma = \frac{n\pi}{2}$, obtenemos la ecuación

$$0 = -\frac{4\mu^2}{(M-S)^3} + \frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1}{a_1 M} \Big[A_1 + A_5 \cos(n\pi) \Big]. \tag{4.49}$$

para S. Teniendo en cuenta que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ y definiendo los coeficientes $B_{\pm} = A_1 \pm A_2$ encontramos que

$$S_{\pm}(M) = M - \left(\frac{4\mu^2}{\frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1 B_{\pm}}{a_1 M}}\right)^{1/3},\tag{4.50}$$

por lo que las soluciones son

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{+} \\ M_{0} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, \pi \\ ned \\ ned \end{pmatrix}$$
 (4.51)

у

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{-} \\ M_{0} \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2, 3\pi/2 \\ ned \\ ned \end{pmatrix}. \tag{4.52}$$

Ya que $S_{\pm} \geq 0$, hay que encontrar los valores de M para los cuales se cumple esta condición. Tomando el caso límite $S_{\pm} = 0$ obtenemos la ecuación

$$M^{3} - \frac{8\mu_{1}B_{\pm}}{3n_{1}a_{1}}M^{2} - \frac{8\mu^{2}}{3n_{1}} = 0, (4.53)$$

la cual es una ecuación cúbica en M. La cantidad de raíces reales, depende del signo del discriminante, el cual, definiendo los coeficiente $a_{\pm}=-8\mu_1B_{\pm}/3n_1a_1$ y $b=-8\mu^2/3n_1$, es

$$\Delta_{\pm} = \frac{4a_{\pm}^3 c + 27c^3}{108} < 0. \tag{4.54}$$

Esto nos dice que la Ecuación 4.53 posee solamente una raíz real. Si definimos

$$q_{\pm} = \frac{2a_{\pm}^{3}}{27} + c$$

$$u_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{q_{\pm}}{2} + \sqrt{\Delta_{\pm}}}$$

$$v_{\pm} = \sqrt[3]{-\frac{q_{\pm}}{2} - \sqrt{\Delta_{\pm}}},$$
(4.55)

las soluciones están dadas por la ecuación

$$M_{\pm} = u_{\pm} + v_{\pm} - a_{\pm}/2,\tag{4.56}$$

cuyos valores numéricos son

$$M_{+} = 19.8794$$

 $M_{-} = 19.8649.$ (4.57)

Resumiendo lo obtenido

- El problema planar circular tiene 5 puntos de equilibrio, de los cuales los puntos S_+ son simétricos respecto del origen, al igual que los puntos S_- .
- \blacksquare El origen es siempre un punto de equilibrio, por lo que es independiente del valor de M.
- A partir del valor de $M=M_-$ el origen bifurca en dos puntos de equilibrio en $\sigma=\pi/2$ y $\sigma=3\pi/2$, simétricos respecto del primero.
- Por último, a partir de $M=M_+$ el origen vuelve a bifurcar en dos nuevos puntos de equilibrio en $\sigma=0$ y $\sigma=\pi$ también simétricos respecto de éste.

4.2.3. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio

Para estudiar la estabilidad de los puntos críticos pasamos a las variables cartesianas canónicas de Poincaré

$$x = \sqrt{2S}\cos(\sigma)$$

$$y = \sqrt{2S}\sin(\sigma).$$
 (4.58)

De esta forma, el Hamiltoniano en las variables cartesianas se escribe como

$$F(x,y;M) = -\frac{2\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^2} - \frac{3}{2}n_1(M - \frac{x^2 + y^2}{2}) - \frac{2\mu_1}{a_1M}\left[(A_1 + A_5)x^2 + (A_1 - A_5)y^2\right]$$
(4.59)

Si se grafican las curvas de F constante en el plano (x - y), podemos apreciar la simetría ya mencionada sobre los ejes x e y (Figuras 4.2).

Las ecuaciones de movimiento, están dadas por las ecuaciones de Hamilton

$$\dot{x} = -\frac{\partial F}{\partial y} = -\left(\frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1(A_1 - A_5)}{a_1 M} - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right) y$$

$$= -\left(p_1(M) - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right) y = f_x$$

$$\dot{y} = \frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1(A_1 + A_5)}{a_1 M} - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right) x$$

$$= \left(p_2(M) - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right) x = f_y, \tag{4.60}$$

donde los puntos de equilibrio son

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 = \pm \sqrt{2S_-} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 = \pm \sqrt{2S_+} \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.61}$$

uno en el origen, dos sobre eje y y dos sobre el eje x, los cuales son simétricos respecto del origen, por lo que sólo nos basta analizar la estabilidad de uno solo por eje.

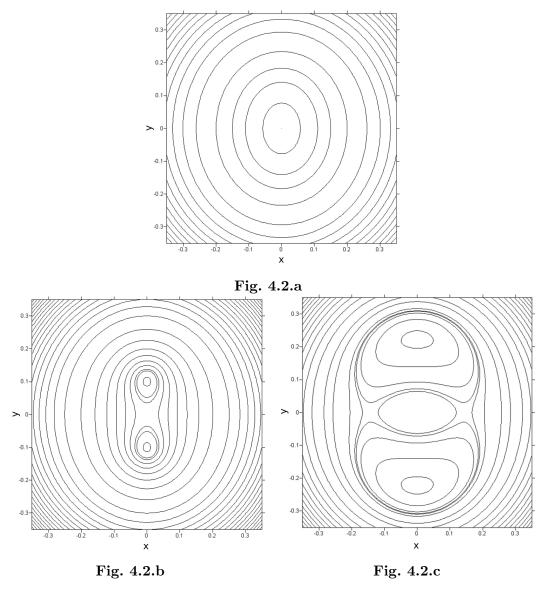


Figura 4.2: Curvas de Hamiltoniano constante para diferentes valores de M.

Luego, hacemos una aproximación lineal de la dinámica alrededor de cada punto de equilibrio $x = x_c$. Para esto, primero desarrollamos la función f, alrededor del punto crítico

$$\dot{x} = f(x_c) + \nabla f(x_c)(x - x_c) + \cdots, \tag{4.62}$$

donde $f(x_c) = 0$. Realizando el cambio de variables $z = x - x_c$ y truncando el desarrollo a primer orden, obtenemos la ecuación linealizada

$$\dot{z} = \nabla f(x_c) \ z,\tag{4.63}$$

por lo que la estabilidad de la Ecuación (4.62), se reduce a estudiar la estabilidad de la Ecuación (4.63). Las variedades estables (inestables o centrales) de la ecuación linealizada son tangentes a las variedades estables (inestables o centrales) correspondiente a (4.62) (Verhulst 1990 [72]). Para esto, se debe estudiar los autovalores de la matriz

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} = a_{11} & \frac{\partial f_x}{\partial y} = a_{12} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} = a_{21} & \frac{\partial f_y}{\partial y} = a_{22} \end{pmatrix},$$
(4.64)

donde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y se encuentran evaluada en los (x, y) correspondientes a los puntos de equilibrio. Los coeficientes de la matriz, para la ecuación linealizada son

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = a_{11} = \frac{12\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} xy$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = a_{12} = -\left[p_1 - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right] + \frac{12\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} y^2$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = a_{21} = \left[p_2 - \frac{4\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^3}\right] - \frac{12\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} x^2$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = a_{22} = -\frac{12\mu^2}{\left(M - \frac{x^2 + y^2}{2}\right)^4} xy.$$
(4.65)

La ecuación para los autovalores de una matriz 2×2 , con coeficientes a_{ij} es

$$\lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0. \tag{4.66}$$

Ya que para todos los puntos de equilibrio, al menos una de las variables se anula, entonces los coeficientes $a_{11}=a_{22}=0$, por lo que nos queda por resolver la ecuación

$$\lambda^2 = a_{12}(M; x_c) \cdot a_{21}(M; x_c), \tag{4.67}$$

con lo que se reduce a tres posibilidades

- $\lambda^2 > 0$ dos autovalores reales e iguales de distinto signo: un punto silla (o hiperbólico).
- $\lambda^2 < 0$ dos autovalores complejos conjugados con parte real nula: un centro.
- $\lambda^2 = 0$ dos autovalores nulos: punto crítico degenerado (punto de bifurcación).

Los coeficientes a_{12} y a_{21} dependen explícitamente del punto de equilibro que estemos analizando, por lo que tenemos

$$(x_c, y_c) = (0, 0)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = a_{12} = -\left[p_1 - \frac{4\mu^2}{M^3}\right]$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = a_{21} = \left[p_2 - \frac{4\mu^2}{M^3}\right].$$
(4.68)

•
$$(x_c, y_c) = (0, y_1)$$
, y definiendo $\bar{M}_1 = M - \frac{y_1^2}{2}$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = a_{12} = -\left[p_1 - \frac{4\mu^2}{\bar{M}_1^3}\right] + \frac{12\mu^2}{\bar{M}_1^4} y_1^2$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = a_{21} = \left[p_2 - \frac{4\mu^2}{\bar{M}_1^3}\right]. \tag{4.69}$$

•
$$(x_c, y_c) = (x_2, 0)$$
, y definiendo $\bar{M}_2 = M - \frac{x_2^2}{2}$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = a_{12} = -\left[p_1 - \frac{4\mu^2}{\bar{M}_2^3}\right]
\frac{\partial f_y}{\partial x} = a_{21} = \left[p_2 - \frac{4\mu^2}{\bar{M}_2^3}\right] - \frac{12\mu^2}{\bar{M}_2^4} x_2^2.$$
(4.70)

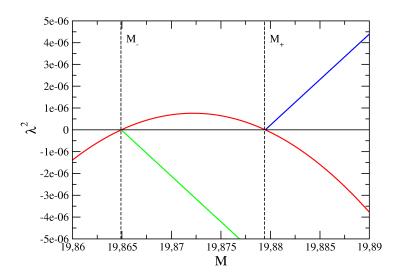


Figura 4.3: Autovalores para distintos valores de M. (x, y) = (0, 0) en rojo, $(x_c, y_c) = (0, y_1)$ en verde y $(x_c, y_c) = (x_2, 0)$ en azul. La unidad de M es $UA^2/a\tilde{n}o$.

Los resultados numéricos se observan en la Figura 4.3. Cada curva corresponde al cuadrado del autovalor de cada uno de los puntos de equilibrio en función de M. La curva roja corresponde al autovalor en el origen, el cual para valores menores que M_- es siempre negativo, por lo que es un centro. Cuando $M=M_-$ éste bifurca y se convierte en un punto hiperbólico. El nuevo punto de equilibrio (curva verde) es un centro y corresponde al punto de equilibrio sobre el eje y. En $M=M_+$, el origen vuelve a bifurcar volviendo a ser un centro, mientras que aparece un nuevo punto de equilibrio hiperbólico (curva azul) el cual se corresponde con el punto crítico sobre el eje x. Resumiendo para cada uno de los puntos de equilibrio tenemos

- 1. Para el punto crítico $(x_c, y_c) = (0, 0)$:
 - Si $M < M_{-}$ el origen es un centro.
 - En $M = M_{-}$ tenemos la primera bifurcación, el nuevo punto de equilibrio yace sobre el eje y.

- Si $M_- < M < M_+$ el origen se convierte en un punto hiperbólico.
- En $M = M_+$ tenemos la segunda bifurcación, el nuevo punto de equilibrio yace sobre el eje x.
- Si $M > M_+$ vuelve a convertirse en un centro.
- 2. Para el punto crítico $(x_c, y_c) = (0, \pm y_1)$:
 - Si $M < M_{-}$ éste no existe.
 - Aparece en $M = M_{-}$, bifurca desde el origen.
 - Si $M > M_{-}$ es un centro.
- 3. El punto crítico $(x_c, y_c) = (\pm x_2, 0)$:
 - Si $M < M_+$ éste no existe.
 - Aparece en $M = M_+$, bifurca desde el origen.
 - Si $M > M_+$ es un punto silla.

Teniendo en cuenta que $2S = x^2 + y^2$, podemos graficar M vs. S_c , donde $2S_c = x_c^2 + y_c^2$. Esto se observa en la Figura 4.4.

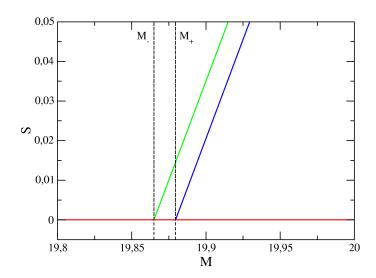


Figura 4.4: Valores críticos de S en función de M. (x,y)=(0,0) en rojo, $(x,y)=(0,y_1)$ en verde y $(x,y)=(x_2,0)$ en azul. La unidad de M es $UA^2/a\tilde{n}o$.

4.2.4. Separatriz del Problema Circular

Si tomamos, por ejemplo, una condición inicial (a_0, e_0) tal que $M > M_-$ o $M > M_+$, el movimiento en el plano a-e será sobre la curva de M constante correspondiente. Sin embargo, la Figura 4.2.b o 4.2.c, respectivamente, muestran regiones de movimiento diferentes para ese mismo valor de M. En el primer caso tenemos una zona de libración alrededor de $\sigma = \pi/2$ y una ciculación externa alrededor del origen, mientras que en el segundo caso tenemos una circulación interna en torno al origen, una zona de libración alrededor de y_1 y una circulación externa que contiene en su interior a las otras dos zonas. Ya que éstas regiones se encuentran aisladas

entre sí (una condición en la zona de libración no puede saltar a las zonas de circulación, por ejemplo), entonces existe una órbita que separa los tipos de movimientos. Estas órbitas son las variedades estables e inestables del punto hiperbólico de cada gráfico. Las Figuras 4.5 muestran en color rojo las variedades estables e inestables a la que denominaremos separatriz. La Figura 4.5.a muestra las variedades del punto hiperbólico del origen para $M \in (M_-, M_+)$. Para el caso en que $M > M_+$, el punto hiperbólico corresponde al punto $(0, x_c)$ (Figura 4.5.b).

En la Figura 4.5.b, si tomamos la semirecta que va desde el origen en dirección de $\sigma = \pi/2$, la separatriz corta a ésta en dos puntos $(0, y_{s1})$ y $(0, y_{s2})$. A estos puntos le corresponden dos valores de S, los cuales junto al valor de M utilizado, se corresponden con un par de puntos en el plano a-e. Si ahora ésto lo hacemos para todos los valores de $M > M_+$ obtenemos la separatriz en el plano a-e, al cual llamaremos plano representativo del problema circular (Figura 4.6).

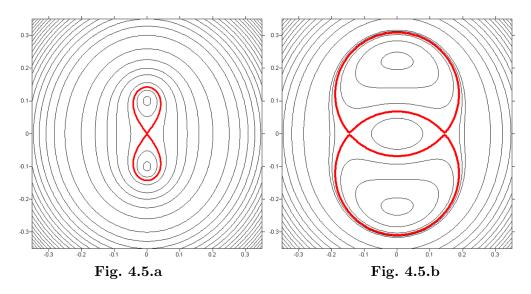


Figura 4.5: Separatriz del problema circular.

Resumiendo, el Hamiltoniano del problema planar de tres cuerpos restringido circular (PP3CRC) escrito en variables resonantes y promediado respecto de los términos de corto período, es un problema de un grado de libertad completamente integrable, aún cuando las funciones S(t) y $\sigma(t)$ no puedan encontrarse analíticamente.

La acción M es una constante de movimiento, por lo que el semieje y la excenticidad se encuentran acoplados. Esto quiere decir que una condición inicial (a_0, e_0) se mueve en el plano a - e sobre una curva de M constante, dada por la Ecuación (4.45).

Una vez dadas las condiciones iniciales, los movimientos posibles sólo dependen del valor de M:

1. $M < M_{-}$:

- Un único punto crítico en el origen (centro).
- σ : Circula en sentido horario.

2. $M \ge M_-$ y $M < M_+$:

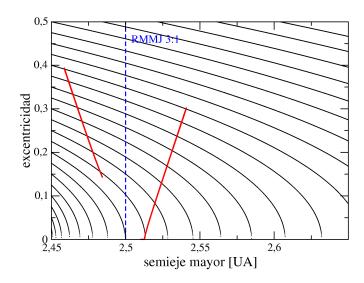


Figura 4.6: Plano representativo. En negro las curvas de M constante y en rojo la separatriz del problema circular.

- El punto crítico en el origen bifurca en dos centros $(0, \pm y_1)$, volviéndose un punto hiperbólico.
- σ : Libra alrededor de $\pm \frac{\pi}{2}$ cerca de los puntos críticos $(0, \pm y_1)$.
- σ : Circula en sentido horario para valores mayores o igual al valor del Hamiltoniano en el origen.

3. $M \ge M_+$:

- El punto crítico en el origen bifurca en dos puntos hiperbólicos $(\pm x_1, 0)$, volviéndo a ser un centro.
- σ : Libra alrededor de $\pm \frac{\pi}{2}$ cerca de los puntos críticos $(0, \pm y_1)$
- σ : Hay dos zonas de circulación:
 - Interna: sentido antihorario
 - Externa: sentido horario

4.2.5. Acciones y Frecuencias

Ahora queremos encontrar la transformación canónica para pasar a las variables ánguloacción. Ya que este es un problema de un grado de libertad, como vimos en el capítulo 2, estas variables están dadas por el método de Henrard (1990 [73]):

$$J_{1} = \frac{1}{2\pi} \oint Sd\sigma$$

$$J_{2} = M$$

$$\psi_{1} = \frac{2\pi}{T_{1}}t$$

$$\psi_{2} = \nu - \rho(\psi_{1}, J_{1}, J_{2}), \qquad (4.71)$$

donde T_1 es el período asociado a σ y ρ es una función periódica en ψ_1 .

Así el Hamiltoniano puede ser escrito como

$$F = F_0(J_1, J_2), (4.72)$$

y las frecuencias fundamentales son

$$\omega_1 = \frac{d\psi_1}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial J_1} = \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\omega_2 = \frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\partial F_0}{\partial J_2} = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{\partial F_0}{\partial M} dt.$$
(4.73)

La Figura 4.7 muestra las curvas de acción J_1 constante para la resonancia 3:1 en el plano a-e, las cuales, como ya hemos mencionado, representan el área de las órbitas en el plano x-y. Estas curvas de acción constante, son prácticamente horizontales fuera de la resonancia. Se pegan a la separatriz y se vuelven verticales dentro de la resonancia.

4.3. Caso Elíptico

4.3.1. Ecuaciones de Movimiento

En el caso elíptico tenemos que $e_1 \neq 0$, por lo que el Hamiltoniano es

$$F(S, M, \sigma, \nu) = -\frac{2\mu^2}{(M - S)^2} - \frac{3n_1}{2}(M - S) - \frac{\mu_1}{a_1} \frac{4S}{M} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big] + \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{2\sqrt{S}}{\sqrt{M}} \Big[A_3 \cos(\sigma + \nu) + A_6 \cos(\sigma - \nu) \Big], \tag{4.74}$$

las ecuaciones de movimiento son

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{8\mu_1 A_5}{a_1} \frac{S}{M} \sin(2\sigma) - \frac{2\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} \Big[A_3 \sin(\sigma + \nu) + A_6 \sin(\sigma - \nu) \Big]
\frac{dM}{dt} = -\frac{2\mu_1 e_1^2 A_7}{a_1} \sin(2\nu) - \frac{2\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} \Big[A_3 \sin(\sigma + \nu) - A_6 \sin(\sigma - \nu) \Big]
\frac{d\sigma}{dt} = -\frac{4\mu^2}{(M - S)^3} + \frac{3n_1}{2} - \frac{4\mu_1}{a_1} \frac{1}{M} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big] -
- \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{M}} \Big[A_3 \cos(\sigma + \nu) + A_6 \cos(\sigma - \nu) \Big]$$

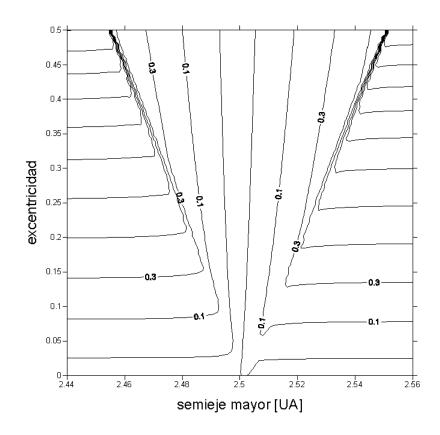


Figura 4.7: Curvas de nivel de acciones constantes.

$$\frac{d\nu}{dt} = \frac{4\mu^2}{(M-S)^3} - \frac{3n_1}{2} + \frac{4\mu_1}{a_1} \frac{S}{M^2} \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big] + \frac{\mu_1 e_1}{a_1} \frac{\sqrt{S}}{M^{3/2}} \Big[A_3 \cos(\sigma + \nu) + A_6 \cos(\sigma - \nu) \Big].$$
(4.75)

4.3.2. Puntos de Equilibrio

El sistema de ecuaciones para encontrar los puntos de equilibrio surge anulando las derivadas

$$0 = -\frac{8\mu_{1}A_{5}}{a_{1}} \frac{S}{M} \sin(2\sigma) - \frac{2\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} \Big[A_{3} \sin(\sigma + \nu) + A_{6} \sin(\sigma - \nu) \Big]$$

$$0 = -\frac{2\mu_{1}e_{1}^{2}A_{7}}{a_{1}} \sin(2\nu) - \frac{2\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{M}} \Big[A_{3} \sin(\sigma + \nu) - A_{6} \sin(\sigma - \nu) \Big]$$

$$0 = -\frac{4\mu^{2}}{(M - S)^{3}} + \frac{3n_{1}}{2} - \frac{4\mu_{1}}{a_{1}} \frac{1}{M} \Big[A_{1} + A_{5} \cos(2\sigma) \Big] - \frac{\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{1}{\sqrt{S}\sqrt{M}} \Big[A_{3} \cos(\sigma + \nu) + A_{6} \cos(\sigma - \nu) \Big]$$

$$0 = \frac{4\mu^{2}}{(M - S)^{3}} - \frac{3n_{1}}{2} + \frac{4\mu_{1}}{a_{1}} \frac{S}{M^{2}} \Big[A_{1} + A_{5} \cos(2\sigma) \Big] + \frac{\mu_{1}e_{1}}{a_{1}} \frac{\sqrt{S}}{M^{3/2}} \Big[A_{3} \cos(\sigma + \nu) + A_{6} \cos(\sigma - \nu) \Big]. \tag{4.76}$$

En el caso en el que S=0, entonces $\dot{S}=0$ y σ no esta definido, por lo que el sistema queda

reducido a

$$0 = e_1 A_7 \sin(2\nu)$$

$$0 = \frac{4\mu^2}{M^3} - \frac{3n_1}{2},$$
(4.77)

las soluciones son

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ned \\ 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2 \\ ned \end{pmatrix}, \tag{4.78}$$

donde
$$\xi = \left(\frac{8\mu^2}{3n_1}\right)^{1/3}$$
.

Para encontrar los demás puntos de equilibrio definimos la variable auxiliar $\rho = \sqrt{S}/e_1\sqrt{M}$ y las funciones

$$G(S,M) = \frac{4\mu^2}{(M-S)^3} - \frac{3n_1}{2}$$

$$H(S,M,\sigma,\nu) = 4\rho^2 \Big[A_1 + A_5 \cos(2\sigma) \Big] + \rho \Big[A_3 \cos(\sigma+\nu) + A_6 \cos(\sigma-\nu) \Big]. \quad (4.79)$$

Sacando factor común de las constantes, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$0 = 4A_{5}\rho \sin(2\sigma) + \left[A_{3}\sin(\sigma + \nu) + A_{6}\sin(\sigma - \nu) \right]$$

$$0 = A_{7}\sin(2\nu) + \rho \left[A_{3}\sin(\sigma + \nu) - A_{6}\sin(\sigma - \nu) \right]$$

$$0 = -G(S, M) - \frac{\mu_{1}e_{1}^{2}}{a_{1}M}H(S, M, \sigma, \nu)$$

$$0 = G(S, M) + \frac{\mu_{1}e_{1}^{2}}{a_{1}S}H(S, M, \sigma, \nu), \tag{4.80}$$

donde $S \neq 0 \ (x \neq 0)$. Si nos enfocamos en el sistema reducido

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -\kappa/M \\ 1 & \kappa/S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} G \\ H \end{bmatrix}$$
 (4.81)

donde la constante $\kappa = \frac{\mu_1 e_1^2}{a_1} \neq 0$, éste tiene solución trivial siempre que la matriz A sea invertible. Ya que su determinante es

$$\det A = -\frac{\kappa(M-S)}{MS} \neq 0, \tag{4.82}$$

las funciones G y H deben anularse simultáneamente para satisfacer las dos últimas Ecuaciones de (4.80).

Usando que G=0, obtenemos las acciones S y M en función de la variable auxiliar x

$$S = \frac{e_1^2 \rho}{1 - e_1^2 \rho} \xi$$

$$M = \frac{1}{1 - e_1^2 \rho} \xi,$$
(4.83)

por lo que finalmente obtenemos el sistema de ecuaciones

$$0 = \bar{A}_5 \rho \sin(2\sigma) + \left[A_3 \sin(\sigma + \nu) + A_6 \sin(\sigma - \nu) \right]$$

$$0 = A_7 \sin(2\nu) + \rho \left[A_3 \sin(\sigma + \nu) - A_6 \sin(\sigma - \nu) \right]$$

$$0 = \rho \left[\bar{A}_1 + \bar{A}_5 \cos(2\sigma) \right] + \left[A_3 \cos(\sigma + \nu) + A_6 \cos(\sigma - \nu) \right], \tag{4.84}$$

redefiniendo $\bar{A}_i = 4A_i$. Las incógnitas ahora son (x, σ, ν) .

Es fácil de ver que las únicas soluciones sobre los ejes $x=\sqrt{2S}\cos\sigma,\ y=\sqrt{2S}\sin\sigma,\ u=\sqrt{2M}\cos\nu$ y $v=\sqrt{2M}\sin\nu$ son

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_1 = \frac{e_1^2 \rho_1}{1 - e_1^2 \rho_1} \xi \\ M_1 = \frac{1}{1 - e_1^2 \rho_1} \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ned \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ \pi \\ ned \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} S \\ M \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_2 = \frac{e_1^2 \rho_2}{1 - e_1^2 \rho_2} \xi \\ M_2 = \frac{1}{1 - e_1^2 \rho_2} \xi \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \sigma \\ \nu \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ \pi/2 \\ ned \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\pi/2 \\ 3\pi/2 \\ ned \end{pmatrix},$$

$$\text{donde } \rho_1 = \frac{-(A_3 + A_6)}{4(A_1 + A_5)} \text{ y } \rho_2 = \frac{-(A_3 - A_6)}{4(A_1 - A_5)}.$$

$$(4.85)$$

Para demostrar que estos son los únicos puntos de equilibrio usaremos las dos primeras Ecuaciones de (4.84). Usando las identidades trigonométricas de la suma y resta del seno, y definiendo las constantes $C_{\pm} = A_3 \pm A_6$, podemos reescribirlas como

$$0 = 2\bar{A}_5 \rho \sin \sigma \cos \sigma + C_+ \sin \sigma \cos \nu + C_- \cos \sigma \sin \nu$$

$$0 = 2A_7 \sin \nu \cos \nu + \rho \Big[C_- \sin \sigma \cos \nu + C_+ \cos \sigma \sin \nu \Big].$$
(4.86)

Despejando ρ de las dos ecuaciones e igualándolas obtenemos

$$4\bar{A}_5 A_7 \sin \sigma \cos \sigma \sin \nu \cos \nu = C_- C_+ \left[\sin^2 \sigma \cos^2 \nu + \cos^2 \sigma \sin^2 \nu\right] + \left[(C_-^2 + C_+^2) \sin \sigma \cos \sigma \sin \nu \cos \nu\right]. \tag{4.87}$$

Si pasamos dividiendo $\sin\sigma\cos\sigma\sin\nu\cos\nu$ podemos llegar a la ecuación

$$\frac{4\bar{A}_5A_7 - C^2}{C_-C_+} = \beta = \frac{q^2 + p^2}{qp},\tag{4.88}$$

donde $C^2=C_-^2+C_+^2$, $q=\tan\sigma$, $p=\tan\nu$ y $\beta\approx 1.3$ es una constante que obtenemos usando los coeficientes A_k definidos en (4.30). Completando cuadrados finalmente llegamos a la expresión

$$0 = \left(q - \frac{\beta p}{2}\right)^2 + \frac{4 - \beta^2}{4}q^2. \tag{4.89}$$

Ya que la cantidad $\frac{4-\beta^2}{4}\approx 0.57>0$, la única forma de satisfacer esta ecuación es la solución trivial q=p=0, esto significa $\sigma,\nu=\{0,\pi\}$, lo cual es un absurdo pues buscábamos soluciones fuera de los ejes. Esto significa que los únicos puntos de equilibrio yacen sobre los ejes coordenados.

4.4. Indicadores de Caos

Los indicadores de caos son una herramienta muy importante a la hora de estudiar un sistema dinámico. En esta sección presentaremos algunos de los indicadores más populares y utilizados en el área de la mecánica celeste, como el exponente de Lyapunov y el MEGNO. Además mostraremos su aplicación al problema de tres cuerpos restringido elíptico simulando una grilla de asteroides ficticios en la vecindad de la RMMJ 3:1.

4.4.1. Exponentes Característicos de Lyapunov

Deseamos estudiar la evolución temporal de órbitas vecinas en un sistema cualquiera. Para esto pensemos en un sistema dinámico cualquiera, definido por

$$\dot{x} = f(x),\tag{4.90}$$

donde $x, f(x) \in \mathbf{R}^N$ y \dot{x} es su derivada respecto del tiempo. Sea x(t) la solución de dicho sistema con condición inicial $x(t_0) = x_0$, y $\tilde{x}(t)$ la solución de una condición inicial infinitesimalmente cercana $\tilde{x}(t_0) = x_0 + \Delta x_0$.

Usando la Ecuación (4.90) para la segunda órbita

$$\dot{\tilde{x}} = f(\tilde{x}),\tag{4.91}$$

y expandiendo f en series de Taylor alrededor de x(t) tenemos

$$\dot{x} + \dot{\Delta x} = f(x + \Delta x) = f(x) + D_x f(x) \Big|_{x(t)} \Delta x + \cdots, \tag{4.92}$$

donde $D_x f$ es la matriz Jacobiana, la cual es una matriz $N \times N$. Ya que $\dot{x} = f(x)$, reemplazamos en el primer término y lo anulamos con el del lado derecho. Por último, despreciando los términos cuadráticos en adelante de la expansión, obtenemos

$$\dot{\Delta x} = D_x f(x) \Big|_{x(t)} \Delta x. \tag{4.93}$$

Si definimos la distancia $d(t) \in \mathbf{R}^N$ como

$$d(t, x_0, \Delta x_0) = ||\tilde{x}(t) - x(t)||, \tag{4.94}$$

entonces la Ecuación (4.93) puede escribirse como

$$\dot{d} = J \ d, \tag{4.95}$$

donde $J = D_x f(x) \Big|_{x(t)}$.

En principio, podemos obtener una solución completa integrando la trayectoria y resolviendo simultáneamente el sistema

$$\dot{x} = f(x)
\dot{d} = J d,$$
(4.96)

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$ y $d(t_0, x_0) = d_0$.

Finalmente definimos la razón de divergencia exponencial media de trayectorias cercanas como

$$\sigma(x_0) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||d(t, x_0)||}{||d(t_0, x_0)||} = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{||d(t)||}{||d_0||}.$$

$$(4.97)$$

Es posible mostrar que σ siempre existe, es finito y además que no depende de la métrica elegida. A σ se lo suele llamar número característico de Lyapunov.

Si una órbita es regular, es posible demostrar que la distancia crece en forma lineal con el tiempo $||d(t)||/||d_0|| \approx t$, por lo que $\sigma \to 0$. Si el movimiento es caótico, en cambio tendremos que la distancia crece exponencialmente $||d(t)||/||d_0|| \approx e^{\lambda t}$, por lo que $\sigma \to \lambda > 0$.

$$\gamma(t) = \frac{1}{t} \ln \frac{||d(t)||}{||d_0||},\tag{4.98}$$

entonces una órbita regular ($\sigma \to 0$) produce una recta lineal con pendiente negativa en el plano ($\ln \gamma(t), \ln t$). Por otro lado, mientras que para una órbita caótica tenemos ($\gamma \to \sigma \neq 0$), por lo que para un tiempo t >> 1, $\ln \gamma \to \ln \sigma = \ln \lambda$. La Figura 4.8 muestra esquemáticamente dos condiciones iniciales distintas, una regular y otra caótica. El tiempo $t_L = 1/\sigma$ es llamado el tiempo característico de Lyapunov, y es el tiempo que demora en manifestarse el caos. Para tiempos menores, la órbita parece regular.

El problema con este método, es que no podemos asegurar que una órbita sea realmente regular. Solo podemos decir que es regular hasta el tiempo integrado (si es que no se manifestó la componente caótica).

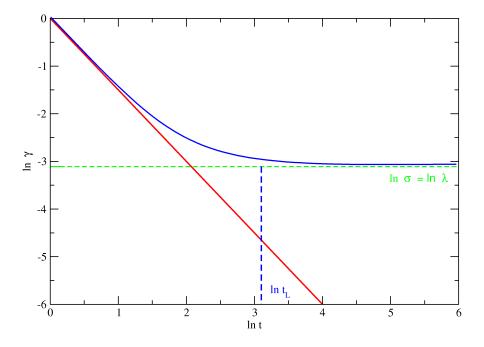


Figura 4.8: Exponente de Lyapunov. La curva roja representa una órbita regular y la curva azul a una órbita caótica, λ es el exponente característico y t_L es el tiempo de Lyapunov.

Para aplicar este método a la resonancia 3:1, tomamos una grilla de 10^4 de asteroides ficticios en el plano a-e, con condiciones iniciales $a \in [2.47, 2.53]$ UA, $e \in [0.0, 0.5]$, $i = M = \Omega = 0$ y $\omega = \pi$ (semieje, excentricidad, inclinación, anomalía media, longitud del nodo ascendente y argumento de pericentro respectivamente) para los asteroides y $a_1 = 5.2$ UA, $e_1 = 0.048$, $i_1 = M_1 = \Omega_1 = 0$ y $\omega_1 = \pi$ para Júpiter. Estas partículas fueron integradas por 10^5 años.

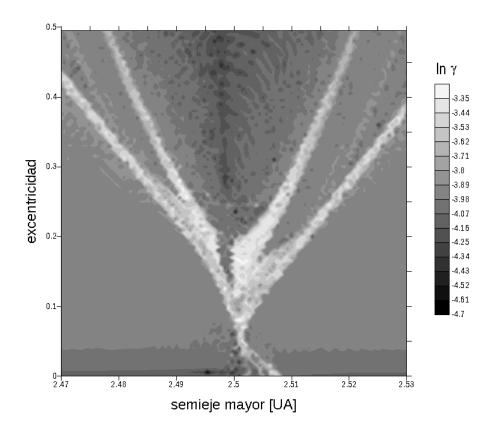


Figura 4.9: Exponente de Lyapunov. Regiones regulares y estables en la RMMJ 3:1. Las regiones oscuras corresponde a órbitas regulares mientras que las claras son caóticas.

La Figura 4.9 muestra los resultados. En escala de grises tenemos $\ln \gamma$ al tiempo final de integración, por lo que las regiones más oscuras son las más regulares, mientras que las regiones claras son regiones caóticas.

Podemos observar que la resonancia exacta es caótica a bajas excentricidades y regular para e > 0.2. También podemos apreciar el caos asociado a las ramas de la separatriz en las regiones claras externas. Además podemos ver dos conjuntos de regiones caóticas casi simétricas respecto de la resonancia exacta. La regiones más internas, y más claras, y unas regiones menos caótica que se observan a altas excentricidades, las cuales probablemente se deban a resonancias secundarias o seculares dentro de la zona de libración.

4.4.2. M.E.G.N.O. ("Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits")

La detección de caos con el exponente de Lyapunov presenta dos dificultades. La primera es el costo computacional que lleva el cálculo de dicha magnitud. La segunda es la falta de información sobre la órbita regular. Esto puede resolverse introduciendo el indicador MEGNO

(Mean Exponential Growth factor of Nearby Orbits), desarrollado por Cincotta et al., (2000 [74]).

La Ecuación (4.97) puede reescribirse como

$$\sigma = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{||\dot{d}||}{||d||} dt = \left\langle \frac{\dot{d}}{d} \right\rangle, \tag{4.99}$$

la cual es la forma integral. Para distinguir un comportamiento casi periódico de uno regular se agrega un factor de amplificación para intentar separar las componentes del movimiento, por lo que tendremos

$$Y = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{||\dot{d}(t)||}{||d(t)||} t \ dt. \tag{4.100}$$

donde Y es el parámetro MEGNO. Si la órbita es regular $(||d(t)|| = d_0(1 + \lambda_r t))$ tenemos que

$$Y(x_r) = 2\left[1 - \frac{\ln(1 + \lambda_r T)}{\lambda_r T}\right],\tag{4.101}$$

por lo que si $T \to \infty$, entonces $Y_r \to 2$. En general órbitas casi regulares tienen además una componente u(t) oscilatoria $(||d(t)|| = d_0(1 + \lambda t + u(t)))$, por lo que Y oscilará alrededor de 2.

En contraposición, si la órbita es caótica ($||d(t)|| = d_0 e^{\lambda_c t}$) tenemos que

$$Y(x_c) = \lambda_c T. \tag{4.102}$$

La integral no tiene límite formal si $T \to \infty$, aunque tenemos que se aproxima a una recta con pendiente λ_c . Si además agregamos una componente oscilatoria, tendremos oscilaciones alrededor de la recta. Esto implica que órbitas caóticas estarán representadas por valores de Y crecientes con el tiempo.

Para poder tener un valor asintótico, tomamos el promedio del MEGNO, ésto es

$$\bar{Y} = \frac{1}{T} \int_0^T Y dt, \tag{4.103}$$

de esta forma tendremos una ley asintótica para cada caso

$$\bar{Y}_r = \frac{Y_r}{T} = \frac{2}{T} \to 0$$

$$\bar{Y}_c = \frac{Y_c}{T} = \frac{\lambda_c T}{T} \to \lambda_c.$$
(4.104)

Una ventaja de esto es que $\bar{Y}_i = Y_i/T$ converge mucho más rápido que $\ln T/T$, por lo que separa mucho más rápidamente la componente regular de lo que lo hace el exponente de Lyapunov.

Como para el caso anterior, aplicamos el método a la resonancia 3:1 para las mismas condiciones iniciales. La Figura 4.10 muestra los resultados obtenidos. Al igual que con el exponente de Lyapunov, observamos que fuera de la resonancia las órbitas son regulares. Dentro también tenemos órbitas casi periódicas alrededor de la resonancia exacta para excentricidades mayores a 0.2 y órbitas caóticas para excentricidades menores. Por otro lado, la región caótica asociada a la separatriz es mucho más extensa que la vista en la Figura 4.9. Esta cubre prácticamente toda la resonancia, incluyendo las regiones más claras observadas en dicho gráfico, sin embargo, podemos apreciar dos regiones de órbitas casi periódicas, las cuales habíamos asociado a

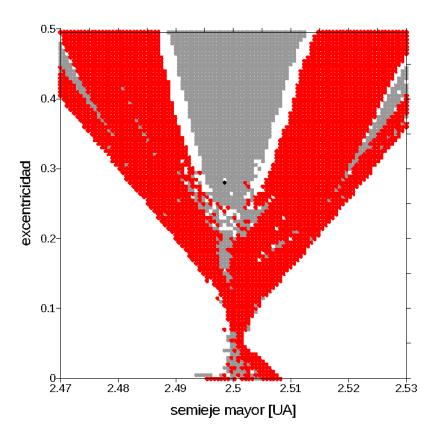


Figura 4.10: MEGNO promediado. Regiones regulares y estables en la RMMJ 3:1. Los puntos negros son órbitas periódicas ($\bar{Y} \in [0.0, 0.1)$), las regiones grises corresponden a órbitas casi periódicas ($\bar{Y} \in (0.1, 1.9]$), las regiones blancas corresponden a órbitas regulares ($\bar{Y} \in [1.9, 2.05]$) y las regiones rojas a órbitas caóticas ($\bar{Y} > 2.05$).

resonancias secundarias o seculares dentro de la zona de libración.

Como podemos observar, la estructura en "V" básica de la resonancia 3:1 se encuentra dada por el problema circular. Esta será de gran importancia más adelante, ya que nos permitirá elegir condiciones iniciales lo más cercanas posibles a dicha resonancia. Cuando pasamos al problema elíptico, seguimos observando la misma estructura en V, sólo que el ancho de la separatriz varía un poco (basta comparar la Figura 4.6 con las Figuras 4.9 y 4.10). Las principales diferencias entre ámbos problemas radican en las complejas estructuras que podemos observar dentro de la resonancia misma (caso elíptico), las cuales se corresponden a resonancias seculares y secundarias, además de la aparición de regiones correspondientes a órbitas caóticas. Este comportamiento se debe a que el problema no es más integrable, ya que posee un grado de libertad más que el caso circular. Un tratamiento apropiado, el cual puede resultar mucho más extenso y complicado que el expuesto en este texto, escapa a los objetivos del trabajo. Sin embargo, como veremos más adelante, es importante de tener presente dicha estructura si se prentende analizar ciertos aspectos y características de los cruces a través de la resonancia 3:1, ya que las resonancias seculares pueden jugar un rol muy importante en los tiempos característicos de cruces para algunos asteroides con excentricidades bajas y migraciones lentas (o adiabáticas).

Capítulo 5

Simulaciones Numéricas

5.1. El Efecto Yarkovsky

Ivan Osipovich Yarkovsky (1844-1902), era un ingeniero civil que trabajaba en problemas científicos en sus tiempos libres. Fué el primero que propuso el efecto que hoy en día lleva su nombre. A mediados del año 1901, Yarkovsky escribió un panfleto donde notaba que el calentamiento diurno de un objeto rotante en el espacio experimentaría una fuerza que, aunque sea pequeña, podría causar una variación secular en la órbita apreciable.

El astrónomo Ernst J. Ópik (1893-1985), leyó el panfleto de Yarkovsky, propuso su posible importancia en el movimiento de los asteroides y meteoritos en el Sistema Solar (Öpik, 1951 [75]). Sin ningún calculo preciso, Öpik presentó una estimación básica de la magnitud del efecto, la cual resulta satisfactoria hasta hoy en día. Radzievskii (1952 [76]) desarrolló el primer modelo matemático detallado del efecto térmico para un objeto esférico.

Una descripción matemática más actual puede encontrarse en los trabajos de Rubincam (1995 [77] y 1998 [78]), Vokrouhlický (1998a [79], 1998b [80] y 1999 [81]), Vokrouhlický y Farinella (1998 [82] y 1999 [83]), Bottke et al. (2000 [84]) y Spitale y Greenberg (2001 [85] y 2002 [86]).

5.1.1. Descripción del Fenómeno

Los cuerpos del Sistema Solar absorven una parte de la luz que les llega del Sol, principalmente en la región del visible y reemiten en forma anisotrópica esta energía en forma de radiación térmica. Es un fenómeno no conservativo producido por el tiempo o retardo que dicha reemisión requiere, por una parte, y a la rotación del objeto por la otra, que se manifiesta como una fuerza neta que intenta modificar la órbita. Este efecto es irrelevante en asteroides con diámetros menores a 1 cm y despreciable en objetos con más de 20 km de diámetro, al menos en escalas de tiempo de 10^8-10^9 aos

En el efecto Yarkovsky existen dos componentes que actúan en forma simultánea: una componente diurna y una anual. La componente diurna depende de la velocidad de rotación, de su oblicuidad y de la distribución longitudinal de temperatura en la superficie. Para entender el efecto diurno pensamos en la distribución de temperatura sobre la superficie de la Tierra a lo largo del día. Las máximas temperaturas no ocurren al mediodía, sino que ocurren entre las 2 y 3 de la tarde (hora solar). Esto se debe a que la conductividad térmica es finita, por lo que, entre el momento en el que incide la luz y su respectiva reemisión térmica, transcurre una cierta cantidad de tiempo en la cual la Tierra rota un ángulo respecto de la dirección al

Sol. Por esta razón la dirección de máxima reemisión no será igual que la dirección de incidencia original, produciendo un torque que modifica la órbita. La componente diurna es mayor cuando el eje de rotación es perpendicular al plano orbital y es nula cuando es paralelo, en primera aproximación, ya que nunca lo es totalmente cuando la excentricidad es distinta de cero. Además produce que el semieje mayor del cuerpo aumente o disminuya, dependiendo si su rotación es prógrada o retrógrada, respectivamente.

Por otro lado, el efecto anual depende del movimiento de traslación alrededor del Sol y de la distribución latitudinal de temperatura en la superficie. Para comprender el efecto anual pensemos que en el hemisferio sur, el solsticio de verano ocurre en diciembre, sin embargo los meses de más calor son enero y febrero. Contrariamente a la componente diurna, la componente anual es máxima cuando el eje de rotación es paralelo al plano orbital y mínima (nula en primera aproximación) cuando son perpendiculares. Este efecto siempre produce una disminución del semieje. Ambos efectos se encuentran diagramados en la Figura 5.1.

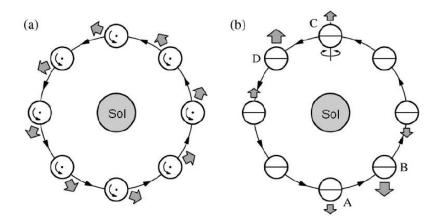


Figura 5.1: (a) El efecto Yarkovsky diurno: Un cuerpo gira sobre su eje de rotación tal que este es perpendicular al plano orbital. En este caso la rotación prógrada produce un aumento en el semieje. (b) El efecto Yarkovsky anual: El eje de rotación se encuentra paralelo al plano orbital. El calentamiento de los hemisferios, sobre todo en los puntos A y C, seguidos del respectivo atraso en la reemisión térmica, la cual ocurre en los puntos B y D. La componente transversal de la fuerza siempre es opuesta a la velocidad orbital, por lo que causa una disminución constante del semieje del asteroide (Bottke et al. 2003 [43]).

5.1.2. Modelo Matemático

El modelado del efecto Yarkovsky requiere básicamente de dos etapas:

- 1. La determinación de la distribución superficial de temperatura.
- 2. La evaluación de la fuerza de retroceso debida a la reemisión térmica.

Para determinar la distribución superficial de temperatura necesitamos resolver la ecuación de difusión de calor

$$\nabla \cdot (K\nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t},\tag{5.1}$$

con la condición de contorno

$$\alpha \xi = K(\nabla T) \cdot \boldsymbol{n}_{\perp} + \varepsilon \sigma T^4, \tag{5.2}$$

donde T es la temperatura, K es la conductividad térmica del material en la superficie, C_p es el calor específico del material a presión constante, ρ es la densidad del material, ε es la emisividad térmica de la superficie, σ es la constante de Stefan-Boltzmann y $\alpha=1-A$ donde A es el albedo superficial. La Ecuación de contorno (5.2) se refiere a la conservación de la energía en un elemento de superficie normal al vector \mathbf{n}_{\perp} . En esta ecuación ξ es el flujo de radiación solar incidente de un elemento de superficie, por lo que el término $\alpha\xi$ representa la fracción de energía absorbida por el elemento. El primer término de la derecha constituye la energía difundida hacia capas más profundas y el segundo término es la energia reemitida por el elemento asumiendo que la superficie irradia como un cuerpo negro. Una vez que conocemos la función ξ y los parámetros físicos del material en la superfície (K, C_p, ρ) , las Ecuaciones (5.1) y (5.2) pueden ser resueltas en forma analítica (asumiendo el modelo lineal y esférico) o en forma numérica.

Para evaluar la fuerza de Yarkovsky debida a la reemisión térmica, utilizamos la ley de Lambert, la cual nos dice que cualquier elemento de superficie ds de un cuerpo radiante, genera una fuerza df

$$d\mathbf{f} = -\frac{2}{3} \frac{\varepsilon \sigma T^4}{mc} \mathbf{n}_{\perp} ds, \tag{5.3}$$

donde m es la masa del objeto y c es la velocidad de la luz. La fuerza es obtenida conociendo la distribución T(s) e integrando sobre toda la superficie. Adoptando un sistema de coordenadas local, con el eje z alineado con el eje de rotación del cuerpo, es posible descomponer esta fuerza en dos componentes: una vinculada con la distribución de temperatura en el sentido longitudinal la cual dependerá de la frecuencia de rotación ω , y otra a la distribución de temperatura latitudinal, la cual dependerá de la frecuencia de traslación n. Estas componentes dan origen a la componente diurna y a la anual.

Asumiendo la simetría esférica, es posible expandir la solución en término de los armónicos esféricos, por lo que la variación del semieje puede ser escrita como

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_{diurno} = \frac{8\alpha}{9} \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{nmc} F_{\omega}(R', \Theta) \cos(\epsilon) + O(e)
\left(\frac{da}{dt}\right)_{anual} = \frac{4\alpha}{9} \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{nmc} F_n(R', \Theta) \sin^2(\epsilon) + O(e),$$
(5.4)

donde ϵ es la oblicuidad del eje de rotación, la función $F_{\nu}(R',\Theta)$ depende del radio del cuerpo R', normalizado por la profundidad de penetración térmica $l_{\nu} = \sqrt{K/\rho C_p \nu}$ y del parámetro térmico $\Theta = (\sqrt{K\rho C_p \nu})/\varepsilon \sigma T^3$, ambos definidos para la frecuencia $\nu = \omega$ para el caso diurno y $\nu = n$ para el caso anual (Vokrouhlick, 1998a [79] y 1998b [80]).

Para incorporar el efecto Yarkovsky en las simulaciones solo hay que adicionar el término no conservativo a las ecuaciones de movimiento de tal forma que este produzca una variación del semieje, la cual debe ser impuesta de antemano. Para encontrar la expresión de esta fuerza, partimos de la primera ecuación de Gauss, que relaciona la variación del semieje con la componente radial ξ y transversal S de la fuerza aplicada

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n\sqrt{1 - e^2}} \left[\xi e \sin(f) + S \frac{p}{r} \right],\tag{5.5}$$

donde $p = a(1-e^2)$, r es la distancia heliocéntrica, n es el movimiento medio y f es la anomalía verdadera.

Asumiendo una órbita circular, podemos simplificar esta ecuación

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n}S,\tag{5.6}$$

siendo S la fuerza tangencial a la órbita en este caso. Teniendo en cuenta que la velocidad en una órbita circular es

$$v = \sqrt{\frac{GM}{a}} = na, (5.7)$$

donde G es la constante de gravitación universal y M la masa del Sol. Entonces la fuerza que provoca una variación predeterminada del semieje es

$$\mathbf{F}_Y = \frac{GM}{2a^2} \left(\frac{da}{dt}\right)_Y \frac{\mathbf{v}}{v^2}.$$
 (5.8)

Por último, de acuerdo con la teoría analítica (Vokrouhlický 1999 [81]), la tasa de migración causada por el efecto diurno, asumiendo parámetros físicos y térmicos típicos del basalto y un albedo de 0.4, puede ser aproximada por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2.5 \ km}{D} 10^{-10} \cos \epsilon \ \frac{UA}{\tilde{ano}},\tag{5.9}$$

donde D es el diámetro del asteroide en km y ϵ la oblicuidad del eje de rotación respecto al plano del movimiento. Si $\cos \epsilon > 0$ el asteroide se alejará del Sol, mientras que si $\cos \epsilon < 0$, este se acercará. Estamos interesados en estudiar migración convergente en la vecindad de la RMMJ 3:1, por lo que asumimos $\cos \epsilon = 0$ para maximizar el efecto.

5.2. Evolución Orbital de Asteroides por el Efecto Yarkovsky

Para estudiar la evolución orbital de asteroides bajo el efecto Yarkovsky, haremos uso de un integrador de N cuerpos. Para esto tomaremos dos asteroides ficticios de masa despreciables con una tasa de migración arbitraria $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-6}$ UA/año y condiciones iniciales a = 2.47 UA, $\sigma = 0$ y $\Delta \varpi = 0$. Para la excentricidad inicial, un asteroide tendrá e = 0.1 (asteroide número 1) y el otro e = 0.15 (asteroide número 2). Estos objetos fueron simulados con un integrador Bulirsch Stoer de precisión de 10^{-11} , por un tiempo $T = 10^5$ años. Las condiciones iniciales para Júpiter son $a_1 = 5.204525$ UA, $e_1 = \lambda_1 = \varpi_1 = 0$ (problema circular).

La Figura 5.2 presenta los resultados de dicha simulación. El gráfico de arriba y el del medio muestran el semieje y la excentricidad osculadoras en función del tiempo respectivamente, con tiempos de salidas cada 10 años. Las curvas azules representan al asteroide 1, mientras que las rojas al asteroide número 2. El gráfico inferior muestra la evolución en el plano (a - e), donde los asteroides comienzan en semiejes pequeños y migran hacia la rama izquierda de la separatriz (lineas negras).

Un asteroide que no sufre migración, oscila en el plano (a-e) a lo largo de una curva de M constante. En cuanto agregamos el efecto Yarkovsky, aparece una componente secular en el semieje, cuya pendiente es justamente el valor de $\dot{a}_Y = 2.7 \times 10^{-6}$ UA/año, mientras que el valor medio de la excentricidad permanece constante. El asteroide 1 llega a la separatriz en

aproximadamente 75000 años, hace apenas un par de oscilaciones alrededor de la resonancia exacta y luego sale de ella con una excentricidad menor. Esto lo podemos entender con las curvas de M constantes. Ya que el salto ocurre casi instantáneamente, M permanece prácticamente constante a lo largo del cruce. Ya que la evolución del asteroide es a través de dicha curva, a menos de los términos de corto período, debe salir necesariamente con excentricidad menor, por lo tanto la resonancia circulariza las órbitas de los para asteroides que logran cruzarla.

En cambio, el asteroide número 2 es capturado por la resonancia. Una vez allí, el efecto Yarkovsky induce un incremento en la excentricidad, manteniendo oscilaciones alrededor de la resonancia exacta.

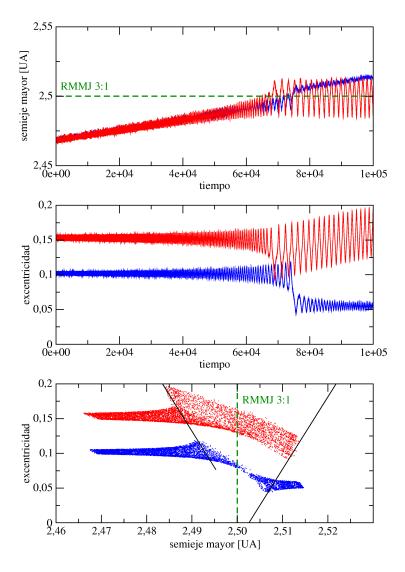


Figura 5.2: $\dot{a}_Y = 2.7 \times 10^{-6}$ UA/año. Arriba: semieje en función del tiempo. Medio: excentricidad en función del tiempo. Abajo: evolución del asteroide en el plano a-e osculador. En negro y en verde la separatriz y la posición exacta de la resonancia 3:1

Si ahora a estos mismos asteroides fiticios los hacemos migrar con una tasa de migración más lenta $\dot{a}_Y = 2.7 \ 10^{-7} \ \text{UA/año}$, el tiempo que le lleva llegar a la resonancia aumenta en un orden de magnitud. Lo curioso es que la partícula que en la primera simulación era capturada ahora logra saltar la resonancia, mientras que la que saltaba, con la nueva tasa de migración es ahora capturada. Lo importante es que la evolución de estos asteroides siguen teniendo la misma geometría: empiezan oscilando sobre curvas de M constante mientras que este valor va cambiando lentamente. Una vez en la resonancia, los objetos que son capturados sufren una excitación secular en la excentricidad, mientras que los objetos que logran cruzar la resonancia lo hacen prácticamente en forma instantánea y su evolución siguiente es la misma que antes del salto pero a una excentricidad menor. Esto lo podemos observar en la Figura 5.3.

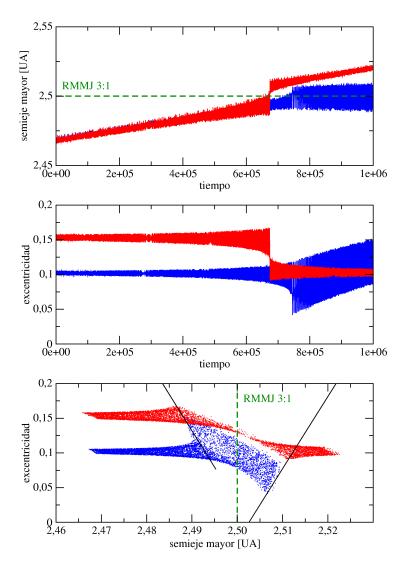


Figura 5.3: $\dot{a}_Y = 2.7 \times 10^{-7} \text{ UA/año}$. Arriba: semieje en función del tiempo. Medio: excentricidad en función del tiempo. Abajo: evolución del asteroide en el plano a-e osculador. En negro y en verde la separatriz y la posición exacta de la resonancia 3:1

5.3. Pasajes por la Resonancia 3/1: Cruces y Capturas

En la sección anterior vimos que los asteroides capturados mostraban un aumento secular en sus excentricidades, mientras que los que lograban saltar la resonancia circularizaban sus órbitas. Además observamos que una misma condición inicial podía ser capturada o podía saltar solo con cambiar la tasa de migración. Para intentar tener una mirada más global del problema, realizamos simulaciones con una mayor cantidad de partículas para varios valores de \dot{a}_Y .

Las condiciones iniciales para los asteroides se eligieron de modo tal que éstos quedaran sobre una recta paralela y cercana a la rama izquierda de la separatriz (Figura 5.4) del problema circular, la cual fué calculada en el Capítulo 4. Los valores iniciales para los ángulos son $2\sigma = \pi$ y $\Delta \varpi = 0$, mientras que los valores utilizados para \dot{a}_Y se encuentran en la Tabla 5.1 junto el tiempo total de integración t_f en años y la cantidad de asteroides utilizados.

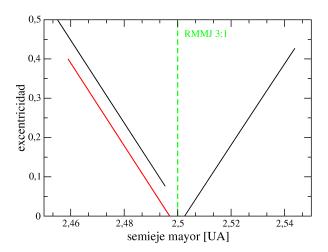


Figura 5.4: Las condiciones iniciales en el plano representativo de color rojo, la separatriz de negro y la resonancia exacta de verde.

Para las cuatro migraciones más rápidas se integraron 2500 asteroides ficticios, mientras que para el resto sólo 1000. Las Figuras 5.5 - 5.7 muestran los resultados de dichas simulaciones. Se graficaron las curvas de M constante de color negro y la separatriz de color rojo. Los asteroides, en cambio, fueron pintados con un degrade de colores, por lo que una condición inicial, a la izquierda de la separatriz, le corresponde su posición final del mismo color. El tiempo total de integración depende del valor de la tasa de migración.

Por último, para cada caso graficamos el semieje final en función de la excentricidad inicial de cada asteroide y sus correspondientes probabilidades de capturas en función de la excentricidad inicial. Para esto, diremos que un asteroide cruza la resonancia si su semieje final es mayor que un semieje crítico. Este valor depende de cada caso ya que los tiempos de integración no son los mismos para cada uno, pero en general $a_c \approx 2.55$ UA. Así, los asteroides capturados son representados de color rojo, mientras que los de color azul son aquellos que logran cruzar la resonancia.

Para encontrar la probabilidad de captura tomamos una partición de la excentricidad ini-

-		
\dot{a}_Y [UA/año]	Diámetro [m]	t_f [año]
2.7×10^{-4}	0.001	2.5×10^3
1.4×10^{-4}	0.002	4.0×10^{3}
2.7×10^{-5}	0.01	1.5×10^4
1.4×10^{-5}	0.02	2.4×10^{4}
2.7×10^{-6}	0.1	1.2×10^{5}
1.4×10^{-6}	0.2	1.0×10^{6}
2.7×10^{-7}	1.0	2.0×10^{6}
1.4×10^{-7}	2.0	4.0×10^6
2.7×10^{-8}	10.0	9.0×10^{6}

Cuadro 5.1: Tasas de migración, diámetros asociados (asumiendo material basáltico) y tiempo total de integración utilizados.

cial, tal que $e_0 = 0.0$, e_1 , e_2 , ..., e_{n-1} , $e_n = 0.4$. Tomando un intervalo (e_i, e_{i+1}) , contamos la cantidad de asteroides n_{cap} que son capturados y la cantidad n_{tot} total de asteroides, entonces la probabilidad de captura está dada por $P_{cap}(e_i^*) = n_{cap}/n_{tot}$, donde $e_i^* = (e_i + e_{i+1})/2$, es el centro de dicho intervalo. El tamaño de la partición depende de cada caso, y se tomó como referencia el valor $\sqrt{n_{tot}}$. Esto se muestra en las Figuras 5.8 - 5.10.

Para valores de Yarkovsky altos (las primeras Figuras en 5.5 y 5.8) tenemos una única ventana donde pueden ocurrir las capturas. Esta ventana está bien definida y no contiene huecos, para ésto pintamos con un degrade de colores las condiciones iniciales, ya que a la posición inicial y final de un mismo asteroide, le corresponde un mismo color. A medida que disminuimos la tasa de migración el ancho de la ventana disminuye junto al valor de excentricidad correspondiente a su centro e_c . Para algún valor crítico aparece una segunda ventana de ancho más pequeño y e_c más grande. Estas seguirán disminuyendo de tamaño y e_c a medida que disminuya la tasa de migración, así como seguirán apareciendo nuevas ventanas, pero siempre por excentricidades altas y con anchos más pequeños. Para valores aún más chicos, existe una excentricidad máxima e_m , para la cuál todas las órbitas son capturadas (Figuras 5.7 y 5.10).

Los gráficos de probabilidad de captura muestran las ventanas bien definidas para las migraciones más rápidas, donde la probabilidad es 1. A medida que disminuimos \dot{a}_Y , las ventanas disminuyen de tamaño hasta que éstas se hacen comparables con los bines usados. Ya veremos que cuando esto ocurre, la estructura resultante es parecida a la encontrada por Gomes (1995 [52]) para el caso no adiabático (más adelante se describirá el concepto de lo que es una migración adiabática, pero por ahora solo diremos que es una migración lenta), en el cual aparece un máximo con probabilidad menor que 1. A medida que nos acercamos al caso de una migración adiabática, ese máximo empieza a crecer y a desplazarse a excentricidades menores hasta llegar a dicho caso, en el cual existe toda una región, a bajas excentricidades, con probabilidad 1.

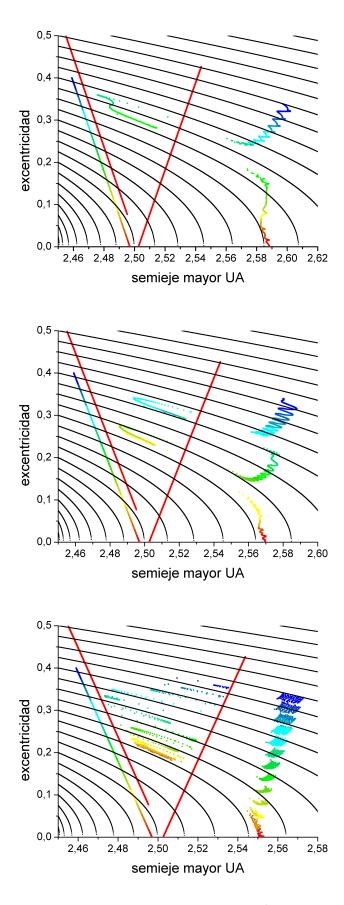


Figura 5.5: Excentricidad vs. semieje. Arriba: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-4}$ UA/año. Medio: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-4}$ UA/año. Abajo: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-5}$ UA/año.

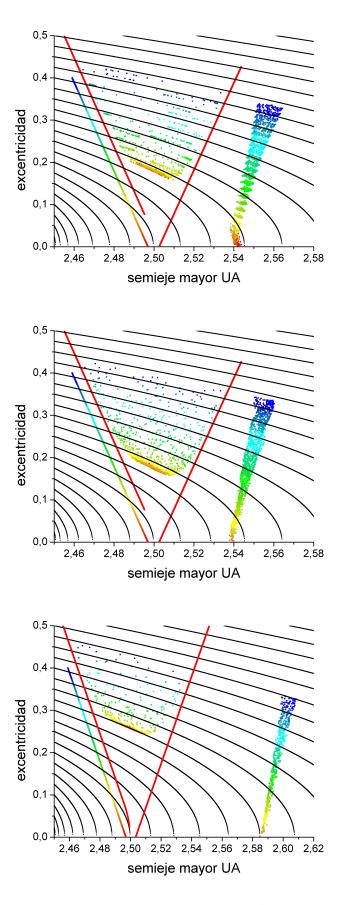


Figura 5.6: Excentricidad vs. semieje. Arriba: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-5}$ UA/año. Medio: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-6}$ UA/año. Abajo: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-6}$ UA/año.

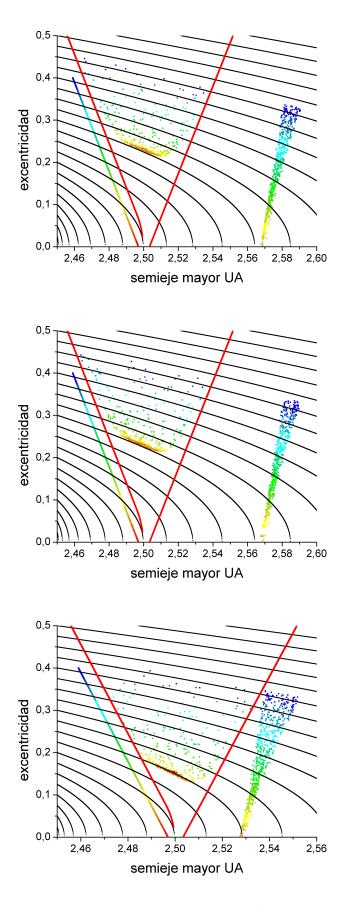


Figura 5.7: Excentricidad vs. semieje. $Arriba: \dot{a}_Y=2.7\times 10^{-7}~{\rm UA/a\~no}.~Medio: \dot{a}_Y=1.4\times 10^{-7}~{\rm UA/a\~no}.$ $Abajo: \dot{a}_Y=2.7\times 10^{-8}~{\rm UA/a\~no}.$

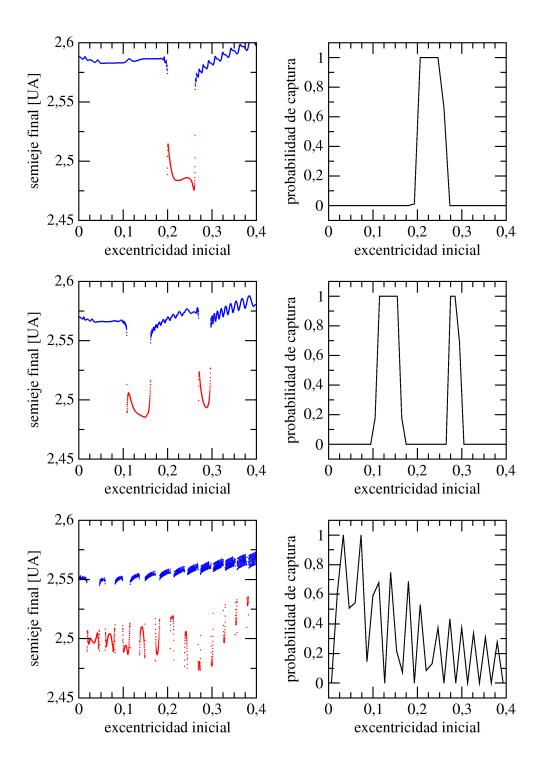


Figura 5.8: *Izquierda* Semieje final vs. excentricidad inicial. *Derecha* Probabilidad de captura vs. excentricidad inicial. *Arriba*: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-4}$ UA/año. *Medio*: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-4}$ UA/año. *Abajo*: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-5}$ UA/año.

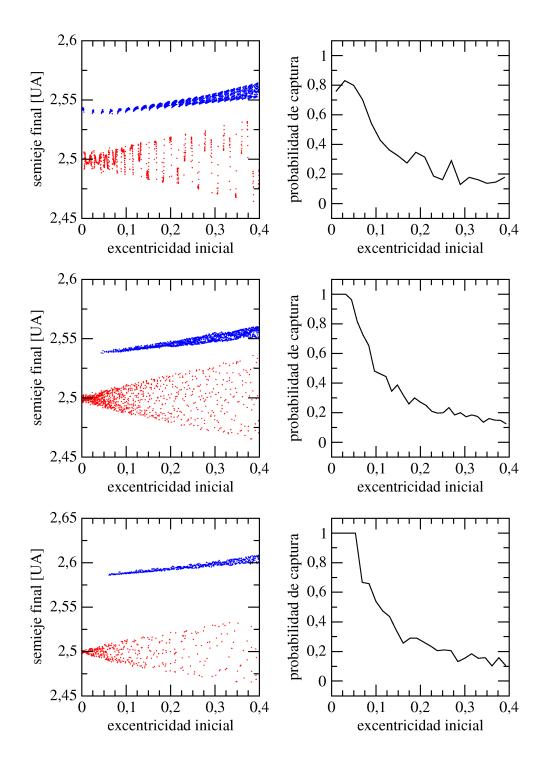


Figura 5.9: *Izquierda* Semieje final vs. excentricidad inicial. *Derecha* Probabilidad de captura vs. excentricidad inicial. *Arriba*: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-5}$ UA/año. *Medio*: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-6}$ UA/año. *Abajo*: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-6}$ UA/año.

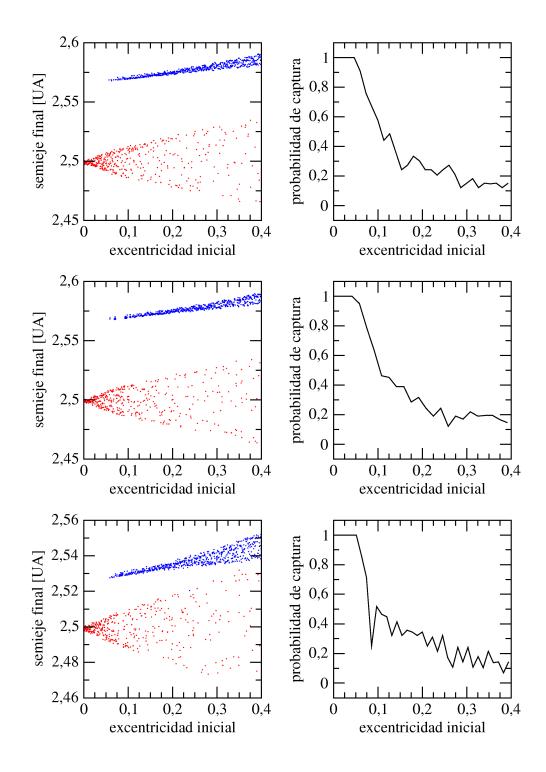


Figura 5.10: *Izquierda* Semieje final vs. excentricidad inicial. *Derecha* Probabilidad de captura vs. excentricidad inicial. *Arriba*: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-7}$ UA/año. *Medio*: $\dot{a}_Y=1.4\times 10^{-7}$ UA/año. *Abajo*: $\dot{a}_Y=2.7\times 10^{-8}$ UA/año.

Capítulo 6

El Mapa Algebraico

6.1. Introducción

Los mapas algebraicos son una poderosa herramienta numérica para resolver sistemas dinámicos. Su principal ventaja radica en la velocidad con la cual puede llevar a cabo una integración, pudiendo llegar a ser de algunos ordenes de magnitud más rápida que un integrador númerico de alto orden como por ejemplo el integrador Burlish-Stoer. Esto es fundamental si se pretende realizar una serie numerosa de simulaciones para diferentes aproximaciones del sistema físico. Estos cálculos, con un integrador N-cuerpos de alto orden, serían impracticables.

Las primeras integraciones numéricas del Sistema Solar con una escala de tiempo mayor que 10^5 años fueron obtenidas por Wisdom (1982 [21], 1983 [22]) utilizando un tipo de mapa algebraico 100 veces más rápido que una integración numérica común de alto orden. Este tipo de mapa basado en el mapa estandar de Chirikov-Taylor (Chirikov, 1979 [88]) le permitió a Wisdom estudiar la región correspondiente a la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter y encontrar que un asteroide en dicha conmensurabilidad presenta un comportamiento caótico con incrementos repentinos en la excentricidad, convirtiéndose en un cruzador de la órbita de los planetas internos.

A partir del trabajo de Wisdom, muchos problemas de la mecánica celeste han sido tratados utilizando algún tipo de mapa algebraico. En particular Hadjidemetriou (1986 [89], 1991 [26] y 1993 [28]) desarrolló un método para la construcción de un mapa algebraico. Dicho método, como veremos más adelante, considera un problema integrable con su correspondiente mapa tipo twist sobre una superficie de sección adecuada. Luego, el mapa es perturbado para incluir varias de las características más importantes del sistema no integrable, como son los puntos fijos con sus índices de estabilidad.

En éste capítulo repasaremos algunos conceptos básicos que nos permitirán introducir el mapa de Hadjidemetriou, luego lo modificaremos para agregar la migración por el efecto Yarkovsky y por último incluiremos efectos seculares de los planetas sobre la órbita de Júpiter. Este mapa nos permitirá estudiar como ocurren las capturas y los cruces a través de la resonancia, pues trabaja con el Hamiltoniano promediado para el cual tenemos bien definidos los puntos de equilibrio, la separatriz, las acciones, etc.

6.2. Mapas Algebraicos

Los sistemas dinámicos pueden agruparse en dos grandes grupos: sistemas continuos y sistemas discretos. Los primeros se encuentran regidos por ecuaciones diferenciales. Dada las condiciones iniciales, éstas nos describen la evolución temporal del sistema por medio de funciones continuas.

Los sistemas dinámicos discretos, en cambio, están definidos como mapas iterativos. Dada una condición inicial, el mapa devuelve la variable evolucionada a un tiempo discreto, que será tomada como condición inicial para el siguiente paso. Si S un espacio métrico, un mapa es una aplicación $M:S\to S$ que traslada cada elemento de S en otro elemento del mismo espacio. Cada momento del sistema se encuentra definido por el anterior y por la receta M

$$x_{n+1} = M(x_n). (6.1)$$

Esto es una idea visual de la sucesión $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots\}$ definida para una condición inicial x_0 . Hay que notar que la variable x puede ser un vector de dimensión arbitraria, por lo que la función M también lo será.

Algunas propiedades y definiciones:

- Se dice que un mapa es inversible si $\exists M^{-1}: S \to S$ tal que $\forall x \in S$, entonces $M^{-1}(M(x)) = x$.
- Diremos que un mapa es simpléctico o canónico si preserva área. Dado $\Lambda \subset S$, Vol (Λ) = Vol $(M(\Lambda))$.
- Un mapa se dice continuo si dado $\Lambda \subset S$ compacto $\Rightarrow M(\Lambda)$ también lo es.

6.2.1. Un Integrador Numérico Como Mapa

Primero comenzaremos por ver como los métodos tradicionales de integración, como el integrador de primer orden (o de Euler), pueden ser escritos como mapas algebraicos. Si consideramos un sistema dinámico de 1 grado de libertad (g.l.), descrito por el Hamiltoniano F, con momentos y coordenadas generalizados (p,q), entonces las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q}
\frac{dq}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial p}.$$
(6.2)

Un integrador numérico de primer orden se construye mediante la aproximación

$$\frac{dp}{dt} \approx \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{p(t_{n+1}) - p(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{p_{n+1} - p_n}{\tau}$$
(6.3)

donde $\tau = \Delta t$ es el paso de integración. Haciendo lo mismo para q y utilizando (6.2) obtenemos

$$p_{n+1} = p_n + \frac{\partial F}{\partial q}(p_n, q_n)\tau$$

$$q_{n+1} = q_n - \frac{\partial F}{\partial p}(p_n, q_n)\tau,$$
(6.4)

el cual es un mapa, y dado que la solución sólo depende del estado inmediatamente anterior, entonces decimos que es un integrador de primer orden.

Se puede demostrar que este mapa no es simpléctico y que además, en cada iteración, obtendremos una solución con un error $O(\tau^2)$. Esto significa que el valor de F no será preservado por el mapa y la precisión de (p_{n+1}, q_{n+1}) va ir cambiando a medida que $n \to \infty$.

6.2.2. Simplectificación del Mapa de Primer Orden

Para poder simplectificar el mapa (6.4), podemos pensarlo como una transformación de las coordenadas $(p_n, q_n) \to (p_{n+1}, q_{n+1})$. Dado que el sistema es Hamiltoniano, una forma de garantizar que el mapa sea simpléctico es exigir que la transformación sea canónica. Para eso introducimos la función generatriz $B(p_{n+1}, q_n)$, por lo que tendremos

$$p_{n} = \frac{\partial B}{\partial q_{n}}$$

$$q_{n+1} = \frac{\partial B}{\partial p_{n+1}}, \tag{6.5}$$

por lo que sustituyendo en (6.4) tenemos

$$\frac{\partial B}{\partial q_n}(p_{n+1}, q_n) = p_{n+1} - \frac{\partial F}{\partial q_n}(p_n, q_n)\tau$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_{n+1}}(p_{n+1}, q_n) = q_n - \frac{\partial F}{\partial p_n}(p_n, q_n)\tau.$$
(6.6)

El primer término del lado derecho de la igualdad es simplemente la transformación identidad y no presenta problemas. Sin embargo el segundo término depende de p_n , mientras que B depende de p_{n+1} .

Si cambiamos el mapa, redefiniendo el lado derecho para que éste sea función de los momentos nuevos, tendremos

$$\frac{\partial B}{\partial q_n}(p_{n+1}, q_n) = p_{n+1} - \frac{\partial F}{\partial q_n}(p_{n+1}, q_n)\tau$$

$$\frac{\partial B}{\partial p_{n+1}}(p_{n+1}, q_n) = q_n - \frac{\partial F}{\partial p_{n+1}}(p_{n+1}, q_n)\tau,$$
(6.7)

por lo que la función generatriz queda de la forma

$$B(p_{n+1}, q_n) = p_{n+1}q_n - H(p_{n+1}, q_n)\tau, \tag{6.8}$$

y el mapa finalmente es

$$p_{n+1} = p_n + \frac{\partial F}{\partial q_n}(p_{n+1}, q_n)\tau$$

$$q_{n+1} = q_n - \frac{\partial F}{\partial p_{n+1}}(p_{n+1}, q_n)\tau.$$
(6.9)

Dado cualquier mapa obtenido vía un integrador numérico de primer orden, por más impreciso que sea, siempre podemos convertirlo en un mapa simpléctico cambiando p_n por p_{n+1} en las derivadas del Hamiltoniano. Esto es lo que llamamos un integrador simpléctico.

Este es un ejemplo de lo que se conoce como un esquema implícito para obtener de un integrador simpléctico, ya que debemos resolver la ecuación implícita proveniente de la transformación canónica de Jacobi. También existen esquemas implícitos basados en series de Lie.

Casi todos los integradores numéricos modernos (aún de alto orden) usados en la mecánica celeste (como puede ser el SWIFT, el MERCURY, etc) son de este tipo, donde se realiza un cambio en las ecuaciones de movimiento de forma tal de garantizar la conservación de la energía total del sistema.

Sin embargo este método tiene sus puntos en contra:

- Para mapas basados en transformaciones canónicas implícitas, ya que el lado derecho de las ecuaciones ahora dependen de los momentos nuevos, debemos resolver las ecuaciones en forma iterativa.
- Que la energía se conserve no significa que el mapa conserve otras posibles integrales de movimiento.
- El problema más importante: El Hamiltoniano que es conservado por el mapa no es el Hamiltoniano original del sistema. Por construcción el mapa preserva $F(p_{n+1}, q_n)$ y no $F(p_n, q_n)$. Es posible demostrar que en un integrador de orden N se cumple que

$$F(p_{n+1}, q_n) = F(p_n, q_n) + \Delta F, \tag{6.10}$$

con

$$\Delta F = \Delta F(p_n, q_n; \tau^N), \tag{6.11}$$

por lo que si bien la energía que preserva el mapa no es la original, esta diferencia será más pequeña cuanto más pequeño sea el paso de integración o más alto sea el orden del integrador.

6.3. Mapas de Superficies de Sección

Para un sistema de dimensón N, resulta muy útil introducir una variedad N-1 dimensional transversal al flujo originado por las ecuaciones de movimiento, conocidas como superficies de sección o superficies de Poincaré, de manera tal que la dinámica continua quede representada en esta superficie de sección por una dinámica discreta originada por todas las intersecciones de la trayectorias de interes con ésta. Esto es lo que se conoce como $mapa\ de\ Poincaré$.

6.3.1. Mapa de un Hamiltoniano Integrable

Comenzaremos por el caso trivial para un sistema integrable. Por simplicidad consideraremos un sistema con 2 g.l., no obstante la extensión a N g.l. es automática.

Un sistema dinámico de 2 g.l. integrable puede ser escrito en variables ángulo-acción como

$$F = F(J_1, J_2), (6.12)$$

cuya solución es

$$J_{1} = cte$$

$$J_{2} = cte$$

$$\theta_{1} = \omega_{1}t + \theta_{10}$$

$$\theta_{2} = \omega_{2}t + \theta_{20},$$
(6.13)

por lo que la solución yace en un toro bidimensional \mathbb{T}^2 . Las frecuencias de los ángulos están dadas por la relación

$$\omega_i(J_i) = \frac{\partial F}{\partial J_i} = cte. \tag{6.14}$$

Además supondremos que el sistema es isócrono, por lo que

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial J_i} \neq 0. \tag{6.15}$$

Ahora analizaremos el movimiento en una superficie de sección fijando el valor de $\theta_2 = \theta_{20}$. Este plano lo podemos escribir en coordenadas cartesianas $x = \sqrt{2J_1}\cos(\theta_1)$ e $y = \sqrt{2J_1}\sin(\theta_1)$.

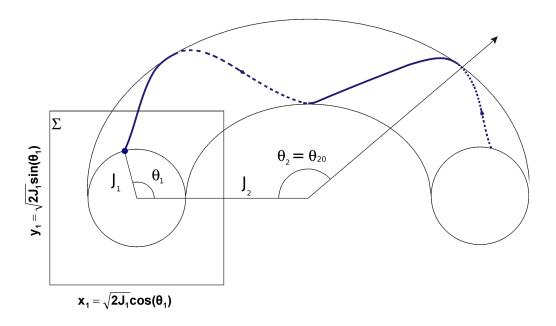


Figura 6.1: Evolución de una órbita (curva azul) sobre un toro bidimensional y su intersección con la superficie de sección Σ , definida para $\theta_2 = \theta_{20}$.

Si (x_0, y_0) es la posición inicial y (x_1, y_1) es el siguiente cruce por la superficie de sección. ¿Cúal es la relación entre una y otra? Sabiendo que la variación angular en θ_2 es de 2π , entonces el intervalo de tiempo en el cual transcurre es

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega_2},\tag{6.16}$$

así que tendremos

$$\theta_{11} = \omega_1 \Delta t + \theta_{10} = 2\pi \frac{\omega_1}{\omega_2} + \theta_{10}. \tag{6.17}$$

Definiendo

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha(J_1, J_2),\tag{6.18}$$

finalmente obtenemos

$$\theta_{11} = 2\pi\alpha + \theta_{10}. (6.19)$$

Por simplicidad omitimos el subíndice 1, entonces los sucesivos cruces por la superficie de sección estará dado por el sistema

$$J_{n+1} = J_n$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_n).$$
 (6.20)

Haciendo variar las condiciones iniciales, cada una correspondiente a un valor diferente de J_1 , por lo que los valores de α serán diferentes para cada órbita. Imaginando que α crece con J, tendremos que las sucesivas aplicaciones del mapa tendrán el efecto de torcer al conjunto de condiciones iniciales. Esto es lo que en la literatura se conoce como mapa twist.

Para simplectificarlo, simplemente cambiamos $\alpha(J_n)$ por $\alpha(J_{n+1})$, como ya hemos visto

$$J_{n+1} = J_n$$

 $\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}).$ (6.21)

El mapa twist mapea círculos en círculos, solo que rotados en un ángulo α , el cual recibe el nombre de número de rotación. Hay que notar que los puntos fijos se corresponden con órbitas periódicas del sistema original. Si tenemos k puntos fijos, tendremos una órbita k-periódica. Esto ocurre si $(J_{n+k}, \theta_{n+k}) = (J_n, \theta_n)$ para todo valor n. Utilizando el mapa tenemos

$$\theta_{n+k} = \theta_{n+k-1} + 2\pi\alpha$$

$$= \theta_{n+k-2} + 2\pi2\alpha$$

$$= \cdots$$

$$= \theta_n + 2\pi k\alpha,$$
(6.22)

por lo tanto tendremos un punto fijo cuando

$$\theta n + k - \theta n = 2\pi k\alpha = 2\pi j,\tag{6.23}$$

y esto ocurre si tenemos

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{j}{k}.\tag{6.24}$$

Luego tendremos órbitas periódicas y órbitas casi periódicas distribuidas densamente, con órbitas periódicas relacionadas al número de rotación racional (resonancias entre los dos grados de libertad).

Por todo esto, las órbitas periódicas de periódo arbitrario son mucho más simples de determinar en un mapa que en el sistema original.

6.3.2. Mapa de un Hamiltoniano Casi Integrable

El siguiente paso es complicar un poco las cosas y tomar el siguiente Hamiltoniano

$$F(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2) = F_1(J_1, J_2) + \varepsilon F_2(J_1, J_2, \theta_1, \theta_2). \tag{6.25}$$

Nuevamente queremos construir un mapa de una superficie de sección del plano (J_1, θ_1) con $\theta_2 = \theta_{20}$ fijo. Sin embargo, dada la presencia de εF_1 , entonces J_1 ya no será más una integral de movimiento, por lo que nuestro mapa será un mapa twist perturbado de la forma

$$J_{n+1} = J_n + \varepsilon f(J_{n+1}, \theta_n)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + 2\pi\alpha(J_{n+1}) + \varepsilon g(J_{n+1}, \theta_n)$$
(6.26)

donde $\varepsilon f(J_{n+1}, \theta_n)$ es el salto en la acción y $\varepsilon g(J_{n+1}, \theta_n)$ es la variación en el desplazamiento angular y ambas dependen de F_1 . Para obtener las funciones f y g, o por lo menos una relación entre ellas, volvemos a nuestra función generatriz, la cual en este caso será

$$B(J_{n+1}, \theta_n) = J_{n+1}, \theta_n + 2\pi\alpha J_{n+1} + \varepsilon G(J_{n+1}, \theta_n), \tag{6.27}$$

donde $G(J_{n+1}, \theta_n)$ es una función proporcional a $F_1(J_{n+1}, \theta_n)$. Los dos primeros términos de la derecha son la función generatriz del mapa twist no perturbado. Ahora si relacionamos las ecuaciones de la transformación con el mapa, obtenemos

$$f(J_{n+1}, \theta_n) = -\frac{\partial G}{\partial \theta_n}$$

$$g(J_{n+1}, \theta_n) = \frac{\partial G}{\partial J_{n+1}}.$$
(6.28)

6.4. Construcción del Mapa Algebraico

El mapa de Hadjidemetriou (1986 [89], 1991 [26] y 1993 [28]) tiene una gran importancia para el estudio que llevaremos a cabo. Este es un mapa tipo twist que trabaja con el Hamiltoniano promediado del problema de tres cuerpos restringido en la cercanía de una resonancia de movimientos medios. Presenta la misma topología, tanto cualitativamente como cuantitativamente, que un mapa de Poincaré del sistema real. Esto significa que el mapa contiene todo los puntos fijos, en sus posiciones. Además es construido de forma tal que sea simpléctico.

6.4.1. El Mapa de Hadjidemetriou

En el problema de tres cuerpos restringido en la vecindad de la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter, vimos que el Hamiltoniano en variables ángulo-acción tiene la forma

$$F(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta}) = F_0(\boldsymbol{J}) + \varepsilon R(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{\theta})$$
(6.29)

donde $(J, \theta) = (S, M, P, \sigma, \nu, \sigma_z)$ son la variables resonantes y R es la función perturbadora.

La función generatriz del mapa estará dada por

$$B(\mathbf{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n) = \mathbf{J}_{n+1} \cdot \boldsymbol{\theta}_n + \tau F(\mathbf{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_n), \tag{6.30}$$

por lo que el mapa perturbado es

$$\mathbf{J}_{n} = \frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\theta}_{n}} = \mathbf{J}_{n+1} + \tau \frac{\partial F(\mathbf{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_{n})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{n}}
\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \frac{\partial B}{\partial \mathbf{J}_{n+1}} = \boldsymbol{\theta}_{n} + \tau \frac{\partial F(\mathbf{J}_{n+1}, \boldsymbol{\theta}_{n})}{\partial \mathbf{J}_{n+1}},$$
(6.31)

donde $\tau = 2\pi/n_1 \approx 11.86$ años, es el período del movimiento de Júpiter.

Este mapa fué utilizado por Hadjidimetriou en la década de 1990 para varios estudios de resonancias de movimientos medios, mostrando ser muy eficaz. A continuación mostraremos como extenderlo a nuestro tema de interés.

6.4.2. Incorporación del Efecto Yarkovsky

Como sabemos, el efecto Yarkovsky diurno causa una variación secular del semieje mayor. Esto puede expresarse matemáticamente como

$$\dot{a} = \dot{a}_0 + \dot{a}_Y,\tag{6.32}$$

donde \dot{a}_0 es la variación del semieje en ausencia del efecto Yarkovsky y \dot{a}_Y es su variación en presencia de dicho efecto.

Por otro lado, las acciones resonantes son funciones del semieje, la excentricidad e inclinación (a,e,I), y pueden escribirse como $\boldsymbol{J}=\sqrt{\mu a}\boldsymbol{\Phi}(e,I)$. Si derivamos respecto del tiempo, tendremos

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial a} \frac{da}{dt} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial e} \frac{de}{dt} + \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial I} \frac{dI}{dt}
= \frac{d\mathbf{J}_0}{dt} + \frac{\dot{a}_Y \mathbf{J}}{2a},$$
(6.33)

donde el primer término de la derecha representa la variación de la acción J en ausencia del efecto Yarkovsky y el segundo término corresponde a la variación que produce dicho efecto. Dado que $a = (M - P - S)^2/4\mu$, entonces podemos reescribir dicha corrección como

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d\mathbf{J}_0}{dt} + \frac{2\mu\dot{a}_Y\mathbf{J}}{(M-P-S)^2},\tag{6.34}$$

por lo que al introducirlo al mapa nos queda

$$\mathbf{J}_{n+1} = \frac{\partial B}{\partial \boldsymbol{\theta}_n} = \mathbf{J}_n - \tau \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\theta}_n} + \tau \frac{2\mu \dot{a}_Y \mathbf{J}_{n+1}}{(M_{n+1} - P_{n+1} - S_{n+1})^2}
\boldsymbol{\theta}_{n+1} = \frac{\partial B}{\partial \mathbf{J}_{n+1}} = \boldsymbol{\theta}_n + \tau \frac{\partial F}{\partial \mathbf{J}_{n+1}}$$
(6.35)

6.4.3. Variaciones Seculares

Con éste mapa podemos reproducir el caso circular, el caso elíptico y el caso inclinado. Sin embargo es posible agregar las perturbaciones seculares sobre la órbita de Júpiter sin tener que modificar al mapa en sí. Esto fué realizado por primera vez por Roig (1997 [90]), y utilizaremos su modelo como base. Para hacer esto recurrimos a la teoría planetaria lineal clásica la cual nos dice que, en un sistema de N-cuerpos, las variaciones seculares de los cuerpos pueden ser expresadas como una superposición de armónicos de la forma

$$e_{j}e^{i\varpi_{j}} = \sum_{l=1}^{N} G_{jl} \exp[i(g_{l}t + \gamma)]$$

$$s_{j}e^{i\Omega_{j}} = \sum_{l=1}^{N} H_{jl} \exp[i(h_{l}t + \sigma_{l})], \qquad (6.36)$$

donde e_j, s_j, ϖ_j y Ω_j son la excentricidad, el seno de la mitad de la inclinación, la longitud de pericentro y la longitud del nodo ascendente del planeta j-esimo. Además, los valores de las amplitudes G_{jl}, H_{jl} y las frecuencias g_l, h_l determinan los modos propios de oscilación del sistema. Una posible forma de encontrar dichos valores es a partir de simulaciones numéricas del Sistema Solar, ésto es, integrando las ecuaciones diferenciales. Luego con éstos datos se pueden ajustar los parámetros del modelo. Las variaciones seculares consideradas en éste trabajo son

las utilizadas por Roig (1997 [90]).

Las amplitudes G_{jl} , H_{jl} , las frecuencias g_l , h_l y las fases iniciales γ_l , σ_l se presentan en las Tablas 6.1 y 6.2. En particular nos quedamos con aquellos términos con amplitudes $G_{jl} \geq 10^{-4}$ y $H_{jl} \geq 10^{-5}$ respectivamente, con la salvedad de g_8 y $2g_5 - g_6$ que, a pesar de ser menores que ésta cota, son consideradas, ya que g_8 es una de las frecuencias fundamentales del sistema (el perihelio de Neptuno) y $2g_5 - g_6$ es la frecuencia retrógrada de mayor período del perihelio de Júpiter. Los valores presentados son para JD 2440400.5. Un detalle interesante es que la frecuencia s_5 , correspondiente al movimiento del nodo ascendente de Júpiter no es nula, ya que el modelo considera las perturbaciones debidas a los planetas interiores (si las perturbaciones de los planetas internos fueran nulas, la frecuencia s_5 sería nula debido a la conservación del momento angular total del Sistema Solar externo).

l	Frecuencia	Fase	Amplitud	Amplitud
	g_l ["/año]	γ [°]	Júpiter	Saturno
5	4.25749319	27.0005	4.41872×10^{-2}	3.29583×10^{-2}
_	4.23749319	27.0003		
6	28.24552984	124.1994	-1.57002×10^{-2}	4.82093×10^{-2}
7	3.08675577	117.0516	1.8139×10^{-3}	1.5113×10^{-3}
8	0.67255084	70.7508	5.80×10^{-5}	5.75×10^{-5}
	h_l ["/año]	σ [°]	Júpiter	
5	-0.01000400	182.7100	1.711×10^{-2}	-
6	-26.34496354	303.9699	3.15329×10^{-2}	-
7	-2.99266093	316.7946	-4.8478×10^{-2}	-
8	-0.69251368	200.3717	-5.8448×10^{-2}	-

Cuadro 6.1: Frecuencias, fases y amplitudes fundamentales. Valores correspondientes al día juliano JD 2440400.5. Por convención l=5 corresponde a Júpiter, l=6 corresponde a Saturno, etc.

6.4.4. La Gran Desigualdad

Las Ecuaciones (6.36) nos permiten conocer e_j, s_j, ϖ_j y Ω_j debido a las variaciones seculares de todos los plantetas. Sin embargo, ciertas variaciones periódicas de corto período pueden ser críticas en la proximidad de una resonancia de movimientos medios. Esta situación es responsable de la aparición de términos en la función perturbadora cuyos períodos son mayores o del mismo orden que los períodos de los términos resonantes, pero también menores que los períodos de los términos seculares. Estos términos pueden afectar no sólo la convergencia de la solución, sino que también pueden afectar la evolución secular secular misma del sistema. En el caso del sistema Júpiter-Saturno la gran desigualdad produce que el argumento

$$\varphi = 2\lambda_j - 5\lambda_s = \nu_{\varphi}t + \varphi_0, \tag{6.37}$$

presente una circulación lenta con un período aproximado de 880 años. Los valores de ν_{φ} y φ_0 para J2000.0 se presentan en la Tabla 6.3.

	Período [años]	Amplitud	Amplitud
Términos en $e_j e^{i\varpi_j}$		Júpiter	Saturno
$g_5 + g_6 - g_7$	4.4057255×10^4	-1.936×10^{-4}	5.982×10^{-4}
$-g_5 + g_6 + g_7$	4.7867403×10^4	1.982×10^{-4}	-6.052×10^{-4}
$-g_5 + 2g_6$	2.4811631×10^4	-5.735×10^{-4}	1.9194×10^{-3}
$2g_5 - g_6$	-6.5684962×10^4	1.42×10^{-5}	-1.414×10^{-4}
$g_5 - s_6 + s_7$	4.6939862×10^4	1.104×10^{-4}	-3.368×10^{-4}
$-g_5 + 2g_6 + s_6 - s_7$	4.4873382×10^4	-1.226×10^{-4}	3.792×10^{-4}
Términos en $s_j e^{i\Omega_j}$			
$s_6 - g_5 + g_6$	-5.4986922×10^5	1.789×10^{-5}	-
$s_7 + g_5 - g_6$	-4.8034335×10^4	2.385×10^{-5}	-
$s_7 + g_5 - g_7$	-7.1133572×10^5	-1.166×10^{-5}	-
$-s_6 + 2g_6$	1.5645366×10^4	1.428×10^{-5}	-

Cuadro 6.2: Términos mixtos de variación secular.

Frecuencia	Fase	Período
-1467.2852 "/año	178.3158°	883.26 años

Cuadro 6.3: Coeficientes de las variaciones seculares en e_j y ϖ_j .

Si consideramos las variables rectangulares

$$k_j + ih_j = e_j \exp[i\omega_j], \tag{6.38}$$

diferenciando esta ecuación encontramos que las variaciones de dichas coordenadas están dadas por

$$\delta k_j + i\delta h_j = (\delta e_j + ie_j \delta \varpi_j) \exp[i\varpi_j], \tag{6.39}$$

donde δe_j y $e_j \delta \varpi_j$ están dados por

$$\delta e_{j} = [A_{1}e_{s}^{2}\cos(\varphi + \varpi_{j} + 2\varpi_{s}) + A_{2}e_{j}e_{s}\cos(\varphi + 2\varpi_{j} + \varpi_{s}) + A_{3}e_{j}^{2}\cos(\varphi + 3\varpi_{j})]$$

$$e_{j}\delta\varpi_{j} = [B_{1}e_{s}^{2}\sin(\varphi + \varpi_{j} + 2\varpi_{s}) + B_{2}e_{j}e_{s}\sin(\varphi + 2\varpi_{j} + \varpi_{s}) + B_{3}e_{j}^{2}\sin(\varphi + 3\varpi_{j})].$$
(6.40)

Las variaciones periódicas en la inclinación y el nodo ascendente debidas a la conmensurabilidad 5:2 son 100 veces menores que las variaciones en la excentricidad y el perihelio, por lo que son despreciables (Simon y Bretagnon, 1975 [91]) al igual que las variaciones en semieje mayor (Roig, 1997 [90]), no obstante la variación en la longitud media es unas 10 veces mayor. Por lo que tendremos

$$\delta\lambda_{j} = [C_{1}e_{j}e_{s}^{2}\sin(\varphi + \varpi_{j} + 2\varpi_{s}) + C_{2}e_{j}^{2}e_{s}\cos(\varphi + 2\varpi_{j} + \varpi_{s}) + C_{3}e_{j}^{3}\cos(\varphi + 3\varpi_{j}) + C_{4}e_{s}^{3}\sin(\varphi + 3\varpi_{s})].$$

$$(6.41)$$

Esta variación produce una corrección de los ángulos resonantes σ y ν , ya que éstos dependen de λ_j . Cabe destacar que en las Ecuaciones (6.40) y (6.41) se encuentran la excentricidad y el perihelio de Saturno. Esto no es un problema ya que al igual que Júpiter se pueden modelar con la teoría secular. Para Saturno tendremos ecuaciones similares

$$e_s \exp[i\omega_s] = \sum_{l=1}^{N} G_{sl} \exp[i(g_s t + \gamma)]. \tag{6.42}$$

Las Tablas 6.1 y 6.2 también contienen los valores de las amplitudes, fases y frecuencias para este planeta. Además los coeficientes A_i , B_i y C_i se encuentran en la Tabla 6.4.

\overline{i}	A_i	B_i	C_i
1	-22418.797"	22260.089"	9848888.254"
$\overline{2}$	26745.689"	-26646.324"	-58662200.658"
3	-7782.128"	7762.464"	1133729.695"
4	-	-	-5434322.245"

Cuadro 6.4: Coeficientes de las variaciones seculares en e_i y ϖ_i .

Las variaciones seculares y las debidas a la gran desigualdad se incorporan al mapa antes de cada paso. Un esquema de integración seria el siguiente:

- 1. Se fija el tiempo inicial t_0 .
- 2. Con este tiempo se encuentran los elementos orbitales iniciales de Júpiter y Saturno con las Ecuaciones (6.36) y (6.42).
- 3. Se corrige por las variaciones seculares.
- 4. Se corrige por la gran desigualdad.
- 5. Se fijan las condiciones iniciales $(S_0, N_0, \sigma_0, \nu_0)$ para el asteroide.
- 6. Se avanza el tiempo una cantidad τ .
- 7. Se encuentran los elementos de Júpiter y Saturno para este tiempo.
- 8. Se corrige por las variaciones seculares.
- 9. Se corrige por la gran desigualdad.
- 10. Se evolucionan al asteroide con el mapa y se encuentran $(S_{i+1}, N_{i+1}, \sigma_{i+1}, \nu_{i+1})$.
- 11. Vuelve al paso 6.

Para la RMMJ 3:1 no es necesario considerar Neptuno ni Urano en forma directa, sino tan solo sus efectos sobre Júpiter y Saturno (Roig 1997 [90]).

6.5. Comparación con Simulaciones Exactas

Para realizar una comparación entre los resultados que arroja un integrador numérico de alto orden con el mapa algebraico se tomaron 500 condiciones iniciales sobre la recta $a=2.49-\frac{e}{10}$ con $e\in(0.01,0.4)$, paralela a la rama izquierda de la separatriz del problema circular. Para los ángulos tomamos los valores $\theta=2\sigma=\pi$ y $\Delta\varpi=0$. A éstas le asignamos 3 tasas de migración \dot{a}_Y distintas, una muy rápida $(2.5\times10^{-5}~{\rm UA/a\~no})$, una intermedia $(2.5\times10^{-6}~{\rm UA/a\~no})$ y una más lenta $(2.5\times10^{-7}~{\rm UA/a\~no})$. Luego las integramos con 3 modelos distintos, dependiendo de la órbita del perturbador (Júpiter): planar circular, planar elíptico y el elíptico inclinado . En las integraciones realizadas con el mapa algebraico, no fueron tenidos en cuenta los efectos seculares ni los debido a la gran desigualdad.

Las Figuras 6.2 - 6.4 muestran los resultados obtenidos. En la columna izquierda se muestran las condiciones iniciales de color azul en el plano (a-e), la separatriz de la resonancia 3:1 y las condiciones finales para las dos integraciones. De color verde el integrador numérico y de color rojo las del mapa. En la columna derecha se muestra el semieje final en función de la excentricidad inicial. En este gráfico, las partículas capturadas quedan alrededor del semieje resonante, el cual es $a_{res}=2.5$ UA, mientras que las que logran saltar siempre se encuentran por encima de un semieje mínimo, esto es $a_f>2.55$ UA. Además todos los gráficos están ordenados de tal manera que los de arriba se corresponden con al modelo circular, los del medio con el elíptico y los de abajo con el inclinado.

Podemos observar que ambas simulaciones concuerdan bastante, sobre todo para migraciones rápidas. Esto es porque para migraciones lentas, la evolución se hace más sensible a las condiciones iniciales y al integrador. Ambas simulaciones muestran, para cada caso, las mismas estructuras de capturas y cruces. Estas parecen ocurrir en especies de "ventanas" discretas y densas sobre el eje de excentricidad inicial. A medida que analizamos migraciones más lentas aparecen más ventanas y estas empiezan achicarse y a amontonarse hasta que en algún momento ya no podemos distinguirlas.

Por último notaremos que la diferencia en los tiempos de cómputo es muy grande entre ambos. El mapa es entre 500 y 1000 veces más rápido que la integración numérica. Esto nos permite poder utilizar entre 500 y 1000 veces más partículas en el mismo tiempo que nos llevaría hacerlas con el integrador numérico de alto orden.

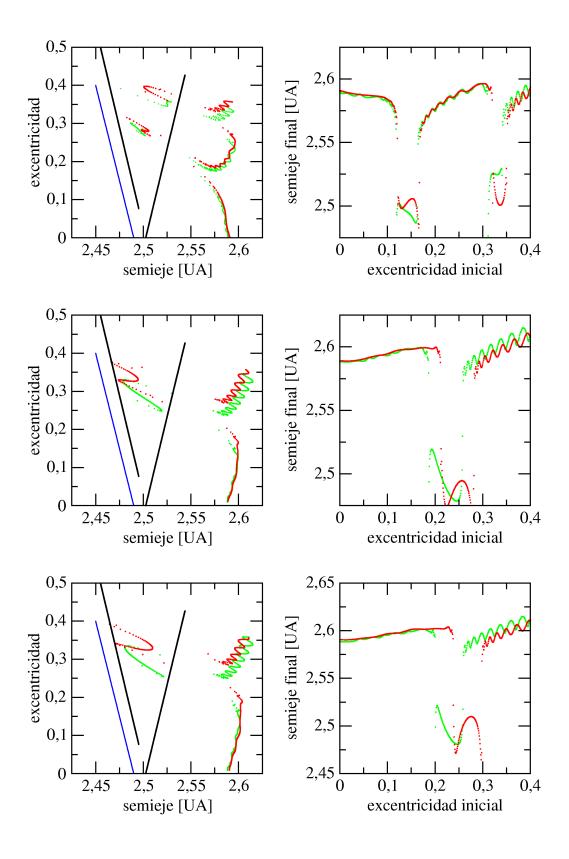


Figura 6.2: Arriba Modelo circular. Medio Modelo elíptico. Abajo Modelo inclinado. $\dot{a}_Y=2.5\times 10^{-5}$ UA/año. Las condiciones iniciales están de color azul, las condiciones finales para el integrador numérico de color verde y para el mapa algebraico de color rojo. La separatriz de color negro.

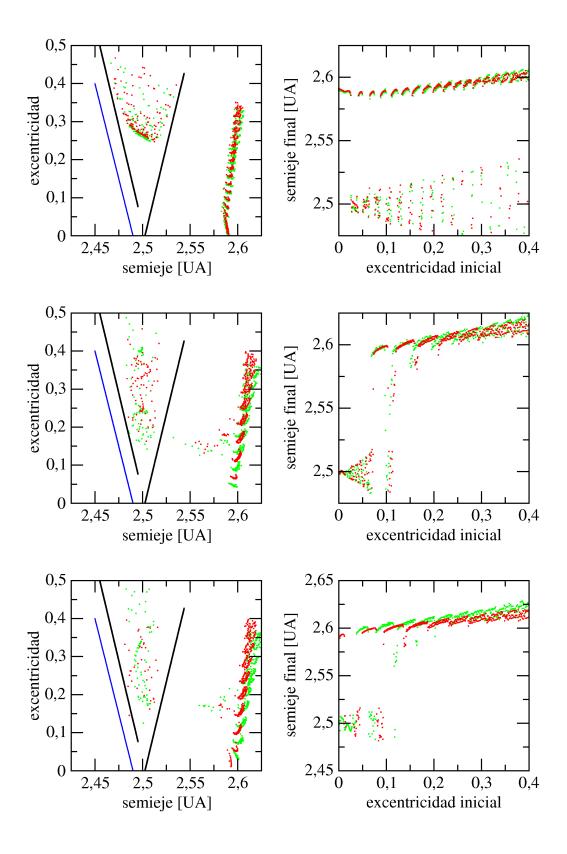


Figura 6.3: Arriba Modelo circular. Medio Modelo elíptico. Abajo Modelo inclinado. $\dot{a}_Y=2.5\times 10^{-6}$ UA/año. Las condiciones iniciales están de color azul, las condiciones finales para el integrador numérico de color verde y para el mapa algebraico de color rojo. La separatriz de color negro.

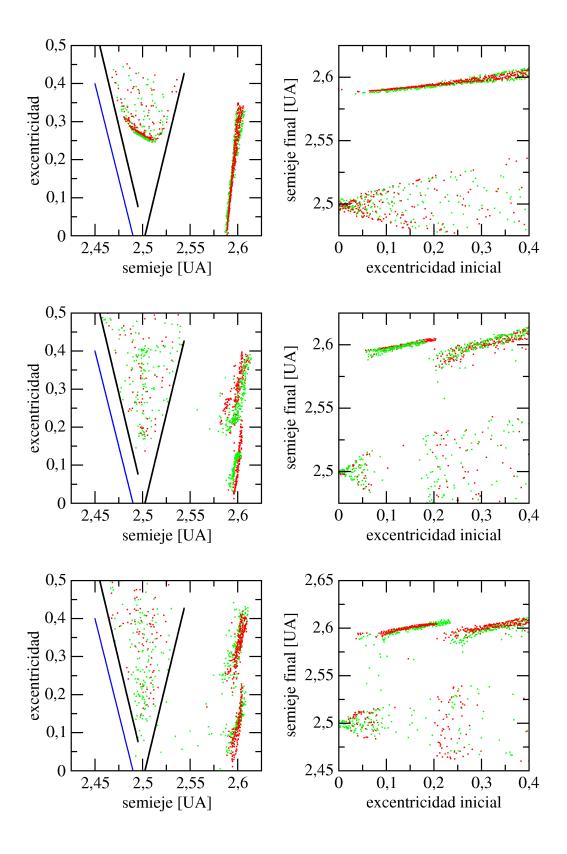


Figura 6.4: Arriba Modelo circular. Medio Modelo elíptico. Abajo Modelo inclinado. $\dot{a}_Y=2.5\times 10^{-7}$ UA/año. Las condiciones iniciales están de color azul, las condiciones finales para el integrador numérico de color verde y para el mapa algebraico de color rojo. La separatriz de color negro.

Capítulo 7

Probabilidad de Captura en Resonancia

7.1. Teoría de Invariantes Adiabáticos

Para el estudio realizado en este capítulo es necesario introducir previamente el concepto de invariante adiabático, así como la probabilidad teórica de captura para migraciones suficientemente "lentas". Existen infinidad de libros y artículos que tratan el tema de invariantes adiabáticos y sus aplicaciones (Arnold 1989 [92], Lichtenberg y Lieberman 1992 [70] y Henrard 1982 [49], etc.).

Consideremos un Hamiltoniano que además de depender de las coordenadas y momentos canónicos q y p, también depende de un parámetro λ

$$F(p,q,\lambda),\tag{7.1}$$

el cual varía lentamente con el tiempo. Con esto queremos decir que no sólo $d\lambda/dt$ debe ser pequeño, sino que sus derivadas de orden superior deben más pequeñas todavía, es decir, que exista una cantidad ε tal que

$$\frac{1}{n!} \left| \frac{d^n \lambda}{dt^n} \right| \le \varepsilon^n. \tag{7.2}$$

Los resultados serán válidos para valores de ε lo suficientemente chicos. Para simplificar la notación y sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$\lambda = \varepsilon t + \lambda_0 \tag{7.3}$$

Para intervalos de tiempo suficientemente pequeños, las trayectorias del sistema dinámico (7.1) no difieren mucho del sistema congelado $F(q, p; \lambda_0)$, donde la constante λ_0 es el valor inicial $\lambda(t=0)$. Más tarde, a un tiempo t^* a partir de éste, las trayectorias estarán cerca del sistema congelado $F(q, p; \lambda^*)$ para un valor diferente $\lambda^* = \lambda(t^*)$. Por lo tanto, para un pequeño intervalo de tiempo alrededor de cualquier tiempo t^* arbitrario, podemos aproximar la trayectoria por su "trayectoria de referencia" que se define como la trayectoria del sistema congelado en ese momento con condiciones iniciales $(q(t^*), p(t^*))$. El problema planteado por la teoría de invariantes adiabáticos es describir la evolución temporal de estas trayectorias guías.

Diremos que una cantidad $I(p,q,\lambda)$ es un invariante adiabático del sistema $F(p,q;\lambda)$ si para todo $\kappa > 0$ existe una cantidad $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y $0 < t < 1/\varepsilon$ entonces

$$|I(p(t), q(t); \varepsilon t) - I(p(0), q(0); 0)| < \kappa.$$
 (7.4)

Para abordar el tema, haremos uso de las variables ángulo-acción (J, ψ) , por lo que el momento p y la coordenada q son funciones de tales y además del parámetro λ

$$q = q(\psi, J, \lambda)$$

$$p = p(\psi, J, \lambda).$$
 (7.5)

Eligiendo una función generatriz tipo 1 $S_1(q, \psi, \lambda)$ de tal forma que

$$p = \frac{\partial S_1}{\partial q}(q, \psi, \lambda)$$

$$J = -\frac{\partial S_1}{\partial \psi}(q, \psi, \lambda), \tag{7.6}$$

entonces el nuevo Hamiltoniano estará dado por

$$F^*(J, \psi, \lambda) = F(q, p, \lambda) + \frac{\partial S_1}{\partial t}(q, \psi, \lambda),$$

y usando que $\frac{\partial S_1}{\partial t} = \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} \dot{\lambda},$ obtenemos

$$F^*(J, \psi, \lambda) = F(q, p, \lambda) + \dot{\lambda} \frac{\partial S_1}{\partial \lambda}(q, \psi, \lambda). \tag{7.7}$$

Esto nos dice que el Hamiltoniano no es un invariante adiabático. Además tendremos que la acción ya no permanece más constante, ya que

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial \psi} = -\frac{\partial F}{\partial \psi} \bigg|_{(p,q)=(J,\psi)} - \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} (q,\psi,\lambda) \right]. \tag{7.8}$$

La cantidad $\frac{\partial F}{\partial \psi}\Big|_{(p,q)=(J,\psi)}$ es necesariamente cero ya que la acción es constante a lo largo de la solución para el caso λ constante, por lo tanto

$$\frac{dJ}{dt} = -\dot{\lambda}\frac{\partial}{\partial\psi} \left[\frac{\partial S_1}{\partial\lambda} (q, \psi, \lambda) \right] \neq 0. \tag{7.9}$$

Lo siguiente que haremos será ver la variación media de J a lo largo de una órbita, esto es

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dJ}{dt} dt = -\frac{1}{T} \int_0^T \dot{\lambda} \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} (q, \psi, \lambda) \right] dt, \tag{7.10}$$

 $con T = T(J, \lambda).$

Ahora, si pensamos a λ como una función del tiempo, la expandimos en series de Taylor obteniendo

$$\lambda(t) = \lambda_0 + \varepsilon t + O(\varepsilon^2 t^2)
\dot{\lambda}(t) = \varepsilon + O(\varepsilon^2 t).$$
(7.11)

Reemplazando en la integral tenemos

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle = -\frac{\varepsilon}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \psi} \left[\frac{\partial S_1}{\partial \lambda} (q, \psi, \lambda) \right]_{(\lambda = \lambda_0)} dt + O(\varepsilon^2 T^2). \tag{7.12}$$

Ya que S_1 es una función periódica, entonces la integral se anula, la acción es constante a primer orden en ε , y por o tanto, un invariante adiabático. De ésta forma $J=J(t_0)$ es la trayectoria guía que estábamos buscando.

7.2. Probabilidad de Captura en Resonancia: Caso Adiabático

Sea un sistema dinámico como el presentado en la Figura 7.1, en donde podemos definir tres zonas: una región de circulación interna D_1 , una región de libración D_2 y una región de circulación externa D_3 . Nos interesa conocer cual es la probabilidad P_{ij} que tiene una condición inicial, originalmente en la zona D_i en pasar a la zona D_j .

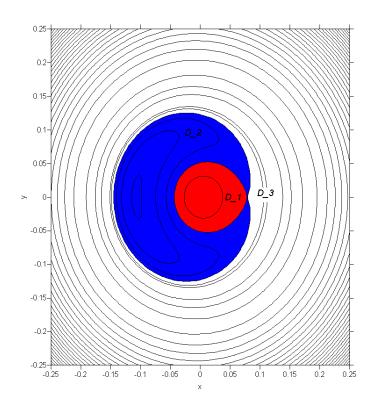


Figura 7.1: Plano de coordenadas rectangulares $x = \sqrt{S}\cos(\theta)$ e $y = \sqrt{S}\sin(\theta)$. D_1 circulación interna. D_2 región de libración. D_3 circulación externa.

Llamaremos J_1^* al área de la región D_1 (de color rojo en la Figura 7.1), J_2^* al área de la región D_2 (de color azul) y J_3^* al área de la región D_3 la cual es $J_1^* + J_2^*$. En ausencia de migración, estas áreas permanecen constantes y solamente dependen del valor inicial de M, por lo que $J_i^* = J_i^*(M)$.

Henrard (2005) muestra que en primera aproximación, la probabilidad P_{3i} que tiene una condición inicial en la región D_3 de pasar a la región D_i por migración, se encuentra dada por la expresión

$$P_{3i} = P_i = \frac{\partial J_i^* / \partial M}{\partial J_3^* / \partial M}.$$
 (7.13)

Deseamos aplicar esta teoría a la RMMJ 3:1, por lo que partiendo del Hamiltoniano de problema circular (4.44), encontramos numéricamente, para cada valor de M, el valor de las acciones y de sus derivadas. Con éstos, realizamos sus cocientes para obtener la probabilidad P_2 teórica para una migración adiabática en función de la variable M. Esto se muestra en las Figuras 7.2 y 7.3. Ya que la región D_2 es la zona de libración, P_2 es la probabilidad de quedar capturada en dicha resonancia. Además, usando que $J_1 = J_3 - J_2$, es fácil mostrar que $P_1 = 1 - P_2$, la cual es la probabilidad que tiene el asteroide de cruzar la resonancia.

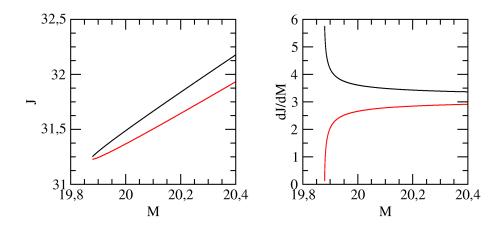


Figura 7.2: Izquierda: La curva negra corresponde a J_3 y la curva roja a J_2 . Derecha: La curva negra corresponde a dJ_3/dM y la curva roja a dJ_2/dM . Las unidades de M y J son $UA^2/a\tilde{n}o$.

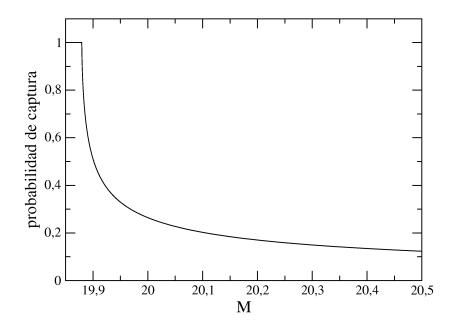


Figura 7.3: Probabilidad de captura vs. M. La unidad de Mes $\mathrm{UA}^2/\mathrm{a\tilde{n}o}.$

Por último notaremos que, ya que el efecto Yarkovsky no modifica la excentricidad, por lo que es totalmente equivalente tomar el valor de M o tomar la excentricidad con el cual el asteroide llega a la resonancia en el plano a-e. Por una cuestión de comodidad y de interpretación física, adoptaremos la probabilidad de captura en función de la excentricidad, como lo muestra la Figura 7.4.

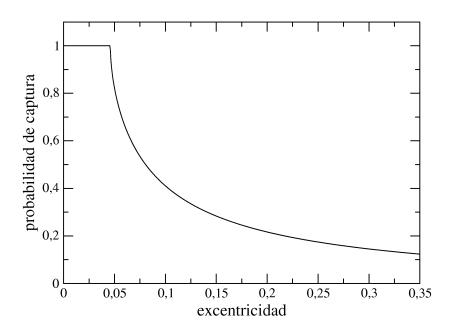


Figura 7.4: Probabilidad de captura vs. excentricidad.

Podemos observar que a bajas excentricidades, $e \in [0.0, e_c \approx 0.05]$, la probabilidad de captura es del 100%, mientras que si $e > e_c$ esta decae exponencialmente. Esto nos quiere decir que para migraciones adiabáticas, todo asteroide que entre a la resonancia con excentricidad menor que $e_c \approx 0.05$ será capturado, sin embargo, a medida que la condición inicial es más excéntrica, el asteroide tendrá una probabilidad cada vez menor de cruzar la resonancia. Esta probabilidad es más baja cuanto más alta sea la excentricidad inicial.

7.3. Probabilidad de Captura en Resonancia: Caso No Adiabático

La única referencia que existe en la literatura de capturas en resonancias para el caso no adiabático en el Sistema Solar se debe a un trabajo de Gomes (1995 [52]), el cual estudia resonancias de movimientos medios de tercer orden y una migración producida por el efecto Poynting-Robertson.

En dicho trabajo, se obtiene la probabilidad de captura para distintos valores de migración en casos no adiabáticos (Figura 7.5), la cual es igual a 0 a bajas excentricidades. Luego crece hasta alcanzar un máximo y vuelve a decrecer asintóticamente. Este máximo se hace más grande a medida que nos acercamos al caso adiabático, así como también se desplaza a bajas excentricidades.

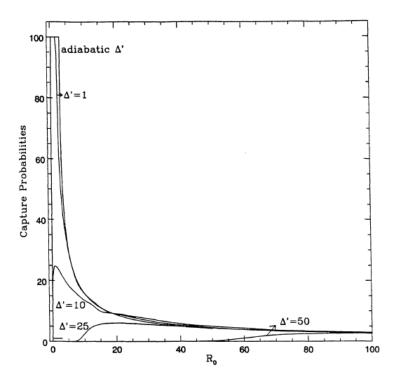


Figura 7.5: Caso no adiabático. Probabilidad de captura en función de R_0 donde R es función de la excentricidad. Δ' tiene que ver con la tasa de migración y crece junto a ella. Gomes 1995 [52].

7.4. Simulaciones

Para comparar la probabilidad de captura teórica en ámbos casos, tanto el adiabático como el no adiabático, con las simulaciones numéricas, utilizamos el mapa algebraico desarrollado en la sección anterior y usando tres modelos distintos dependiendo de la órbita de Júpiter: el modelo circular (MC), cuando $e_{jup}=0$, el modelo elíptico (ME), si $e_{jup}\neq 0$ =cte y por último el modelo elíptico con términos seculares (MES), en el cual la órbita de Júpiter es perturbada por el resto de los planetas Jovianos sin que los asteroides sientan dicha perturbación. Para el modelo circular tomamos 1000 condiciones iniciales sobre la recta $a=2.49-\frac{e}{10}$ con $e\in(0.01,0.4)$, paralela a la rama izquierda de la separatriz del problema circular en el plano a-e, y considerando 36 valores equiespaciados de $\theta\in(0,2\pi)$. Para los dos modelos restantes tomamos 100 condiciones iniciales equiespaciadas sobre la misma recta del modelo circular y 18 valores equiespaciados θ y $\Delta \varpi \in (0,2\pi)$. Por último, cada uno de estos conjuntos de condiciones iniciales fueron integrados con distintos valores de a_Y , los cuales se encuentran en la Tabla 7.1.

Las Figuras 7.6 - 7.18 van desde el caso altamente no adiabático ($\dot{a}_Y = 10^{-3} \text{ UA/año}$) al adiabático ($\dot{a}_Y = 10^{-7} \text{ UA/año}$). Los gráficos de la columna izquierda muestran el semieje final en función de la excentricidad inicial de cada asteroide integrado para cada modelo (MC, ME y MES respectivamente). En la columna derecha se encuentran sus correspondientes probabilidades de capturas en función de la excentricidad inicial. Al igual que en el capítulo 5, diremos que un asteroide cruza la resonancia si su semieje final es mayor que un semieje crítico. Este valor,

$\dot{a} \; [\mathrm{UA/a ilde{n}o}]$	MC	ME	MES
1.0×10^{-3}	15	20	20
5.0×10^{-4}	35	90	90
2.5×10^{-4}	90	100	100
1.0×10^{-4}	150	150	150
5.0×10^{-5}	200	250	250
2.5×10^{-5}	350	500	500
1.0×10^{-5}	700	1000	1000
5.0×10^{-6}	1300	3500	3500
2.5×10^{-6}	2500	10000	15000
1.0×10^{-6}	6000	25000	30000
5.0×10^{-7}	12500	60000	75000
2.5×10^{-7}	25000	100000	125000
1.0×10^{-7}	60000	300000	300000

Cuadro 7.1: Valores de migración usados y cantidad de iteraciones para cada modelo.

como ya comentamos, depende de cada caso, pero en general $a_c \approx 2.55$ UA. Así, los asteroides capturados son representados de color rojo, mientras que los de color azul son aquellos que logran cruzar la resonancia. Para encontrar la probabilidad de captura usamos la Ecuación (7.13).

Para las migraciones más rápidas (Figura 7.6), notamos que todos los asteroides logran cruzar la resonancia. Las primeras capturas aparecen en el modelo elíptico (ME) y el secular (MS), a partir de $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-4}$ UA/año (Figura 7.7). Estas ocurren en regiones de excentricidades altas ($e \gtrsim 0.3$). Para el modelo circular (MC) ésto se observa a partir de 2.5×10^{-4} UA/año (Figura 7.8). En este gráfico observamos también que las capturas en el ME y el MS empiezan a ocurrir a excentricidades más bajas ($e \gtrsim 0.2$). Esto concuerda con los resultados numéricos obtenidos en el Capitulo 5, donde las ventanas se forman en excentricidades altas y se mueven a excentricidades bajas a medida que disminuimos la migración.

Este comportamiento sigue manteniéndose en las Figuras 7.9, 7.10 y 7.11, mientras que aparecen los primeros picos en la probabilidad de captura. En la Figura 7.12, la probabilidad del MC comienza a parecerse a la curva de Gomes para una migración no adiabática pero mucho más ruidosa. Este ruido se debe a las ventanas de capturas, hecho que no se observa en el trabajo de Gomes pues el autor realiza un suavizado de dicha curva, pasando por alto este fenómeno. La probabilidad de captura para el ME y el MS se parece al caso límite entre una migración no adiabática y una adiabática, como se puede apreciar en la Figura 7.5. Diremos que una migración es adiabática si su curva de probabilidad de captura es semejante a la curva teórica calculada (Figura 7.4).

En el gráfico 7.13 se observa como la evolución del MC es similar al régimen no adiabático estudiado por Gomes. La curva de probabilidad de captura posee un máximo en excentricidades altas. A medida que la migración es más lenta, este máximo se traslada a excentricidades más bajas y el valor de este máximo aumenta. En el ME y MS se observa es especie de "cola" de condiciones que cruzan la resonancia (puntos azules) en la región de bajas excentricidades. Esta cola, está formada por asteroides que han permanecido mucho más tiempo dentro de la

resonancia que el resto de los que logran saltarla. Como se puede notar en los siguientes gráficos, ésta es una gran diferencia entre el MC y el resto de los modelos, pues en el primer modelo los cruces se producen en una escala de tiempo mucho más pequeña para todos los asteroides que cruzan la resonancia, mientras que para los otros dos modelos además de éstos, tenemos los que forman dicha cola. Para migraciones lentas, dicho efecto se localiza en $e \in (0.05, 0.25)$.

En la Figura 7.14 que el ME y el MS se encuentran claramente en el régimen adiabático, mientras que el MC todavía se encuentra en el caso no adiabático descripto por Gomes. Recién en la Figura 7.16, podemos observar que la curva de probabilidad de captura del MC es similar al del régimen adiabático. En esta misma figura, para el gráfico semieje final en función de la excentricidad inicial del MS, observamos que, además de la cola característica, un conjunto de asteroides que cruzan la resonancia se agrupan alrededor del valor 2.82, el cual corresponde con el semieje mayor de un asteroide en resonancia de movimientos medios 5:2 con Júpiter. Esto significa que éstos asteroides han sido capturados por esta resonancia.

Para las integraciones numéricas con migraciones rápidas (Figuras 7.17 y 7.18) podemos ver que todos los modelos son compatibles con una migración adiabática. Para el MC y el ME, el decaimiento exponencial de la probabilidad de captura parece ocurrir a excentricidades más bajas que para el MS.

Repasando lo obtenido, observamos que el límite entre el caso no adiabático y el adiabático en el modelo circular se encuentra alrededor de 2.5×10^{-7} UA/año. En cambio en el modelos elíptico y el modelo secular, éste límite se encuentra alrededor de 5.0×10^{-6} UA/año. Este resultado es interesante, ya que nos esta diciendo que cuanto más realista es el modelo, más rápido aparece el límite adiabático. Tomando la Ecuación (5.9), la cual nos relaciona la tasa de migración para asteroides basálticos con sus diámetros, obtenemos que en el modelo circular la migración será adiabática para asteroides con diámetros mayores a 1 m, mientras que para el modelo elíptico esto ocurre para asteroides con diámetros mayores a 5 cm. Esto quiere decir que todo asteroide basáltico observado en el cinturón de asteroides, migra en forma adiabática, ya que sus diámetros estimados son del orden del km.

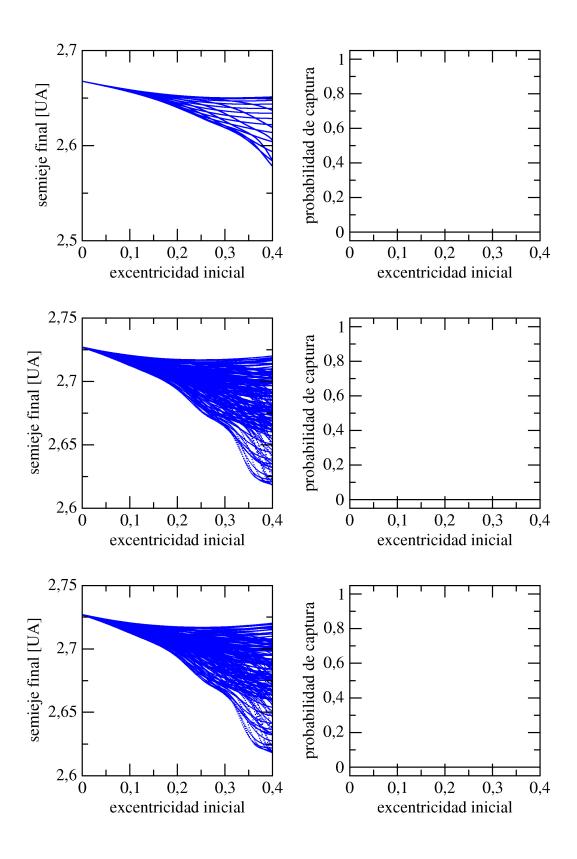


Figura 7.6: $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-3} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

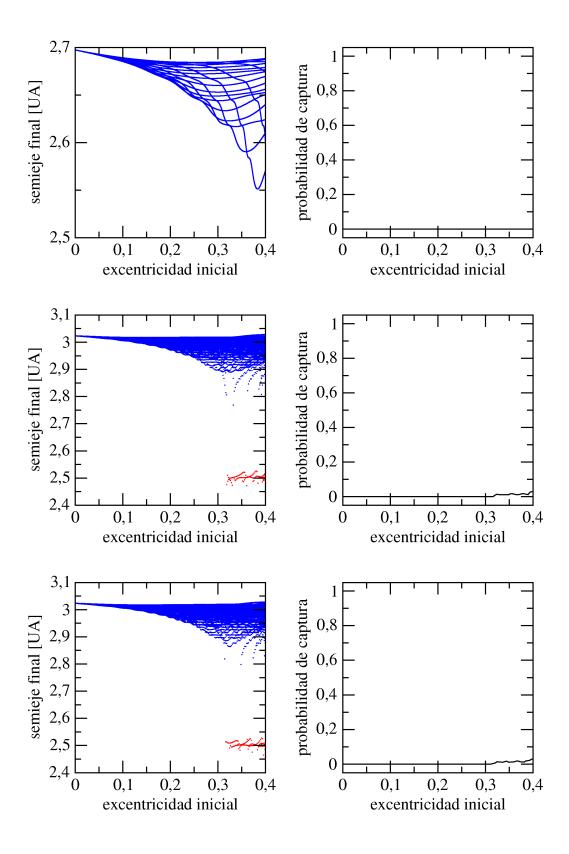


Figura 7.7: $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-4} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

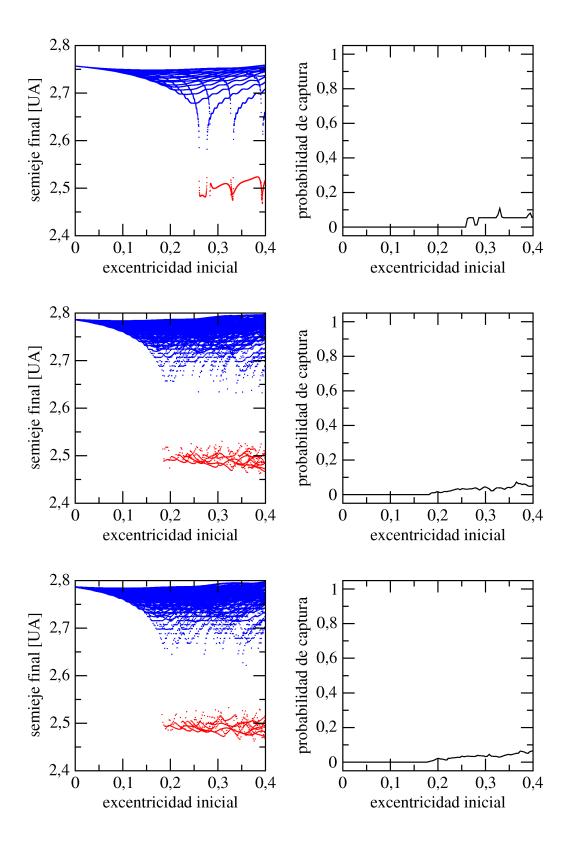


Figura 7.8: $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-4} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

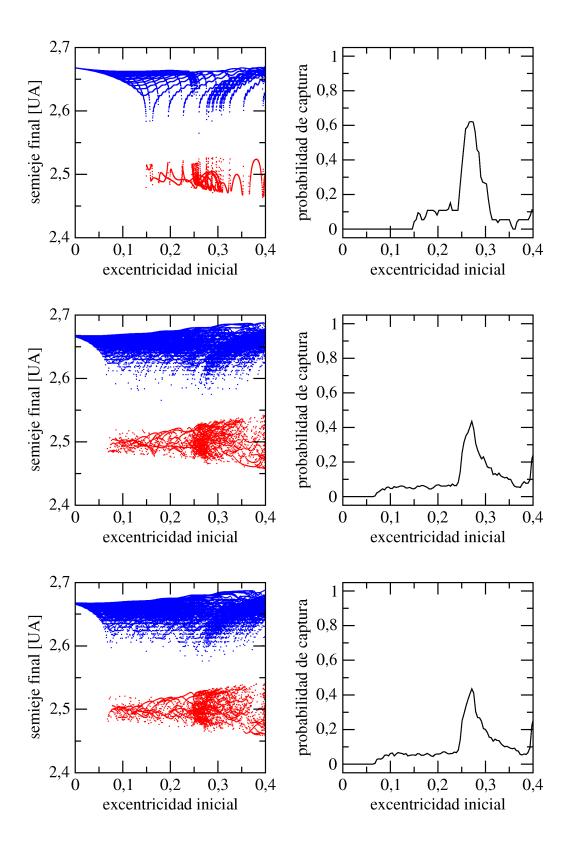


Figura 7.9: $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-5} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

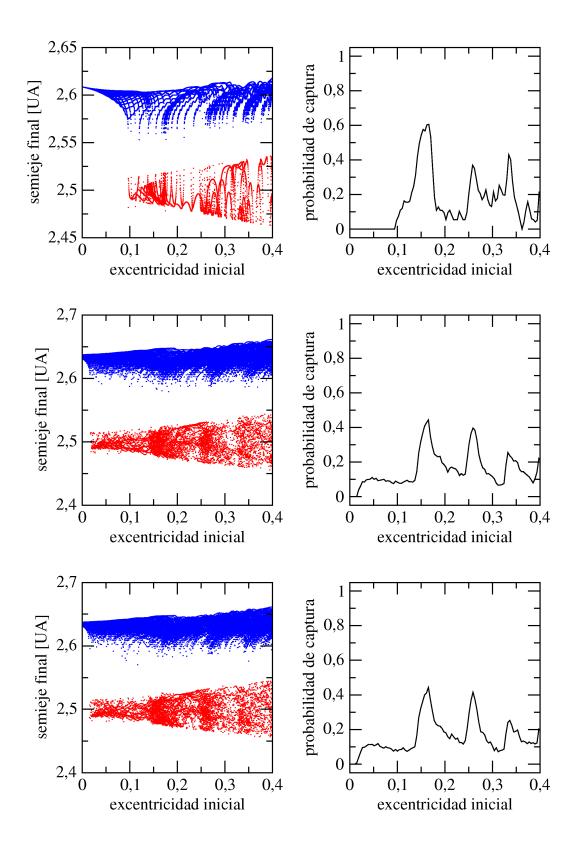


Figura 7.10: $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-5}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

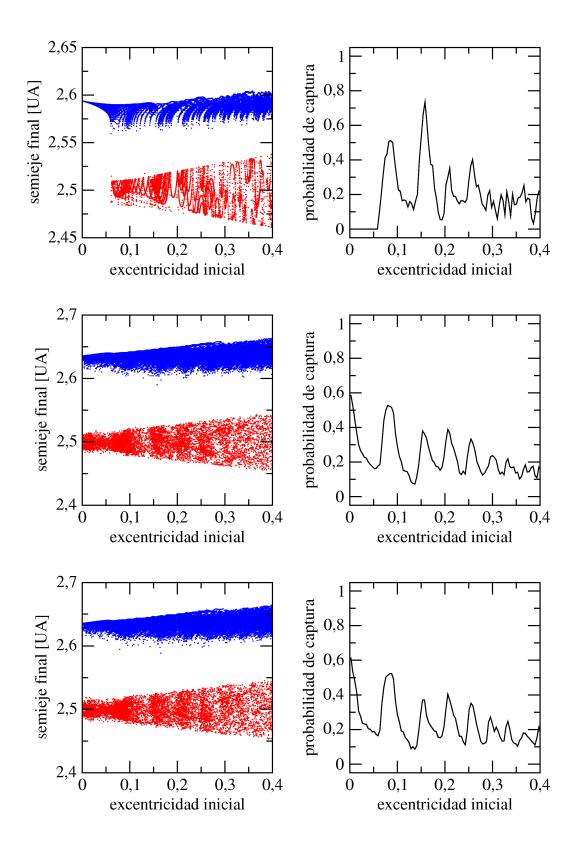


Figura 7.11: $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-5}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

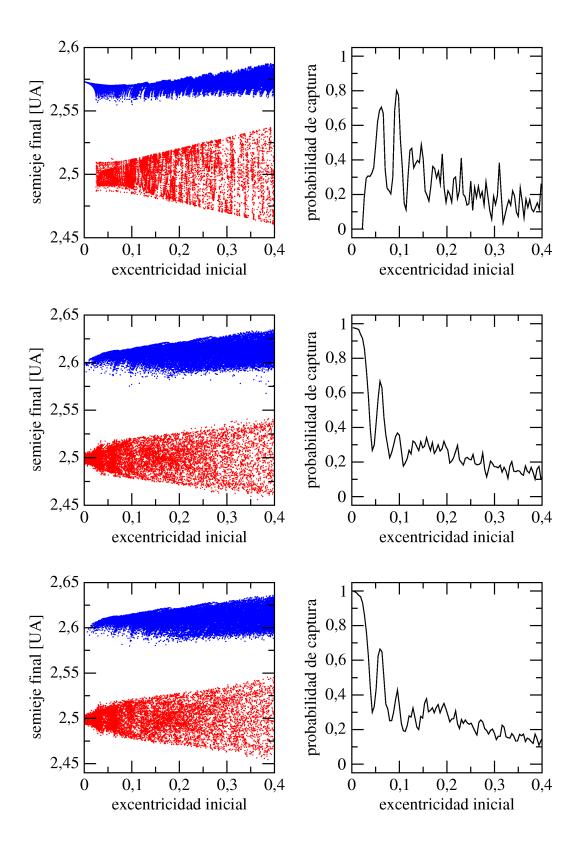


Figura 7.12: $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-5}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

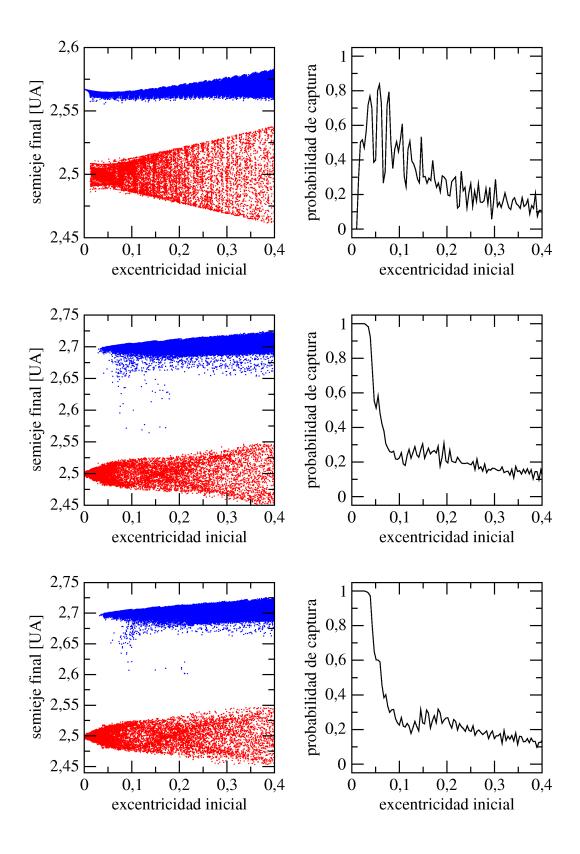


Figura 7.13: $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-6}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

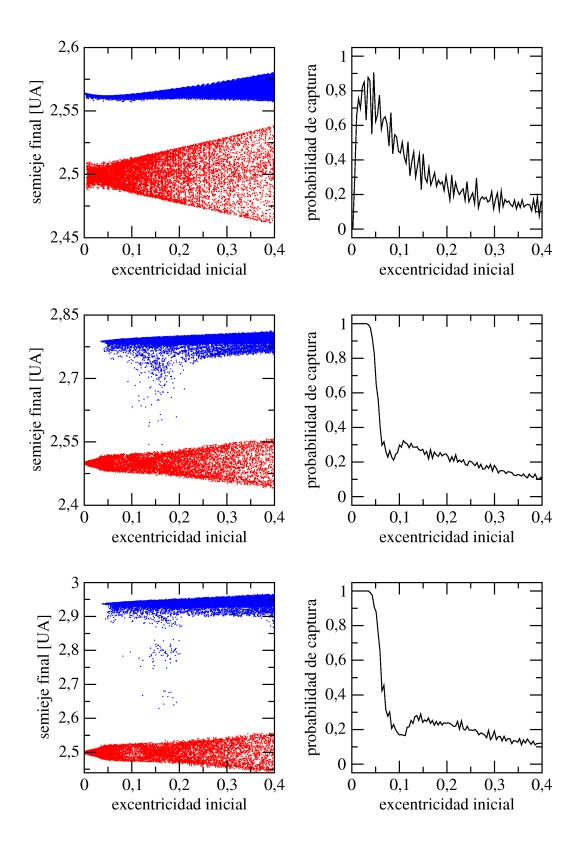


Figura 7.14: $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-6}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

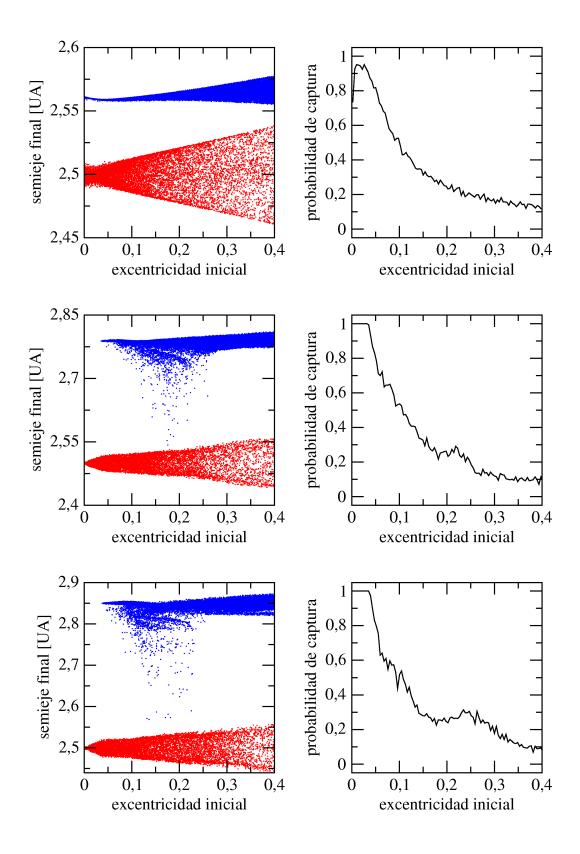


Figura 7.15: $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-6}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

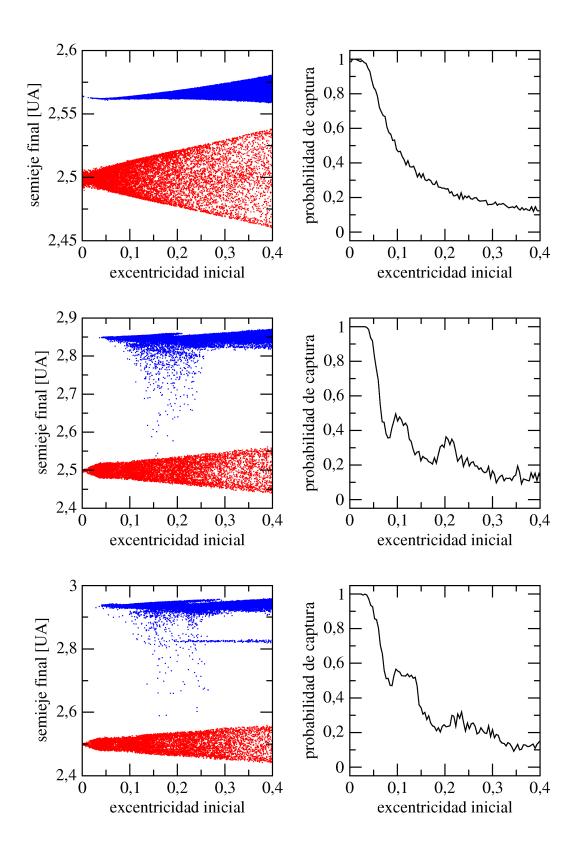


Figura 7.16: $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-7} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

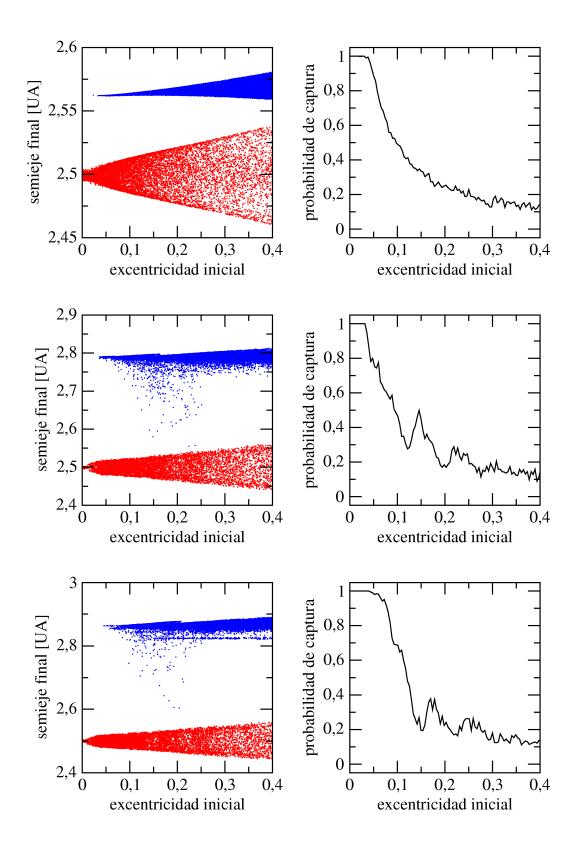


Figura 7.17: $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-7}$ UA/año. *Izquierda*: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. *Derecha*: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

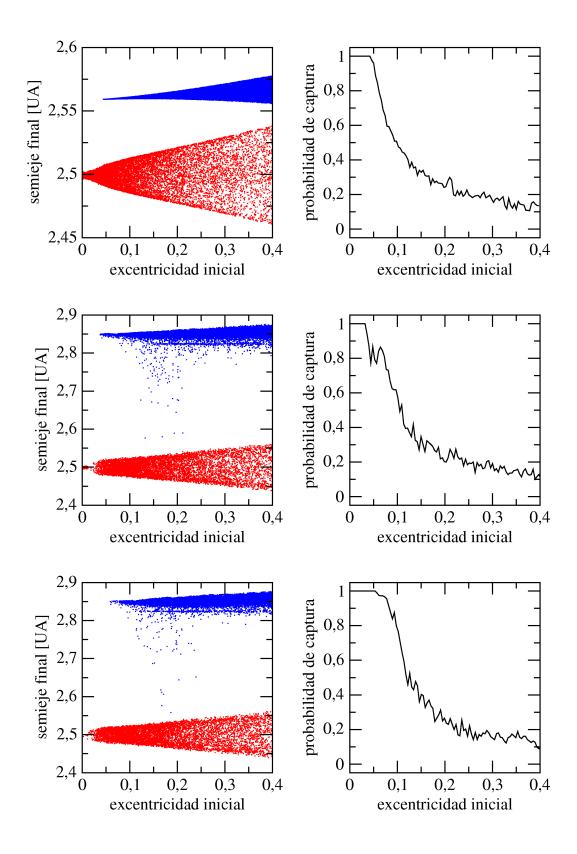


Figura 7.18: $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-7} \text{ UA/año}$. Izquierda: Semieje final vs. excentricidad inicial. Los puntos rojos son asteroides capturados y los puntos azules son asteroides que cruzan la resonancia. Derecha: Probabilidades de captura vs. excentricidad inicial.

7.5. Probabilidad de Captura Integrada

Un asteroide que llega por migración a la rama izquierda de la separatriz en el plano a-e, tiene una cierta probabilidad P_{cap} de ser capturado por la resonancia. Esta probabilidad depende del valor de los ángulos θ y $\Delta \varpi$, de la velocidad de migración \dot{a}_Y y de M, o equivalentemente de la excentricidad e. Al variar los ángulos entre 0 y 2π , en la sección anterior lo que hicimos fue estimar la probabilidad integrada

$$\langle P_{cap} \rangle_{\theta, \Delta \varpi} = P_{cap}(e, \dot{a}_Y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} P_{cap}(e, \dot{a}_Y, \theta, \Delta \varpi) \ d\theta d\Delta \varpi. \tag{7.14}$$

Para tener una idea más general de cual es la probabilidad total de captura en función de la tasa de migración, ahora integramos esta función en el intervalo de excentricidad estudiado

$$\langle P_{cap} \rangle_e = P_{cap}(\dot{a}_Y) = \frac{1}{(0.4)} \int_0^{0.4} P_{cap}(e, \dot{a}_Y) de.$$
 (7.15)

La función $P_{cap}(\dot{a}_Y)$ se presenta en la Figura 7.19, para cada modelo. La curva negra representa el modelo circular, la curva verde el modelo elíptico y la curva roja el secular.

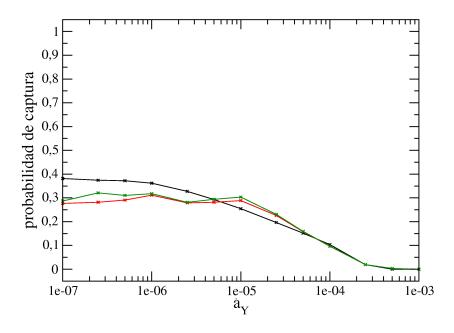


Figura 7.19: Probabilidad de captura integrada. La curva negra corresponde al modelo circular, la curva roja al modelo elíptico y la curva verde al modelo secular.

Lo que nos dice esta figura es que la probabilidad de captura total para asteroides con excentricidades entre [0,0.4] y migraciones lentas es del orden de $40\,\%$ para el modelo circular y del $30\,\%$ para el modelo elíptico y el secular. Sin embargo el límite adiabático ocurre a migraciones más rápidas para el modelo elíptico y secular que para el modelo circular, llegando a probabilidades del $100\,\%$ a excentricidades bajas.

Para solucionar esto, realizaremos la integral sobre dos regiones: una a excentricidades bajas [0,0.04] y la otra sobre excentricidades intermedias-altas [0.04,0.4]. Con esta división, la región de excentricidades bajas tiene al 100% de captura cuando nos aproximamos al caso adiabático. Los resultados se muestran en las figuars 7.20.

A bajas excentricidades la probabilidad de captura en modelos más realistas tienden al $100\,\%$ mucho antes que en el modelo circular. Esto ocurre para migraciones del orden de $\dot{a}_Y=5.0\times10^{-6}~\mathrm{UA/a\~no}$, mientras que para el modelo circular lo es para $\dot{a}_Y=5.0\times10^{-7}~\mathrm{UA/a\~no}$.

En cambio, es muy interesante ver que a excentricidades intermedias-altas, la probabilidad de captura es independiente del modelo utilizado, y su valor oscila alrededor del 30 %.

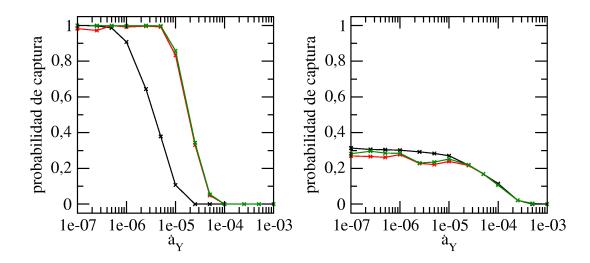


Figura 7.20: *Izquierda*: Excentricidades bajas. *Derecha*: Excentricidades intermedias-altas. Las curvas negras corresponden al modelo circular, las curvas rojas al modelo elíptico y las curvas verdes al modelo secular.

7.6. Comparación con La Distribución Real de Asteroides

Llegado a este punto, queremos encontrar la probabilidad de captura integrada para asteroides provenientes de la familia de Vesta en función de la tasa de migración. Roig et al. (2008 [47]) afirma que la probabilidad que tiene un miembro de dicha familia de cruzar la resonancia es del 3 %. Para ésto, realizaron integraciones numéricas del Sistema Solar completo sin Mercurio, con asteroides reales pertenecientes a dicha familia tal que se encuentren en el borde de la resonancia 3:1, a los cuales se les asignaron dos tasas de migración $\dot{a}_Y = (1.0 \ 10^{-10} \ \text{UA/año})$ y $\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-9}$) UA/año.

Debido a que el efecto Yarkovsky solo modifica el semieje mayor de los asteroides, la familia conserva la distrubición inicial en excentricidad, al menos para la gran mayoría de sus miembros. Sin embargo existe un pequeño número de asteroides, para los cuales la combinación de migración por Yarkovsky con mecanismos dinámicos como resonancias de movimientos medios

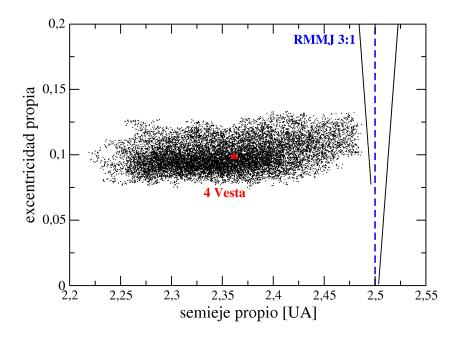


Figura 7.21: Plano de elementos propios a-e. Los puntos negros son asteroides que pertenecen a la familia de Vesta. El triangulo rojo es Vesta. La línea discontinua azul es la resonancia de movimientos medios 3:1 exacta y las líneas contínuas negras su separatriz.

y resonancias seculares, producen variaciones importantes en excentricidad e inclinación (Nesvorný et. al, 2008 [93]). Estos asteroides son conocidos como fugitivos de la familia de Vesta y en esta sección no serán tenidos en cuenta. La Figura 7.21 nos muestra la posición en el plano de elementos propios $a_p - e_p$ de todos los miembros de familia de Vesta sin estos asteroides fugitivos. Asumiendo que la excentricidad propia difiere demasiado con la excentricidad osculadora $(e_p \approx e)$, el intervalo en el que tenemos que integrar es aproximadamente $e \in [0.07, 0.14]$, por lo que la probabilidad de captura nos queda

$$\langle P_{cap} \rangle_e = P_{vesta}(\dot{a}_Y) = \frac{1}{0.07} \int_{0.07}^{0.14} P_{cap}(e, \dot{a}_Y) de.$$
 (7.16)

La Figura 7.22 muestra los resultados obtenidos. Para el modelo circular la probabilidad de captura permanece constante alrededor del $50\,\%$ para tasas de migración mayores a 5×10^{-6} UA/año. Para el modelo elíptico, la probabilidad de captura llega al $87\,\%$ para una migración de 10^{-9} UA/año, sin embargo la curva muestra una tendencia a seguir creciendo, por lo que para un orden de magnitud menos se espera una probabilidad mayor, superior al $90\,\%$. Para el modelo secular se observa una curva similar a la del modelo elíptico, aunque siempre ligeramente más grande, llegando la probabilidad de captura a ser del 95- $96\,\%$. Estos resultados son compatibles con los resultados de Roig et al. ($2008\,[47]$), y nos está diciendo que la causa de la baja probabilidad que tienen los asteroides pertenecientes a la familia de Vesta de cruzar la resonancia, se debe simplemente a la excentricidad de Júpiter. Esto es sumamente importante, ya que significa que no nos hace falta recurrir a modelos demasiados complejos, que tienen un costo computacional muy elevado, para poder reproducir eficientemente este comportamiento.

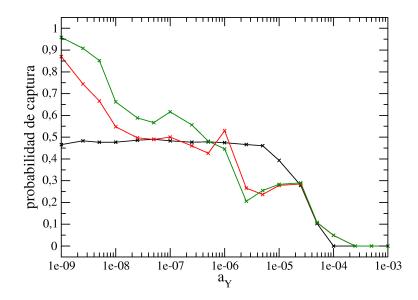


Figura 7.22: Probabilidad de captura integrada para la familia de Vesta. La curva negra corresponde al modelo circular, la curva roja al modelo elíptico y la curva verde al modelo secular.

7.7. Estructura del Espacio de Condiciones Iniciales

En esta sección haremos una descripción de la estructuras de capturas y cruces en el espacio de condiciones iniciales, más precisamente analizaremos como varían las ventanas de captura con los ángulos. Para esto tomamos la condición inicial a=2.45 UA y e=0.2, para tres valores de $\dot{a}=5\times10^{-5}$ UA/año, 5×10^{-6} UA/año y 5×10^{-7} UA/año, haciendo variar en cada caso los ángulos θ y $\Delta\varpi$. Los asteroides fueron integrados hasta que su semieje fuese mayor a 2.56 UA o su excentricidad fuese mayor a 0.5. La primera condición corresponde al caso en el que el asteroide cruza la resonancia, mientras que en el segundo es capturado.

Puesto que las condiciones iniciales parten todas en el mismo punto del plano a-e, esperamos que cada partícula llegue a la separatriz con un valor de θ y $\Delta \varpi$ muy próximo al siguiente, por lo que la captura o la dispersión dependerá de estos valores y de la tasa de migración utilizada. Estas integraciones se llevaron a cabo para cuatro modelos distintos: i) Júpiter en una órbita circular (MC), ii) Júpiter en una órbita elíptica (ME), iii) Júpiter en una órbita elíptica perturbada por las variaciones seculares provenientes de Saturno, Urano y Neptuno (MS) y iv) la misma que la iii) pero con términos provenientes a perturbaciones periódicas debido a la gran desigualdad (Sección 6.4.4.) (MSP). Las zonas de color azul representan condiciones que logran saltar la resonancia mientras que las zonas blancas representan condiciones que han sido capturadas.

Las Figuras 7.23-7.25 muestran los resultados de dichas integraciones. Se puede observar que en el modelo circular las zonas de capturas no dependen de $\Delta \varpi$, esto simplemente se debe a que el Hamiltoniano no depende de este ángulo. Para este modelo, en el caso de la migración más rápida observamos dos ventanas de captura bien definidas. A medida que disminuimos la tasa de migración, éstas desaparecen y vemos muchas ventanas nuevas con anchos bastantes menores. Con los demás modelos la estructura es bastante diferente. Para las migraciones más rápidas, las cuales son no adiabáticas, la estructura de captura muestra un continuo con el

ángulo $\Delta \varpi$. Sin embargo, para la migración más lenta (Figura 7.25), la cual corresponde a una migración adiabática, la estructura de captura depende altamente de las condiciones iniciales, pareciendo ser una estructura de tipo fractal.

Un análisis visual de los gráficos parecería indicar que el par de ventanas del modelo circular se cierra para formar una especie de elipse deformada, rotada y centra alrededor de θ y $\Delta \varpi = \pi/2$ (Figura 7.23). A medida que vamos pasando a migraciones más lentas, aparecen ventanas más pequeñas en el modelo circular que se corresponderían con elipses deformadas más pequeñas en el modelo elíptico. Cuando la migración es muy lenta (adiabática), así como dejamos de ver la estructura de ventanas porque estas son muy numerosas, con anchos pequeños y se encuentran muy próximas, también dejamos de observar las elipses para observar una estructura que, como dijimos, parecería ser de tipo fractal.

Por último, si bien existen diferencias entre el modelo elíptico y el modelo secular, no parece haber diferencias significativas entre este último y el que incluye las perturbaciones debido a la gran desigualdad. En lo que resta del trabajo, nos concentraremos en analizar el modelo circular, pues la estructura de ventanas es demasiado compleja en los sistemas más elaborados, por lo que estudiaremos las ventanas en el modelo más simple.

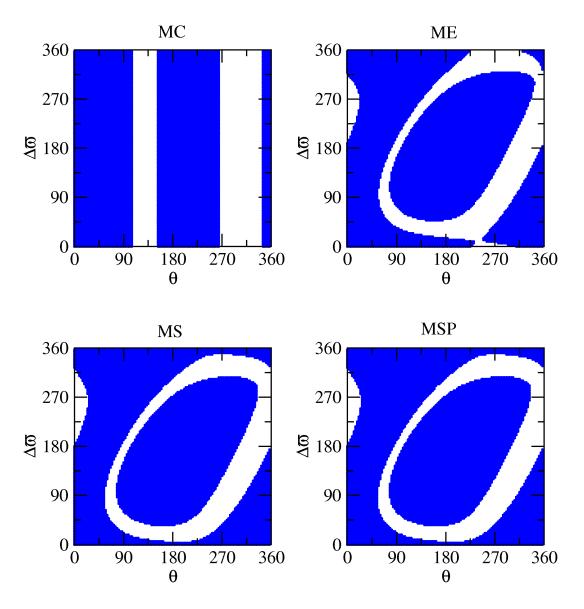


Figura 7.23: Regiones de captura para la condición inicial a=2.45 UA y e=0.2 en función de los ángulos θ y $\Delta\varpi$ (en grados), para diferentes modelos y una tasa de migración $\dot{a}_Y=5\times 10^{-5}$ UA/año.

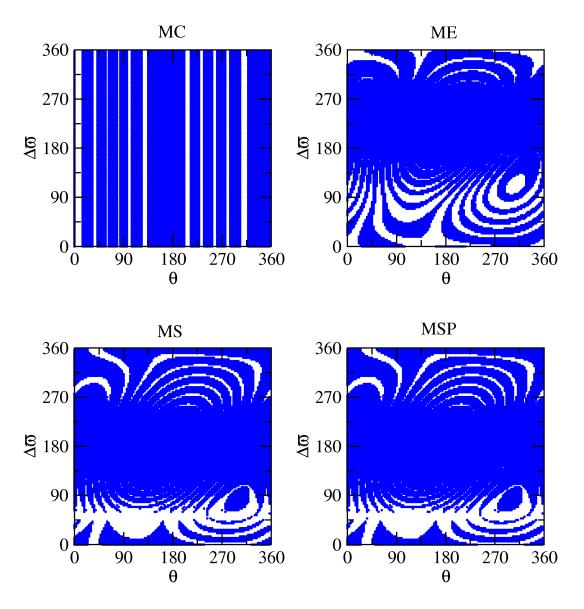


Figura 7.24: Regiones de captura para la condición inicial a=2.45 UA y e=0.2 en función de los ángulos θ y $\Delta\varpi$ (en grados), para diferentes modelos y una tasa de migración $\dot{a}_Y=5\times 10^{-6}$ UA/año.

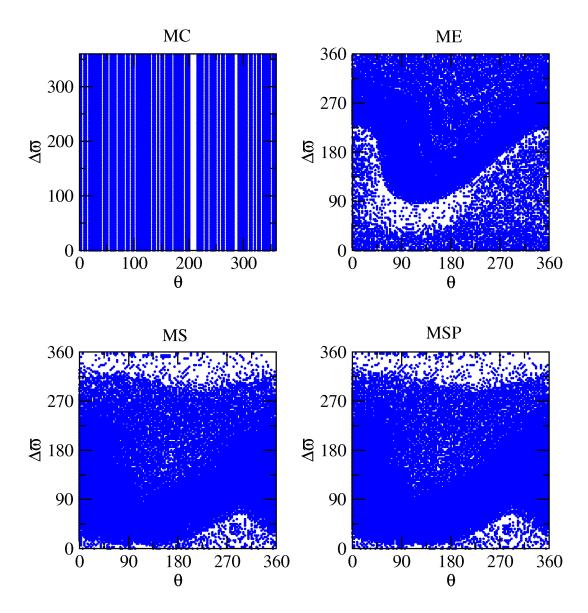


Figura 7.25: Regiones de captura para la condición inicial a=2.45 UA y e=0.2 en función de los ángulos θ y $\Delta \varpi$ (en grados), para diferentes modelos y una tasa de migración $\dot{a}_Y=5\times 10^{-7}$ UA/año.

Una vez fijado el modelo circular y un valor arbitrario para $\Delta \varpi$, lo siguiente que se hizo fué volver a nuestra condición inicial a=2.45 UA y e=0.2, y variamos el ángulo θ junto con el valor de \dot{a}_Y . Nuevamente construímos mapas donde las regiones azules representan condiciones iniciales que logran saltar la resonancia mientras que las regiones blancas son las capturadas. Esto se muestra en las Figuras 7.26 donde el ángulo θ está en las ordenadas mientras que en las abscisas tenemos el logaritmo en base 10 de la tasa de migración.

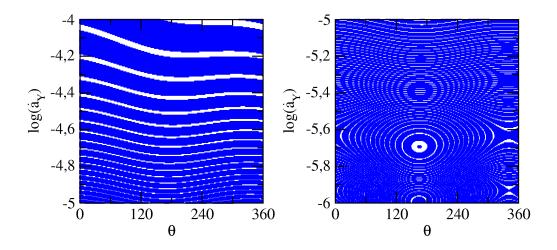


Figura 7.26: Izquierda: $\dot{a}_Y \in [1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}]$ UA/año. Derecha: $\dot{a}_Y \in [1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}]$ UA/año.

Lo que obtenemos en este plano son especies de franjas onduladas. Sus anchos disminuyen con la tasa de migración a la vez que se comprimen. Si tomamos un valor de \dot{a}_Y constante, recuperamos el hecho que observamos en las Figuras 7.23-7.25, las cuales muestran que las ventanas de capturas que disminuyen su ancho a la vez que a aumentan en número para tasas de migración más lentas.

Por otro lado, el gráfico de la derecha parecería sugerir una cierta estructura para migraciones lentas, sin embargo esto es tan sólo una cuestión de resolución. Para mostrar esto realizamos cuatros mapas haciendo un acercamiento en las regiones $\theta \in [150, 200]$ y $\log \dot{a}_Y \in [-5.2, -5.1]$ $\log(\mathrm{UA/a\~no}), [-5.3, -5.2] \log(\mathrm{UA/a\~no}), [-5.4, -5.3] \log(\mathrm{UA/a\~no})$ y $[-5.7, -5.6] \log(\mathrm{UA/a\~no})$ respectivamente. Lo que podemos observar es que de nuevo tenemos las ondas formadoras de ventanas de captura, solo que ahora son mucho más angostas y más comprimidas, lo que produce una estructura ficticia (Figuras 7.27-7.29).

Ahora fijamos el valor de $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-5}$ UA/año y semiejes tales que a = 2.44 UA, 2.445 UA, 2.455 UA y 2.46 UA. Con ésto variamos la excentricidad entre 0.0 y 0.4 y θ entre 0 y 2π . Los resultados se muestran en las Figuras 7.29. Nuevamente, las zonas de color azul representan condiciones que logran saltar la resonancia mientras que las zonas blancas representan condiciones que han sido capturadas. Las Figuras 7.28 muestran el caso contrario. Fijamos 5 valores distintos de excentricidad alrededor de nuestra condición inicial tal que ésta tome los valores e = 0.0, 0.1, 0.3, 0.3 y 0.4, y variamos el semieje entre 2.44 UA y 2.46 UA.

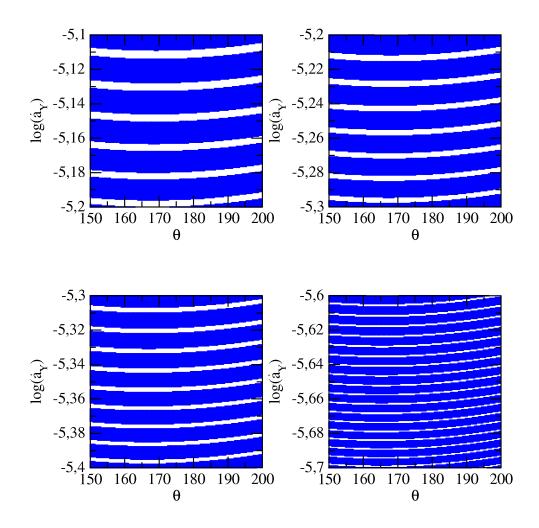


Figura 7.27: *Izquierda*: $\dot{a}_Y \in [1.0 \times 10^{-5}, 1.0 \times 10^{-4}]$ UA/año. *Derecha*: $\dot{a}_Y \in [1.0 \times 10^{-6}, 1.0 \times 10^{-5}]$ UA/año.

Estos gráficos muestran que en el problema circular, dada una tasa de migración fija (y no adiabática), un asteroide cruzará la resonancia o será capturado por ésta, dependiendo de las condiciones iniciales a_0, e_0 y θ_0 . En el espacio de condiciones iniciales tridimensional (a_0, e_0, θ_0) , las regiones donde ocurren las capturas forman volúmenes cerrados bien definidos. Cuando tomamos una recta cualquiera de condiciones iniciales, como la utilizada en las simulaciones la cual se encontraba cercana al borde izquierdo de la separatriz en el plano a-e, obteníamos ventanas de capturas. Estas ventanas no son más que la intersección de la recta con estos volúmenes de captura en el espacio (a_0, e_0, θ_0) . En las Figuras 7.28 y 7.29 observamos la intersección de los volúmenes de captura con los planos $\theta-e$ y $\theta-a$, obteniendo cortes de éstos para distintos valores de excentricidad y semieje respectivamente. Si variamos la tasa de migración para velocidades más lenta, estos volúmenes empezarán a aumentar en número, a correrse a bajas excentricidades y a hacerse más pequeños, hasta que entrando al caso adiabático, se volverán indistinguibles unos con otros.

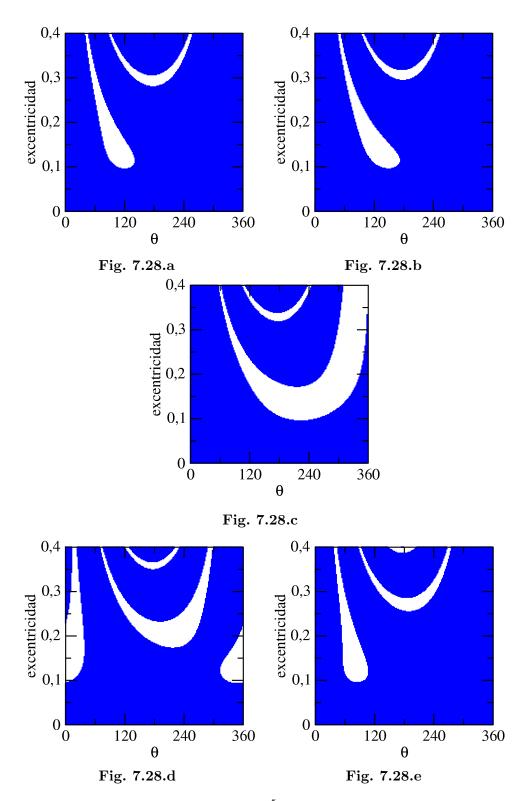


Figura 7.28: Semieje inicial vs. θ . $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-5}$ UA/año. **a**) a = 2.44 UA. **b**) a = 2.445 UA. **c**) a = 2.45 UA. **d**) a = 2.455 UA. **e**) a = 2.46 UA.

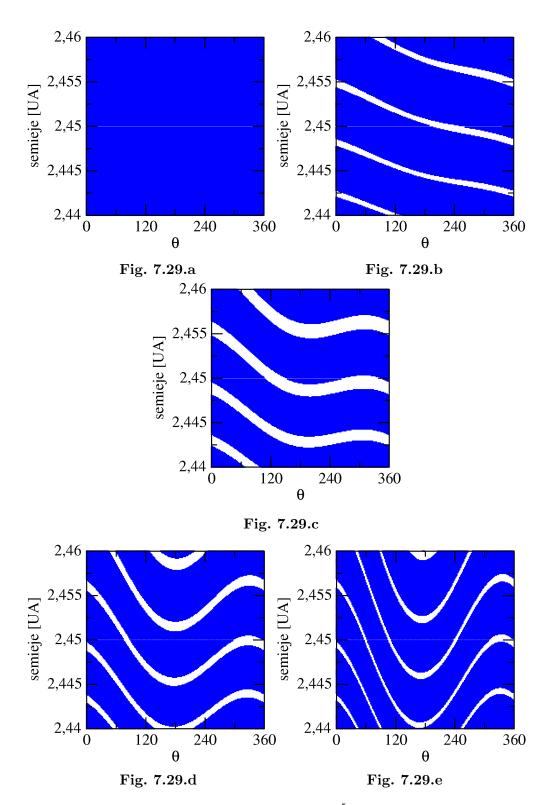


Figura 7.29: Excentricidad inicial vs. θ . $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-5}$ UA/año. **a**) e = 0.0. **b**) e = 0.1. **c**) e = 0.3. **d**) e = 0.4. **e**) e = 0.5.

Capítulo 8

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo estudiamos la probabilidad de captura y dispersión en la resonancia de movimientos medios 3:1 con Júpiter, para un asteroide que migra desde el cinturón interno hacia el intermedio, así como también la estructura del espacio de condiciones iniciales. Esta migración es producto de una fuerza no conservativa debida a un retardo en la reemisión térmica de la luz solar incidente. Este fenómeno se conoce como efecto Yarkovsky y produce una variación secular del semieje.

Primero simulamos numéricamente, con un integrador de N cuerpos, asteroides ficticios en el problema circular con condiciones iniciales tales que se encontraran en el borde izquierdo de la separatriz de la resonancia 3:1. A éstos les se les asignó una migración de forma tal que que su semieje aumentara y permitiera su ingreso a dicha resonancia. Una vez dentro, los asteroides pueden ser capturados o pueden cruzarla. Cuando un asteroide logra cruzar la resonancia podemos observar que este cruce se produce en una escala de tiempo muy corta, por lo que literalmente, "salta" la resonancia. Además, observamos que cuando un asteroide cruza la resonancia, su órbita se "circulariza", ésto significa que su excentricidad antes de entrar a la resonancia es mayor que cuando sale de ésta. En cambio, en los asteroides capturados observamos que su semieje oscila alrededor de la resonancia exacta y su excentricidad aumenta secularmente.

Luego, para tener una idea más global, elegimos una recta de condiciones iniciales en el plano a-e de tal forma que quedaran cercanas a la rama izquierda de la separatriz, ángulo resonante $\sigma = \pi/2$ y fuimos variando el valor de la tasa de migración. Para migraciones muy rápidas, observamos que la mayoría de los asteroides cruzan la resonancia, mientras que los que son capturados se encuentran en un intervalo de excentricidad inicial. Este intervalo, o ventana donde ocurren las capturas, no contiene huecos. A medida que disminuímos la tasa de migración observamos que esta ventana se mueve a excentricidades más bajas a la vez que disminuye su ancho. Además observamos que aparece una nueva ventana, con un ancho más pequeño que la primera, por las excentricidades más altas moviéndose también hacia las más bajas. Si seguimos disminuyendo la tasa de migración, observamos siempre lo mismo. Las ventanas disminuyen sus anchos y se desplazan a excentricidades más bajas, a la vez que aparecen nuevas ventanas, de anchos cada vez más pequeños en las regiones de altas excentricidades. Para cierto valor de migración, esta acumulación de ventanas a bajas excentricidades produce una región de captura, mientras que a altas excentricidades, el ancho de las nuevas ventanas es tan pequeño que estas se vuelven indistinguibles. En este caso, si vemos la probabilidad de captura en función de la excentricidad inicial, obtenemos la misma curva que arroja la teoría para una migración adiabática.

Para poder realizar un estudio estadístico más completo, desarrollamos un mapa algebraico del problema de tres cuerpos restringido promediado, partiendo del mapa simpléctico de Hadjidemetriou al cual modificamos para incorporar dicha migración más efectos seculares sobre la órbita de Júpiter. Este posee la ventaja de ser hasta 1000 veces más rápido que el integrador de N cuerpos que utilizamos antes, lo que nos permite integrar hasta 1000 veces más condiciones iniciales para una misma cantidad de tiempo de cómputo. Esta característica lo hace óptimo para este tipo de estudio. Aunque el mapa puede ser utilizado para el problema tridimensional, solo nos hemos enfocado en el modelo planar con tres variantes para la órbita de Júpiter: i) circular, ii) elíptico y iii) elíptico con perturbaciones seculares de los planetas jovianos (por comodidad, solo diremos secular).

Las simulaciones se llevaron a cabo para distintos valores de migración, con el mismo conjunto de condiciones iniciales que antes, pero variando los ángulos σ y $\Delta \varpi$ (para el caso elípico y secular) entre 0 y 2π . Con estas integraciones obtuvimos los siguientes resultados

- Para las migraciones más rápidas (caso altamente no adiabático), observamos que todos los asteroides logran cruzar la resonancia. Las primeras capturas aparecen en el modelo elíptico y secular, a partir de $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^4 \text{ UA/año}$, mientras que para el modelo circular esto se observa a partir de $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^4 \text{ UA/año}$.
- Para el caso no adiabático obtuvimos resultados similares a los de Gomes (1995 [52]), donde la probabilidad de captura tiene un valor máximo menor que 1. Sin embargo observamos ciertas fluctuaciones en la curva que son menos importantes a medida que nos acercamos al caso adiabático. Estas fluctuaciones provienen de las ventanas de capturas. Este hecho no fué tenido en cuenta en el artículo de Gomes y se pasó por alto debido a que el autor realizó un suavizado de la curva (comunicación personal).
- El límite entre el caso no adiabático y el adiabático es $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-7} \text{ UA/año}$ para el modelo circular, mientras que para el caso elíptico y secular $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-6} \text{ UA/año}$.

Luego calculamos la probabilidad de captura total para cada valor de migración. Esto se hizo integrando estas curvas en todo el intervalo de excentricidades. Observamos que dicha probabilidad tiende al 40 % en el caso circular y alrededor del 30 % para los otros dos casos, para migraciones adiabáticas. Para poder hacer una mejor interpretación de éstos resultados, recalculamos esta probabilidad de captura dividiendo en dos regiones: una región de bajas excentricidades (región I) y una de intermedias-altas (región II). Para el límite superior de la región I, tomamos la excentricidad donde la probabilidad de captura teórica en el caso adiabático comienza a decaer. Para la región I, en el caso circular, la probabilidad total de captura alcanza los 100 % para una migración de $\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-7}$ UA/año y $\dot{a}_Y = 2.5 \times 10^{-6}$ UA/año para el modelo elíptico. Cabe destacar que estos valores son muy simulares a los valores donde del límite adiabático, por lo que esta curva es una buena indicadora de cuando esto ocurre. Por otro lado, en la región II, la probabilidad total de captura tiende al 30 % independientemente del modelo utilizado.

Para aplicar ésto a la familia de Vesta, realizamos la integración en el intervalo de excentricidades de dicha familia. Para el modelo circular la probabilidad tiende al 50 % para asteroides con diámetros mayores a los 5 cm ($\dot{a}_Y = 5.0 \times 10^{-6}$ UA/año). Para el modelo elíptico y secular la probabilidad de captura es del 87 % y 96 % respectivamente para asteroides de 250 m ($\dot{a}_Y = 1.0 \times 10^{-9}$ UA/año). Esto concuerda con los resultados de Roig et al. (2008 [47]) los cuales encuentran que para el Sistema Solar completo (sin Mercurio) la probabilidad de captura es del 97 %. Esto quiere decir que la principal causa de este alto porcentaje es debido a la

excentricidad del perturbador (en este caso Júpiter) y a la variación secular producida por las perturbaciones de los planetas sobre éste. Las perturbaciones de los planetas sobre el asteroide parecerían no ser tan importantes, por lo que realmente es posible estudiar este fenómeno con modelos sencillos como los construídos en este trabajo.

Para estudiar la estructura de cruces y capturas del espacio de condiciones iniciales, empezamos tomando una condición inicial en el plano a-e y variamos los ángulos θ y $\Delta \varpi$ utilizando cuatro modelos distintos: i) modelo circular, ii) modelo elíptico, iii) modelo secular y iv) modelo secular más términos periódicos debidos a la gran desigualdad. Los resultados de las integraciones numéricas fueron:

- En el modelo circular las capturas no dependen de $\Delta \varpi$ como si ocurre para los modelos restantes
- Para migraciones altamente no adiabáticas podemos observar que en el modelo circular se forman ventanas de captura, las cuales para los modelos restantes, se deforman en especies de elipses alrededor de $\theta = \pi$.
- Así como las ventanas aumentan en número, disminuyen de tamaño y se comprimen, lo mismo ocurre con estas elipses en los modelos no circulares.
- El modelo secular perturbado no presenta diferencias apreciables con el modelo secular.

Luego, por simplicidad, nos concentramos en el modelo circular. En este caso, observamos que los asteroides que logran cruzar la resonancia forman volúmenes bien definidos en el espacio de condiciones iniciales (a_0, e_0, θ_0) . Cuando analizamos alguna recta de condiciones iniciales en este espacio, recuperamos la estructura de ventanas de captura, las cuales corresponden a las intersecciones de dicha recta con los volúmenes de captura. A medida que disminuimos la tasa de migración, estos volúmenes empezarán a aumentar en número, a desplazarse a bajas excentricidades y a hacerse más pequeños, hasta que, entrando al caso adiabático, se volverán indistinguibles unos con otros.

Vale la pena destacar que esta es la primera vez que se obtiene una descripción de la estructura de cruces y captura en una resonancia asteroidal. Algunas de las perspectivas futuras de este trabajo son estudiar más en profundidad la estructura del espacio de condiciones iniciales del problema circular y su transición entre el caso no adiabático y adiabático y extenderlo al modelo elíptico y al modelo con inclinación.

Apéndice A

Expansiones elípticas para el problema de dos cuerpos

A.1. Series de Fourier

Sea f(x) una función periódica de período 2π , acotada y continua por tramos, entonces f(x) admite el siguiente desarrollos en series

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$
 (A.1)

donde los coeficientes a_k y b_k están dados por

$$a_{0} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) dx$$

$$a_{k} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx$$

$$b_{k} = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx.$$
(A.2)

Algunas propiedades útiles de éstas series son

- Si f es una función impar; $a_k = 0$ y $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx \ dx$.
- Si f es una función par; $b_k = 0$ y $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \ dx$.

Teniendo en cuenta que

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i},$$

donde $i^2 = -1$, la serie (A.1) también puede escribirse como

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$
(A.3)

donde los coeficientes c_k son

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx} dx.$$
 (A.4)

A.2. Funciones de Bessel de primera especie

Definimos la funciones de Bessel de primera especie como

$$J_k(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix\sin u} e^{-iku} du = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ku - x\sin u) \ du. \tag{A.5}$$

Si hacemos analogía con la serie de Fourier (A.3), entonces J_k es el coeficiente c_k de la función $f(u) = e^{ix \sin u}$, por lo que

$$e^{ix\sin u} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)e^{iku}.$$
 (A.6)

Si hacemos el cambio de variable $z=e^{iu}$ entonces tenemos que $i\sin u=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$. Usando las expansiones de Taylor de la función exponencial tenemos

$$e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})} = e^{\frac{xz}{2}}e^{-\frac{x}{2z}} = \left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left(\frac{xz}{2}\right)^{m}\right] \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2z}\right)^{n}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{0! \ 0!} - \frac{1}{1! \ 1!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2} + \frac{1}{2! \ 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} - \cdots\right] z^{0} + \left[\frac{1}{0! \ 1!} \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1! \ 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{3} + \frac{1}{2! \ 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{5} - \cdots\right] z^{1} + \left[\frac{1}{0! \ 1!} \left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{1! \ 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{3} + \frac{1}{2! \ 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{5} - \cdots\right] z^{-1} + \left[\frac{1}{0! \ 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2} - \frac{1}{1! \ 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \frac{1}{2! \ 4!} \left(\frac{x}{2}\right)^{6} - \cdots\right] z^{2} + \left[\frac{1}{0! \ 2!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2} - \frac{1}{1! \ 3!} \left(\frac{x}{2}\right)^{4} + \frac{1}{2! \ 4!} \left(\frac{x}{2}\right)^{6} - \cdots\right] z^{-2} + \cdots$$

$$= J_{0}z^{0} + J_{1}z^{1} + J_{-1}z^{-1} + J_{2}z^{2} + J_{-2}z^{-2} + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{k}(x)z^{k}$$

$$(A.7)$$

Identificando cada coeficiente de z^k de ámbos miembros vemos que si $k \geq 0$

$$J_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$
 (A.8)

Para los enteros negativos es fácil verificar la igualdad

$$J_{-k} = (-1)^k J_k, (A.9)$$

por lo que tenemos

$$J_{-k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+k}}{n!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k}.$$
 (A.10)

Algunas propiedades importantes de las funciones de Bessel son

- El término de orden más bajo de J_k es $\frac{x^k}{2^k k!}$ y aumentan de dos en dos.
- Si x << 1 entonces $J_k \approx \frac{x^k}{2^k k!}$
- $J_k(-x) = (-1)^k J_k(x) = J_{-k}(x).$

- Derivando (A.6) respecto de z encontramos que $kJ_k(x) = \frac{x}{2}(J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x))$.
- Derivando (A.6) respecto de x encontramos que $\frac{dJ_k}{dx} = \frac{1}{2}(J_{k-1}(x) J_{k+1}(x))$.
- Las funciones de Bessel también pueden verse como soluciones de la ecuación diferencial

$$x^{2}\frac{d^{2}y}{dx^{2}} + x\frac{dy}{dx} + (x^{2} - k^{2})y = 0,$$

donde k puede ser un número real o complejo. Esta es una ecuación diferencial de segundo orden y como tal posee dos soluciones linealmentes independiente (LI). Si k no es entero entonces J_k y J_{-k} son LI, pero si k es un entero, por la propiedad (A.9), no lo son. En ese caso la segunda solución LI es la función de Bessel de segunda especie Y_k definida como

$$Y_k(x) = \begin{cases} \frac{J_k(x)\cos k\pi - J_{-k}}{\sin k\pi}, & k \notin \mathbb{Z} \\ \lim_{\alpha \to k} \frac{J_{\alpha}(x)\cos \alpha\pi - J_{-\alpha}}{\sin \alpha\pi}, & k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
(A.11)

A.3. Inversión de la ecuación de Kepler

Sean x e y la posición en coordenadas cartesianas del cuerpo m_1 respecto de m_0 , r y f las coordenadas polares, donde f es la anomalía verdadera, el semieje mayor a, la excentricidad e, la longitud de pericentro ϖ y la anomalía excéntrica E. La relaciones entre éstas están dadas por las ecuaciones

$$x = r\cos f = a(\cos E - e)$$

$$y = r\sin f = a\sqrt{1 - e^2}\sin E$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos f} = a(1 - e\cos E)$$

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}}\tan\left(\frac{E}{2}\right).$$
(A.12)

Además tenemos la ecuación de Kepler

$$M = E - e \sin E, \tag{A.13}$$

donde $M=n(t-\tau)$ es la anomalía media, n el movimiento medio y τ es el tiempo de pasaje por el pericentro.

Derivando la ecuación de Kepler tenemos que

$$\frac{dM}{dE} = 1 - e\cos E = \frac{r}{a}.\tag{A.14}$$

Desarrollando en series de Fourier a a/r obtenemos

$$\frac{a}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} dM + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a}{r} \cos kM' \ dM' \right) \cos kM \tag{A.15}$$

ya que la función es par.

Teniendo en cuenta que (a/r)dM = dE, junto con la ecuación de Kepler y la definición de la función de Bessel (A.5) tenemos

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2J_k(ke) \cos kM.$$
 (A.16)

Integrando dE = (a/r)dM

$$E = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM, \tag{A.17}$$

y usando que $\sin E = (E - M)/e$

$$\sin E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{ke} J_k(ke) \sin kM. \tag{A.18}$$

A.4. Otras expansiones

Queremos encontrar las expansiones de $\cos nE, \sin nE, r/a, \cos f, \sin f$ y f. Para eso, primero desarrollamos en series de Fourier la función e^{iE} tal que

$$e^{inE} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(n)} e^{ikM}, \tag{A.19}$$

donde los coeficientes $c_k^{(n)}$ son

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(nE - kM')} dM'.$$
 (A.20)

Teniendo en cuenta que $dM = (1 - e \cos E)dE = (1 - e e^{iE}/2 - e e^{-iE}/2)dE$ obtenemos que

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i((n-k)E + ke\sin E)} \left(1 - \frac{e}{2} e^{iE} - \frac{e}{2} e^{-iE} \right) dE$$

$$= J_{k-n}(ke) - \frac{e}{2} (J_{k-n-1}(ke) + J_{k-n+1}(ke)). \tag{A.21}$$

Es fácil de ver que si k=0, entonces

$$c_0^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 0\\ -\frac{e}{2}, & n = 1\\ 0, & n \neq 0, 1 \end{cases}$$
 (A.22)

Si $k \neq 0$, usando la identidad $kJ_k(x) = x/2 \ (J_{k-1}(x) + J_{k+1}(x))$ tenemos

$$c_k^{(n)} = \frac{n}{k} J_{k-1}(ke), \tag{A.23}$$

por lo que quedándonos con la parte real de la función original

$$\cos nE = c_0^{(n)} + \sum_{\substack{k = -\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{n}{k} J_{k-n}(ke) \cos kM.$$
 (A.24)

Para los términos donde k < 0 hacemos el cambio de variable $k \to -k$ y usando las propiedades $J_{-k}(x) = (-1)^k J_k(x)$ y $J_k(-x) = (-1)^k J_k(x)$ finalmente obtenemos

$$\cos nE = c_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k} \left(J_{k-n}(ke) - J_{k+n}(ke) \right) \cos kM. \tag{A.25}$$

Para el caso particular n=1 y usando que $\frac{dJ_k}{dx}=\frac{1}{2}(J_{k-1}-J_{k+1})$, tenemos

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2} \frac{d}{de} J_k(ke) \cos kM$$
(A.26)

Ahora tomando la parte imaginaria

$$\sin nE = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n}{k} (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \sin kM.$$
 (A.27)

Luego de la Ecuación (A.14) tenemos que

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2e}{k^2} \frac{d}{de} J_k(ke) \cos kM.$$
 (A.28)

Usando que $1 + e \cos f = a/r (1 - e^2)$ y usando la expansión (A.16) vemos que

$$\cos f = -e + \frac{1 - e^2}{e} \sum_{k=1}^{\infty} J_k(ke) \cos kM.$$
 (A.29)

Para encontrar $\sin f$ partimos de la segunda Ecuación de (A.12) tal que

$$\sin E = \frac{r}{a} \frac{\sin f}{\sqrt{1 - e^2}}.\tag{A.30}$$

Por otro lado, tomando la derivada de la ecuación de Kepler tenemos que $\frac{dE}{dM} = \frac{a}{r}$, por lo que

$$\frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right) = \frac{d}{dM}(1 - e\cos E) = \frac{dE}{dM}\frac{d}{dE}(1 - e\cos E)$$

$$= \frac{a}{r}\frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\frac{r}{a}\sin f = \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}}\sin f. \tag{A.31}$$

Derivando respecto de M la Ecuación (A.28) y despejando, finalmente obtenemos

$$\sin f = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{1-e^2}}{k} \frac{d}{de} J_k(ke) \sin kM.$$
 (A.32)

Por último, vamos a resolver la ecuación del centro f-M y vamos a expresar a f en función de E y luego de M. Para eso, partimos de la útima Ecuación (A.12) y usando que

$$\tan\frac{\theta}{2} = (-i)\frac{e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta} + 1},$$

tenemos que

$$\frac{e^{if} - 1}{e^{if} + 1} = p \frac{e^{iE} - 1}{e^{iE} + 1},\tag{A.33}$$

donde $p=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}$. Reescribiendo un poco la ecuación y defiendo $q=\frac{p-1}{p+1}=(1-\sqrt{1-e^2})/e$ obtenemos

$$e^{if} = \frac{(1-p) + (1+p)e^{iE}}{(1+p) + (1-p)e^{iE}} = e^{iE} \frac{1 - qe^{-iE}}{1 - qe^{iE}}.$$
(A.34)

Tomando el logaritmo a ámbos miembros

$$if = iE + \ln(1 - qe^{-iE}) - \ln(1 - qe^{iE}).$$
 (A.35)

Si |x|<1 entonces el desarrollo $\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ es absolutamente convergente, por lo que obtenemos

$$if = iE + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} (e^{inE} - e^{-inE}).$$
 (A.36)

Tomando la parte imaginaria llegamos a que

$$f = E + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{n} \sin nE. \tag{A.37}$$

Por último, tomando los desarrollos de E y de $\sin nE$ en función de M

$$f = M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} J_k(ke) \sin kM + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^n}{k} (J_{k-n}(ke) + J_{k+n}(ke)) \sin kM.$$
 (A.38)

Bibliografía

- [1] Adams J.C., 1847. An explanation of the observed irregularities in the motion of Uranus, on the hypothesis of disturbances caused by a more distant planet; with a determination of the mass, orbit, and position of the disturbing body. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 7, 149-152.
- [2] Le Verrier U.J., 1847. Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d'Uranus. Détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle. *Comptes Rendus* 23, 428-438, 657-659.
- [3] Murray C. y Dermott S., 1999a. Solar system dynamics. Cambridge University Press 1, 5-9.
- [4] Bowell E., 2010. The Asteroid Orbital Elements Database. Disponible on-line en el sitio ftp.lowell.edu/pub/elgb/astorb.html
- [5] Kirkwood D., 1867. Meteoric astronomy: a treatise on shooting-stars, fireballs, and aerolites. *Philadelphia*, J. B. Lippincott & co.
- [6] Hagihara Y., 1961. Gaps in the distribution of the asteroids. *Smithsonian Contrib. Astrophys.* 5, 59-67.
- [7] Peale S.J., 1976. Orbital resonances in the solar system. Annu. Rev. Astron. Astrophys. 14, 215-246.
- [8] Greenberg R., 1977. Orbit-orbit resonances in the solar system: Varieties and similarities. *Vistas Astron.* **21**, 209-239.
- [9] Chapman C.R., Williams J.G. y Hartmann W.K., 1978. The asteroids. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* **16**, 33-75.
- [10] Greenberg R. y Scholl H., 1979. Resonance in the asteroid belt. Asteroids (Gehrels T., Ed.), 310-333.
- [11] Scholl H., 1979. Recent work on the origin of the Kirkwood gaps. *Dynamics of the Solar System*, (Duncombe R., Ed.), 217-222.
- [12] Scholl H., 1987. Dynamics of asteroids. The Evolution of the Small Bodies of the Solar System (Fulchignoni M. y Kresák L., Eds.), 53-78.
- [13] Schubart J., 1979. Astroidal motion at commensurabilities treated in three dimensions. Dynamics of the Solar System (Duncombe R., Ed.), 207-215.
- [14] Froeschle C. y Scholl H.,1983. The dynamical structure of the asteroid belt. *Asteroids*, *Comets, Meteors* (Lagerkvist C. y Rickman H., Eds.), 115-125.

[15] Heppenheimer T., 1978. On the origin of the Kirkwood gaps and of satellite-satellite resonances. *Astron. Astrophys.* **70**, 457-465.

- [16] Torbett M. and Smoluchowsky R., 1982. Motion of the Jovian commensurability resonances and the character of the celestial mechanics in the asteroid zone:Implications for kinematics and structure. Astron. Astrophys. 110, 43.49.
- [17] Torbett M. and Smoluchowsky R., 1983. Continuing investigation of sweeping Jovian resonances. The 7:3 and 3:2 resonances with further discussion of the 2:1 resonance. Astron. Astrophys. 127, 345-348.
- [18] Henrard J. y Lemaître A., 1983. A mechanism of formation for the Kirkwood gaps. *Icarus* **55**, 482-494.
- [19] Lemaître A., 1984. Formation of the Kirkwood gaps in the asteroid belt. *Celest. Mech.* **34**, 329-341.
- [20] Yoshykawa M., 1990. Motions of asteroids at the Kirkwood gaps: On the 3:1 resonance with Jupiter. *Icarus* 87, 78-102.
- [21] Wisdom J., 1982. The origin of the Kirkwood gaps: A mapping for asteroidal motion near 3/1 commensuability. *Astron. J.* **87**, 577-593.
- [22] Wisdom J., 1983. Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gaps. *Icarus* **56**, 51-74.
- [23] Wisdom J., 1985. A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. *Icarus* **63**, 272-289.
- [24] Murray C.D. y Fox K., 1985. Structure of the 3:1 Jovian resonance: A comparison of numerical methods. *Icarus* **59**, 482.
- [25] Henrard J. y Caranicolas N.D., 1989. Motion near the 3/1 resonance of the planar elliptic restricted three body problem. *Celest. Mech.* 47, 99-121.
- [26] Hadjidemetriou J.D., 1991. Mapping models for Hamiltonian systems with application to resonant asteroid motion. *Predictability, stability and chaos* (Roy A.E., Ed.), 157-175.
- [27] Hadjidemetriou J.D., 1992. The elliptic restricted problem at the 3:1 resonance. *Celest. Mech.* **53**, 151-183.
- [28] Hadjidemetriou J.D., 1993. Asteroid motion near 3:1 resonance. Celest. Mech. 56, 563-599.
- [29] Guillens S., Martins R. y Gomes R., 2002. A global study of the 3:1 resonance neighborhood: a search for unstable asteroid. *Astron. J.* **124**, 2322-2331.
- [30] Hirayama K., 1918. Groups of asteroids probably of common origin. Astron. J. 31, 185-188.
- [31] Hirayama K., 1928. Families of asteroids. Jap. J. Astron. Geophys. 5, 137-162.
- [32] Hirayama K., 1933. Present states of the families of asteroids. *Proc. Imp. Acad. Japan* 9, 482-485.
- [33] Cellino A., Zappalà V., Doressoundiram A., di Martino M., Bendjoya, P., Dotto E. y Migliorini F., 2001. The puzzling case of the Niza-Polana family. *Icarus* **152**, 225-237.

[34] Zappalà V., Cellino A., Dell'Oro A. y Paolicchi P., 2003. Physical and dynamical properties of asteroid families. *Asteroid III* (Bottke Jr. W.F., Cellino A., Paolicchi P. y Binzel R.P., Eds), 619-631.

- [35] Mothé-Diniz T., Roig F. y Carvano J.M., 2005. Reanalysis of asteroid families structure through visible spectroscopy. *Icarus* 174, 54-82.
- [36] Bus S.J., Vilas F., Barucci M.A., 2002. Visible-wavelenght spectroscopy of asteroids. *Asteroid III* (Bottke Jr. W.F., Cellino A., Paolicchi P. y Binzel R.P., Eds), 169-182.
- [37] Chapman C., Morrison D. y Zellner B., 1975. Surface properties of asteroids: A synthesis of polarimetry, radiometry and spectrophotometry. *Icarus* **25**, 104-130.
- [38] Tholen D., 1984. Asteroid taxonomy from cluster analysis oh photometry. *Tesis doctoral*, University of Arizona, Tucson.
- [39] Bus S.J., 1999. Compositional structure in the asteroid belt: Results of a spectroscopy survey. *Tesis doctoral*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge.
- [40] McCord T., Adams J. y Johnson T., 1970. Asteroid Vesta: Spectral reflectivity and compositional implications. Science 168, 1445-1447.
- [41] Carruba V., Michtchenko T.A., Roig F., Ferraz-Mello S. y Nesvorný D., 2005. On the V-type asteroids outside the Vesta family. I. Interplay of nonlinear secular resonances and the Yarkovsky effect: the cases of 956 Elisa and 809 Lundia. *Astron. Astrophys.* 441, 819-829.
- [42] Nesvorný D., Ferraz-Mello S., Holman M. y Morbidelli A., 2003. Regular and chaotic dynamics in the mean-motion resonances: Implications for the structure and evolution of the asteroid belt. Asteroid III (Bottke Jr. W.F., Cellino A., Paolicchi P. y Binzel R.P., Eds), 379-394.
- [43] Bottke Jr. W.F., Vokrouhlick D., Rubincam D.P. y Broz M., 2003. The effect of Yarkovsky thermal forces on the dynamical evolution of asteroids and meteoroids. *Asteroid III* (Bottke Jr. W.F., Cellino A., Paolicchi P. y Binzel R.P., Eds), 395-408.
- [44] Lazzaro D., Michtchenko T., Carvano J.M., Binzel R.P., Bus S.J., Burbine T.H., Mothé-Diniz T., Florczak M., Angeli C.A. y Harris A.W., 2000. Discovery of a basaltic asteroid in the outer main belt. *Science* 288, 2033-2035.
- [45] Binzel R.P., Masi G. y Foglia S., 2006. Prediction and Confirmation of V-type Asteroids Beyond 2.5 AU Based on SDSS Colors. *Bulletin of the American Astronomical Society* **38**, 627.
- [46] Hammergren M., Gyuk G. y Puckett A., 2006. (21238) 1995 WV7: A new basaltic asteroid outside the 3:1 mean motion resonance. *Icarus* sumitido (eprint arXiv:astro-ph/0609420).
- [47] Roig F., Nesvorný D., Gil-Hutton R. y Lazzaro D., 2008. V-type asteroids in the middle main belt. *Icarus* **194**, 125-136.
- [48] Yoder C., 1979. Diagrammatic theory of transition of pendulum like systems. *Celest. Mech.* 19, 3-29.
- [49] Henrard J., 1982, Capture into resonance: an extension of the use of adiabatic invariants. Celest. Mech. 27, 3-22.

[50] Borderies N. y Goldreich P., 1984. A simple derivation of capture probabilities for the J+1:J and J+2:J orbit-orbit resonance problems. *Celest. Mech.* **32**, 127-136.

- [51] Malhotra R., 1990. Capture probabilities for secondary resonances. *Icarus* 87, 249-264.
- [52] Gomes R., 1995. Resonance trapping and evolution of particles subject to Poynting-Robertson drag: Adiabatic and non adiabatic approaches. *Celest. Mech.* **61**, 97-113.
- [53] Roig F., 2004. Dinámica, minerealogía y evolución colisional en el Cinturón de Asteroides. Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía 47, 38-50.
- [54] Murray C. y Dermott S., 1999. Solar system dynamics. Cambridge University Press 6, 225-246.
- [55] Kaula W.M, 1961. Analysis of gravitional and geometric aspects of geodetic utilization of satellites. *Geophys. J.* 5, 104-133.
- [56] Kaula W.M, 1962. Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellites. *Astron. J.* **67**, 300-303.
- [57] Murray C. y Dermott S., 1999c. Solar system dynamics. Cambridge University Press 6, 232-233.
- [58] Murray C., 2007. Last Updated Known Errors in Solar System Dynamics. Disponible on-line en el sitio ssdbook.maths.qmul.ac.uk/errors.pdf
- [59] Brouwer D. y Clemence G.M., 1961. Celestial mechanics. Academics Press 15, 495-505.
- [60] Ferraz-Mello S., 1994. The convergence domain of the Laplacian expansion of the disturbing function. Cel. Mech. Dyn. Astr. 58, 37-52.
- [61] Murray C.D., 1986. Structure of the 2:1 and 3:2 Jovian resonances. *Icarus* 65, 70-82.
- [62] Ellis K.M. y Murray C.D., 1999. The disturbing function in solar system dynamics. *Icarus* 147, 129-144.
- [63] Woltjer J., 1928. The motion of Hyperion. Annalen van de Sterrewacht te Leiden 16(3).
- [64] Ferraz-Mello S., 1987. Averaging the elliptic asteroidal problem near a first-order resonance. Astron. J. 94, 208-212.
- [65] Ferraz-Mello S. y Sato M., 1989. The very-high-eccentricity asymmetric expansion of the disturbing function near resonances of any order. Astronomy and Astrophysics 225, 541-547.
- [66] Ferraz-Mello S. y Klafke J., 1991. A model for the study of very-high-eccentricity asteroidal motion: the 3:1 resonance. Predictability, Stability, and Chaos in N-Body Dynamical Systems (Roy A.E., ed), 177-184.
- [67] Roig F., Simula A., Ferraz-Mello S. y Tsuchida, M., 1998. The high-eccentricity asymmetric expansion of the disturbing function for non-planar resonant problems. *Astronomy and Astrophysics* **329**, 339-349.
- [68] Beaugé C., 1996. On a Global Expansion of the Disturbing Function in the Planar Elliptic Restricted Three-Body Problem. Cel. Mech. Dyn. Astr. 64, 313-350.
- [69] Goldstein H., Poole C. y Safko J., 2002. Classical mechanics. Addison Wesley, 9, 368-421.

[70] Lichtenberg A.J. y Lieberman M.A., 1992. Regular and chaotic dynamics. *Applied mathematical sciences* (John F., Marsden J.E. y Sirovich L., Eds) **38**, 93-109.

- [71] Hori G., 1966. Theory of General Perturbations with Unspecified Canonical Variables. *Public. Astron. Soc. Japan* 18, 287-296.
- [72] Verhulst F., 1990. Nonlinear differential equations and dynamical systems. Springer-Verlag.
- [73] Henrard J., 1990, A semi-numerical perturbation method for separable Hamiltonian systems. Cel. Mech. Dyn. Astr. 49, 43-67.
- [74] Cincotta P.M. y Simó C., 2000. Simple tools to study global dynamics in non-axisymmetric galactic potentials I. Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 147, 205-228.
- [75] Öpik E.J., 1951. Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. *Proc. R. Irish Acad.* **54**, 165-199.
- [76] Radzievskii V., 1952. A mechanism for the desintegration of asteroids and meteorites. Astron. Zh. 29, 162-170.
- [77] Rubincam D.P., 1995. Asteroid orbit evolution due to thermal drag. J. Geophys. Res. 100, 1585-1594.
- [78] Rubincam D.P., 1998. Yarkovsky thermal drag on small asteroids and Mars-Earth delivery. J. Geophys. Res. 103, 1725-1732.
- [79] Vokrouhlický, D., 1998(a). Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory. Astron. Astrophys. 335, 1093-1100.
- [80] Vokrouhlický, D., 1998(b). Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. II. Non-sphericity effects. *Astron. Astrophys.* **338**, 353-363.
- [81] Vokrouhlický, D., 1999. A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. *Astron. Astrophys* **344**, 362-366.
- [82] Vokrouhlický, D. y Farinella P., 1998. The Yarkovsky Seasonal Effect on Asteroidal Fragments: A Nonlinearized Theory for the Plane-Parallel Case. *Astron. J.* **116**, 2032-2041.
- [83] Vokrouhlický, D. y Farinella P., 1999. The Yarkovsky Seasonal Effect on Asteroidal Fragments: A Nonlinearized Theory for Spherical Bodies. Astron. J. 118, 3049-3060.
- [84] Bottke Jr. W.F., Rubincam D.P. y Burns J.A., 2000. Dynamical evolution of main belt meteoroids: Numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. *Icarus* 145, 301-331.
- [85] Spitale J. y Greenberg R., 2001. Numerical Evaluation of the Yarkovsky Effect on Orbital Elements of Asteroids. 32nd Annual Lunar and Planetary Science Conference 1346.
- [86] Spitale J. y Greenberg R., 2002. Numerical Evaluation of the General Yarkovsky Effect: Effects on Eccentricity and Longitude of Periapse. *Icarus* **156**, 211-222.
- [87] Farinella P., Vokrouhlický D. y Hartmann W.K., 1998. Meteorite Delivery via Yarkovsky Orbital Drift. Icarus 132, 378-387.
- [88] Chirikov B.V., 1979. A universal instability of many-dimensional oscillator systems. *Physics Reports* **52**, 263-379.

[89] Hadjidemetriou J.D., 1986. A hyperbolic twist mapping model for the study of asteroid orbits near the 3:1 resonance. J. Appl. Math. Phys 37, 776-796.

- [90] Roig F., 1997. Mapeamentos simplécticos em dinâmica asteroidal. *Disertación de maestrado*, Instituto Astronômico e Geofísico, San Pablo.
- [91] imon J.L. y Bretagnon P., 1975. Results of first order perturbations of the four large planets Literal variations. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **22**, 107-160.
- [92] Arnold V.I, 1989. Mathematical methods of classical mechanics. *Graduate text in mathematics* (Ewing J.H., Gehring F.W. y Halmos P.R., Eds) **60**, 297-300.
- [93] Nesvorný D., Roig F., Lazzaro D., Gladman B. y Carruba V., 2008. Fugitives from the Vesta family. *Icarus* **193**, 85-95.