

TESIS FINAL DE GRADO

Desarrollo de un nuevo elemento de transición y de un método de convección para el refinamiento local de mallas del método de red de vórtices inestacionario y no-lineal

Matías Jesús Stefanutti

Córdoba, 2015

Director :

Sergio Preidikman

Co-director :

Bruno A. Rocca



UNC



FCEFYN

TESIS FINAL DE GRADO

Desarrollo de un nuevo elemento
de transición y de un método de
convección para el refinamiento
local de mallas del método de
red de vórtices inestacionario
y no lineal

Matías Jesús Stefanutti

Córdoba, 14 de Octubre de 2015

Director:

Sergio Preidikman

Co-director:

Bruno A. Rocchia



Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar, y con todo mi corazón, a mi familia que han sido el soporte incondicional en estos años de estudio. A mis padres, Ana y Juan Carlos, que me dieron todo su apoyo y confianza, y muy especialmente a mi hermano Fabricio por ser mi ejemplo de persona a seguir, que siempre estuvo cuando lo necesitaba, y quien siempre me alentó a seguir adelante.

También me gustaría agradecer sinceramente a mi director de tesis, Dr Sergio Preidikman, quien a través de sus conocimientos, orientaciones y consejos ha sido capaz de ganarse mi lealtad y admiración. Con una enorme paciencia siempre estuvo predispuesto a ayudarme y ha inculcado en mí un gran sentido de seriedad y responsabilidad.

También quiero decir gracias a todos los profesores que me han sabido formar y motivar durante todos estos años en la facultad, en especial a mi co-director de tesis, Dr. Bruno Rocca.

Y un lugar especial para mis amigos y compañeros que siempre estuvieron ahí y con los que he compartido infinidad de buenos, y también algunos malos, momentos. A todos ellos muchísimas gracias de corazón.

Resumen

Este trabajo trata sobre el desarrollo de una variante del método de red de vórtices inestacionario y no-lineal (UVLM), que admita la utilización de redes refinadas localmente de manera que permitan simular con mayor detalle ciertos fenómenos aerodinámicos sin la necesidad de aumentar excesivamente el tiempo de cómputo requerido.

Este método parte de la hipótesis de flujo potencial y simula la presencia de un cuerpo dentro de un flujo de velocidad uniforme mediante la introducción de segmentos vorticosos que forma una red y que introducen perturbaciones en el campo de velocidad, de manera de simular la presencia del sólido. La imposición de la condición de no penetración sobre la superficie del cuerpo permite obtener los valores de intensidad de estos segmentos. Conocidos estos, es posible obtener el campo de velocidades y con él, el campo de presiones.

Además de esta red que representa el cuerpo, denominada red adherida, otra red denominada libre modela las estelas. Ellas son obtenidas a partir de un proceso de convección en el cual se determina la posición y se asigna la intensidad de vorticidad de estos segmentos libres en cada paso de tiempo.

Todos estos segmentos están unidos y constituyen las redes, definiendo una serie de elementos. Estos elementos, por el mismo proceso del cálculo, permiten obtener mejores resultados cuando toman formas próximas a cuadrados uniformes en toda una red muy estructurada.

En diversas aplicaciones se ha encontrado un gran interés en el estudio de fenómenos aerodinámicos que se presentan en diferentes escalas dentro del mismo modelo. Cuando se utiliza el Método de Red de Vórtices clásico para el estudio de estos fenómenos, la necesidad de utilizar una malla estructurada hace necesario generar redes con grandes cantidades de segmentos vorticosos pequeños en toda su extensión. Esto implica grandes tamaños de los sistemas a resolver para obtener resultados con resolución suficiente que permita detectar los fenómenos que se desarrollan en las escalas más pequeñas.

En este trabajo se propone realizar un proceso de refinado local en estas redes estructuradas mediante la incorporación de elementos de transición. Estos elementos permitirán reducir el tamaño de los segmentos vorticosos sobre un sector de interés de las redes de forma de obtener una mayor resolución, pero manteniendo segmentos más grandes en otros sectores, de manera de minimizar el esfuerzo computacional requerido.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	III
Índice general	VI
1 Introducción y revisión bibliográfica	1
1.1 El modelo aerodinámico	2
1.2 Fundamentos teóricos	4
1.2.1 Flujo Potencial	5
1.2.2 Teoremas de Kelvin-Helmholtz y de la conservación espacial de la vorticidad	5
1.2.3 Cinemática del flujo	7
1.2.4 Láminas vorticosas	7
1.2.5 Líneas vorticosas	7
1.2.6 Estelas vorticosas y capa límite	8
1.2.7 Condición de Kutta	9
2 El Método clásico	11
2.1 El problema matemático	11
2.2 Discretización de las láminas vorticosas	13
2.3 Implementación computacional	14
2.4 Cálculo de cargas aerodinámicas	18
2.4.1 Variables características	18
2.4.2 Cálculo del coeficiente de presión	18
2.4.3 Obtención de las cargas	22
3 Implementación del refinado local	25
3.1 Cálculo de la Intensidad de los segmentos vorticosos	26
3.2 Convección	27
3.2.1 Método 1	27
3.2.2 Método 2	30
3.2.3 Método 3	32

3.3	Cálculo de coeficiente de presión	35
4	Resultados	37
4.1	Intensidades de los segmentos vorticosos	37
4.1.1	Refinado global	37
4.1.2	Refinado local	42
4.2	Convección	48
4.2.1	Método 1	48
4.2.2	Método 2	51
4.2.3	Método 3	51
4.3	Coeficiente de sustentación	53
4.4	Tiempos de procesamiento	54
5	Conclusiones y trabajos futuros	55
A	Mallas	57
B	Gráficos refinado global	63
B.1	Intensidad de segmentos vorticosos horizontales	63
B.2	Intensidad de segmentos vorticosos verticales	68
C	Gráficos refinado local	73
C.1	Intensidad de segmentos vorticosos horizontales	73
C.2	Intensidad de segmentos vorticosos verticales	78
C.3	Densidad de vorticidad de segmentos vorticosos horizontales	82
C.4	Densidad de vorticidad de segmentos vorticosos verticales	86
	Bibliografía	91

1

Introducción y revisión bibliográfica

A lo largo de los años, la necesidad de predecir las características aerodinámicas a la hora del diseño de las aeronaves ha dado una infinidad de métodos de cálculo. Estos métodos se volvieron más complejos y fiables a medida que se comprendía mejor los fenómenos físicos que se presentan. Con la aparición de los ordenadores, un gran número de nuevos métodos numéricos fueron desarrollados. En particular, entre todos los avances en este campo, el método de red de vórtices (VLM), pese a las limitaciones impuestas por las hipótesis consideradas en su formulación, se ha ganado un lugar muy popular en diversas aplicaciones. Su simplicidad y sus acotados requerimientos de capacidad de cálculo de los ordenadores lo convierten en una opción a tener en cuenta para cálculos en etapas tempranas de diseño, y para aplicaciones donde los cálculos aerodinámicos deban introducirse en esquemas iterativos, donde el modelo aerodinámico deba resolverse en forma repetida, como por ejemplo, el caso de los cálculos aero-elásticos.

En el desarrollo del VLM se plantea la hipótesis de cálculo un flujo potencial, es decir que se considera un flujo no viscoso. A nivel práctico se puede traducir en flujos con elevado números de Reynolds, de forma que podamos asegurar que los efectos viscosos son relativamente pequeños y confinados en las capas límites y estelas, sectores del dominio que pueden suponerse suficientemente delgados. A pesar de la restricciones impuesta por esta hipótesis, ha sido exitosamente utilizado para la simulación del vuelo de aves e incluso de insectos, donde los números de Reynolds son relativamente bajos.

Justamente en este tipo de trabajos la aplicación del VLM, y sus diferentes versiones para poder modelizar fenómenos inestacionarios, son particularmente interesantes debido a que el

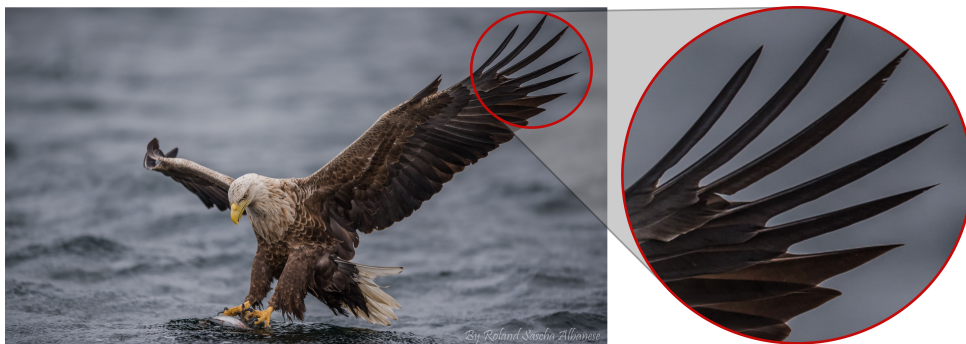


Figura 1.1: Ejemplo de un ave desplegando una serie de plumas en las puntas de sus alas.

vuelo producido por alas que se deforman y se baten, implican que el cálculo aerodinámico deba realizarse repetidas veces para simular el fenómeno en un ciclo de aleteo. El reciente interés en el desarrollo de micro vehículos aéreos de alas batientes y deformables inspirados en la naturaleza le ha dado un fuerte impulso a este tipo de aplicaciones.

Sobre esta última aplicación surgieron ciertas aplicaciones donde se dan a lugar fenómenos aerodinámicos a diferentes escalas. Un ejemplo de esto es el modelado de alas de aves en cuyos extremos despliegan una serie de plumas separadas entre sí en ciertas condiciones de vuelo (ver figura 1.1). La modelización de este tipo de fenómenos con las versiones del VLM clásicas desarrolladas hasta el momento implica una discretización muy refinada en todo el modelo. Esto es debido a la necesidad de modelizar con suficiente resolución los fenómenos desarrollados sobre estas pequeñas plumas. Sin embargo sobre el resto de la superficie sustentadora del ave, este refinamiento no es necesario e implica un gran consumo de recursos computacionales. Lo que se desarrolla en el presente trabajo es la aplicación y validación de una forma de generar un refinado local en las áreas de interés, como pueden ser estas plumas, pero utilizando una discretización más gruesa sobre el resto del ala.

Para presentar el tema, se hará una breve introducción histórica del VLM como manera de exponer las referencias a las que será dirigido el lector para obtener más información sobre los fundamentos del método. Luego pasaremos a hacer un breve repaso sobre algunos conceptos teóricos de vorticidad y flujo potencial.

1.1. El modelo aerodinámico

Los modelos utilizados en el cálculo de las cargas aerodinámicas pueden dividirse en tres grandes grupos: los modelos analíticos, los modelos basados en las ecuaciones de Navier-Stokes y los modelos basados en singularidades. Los primeros modelos, debido a su dificultad matemática, solo han sido desarrollados para casos particulares, y están limitados comúnmente a problemas lineales estacionarios o cuasi-estacionarios, y suelen ser difíciles de extender para resolver problemas más generales. El segundo grupo tiene un gran éxito debido a que con ellos pueden resolverse una enorme variedad de problemas aerodinámicos sin restricciones de ángulos de ataque, efectos de compresibilidad o pérdida, sin embargo el costo computacional que implica resolver las ecuaciones numéricamente impone un límite práctico a la hora de utilizarlos en ciertas aplicaciones, sobre todo en problemas donde existe una interacción entre la forma, la velocidad y la aceleración del cuerpo y las cargas que sobre él se generan.

Por ellos es que muchos investigadores han trabajado en el desarrollo de un método general para el cálculo de flujos incompresibles sobre cuerpos de forma arbitraria utilizando una distribución de singularidades sobre la superficie, y/o en el interior, del cuerpo y calculando esta distribución a partir de la solución de una ecuación integral. La fortaleza de estos métodos es su generalidad; una vez asumida la hipótesis de flujo potencial, no hay necesidad de introducir otras. En particular no hay limitaciones como la esbeltez del cuerpo, y las perturbaciones de la velocidad pueden no ser pequeñas.

Como puede verse en la referencia [1], donde se hace un buen resumen de diversos métodos numéricos de aerodinámica incompresible, la mayor parte de estos métodos han sido desarrollados utilizando como singularidades ya sea una distribución de fuentes de intensidad variable,

una distribución de dipolos de intensidad variables, o bien, como se utilizara en este trabajo, una distribución de vorticidad de circulación variable. La intensidad de estas singularidades se determinan de manera que se satisfaga la condición de no penetración sobre la superficie del cuerpo, esto es, imponiendo que la perturbación de velocidad que generan, junto con la velocidad de la corriente libre, mantengan nula la componente normal de la velocidad sobre dicha superficie.

El hecho de despreciar los efectos viscosos y de compresibilidad ha sido justificado a lo largo de los años por numerosos resultados experimentales [2, 3, 4, 5], y puede esperarse obtener buenos resultados para grandes rangos de flujos subsónicos, siempre que no se produzcan fenómenos de separación abruptos.

En el presente trabajo, nos concentraremos en el VLM inestacionario (UVLM) que nos permitirá obtener las cargas aerodinámicas en función del tiempo. Este método no está limitado por la forma del cuerpo o el ángulo de ataque, y puede utilizarse para el estudio de maniobras y fenómenos inestacionarios a condición que no se dé el fenómeno de “*Vortex-bursting*” en las cercanías de las superficies sustentadoras y que la separación se produzca a lo largo de los bordes o de líneas conocidas.

La mayoría de los métodos de vórtices están basados en los aportes que Helmholtz [6] realizó. En ellos muestra que las líneas vorticosas están compuestas continuamente por los mismos elementos fluidos. Además Helmholtz probó que los flujos con vorticidad pueden ser modelados con vórtices de una apropiada circulación y una “infinitamente pequeña sección transversal”. Este resultado es el que permite la discretización de regiones vorticosas compactas en un conjunto de vórtices embebidos en un flujo potencial.

El VLM, el cual representa una distribución continua de vorticidad a través de un número finito de vórtices discretos, tiene su origen en el trabajo de Belotserkovskii [7]. En este trabajo, el autor presenta un método numérico para calcular el flujo inestacionario alrededor de un ala delgada moviéndose en un medio ideal incompresible. Las láminas vorticosas, libres y adheridas son aproximadas por una red de vórtices. El movimiento del fluido fuera del ala y de la estela es considerado potencial. Este método puede tratar con flujos inestacionarios alrededor de alas que pueden deformarse arbitrariamente. Cada elemento tiene asociado un vórtice en forma de herradura con una longitud semi-infinita, alineado con la corriente. La geometría de la estela libre no puede ser modelada y por lo tanto la solución está limitada a pequeños ángulos de ataque.

Ermolenko [8] fue el primero en modelar los vórtices de puntera, pero consideraba despreciable la estela que surge desde el borde de fuga. A pesar que en realidad los vórtices de puntera son curvos, él asumió que son rectilíneas y son deflectadas a un cierto ángulo fijado previamente respecto del plano de la cuerda alar. Belotserkovskii [9] mejoró el modelo de Ermolenko incluyendo tanto los vórtices de puntera como los de borde de fuga. Belotserkovskii y Nisht [10] desarrollaron en su trabajo un método no lineal para flujos inestacionarios que resolvía la geometría de la estela conveccionada desde las punteras y de los bordes de fuga. En su trabajo el flujo inestacionario alrededor del ala fue resuelto en una formulación no lineal bajo las siguientes hipótesis: *i*) El fluido es ideal e incompresible, *ii*) el ala es impermeable, *iii*) en conformidad con la conservación de la vorticidad, el cambio en la intensidad de los vórtices adheridos ocurre solo debido a la formación y convección de vórtices libres, *iv*) La condición de Kutta ó Kutta-Joukowski es satis-

fecha sobre el borde de fuga de la superficie sustentadora, v) la lámina vorticiosa inestacionaria es modelada por un sistema de vórtices discretos, y vi) el proceso continuo del tiempo en el cambio de las condiciones de borde y las cargas aerodinámicas en el ala es reemplazado por un proceso discreto.

Konstadinopoulos et al. [11] extendieron esto a un método general de cálculo para flujos inestacionarios, incompresibles, no viscosos alrededor de alas de forma arbitraria, donde la posición de la estela y la distribución de circulación son obtenidas en función del tiempo. Preidikman [12] mejoro la eficiencia del esquema numérico para el cálculo de las circulaciones de la superficie sustentadora asociando un anillo de vorticidad a cada elemento en que se divide la lámina vorticiosa. Su trabajo sirve de base para lo que se desarrolla en esta tesis.

Conociendo los orígenes del método, a continuación se presenta una revisión de los conceptos sobre los que se basa su funcionamiento, los cuales nos permitirá comprender los límites de su aplicación.

1.2. Fundamentos teóricos

La forma tradicional de describir el comportamiento de un fluido es a través de las ecuaciones de Navier-Stokes, que bajo la hipótesis de densidad contante ρ , y con una viscosidad cinemática ν , y sujeto a fuerzas másicas \mathbf{F} , que se expresa en términos del campo de velocidad $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ y el campo de presiones, $p = p(\mathbf{R}, t)$, bajo la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \mathbf{F} \quad 1.1$$

donde \mathbf{R} es la posición en el espacio y t el tiempo, y $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k}$ es un operador diferencial. Esta, junto con la ecuación de continuidad para un fluido incompresible

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad 1.2$$

forman un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales que permiten, conocidas las condiciones iniciales y de borde, la determinación del campo de velocidad y del campo de presión.

Sin embargo, en ciertas ocasiones es conveniente introducir el campo de vorticidad del flujo $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}, t)$, el cual se define como:

$$\boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{V} \quad 1.3$$

donde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{R}, t)$ representa el campo de velocidad angular del flujo, y $\nabla \times \mathbf{V}$ indica el rotor del campo vectorial \mathbf{V} .

La ecuación de transporte de vorticidad en el fluido puede obtenerse tomando el rotor a ambos lados de la ecuación 1.1:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\Omega}) + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \quad 1.4$$

Esta ecuación y la 1.3, con $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ y $\mathbf{\Omega}(\mathbf{R}, t)$ como variables dependientes, reemplazan a las ecuaciones 1.1 y 1.2 en las cuales $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ y $p(\mathbf{R}, t)$ son las variables dependientes.

El hecho de utilizar $\mathbf{\Omega}$ en la formulación del problema se debe a que puede presentar algunas ventajas a la hora de su resolución. Tal vez la más importante es que el conjunto de ecuaciones en términos de $\mathbf{\Omega}$ y \mathbf{V} puede separarse convenientemente en dos partes, una que describa el cambio del campo de vorticidad $\mathbf{\Omega}$ en el tiempo, y otra que asocie al campo de velocidad \mathbf{V} con el de vorticidad en cada instante. Una segunda ventaja está dada por la posibilidad de describir, para un flujo incompresible, todo el campo de velocidad a partir de la vorticidad confinada solamente en la región viscosa.

1.2.1. Flujo Potencial

El concepto de vorticidad, toma especial interés en los denominados flujos potenciales. Se llama así a los flujos no viscosos, donde como consecuencia de esta hipótesis, se puede demostrar que, si un flujo es inicialmente irrotacional, este se mantendrá así en el tiempo, considerando que solo está sometido a campos de fuerzas potenciales. Si esto se cumple se puede expresar que, para todo tiempo:

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} \tag{1.5}$$

$$\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{1.6}$$

Siendo que el rotor de un gradiente es siempre nulo, existe entonces un potencial $\Psi(\mathbf{R}, t)$ tal que.

$$\mathbf{V} = \nabla \Psi(\mathbf{R}, t) \tag{1.7}$$

Si además consideramos un flujo incompresible se puede demostrar a partir de la ecuación de continuidad 1.2 que el potencial $\Psi(\mathbf{R}, t)$ es armónico, esto es, satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \nabla^2 \Psi(\mathbf{R}, t) = 0 \tag{1.8}$$

En el modelo matemático utilizado por el VLM se considera el dominio fluido dividido en dos campos, una gran parte irrotacional donde las ecuaciones 1.6, 1.7, 1.8 serán válidas, y otro confinado a delgadas láminas con una fuerte vorticidad concentrada, donde no lo serán.

1.2.2. Teoremas de Kelvin-Helmholtz y de la conservación espacial de la vorticidad

Un concepto importante que utilizaremos a lo largo del trabajo es el de Circulación. La Circulación, Γ , a lo largo de una curva cerrada C , está dada por la expresión:

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R} \tag{1.9}$$

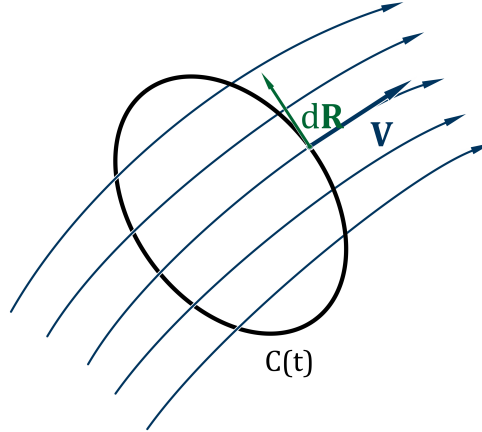


Figura 1.2: Circulación a lo largo de la curva $C(t)$.

Con este concepto, y a partir de la definición de vorticidad, es necesario conocer ciertos teoremas que resultan de importancia para comprender el modelo matemático utilizado. A continuación mencionamos, sin demostración, estos teoremas.

El primero de estos es conocido como *Teorema de la circulación de Kelvin*, y puede ser expresado así:

- **En un fluido barotrópico no viscoso, sometido solo a fuerzas másicas que derivan de un potencial, la circulación alrededor de una curva material cerrada permanece constante**

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0$$

Considerando ahora un tubo vorticoso, concepto análogo a un tubo de corriente en un campo de velocidades para el campo de vorticidad, y bajo las mismas hipótesis de fluido barotrópico no viscoso, se formulan también los llamados teoremas de Helmholtz

- **En cualquier instante, la circulación alrededor de un tubo vorticoso es constante en su longitud.**

$$\oint_{C_1(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R} = \oint_{C_2(t)} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{R}$$

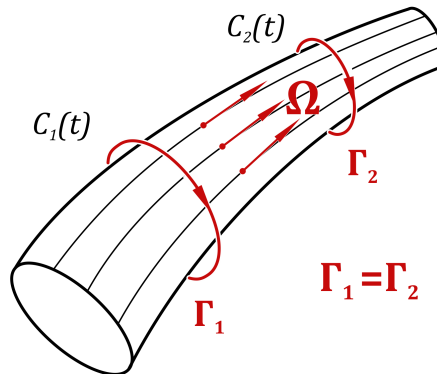


Figura 1.3: Tubo vorticoso.

- Un tubo vorticoso está constituido siempre por las mismas partículas fluidas.
- La circulación a lo largo de un tubo vorticoso permanece constante en el tiempo.

1.2.3. Cinemática del flujo

Las ecuaciones 1.2 y 1.3 representan un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que definen la relación cinemática entre el campo de vorticidad y el campo de velocidad. Este sistema puede ser integrado con el fin de obtener el campo de velocidad en función del campo de vorticidad, obteniéndose la expresión conocida como Ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{V(\mathbf{R}_0, t)} \frac{\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_0, t) \times (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)}{\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|_2^3} dV(\mathbf{R}_0, t) \quad 1.10$$

donde $V(\mathbf{R}_0, t)$ es el volumen de la región del dominio fluido y \mathbf{R}_0 es el vector posición de puntos materiales que pertenecen a esta región. La expresión $\|\mathbf{R} - \mathbf{R}_0\|_2$ indica la norma segunda, o euclídea, del vector $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$.

El integrando de la ecuación 1.10 es cero cuando $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{R}_0, t)$ es nulo, por lo tanto, la región donde el flujo es irrotacional no contribuye al campo de velocidades $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$. Por lo tanto este puede ser determinado en todo el dominio considerando únicamente la distribución de vorticidad en regiones donde esta se encuentra concentrada, que, según veremos, son las regiones donde se ponen de manifiesto las fuerzas viscosas. A fin del cálculo, estas regiones serán modelizadas mediante singularidades teóricas ideales.

1.2.4. Láminas vorticosas

Es posible, sin violar ninguna propiedad dinámica, imaginarnos una superficie donde la vorticidad es infinita de manera que provoque una discontinuidad de la velocidad tangencial. A este tipo de estructuras se las conoce como láminas vorticosas y pueden ser definidas formalmente como el límite de una región de vorticidad Ω confinada a un espesor ϵ , donde a medida que $\epsilon \rightarrow 0$, $\Omega \rightarrow \infty$ de manera tal que el producto $\lambda = \Omega\epsilon$ mantiene un valor finito, en general, función sobre la posición de la superficie.

1.2.5. Líneas vorticosas

De manera similar al caso anterior, una línea vorticiosa es una singularidad en la cual, la vorticidad infinita, es concentrada en una curva en el espacio, de manera tal que la circulación alrededor de una curva atravesada una vez por la línea vorticiosa es finita. Esta circulación Γ es igual a su intensidad e independiente del circuito de la curva, siempre que la envuelva una vez.

Se puede pensar a la línea vorticiosa como el límite de una lámina en la cual una de sus dimensiones tiende a cero mientras que su intensidad se mantiene constante.

Resulta importante para nuestro desarrollo determinar la velocidad de un punto material P , asociada a un segmento vorticoso recto de longitud finita \mathbf{L} y circulación Γ que puede deducirse

a partir de la ecuación 1.10 y resulta:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|_2^2} [\mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \quad 1.11$$

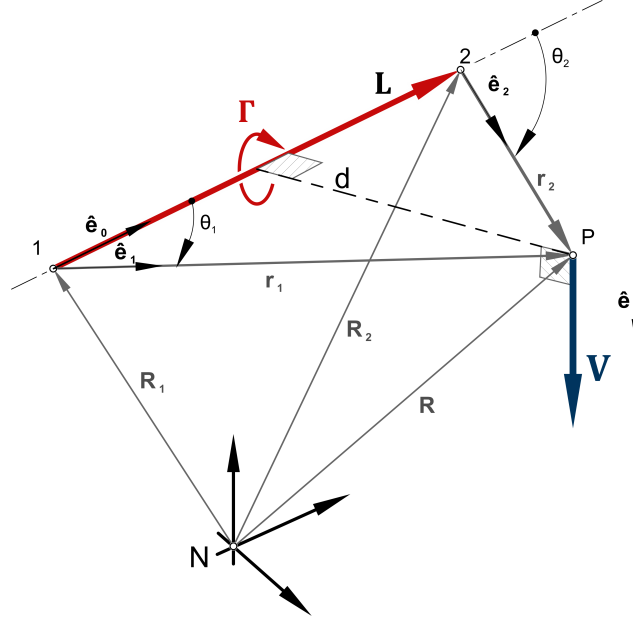


Figura 1.4: Velocidad inducida por un segmento vorticoso.

Esta ecuación es una versión discreta de la Ley de Biot-Savart. En ella se puede observar que, cuando el punto P pertenece al segmento vorticoso este presenta una singularidad, debido a que los vectores \mathbf{r}_1 y \mathbf{L} son paralelos y la velocidad tiende a infinito. Para evitar inconvenientes al momento de la resolución numérica se suele incorporar un parámetro conocido como radio de “cut-off” para regularizar la solución y la ecuación toma la forma que denominaremos Ley de Biot-Savart con núcleo suavizado:

$$\mathbf{V} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{L} \times \mathbf{r}_1\|_2^2 + (\delta \|\mathbf{L}\|_2)^2} [\mathbf{L} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_1 - \hat{\mathbf{e}}_2)] \quad 1.12$$

En la figura 1.5 se muestra el efecto que tiene el radio de “cut-off” sobre la velocidad inducida. Los valores corresponden a un punto que se encuentra en el medio de un segmento de largo unitario a una distancia d variable.

1.2.6. Estelas vorticosas y capa límite

Es sabido que en todos los flujos reales una capa límite se desarrolla en las proximidades de un cuerpo en él sumergido. Esto se debe a la existencia de un gradiente de velocidades provocado por la condición de no deslizamiento sobre la superficie del cuerpo, de manera que el flujo pasa de una velocidad relativa al cuerpo nula a una velocidad igual a la velocidad de la corriente libre. La presencia de este gradiente implica la existencia de vorticidad, y la viscosidad produce que esta se difunda en la dirección normal a la superficie creando la capa límite. Al mismo tiempo la vorticidad creada en esta región es transportada por convección aguas abajo creando las estelas.

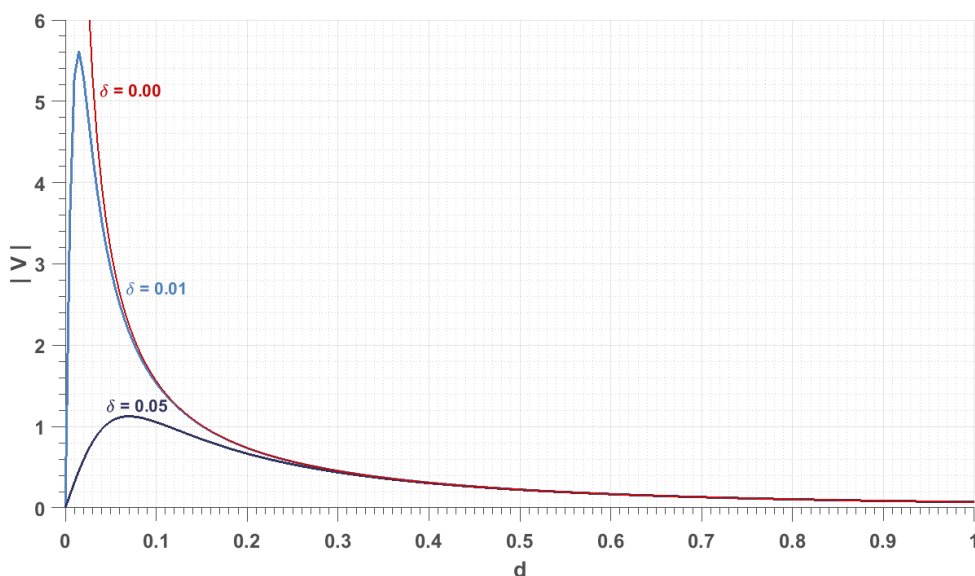


Figura 1.5: Influencia del valor del radio de “cut-off” sobre la velocidad inducida por un segmento vorticoso.

A medida que el número de Reynolds aumenta, la capa límite y las estelas van haciéndose cada vez más delgadas. Si suponemos que podemos elevar indefinidamente el número de Reynolds nos encontraremos que a medida que este tiende a infinito, la capa límite se aproxima a una de espesor infinitesimal. Al mismo tiempo, un elevado número de Reynolds indica una preponderancia de los términos convectivos frente a los términos viscosos. Por lo tanto podemos suponer que todos los efectos viscosos de estos flujos se encuentran confinados a la capa límite y en las estelas, ya que la difusión hacia otras regiones es muy pequeña.

Debido a esto, tradicionalmente los flujos caracterizados por un alto número de Reynolds se consideran compuestos por dos regiones diferentes: *i*) una gran región exterior irrotacional, que está separada del cuerpo por *ii*) otra región que forma una delgada capa, pero con una gran vorticidad concentrada. Estas dos regiones, de diferentes características, son tratadas usualmente para su estudio analítico de forma separada, con adecuadas condiciones de compatibilidad entre ellas.

Por otro lado, el modelo se basa en la hipótesis que estas capas son infinitamente delgadas y que pueden ser consideradas como láminas vorticosas. Por lo tanto, el modelo utilizado se puede entender como una representación de un flujo con un número de Reynolds infinito.

1.2.7. Condición de Kutta

La condición de Kutta para flujos inestacionarios es objeto de mucha discusión, y diferentes soluciones han sido propuestas. En el modelo propuesto en este trabajo, para satisfacerla, forzaremos a la presión a lo largo de los bordes del ala a tomar valores finitos, y que su diferencia entre las superficies superior e inferior sea nula. Esto obliga al flujo a dejar los bordes de fuga y las punteras filosas de las alas suavemente pero, en general, con vorticidad.

Esta condición de Kutta requiere que la vorticidad creada a lo largo de los bordes deba convectarse al flujo. La vorticidad se convectará a lo largo de los bordes de fuga y de las punteras.

Este proceso es llamado "*vortex shedding*" y hace que la vorticidad convectada se aleje del ala y forme la estela. Como nuestro modelo considera un flujo no viscoso, y además, se le exige la continuidad de la presión, la estela formada se encuentra libre de fuerzas.

2

El Método clásico

Como se ha mencionado el Método de Red de Vórtices Inestacionario (UVLM) es una extensión del conocido método de red vórtices que se ha utilizado con considerable éxito para el tratamiento de flujos a velocidades subsónicas. En el capítulo anterior se vio que este permite obtener las cargas aerodinámicas en el dominio del tiempo que son ejercidas sobre un cuerpo moviéndose en el aire bajo regímenes inestacionarios. A continuación se explica la implementación tradicional de este método sobre la cual nos basaremos para realizar un modelo de refinado local.

2.1. El problema matemático

De lo expuesto en el capítulo anterior, y considerando un cuerpo inmerso en un medio fluido, se puede observar que, como resultado del movimiento relativo entre el cuerpo y el fluido, se genera vorticidad en una relativamente delgada región adyacente al cuerpo. Esto es lo que se llama capa límite. Al mismo tiempo, en diferentes partes del cuerpo, como en los bordes de fuga, surge otra región de vorticidad concentrada que denominamos estela. Esta última tiene la particularidad que se le impone la condición que los valores de presión debajo y encima de ella sean iguales. La vorticidad de esta segunda región proviene de aquella región contigua al cuerpo y están íntimamente relacionadas. El modelo de red de vórtices concentra la vorticidad del flujo en estas delgadas regiones, y considera que todo el flujo fuera de estas es irrotacional. Dichas regiones se modelizan como láminas vorticosas de espesor infinitesimal que se suelen diferenciar en adheridas al cuerpo y libres.

La lámina vorticiosa adherida representa la capa límite en la superficie del cuerpo. Esta lámina de espesor infinitesimal puede verse como una aproximación a la verdadera capa límite bajo la hipótesis de número de Reynolds infinito. Por ello, aunque el modelo ha sido utilizado con éxito en casos de Reynolds relativamente bajos, se puede esperar que presente mayor precisión a medida que el número de Reynolds se incremente. Para el caso de alas delgadas, como las que se usan en este trabajo, las láminas vorticosas ubicadas sobre el extradós y el intradós se colapsan en una única lámina vorticiosa ubicada en la línea media del perfil. La posición de la lámina adherida esta siempre especificada, por lo tanto, en general existe un salto finito de presión a través de ella.

La lámina libre representa la estela. Su posición es desconocida *a priori* ya que sobre ella se

impone como condición que los valores de presión tanto debajo, como encima, sean iguales. De esta manera obtenemos una lámina libre de fuerzas que puede deformarse sin restricciones. Las dos láminas están unidas a lo largo de sus bordes (esto es en el borde de fuga y en las punteras alares), donde se impone la condición de Kutta.

De esta manera estamos considerando un problema donde la mayor parte del dominio está compuesto de un flujo incompresible, con un alto número de Reynolds que nos permite despreciar las fuerzas viscosas. Por lo tanto las ecuaciones de Navier-Stokes 1.1, para la región fuera de las láminas vorticosas, se reducen a las conocidas Ecuaciones de Euler:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad 2.1$$

Se asume que todas las fuerzas másicas, como la gravedad, son conservativas y su potencial es considerando en conjunto con el de la presión. La ecuación de continuidad 1.2 se mantiene como:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

Se destaca que la ecuación 2.1 es válida solo en el flujo exterior, fuera de las capas límites y las estelas.

A estas ecuaciones deben agregarse ciertas condiciones de borde. Asumiendo que la posición de las superficie del cuerpo es conocida, posiblemente como una función del tiempo, la primera condición a imponer es la llamada **condición de no penetración**, que determina que la componente normal de la velocidad relativa entre el fluido y el cuerpo sea nula en toda la superficie del sólido. Esto se puede expresar como:

$$(\mathbf{V} - \mathbf{V}_S) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 \quad \text{en } S \quad 2.2$$

donde \mathbf{V} es la velocidad del fluido, \mathbf{V}_S es la velocidad de la superficie S del cuerpo, y \mathbf{n} es un vector unitario normal a la superficie. En general \mathbf{V}_S y \mathbf{n} varían en el espacio y el tiempo.

También una condición de regularidad en el infinito es impuesta. Esta implica que la perturbación debida al movimiento del cuerpo dentro del fluido tienda a cero a medida que se aleja de este. Para imponer esta condición hay que entender que el modelo considera al campo de velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ compuesto por dos velocidades diferentes:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U}(\mathbf{R}, t) \quad 2.3$$

El vector \mathbf{V}_∞ es la velocidad del flujo sin perturbar, considerada uniforme en este trabajo (representa la velocidad que tendría el flujo si todos los cuerpos en él sumergidos desaparecieran). El campo $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ es la perturbación al campo de velocidades creada por la presencia del cuerpo. Este último está asociado con la vorticidad en las láminas que simulan las estelas y capas límites en la superficie del cuerpo y por fuera de estas capas $\mathbf{U}(\mathbf{R}, t)$ es irrotacional. Como la perturbación del cuerpo será calculada a partir de la ley de Biot-Savart (ecuación 1.12) la condición de regularidad se satisface automáticamente.

Se resalta que la ecuación de movimiento 2.1 no es utilizada en el cálculo del campo de

velocidades, sino que está se determina a partir de la ecuación 2.3 y de la Ley de Biot-Savart 1.12. Una vez conocido el campo de velocidades la presión es calculada a partir de la ecuación de Euler (2.1), la cual puede ser integrada para obtener la versión inestacionaria de la ecuación de Bernoulli.

Además de estas condiciones de borde, los teoremas de Kelvin-Helmholtz y la condición de Kutta inestacionaria son utilizadas para determinar la intensidad y la posición de las láminas vorticosas libres (estelas).

2.2. Discretización de las láminas vorticosas

El método de red de vórtices inestacionario reemplaza la lámina vorticosa adherida por una red de segmentos vorticosos de circulación constante $\Gamma_i(t)$ dividiendo la superficie del cuerpo en un número finito de elementos (ver figura 2.2). De la misma manera la lámina vorticosa libre, es reemplazada por segmentos vorticosos libres que se unen a los segmentos adheridos en los bordes de separación, tales como los bordes de fuga o las punteras de las superficies sustentadoras.

La experiencia ha demostrado que las formas geométricas que toman estos elementos afectan la precisión y la velocidad de convergencia del método. **Es sabido que una forma rectangular uniforme de todos los elementos es la que mejores resultados provee.** Esta constituye una primera limitación del método cuando se intentan modelar superficies con formas geométricas complejas.

Normalmente el UVLM considera que cada elemento está rodeado por una serie de segmentos vorticosos. De esta manera las incógnitas del problema son las circulaciones alrededor de cada segmento individual, y las ecuaciones están dadas por la condición de no penetración para cada elemento y por el principio de conservación de la circulación.

Con el objeto de reducir el tamaño del problema Preidikman [12] propuso un variación al método que considera a cada elemento rodeado de un “anillo vorticoso” con igual circulación en todos sus lados, $G_i(t)$. Así considerado el problema, el principio de conservación de la circulación se satisface automáticamente. La circulación de cada segmento ahora puede determinarse a partir de la combinación de la circulación de los anillos adyacentes, tal como se muestra en la figura 2.1.

Como la lámina esta discretizada mediante un número finito de anillos vorticosos, solo se puede satisfacer la condición de no penetración (ecuación 2.2) en un número finitos de puntos, llamados **puntos de control**, de la red adherida. Cada punto de control esta ubicado en el centroide geométrico de los nodos que definen el elemento donde es necesario conocer la dirección de la normal a la superficie, la cual en general varía en el tiempo.

El problema consiste entonces en encontrar las circulaciones de cada uno de los anillos vorticosos que componen la red adherida, $G_i(t)$, de manera que el campo de velocidad $\mathbf{V}(\mathbf{R}, t)$ satisfaga la condición de no penetración, (ecuación 2.2) en todos los puntos de control.

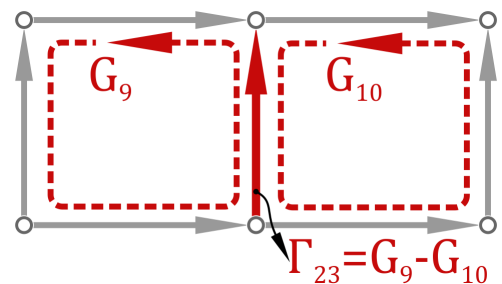


Figura 2.1: Relación entre las intensidades los segmentos vorticosos y los anillos vorticosos.

2.3. Implementación computacional

Se explicará la implementación del algoritmo utilizado a través de un ejemplo que considera una placa plana en un medio fluido inicialmente en reposo, pero que en el instante $t = 0$ comienza a moverse con una velocidad V_∞ . Una red de 4×6 elementos modela la lámina vorticosa adherida sobre la placa (figura 2.2). Antes de que el movimiento comience, todas las circulaciones son, lógicamente, nulas. Cuando el movimiento comienza se modifican instantáneamente los valores de las circulaciones. En este punto se crea un vórtice en los bordes de la red adherida, representativo de lo que Prandtl [13] describió como Vórtice de Arranque y que puede encontrarse en diferentes observaciones experimentales. En el modelo, la existencia e intensidad del vórtice de arranque están determinadas por la conservación de la circulación.

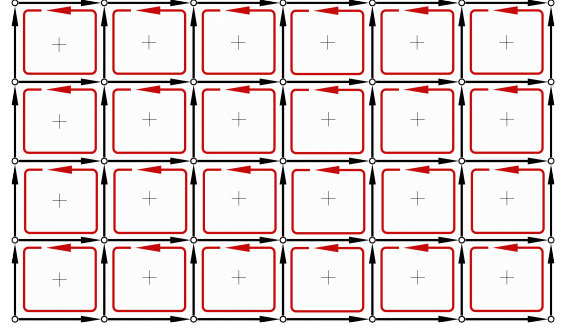


Figura 2.2: Discretización de la lámina vorticosa correspondiente a una placa plana.

Normalmente para satisfacer la condición de Kutta, los segmentos vorticosos son convectados desde el borde de fuga y las punteras a la estela, pero en el instante en que el movimiento se inicia, ninguna vorticidad ha sido convectada y por lo tanto no existe la estela.

Con el fin de encontrar los valores de la circulación, se crea una matriz de coeficientes de influencia aerodinámicos, A_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, N$, donde N es el número de elementos en la red (anillos vorticosos). El coeficiente A_{ij} representa la componente normal de la velocidad en el punto de control i -ésimo producida como consecuencia de una circulación unitaria en el anillo vorticoso ubicado alrededor del elemento j (ver figura 2.3).

Multiplicando A_{ij} por la circulación del j -ésimo elemento, $G_j(0)$, y luego sumando para todos los j se obtiene la componente normal de la velocidad en el punto de control del i -ésimo elemento asociada al conjunto de todos los vórtices adheridos. Por lo tanto la ecuación de no penetración dada por la ecuación 2.2 puede ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} G_j(0) = [\mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i, 0) + \mathbf{V}_\infty] \cdot \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i) \quad \text{con} \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad 2.4$$

donde \mathbf{r}_i es la posición del punto de control del i -ésimo elemento en el sistema de coordenadas solidario al ala y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i)$ su vector unitario normal. En el caso más general la velocidad de la superficie alar, las circulaciones, los vectores normales, y las posiciones relativas de los nodos, y por lo tanto sus coeficientes de influencia, son funciones del tiempo. En particular, en este trabajo, se asume un ala rígida y por lo tanto los valores de A_{ij} y $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{r}_i)$, permanecen constantes.

El sistema de ecuaciones algebraicas dado por 2.4 puede ser resuelto para las circulaciones $G_j(0)$, que son nuestras incógnitas, mediante cualquier procedimiento directo o iterativo. En nuestro caso, debido a que la matriz de influencia es constante, se utilizara un método directo basado en descomposición LU.

En el siguiente paso de tiempo, $t = \Delta t$, se convectan los elementos ubicados en los bordes

filosos hacia la estela. Este proceso se lo puede dividir en dos partes, la primera consiste en calcular la posición que tendrán los segmentos vorticosos que modelan la estela y la segunda, consiste en asignarle el valor de intensidad correspondiente.

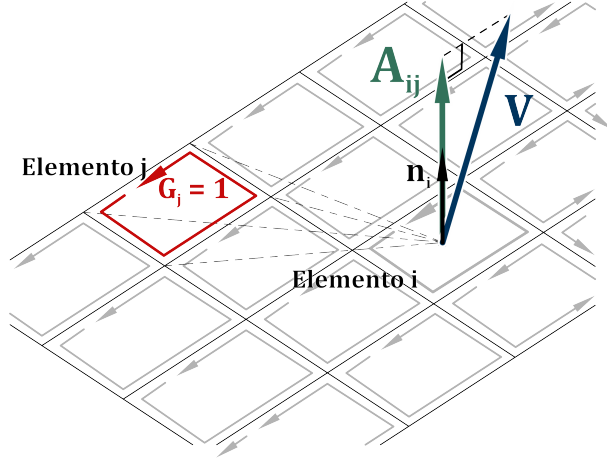


Figura 2.3: Coeficientes de influencia aerodinámicos.

El cálculo de las posiciones de los segmentos vorticosos se realiza considerando la velocidad local de la partícula sobre los nodos que los definen. Para el instante $t = 0$, como la estela surge desde la superficie sustentadora, se crea una fila de nodos perteneciente a la estela que se ubican en la misma posición de los nodos que definen el borde del ala, de manera de mantener la red adherida y la red libre unidas. Sobre cada uno de estos se calcula la velocidad local, la cual se puede considerar como la suma de dos aportes diferentes, la velocidad de la corriente libre y una velocidad \mathbf{U} que representa la velocidad inducida por las láminas vorticosas.

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{U} \quad 2.5$$

Conocida la velocidad, podemos calcular el desplazamiento $\Delta \mathbf{r}$ de la forma

$$\Delta \mathbf{r} = \int_0^{\Delta t} \mathbf{v} dt \quad 2.6$$

Para nuestro cálculo numérico, esta integral es aproximada mediante el producto $\mathbf{v} \Delta t$. Como la velocidad es función del tiempo, se debe decidir cuál de sus valores instantáneos utilizar. Puede considerarse el valor correspondiente a $t = 0$, a $t = \Delta t$ o un promedio de estos. El hecho de utilizar el primero de ellos evita tener que recurrir a un proceso iterativo. Kandil et al. [14] mostró que la utilización del valor en $t = 0$ produce una solución estable, y que las diferencias respecto a los otros métodos son pequeñas. Por lo tanto este valor es adoptado en el presente trabajo.

Con el objetivo de esquematizar el procedimiento, se toma un nodo cualquiera, como se puede observar en la figura 2.4. Para conocer la posición del nodo 22, se parte de la posición del nodo 7, la cual es conocida y está dada por la posición del nodo contiguo perteneciente a la superficie sustentadora. Sobre él se calcula la velocidad inducida por las láminas vorticosas, en este primer paso solo la lámina adherida, a la que se suma la velocidad

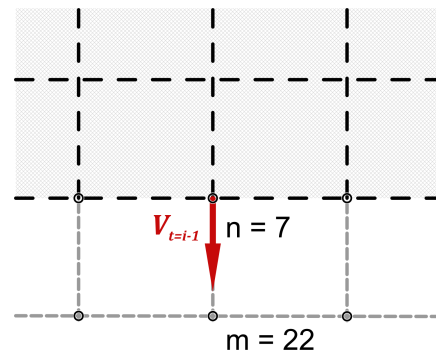


Figura 2.4: Cálculo de la posición de los nodos en la estela en el primer paso de tiempo.

de la corriente libre, y se lo multiplica por el paso de tiempo.

$$\mathbf{r}_{t=\Delta t}^m = \mathbf{r}_{t=0}^n + \mathbf{V}_{t=0}^n \Delta t \quad 2.7$$

Conocida la posición es necesario encontrar los valores de circulación correspondientes. Los valores de circulación de los segmentos provienen de la superficie sustentadora y son transmitidos a la estela en la convección.

Con el objeto de cumplir con la conservación espacial de vorticidad, no solo se convectan los segmentos, sino los anillos vorticosos completos, y sus valores de intensidad vienen dados por los valores que tenían los anillos contiguos en la lámina adherida en el paso anterior como se muestra en la figura 2.5. Se destaca el tratamiento especial que reciben aquellos anillos vorticosos que se encuentran en las esquinas de la lámina adherida cuando la estela se convecta desde el borde de fuga y de las punteras alares. Cada uno de estos anillos de la lámina adherida se corresponderá con dos anillos en la lámina libre.

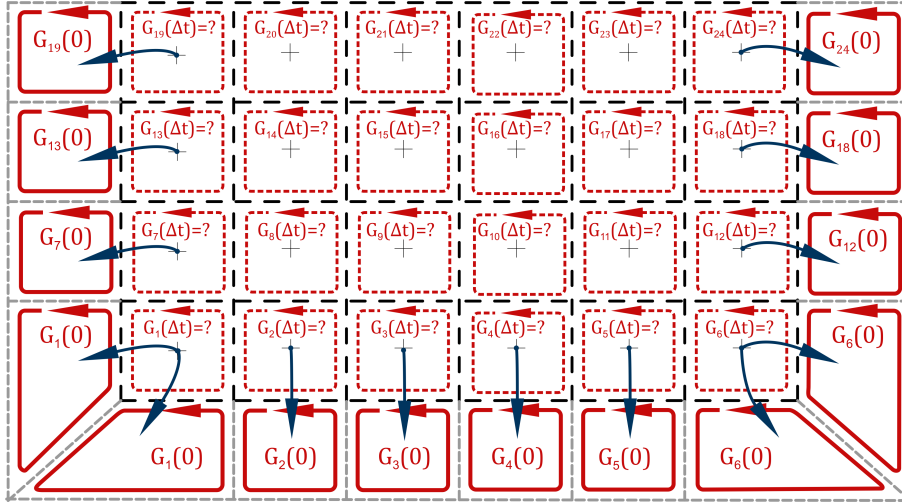


Figura 2.5: Convección en $t = \Delta t$.

Una vez convectada la estela, se procede a calcular los nuevos valores de circulación. Las ecuaciones 2.4 ya no son más válidas debido a que en ellas no se considera la existencia de la estela, por lo que ahora toman la forma:

$$\sum_{i=1}^N A_{ij} G_j(\Delta t) = [\mathbf{V}_S(\mathbf{r}_i, \Delta t) - \mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i, \Delta t) + \mathbf{V}_\infty] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}_i) \quad \text{con } i, j = 1, 2, \dots, N \quad 2.8$$

Donde $\mathbf{V}_W(\mathbf{r}_i, \Delta t)$ es el campo de velocidad asociado a la vorticidad de la estela en el tiempo $t = \Delta t$. Resolviendo este sistema obtenemos las circulaciones de los anillos vorticosos en la red adherida $G_j(\Delta t)$.

Hecho esto, se procede con el siguiente paso de tiempo $2\Delta t$. El procedimiento en general es similar al paso anterior, primero se actualizan las posiciones de los nodos que conforman la red libre y se adjuntan los nuevos nodos correspondientes a los nuevos elementos que son convectados en este paso de tiempo calculando sus posiciones. Esto es, la posición de la segunda fila de nodos

(ej: nodo 22) es recalculada considerando ahora la perturbación inducida por la estela generada en el paso anterior. La tercera fila de nodos es calculada por primera vez partiendo de las posiciones que tenían los nodos de la segunda fila en el paso anterior, por ejemplo el nodo 37.

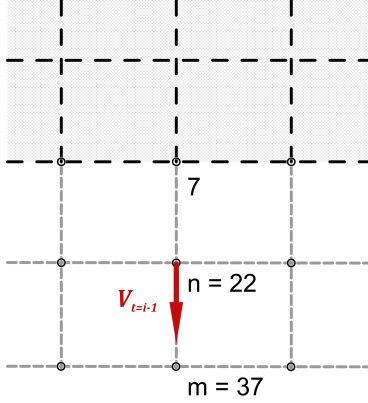


Figura 2.6: Cálculo de la posición de los nodos en la estela en el segundo paso de tiempo.

$$\mathbf{r}_{t=2\Delta t}^{37} = \mathbf{r}_{t=\Delta t}^{22} + \mathbf{V}_{t=\Delta t}^{22} \Delta t \quad 2.9$$

Por último la primera fila de nodos (ej: nodo 7) es actualizada a la posición actual de los nodos correspondiente de la superficie sustentadora.

Cuando se hace esto, los anillos vorticosos definidos en el paso anterior se desplazan creando una segunda fila de elementos en la estela. Por lo tanto a la primer fila se transfieren los valores de circulación calculados en el $t = \Delta t$ sobre la red adherida. El proceso se muestra en la figura 2.5. Definida la estela, se calculan nuevamente los valores de las circulaciones en la red adherida resolviendo las ecuaciones 2.8 para obtener $G_j(2\Delta t)$.

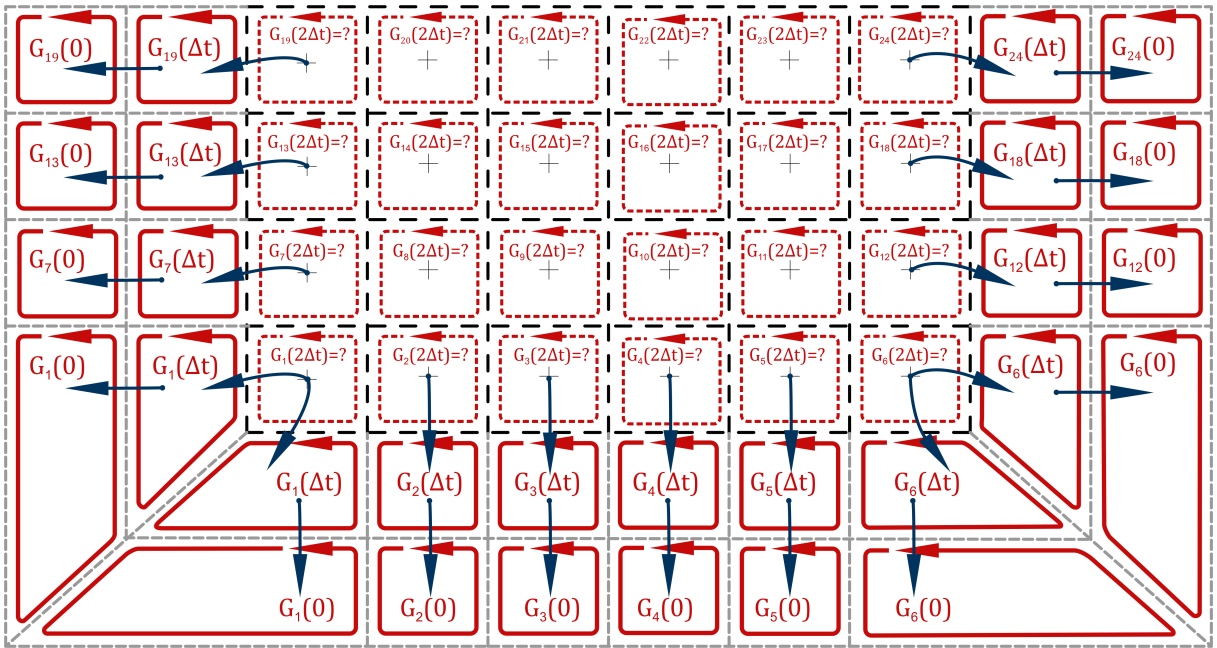


Figura 2.7: Convección en $t = 2\Delta t$.

Este procedimiento puede repetirse para un número arbitrario de pasos. En cada nuevo paso una nueva fila de elementos se forma y convecta hacia la estela. Como la vorticidad en la estela fue generada en el cuerpo en pasos anteriores, el campo de movimiento y la distribución de vorticidad sobre el cuerpo son dependientes de las distribuciones previas de vorticidad. La vorticidad y la forma de la estela son determinados como parte de la solución y se dice que en ella se guarda la “historia” del flujo.

La vorticidad de la parte más cercana de la estela tiene una influencia importante sobre el campo de movimiento fluido que rodea al cuerpo y en su distribución de vorticidad, y por

lo tanto, en las fuerzas que sobre él se producen. Sin embargo, a medida que el tiempo pasa y la estela continúa convectándose aguas abajo, su campo de velocidad asociado va perdiendo influencia alrededor del cuerpo. Desde el punto de vista numérico esto implica que es posible despreciar el aporte de la estela lejana.

2.4. Cálculo de cargas aerodinámicas

Una vez conocido el campo de velocidades, es posible calcular el campo de presiones, y a partir de él conocer las cargas que se ejercen sobre los cuerpos sumergidos en la corriente fluida. Sin embargo, antes de describir la obtención de las cargas aerodinámicas, se abordará el proceso de adimensionalización de las variables con que trabajamos dentro del algoritmo.

2.4.1. Variables características

Es conveniente para la resolución numérica trabajar con cantidades adimensionales de manera de trabajar con elementos uniformes dentro de la red. Para ello se definen una serie de variables características que servirán más adelante para adimensionalizar las ecuaciones utilizadas. Ellas son:

L_C es el largo de la cuerda de un elemento de la red de vórtices.

V_C puede entenderse tanto como la velocidad del flujo sin perturbar, \mathbf{V}_∞ , o la velocidad con que se mueve el cuerpo, \mathbf{V}_S .

ρ_C es la densidad del fluido sin perturbar.

A partir de estas definiciones puede definirse el tiempo adimensional de la forma:

$$T_C = \frac{L_C}{V_C}$$

Esta elección de L_C y V_C presenta dos ventajas. La primera implica que un incremento en el número de elementos a lo largo de la cuerda, se corresponde con una reducción en el tiempo real de cada paso de la simulación. La segunda está dada por el hecho de que un paso de tiempo unitario ($\Delta t = T_C$) genera elementos en la estela con aproximadamente la misma dimensión de aquellos que componen a las láminas adheridas.

2.4.2. Cálculo del coeficiente de presión

El cálculo de las cargas aerodinámicas se realiza determinando el salto de presión que se produce a través de la superficie de cada uno de los elementos en que la superficie sustentadora ha sido discretizada y multiplicando este valor por el área del elemento. Este salto de presión se determina utilizando a la ecuación de Bernoulli para flujos inestacionarios.

$$\left. \frac{\partial \Phi(\mathbf{R}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}} + \frac{1}{2} \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(\mathbf{R}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{R}} \Phi(\mathbf{R}, t) + \frac{p(\mathbf{R}, t)}{\rho} = H(t) \quad 2.10$$

$\Phi(\mathbf{R}, t)$ indica el potencial total de velocidad, por lo que se puede expresar que

$$\nabla_{\mathbf{R}}\Phi(\mathbf{R}, t) = V(\mathbf{R}, t) = U(\mathbf{R}, t) + V_{\infty} \quad 2.11$$

Donde se representa con $V(\mathbf{R}, t)$ a la velocidad absoluta, $p(\mathbf{R}, t)$ a la presión, nuestra incógnita. ρ es la densidad del fluido, constante en todo el dominio, y $H(t)$ es una función del tiempo, uniforme en el espacio.

Si consideramos que estamos a una gran distancia del cuerpo y de sus estelas, de acuerdo a la condición de regularidad en el infinito, las perturbaciones son despreciables y podemos considerar que $p \rightarrow p_{\infty} = \text{constante}$, y $\nabla_{\mathbf{R}}\Phi \rightarrow V_{\infty}$, la velocidad de la corriente libre. Por lo tanto podemos considerar, $H(t) = \frac{1}{2}\mathbf{V}_{\infty} \cdot \mathbf{V}_{\infty} + \frac{p_{\infty}}{\rho}$ como una constante.

Considerando la definición del coeficiente de presión:

$$C_P = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2} \quad 2.12$$

y operando a partir de 2.10, se puede obtener la siguiente expresión para el C_P :

$$C_P = 1 - \left(\frac{V}{V_{\infty}}\right)^2 - \frac{2}{V_{\infty}^2} \left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}} \quad 2.13$$

Introducimos ahora las variables adimensionales, denotadas con un asterisco (*), de la siguiente forma:

$$\mathbf{V}(\mathbf{R}, t) = V_C \mathbf{V}^*(\mathbf{R}, t), \quad \Psi(\mathbf{R}, t) = V_C L_C \Psi^*(\mathbf{R}, t)$$

$$\mathbf{R} = L_C \mathbf{R}^*, \quad t = T_C t^*$$

La derivada temporal del potencial de velocidades puede expresarse como

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = V_C^2 \frac{\partial \Psi^*}{\partial t^*}$$

Luego se puede reescribir el coeficiente de presión en función de la variables adimensionales de la forma:

$$C_P = 1 - V^{*2} - 2 \left. \frac{\partial \Psi^*}{\partial t^*} \right|_{\mathbf{R}^*} \quad 2.14$$

La diferencia de presión a través de la superficie sustentadora en un punto está definida por la diferencia entre la presión en su parte inferior (denotada como “L”) y la de su parte superior (denotada como “U”).

$$\Delta C_P = (C_P)_L - (C_P)_U \quad 2.15$$

Reemplazando en esta ecuación la expresión dada por la ecuación 2.14 se obtiene finalmente la expresión de ΔC_P . (A partir de ahora se omiten los asteriscos (*), y se asume que todas las

variables son adimensionales)

$$\Delta C_P = V_U^2 - V_L^2 + 2 \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_U} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_L} \right) \quad 2.16$$

$$\Delta C_P = \mathbf{V}_U \cdot \mathbf{V}_U - \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{V}_L + 2 \left(\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_U} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_L} \right) \quad 2.17$$

A continuación, se evalúan los diferentes términos que aparecen en la expresión anterior.

Evaluación de $\mathbf{V}_U \cdot \mathbf{V}_U - \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{V}_L$

A través de la lámina vorticosa existe un salto de velocidad tangencial proporcional a su intensidad. Como consecuencia de la condición de no penetración, la velocidad relativa al cuerpo no tiene componente normal sobre las láminas adheridas; por lo tanto se puede expresar la velocidad en un punto por debajo y por encima de la red adherida como:

$$\mathbf{V}_U = \mathbf{V}_m + \frac{\Delta \mathbf{V}}{2} \quad 2.18$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_m - \frac{\Delta \mathbf{V}}{2} \quad 2.19$$

Donde $\Delta \mathbf{V}$ representa el salto de velocidad tangencial a través de la lámina vorticosa y \mathbf{V}_m es una velocidad “media” que no está afectada por la presencia de la vorticidad local. Esta puede interpretarse como la velocidad en el punto medio del espesor de la lámina vorticosa. Sabido esto se puede escribir:

$$\mathbf{V}_U \cdot \mathbf{V}_U - \mathbf{V}_L \cdot \mathbf{V}_L = 2 \mathbf{V}_m \cdot \Delta \mathbf{V} \quad 2.20$$

Nos concentramos ahora en el cálculo de $\Delta \mathbf{V}$. Considerando un elemento rectangular el salto de velocidad a través de él puede expresarse como

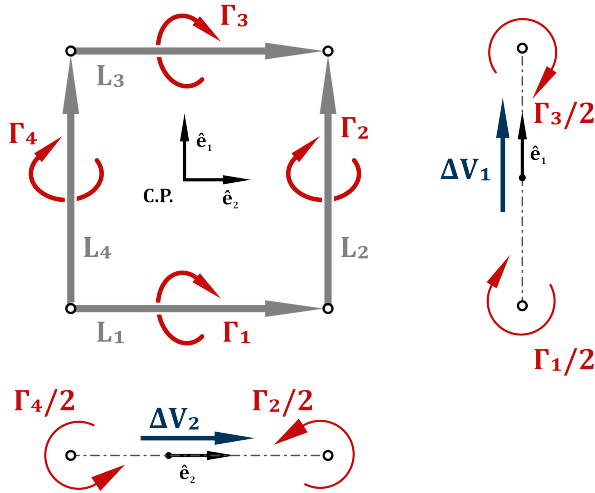


Figura 2.8: Evaluación del salto de velocidad a través de un elemento.

$$\Delta \mathbf{V} = \Delta \mathbf{V}_1 + \Delta \mathbf{V}_2$$

Donde

$$\Delta \mathbf{V}_1 = -\frac{1}{\|\mathbf{L}_2\|_2} \left(\frac{\Gamma_1}{2} + \frac{\Gamma_3}{2} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 \quad 2.21$$

$$\Delta \mathbf{V}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{L}_1\|_2} \left(\frac{\Gamma_2}{2} + \frac{\Gamma_4}{2} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 \quad 2.22$$

Como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_1}{\|\mathbf{L}_1\|_2} \\ \hat{\mathbf{e}}_2 &= -\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_2}{\|\mathbf{L}_2\|_2} \end{aligned} \quad 2.23$$

Se pueden reemplazar estos valores para obtener

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_1}{2\|\mathbf{L}_1\|_2\|\mathbf{L}_2\|_2} (\Gamma_1 + \Gamma_3) - \frac{\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{L}_2}{2\|\mathbf{L}_1\|_2\|\mathbf{L}_2\|_2} (\Gamma_2 + \Gamma_4) \quad 2.24$$

Como $\|\mathbf{L}_1\|_2\|\mathbf{L}_2\|_2 = A \cong$ Área del elemento, podemos expresar finalmente

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\Gamma}}{A} \quad 2.25$$

Donde

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{\Gamma_1}{2} \mathbf{L}_1 + \frac{\Gamma_2}{2} \mathbf{L}_2 + \frac{\Gamma_3}{2} \mathbf{L}_3 + \frac{\Gamma_4}{2} \mathbf{L}_4 \quad 2.26$$

Por otro lado la velocidad media \mathbf{V}_m será calculada como la velocidad de la corriente libre, más las perturbaciones de todos los segmentos vorticosos que no forman parte del elemento evaluado.

Evaluación de $\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_U} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_L}$

Se puede demostrar (ver referencia [12]) que esta diferencia puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\left[\left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_U} - \left. \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|_{\mathbf{R}_L} \right]_i = \frac{\dot{D}G_i(t)}{\dot{D}t} - \Delta \mathbf{V}_i \cdot [{}^N \mathbf{v}^B + {}^N \dot{\mathbf{r}}^{iB} + {}^N \boldsymbol{\omega}^B \times {}^B \mathbf{r}^{iB}] \quad 2.27$$

Para los casos que se utilizan en este trabajo el segundo término del segundo miembro será nulo, ya que se considera un ala fija al cuerpo e indeformable. El primer término representa una “derivada sustancial” siguiendo un punto fijo a la red (no a una partícula fluida como es habitual). La evaluación numérica de la derivada que aparece en el primer término del segundo miembro se realiza por medio de una diferencia finita de primer orden,

$$\frac{\dot{D}G_i(t)}{\dot{D}t} = \frac{G_i(t) - G_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad 2.28$$

donde Δt es el paso de tiempo.

Expresión final del Coeficiente de Presión

Finalmente la diferencia ente los coeficientes de presión se puede expresar como

$$\Delta C_P = 2 (\mathbf{V}_m \cdot \Delta \mathbf{V}) \frac{G_i(t) - G_i(t - \Delta t)}{\Delta t} \quad 2.29$$

Donde $\Delta \mathbf{V}$, considerando elementos rectangulares, puede obtenerse como:

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{1}{2A} \mathbf{n} \times [(\Gamma_1 + F \Gamma_3) \mathbf{L}_1 + (\Gamma_2 + \Gamma_4) \mathbf{L}_2] \quad 2.30$$

donde el parámetro F toma el valor 2 para los elementos que se encuentran sobre el borde de ataque de la superficie sustentadora y 1 para todos los demás. Esto se debe a que los elementos ubicados en el borde de ataque no están conectado con otras redes de anillos vorticosos, y de esta forma se considera en medio elemento toda la vorticidad del segmento vorticoso ahí ubicado.

2.4.3. Obtención de las cargas

Una vez obtenido el salto del coeficiente de presión sobre cada panel, la obtención de los valores de las fuerzas se pueden obtener fácilmente. Sobre cada elemento se tiene una fuerza adimensional

$$\mathbf{F}_i^* = \Delta C_{p_i} A_i \mathbf{n}_i \quad 2.31$$

Donde el producto $\Delta C_{p_i} A_i$ es el coeficiente de fuerza normal del elemento

$$C n_i = \Delta C_{p_i} A_i \quad 2.32$$

La fuerza total será la sumatoria de las fuerzas en cada uno de los elementos:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^* &= \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^* \\ \mathbf{F}^* &= \sum_{i=1}^N \Delta C_{p_i} A_i \mathbf{n}_i \end{aligned} \quad 2.33$$

Y su valor dimensional estará dado por

$$\mathbf{F} = \left(\frac{1}{2} \rho_C V_C^2 L_C^2 \right) \mathbf{F}^* \quad 2.34$$

De una forma similar se pueden expresar los momentos. Cada elemento aportará un momento respecto al centro aerodinámico, que se calcula como:

$$\mathbf{M}_i^* = \mathbf{R}_i^* \times \mathbf{F}_i^* \quad 2.35$$

donde \mathbf{R}_i^* representa el vector adimensional que une el centroide del elemento y el centro

aerodinámico. La sumatoria de estos da por resultado momento total

$$\mathbf{M}^* = \sum_{i=1}^N \mathbf{R}_i^* \times \mathbf{F}_i^* \quad 2.36$$

Su forma dimensional está dada por

$$\mathbf{M} = \left(\frac{1}{2} \rho_C V_C^2 L_C^3 \right) \mathbf{M}^* \quad 2.37$$

Si bien son los valores de fuerzas y momentos los que realmente cuentan sobre una aeronave, en aeronáutica se suelen utilizar sus respectivos coeficientes adimensionales, por ello es útil tener una expresión para obtenerlos. En nuestro caso, como los modelos que utilizaremos son placas planas, y por lo tanto las normales de todos los elementos coinciden, el coeficiente de fuerza normal puede calcularse simplemente como la sumatoria de los coeficientes de cada elemento.

Una particularidad debe mencionarse también. En todas las aplicaciones en aeronáutica se toma como área característica el área alar, mientras que en este trabajo, en base a las variables características definidas en la sección 2.4.1, se utiliza el valor dado por L_C^2 . Por ello, para calcular el coeficiente de fuerza normal se hace un cambio del área de referencia.

$$C_N = \frac{L_C^2}{A_W} \sum_{i=1}^N C_{n_i} \quad 2.38$$

El cual puede expresarse, según las componentes de la fuerza en la dirección de la corriente o perpendicular a ella, como la suma “vectorial” del coeficiente de sustentación y de resistencia; siendo el ángulo de ataque conocido es muy sencillo el cálculo de C_L y C_D

$$C_L = C_N \cos(\alpha) \quad 2.39$$

$$C_D = C_N \sin(\alpha) \quad 2.40$$

3

Implementación del refinado local

En el capítulo anterior se detalló el procedimiento de cálculo del método de red de vórtices inestacionario tradicional. En él, entre otros aspectos, se hace mención de la importancia de la estela en el proceso de simulación, ya que esta es la que guarda la “historia” del movimiento. Esto hace que en cada paso de tiempo se incremente el número de líneas vorticosas que deben considerarse a la hora del cálculo. Si bien es cierto que el efecto de la estela más alejada al cuerpo puede despreciarse, por la complejidad del algoritmo de convección, esta sigue requiriendo un esfuerzo de cálculo que puede ser significativo en ciertos modelos.

Por otro lado, el tamaño del sistema de ecuaciones algebraicas lineales a resolver está dado por el número de elementos en que ha sido dividida la superficie del cuerpo a modelar. Cada elemento representa una incógnita, la intensidad del anillo vorticoso correspondiente, y una ecuación, la condición de no penetración en su punto de control. Al mismo tiempo, la discretización del cuerpo se transmite directamente a la estela, ya que los elementos son convectados a partir de él. Es decir que cuando se refina la red en que se discretiza el cuerpo estamos, al mismo tiempo, refinando la red que representa la estela.

Por estas razones un proceso de refinamiento global de la red a “fuerza bruta” puede llevar a un incremento considerable en el tiempo de cálculo. De esta manera surge un especial interés por el refinamiento local de las redes; es decir, un procedimiento que nos permita incorporar una mayor cantidad de elementos pequeños en regiones de interés que por su forma provoquen un cambio pronunciado en la distribución de vorticidad, pero dejando elementos de mayor tamaño donde sea conocido que la vorticidad tiene una distribución más uniforme.

Debido al conocimiento obtenido de la experiencia práctica sabemos que el UVLM obtiene resultados más precisos y mejor convergencia cuando los elementos utilizados son rectángulos regulares a lo largo de una red estructurada. Esta restricción en la estructura de la malla hace que el refinamiento local sea difícil de implementar.

En este capítulo se presenta un procedimiento de refinado, que mantiene la estructura principal, pero que permite dividir a los elementos de “base” en elementos más pequeños a través de la introducción de elementos de transición que contienen un conjunto adicional de nodos que permiten dividir uno de sus lados en dos o más líneas vorticosas.

En la figura 3.1 se muestra un ejemplo de una malla, representando una placa plana que ha sido refinada en la puntera, lugar que puede resultar de interés, debido a que es allí donde se produce la mayor variación en la distribución de vorticidad y a partir de donde se generan

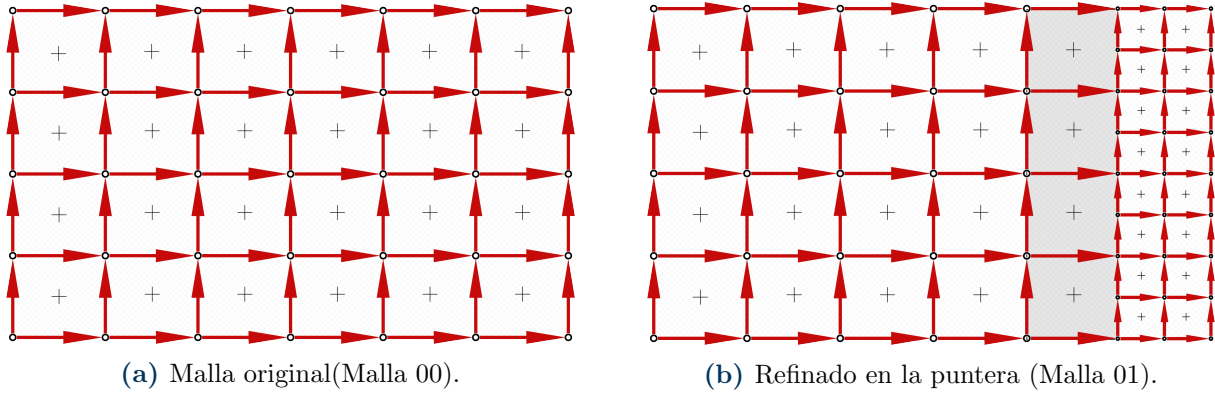


Figura 3.1: Refinamiento local.

los vórtices de puntera, donde la estela se deforma y puede ser de interés obtener una mayor resolución. En la figura 3.1b se resaltaron los elementos que permite la transición entre la malla original y la refinada con elementos compuestos por segmentos vorticosos cuya longitud es la mitad que en la otra parte de la malla. En el Anexo A se pueden encontrar los esquemas tanto de la Malla original (Malla 00), como de la malla refinada en la puntera (Malla 01) con las respectivas numeraciones que se utilizarán en el presente trabajo.

3.1. Cálculo de la Intensidad de los segmentos vorticosos

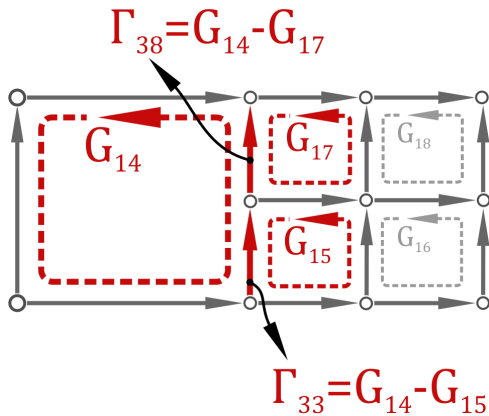


Figura 3.2: Segmentos vorticosos en los elementos de transición.

El cálculo de las intensidades dentro del esquema de resolución de una red refinada localmente es muy similar a lo que hemos explicado en el capítulo anterior. El sistema de ecuaciones a resolver sigue siendo generado por la condición de no penetración sobre los puntos de control (ecuación 2.8). Los coeficientes de influencia A_{ij} son obtenidos de la misma manera considerando una circulación unitaria en cada anillo.

Conocidos los valores de la circulación en los anillos vorticosos, se pueden evaluar las intensidades de los segmentos. En el caso de los elementos de transición existe una pequeña diferencia a la hora del cálculo, ya que estos elementos comparten uno de sus lados con dos o más anillos vorticosos lo que lleva a la necesidad de calcular más de un segmento por cada lado, tal como se ve en la figura 3.2.

Es importante destacar que el hecho de considerar la superficie sustentadora formada por un conjunto de anillos vorticosos nos asegura que en todo momento la conservación de la vorticidad se cumple, independiente del tamaño o forma de estos anillos.

3.2. Convección

El proceso de convección fue el aspecto que más dificultades presentó al momento de realizar este trabajo. El problema puede dividirse en dos partes: la primera consiste en cómo determinar la posición de los nodos que definen los elementos más pequeños, mientras que la segunda trata sobre qué vorticidad asignarles a esos elementos más pequeños.

En lo que respecta a la posición de los nodos el problema aparece porque en el método clásico, en cada paso se agrega un conjunto de nodos que se ubican todos sobre una misma fila. En el caso de un refinado local, en cada paso se agregan múltiples filas. Esto es, en cada paso hay que definir la posición de nodos que representan puntos en el espacio que una misma partícula tomaría en diferentes instantes de tiempo, por ejemplo, para la Malla 01 (figura 3.1b) en $\Delta t/2$ y en Δt .

Sabemos que el método clásico puede tomar como referencia la posición de los nodos de filas previas ya existentes en la estela, para determinar la posición de la nueva fila de nodos que se agrega. Como con una red refinada localmente, en cada paso se deben agregar más de una fila de nodos, no tenemos referencia para el cálculo de la segunda y subsiguientes filas. Surge entonces el interrogante desde dónde convectarlos.

Respecto al cómo transmitir convenientemente la vorticidad proveniente de los elementos pequeños de la superficie sustentadora a la estela en un paso de tiempo, tenemos un problema similar. La necesidad de asignar una vorticidad a los elementos pequeños, en conjunto con los elementos de mayor tamaño.

A fin de solucionar estas cuestiones se han probado varias alternativas de convección diferentes de las cuales se presentaran a continuación las tres que se consideran más representativas y que nos permitan describir las dificultades que hemos encontrado.

3.2.1. Método 1

Se explica el primer método propuesto usando como ejemplo la Malla 01. Una vez que se resuelve el sistema dado por la ecuación 2.4 y se conoce la vorticidad que define a la red adherida en $t = 0$, se realiza la convección de los primeros elementos hacia la estela. Para determinar la posición de los nodos que la definen en este primer paso de tiempo, $t = \Delta t$, se parte las posiciones de los nodos del borde de la superficie sustentadora, que son conocidas, y definimos con ellas la primer fila de nodos que pertenece a la estela, de manera que ambas redes queden unidas. En esas posiciones es calculada la velocidad local de la partícula, y con ella se determinara la posición de la siguiente fila de nodos, tal como se hace con el método clásico, pero utilizando para el caso de los nodos perteneciente a los elementos pequeños la mitad del paso de tiempo.

$$\mathbf{r}_{t=\Delta t}^m = \mathbf{r}_{t=0}^n + \mathbf{V}_{t=0}^n \tau \Delta t \quad 3.1$$

donde el parámetro τ vale 1 si el nodo pertenece a un elemento grande, ó 1/2 si pertenece a un elemento pequeño.

La presencia de los elementos pequeños introduce en cada paso la necesidad de encontrar la posición de nodos ubicados en una tercera fila, de los cuales en la red no tenemos una referencia respecto de dónde se encontraban en el paso anterior. Por lo tanto se utilizan las posiciones de la

segunda fila, que se calculan en el presente paso, como una estimación de las posiciones del paso anterior, y se calculan a partir de ellas las posiciones de la tercera fila de nodos. Es decir que la velocidad local de la partícula es calculada en la posición que se acaba de obtener para, a partir de ella, convectar la siguiente fila de nodos. Cabe aclarar que hasta aquí ninguna vorticidad ha sido convectada, y por lo tanto la velocidad se calcula con la distribución de vorticidad existente en el paso inicial de tiempo, en este caso $t = 0$. Es decir

$$\mathbf{r}_{t=\Delta t}^m = \mathbf{r}_{t=\Delta t}^n + \mathbf{V}_{t=0}^n 1/2 \Delta t \quad 3.2$$

Mención aparte merecen los nodos que pertenecen a los elementos de transición. Estos elementos son tratados enteramente como elementos grandes, y los nodos intermedios que dividen uno de sus costados en dos o más segmentos vorticosos se ubican simplemente equidistantes entre los nodos que definen los vértices del elemento convectado. Esto se hace con el objeto de mantener uniformidad entre los elementos grandes y para evitar la deformación excesiva de los elementos de transición.

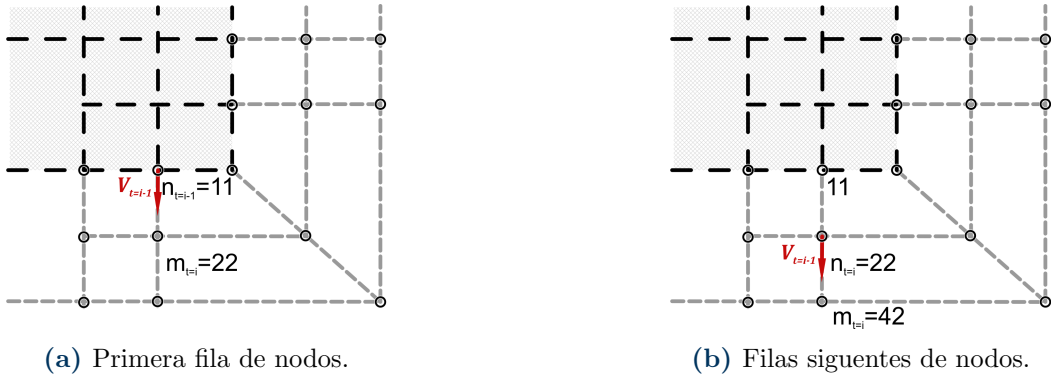


Figura 3.3: Cálculo de la posición de los nodos en el proceso de convección - Método 1.

Conocidas las posiciones de los nodos que definen los elementos se les asignan la intensidad a sus anillos vorticosos. En este procedimiento los elementos grandes nuevamente son convectados como en el método clásico, la vorticidad que fue calculada en $t = 0$ es transferida desde los elementos en el borde de la superficie sustentadora a los elementos correspondiente de la estela.

Los elementos pequeños de la primera fila de la estela reciben un tratamiento similar, asignándose la vorticidad que tenía cada elemento contiguo de la superficie sustentadora. Pero además este proceso se repite varias veces de manera que a todos los elementos que se ubican a continuación, en las filas subsiguientes, se les asignan el mismo valor de intensidad a sus anillos. En el caso que estamos tomando como ejemplo esto se repite dos veces tal como se puede ver en la figura 3.4. De esta forma los segmentos vorticosos que separan a ambas filas de elementos pequeños y que son agregados en este primer paso resultan con intensidad nula, ya que los anillos vorticosos de los elementos que separan tienen igual intensidad y aportan en sentido opuesto al segmento.

Así se ha creado la estela correspondiente al primer paso, y se puede pasar a calcular las intensidades de los segmentos vorticosos en la superficie sustentadora $G_j(\Delta t)$. Obtenidas estas se vuelve a convectar a la estela los nuevos elementos que se agregan en el segundo paso.

Para ello el procedimiento es similar, primero encontramos la posición de los nodos, y luego

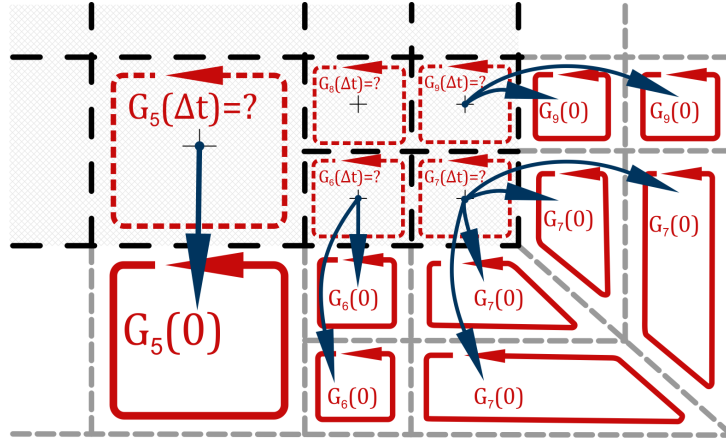


Figura 3.4: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = \Delta t$ - Método 1.

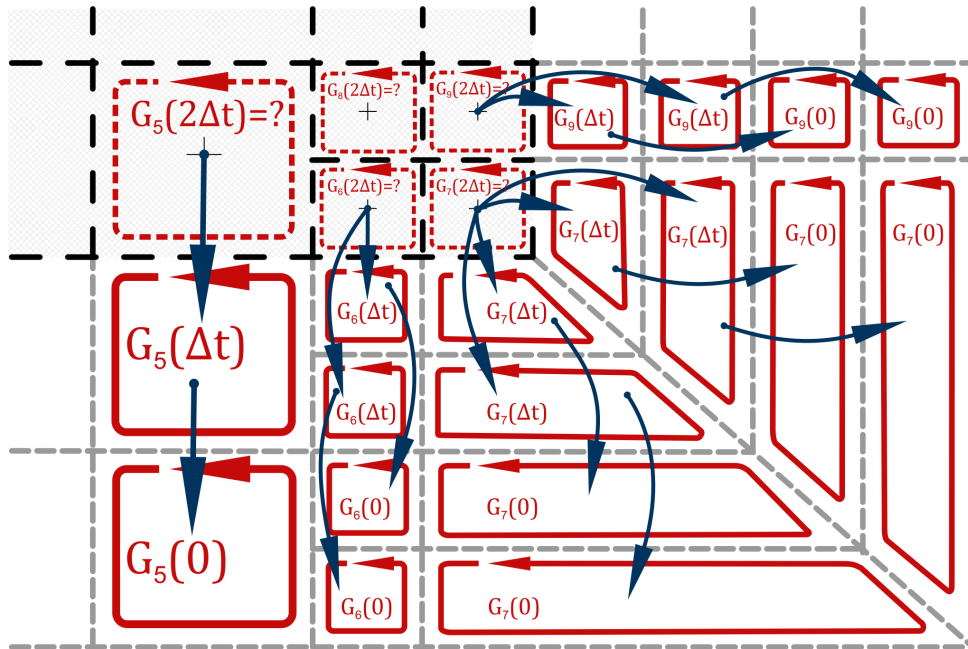


Figura 3.5: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 2\Delta t$ - Método 1.

les asignamos las intensidades.

Para encontrar la posición de los nodos dentro de cada bloque de la estela que a cada paso se agrega, la primer fila de estos nodos es conveccionada a partir de la posición del nodo precedente en el paso anterior de tiempo, mientras que las filas subsiguientes son conveccionadas a partir de la posición actualizada, pero con la velocidad del paso anterior, tal como se hizo en el primer paso de tiempo. Es importante destacar que en los bloques de nodos agregados en pasos anteriores, existe una referencia desde donde conveccionar los nodos de la tercera fila del bloque, sin embargo, para mantener uniformidad en el esquema de cálculo, estos son siempre calculados desde la posición ya actualizada.

Las intensidades de los anillos que ya se encuentran en la estela son desplazadas a medida que estos elementos se mueven, mientras que se agrega un nuevo conjunto de elementos a los cuales se les asignan las intensidades de los elementos contiguos de la superficie sustentadora en $t = \Delta t$ tal como se ve en la figura 3.5.

Nuevamente es posible ahora recalculer las circulaciones en la superficie sustentadora, y de forma análoga para los siguientes pasos de tiempo.

3.2.2. Método 2

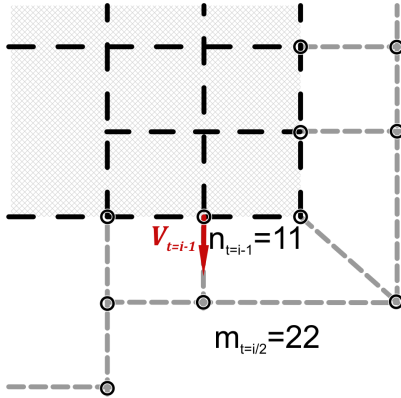


Figura 3.6: Cálculo de la posición de los nodos de la estela intermedia - Método 2.

En este método se propone la utilización de **estelas intermedias** dentro de cada paso para permitir la convección de los elementos pequeños. Al mismo tiempo cada paso que será dividido en **sub-pasos** de tiempo. Cada una de las estelas intermedias representa una estela parcial. Los elementos grandes se convectan hacia ella en el primer sub-paso y permanecerán invariables hasta obtener la estela final. En cambio, los elementos pequeños se irán incorporando, fila por fila, en cada sub-paso. Con esta propuesta se logra incorporar solo una nueva fila de nodos cada sub-paso, evitando tener que utilizar las posiciones actualizadas como referencia.

Siguiendo con el ejemplo sobre la Malla 01, el procedimiento comienza calculando la posición de la primera fila de nodos que es convectada tal como se hace en el método tradicional. Pero a diferencia del método tradicional estos nodos crean una estela intermedia. A esta estela intermedia se le asignan también las circulaciones de los anillos vorticosos siguiendo igualmente el procedimiento del método tradicional, convectandolas desde la superficie sustentadora. Más allá de los tamaños de los elementos, se obtiene una estela similar a la que se obtendría en el método clásico. Las figuras 3.6 y 3.7 muestran el proceso.

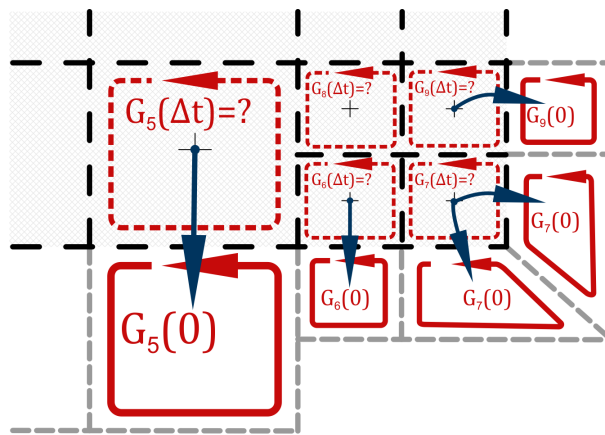


Figura 3.7: Convección de los anillos vorticosos de la estela intermedia $t = 1/2 \Delta t$ - Método 2.

A partir de esta estela intermedia se calcula la estela final correspondiente al instante $t = \Delta t$. Para ello consideramos que los elementos grandes definidos en la estela intermedia permanecerán inalterados, tanto en la posición de sus nodos como en la intensidad de sus anillos, sin embargo todas las posiciones de los nodos que definen los elementos pequeños serán actualizadas, de la

siguiente manera.

$$\mathbf{r}_{t=\Delta t}^m = \mathbf{r}_{t=1/2\Delta t}^n + \mathbf{V}_{t=1/2\Delta t} 1/2 \Delta t \quad 3.3$$

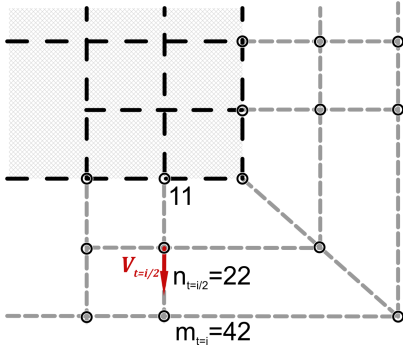


Figura 3.8: Cálculo de la posición de los nodos de la estela en $t = \Delta t$ - Método 2.

En el ejemplo que se está siguiendo solo se crea una estela intermedia, ya que el refinado local utiliza segmentos vorticos cuya longitud es la mitad de la de los segmentos base, pero se crean tantas estelas como sean necesarias cuando los segmentos refinados son más pequeños. De esta manera siempre se agrega una única nueva fila de nodos a las estelas que se van creando, evitando tener que calcular posiciones de los nodos a partir de una posición actualizada en la misma iteración.

Se aclara que los nodos pertenecientes a los elementos de transición reciben el mismo tratamiento que en el Método 1, y los nodos intermedios de estos elementos son ubicados en el baricentro geométrico de los nodos que definen los vértices.

Hecho esto contamos con todos los elementos de la estela en este paso de tiempo definidos en su posición, y resta asignarles los valores de la circulación. Aquí, como se mencionó anteriormente, se mantiene las circulaciones de los elementos grandes mientras que la de los elementos pequeños son desplazadas junto con ellos. Las circulaciones de los anillos que son agregados provienen también desde la superficie sustentadora y cuyos valores fueron obtenidos en el paso anterior. De esta forma las intensidades que reciben los elementos en la estela resulta similar a la que se le asigna utilizando el algoritmo del Método 1 y los segmentos vorticosos que separan las filas de elementos incorporadas en un mismo paso tienen intensidades nulas.

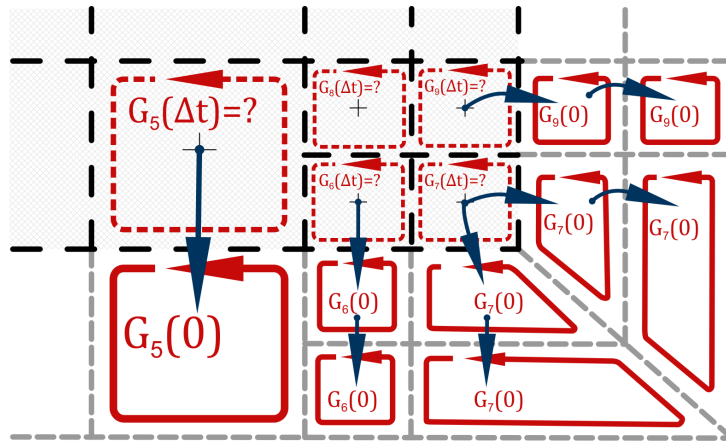


Figura 3.9: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = \Delta t$ - Método 2.

Una vez obtenida la estela final para este primer paso, se vuelve a resolver el sistema y se calculan las circulaciones de los anillos de la superficie sustentadora, $G_j(\Delta t)$. Obtenidas estas, se avanza un paso en el tiempo y el procedimiento vuelve a comenzar. La estela es conveccionada siguiendo el mismo proceso, se crea una estela intermedia, tal como se ve en la figura 3.10. Las posiciones de los nodos son determinadas como se realizó en el primer paso, y las circulaciones

se mueven siguiendo los elementos.

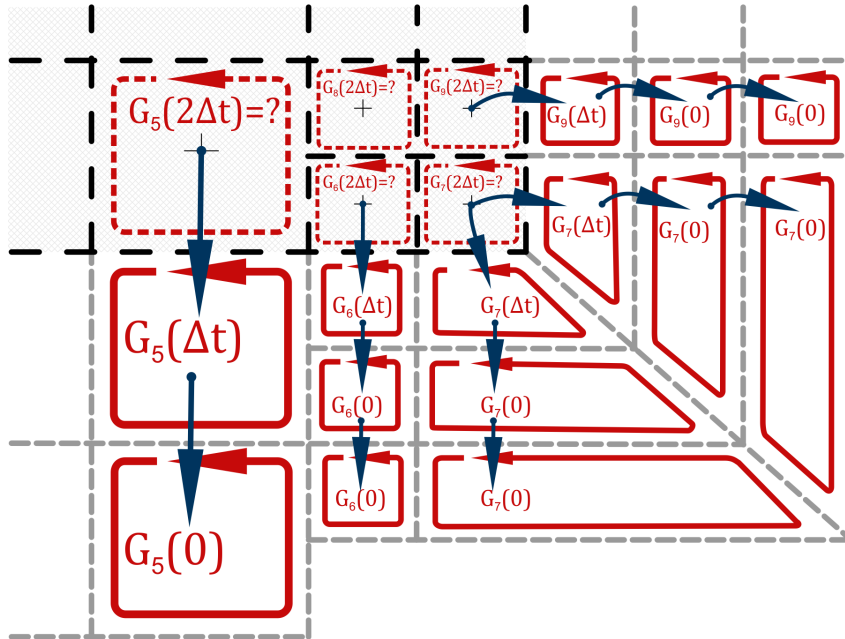


Figura 3.10: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 3/2\Delta t$ - Método 2.

Luego, a partir de ella, se obtiene la estela final para el instante $t = 2\Delta t$, actualizando las posiciones y circulaciones de los elementos pequeños, pero sin modificar los elementos grandes. La figura 3.11 muestra gráficamente el procedimiento.

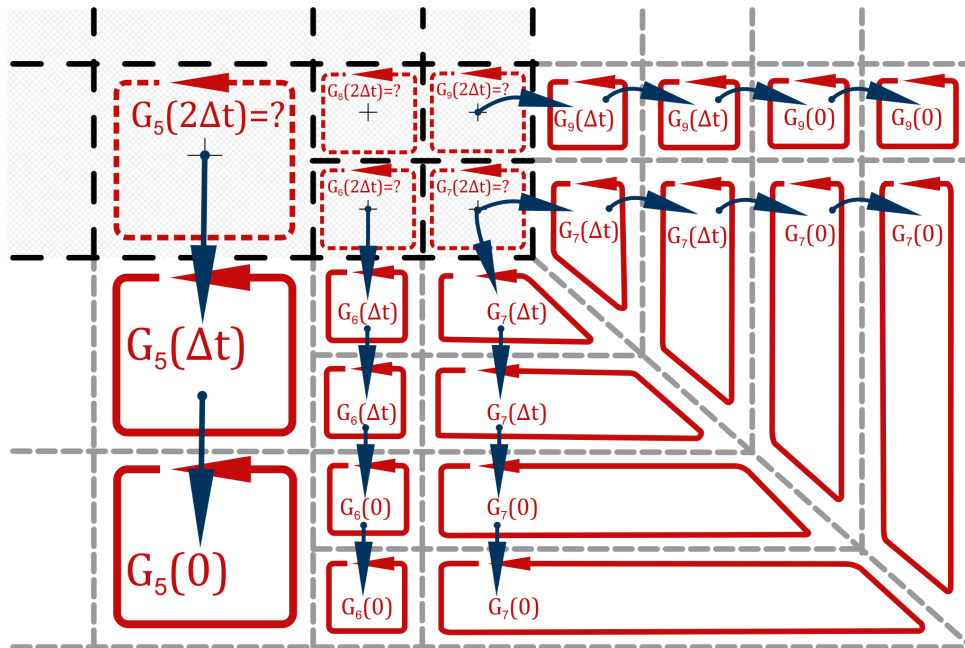


Figura 3.11: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 2\Delta t$ - Método 2.

3.2.3. Método 3

El Método 3 es similar al Método 2 ya que en él también se crean estelas intermedias pero, en este caso, en cada uno de los sub-pasos, se resuelve el sistema para encontrar las circulaciones

de los anillos vorticosos de la superficie sustentadora.

Se explica este procedimiento utilizando la misma malla utilizada para explicar los métodos anteriores. La primera fila de nodos y de elementos son convectados a la estela de manera idéntica al método clásico (Figura 3.12). Hasta este punto el procedimiento es idéntico al del Método 2. Pero antes de seguir trabajando con la estela intermedia se vuelven a calcular las circulaciones en la red adherida, obteniéndose así las circulaciones de los anillos correspondientes a un paso intermedio, $G_j(\Delta t/2)$.

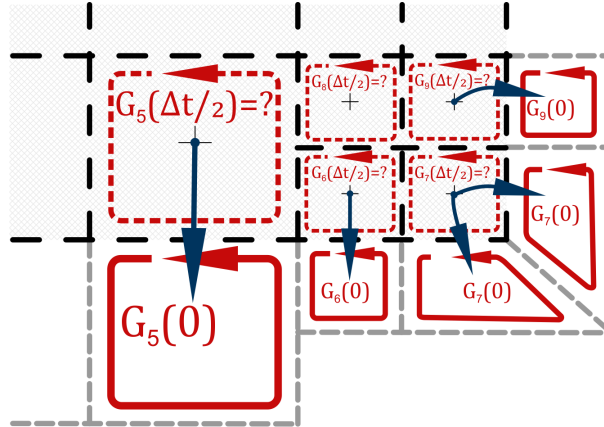


Figura 3.12: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 1/2\Delta t$ - Método 3.

Hecho esto se vuelve a convectar para obtener la estela final correspondiente al primer paso de tiempo. Las posiciones de los nodos correspondientes a los elementos grandes permanecen inalteradas, pero se actualizan las de los nodos correspondientes a los elementos pequeños tal y como se hizo en el Método 2. A diferencia de este último, las circulaciones de los elementos grandes sí son actualizadas, con los valores de los anillos vorticosos contiguos de la superficie sustentadora calculados para cada sub-paso. En los elementos pequeños la circulaciones se desplazan con ellos y, a los elementos que se suman a la estela en cada sub-paso, se les asigna los valores de los anillos correspondientes de la superficie sustentadora (Figura 3.13).

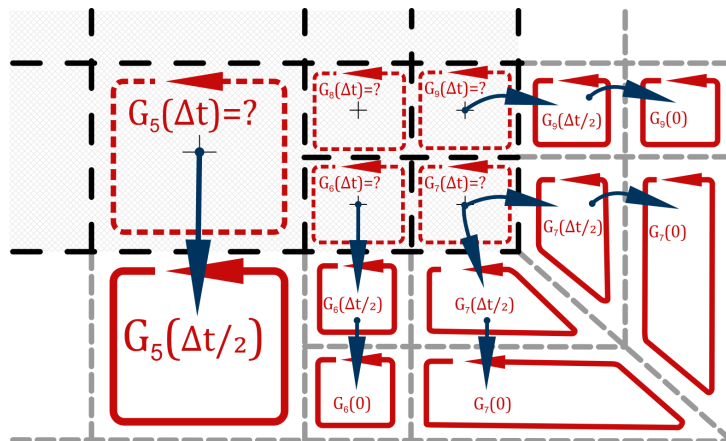


Figura 3.13: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = \Delta t$ - Método 3.

Obtenida la estela completa para el instante $t = \Delta t$, se vuelve a resolver el sistema de ecuaciones algebraicas lineales obteniéndose ahora sí las circulaciones definitivas, $G_j(\Delta t)$, y se avanza un paso de tiempo.

Luego, el procedimiento se vuelve a repetir, en un primer sub-paso se crea la estela intermedia para lo que denominamos $t = 3/2\Delta t$, se vuelven a encontrar las intensidades de la red adherida $G_j(3/2\Delta t)$. En el segundo sub-paso se procede a la convección final correspondiente a $t = 2\Delta t$. Las figuras 3.14 y 3.15 muestran el proceso.

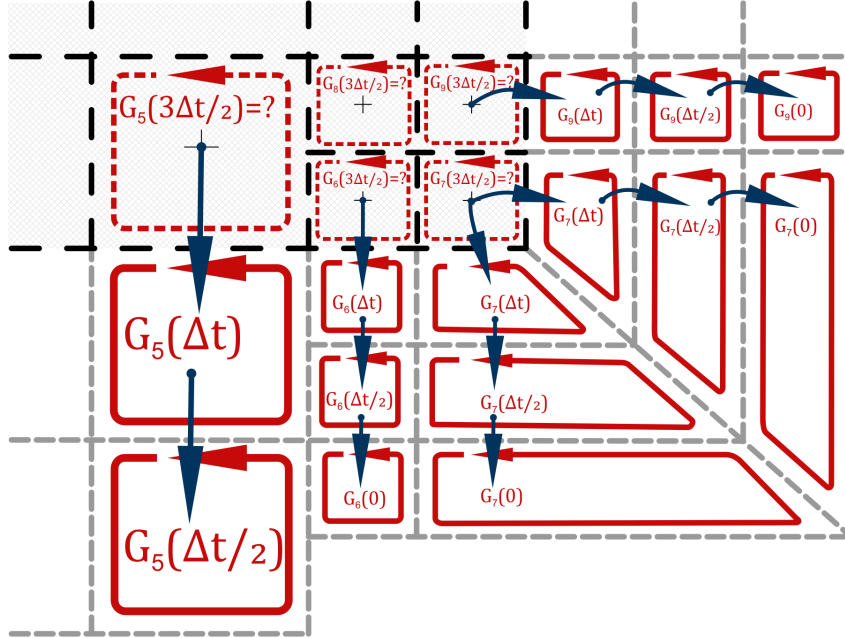


Figura 3.14: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 3/2\Delta t$ - Método 3.

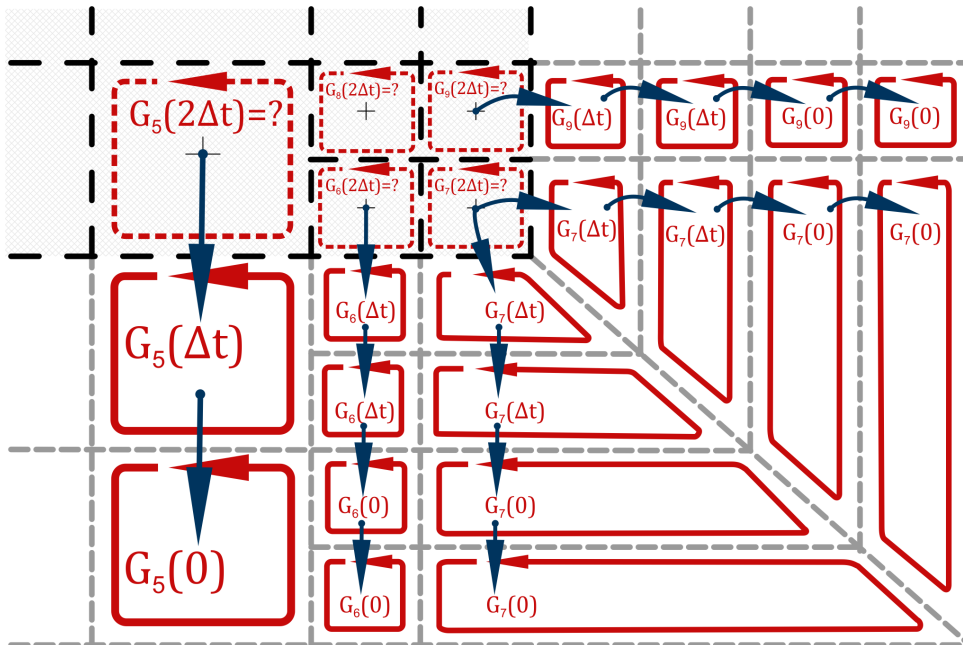


Figura 3.15: Convección de los anillos vorticosos de la estela en $t = 2\Delta t$ - Método 3.

Podría pensarse que este método de convección no aporta grandes ventajas frente al método clásico utilizando una malla completamente refinada, ya que se crean sub-pasos donde es necesario resolver el sistema antes de poder convectar. Esto no es totalmente cierto. Si bien el hecho de resolver el sistema requiere un tiempo de cálculo que puede ser importante, el proceso que

mayor tiempo requiere está dado por la convección de la estela. En este algoritmo ese tiempo es reducido debido a que en las estelas intermedias no se recalculan las posiciones de los nodos que pertenecen a los elementos más grandes. Además, claro está, que se reduce el tamaño del sistema y la cantidad de segmentos vorticosos en la estela.

3.3. Cálculo de coeficiente de presión

El cálculo de los coeficientes de presión en el modelo es idéntico al procedimiento que se utiliza en el método clásico para los elementos rectangulares, sin embargo los elementos de transición requieren un tratamiento especial. Para determinar los valores de C_P en estos elementos particulares se crea un elemento equivalente, compuesto únicamente por cuatro segmentos vorticosos. Esto es, se reemplaza el lado que se compone de más de un segmento, por un único segmento cuya intensidad es un promedio ponderado por la longitudes de las intensidades de los segmentos originales que lo conforman. De esta forma se pueden seguir aplicando las mismas ecuaciones que en el método tradicional.

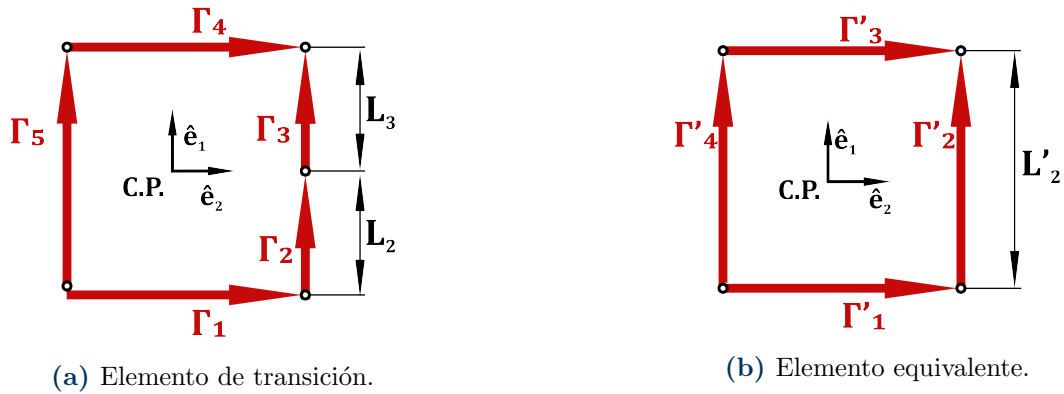


Figura 3.16: Cálculo de C_P en los elementos de transición.

La figura 3.16 compara al elemento de transición presente en la red de vórtices y el elemento equivalente “virtual” que es utilizado en el cálculo del coeficiente de presión. Si bien aquí se muestra el caso donde los segmentos vorticosos son refinados en la mitad del tamaño base, para una mayor simpleza, el procedimiento es general. En este los segmentos vorticosos de intensidades Γ_2 y Γ_3 son reemplazados por un segmento vorticoso de intensidad Γ'_2 , cuyo valor es calculado de la forma.

$$\Gamma'_2 = \frac{\Gamma_2 \|L_2\|_2 + \Gamma_3 \|L_3\|_2}{\|L'_2\|_2} \quad 3.4$$

o de forma general para cualquier refinamiento.

$$\Gamma'_j = \frac{\sum_{i=n}^m \Gamma_i \|L_i\|_2}{\|L'_j\|_2} \quad 3.5$$

Donde n y m representan el primer y último segmento a reemplazar por el segmento equivalente j .

Las intensidades de los demás elementos son iguales a las correspondientes del elemento de transición, esto es: $\Gamma'_1 = \Gamma_1$, $\Gamma'_3 = \Gamma_4$ y $\Gamma'_4 = \Gamma_5$.

A partir de este nuevo elemento equivalente calculamos el C_P usando la ecuación 2.29

$$\Delta C_P = 2 (\mathbf{V}_m \cdot \Delta \mathbf{V}) \frac{G_i(t) - G_i(t - \Delta t)}{\Delta t}$$

Donde el valor de $\Delta \mathbf{V}$ se expresa en términos del elemento equivalente

$$\Delta \mathbf{V} = -\frac{1}{2A} \hat{\mathbf{n}} \times [(\Gamma'_1 + F \Gamma'_3) \mathbf{L}'_1 + (\Gamma'_2 + \Gamma'_4) \mathbf{L}'_2] \quad 3.6$$

4

Resultados

En el capítulo anterior se presentaron las modificaciones realizadas sobre la versión original del UVLM con el objetivo de incluir un modelo de refinamiento local. A continuación, se presentan una serie de resultados obtenidos con la herramienta numérica desarrollada con el fin de evaluar su desempeño.

4.1. Intensidades de los segmentos vorticosos

Para poder validar los resultados obtenidos con redes refinadas localmente, primeramente se estudia la evolución de las intensidades de los segmentos vorticosos a medida que se refina una red de forma global. En la siguiente sección se presentan estos resultados para luego pasar a la red localmente refinada

4.1.1. Refinado global

Para analizar cómo evolucionan las intensidades a medida que se refina la red de vórtices se consideró el caso de una placa plana rectangular, con una envergadura de dos veces la cuerda, esto es $AR = 2$, a la que se le aplicó un refinado progresivo en toda la red, para luego comparar estos resultados con los obtenidos usando una malla refinada localmente. Se partió de una malla de 4 (2×2) elementos, los que se dividieron sucesivamente hasta llegar a una malla de 1024 (32×32) elementos. Los esquemas de estas mallas pueden verse en el Anexo A.

Número de Malla	Elem. en la dir. "X"	Elem. en la dir. "Y"	Nº total de elementos	Núm.total de nodos	Núm. total de seg. vort.
Malla 10	2	2	4	9	12
Malla 11	4	4	16	25	40
Malla 12	8	8	64	81	144
Malla 13	16	16	256	289	544
Malla 14	32	32	1024	1089	2112

Tabla 4.1: Características de las mallas utilizadas.

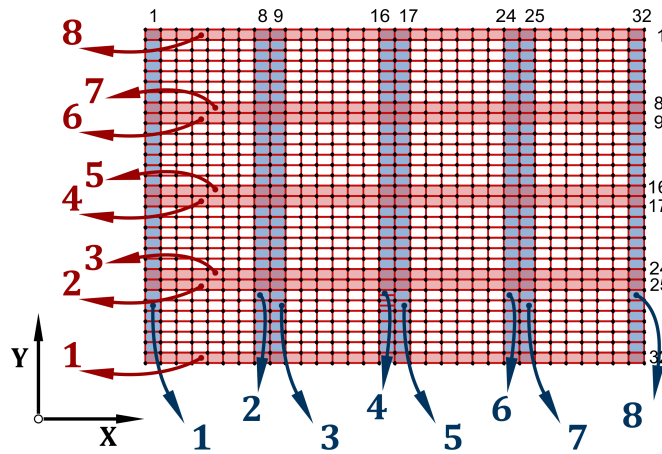


Figura 4.1: Diagrama sobre Malla 14 indicando la posición de cada corte.

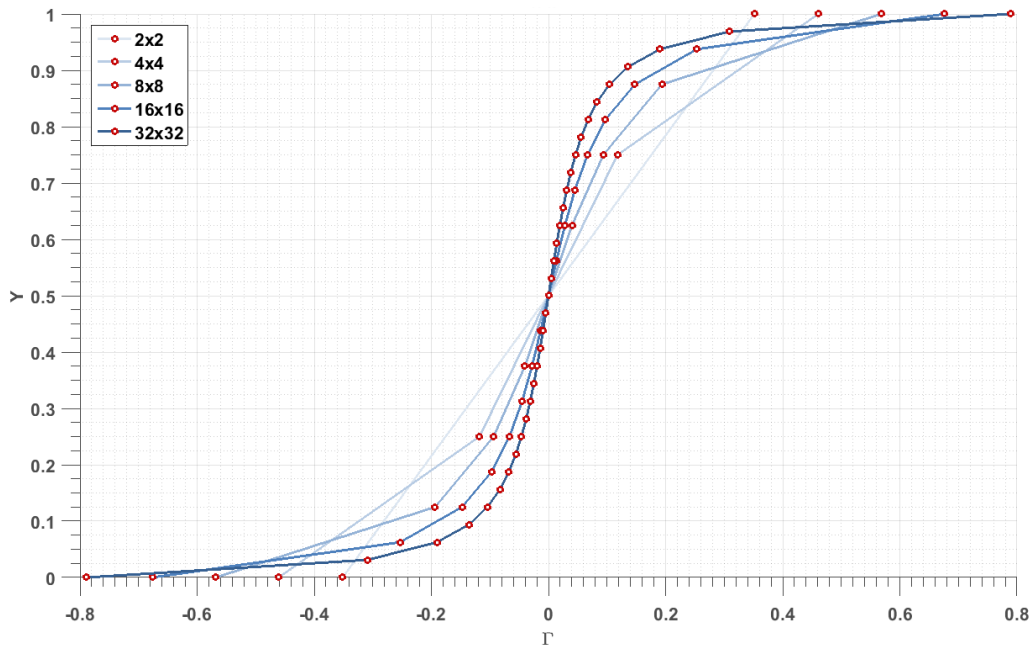
Sobre estas mallas se realizaron una serie de “cortes” para analizar la variación de las intensidades de las líneas vorticosas en la red. En estos cortes se distinguen los segmentos verticales (orientados según el eje X), y los segmentos horizontales (orientados según el eje Y). Como se muestra en la figura 4.1, estos cortes comprenden todos los segmentos vorticosos horizontales a lo largo de la cuerda en diferentes estaciones sobre la envergadura (marcadas en azul), y de forma similar a lo largo de la envergadura para los segmentos vorticosos verticales, en diferentes estaciones sobre la cuerda (marcadas en rojo).

Una vez definidos estos cortes, se graficaron las intensidades de las líneas vorticosas para el instante $t = 0$. En las figuras 4.2 y 4.3 se muestran las intensidades en dos cortes, el 1 y el 4, para las líneas vorticosas horizontales y verticales respectivamente. Los gráficos correspondientes a todos los cortes pueden encontrarse en el Anexo B.

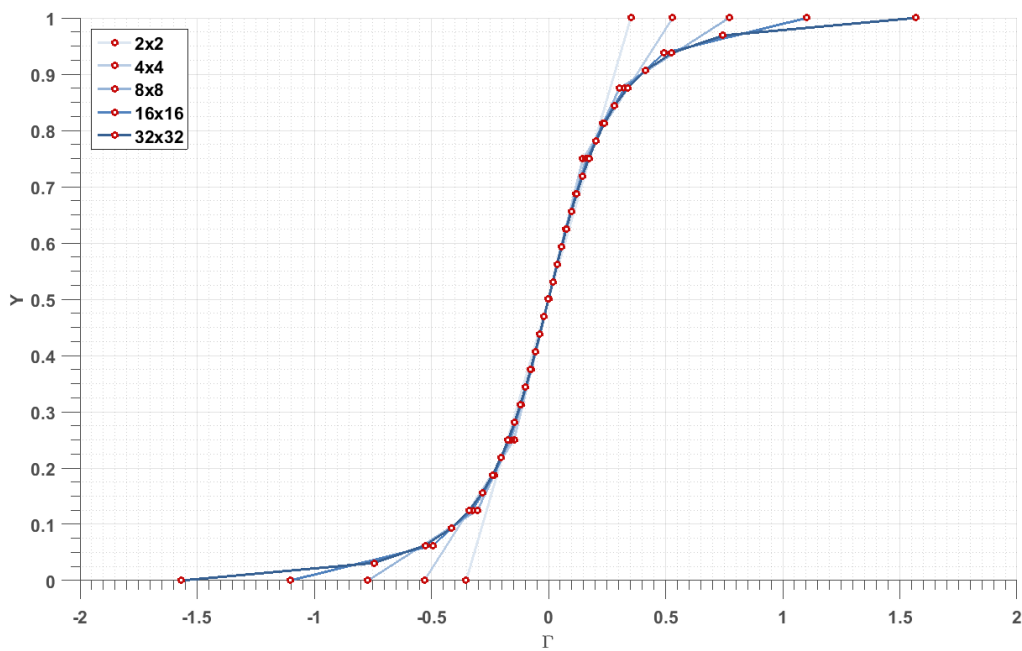
Se aclara que las intensidades están expresadas en su valores adimensionales y es por ello que tienen valores comparables entre las diferentes mallas. Esto es, a medida que una malla es refinada, cada segmento vorticoso representa una parte más pequeña de la lámina adherida, por lo tanto su intensidad dimensional es menor. Sin embargo, por la forma en que adimensionalizamos (Sección 2.4.1) las variables, todos los elementos de la red tienen un área adimensional igual, y por lo tanto los valores adimensionalizados de las intensidades son comparables a pesar de corresponderse con mallas diferentes.

El hecho que estos gráficos correspondan a $t = 0$, hace que se presenten ciertas particularidades que conviene aclarar antes de seguir con el análisis. Se puede ver que estos gráficos son todos antisimétricos. En el caso de los segmentos vorticosos verticales es algo lógico debido a la simetría del campo movimiento. Pero en el caso de los segmentos horizontales, esto no es evidente. Su forma se debe a que en este instante, cuando se inicia el movimiento, no existe estela alguna que, por ejemplo, establezca alguna condición sobre borde de fuga. A medida que el tiempo avanza, la vorticidad se convecta hacia la estela. De esta manera, cuando la simulación se acerca a un régimen estacionario, el gráfico de intensidades sobre el borde de fuga alcanza el valor cero.

De forma similar se puede ver que los gráficos correspondientes a los segmentos vorticosos horizontales en los cortes del costado izquierdo y del derecho son idénticos debido a la simetría del



(a) Puntera izquierda (corte 1).

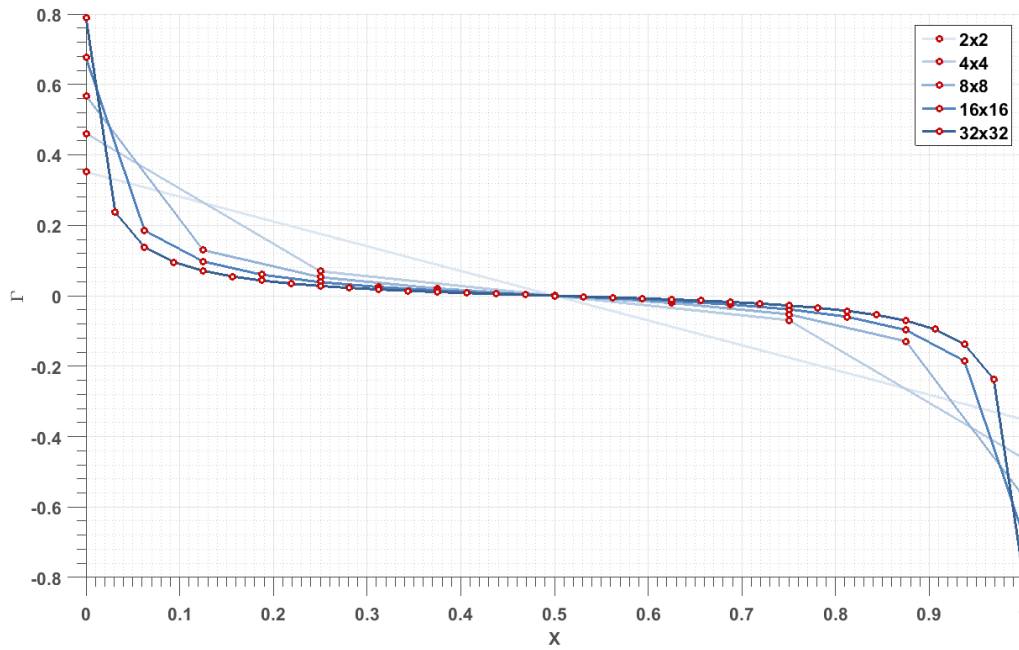


(b) Centro del ala (corte 4).

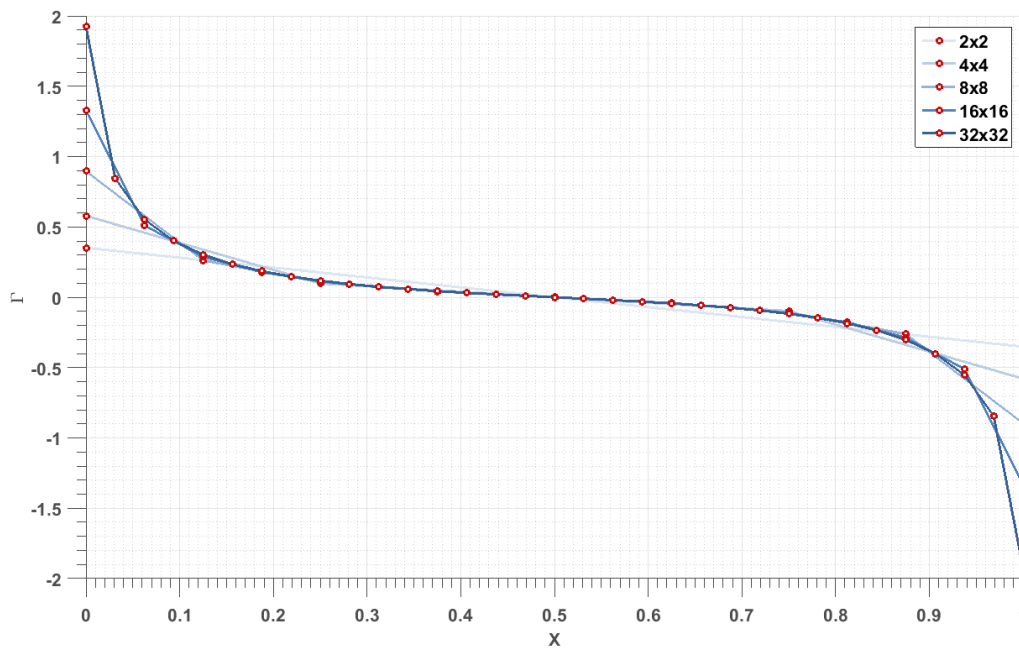
Figura 4.2: Intensidades de los segmentos vorticosos horizontales.

movimiento. Mientras que los correspondientes a los segmentos verticales de la mitad delantera son iguales a la mitad trasera por representar el inicio del movimiento y esta forma se modifica a medida que el tiempo avance en la simulación.

Analizando ahora las diferencias entre los distintos refinados, se puede ver que en los cortes de la parte central del ala, hasta el mallado más grueso de la red provee una buena estimación de



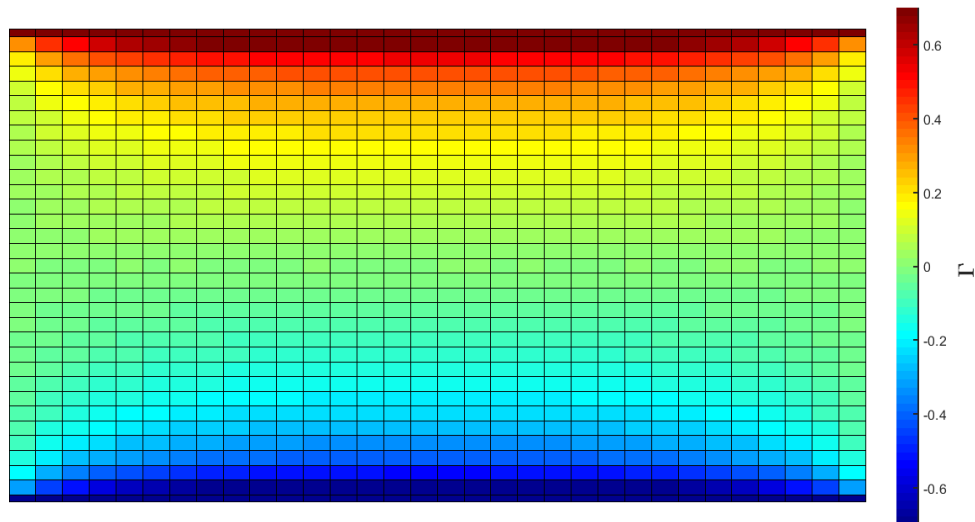
(a) Borde de fuga (corte 1).



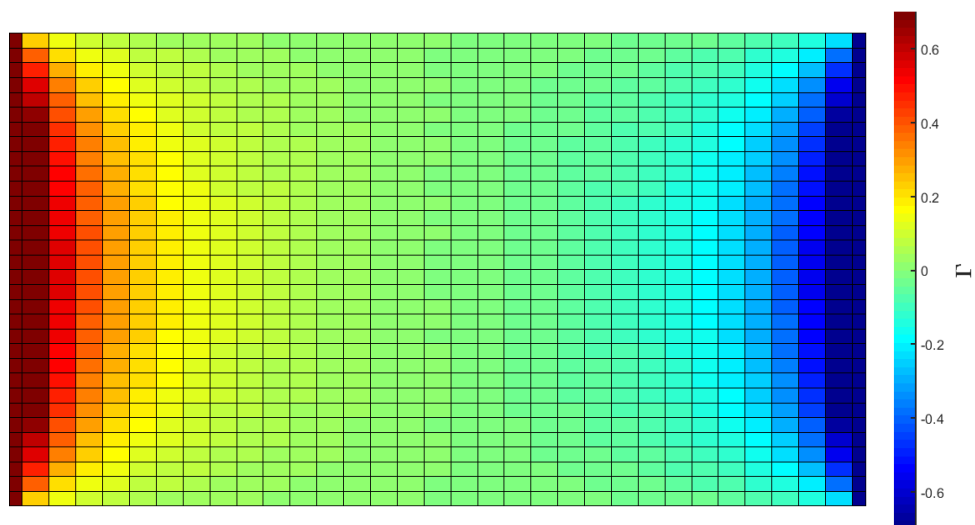
(b) Centro del ala (corte 4).

Figura 4.3: Intensidades de los segmentos vorticosos verticales.

las intensidades de los segmentos vorticosos. Sin embargo, a medida que nos aproximamos a los extremos de la superficie sustentadora los distintos refinados muestran una notoria diferencia. Este comportamiento es algo previsible y se corresponde con el hecho que a medida que nos acercamos a las punteras las variaciones de vorticidad son más pronunciadas.



(a) Segmentos vorticosos horizontales.



(b) Segmentos vorticosos verticales.

Figura 4.4: Distribución de intensidades de los segmentos vorticosos.

Además se puede notar una convergencia en los valores de las intensidades a medida que la red se va haciendo más fina. Sin embargo, esta convergencia no se ve en los segmentos que se ubican en todo el borde de la red. En ellos se puede ver que los valores crecen a medida que se reducen los elementos de la malla. Esto tiene su fundamento en que el modelo matemático predice una vorticidad infinita en esas ubicaciones, y cada vez que se refina el mallado los valores tienen a aumentar indefinidamente. Esta condición desaparecerá en el borde de fuga y en las punteras donde la presencia de la estela hará cumplir la Condición de Kutta, pero se mantendrá en el borde de ataque.

Una mejor forma de visualizar la distribución de vorticidad puede obtenerse de las figuras 4.4, donde se representan las intensidades de las líneas vorticosas en un mapa de color para la malla 14. La figura 4.4a corresponde a los segmentos horizontales, mientras que la figura 4.4b a los verticales. La escala de color está limitada entre los valores de $-0,7$ y $0,7$ para apreciar mejor la distribución en las partes centrales de la superficie, a pesar de que algunos segmentos ubicados sobre los bordes tienen intensidades que superan estos límites.

4.1.2. Refinado local

Conocido el comportamiento del método a medida que se refina globalmente la red, se estudia a continuación el efecto de un refinado local sobre la misma. Para ello se definió la que llamamos Malla 21, donde se tomó como base la Malla 13, y se reemplazaron las dos columnas de elementos más próximas a la puntera derecha por elementos cuatro veces más pequeños, tamaño correspondiente a la Malla 14 (ver Anexo A).

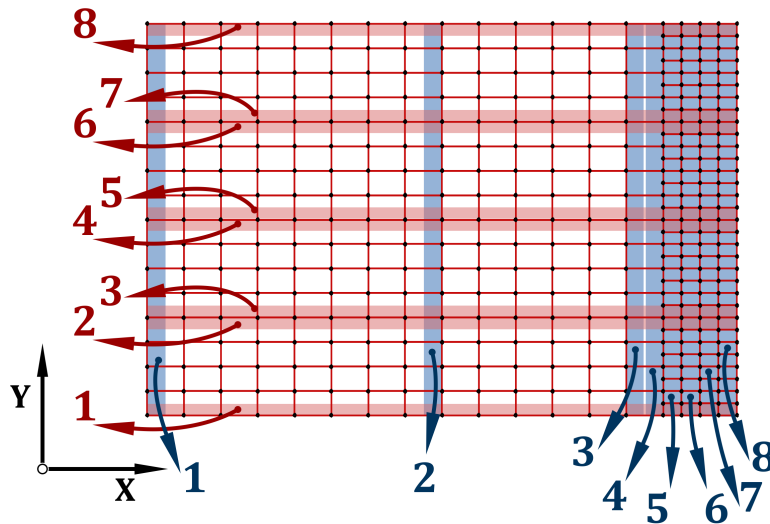
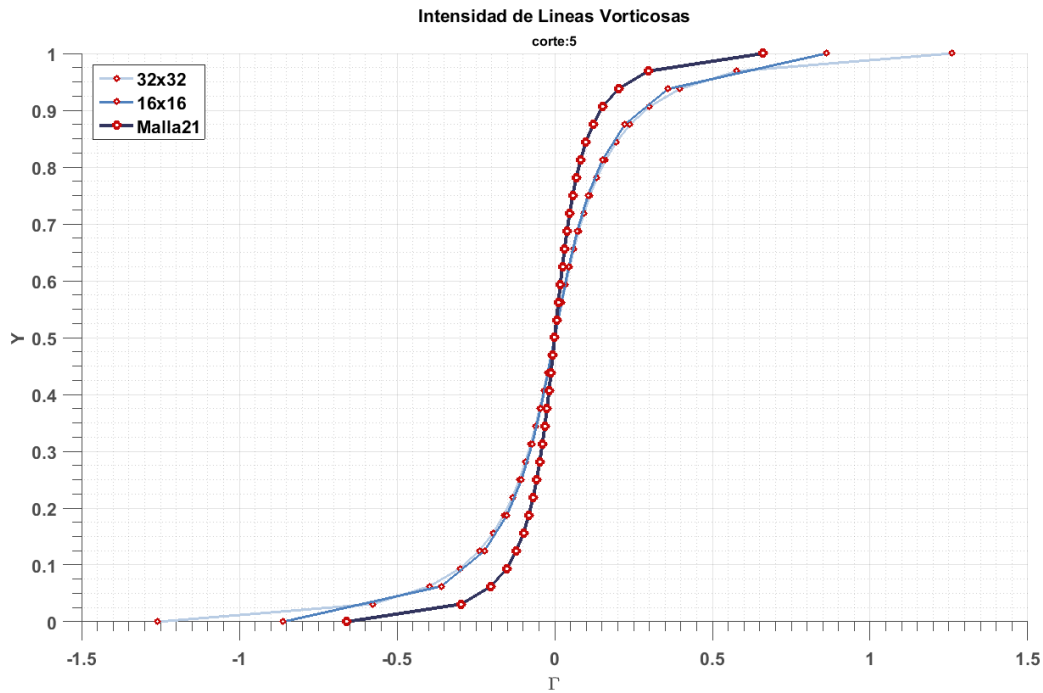


Figura 4.5: Diagrama de Malla 21 y de los cortes que se utilizarán.

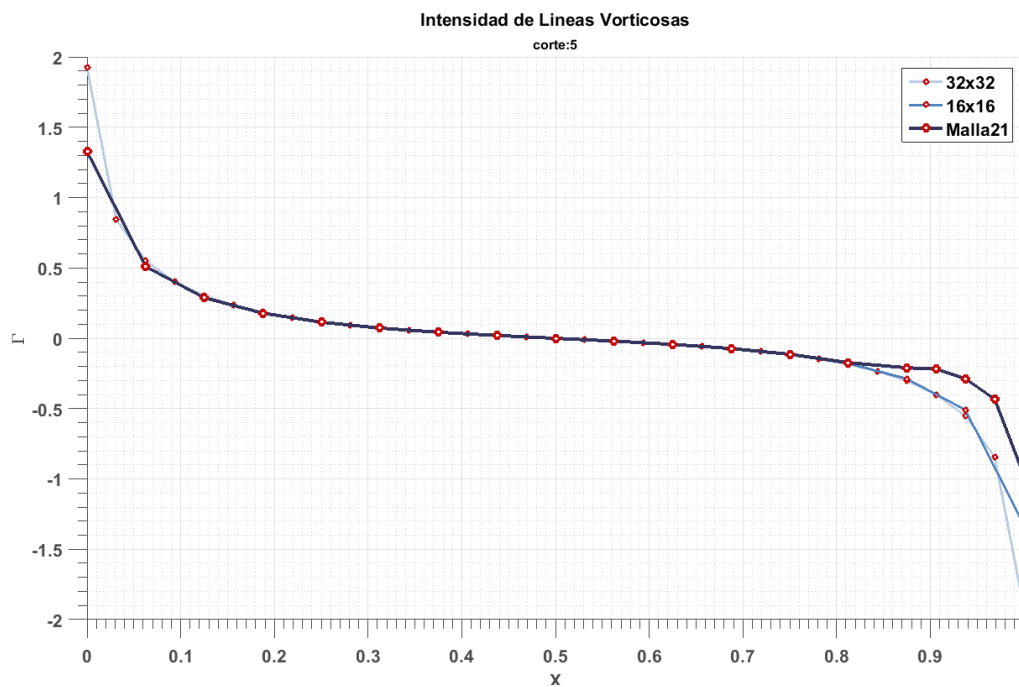
Como se muestran en la figura 4.5, se realizaron nuevamente diferentes “cortes” para segmentos horizontales y verticales a fin de visualizar los resultados que se obtenían con esta malla. Sin embargo, cuando se realizaron los gráficos de intensidad de los segmentos vorticosos, encontramos que los resultados eran muy diferentes a los que se esperaban en un primer momento. Los segmentos vorticosos de la parte de la red más refinada tenían valores de intensidad bastante inferiores a los que se obtenían con las mallas compuesta únicamente por elementos uniformes en toda su extensión como se puede ver, para el caso de los cortes 5 horizontal y vertical, en la figura 4.6. Los gráficos correspondientes a los distintos cortes pueden verse en el Anexo C.

La razón de estos resultados, en un principio confusos, es debida a la forma en que se define la adimensionalización de todas las propiedades físicas con las que se trabaja dentro del algoritmo. Como se explica en la sección 2.4.1, la adimensionalización está hecha sobre una serie de variables características definidas en función de la malla y del tamaño de sus elementos.

Al hacer un refinado local, se tuvo que elegir una referencia para la adimensionalización, y se decidió seguir utilizando las variables características definidas en función de la malla original.



(a) Intensidades segmentos vorticosos horizontales Malla 21 - corte 5.



(b) Intensidades segmentos vorticosos verticales Malla 21 - corte 5.

Figura 4.6: Intensidades de las lineas vorticosas horizontales.

De esta forma, los valores de intensidad del sector refinado siguen siendo adimensionalizados respecto de un elemento más grande que al que se corresponden. Por lo tanto, en estos elementos las intensidades de sus segmentos vorticosos representan un área más pequeña de la lámina que los elementos originales, y por ello su valor adimensional resulta más pequeño.

Nos preguntamos entonces cómo comparar los valores de las intensidades de los segmentos pertenecientes a elementos de diferente tamaño en una misma malla. Para ello hay que comprender qué representa la intensidad de cada segmento. En el modelo que utilizamos, la red de vórtices es una representación discreta de una lámina vorticosa continua, y la circulación que define la intensidad de cada segmento vorticoso representa la circulación correspondiente a un pequeño sector de la lámina. Podemos decir que en cada segmento se concentra la vorticidad que está distribuida sobre un área de la lámina vorticosa, y por ello su intensidad depende tanto del área que este segmento está representando, como, obviamente, del valor de la vorticidad sobre la lámina que se esta discretizando.

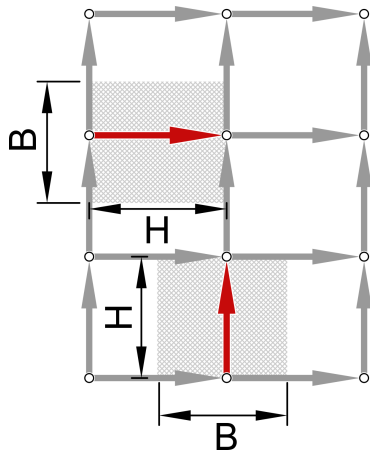


Figura 4.7: Representación de las longitudes tomadas como referencias.

el caso de elementos rectangulares.

Definida esta nueva propiedad se realizaron los gráficos, de manera similar a los antes mostrados, pero representando las densidades de vorticidad, γ , en lugar de las intensidades, Γ . En estos gráficos también se muestran como referencia las densidades de las Mallas 13 y 14; mallas que tienen igual tamaño de los elementos en la parte no refinada y en la refinada respectivamente. Todos estos gráficos pueden encontrarse en el Anexo C. En esta sección solo se muestran, en las figuras 4.8 y 4.9, algunos de estos gráficos sobre los cuales haremos algunos comentarios.

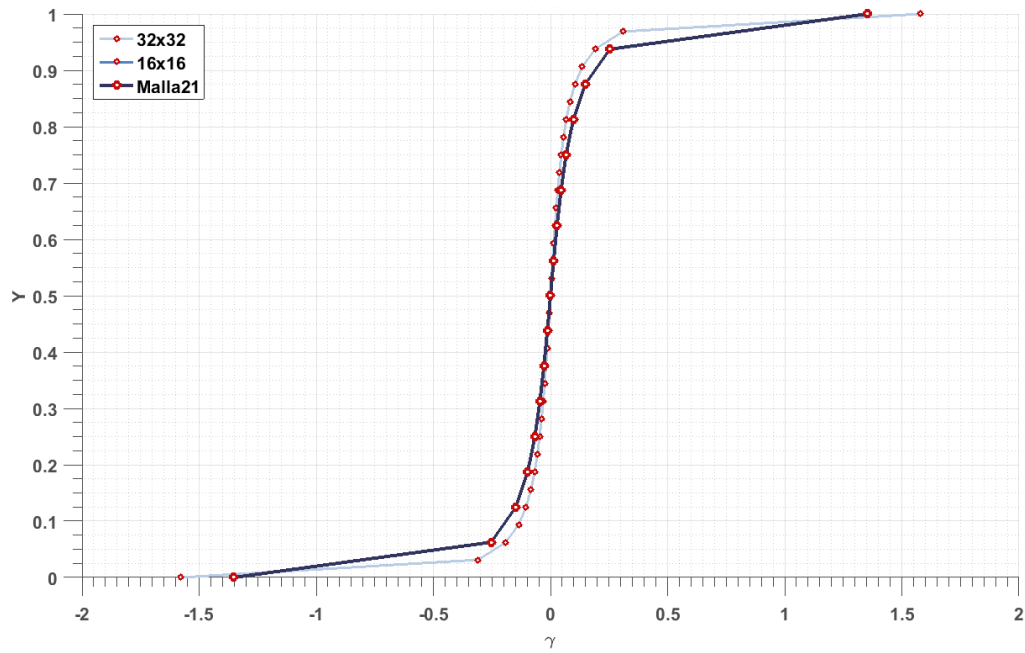
Las figuras 4.8 muestran las densidades de vorticidad de los segmentos horizontales. La 4.8a corresponde al corte 1, donde la Malla 21 está compuesta por los elementos de la malla base, de mayor tamaño. Se puede ver en ella que la curva se superpone exactamente sobre su contraparte de la Malla 13 (16 x 16). La 4.8b muestra las densidades en el corte 8, donde la malla ha sido refinada, y se puede ver que la curva ahora se superpone con la de la Malla 14 (32 x 32). Vemos así que la correspondencia de resultados entre las mallas refinadas localmente con las refinadas globalmente es excelente.

En las figuras 4.9 se pueden encontrar los resultados para los segmentos verticales. En la 4.9b, correspondiente al corte 4, puede verse que la curva correspondiente a la Malla 21 otra vez se corresponden muy bien con las mallas de referencia. Esta se superpone de manera casi exacta sobre la curva correspondiente a la Malla 13 (16 x 16) en la parte izquierda del ala, y cuando comienza la parte refinada, la curva de densidad pasa a copiar a aquella de la Malla 14 (32 x 32).

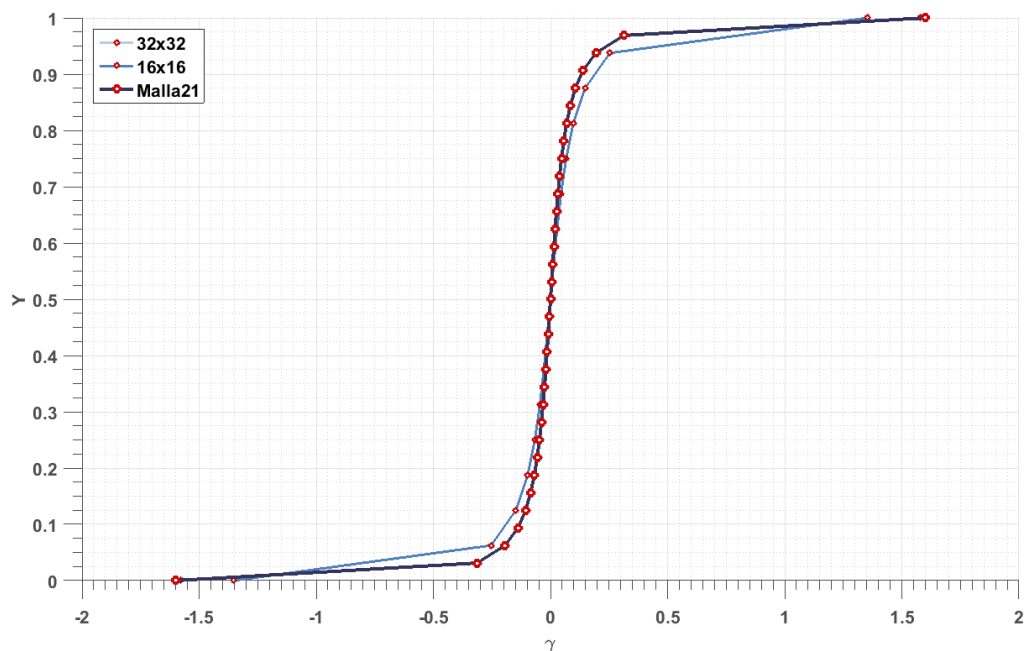
Con esto en mente se decidió definir una propiedad, que llamaremos “densidad de vorticidad”, γ , dividiendo la intensidad de un segmento vorticoso por una longitud, B .

$$\gamma = \frac{\Gamma}{B} \quad 4.1$$

Esta longitud se define a partir del sector de la lámina vorticosa que el segmento está reemplazando. Considerando que este sector tiene una forma geométrica que puede definirse como un paralelogramo, la longitud que utilizaremos representa la base de este, mientras que la longitud del segmento define su altura, H . En la figura 4.7 se esquematiza esto para



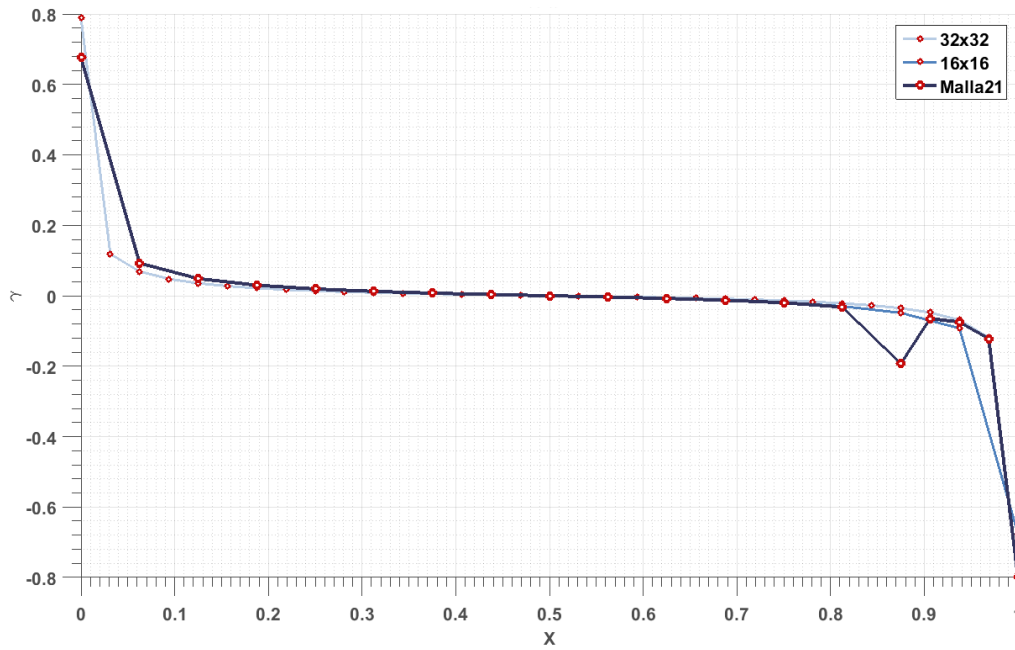
(a) Puntera izquierda (corte 1).



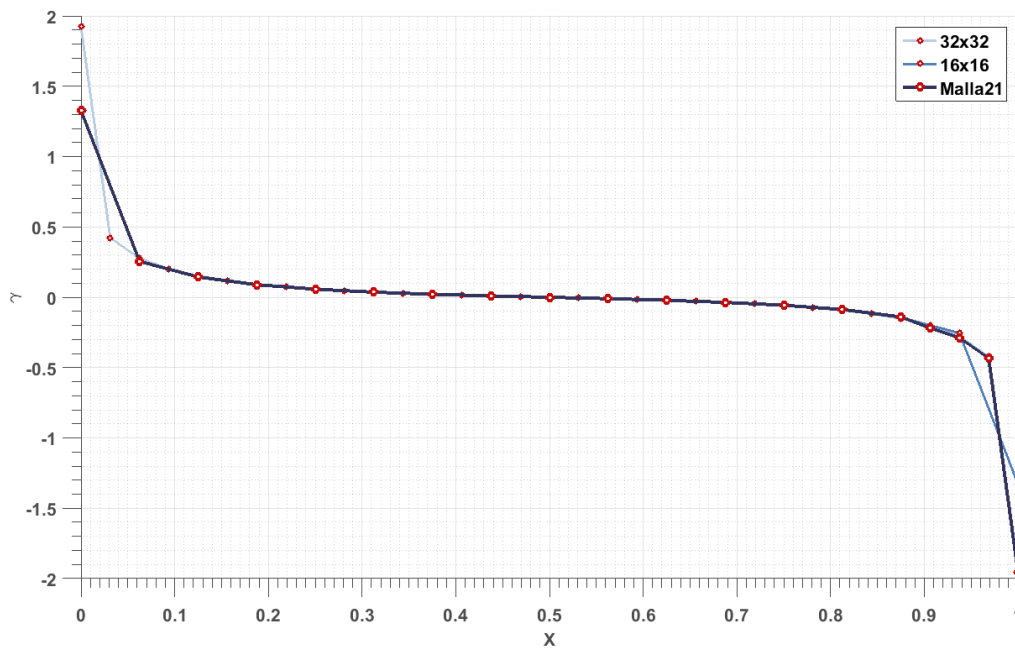
(b) Puntera derecha (corte 8).

Figura 4.8: Intensidades de las líneas vorticosas horizontales.

Sin embargo la figura 4.9a muestra una particularidad en la curva de las malla refinada localmente. En ella se puede encontrar que, a pesar de presentar un ajuste muy bueno en la mayor parte de los segmentos, hay un punto que resalta claramente por alejarse de la posición esperada. Este punto corresponde el segmento vorticoso que se encuentra en la separación entre las partes de la red que está refinada y aquella que no lo está. Este segmento está compartido por un elemento grande, no refinado, y un elemento mas pequeño que sí lo está. La transición de



(a) Borde de fuga (corte 1).

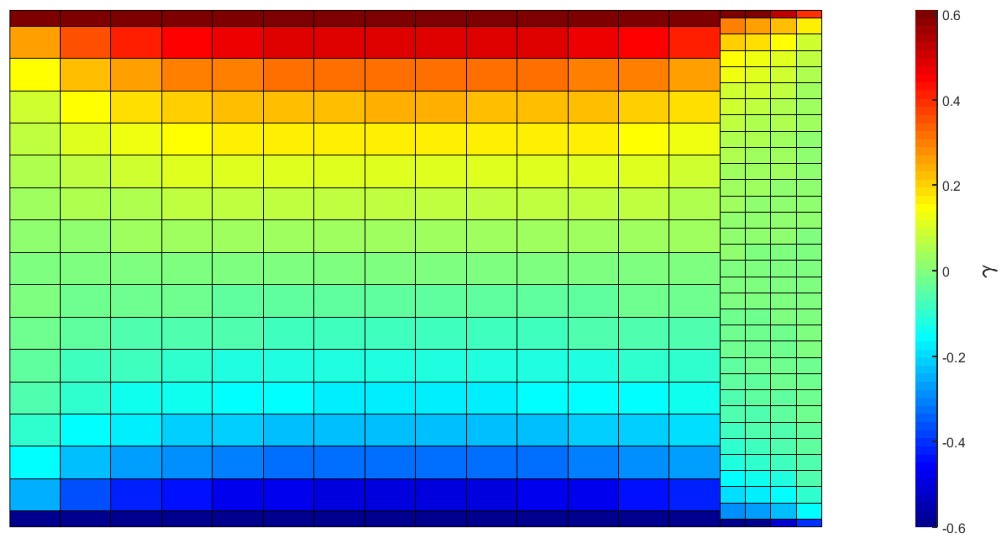


(b) Centro del ala (corte 4).

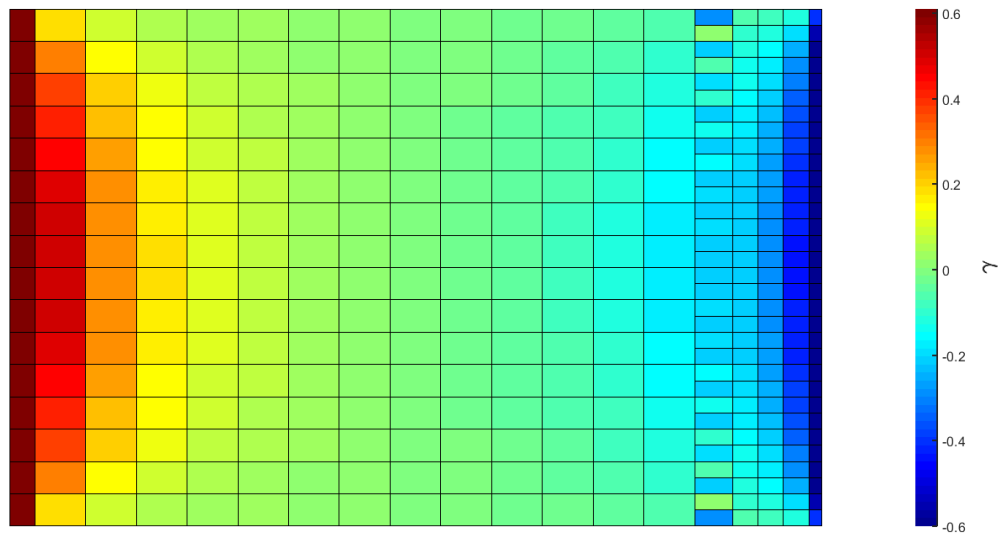
Figura 4.9: Intensidades de las líneas vorticosas verticales.

estos dos elementos provoca una alteración local en los valores de intensidad de los segmentos que se encuentran en la frontera entre estos mallados.

Esta alteración es particularmente notoria a medida que nos acercamos a los bordes de la superficie sustentadora, tanto sea al borde de ataque, como, para el caso de $t = 0$, al borde de fuga, donde la gran variación de vorticidad en la lámina produce mayores diferencias a medida



(a) Segmentos vorticosos horizontales.

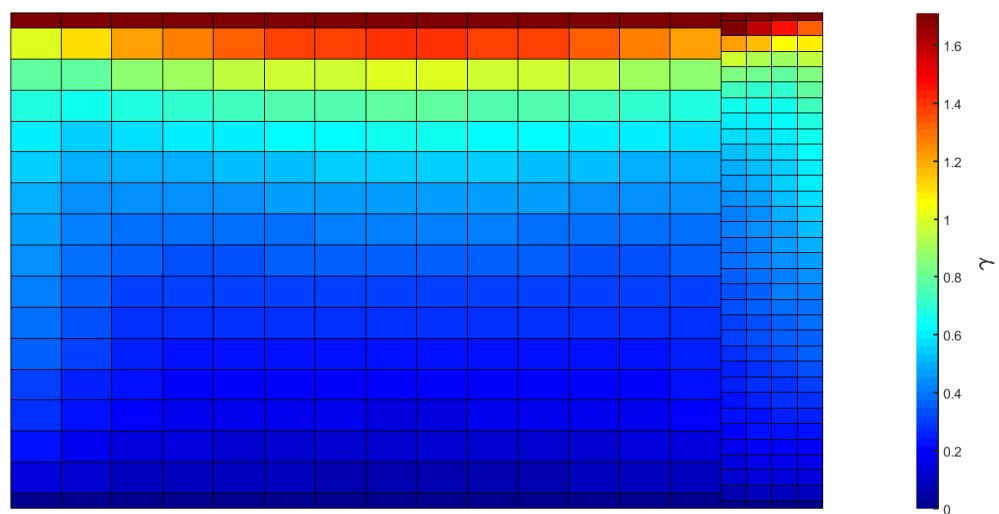


(b) Segmentos vorticosos verticales.

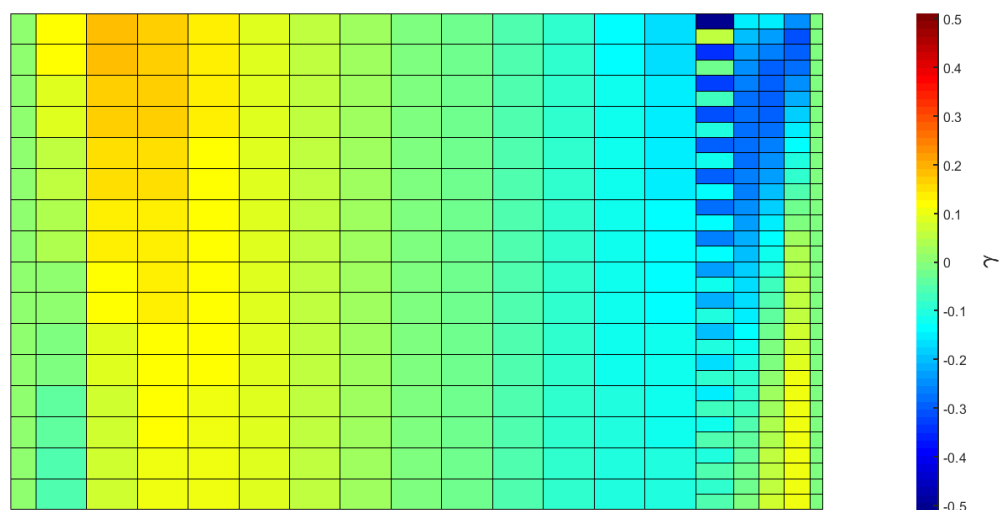
Figura 4.10: Distribución de intensidades de los segmentos vorticosos en el instante inicial.

que se refinan los mallados.

A estas mismas conclusiones pueden arribarse de una forma global en las figuras 4.10. En la 4.10a se puede ver que el mapa de colores para las líneas vorticosas horizontales muestra una distribución de las densidades de vorticidad que se adapta suavemente en la parte refinada de la malla, mientras que en la 4.10b se ve una alteración en los valores correspondientes a los vórtices que se ubican en el límite entre los dos refinamientos. Las figuras 4.10 muestran esto mismo una vez alcanzado el estado de régimen estacionario.



(a) Segmentos vorticosos horizontales.



(b) Segmentos vorticosos verticales.

Figura 4.11: Distribución de intensidades de los segmentos vorticosos en régimen.

4.2. Convección

En lo que a la convección respecta, a continuación se presentan los resultados obtenidos con cada uno de los métodos que se han propuesto.

4.2.1. Método 1

Los resultados obtenidos de la convección con este método no han sido en absoluto satisfactorios. La estela obtenida muestra quiebres abruptos y con una forma totalmente alejadas de

las estelas reales.

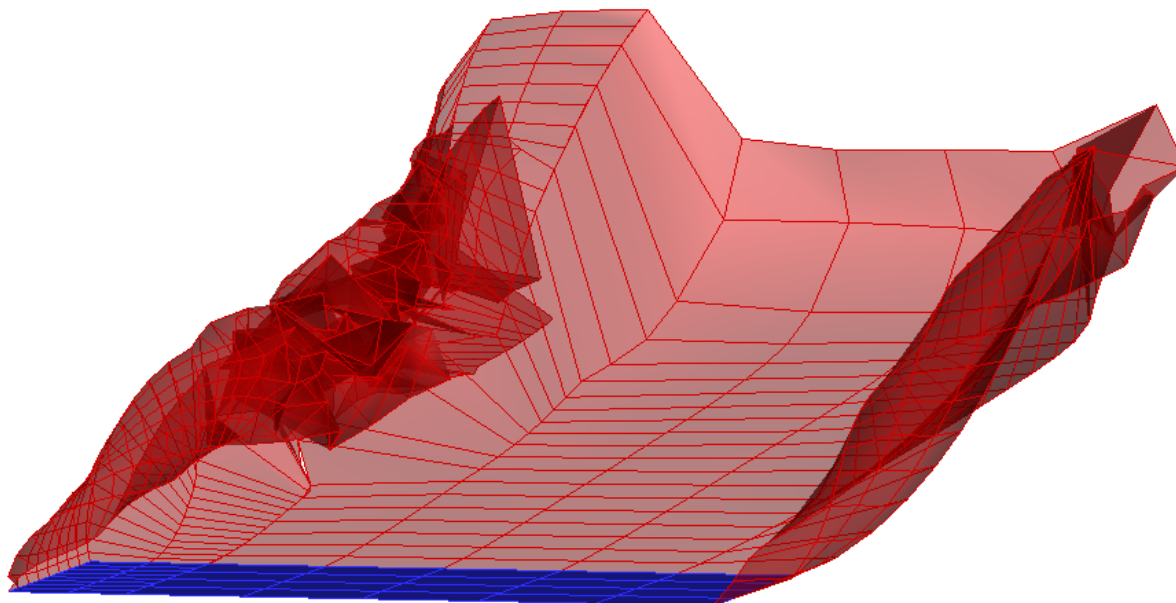


Figura 4.12: Estela convectada con el Método 1.

Las razones que explican estos resultados están en el hecho de calcular las posiciones de las filas adicionales de nodos que definen los elementos pequeños a partir de nodos cuyas posiciones han sido actualizadas, pero considerando aún la estela sin actualizar para el cálculo de la velocidad local.

Uno de estos problemas se da para pasos distintos del primero, donde existe una estela ya convectada. La estela, está formada por una serie de nodos a los cuales en cada paso se le van a agregar nuevas filas. La posición de esos nodos que se encuentran presentes en la estela son también actualizadas. Sin embargo, la variación de las posiciones entre un paso y otro son normalmente muy pequeñas. Esto genera que los nodos cuyas posiciones son actualizadas se ubiquen muy cerca de los segmentos vorticosos que forman la estela del paso anterior, la cual será utilizada para calcular la velocidad inducida en estas posiciones (ver figura 4.13).

Como cada segmento es una representación teórica, donde se concentra vorticidad, en sus cercanías se inducen velocidades que no se corresponden con los fenómenos reales, proveniente especialmente de la hipótesis de un flujo no viscoso. De esta forma, cuando se calcula la velocidad sobre un nodo en la posición actualizada, que luego se usa para determinar la posición del nodo contiguo de la próxima fila se encuentran valores realmente enormes. De esta manera los nodos toman posiciones inverosímiles, como por ejemplo atravesando la superficie del cuerpo, donde las condiciones de no penetración se deben cumplir. La figura 4.14a muestra un ejemplo de los resultados que se obtienen y como la estela atraviesa la red adherida que representa la superficie sustentadora.

Si bien, como se explicó en el Capítulo 1, las velocidades inducidas por los segmentos vor-

ticosos en el modelo son calculados por la Ley de Biot-Savart con un núcleo suavizado por el radio de *cut-off*, cuyo objetivo es evitar que en la solución se presenten singularidades, esto no es suficiente para eliminar el problema. La necesidad de considerar nodos que se ubican en estas posiciones tan críticas exige valores demasiados altos de *cut-off*, cuyo impacto se ve reflejado directamente en el aporte que estos segmentos puedan proveer.

A medida que la simulación se acerca a un régimen estacionario la variación de vorticidad en la estela es despreciable, y las posiciones de los nodos se mantiene prácticamente invariable. Esto hace que este problema desaparezca ya que las posiciones de los nodos actualizados se confunden con aquellos que pertenecen a la estela que no lo está.

Un segundo problema que trae aparejado este método de convección esta dado en el primer paso de tiempo. Como se vio en la sección anterior los segmentos vorticosos que se ubican sobre los bordes de la red que representan la superficie sustentadora toman valores muy grandes en el instante inicial. Estos valores, en los segmentos de la puntera y del borde de fuga, decrecen abruptamente en el paso siguiente cuando se comienza a considerar la estela, cuyos anillos vorticosos aportaran su intensidad a los segmentos ahí ubicados, hasta llegar a valores nulos cuando se alcance el régimen estacionario.

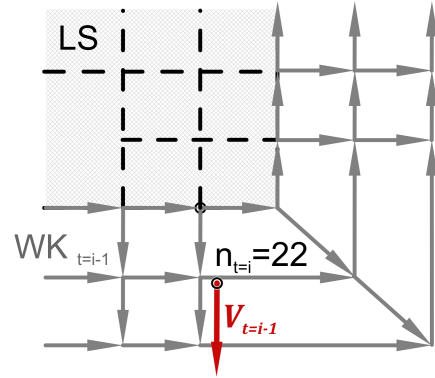
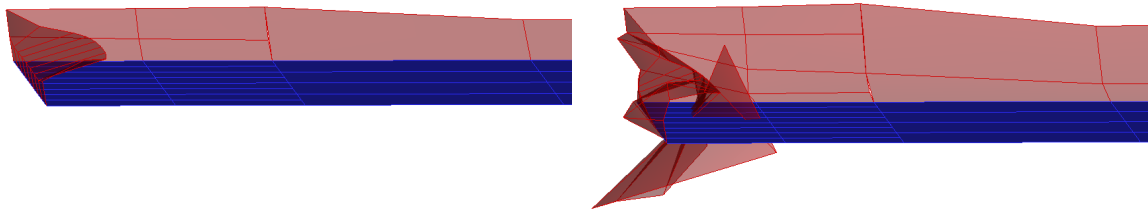


Figura 4.13: Nodo en la posición actualizada en referencia a la estela del paso anterior.



(a) Estela en el primer paso. (b) Estela convectada en el segundo paso.

Figura 4.14: Estela convectada con el Método 1.

Ahora bien, estos segmentos ubicados en las punteras y bordes de fuga, no aportan nada en el cálculo de la velocidad para convectar la primer fila de elementos. Los nodos que definen estos elementos son convectados partiendo de la posición de la primer fila de nodos, los cuales se corresponden con los de la superficie sustentadora que definen a dichos segmentos. De esta forma, de acuerdo a la Ley de Biot-Savart suavizada, estos segmentos no provocan ningún aporte a la velocidad inducida sobre ellos. De esta forma estas grandes intensidades no modifican en nada la convección en el método clásico

En cambio, en un refinado local, cuando se calcula la velocidad en las filas adicionales a partir de los nodos con posiciones actualizada que no se encuentran sobre la primer fila, estos segmentos si tienen un aporte al calculo de la velocidad. Este aporte es mas que considerable

debido a sus grandes intensidades, induciendo velocidades muy elevadas, que deforma la estela desde el primer paso. En la figura 4.14b se muestra como los nodos convectados en la segunda fila a partir de la puntera alar han sido arrastrados por sobre la superficie sustentadora como consecuencia de la velocidad inducida por los vórtices que se encuentran en ese borde.

4.2.2. Método 2

El algoritmo de convección que llamamos Método 2 soluciona los problemas encontrados en el Método 1, pero sin embargo, como se ve en la figura 4.16 los resultados no son mucho más prometedores que los anteriores. La razón de esto se debe a la forma en que convectamos la vorticidad a las estelas intermedias.

Cuando se hace esta convección, a los elementos de la estela se les asigna un valor de intensidad a sus anillos vorticosos iguales que los correspondientes a los elementos contiguos de la superficie sustentadora. Ahora bien, cuando se calculan las intensidades de los segmentos vorticosos considerando esta estela intermedia en estas condiciones, volvemos a tener un problema con los segmentos que se encuentran en los bordes de la red adherida.

Los segmentos que se encuentran en las punteras y en el borde de fuga de la superficie sustentadora, reciben el aporte de los anillos vorticosos tanto de la superficie sustentadora como de la estela. Como a estos últimos se le asignó el mismo valor que tienen los primeros, los segmentos vorticosos toman valores nulos, tal como se ve en la figura 4.15 .

Esto hace que la estela final calculada a partir de estas estelas intermedias tome formas donde se ven quiebres entre las filas de elementos pequeños, producidos por la información que se pierde al generar estos segmentos con valores nulos. Esto empeora a medida que la estela evoluciona ya que estos segmentos de intensidad nula son arrastrados a medida que esta es convectada corriente abajo.

4.2.3. Método 3

De todos los esquemas de convección que hemos utilizado, el Método 3 es el que mejores resultados ha dado. Se puede ver en la figura 4.17 que en la estela así obtenida, el vórtice de puntera que esta modelado con elementos pequeños tiene una forma suave, y se puede ver una mayor resolución a comparación con el vórtice que esta modelado con elementos grandes.

Al mismo tiempo se puede ver que el vórtice de arranque presenta una pequeña deformación donde ambos tipos de elementos interactúan debido a la diferencia de resolución. Sin embargo

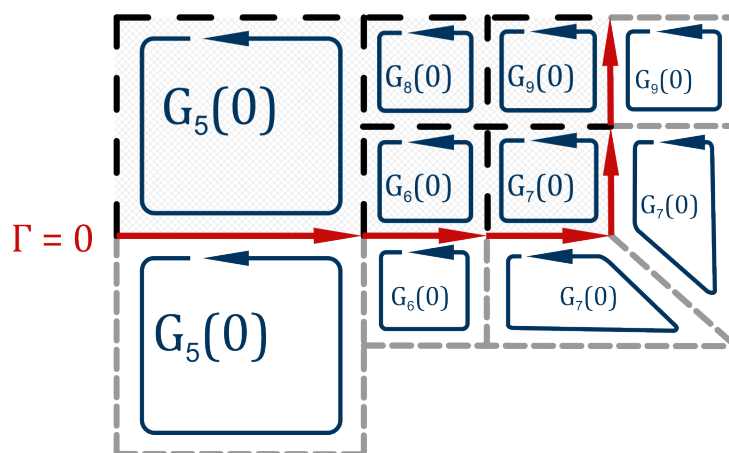


Figura 4.15: Intensidades de los segmentos vorticosos en los bordes de la superficie sustentadora en una estela intermedia generada con el Método 2 de convección.

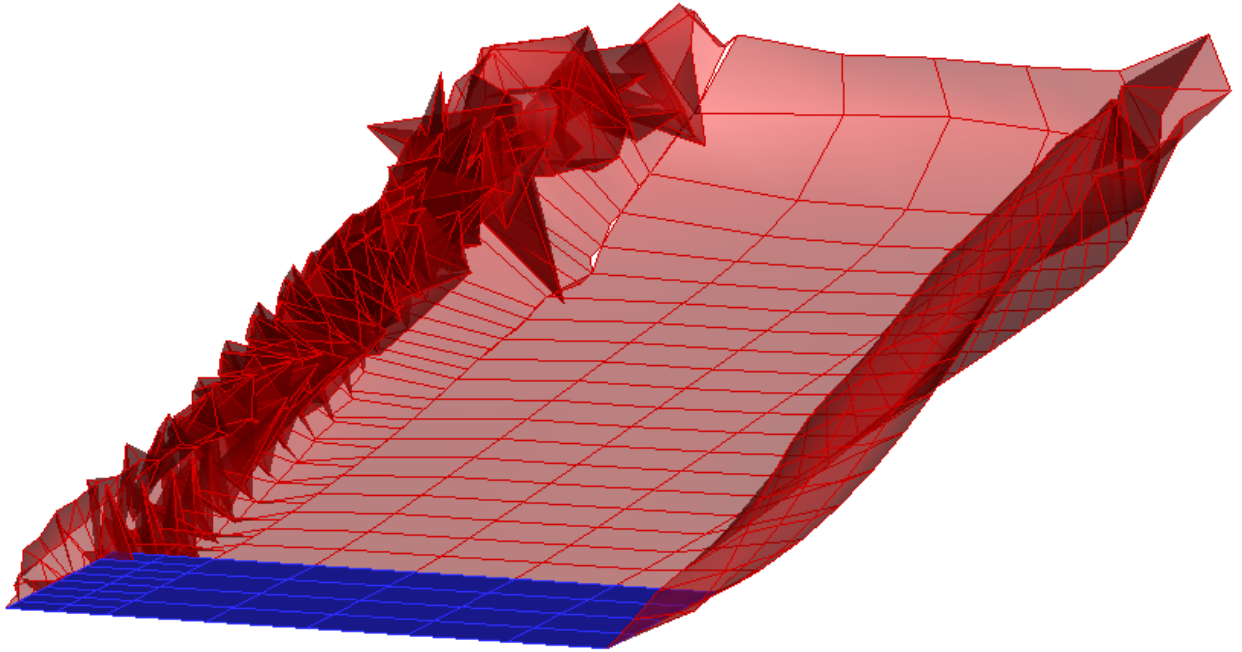


Figura 4.16: Estela covectada con el Método 2.

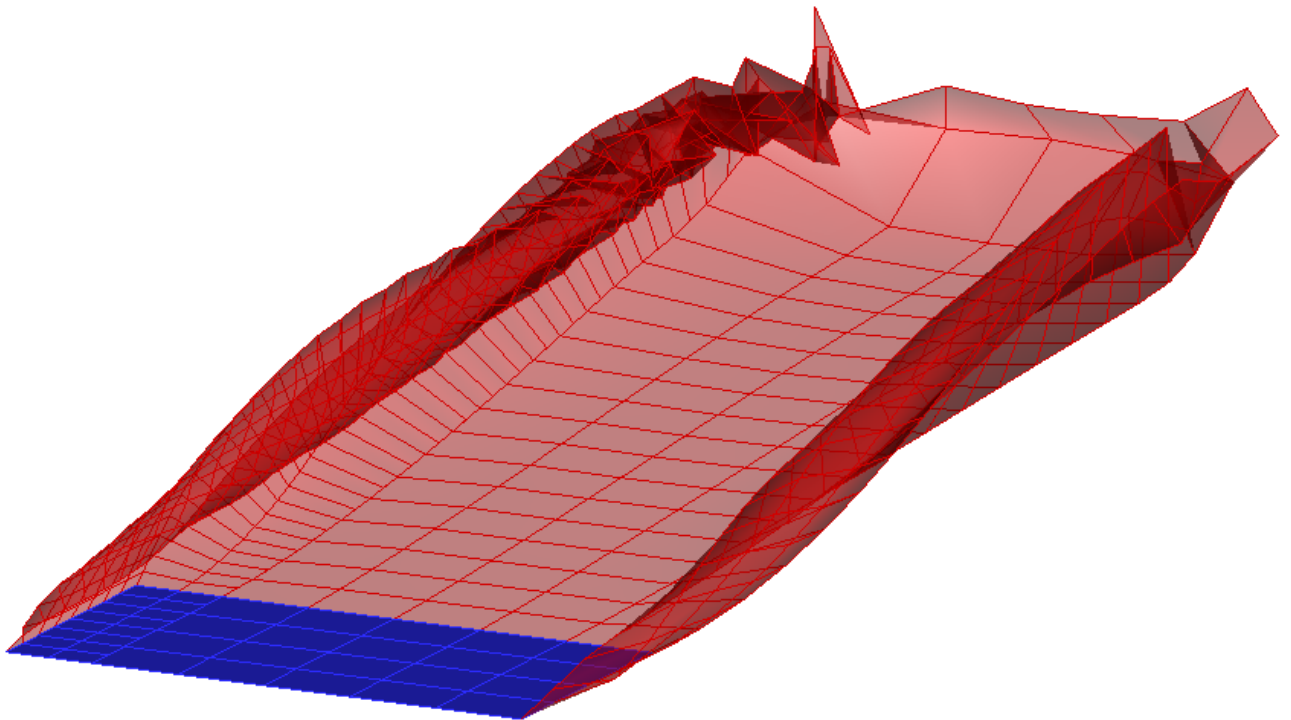


Figura 4.17: Estela covectada con el Método 3.

esta diferencia se va presentando a medida que el vórtice de arranque se va desarrollando, haciéndose notoria cuando ya no tiene grandes aportes en las perturbaciones inducidas sobre la superficie sustentadora.

4.3. Coeficiente de sustentación

Para validar los valores de cargas que se obtienen con el modelo se comparan los valores del coeficiente de sustentación obtenidos para el caso de la placa plana rectangular adoptado en esta sección utilizando tres modelos diferentes. Esto es: *i*) un modelo de referencia, *ii*) una malla totalmente refinada, y *iii*) una malla refinada localmente en una puntera. Para ello se utilizaron las Mallas 13, tomada como referencia; la Malla 14 que refina cada elemento en cuatro elementos más pequeños; y la Malla 21, que toma como base la Malla 13 pero con la puntera derecha refinada con elementos del tamaño de la Malla 14.

Por otro lado, para considerar que las cargas sobre el modelo corresponden a un régimen estacionario, y para que los modelos sean comparables unos con otros, se decidió evaluar dichas cargas en el paso de tiempo donde la estela tiene una longitud de 5 cuerdas alares. Esto así se hizo en base a la referencia [15] donde se muestra que la estela por detrás de esa longitud puede despreciarse. De esta manera vamos a comparar los C_L para el paso 80 en el caso de las Mallas 13 y 21 y para el paso 160 en la Malla 14. Las diferentes curvas obtenidas se presentan en la figura 4.18.

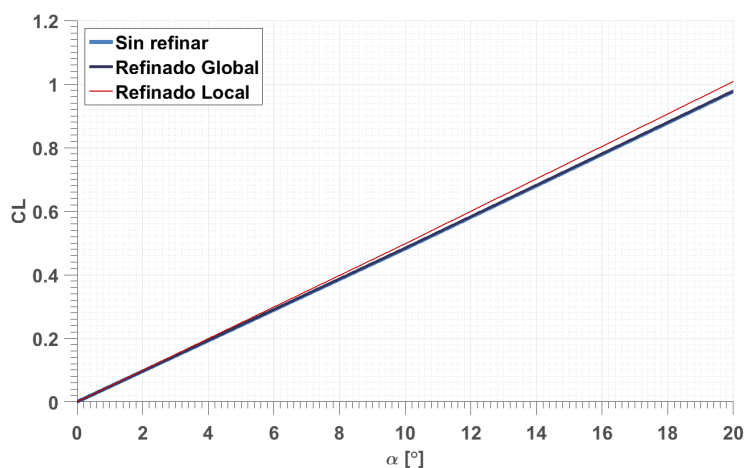


Figura 4.18: Curvas de sustentación obtenidas con diferentes redes.

Además, a modo de referencia se calculan las pendientes de sustentación predichas con cada modelo y se las compara con el valor teórico, proveniente de la teoría de superficie sustentadora de envergadura finita, dada por la siguiente expresión:

$$C_{L\alpha} = 2\pi \frac{AR}{AR + 2} \quad 4.2$$

donde AR representa el alargamiento de la superficie sustentadora. La tabla 4.2 muestra las estimaciones de $C_{L\alpha}$ que se obtienen con el modelo teórico y con las diferentes mallas.

Se puede ver que el valor obtenido con la red refinada localmente difiere solo ligeramente de

los valores obtenidos con las redes uniformemente discretizadas. Probablemente esto se deba a las pequeñas perturbaciones producidas por la interacción entre los dos refinados que, como se vio anteriormente, causan pequeñas variaciones en las intensidades de los segmentos vorticosos verticales que se encuentran en el límite de ambos.

Modelo	$C_{L\alpha}$	Error
Teórico	0,0548	–
Malla Referencia	0,0448	18 %
Refinado Global	0,0489	11 %
Refinado Local	0,0504	8 %

Tabla 4.2: Valores de $C_{L\alpha}$ obtenidos con los diferentes modelos y su error respecto al valor teórico.

4.4. Tiempos de procesamiento

Uno de los principales objetivos que motivaron la inclusión de un esquema de refinado local es el de reducir el tiempo de procesamiento. Por ello, a continuación, se presenta la Tabla 4.3 donde se muestran los tiempo de procesamiento para las mallas utilizadas en la sección anterior.

Se debe mencionar que para comparar los tiempos de procesamiento se evalúa en un paso tal que el tiempo dimensional sea el mismo para todos los refinamientos. Como se explicó en la sección 2.4.1 la adimensionalización del tiempo está relacionada con el tamaño de los elementos, por ello la cantidad de pasos de la malla de referencia y la malla refinada no son iguales. De esta manera, si se quiere que el modelo simule un fenómeno en el mismo instante, necesitamos duplicar la cantidad de pasos cuando dividimos por dos los segmentos vorticosos.

Modelo	Malla	Núm. de pasos	Núm. de elem.	Tiempo de proces.
Malla Referencia	Malla13	80	256	3 min 5 seg
Refinado Global	Malla14	160	1024	88 min 49 seg
Refinado Local	Malla21	80	352	19 min 31 seg

Tabla 4.3: Tiempos de procesamiento.

Los tiempos fueron tomados en simulaciones hechas en un ordenador personal con un procesador Intel Core i3 con dos núcleos de velocidad de 2,40Ghz.

Se puede ver claramente que podemos obtener una gran reducción en el tiempo de procesamiento con el uso del refinado local en comparación con un refinado global. Esto nos permite en el caso evaluado tener una gran resolución al observar el vórtice de puntera pero con una reducción de cinco veces en el tiempo de procesamiento.

5

Conclusiones y trabajos futuros

En este trabajo, desarrollado como proyecto integrador de la carrera de Ingeniería Aeronáutica de la Universidad Nacional de Córdoba, se presentó una extensión de la versión clásica del método de red de vórtices inestacionario y no-lineal (UVLM). Esta extensión, a partir de la inclusión de técnicas de refinamiento local y de métodos de convección de estelas, permite el uso de redes no uniformes; esto es, redes con anillos vorticosos de diferentes tamaños. El esquema de cálculo utilizado permite modelar fenómenos aerodinámicos no-lineales e inestacionarios produciendo, como resultados de las simulaciones, los coeficientes aerodinámicos de sustentación y resistencia en función del tiempo. También es posible predecir la posición y la distribución de vorticidad, como así también visualizar, las estelas producidas por el movimiento relativo entre sólido y el fluido circundante.

En el presente informe se han discutido tres puntos principales en el desarrollo del método. El primero de ellos consistió en encontrar una forma de comparar los valores de las intensidades de los diferentes segmentos vorticosos, de manera de poder validar los resultados obtenidos. Se introdujo el concepto de “densidad de vorticidad” con el objetivo de lidiar con las dificultades que surgen cuando se comparan valores de vorticidad de segmentos pertenecientes a diferentes refinamientos dentro de una misma red. Se mostró que, si bien los resultados del refinamiento local mostraron una muy buena correspondencia con un refinado global, algunas alteraciones locales se presentan en los segmentos ubicados en la frontera entre la zona de la red refinada y aquella sin refinar.

En lo que respecta al segundo punto tratado, hemos propuesto y comparado, con el fin de implementar computacionalmente las redes refinadas localmente, diferentes métodos de convección de estelas. La ausencia de trabajos previos en este sentido ha hecho que esta sea una de las partes que más esfuerzo ha demandado. En este informe se presentaron los métodos que a nuestro criterio resultan más representativos, de manera de mostrar las dificultades que se han encontrado en el desarrollo. Los resultados han mostrado que el denominado Método 3, donde se utilizan sub-pasos de tiempo para recalculan las intensidades de los anillos vorticosos en la superficie sustentadora y se crean mallas intermedias, ha sido el único que da resultados satisfactorios.

Por último, se presentó una técnica de cálculo que permite continuar utilizando las ecuaciones del método clásico para evaluar el coeficiente de presión sobre los elementos de transición. Además, se mostró que este puede predecir con adecuada precisión los valores de los coeficientes

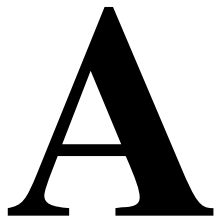
de sustentación cuando se compara con el método tradicional y con resultados provenientes de la teoría de superficies sustentadoras de envergadura finita. Sin embargo, se aclaró que se encontraron pequeñas diferencias en estos valores y se manifestó que las mismas pueden deberse a las alteraciones locales de las intensidades de los segmentos a lo largo de la frontera de unión entre la red refinada y la red sin refinar.

Uno de los objetivos en el desarrollo del trabajo era permitir llevar a cabo simulaciones numéricas donde se requiere aumentar la resolución en ciertas áreas del modelo, pero sin necesidad de incrementar excesivamente el esfuerzo de cálculo requerido por un refinado global; esto es, un refinamiento a fuerza bruta. Este objetivo fue satisfactoriamente alcanzado para el caso de superficies sustentadoras planas, rectangulares y con relaciones de aspecto arbitrarias. El tiempo de procesamiento correspondiente a la red refinada localmente, resultó ser cinco veces menor que el correspondiente (para la misma resolución en los coeficientes aerodinámicos) a la red refinada globalmente.

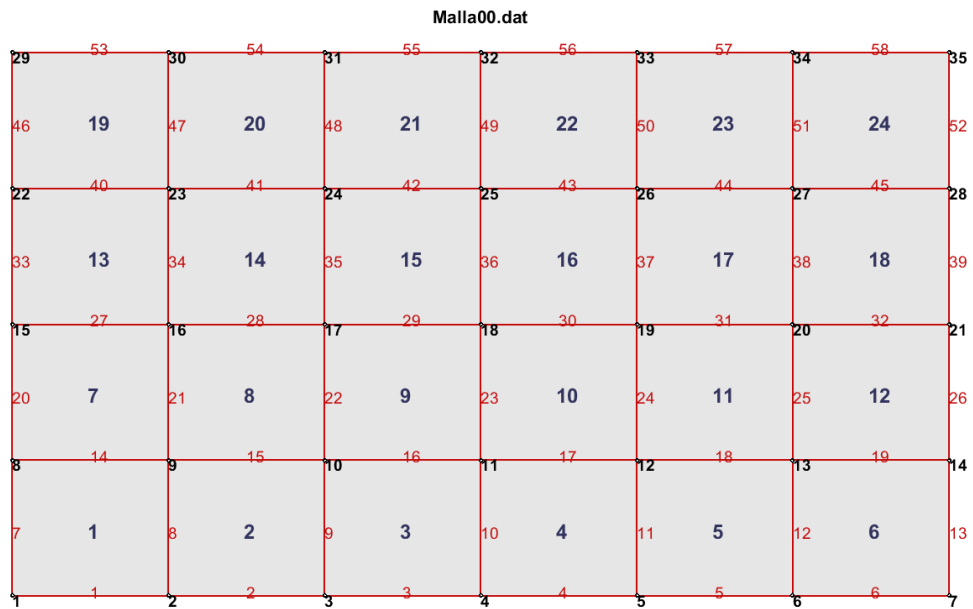
Si bien en este trabajo se presentó únicamente la aplicación del refinado local en superficies sustentadoras de geometrías simples, las técnicas desarrolladas pueden ser muy fácilmente aplicadas a casos con geometrías más complejas. En trabajos futuros se podrán utilizar como punto de partida las herramientas aquí presentadas para desarrollar técnicas que permitan llevar a cabo refinados locales heterogéneos en diferentes zonas de la red, de manera de optimizar al máximo el modelo numérico.

De la misma manera, la posibilidad de desarrollar técnicas de refinamientos locales, heterogéneos y progresivos sobre una red será un trabajo a desarrollar en el futuro. La implementación futura de este tipo de modelos permitirá ampliar grandemente la complejidad de los problemas a atacar, ya que se podrán desarrollar redes con elementos de diferentes tamaños, sin generar discontinuidades abruptas en la discretización. Una evolución de este mismo concepto sería la el desarrollo de redes de vórtices adaptativas.

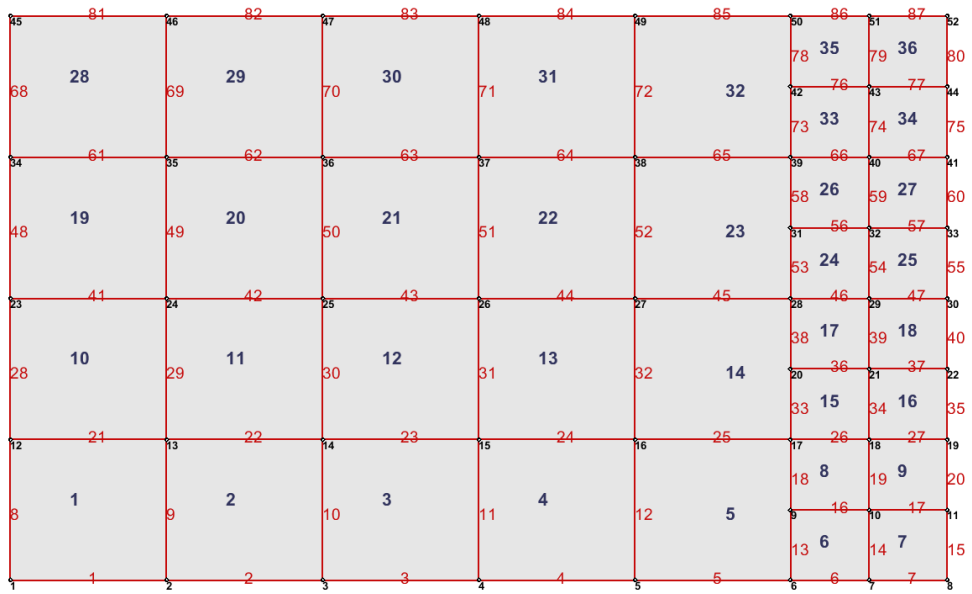
Este trabajo fue, en principio, motivado a partir de la idea de poder implementar el UVLM en el estudio del vuelo de aves, especialmente en aquellos casos donde se dan lugar fenómenos aerodinámicos a muy diferentes escalas temporales y espaciales. El impulso que se dio, durante el último tiempo, al desarrollo de aeronaves inspiradas en la naturaleza representa un amplio campo de aplicación para este tipo de métodos de orden reducido y motivara, sin lugar a dudas, desarrollos posteriores.



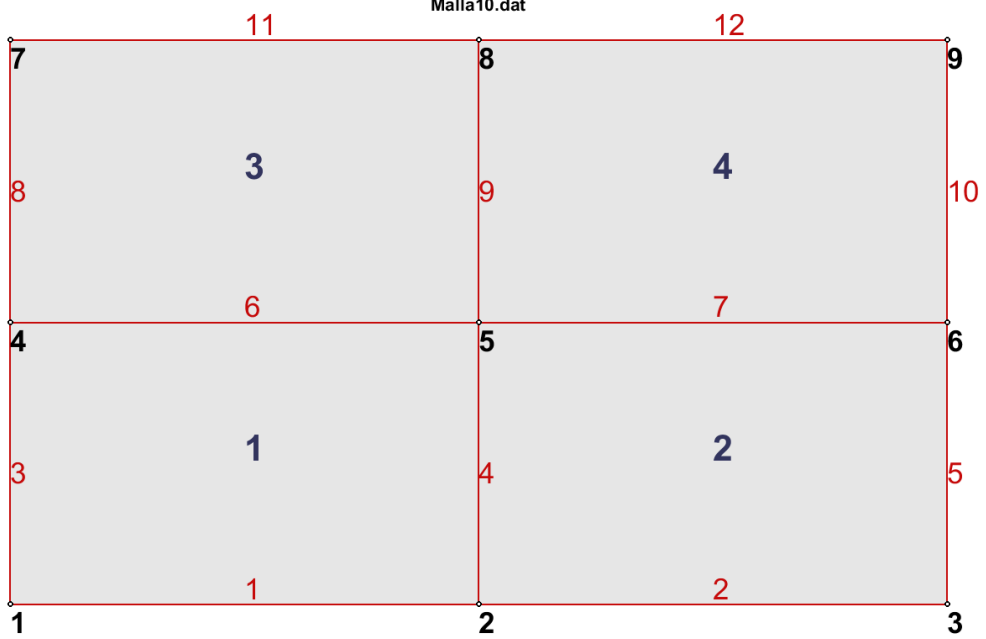
Mallas



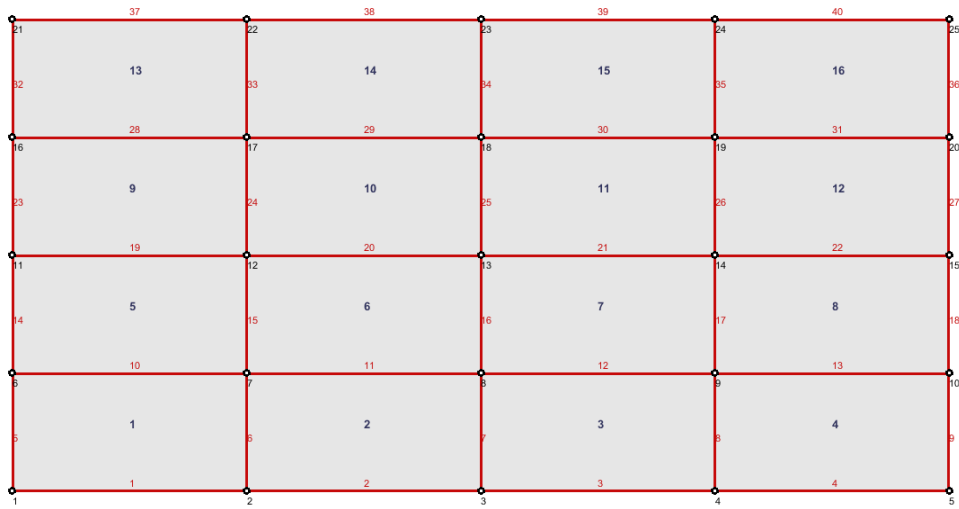
Malla01.dat



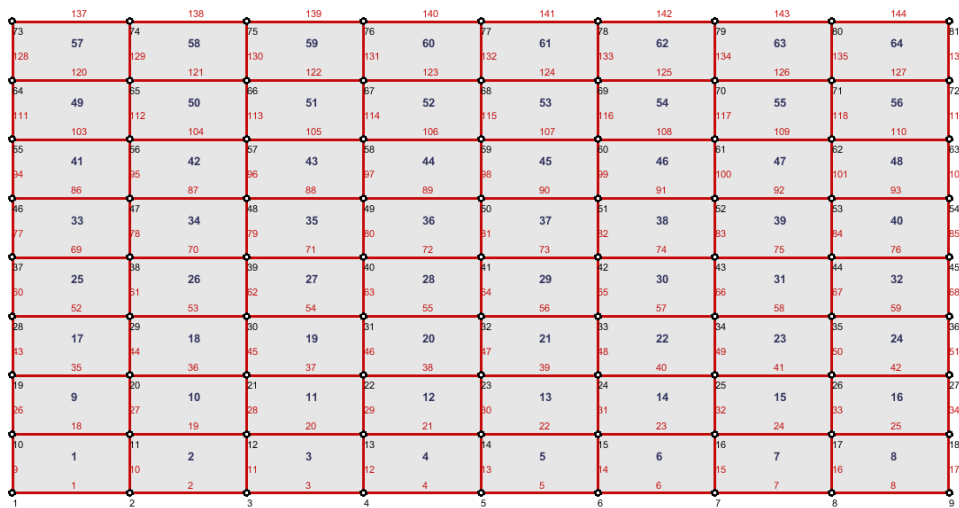
Malla10.dat



Malla11.dat



Malla12.dat



Malla13.dat

Malla14.dat

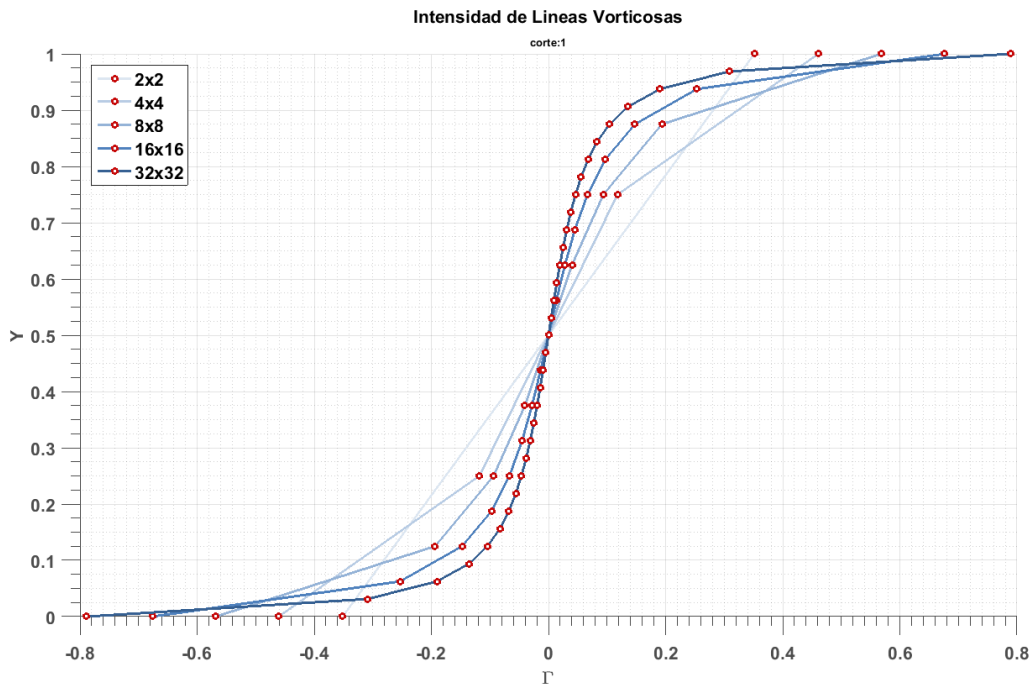
Malla21.dat

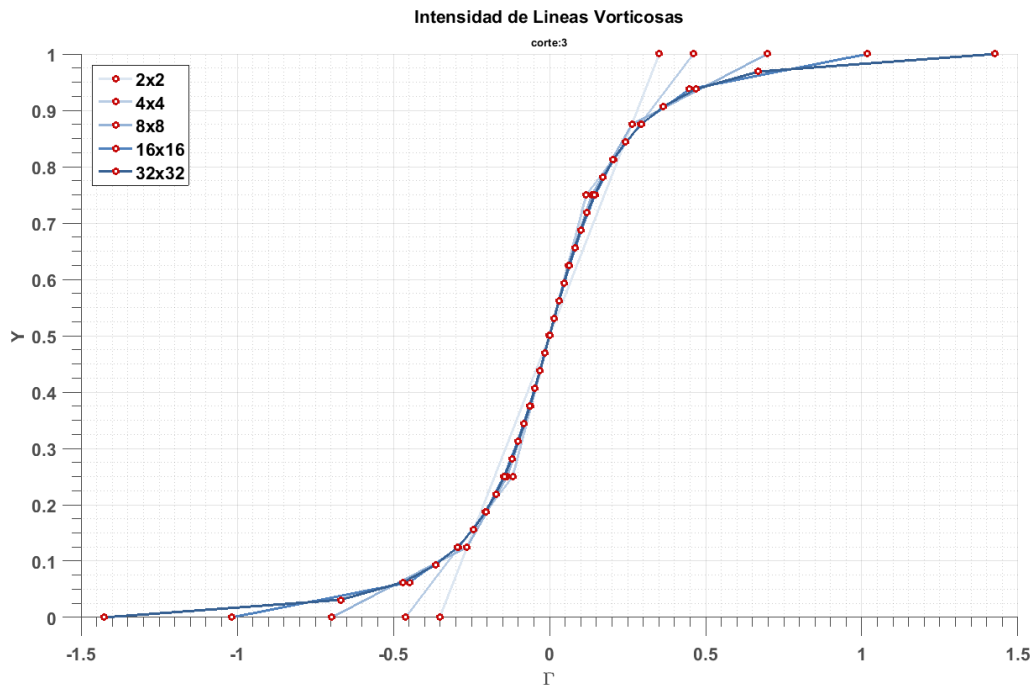
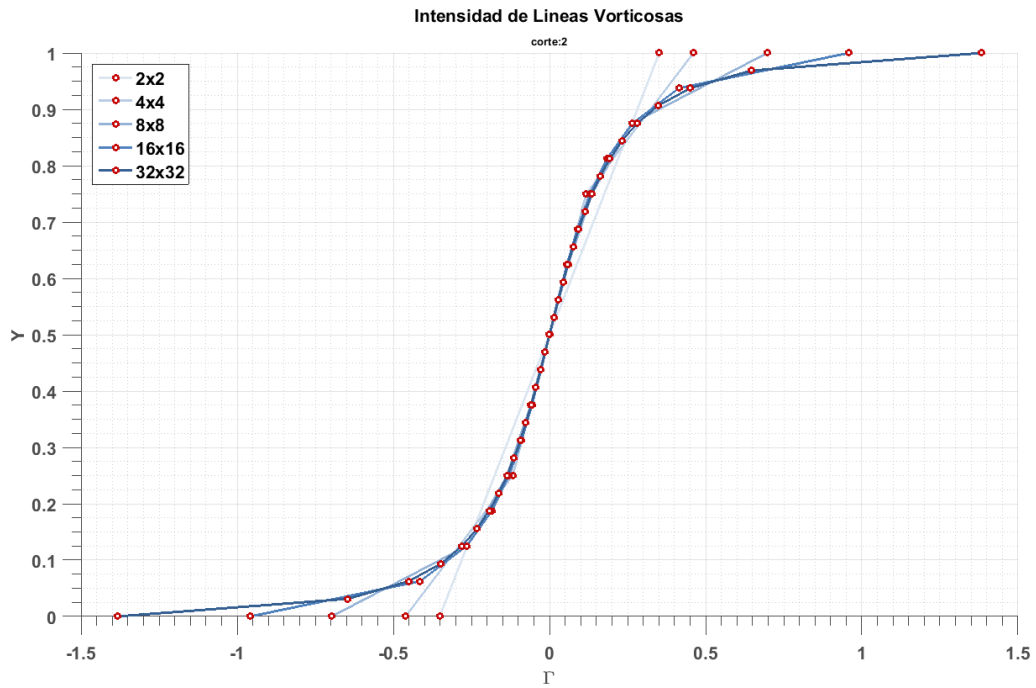
385	331	386	332	387	333	388	334	389	335	390	336	391	337	392	338	393	339	394	340	395	341	396	342	397	343	398	344	399	345	400	401	402	403		
361	309	362	310	363	311	364	312	365	313	366	314	367	315	368	316	369	317	370	318	371	319	372	320	373	321	374	322	375	323	376	324	377	325	378	326
337	287	338	288	339	289	340	290	341	291	342	292	343	293	344	294	345	295	346	296	347	297	348	298	349	299	350	300	351	301	352	302	353	303	354	304
313	265	314	266	315	267	316	268	317	269	318	270	319	271	320	272	321	273	322	274	323	275	324	276	325	277	326	278	327	279	328	280	329	281	330	282
289	243	290	244	291	245	292	246	293	247	294	248	295	249	296	250	297	251	298	252	299	253	300	254	301	255	302	256	303	257	304	258	305	259	306	260
265	221	266	222	267	223	268	224	269	225	270	226	271	227	272	228	273	229	274	230	275	231	276	232	277	233	278	234	279	235	280	236	281	237	282	238
241	199	242	200	243	201	244	202	245	203	246	204	247	205	248	206	249	207	250	208	251	209	252	210	253	211	254	212	255	213	256	214	257	215	258	216
217	177	218	178	219	179	220	180	221	181	222	182	223	183	224	184	225	185	226	186	227	187	228	188	229	189	230	190	231	191	232	192	233	193	234	194
193	155	194	156	195	157	196	158	197	159	198	160	199	161	200	162	201	163	202	164	203	165	204	166	205	167	206	168	207	169	208	170	209	171	210	172
169	133	170	134	171	135	172	136	173	137	174	138	175	139	176	140	177	141	178	142	179	143	180	144	181	145	182	146	183	147	184	148	185	149	186	150
145	111	146	112	147	113	148	114	149	115	150	116	151	117	152	118	153	119	154	120	155	121	156	122	157	123	158	124	159	125	160	126	161	127	162	128
121	89	122	90	123	91	124	92	125	93	126	94	127	95	128	96	129	97	130	98	131	99	132	100	133	101	134	102	135	103	136	104	137	105	138	106
97	67	98	68	99	69	100	70	101	71	102	72	103	73	104	74	105	75	106	76	107	77	108	78	109	79	110	80	111	81	112	82	113	83	114	84
73	45	74	46	75	47	76	48	77	49	78	50	79	51	80	52	81	53	82	54	83	55	84	56	85	57	86	58	87	59	88	60	89	61	90	62
49	23	50	24	51	25	52	26	53	27	54	28	55	29	56	30	57	31	58	32	59	33	60	34	61	35	62	36	63	37	64	38	65	39	66	40
25	1	26	2	27	3	28	4	29	5	30	6	31	7	32	8	33	9	34	10	35	11	36	12	37	13	38	14	39	15	40	16	41	17	42	
1		2		3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13		14		15		16		17		18	

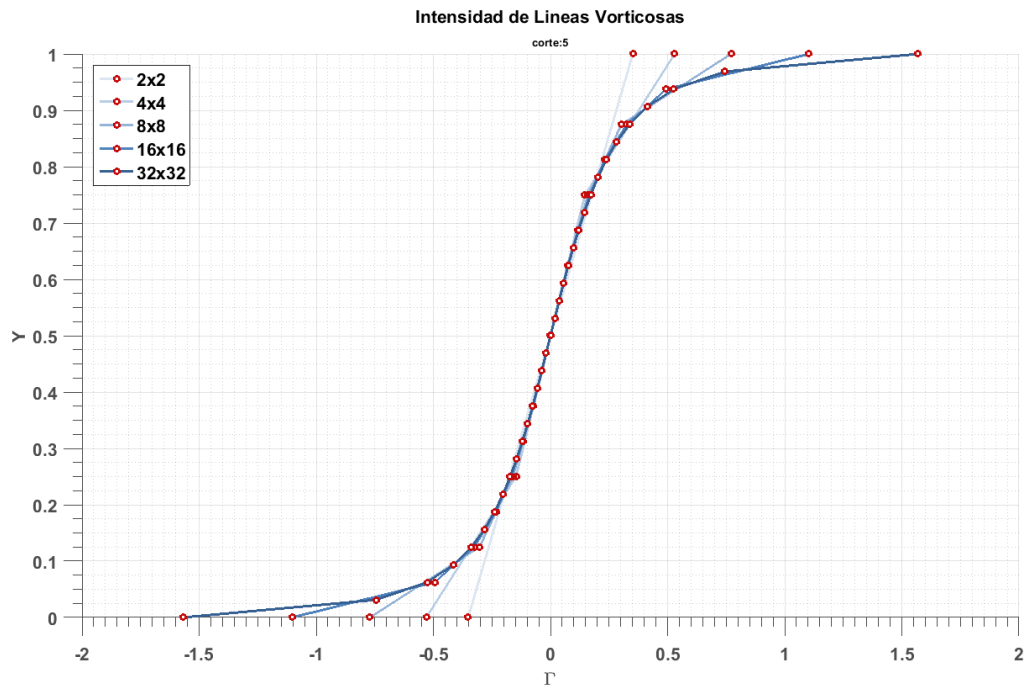
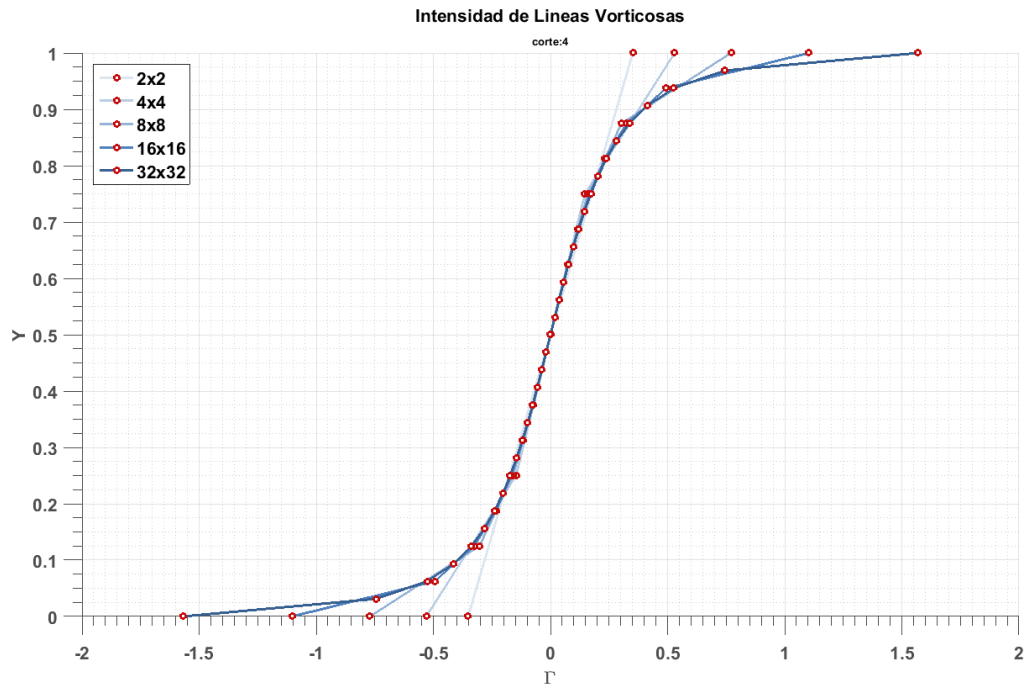
B

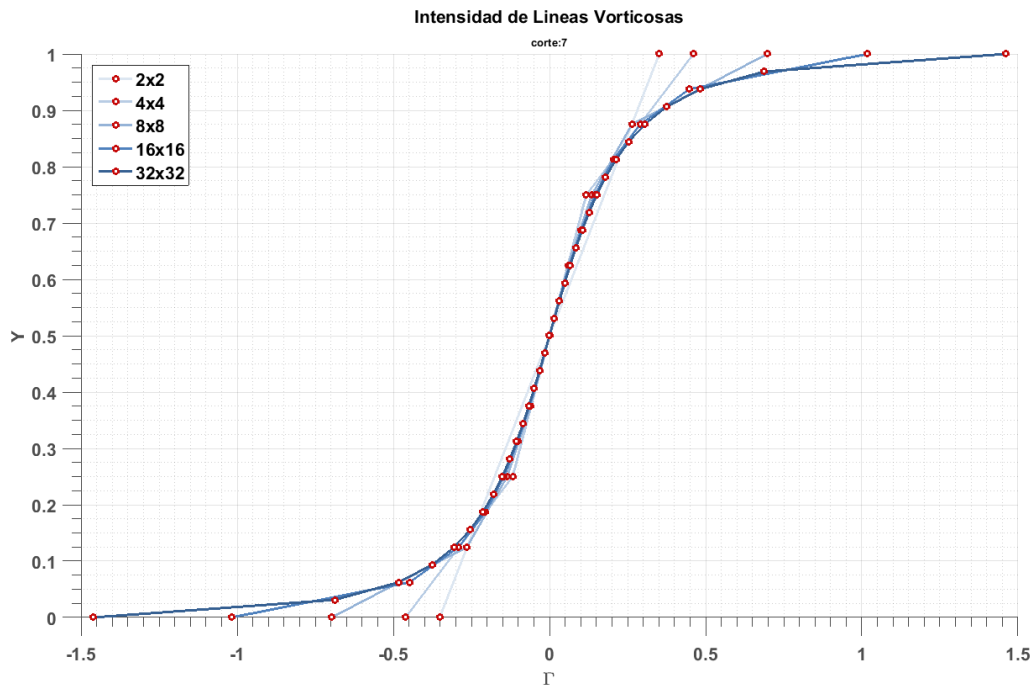
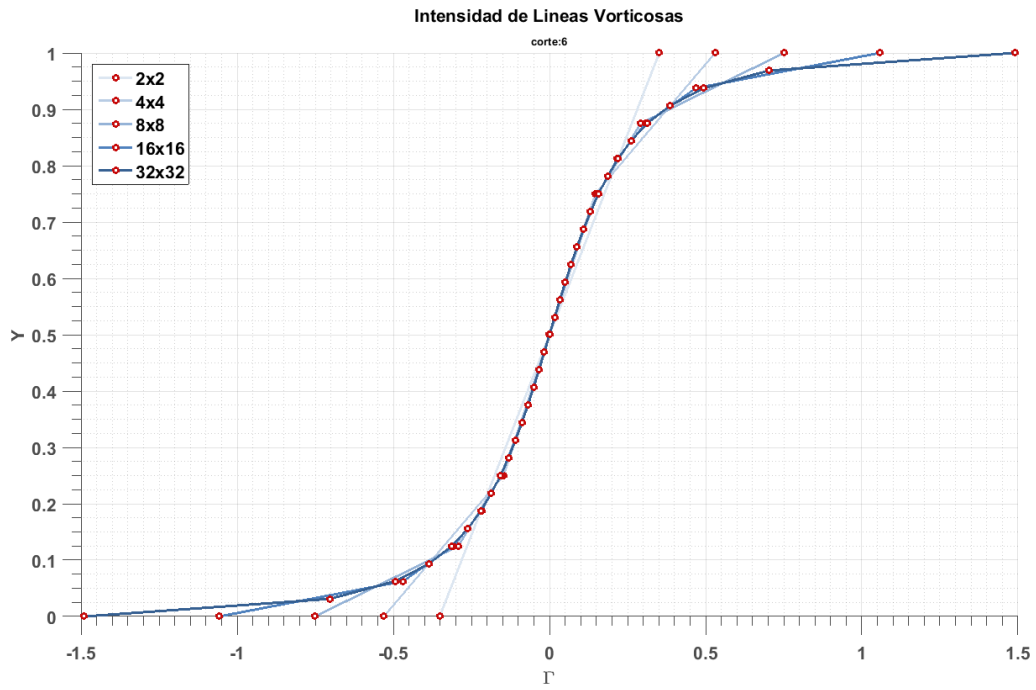
Gráficos refinado global

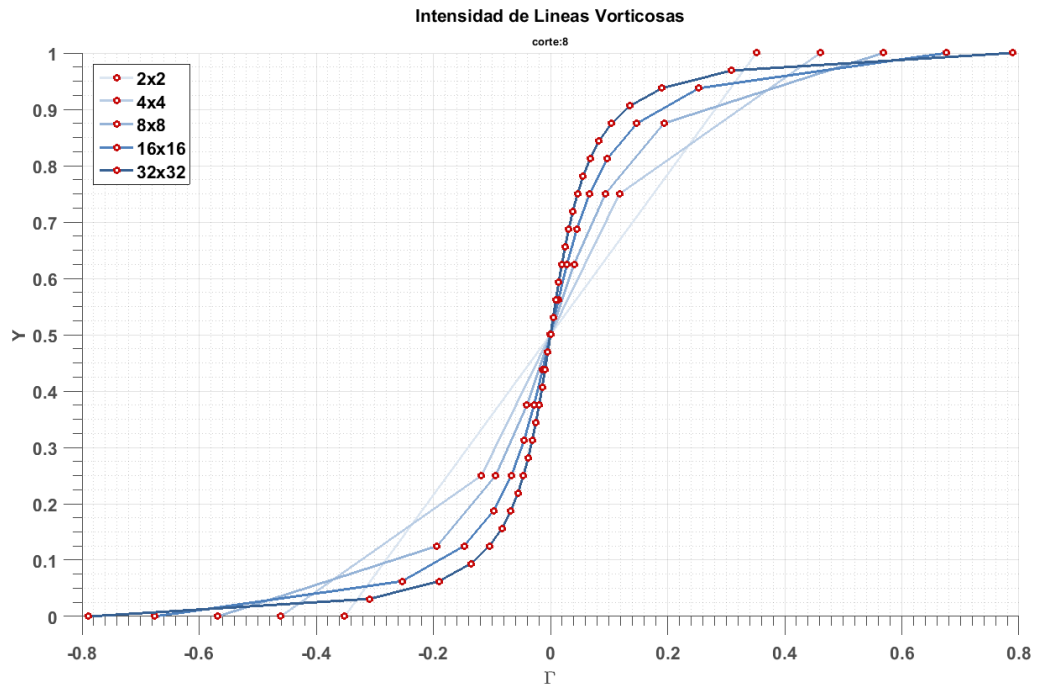
B.1. Intensidad de segmentos vorticosos horizontales



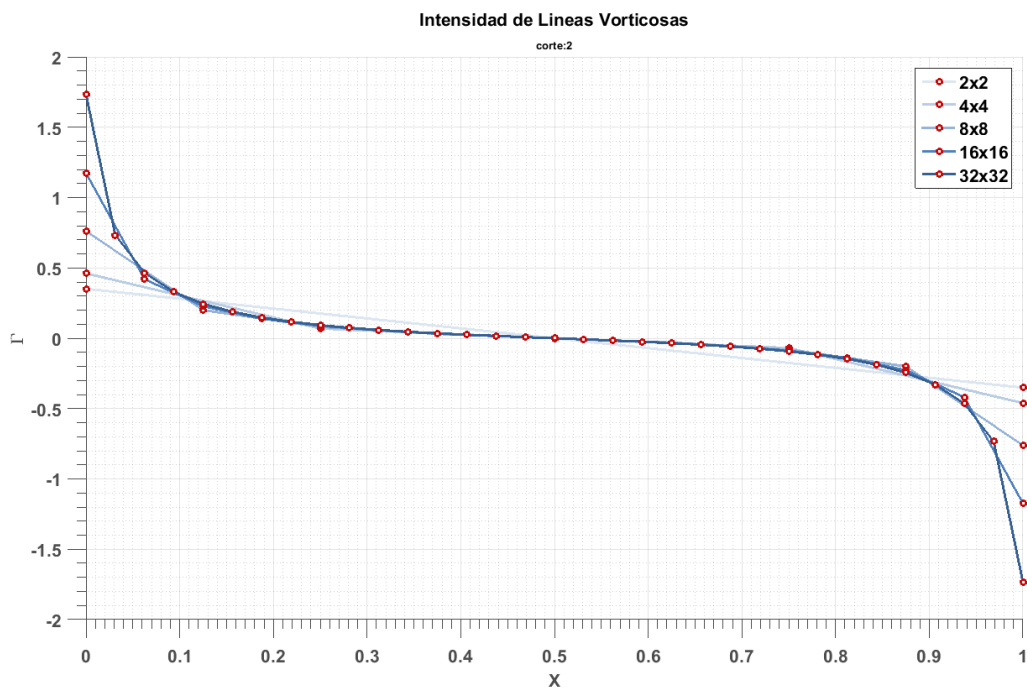
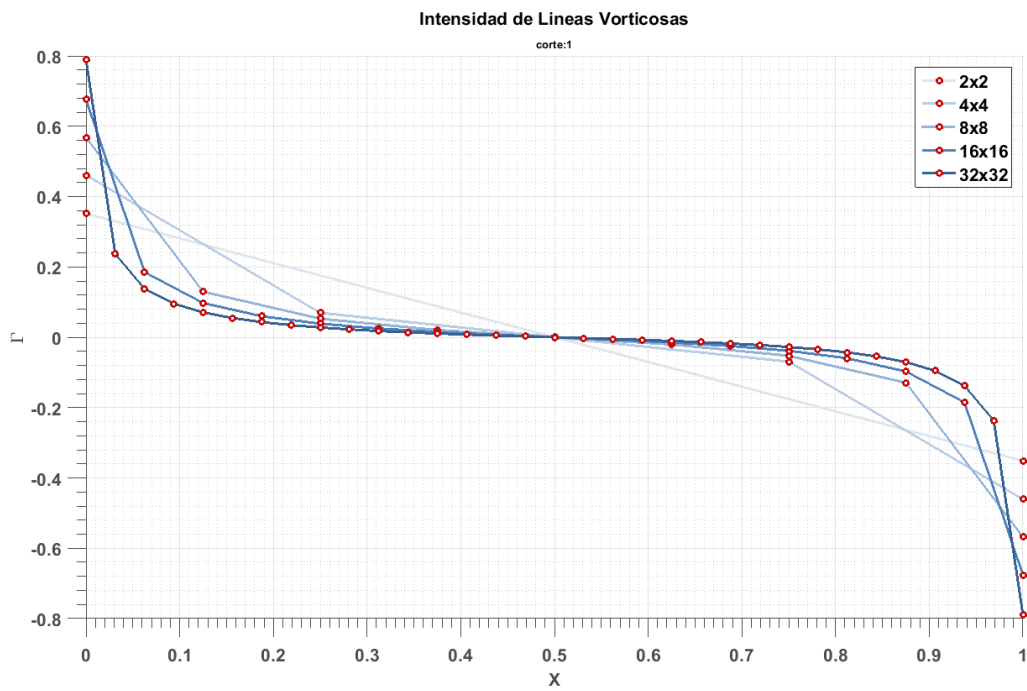


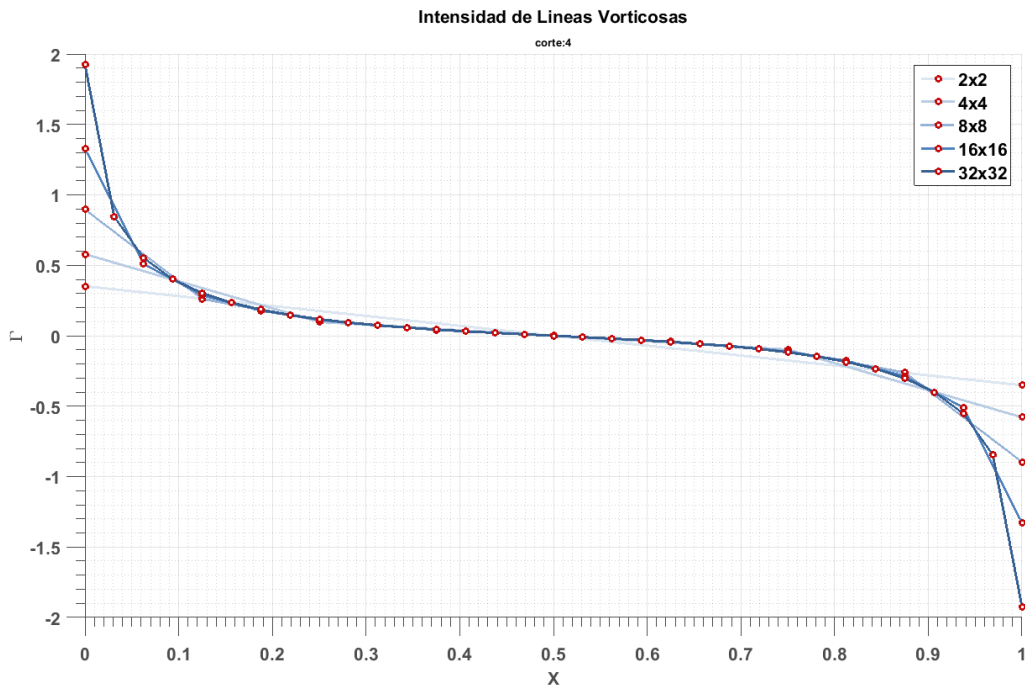
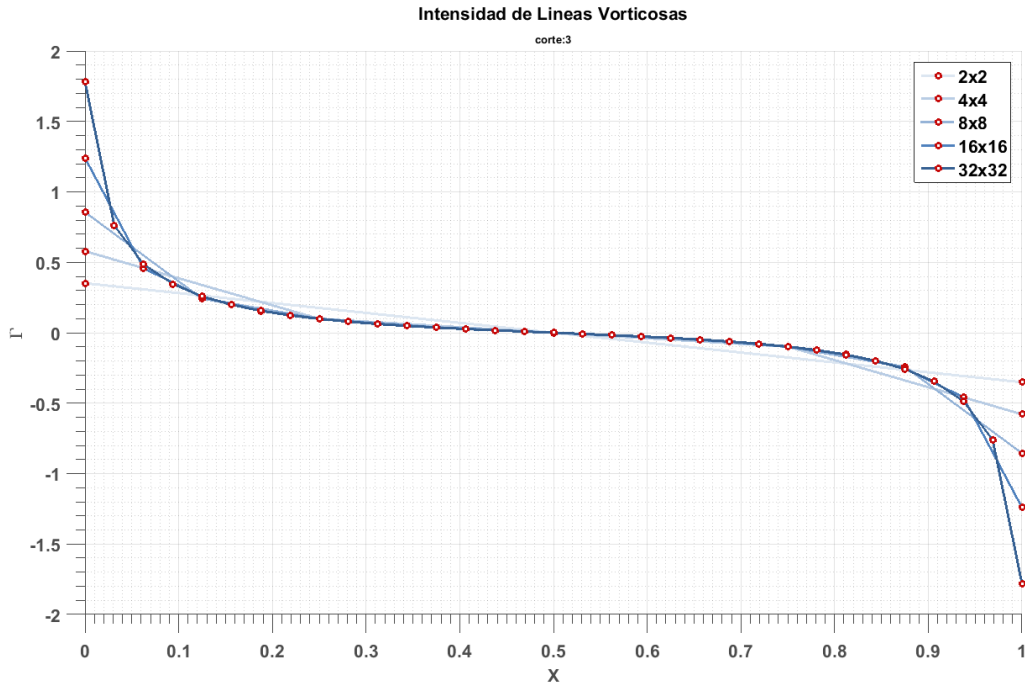


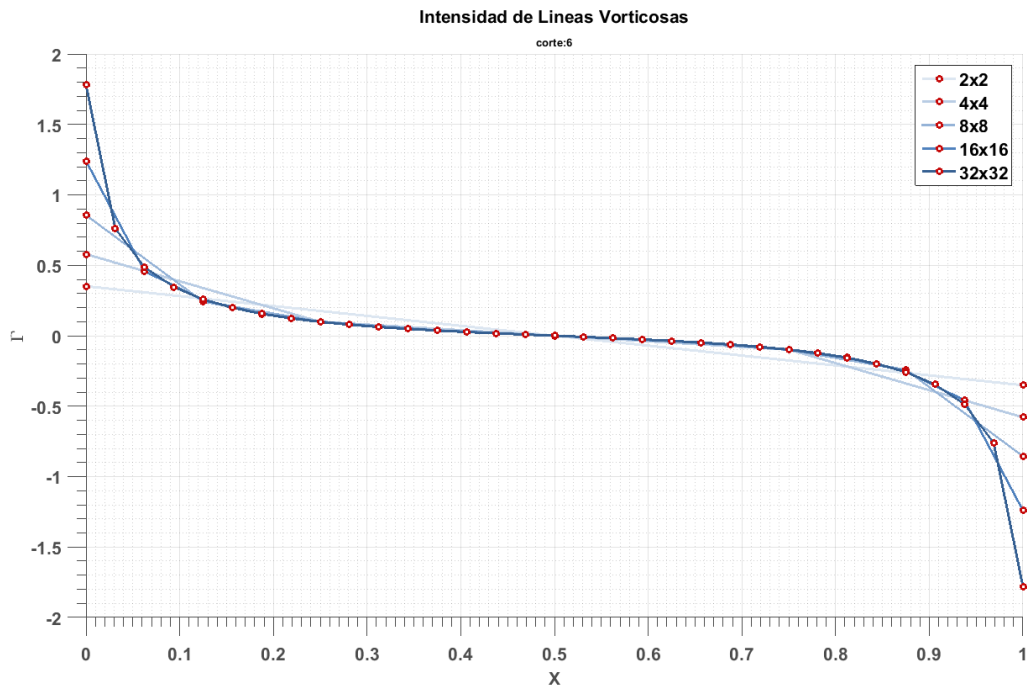
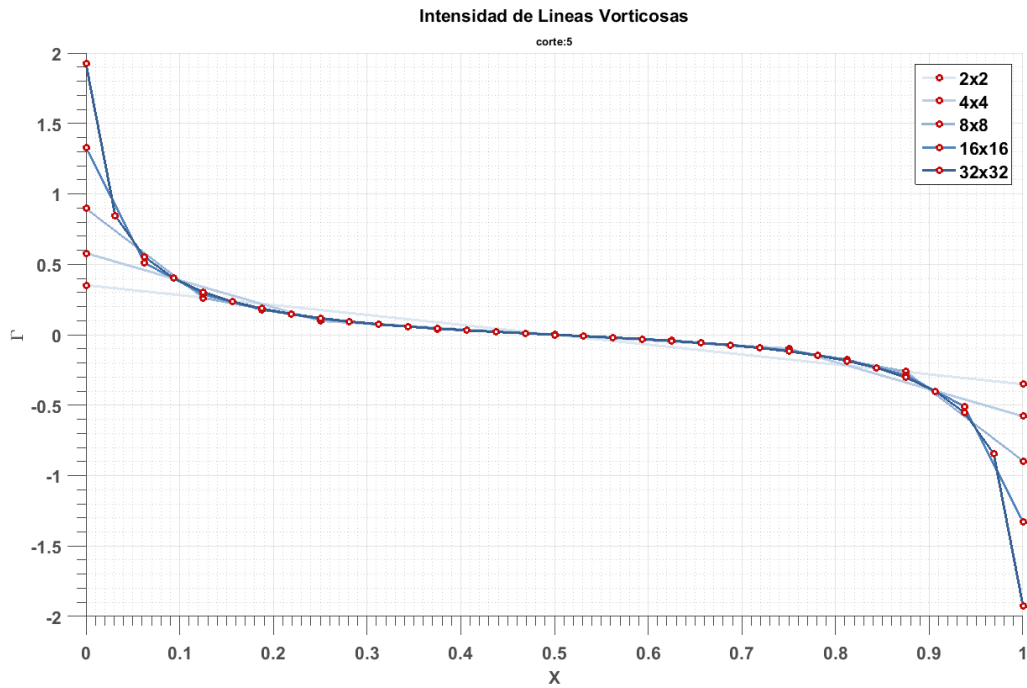


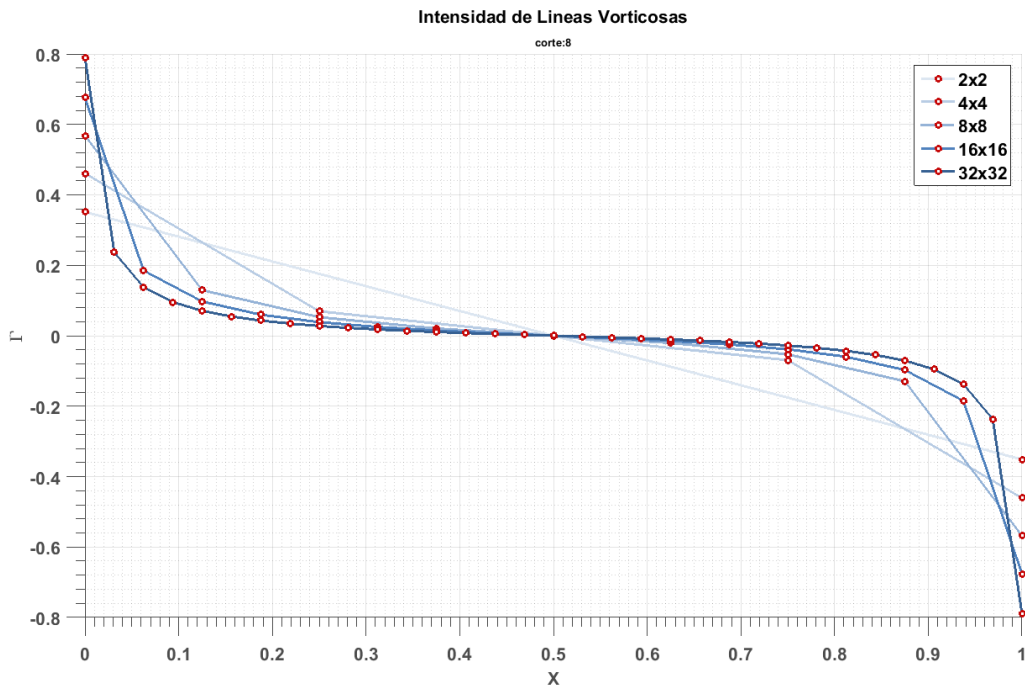
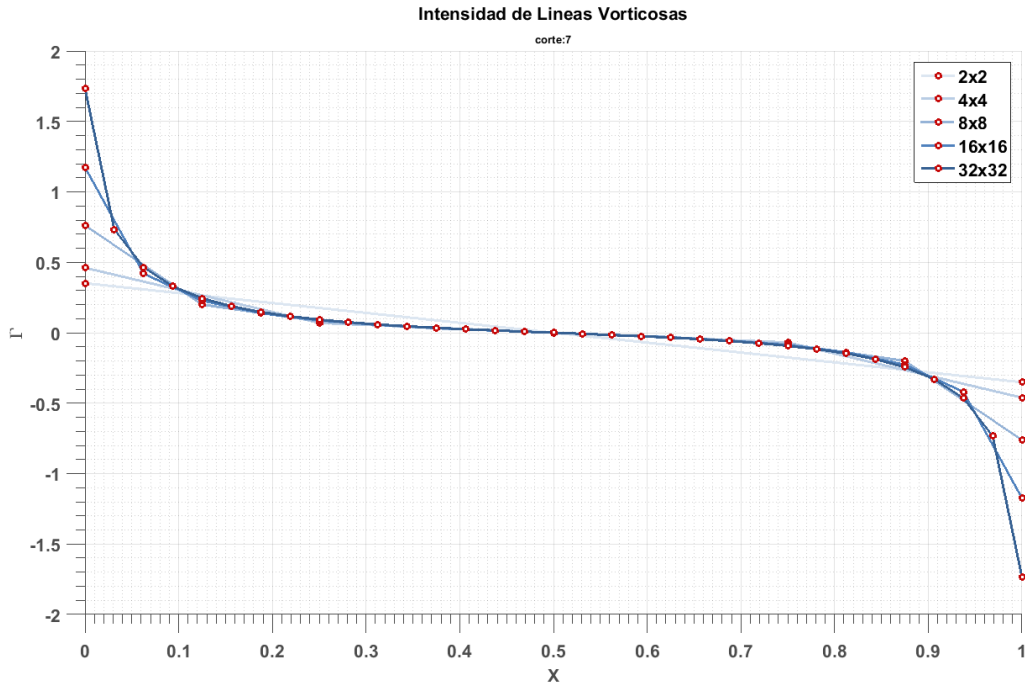


B.2. Intensidad de segmentos vorticosos verticales





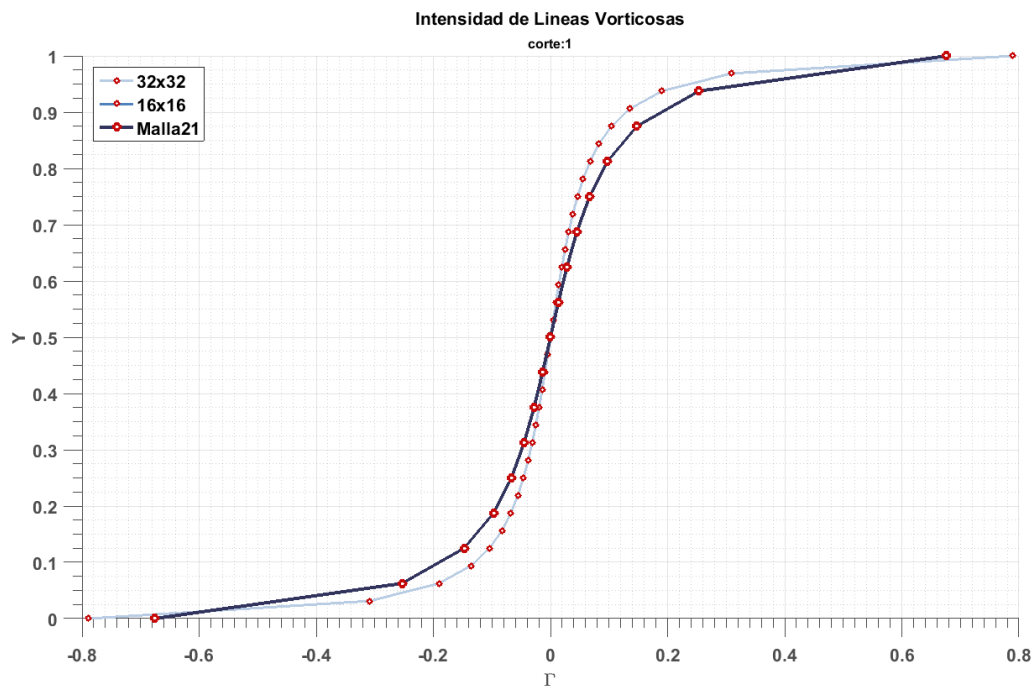


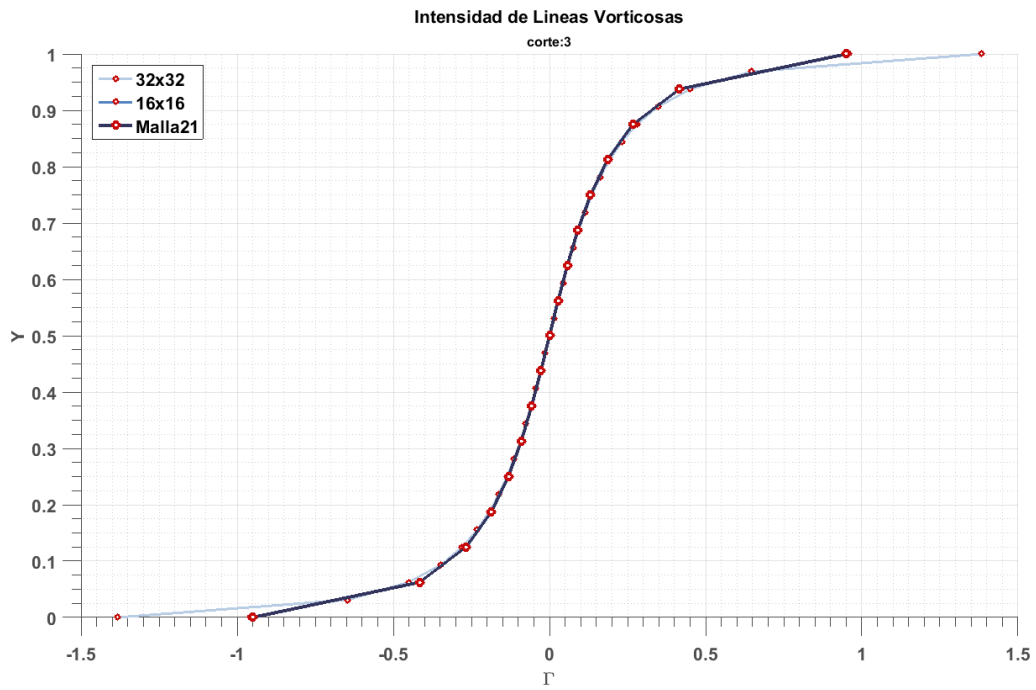
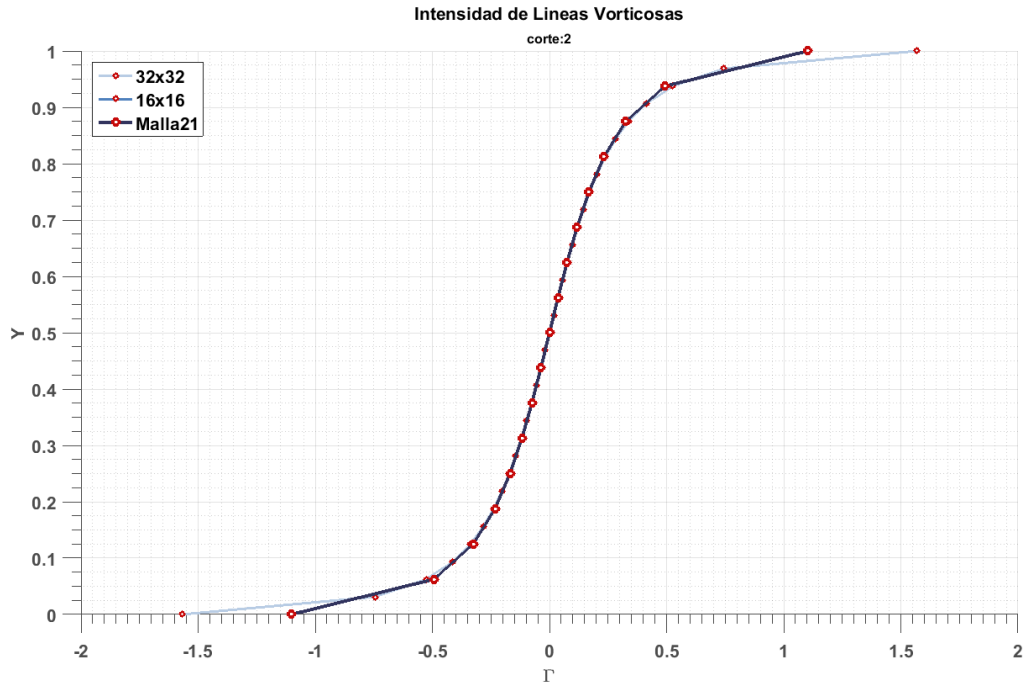


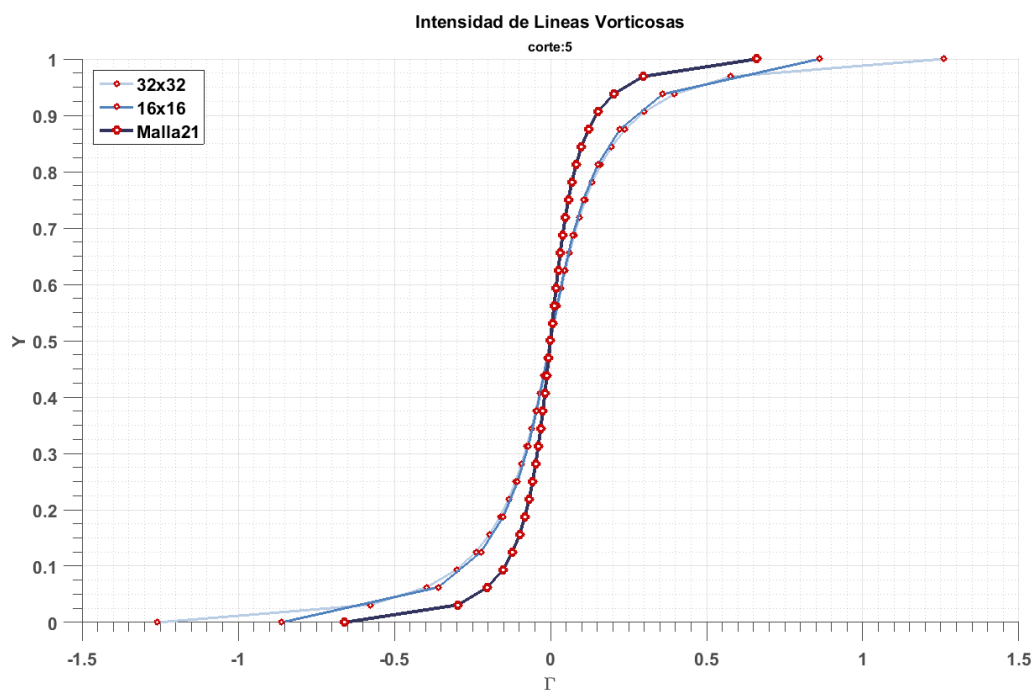
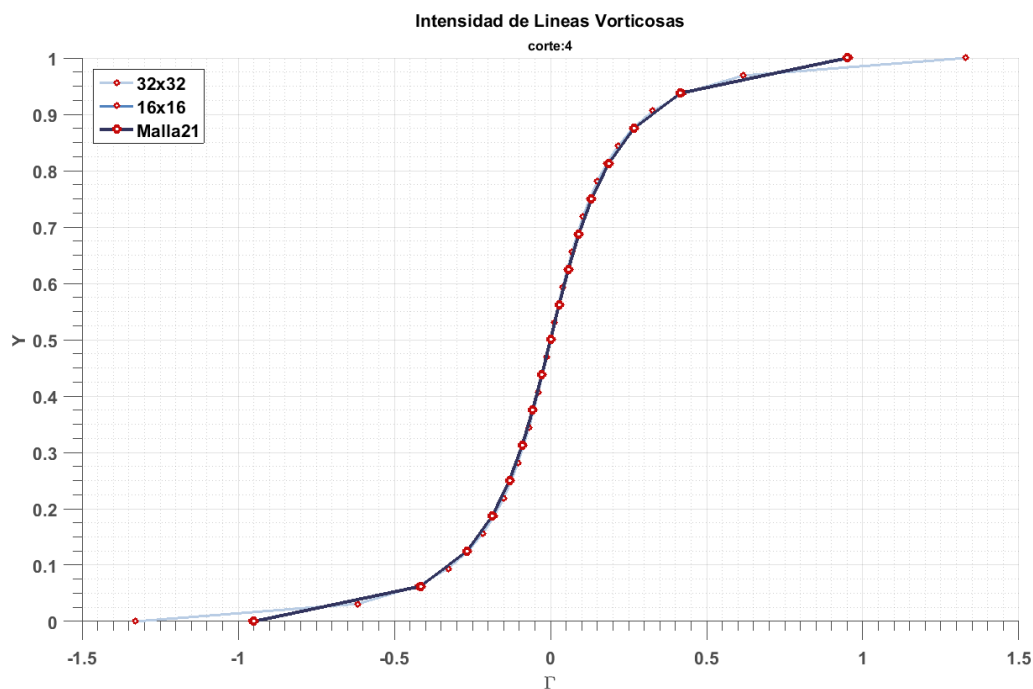
C

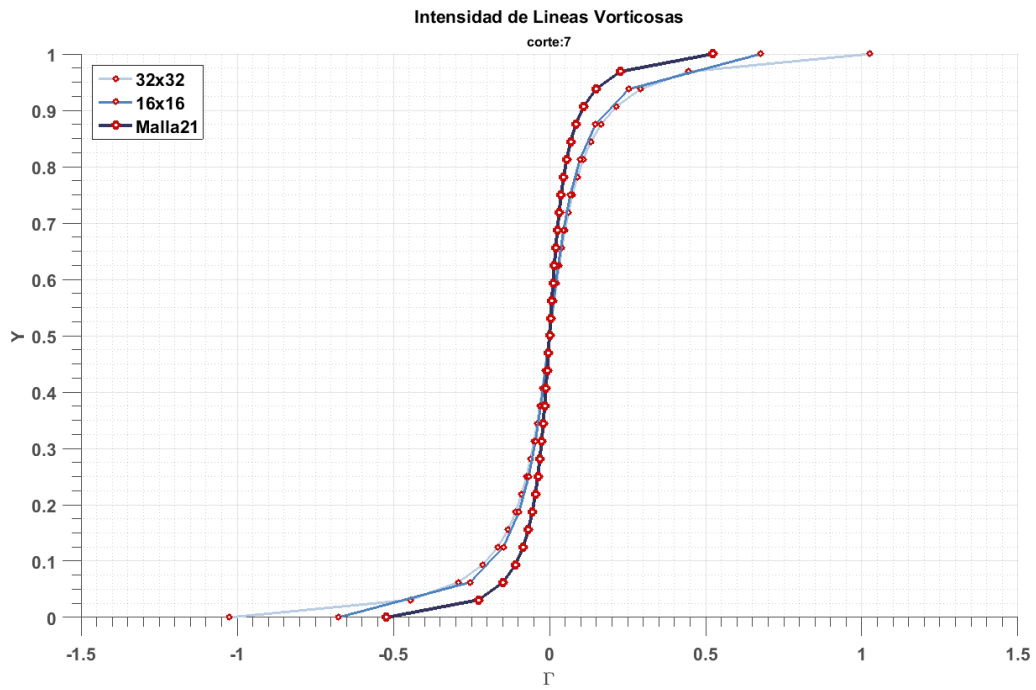
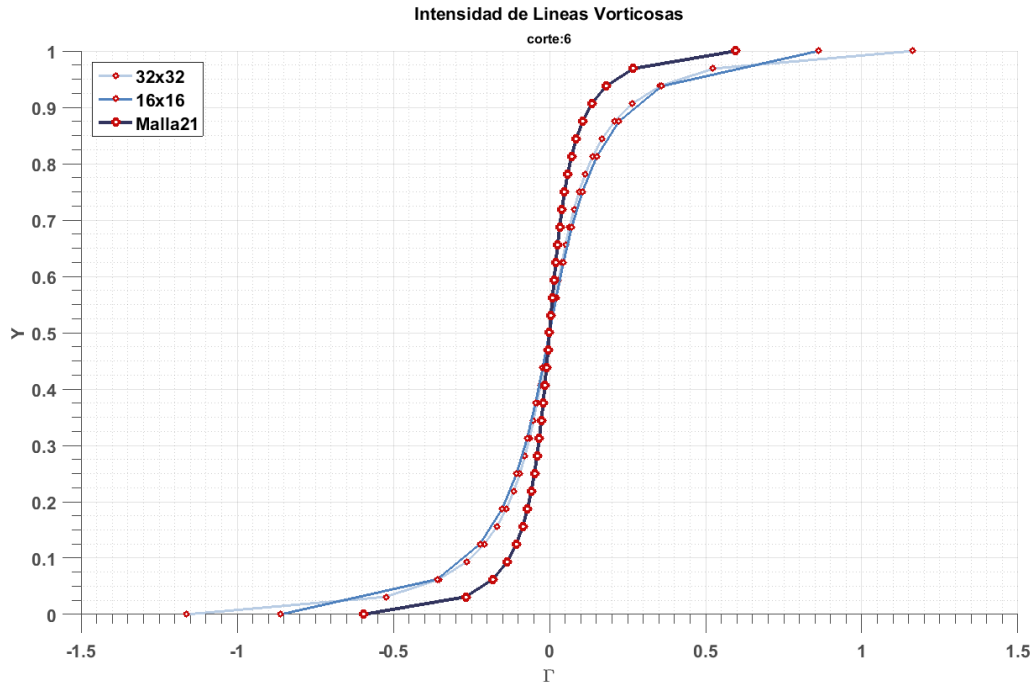
Gráficos refinado local

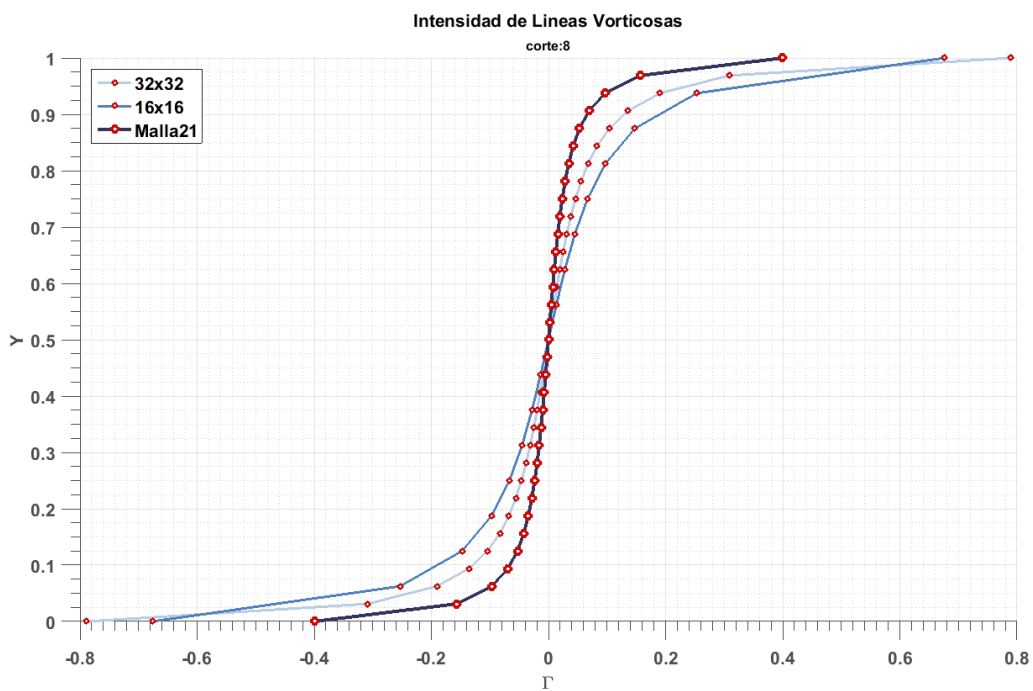
C.1. Intensidad de segmentos vorticosos horizontales



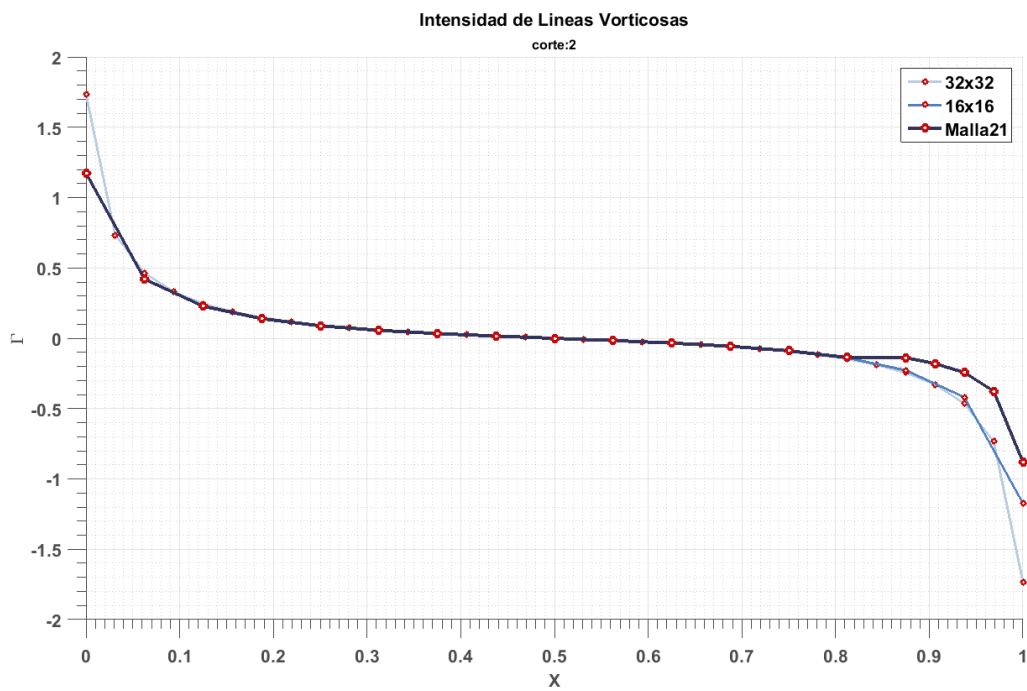
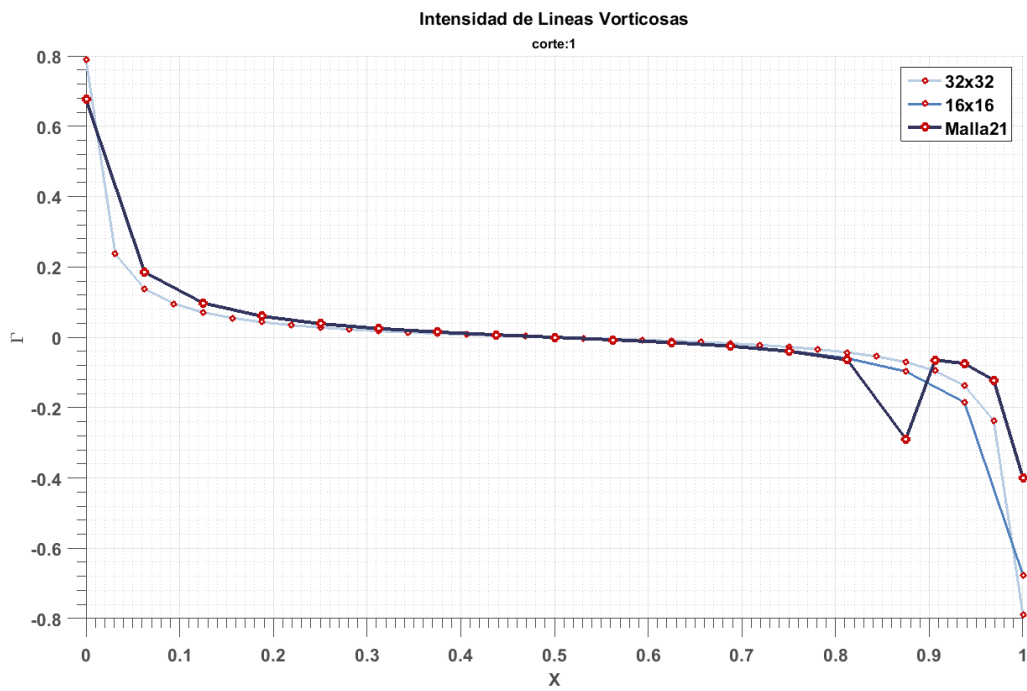


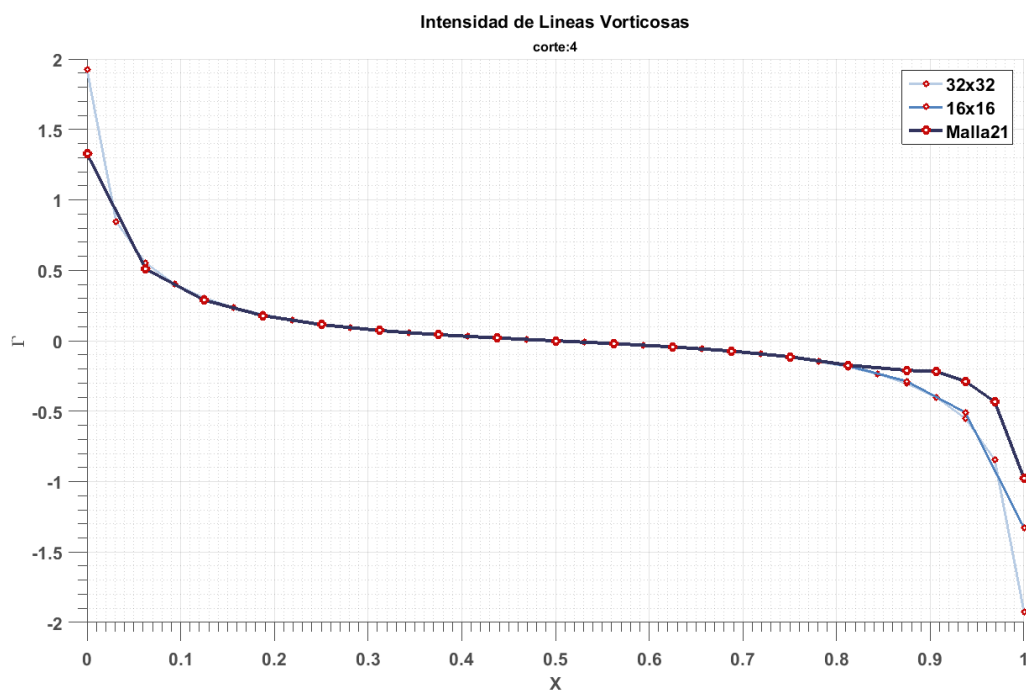
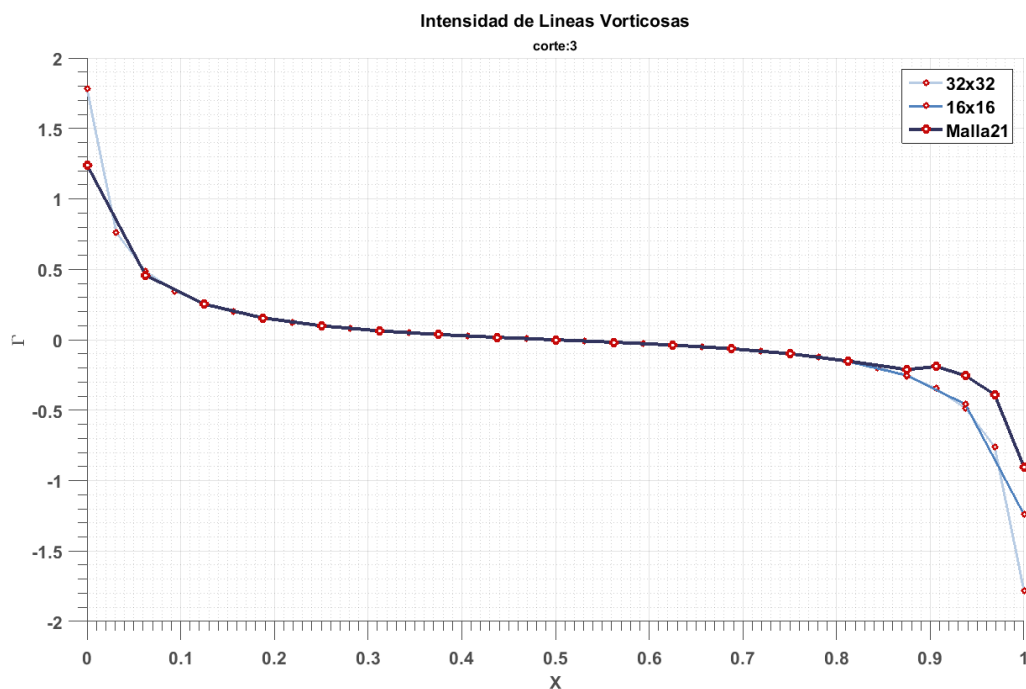


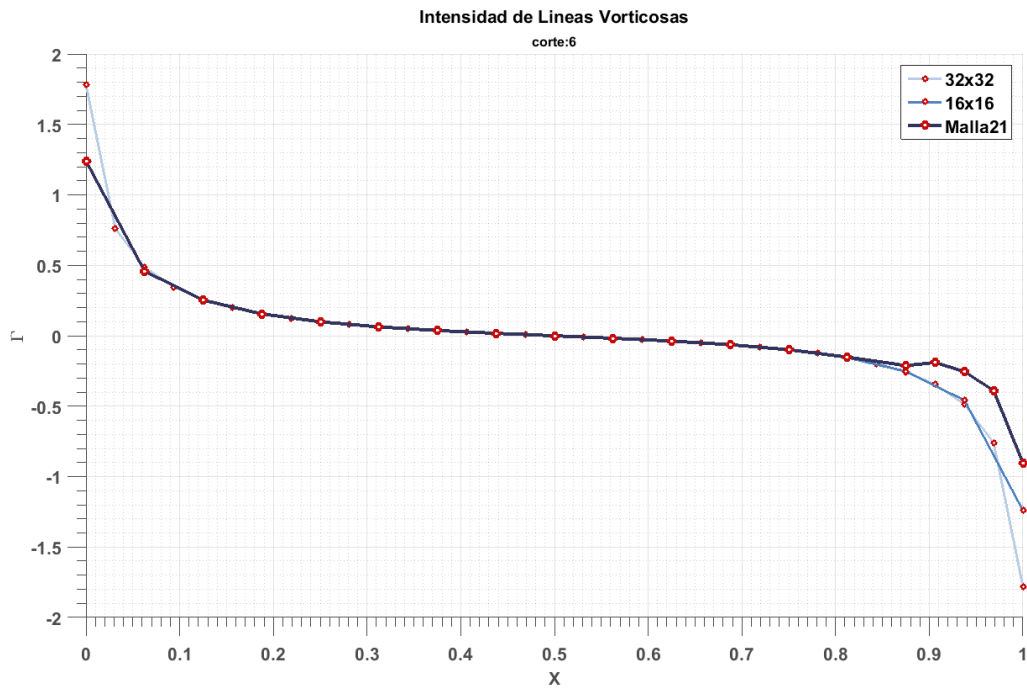
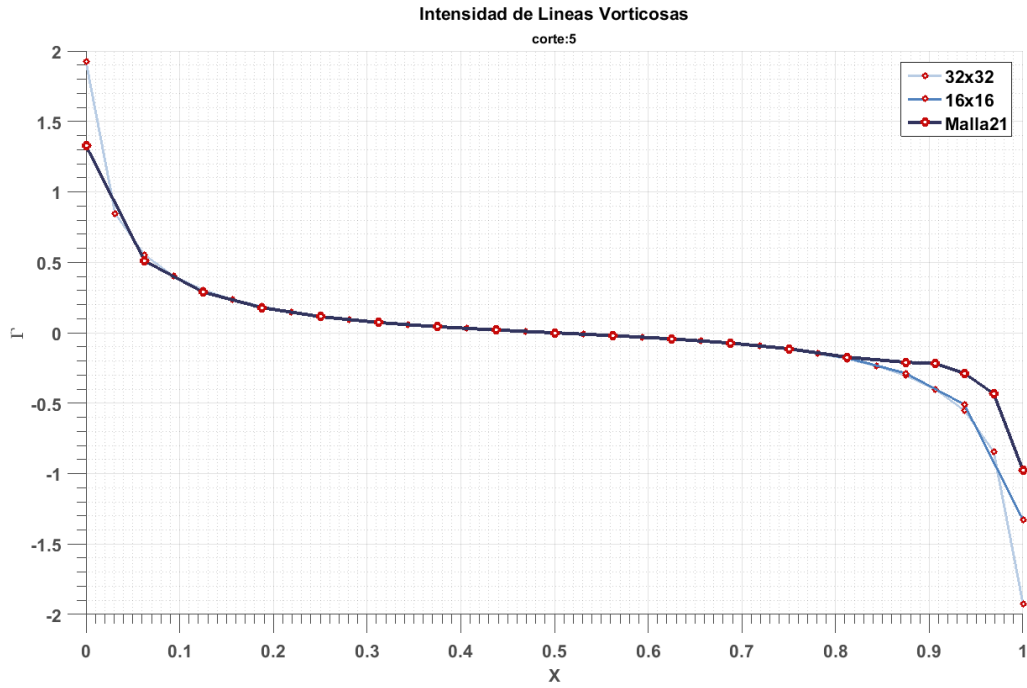


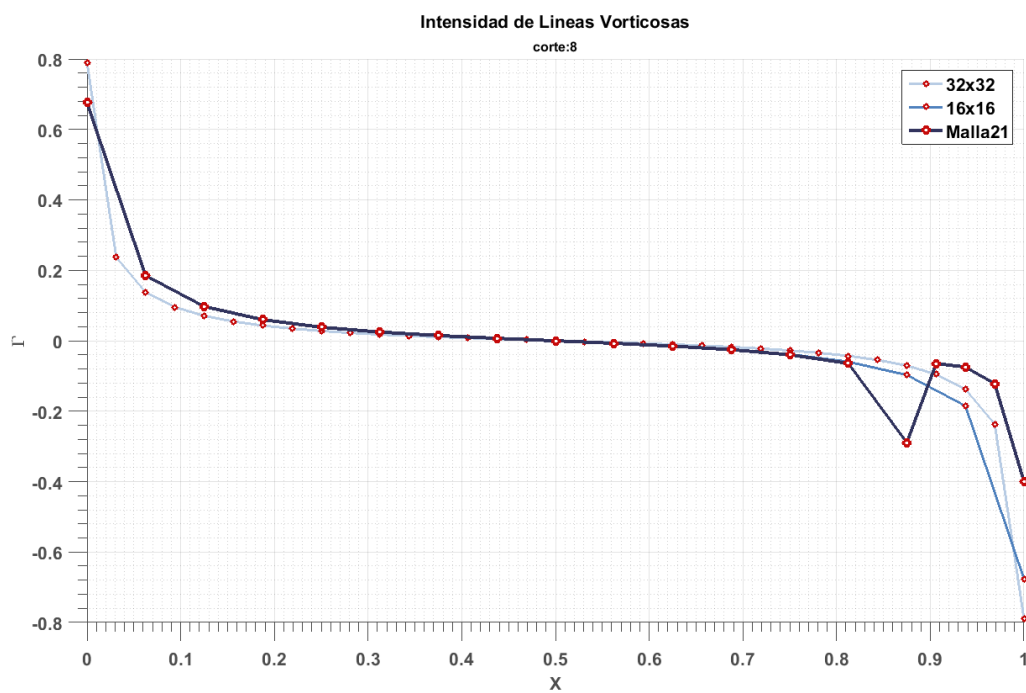
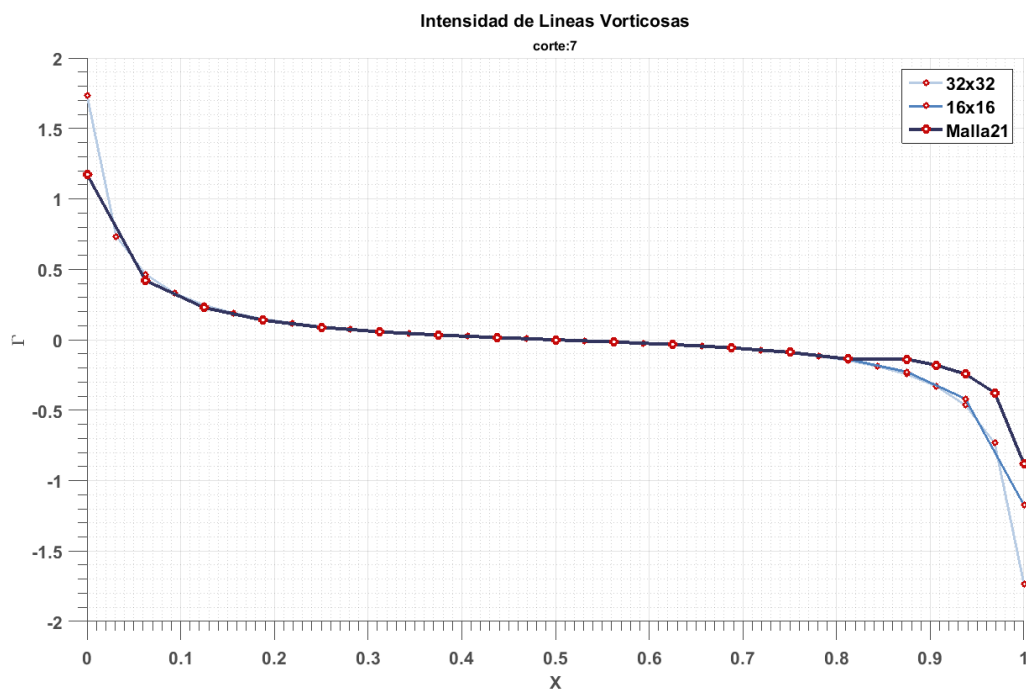


C.2. Intensidad de segmentos vorticosos verticales

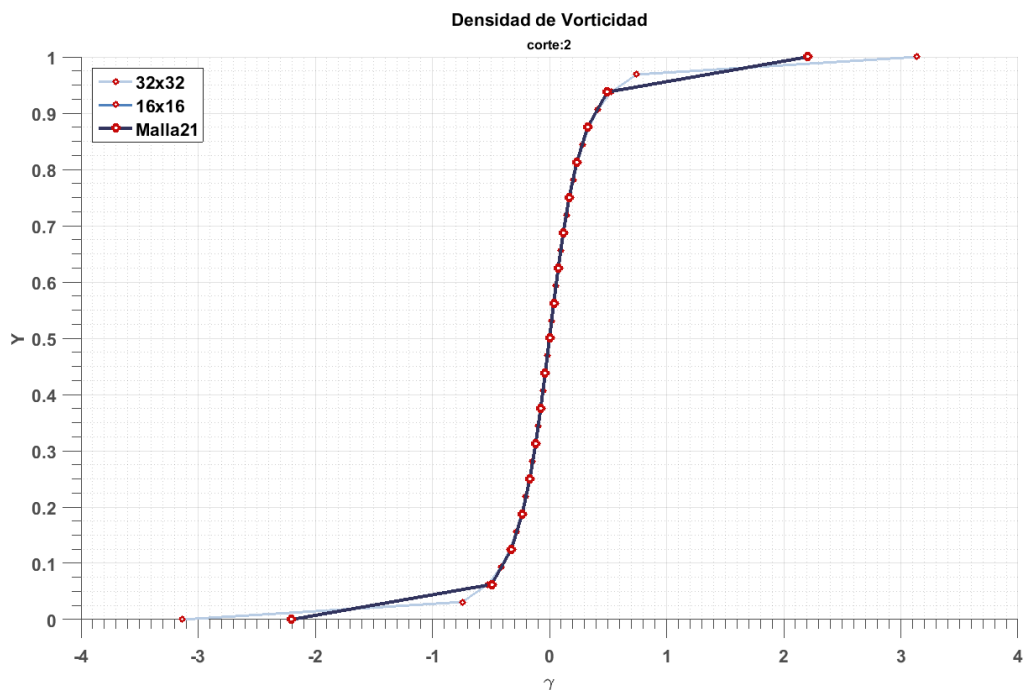
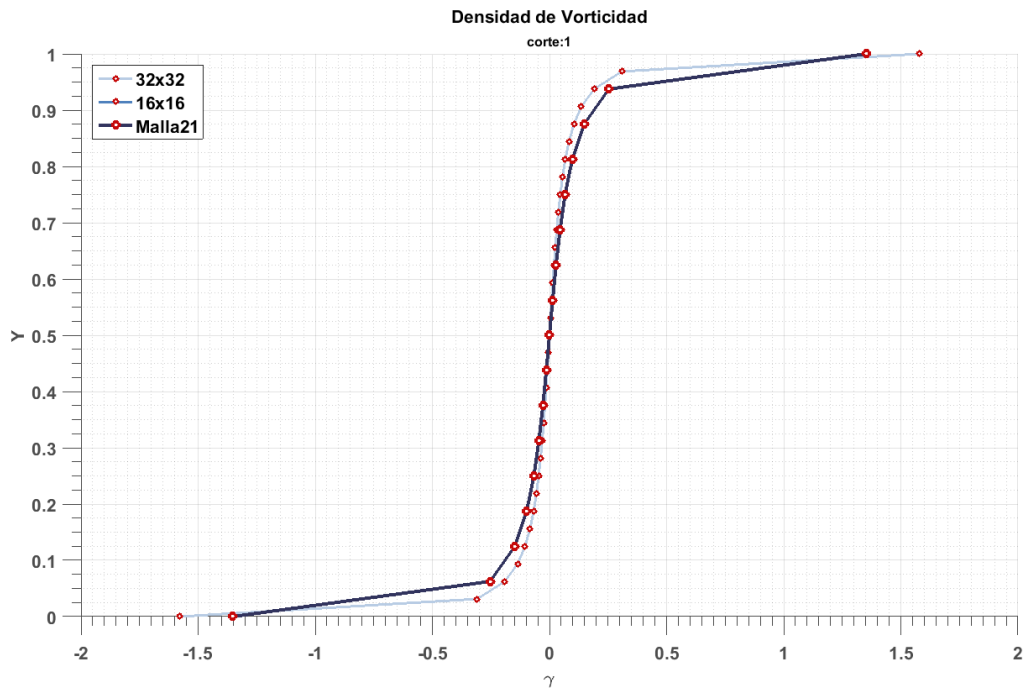


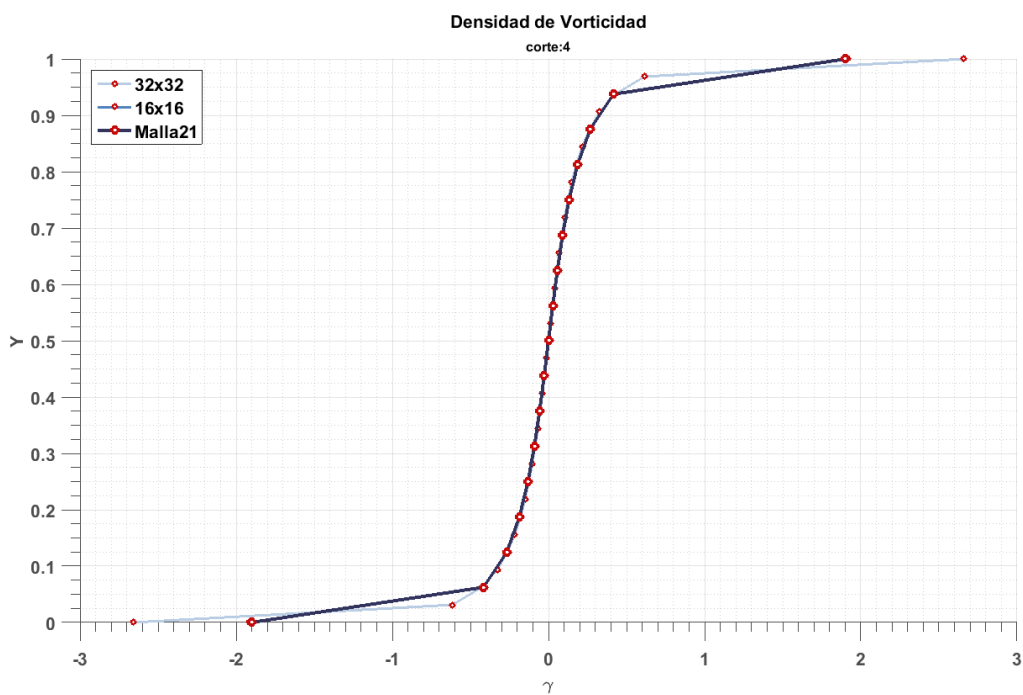
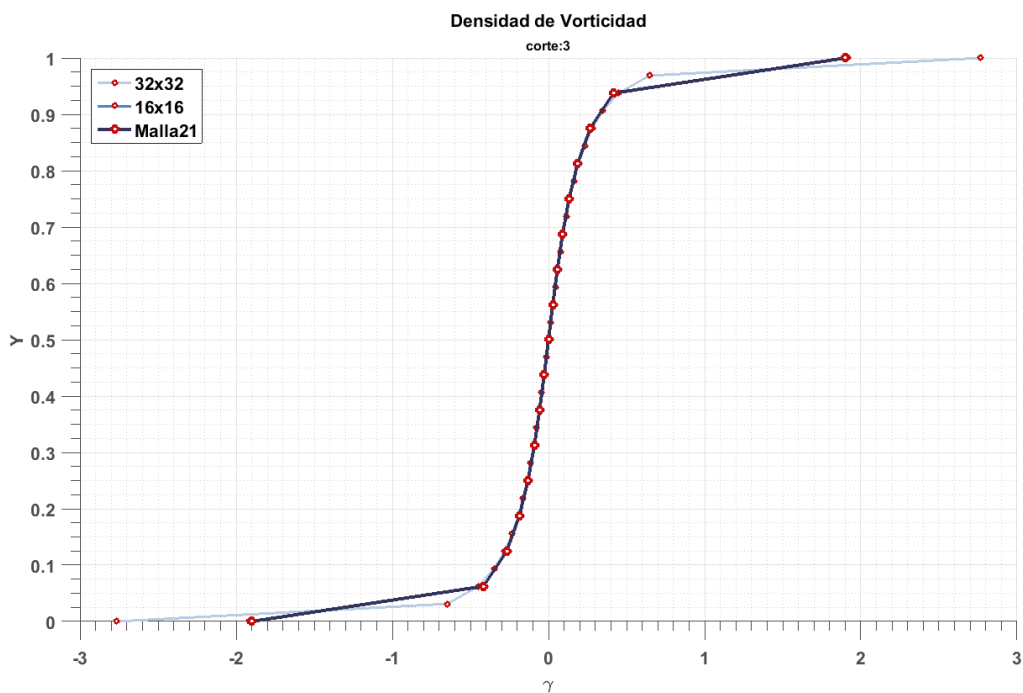


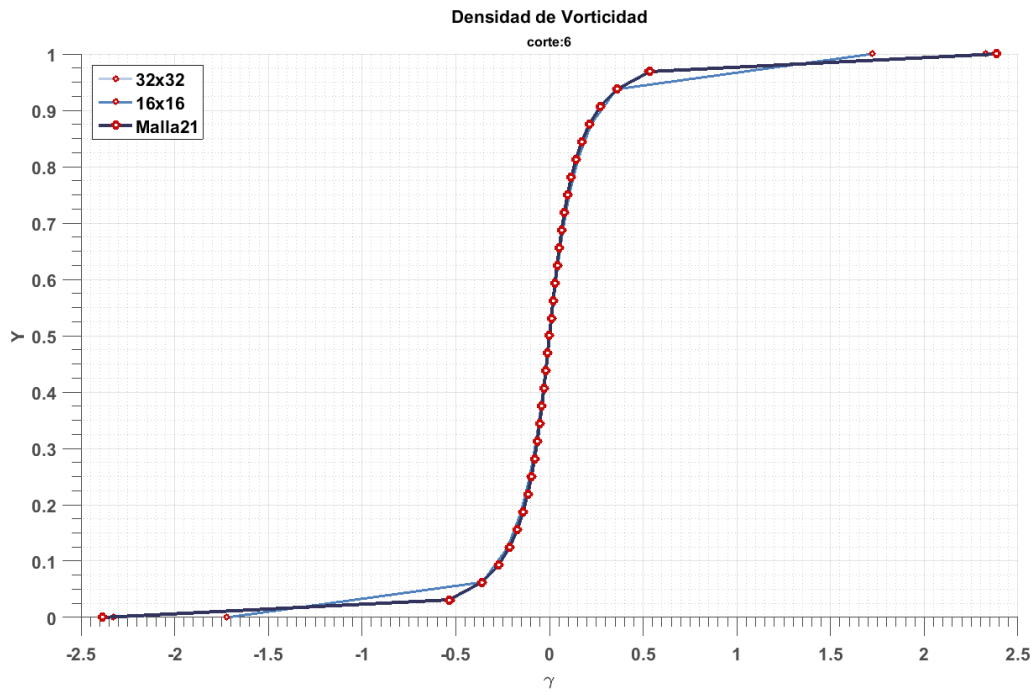
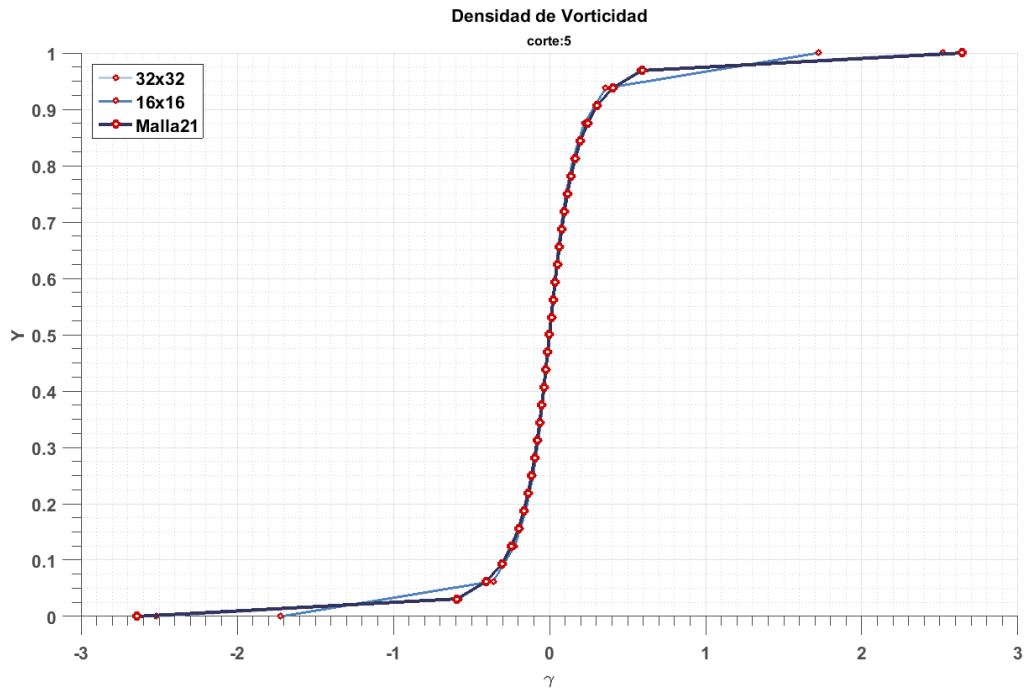


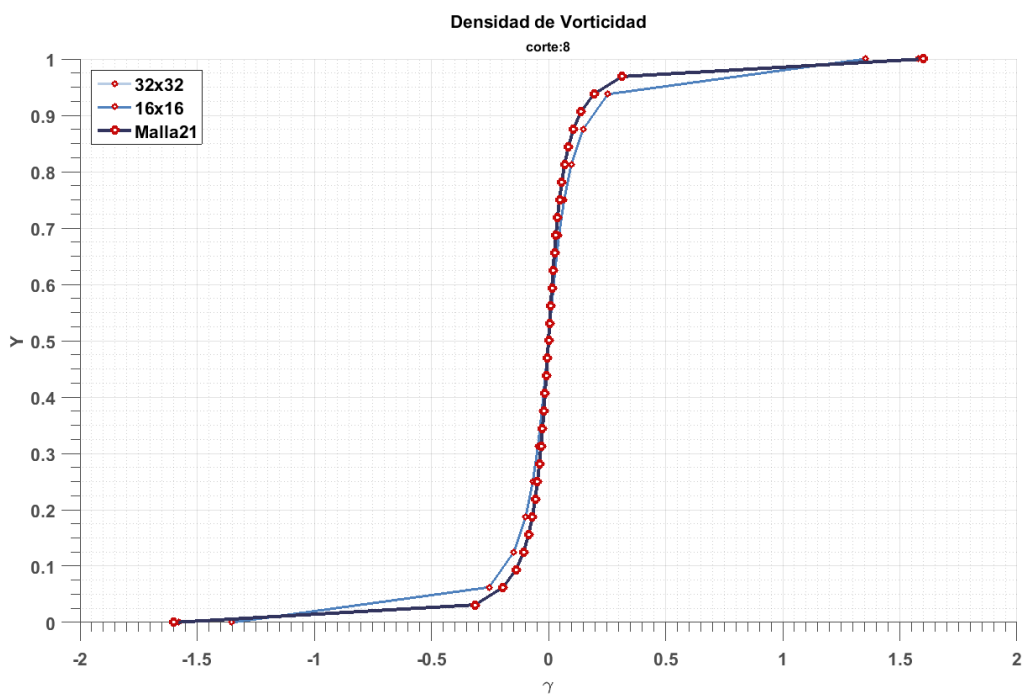
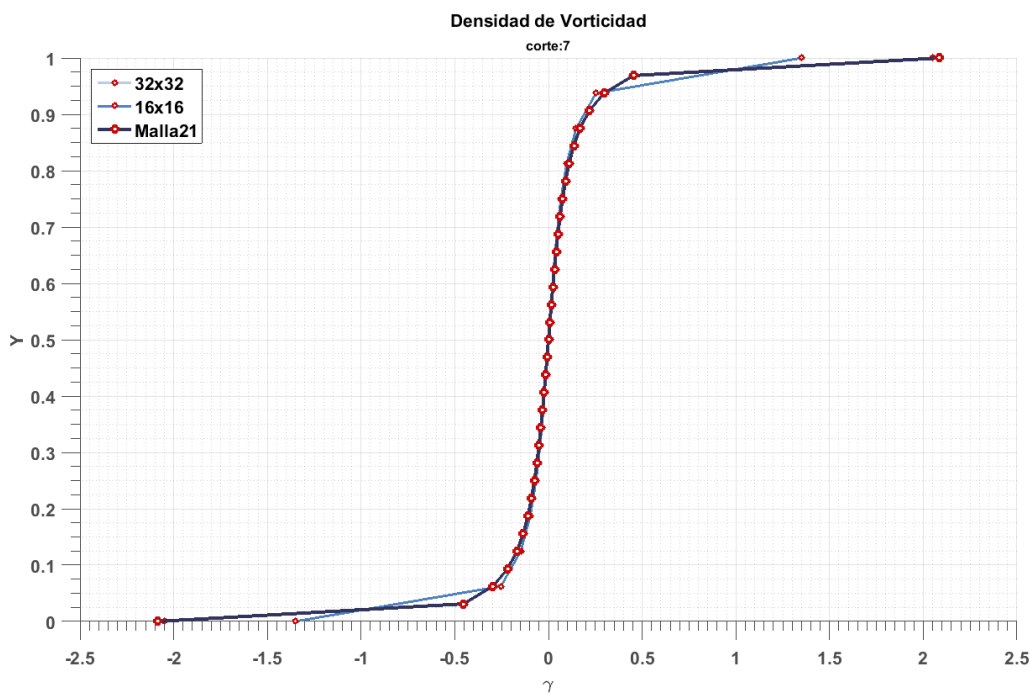


C.3. Densidad de vorticidad de segmentos vorticosos horizontales

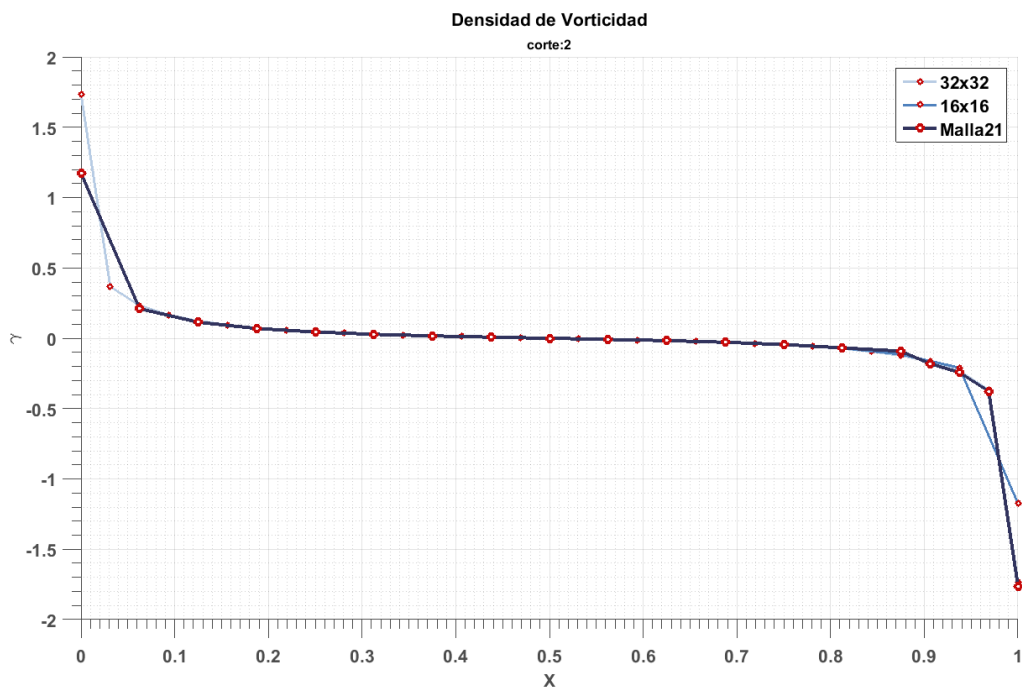
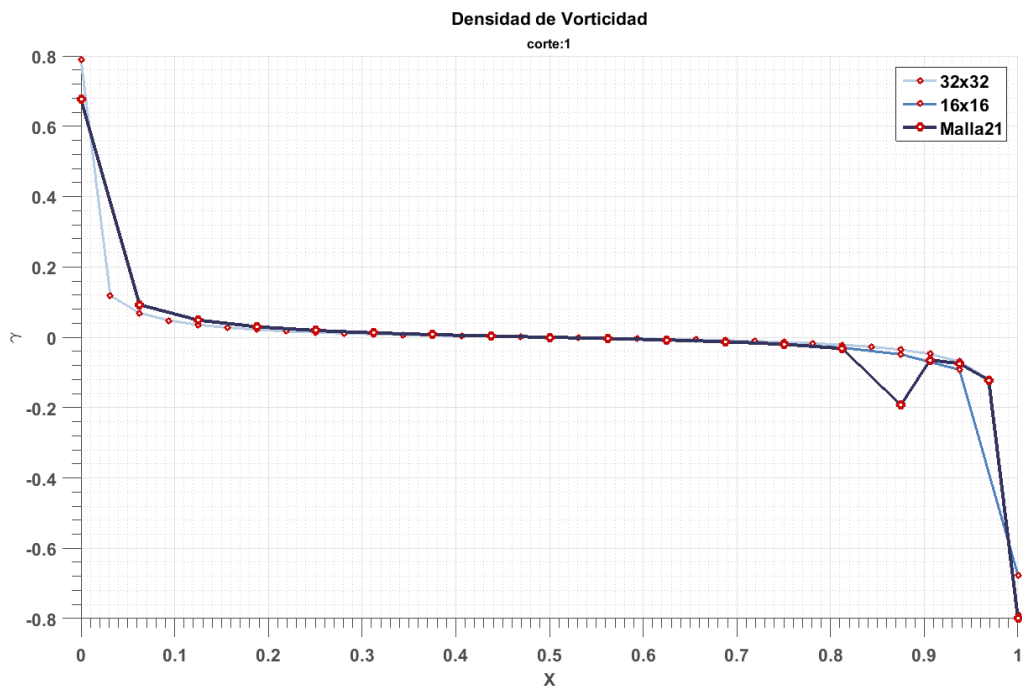


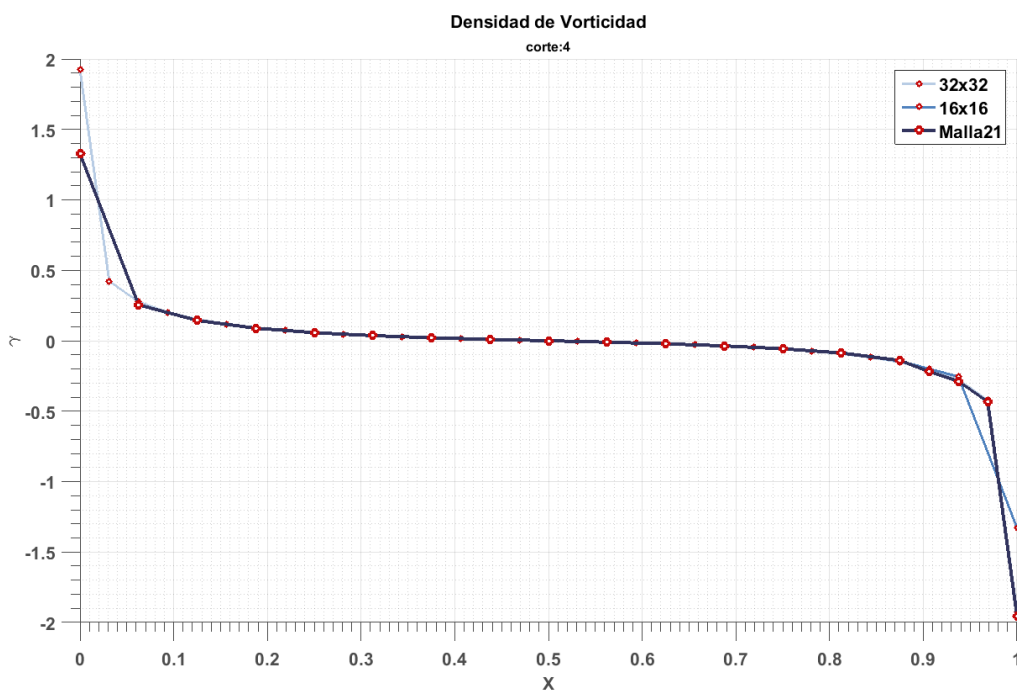
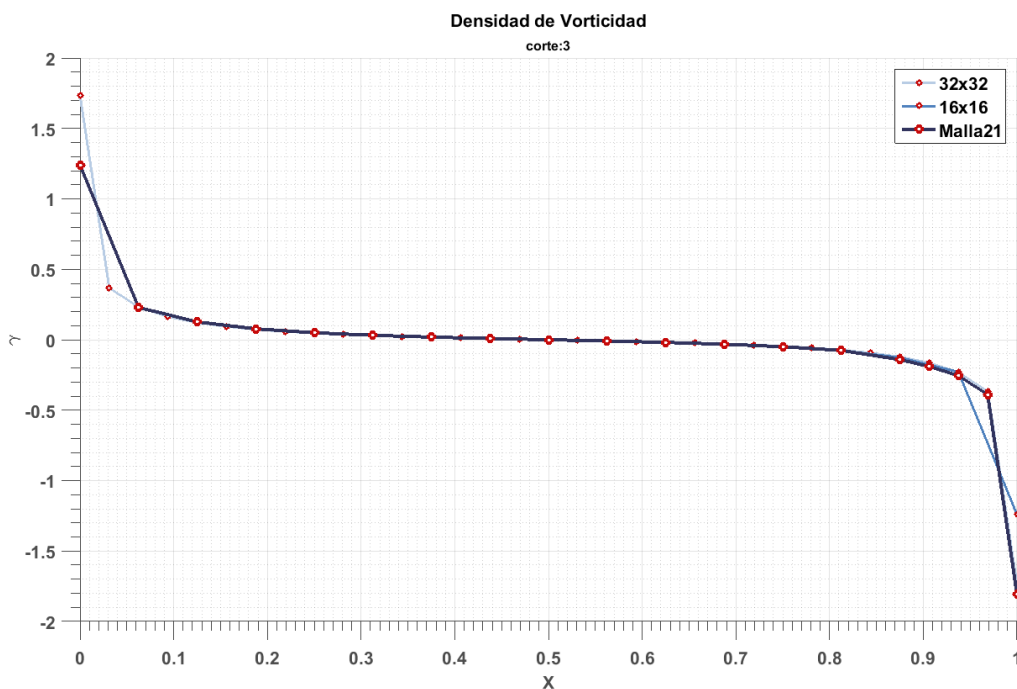


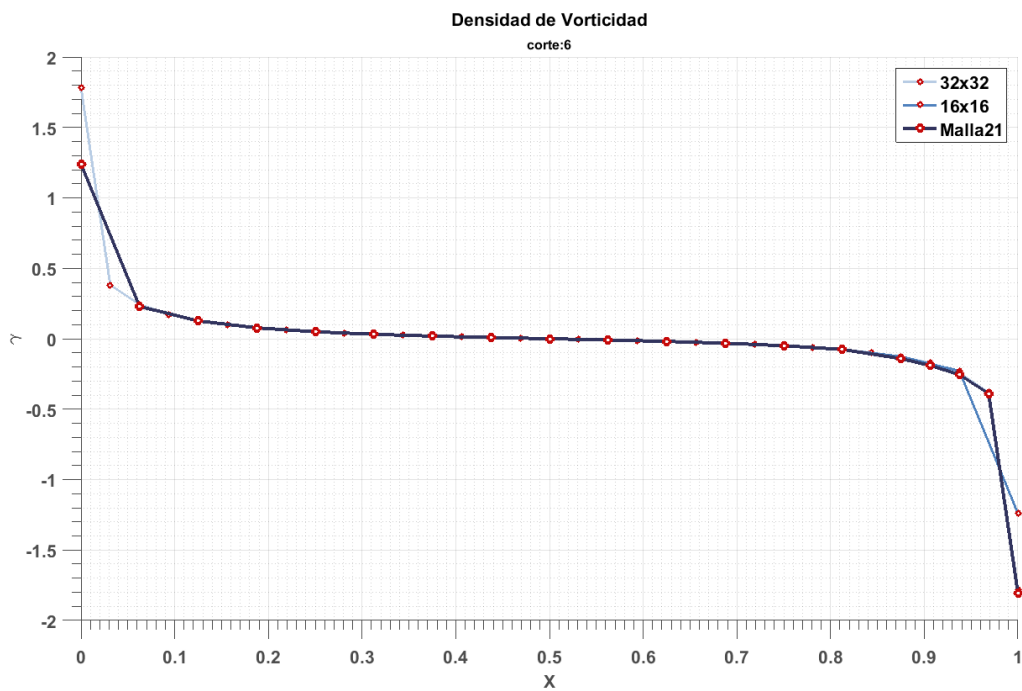
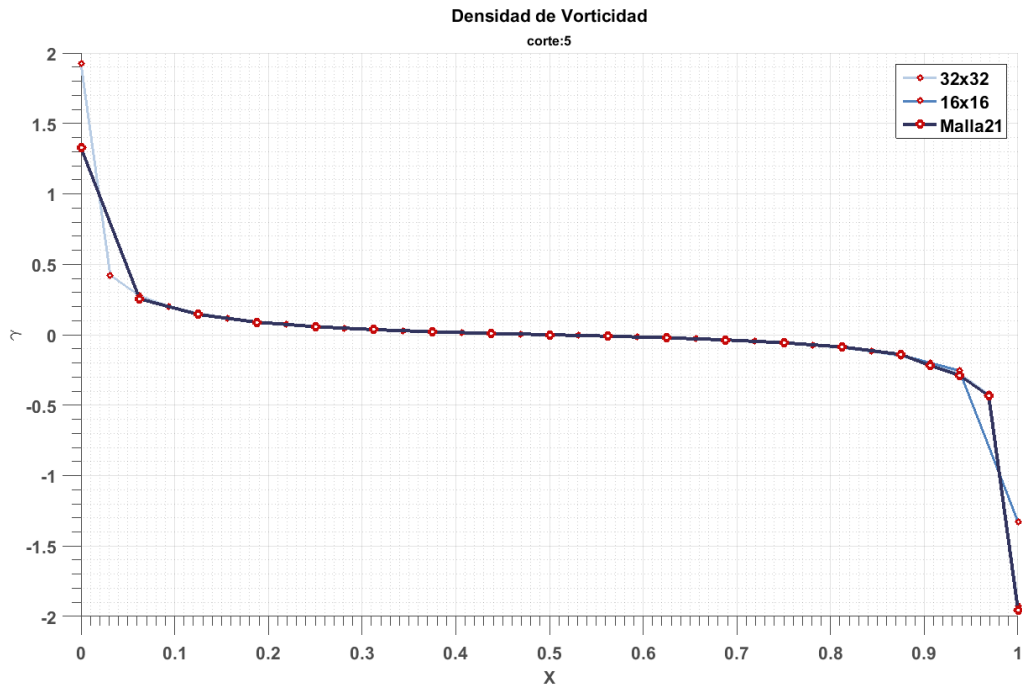


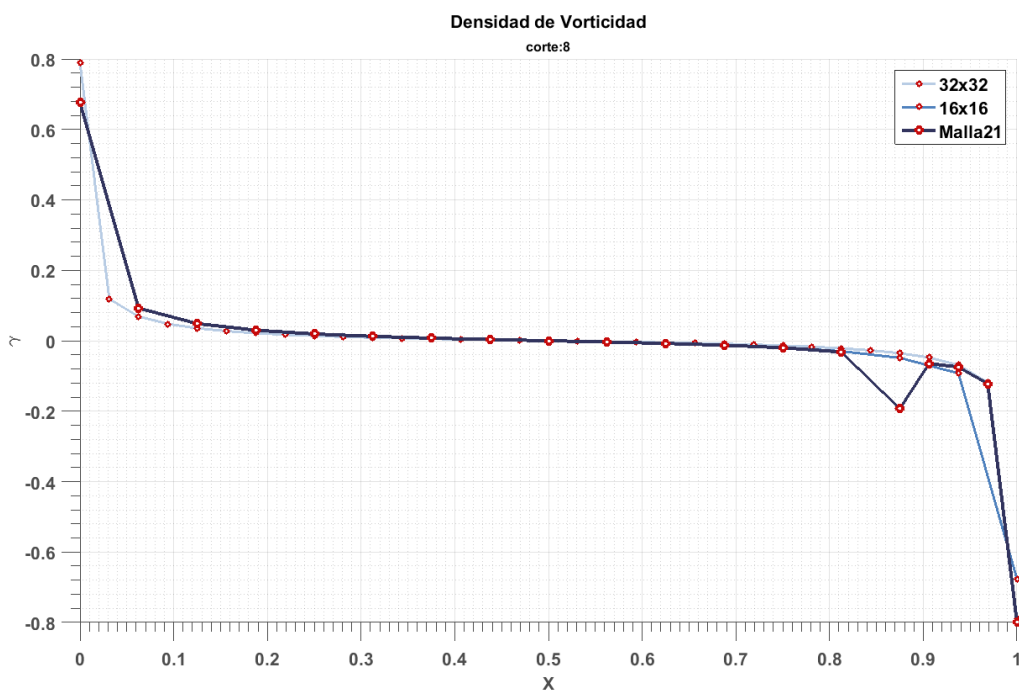
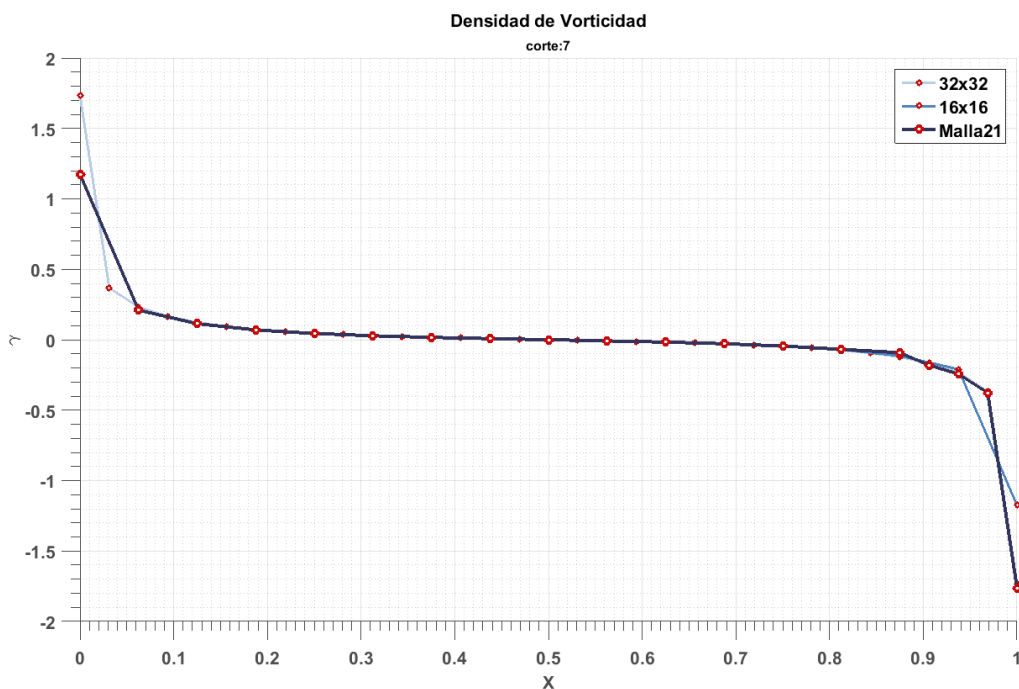


C.4. Densidad de vorticidad de segmentos vorticosos verticales









Bibliografía

- [1] J. Katz and A. Plotkin, *Low-Speed Aerodynamics: From Wing Theory to Panels Methods* McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [2] J. L. Hess and A. M. O. Smith, “*Calculation of Potential Flow about Arbitrary Bodies,*” *Progress in Aeronautical Sciences*, Vol. 8, Pergamon Press, New York, 1967.
- [3] A. B. Bauer, A. M. O. Smith, and J. L. Hess, “Potential Flow and Boundary Layer Theory as Design Tool in Aerodynamics,” *Canadian Aeronautics and Space Journal* , Vol. 16, No. 2, pp. 53-69, February, 1970.
- [4] J. L. Hess, “Review of Integral-Equation Techniques for Solving Potential-Flow Problems with Emphasis on the Surface-Source Method,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 5, pp. 145-196, 1975.
- [5] N. W. Schaeffler, “The Delta Wing Leading-Edge Vortex System Undergoing Vortex Breakdown: A Contribution to its Characterization and Control under Dynamic Conditions,” Ph.D. Thesis, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, VA 1998.
- [6] H. von Helmholtz, “On Integrals of the Hydrodynamic Equations which Express Vortex Motion,” 1858. Translation by P. G. Tait, 1867, *Philosophical Magazine*, Vol. 4.
- [7] S. M. Belotserkovskii, “Calculating the Effects of Gust of an Arbitrary Thin Wing,” *Fluid Dynamics*, Vol. 1, No. 1, pp. 34-40, January-February, 1966.
- [8] S. D. Ermolenko, “Nonlinear Theory of Small Aspect Ratio Wings,” *Soviet Aeronautics*, Vol. 9, pp. 5-11, 1966.
- [9] S. M. Belotserkovskii, “Calculation of the Flow around Wings of Arbitrary Planform in a Wide Range of Angles of Attack,” NASA TT F-12291, May 1968.
- [10] S. M. Belotserkovskii and M. I. Nisht, “Nonstationary Nonlinear Theory of a Thin Wing of Arbitrary Planform,” *Fluid Dynamics*, Vol. 9, No. 4, pp. 583-589, 1974.
- [11] Konstadinopoulos, P., Mook, D.T. and Nayfeh, A.H., “A Numerical Method for General Unsteady Aerodynamics”. AIAA-81-1877. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*, August 19–21, Albuquerque, New Mexico, 1981.
- [12] S. Preidikman, “Numerical Simulation of Interactions among Aerodynamics, Structural Dynamics, and Control Systems”. Ph.D. Dissertation, Department of Engineering Science and Mechanics, Virginia Tech, 1998

- [13] L. Prandtl y O. G. Tietjens *Applied Hydro- and Aeromechanics* Dover Publications, Inc., New York, 1997.
- [14] O. A. Kandil, D. T. Mook, and A. H. Nayfeh, “Nonlinear Prediction of the Aerodynamic Loads on Lifting Surfaces,” *Journal of Aircraft*, Vol. 13, pp. 22-28, January, 1976.
- [15] M. L.Verstraete, S. Preidikman, J. C. Massa, “Características aerodinámicas de aviones no-tripulados con alas que mutan” . *Mecánica Computacional*, Vol. 29, pp. 5081-5104, 2010.

Créditos de fotografías

Portada: Airbus A340 , Fabricio Jimenez, “*An amazing afternoon delight.*”

Figura 1.1: Águila americana, Roland Albanese.



Esta obra está licenciada bajo la Licencia Creative Commons Atribución-CompartirIgual 4.0 Internacional. Para ver una copia de esta licencia, visita <http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>.



UNC

Universidad
Nacional
de Córdoba



FCEFYN

Facultad de
Ciencias Exactas
Físicas y Naturales