EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XV JORNADAS

VOLUMEN 11 (2005)

TOMO II

Horacio Faas
Aarón Saal
Marisa Velasco
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

El estructuralismo *ante rem* en filosofía de las matemáticas: ¿una respuesta?

*Andrés Fernando Stisman**

Sabemos que la pregunta fundamental de la filosofía de la matemática es qué estudia la matemática. El realismo filosófico afirma que la matemática estudia objetos independientes de las mentes, las convenciones o los lenguajes matemáticos. Apoyan las tesis realistas argumentos como el siguiente: la matemática es indispensable para la ciencia y los enunciados de la ciencia son verdaderos, por lo tanto, los enunciados de la matemática son verdaderos; además, si por verdad se entiende la adecuación entre los enunciados y las cosas, entonces, la matemática hace referencia a cosas. Usualmente, se considera que la verdad de los enunciados matemáticos no se halla condicionada por los hechos del mundo físico, temporal y causal. Entonces, si los enunciados matemáticos hacen referencia a las cosas y tienen las características descriptas, cabría concluir que los objetos matemáticos están fuera del espacio, el tiempo y las relaciones causales. Esta es la forma más habitual de realismo matemático, que, por la analogía que sus objetos guardan con las ideas de Platón, suele llamarse también platonismo.

El realismo ha resultado atrayente fundamentalmente por dos razones: 1ª) Porque permite explicar la objetividad de los enunciados matemáticos y 2ª) Porque preserva íntegramente los resultados de la práctica matemática habitual. Sin embargo, el realismo es problemático pues, por lo menos en su vertiente platónica, que aparentemente es la más acorde a la naturaleza de la matemática pura, se compromete con la existencia de un reino matemático difícil de justificar.

Las posiciones idealistas pretenden resolver los problemas que genera el realismo afirmando que los objetos de la matemática no son independientes de las mentes, las convenciones y los lenguajes matemáticos. En esta línea se encuentran varias versiones de constructivismo según las cuales sólo existen los objetos matemáticos que han sido construidos. Sin embargo, las filosofías antirrealistas como el intuicionismo o el constructivismo en general implican un serio problema, tienen una actitud revisionista frente a la práctica matemática habitual, no la respetan en su totalidad, ya que rechazan principios lógicos como el del tercero excluido y matemáticos como el axioma de elección.

El estructuralismo aparece como una corriente que pretende dar cuenta de la objetividad de los enunciados matemáticos, sin que ello implique aceptar la existencia de un "tercer reino" de objetos ni cambiar la práctica matemática habitual.

En este trabajo, pretendo mostrar cuáles son las principales tesis de una de las versiones del estructuralismo, la versión *ante rem* que Stewart Shapiro desarrolla en *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, y realizar una evaluación crítica de la misma.

Comencemos señalando que mientras para el realismo ontológico la matemática estudia objetos independientes entre sí, para los estructuralistas, la esencia de

* Universidad Nacional de Tucumán

Epistemología e Historia de la Ciencia, Volumen 11 (2005)

un objeto matemático consiste únicamente en sus relaciones con otros objetos. Así, la esencia del número 2 es ser el sucesor de 1, el predecesor de 3, el primer número primo, etc.

Para los estructuralistas, un sistema es una colección de objetos con ciertas relaciones determinadas entre ellos, una estructura es la forma abstracta de un sistema y un objeto matemático no es más que un lugar en una estructura.

Los lugares o posiciones de una estructura pueden verse de dos formas: 1ª) Como puestos a ser ocupados por determinados objetos. 2ª) Como objetos en sí mismos.

La aceptación de la primera concepción sobre los lugares de una estructura es propia del estructuralismo *in re* cuyo principal representante es Michael Resnik. El estructuralismo *ante rem* adhiere a la segunda forma de concebir los objetos matemáticos. Otro rasgo fuerte del estructuralismo *ante rem* es la afirmación de que las estructuras existen sean o no ejemplificadas en un reino no estructural.

Caben ahora dos preguntas: 1ª) ¿Cuándo es adecuado decir que dos sistemas tienen la misma estructura? y 2ª) ¿Qué nos permite asegurar que una estructura matemática existe?

Comencemos abordando la primera cuestión. Una de las posibilidades es decir que dos sistemas tienen la misma estructura si son isomorfos; es decir, si hay una correspondencia biyectiva entre los objetos y relaciones del primer sistema y los objetos y relaciones del segundo sistema.

El problema del isomorfismo es que no explica totalmente lo que se afirma intuitivamente cuando se dice que dos sistemas tienen la misma estructura. Así, se podría decir que el sistema de los números naturales con la adición y el producto ejemplifica la misma estructura que el sistema de los números naturales con la adición, el producto y el orden ($0<1<2<3\ldots$). Sin embargo, estos sistemas no son isomorfos por tener diferentes conjuntos de relaciones, el primero no tiene la relación binaria $<$, aun cuando la relación de orden es definible en términos de la adición: $x < y$ si y sólo si $\exists z\ (z \neq 0\ \&\ x + z = y)$.

Resnik formuló una relación más adecuada para caracterizar cuándo dos sistemas tienen la misma estructura. Primero ha de verse qué es un subsistema completo: sea R un sistema y P un subsistema de R, se dice que P es un subsistema completo de R si tienen los mismos elementos y se pueden definir todas las relaciones de R en términos de las relaciones de P. La única diferencia entre P y R es que en P se omiten algunas relaciones que aparecen en R. Los sistemas M y N son equivalentes si hay un sistema R tal que M y N son isomorfos a subsistemas completos de R.

Con respecto a la segunda cuestión, Shapiro expresa que una estructura existe si hay una axiomatización coherente de ella. El problema que surge es qué es la coherencia. Lo más inmediato parece la identificación de la "coherencia" con la "consistencia", de modo que si no se pueden derivar consecuencias contradictorias de un conjunto de axiomas, entonces aquellos axiomas describen al menos una estructura. Shapiro expresa que esta tesis pareciera basarse en la idea expresada en el teorema de completitud de Gödel según el cual si un conjunto de sentencias de primer orden es deductivamente consistente, entonces el conjunto de sentencias es satisfacible. Sin embargo, en segundo orden esto no es así.

Para Shapiro, la noción de satisfacibilidad arroja mayor luz sobre lo que es la coherencia: un conjunto Γ de sentencias es satisfacible si hay un sistema en el que cada miembro de Γ es verdadero. Esto no implica que se defina la coherencia en términos de satisfacibilidad, pues decir que un conjunto Γ de sentencias es satisfacible es decir que existe un modelo de Γ en la jerarquía acumulativa; ahora bien, la jerarquía acumulativa es otra estructura, por lo que habría que demostrar que es coherente. Por ello, la coherencia no debe, según Shapiro, ser definida en términos de satisfacibilidad. La coherencia debe ser una noción primitiva, intuitiva, no reducible a nada formal.

Así pues, una estructura existe si es descripta por un conjunto coherente de sentencias, estando la noción de coherencia relacionada con la de satisfacibilidad. Ahora bien, ¿de qué clase de existencia se habla cuando se habla de la existencia de estructuras? Shapiro expresa que las estructuras matemáticas tienen existencia objetiva; ahora bien, el modo en que aprehendemos las estructuras y el modo en que dividimos el universo matemático en estructuras, sistemas y objetos depende de los recursos lingüísticos.

Llegados a este punto cabe preguntarse, ¿es el estructuralismo una filosofía de las matemáticas satisfactoria?, ¿resuelve los problemas que esta disciplina plantea? Sostenemos que el estructuralismo responde satisfactoriamente algunas cuestiones de la filosofía de la matemática, mas no otras.

Comencemos señalando algunos de los problemas que el estructuralismo resuelve, a saber:

1. *El problema de Julio César:*

En *Los Fundamentos de la Aritmética*, Frege plantea la cuestión del valor de verdad del enunciado "Julio César = 2". La pregunta es importante para Frege, puesto que si el dos es un objeto (y para Frege lo es), entonces, puesto que Julio César también lo es, debe estar determinado si son iguales o distintos.

Para el estructuralismo, una adecuada filosofía de la matemática no necesita responder a cuestiones como "¿Julio César = 2?" El número 2 es un lugar en una estructura de los números naturales. Así, es posible afirmar que $1 = 1$ o que $1 \neq 4$. Se pueden buscar identidades entre los números denotados por diferentes descripciones en el lenguaje de la aritmética, pero esto es muy diferente a preguntarse por la identidad entre un lugar en la estructura de los números naturales y un objeto de otro tipo. La identidad entre los números naturales está determinada, pero no la identidad entre números y otra clase de objetos o posiciones de otras estructuras.

2. *Multiplicidad de estructuras.*

La filosofía de la matemática puede hacer preguntas del siguiente tipo: ¿qué geometría es verdadera?, ¿la euclidiana o la no euclidiana?; ¿qué reducción de los números a la teoría de conjuntos es la adecuada?, ¿la de Zermelo o la de von Neumann? El estructuralismo pretende resolver esta clase de problemas de dos maneras diferentes.

1. Frente a cuestiones como qué geometría es verdadera, el estructuralismo responde de la siguiente forma: ambas teorías describen estructuras existentes desde el momento en que expresan un conjunto coherente de fórmulas.

2. Frente a cuestiones como qué reducción de los números naturales a la teoría de conjuntos es la correcta, si la de von Neumann o la de Zermelo, la respuesta es: es posible identificar posiciones de diferentes estructuras; así, se puede identificar el 2 con $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ pero también con $\{\{\varnothing\}\}$. Ahora bien, estas identidades no se descubren sino que se estipulan. Es decir, cada objeto matemático es un lugar en una estructura particular y los enunciados de identidad están determinados sólo si los términos que flanquean el signo de identidad denotan lugares en la misma estructura; de otro modo, la identidad es una cuestión de decisión basada en la conveniencia. No cabe preguntarse si 2 es $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ o $\{\{\varnothing\}\}$.

3. Relación entre matemática y ciencia.

El estructuralismo explica de manera parcial la relación entre la matemática y el universo no matemático. Los elementos del universo exhiben estructuras matemáticas en sus interrelaciones. Esto se debe a que los sistemas de objetos que cumplen las leyes físicas expresadas en términos matemáticos son ejemplificaciones de una estructura matemática en un área física en particular. Por ello, la relación entre la matemática y el universo material es, en parte, un caso especial del antiguo problema de la ejemplificación de los universales.

La explicación de la aplicación de la matemática tiene también sus limitaciones que veremos más adelante.

Ahora bien, más allá de los problemas a los que el estructuralismo da solución, sostenemos que hay cuestiones para las que no tiene respuesta adecuada, a saber:

1. Problemas de determinación de la naturaleza de los objetos matemáticos.

Hellman, en su conferencia dada en el Seminario de Lógica de la Universidad de Barcelona en 2000 "Three Varieties of Mathematical Structuralism", realizó algunas observaciones críticas al estructuralismo *ante rem* que expongo a continuación.

Si un objeto matemático es sólo el lugar en una estructura, surge el siguiente problema: considérense estructuras que admiten automorfismos no triviales como la que permuta 1 y -1 en el cuerpo de los enteros. Los elementos relacionados en estos casos por el automorfismo comparten todas las propiedades relacionales; por ello, el estructuralismo *ante rem* debería identificarlos. Sin embargo, no son lo mismo.

Según Hellmann, lo anterior está relacionado con el problema de la inteligibilidad de las relaciones puramente estructurales. Si se considera la estructura de los números naturales desde la perspectiva de Shapiro, los numerales denotan lugares en una estructura única y arquetípica que refleja lo que todas las progresiones tienen en común. Los lugares están absolutamente determinados por una función de sucesión. Ahora bien, es posible entender una relación de sucesión, un orden, en sistemas de objetos conocidos, como por ejemplo, los ordinales de Zermelo o von Neumann. Sin embargo, pareciera muy difícil entender una relación como la de sucesión sin conocer la naturaleza de los elementos que se ponen en sucesión.

2. Problemas de aplicación.
En un artículo de 1983, "Mathematics and Reality", Shapiro sostiene que la relación entre las matemáticas y la ciencia es básicamente la siguiente: 1) el matemático conoce estructuras matemáticas, 2) el científico descubre estas estructuras ejemplificadas en objetos físicos y 3) el conocimiento matemático que se tiene de la estructura se usa luego para sacar conclusiones de la estructura ejemplificada.

Las posiciones de Shapiro en el trabajo citado son problemáticas; pensemos, por ejemplo, en que es indudable que existen "objetos matemáticos" (como los números imaginarios) que tienen importantes aplicaciones en ingeniería pero que no representan objetos físicos. En *Philosophy of Mathematics*, Shapiro es conciente de esta dificultad y expresa que debe extenderse su explicación de la aplicación. Apela a la noción de modalidad y expresa que la ciencia no se limita a estudiar sólo sistemas reales sino también sistemas posibles, la ciencia estudiaría las contrapartes idealizadas de los objetos físicos. Ahora bien, podemos decir que esta afirmación, aunque pretende resolver el problema planteado, oscurece bastante las relaciones entre las estructuras matemáticas y la realidad.

3. La inutilización de la actividad filosófica.
Quine realizó una importante distinción entre ontología e ideología. La ontología de una teoría está determinada por los objetos que dicha teoría acepta. La ideología está dada por las nociones que dicha teoría contiene.

Normalmente, se suele hablar de un equilibrio compensatorio entre ontología e ideología. Considérese el siguiente ejemplo:

Field, en su *Science without Numbers*, defiende una posición nominalista según la cual todo es concreto y no hay objetos abstractos. Considera a los números objetos abstractos y por ello los rechaza. La ontología de Field no incluye números pero sí puntos y regiones del espacio-tiempo concebidos euclidianamente.

Según Field, su teoría del espacio tiempo no necesita de la matemática, la matemática es conservadora con respecto a su física. Es decir, cada vez que q es una consecuencia de P (teoría física) + S (enunciados matemáticos) combinados, q es una consecuencia sólo de P, claro está, si q no contiene términos matemáticos.

Field sostiene que para dar cuenta de la aplicabilidad de las matemáticas no se necesita que existan objetos matemáticos, sino sólo de su posibilidad, que estos puedan existir. Field propone un intercambio compensatorio entre ontología e ideología eliminando los objetos abstractos (como conjuntos y números) y aceptando nociones primitivas como la de posibilidad lógica.

Shapiro señala que esta perspectiva es errónea puesto que el espacio-tiempo de Field es equivalente al sistema de cuádruplos de números reales R^4. Shapiro expresa que si dos teorías involucran la misma estructura, entonces, sus complejos ideología/ontología son equivalentes. De allí que rechace que Field haya producido algún aporte de importancia.

Esta línea de argumentación aparece en el tratamiento de otros temas. En *Philosophy of Mathematics*, hace referencia a varias teorías alternativas al realismo que pretenden dar cuenta de la matemática como el estructuralismo modal de Hellman, el neoconstructivismo de Chihara y la cuantificación plural de Boolos. Sin embargo, Shapiro considera que estas propuestas poco o nada aportan porque son traducibles al realismo.

Tómese como referencia la propuesta de Hellman. La ideología del estructuralismo modal de Hellman contiene operadores de posibilidad y necesidad lógica. Hellman sostiene que la parte modal del lenguaje permite evitar compromisos ontológicos. En vez de decir que existe una estructura de números naturales, sostiene sólo que es posible que dicha estructura exista.

Shapiro advierte que hay una traducción directa del lenguaje realista al lenguaje estructuralista modal y viceversa. En términos generales, de lo que se trata es de reemplazar posibilidad por satisfacibilidad y necesidad por verdad lógica y viceversa.

Dos teorías son definicionalmente equivalentes si hay una función f_1 de la clase de sentencias de T en la clase de sentencias de T* y si hay una función f_2 de la clase de sentencias de T* en la clase de sentencias de T tal que:

1. f_1 y f_2 preservan ambas la verdad o su correspondiente en el caso no realista.
2. Para cualquier sentencia Φ de T, $f_2 f_1(\Phi)$ es equivalente a Φ en T y para cualquier sentencia Ψ de T*, $f_1 f_2(\Psi)$ es equivalente a Ψ en T*.

Si dos teorías son definicionalmente equivalentes, tienen la misma estructura, de allí que Shapiro exprese que las teorías de Field, Hellman, Chihara y Boolos tienen la misma estructura que la teoría "realista" estándar por lo que nada se gana con ellas.

Ahora bien, cabe preguntarse, ¿es lo mismo aceptar una ontología que acepte objetos abstractos que no aceptarlos?, ¿es lo mismo explicar la matemática desde una posición realista que desde un posición modal? Shapiro parece dar por hecho que si dos teorías son traducibles, explican las mismas cosas y hablan de lo mismo. Pero ¿habla de lo mismo quien sostiene que hay números y quien sostiene que no los hay? De aceptarse este aspecto de la propuesta estructuralista, perdería sentido la propia actividad de la filosofía de las matemáticas. El propio Shapiro aclara que las tres formas de estructuralismo (*in re*, modal y *ante rem*) son definicionalmente equivalentes y que son indistinguibles en lo ontológico y lo ideológico. Pero, si la propuesta de Hellman es definicionalmente equivalente al realismo y los estucturalismos *in re* y *ante rem* son definicionalmente equivalentes, entonces, cabría pensar que la propia propuesta de Shapiro es definicionalmente equivalente al realismo. Si esto es así, ¿qué viene a aportar la propia propuesta estructuralista *ante rem* de Shapiro? De llegar a las últimas consecuencias de la teoría de Shapiro habría que sostener que la propia reflexión filosófica sobre estos temas carece de sentido.

Bibliografía

Burguess, John 1999: Comentario del libro *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology* de s. Shapiro en *Journal of Symbolic Logic*, Volumen 40, nº2, 1999.

Chihara, Charles: *Constructibility and Mathematical Existence*, Oxford University Press, 1990.

Field , H. *Science Without Numbers*, Princeton University Press, Princeton, 1980.

Parsons, Charles: "The structuralist view of matematical objects", *Synthese* 84. 1990. pp. 303-346.

Resnik, M. *Mathematics as a Science of Patterns*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

Shapiro, Stewart: "Mathematics and Reality" en *Philosophy of Science*, 50, 1983. pp. 523-548.

Shapiro, Stewart: *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York, 1997.

Shapiro, Stewart: *Thinking about Mathematics*, Oxford University Press, New York, 2000.