Acotación con pesos de operadores integrales en espacios de Lebesgue y BMO^γ

Lic. Guillermo Javier Flores

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Marzo de 2016

Directora: Dra. Elida Vilma Ferreyra

"De Mí obtiene el Sol el calor que él emite,
y del mismo modo retengo y rocío la lluvia
sobre la superficie de la Tierra".

El Bhagavad Gita
Canto del Señor

Resumen

Una variedad de ideas relacionadas a las acotaciones con pesos surgió casi simultáneamente con la introducción de las integrales singulares, aunque no fue sino hasta la década de 1970 que se obtuvo una mejor comprensión sobre esta teoría. El impulso fue dado por la caracterización de Muckenhoupt de los pesos para los cuales el operador maximal de Hardy-Littlewood actúa sobre los espacios de Lebesgue en sí mismos. Esta caracterización llevó naturalmente a la introducción de la clase de Muckenhoupt y el desarrollo de las acotaciones con pesos.

La teoría de pesos tiene una destacada importancia en el estudio de problemas de valores en la frontera para la ecuación de Laplace en dominios de Lipschitz. Las acotaciones con pesos también se aplican a la teoría de extrapolación y a las estimaciones para ciertas clases de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

El objetivo principal de esta tesis es estudiar la acotación con pesos de una familia de operadores integrales en los espacios de Lebesgue y en los espacios generalizados de oscilación media acotada de John y Nirenberg BMO^{γ}. La idea fundamental para los resultados en los espacios de Lebesgue, es una simple acotación puntual de los operadores por una maximal local de Hardy-Littlewood y el operador de Calderón, ó por la maximal fraccionaria y el operador de Calderón modificado, dependiendo del grado de las singularidades de los operadores. Esto permite obtener inmediatamente las acotaciones entre espacios de Lebesgue con pesos en la clase de Muckenhoupt. Asimismo se logra caracterizar los pesos potencia para estas acotaciones.

Posteriormente, analizando una localización y la parte global de los operadores, se obtienen en el caso fraccionario, las acotaciones con pesos desde los espacios L^p-débiles de Lebesgue en espacios adecuados BMO^{γ}, para p que supera el exponente crítico, y pesos que satisfacen una condición de duplicación y una condición reversa de Hölder. Luego se definen espacios de tipo BMO^{γ} local y se obtienen, en el caso general, las acotaciones desde estos espacios en BMO^{δ} para pesos que satisfacen una condición de duplicación. Finalmente, se demuestran resultados análogos para generalizaciones del operador de Calderón y del operador integral de Hilbert.

Palabras claves: espacios de Lebesgue, espacios BMO, desigualdades pesadas, operadores integrales, pesos de Muckenhoupt, espacios de Lipschitz.

2010 Mathematics subject Classification: 30H35, 42B25, 42B35.

Abstract

A collection of ideas related to weighted inequalities appeared almost simultaneously with the introduction of singular integrals. But it was not until the 1970's that a better understanding of this theory was developed. The advances were made possible by Muckenhoupt's characterization of the weights for which the Hardy-Littlewood maximal operator maps Lebesgue spaces into themselves. This characterization motivated the definition of the Muckenhoupt class of weights and related results for weighted inequalities.

The theory of weights is important in the study of boundary value problems for the Laplace equation on Lipschitz domains. Additionally, weighted inequalities find applications to the theory of extrapolation of operators and are useful to deduce estimates for certain non-linear PDE's.

The main objective of this thesis is to study weighted boundedness of a family of integral operators on Lebesgue spaces and on generalized spaces of John and Niremberg of mean bounded oscillation BMO^γ. The fundamental idea for the first set of results is a simple pointwise bound of the operators by a local Hardy-Littlewood maximal plus the Calderón operator, or by the fractional maximal operator plus the modified Calderón operator, depending on the degree of the singularities of these operators. From this, the boundedness on Lebesgue spaces with weights in the Muckenhoupt class, follow immediately. Moreover, the power weights for which boundedness holds are characterized.

Later, the boundedness with weights of the original operators, in the case fractional, from weak-L^p Lebesgue spaces into appropriate BMO^γ spaces is obtained for p exceeding the critical exponent, and weights satisfying a doubling condition and a reverse Hölder condition. This result is based on the analysis of a localization and the global part of the original operators. Further, local type BMO^γ spaces are defined and weighted boundedness from these spaces into BMO^δ is proved for weights satisfying a doubling condition. Finally, analogous results are proved for generalizations of the Calderon operator and the integral operator of Hilbert.

Key words: Lebesgue spaces, BMO spaces, weighted inequalities, integral operators, Muckenhoupt weights, Lipschitz spaces.

2010 Mathematics subject Classification: 30H35, 42B25, 42B35.

Agradecimientos

A mis padres y a mis hermanos.

A mis abuelos, a mis padrinos y a mis hermosas ahijadas.

A mis tíos y a todos mis primos.

A mi gran familia.

A mis amigos y compañeros.

En especial a mi directora.

Al jurado de mi tesis.

A todos mis profesores.

Cada uno ocupa un espacio importante en mi vida.
Muchas gracias a todos, porque es por Ustedes que puedo reir, ser libre y ser feliz.

A la FaMAF, al CIEM, a la UNC, al CONICET y a la SeCyT. Muchas Gracias.

Índice general

Resumen III

Abstract V

Agradecimientos VII

Índice general IX

Introducción XI

1. Preliminares **1**

1.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood . . . 1

1.2. El operador de Calderón y la maximal local de Hardy-Littlewood . . . 5

1.3. El operador integral fraccionario y el operador maximal fraccionario . . . 7

1.4. Clases de pesos y un espacio débil de Lebesgue . . . 9

1.5. El operador de Calderón modificado . . . 10

2. Acotación de T_α **13**

2.1. Acotación de T_α sobre L^p . . . 13

2.2. Acotación de T_α sobre L^∞ . . . 16

2.3. Acotación de T_α sobre BMO de tipo local . . . 19

2.4. Comparación entre espacios . . . 27

3. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ **29**

3.1. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ de L^p en L^q . . . 29

3.2. Clases de pesos y espacios de funciones para la acotación de $T_{\alpha,\beta}$ 30
3.3. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ 33
3.4. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ sobre $BMO^\gamma(\omega)$ 41

4. Acotación del operador de Calderón y del operador integral de Hilbert **49**
4.1. Acotación de S_α sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $BMO^\gamma(\omega)$ 49
4.2. Acotación de H_α sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $BMO^\gamma(\omega)$ 55

Bibliografía **61**

Índice alfabético **65**

Introducción

El estudio de desigualdades con pesos ha adquirido un creciente interés desde que B. Muckenhoupt lo iniciara sistemáticamente en 1972 con su artículo "Weighted norm inequalities for the Hardy-Littlewood maximal function" [Muc72], debido a la importancia del operador maximal de Hardy-Littlewood en el análisis real y armónico. Luego, en 1974 Muckenhoupt y Wheeden publicaron "Weighted norm inequalities for fractional integrals" [MW74], donde los autores introdujeron el operador maximal fraccionario que en las estimaciones con pesos para los Potenciales de Riesz, desempeña un rol similar al del operador maximal de Hardy-Littlewood en las integrales singulares.

En esta tesis estudiaremos las acotaciones con pesos para ciertas familias de operadores integrales sobre diferentes espacios de funciones.

Comenzamos considerando la siguiente familia de operadores, sea n un número natural y $0 < \alpha < n$, definimos T_α por

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy.$$

Estos operadores fueron introducidos por Ricci y Sjögren como una herramienta para demostrar algunos resultados relacionados al grupo de Heisenberg. Ellos necesitaron la acotación de T_α sobre $L^2(\mathbb{R})$ y la probaron en su publicación [RS88]. Pocos años más tarde, se demostraron las acotaciones sobre $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 < p < \infty$, en [GU93]. Posteriormente, en [RU05] se obtuvieron las acotaciones con pesos sobre $L^p(\omega)$, $1 < p < \infty$, para lo cual se usó que el resultado en el caso $\omega \equiv 1$ era válido. En ese mismo artículo se estudió la acotación desde $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ en el espacio clásico de John y Nirenberg BMO, y más recientemente, en [RU13] uno de los objetos de estudio fue la acotación con pesos desde $L^\infty(\omega^{-1})$ en $BMO(\omega)$. También, en [RU12] se estudiaron las acotaciones sobre los espacios de Hardy H^p.

Nosotros abordamos el estudio de T_α desde otro punto de vista. Comenzamos el análisis de las acotaciones mostrando de una manera simple que T_α se puede controlar puntualmente con una maximal local de Hardy-Littlewood y el operador de Calderón. Este enfoque nos permitió obtener las acotaciones de tipo (p,p), $1 < p < \infty$, con pesos perteneciendo a la clase A_p de Muckenhoupt, y la acotación de tipo débil $(1,1)$ con pesos perteneciendo a la clase A_1, sin necesidad de mostrar primero el caso $\omega \equiv 1$. Además, logramos caracterizar los pesos potencia ω para los cuales T_α es acotado de $L^p(\omega)$ en sí mismo, lo cual enunciamos a continuación.

Teorema A. *Sea ω un peso potencia y sea $1 < p < \infty$.*

- *El operador T_α es de tipo fuerte pesado (p,p) asociado al peso ω, si y sólo si $\omega \in A_p$.*
- *El operador T_α es de tipo débil pesado $(1,1)$ asociado al peso ω, si y sólo si $\omega \in A_1$.*

Si bien ha sido estudiada la acotación de T_α desde $L^\infty(\omega^{-1})$ en $BMO(\omega)$, observamos que $|T_\alpha f|$ es idénticamente infinito para funciones f constantes, por lo tanto no se puede esperar la acotación de T_α desde todo el espacio L^∞. Luego, cada vez que consideremos un operador T definido sobre un espacio de funciones X, denotaremos por $E(X)$ el conjunto de funciones f en X tales que $|Tf(x)|$ es finito para algún punto $x \in \mathbb{R}^n$ no nulo, siempre que no se preste a confusión cuál es el operador en cuestión. Entonces, uno de los resultados obtenidos en [RU13] es la acotación de T_α desde $E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big)$ en $BMO(\omega)$ para $\omega \in A_1$ tal que $\omega(x) \leq C\omega(-x)$ para casi todo x.

Es natural preguntarse si T_α puede ser extendido continuamente a un espacio más grande de tipo BMO. En esta dirección, realizamos el análisis de una localización de T_α y de la parte global del mismo, lo cual nos condujo a definir un espacio de tipo $BMO(\omega)$-local denotado por $BMO_0(\omega)$, que es intermedio entre $L^\infty(\omega^{-1})$ y $BMO(\omega)$.

El espacio $BMO_0(\omega)$ consiste de las funciones $f \in BMO(\omega)$ tales que el promedio $\dfrac{1}{\omega(B)}\displaystyle\int_B |f|$ es uniformemente acotado para bolas B centradas en el origen. Denotamos por $\|\cdot\|_{BMO_0(\omega)}$ la norma que es natural asociar a este espacio. Concretamente hemos demostrado.

Teorema B. *Sea $f \in E\big(BMO_0(\omega)\big)$. Si $\omega \in A_1$ y satisface $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $T_\alpha f \in BMO(\omega)$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|T_\alpha f\|_{BMO(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.$$

Estos resultados han sido publicados en [FF15a] y están desarrollados en el Capítulo 2 de la tesis.

Para continuar, hemos considerado una generalización de tipo fraccionario de T_α. Sean $\alpha, \beta > 0$ tales que $\alpha + \beta \leq n$. Definimos $T_{\alpha,\beta}$ por

$$T_{\alpha,\beta} f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^\beta} dy.$$

Muckenhoupt y Wheeden en [MW74] caracterizaron los pesos para los cuales el operador integral fraccionario I_α actúa desde $L^p(\omega^p)$ en $L^q(\omega^q)$ para $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - \alpha/n$.

En este contexto, demostrando de una manera simple una acotación puntual de $T_{\alpha,\beta}$ por los operadores maximal franccionario y de Calderón modificado, hemos obtenido la acotación con pesos de $T_{\alpha,\beta}$ desde $L^p(\omega^p)$ en $L^q(\omega^q)$ para adecuados p y q, y $\omega \in A_{p,q}$. Este resultado también está demostrado en [RU13] usando otras técnicas del análisis.

Para estas acotaciones hemos logrado caracterizar los pesos potencia, lo cual enunciamos a continuación. Denotamos $\lambda = n - (\alpha + \beta)$.

Teorema C. *Sean $\alpha+\beta<n$, $1<p<n/\lambda$ y $1/q=1/p-n/\lambda$. Si $\omega(x)=|x|^a$ es un peso potencia, entonces $\omega\in A_{p,q}$ si y sólo si existe C indenpendiente de f tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta}f\|_{L^q(\omega^q)}\leq C\|f\|_{L^p(\omega^p)}.$$

Continuando naturalmente el análisis de I_α, en [HSV97] los autores caracterizaron los pesos para los cuales I_α es acotado desde una versión débil de los espacios de Lebesgue pesados, $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$, con $n/\alpha\leq p<n/(\alpha-1)^+$, en adecuados espacios de Lipschitz pesados, y también entre espacios de Lipschitz pesados. En particular, $BMO(\omega)$ y $BMO^\gamma(\omega)$ son espacios de Lipschitz pesados.

En este sentido, hemos estudiado las acotaciones con pesos de $T_{\alpha,\beta}$ desde $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ en $BMO^\gamma(\omega)$, y entre espacios $BMO^\gamma(\omega)$, para lo cual hemos analizado independientemente las partes local y global del operador.

Precisamente, consideramos los siguientes espacios de funciones. Sean ω un peso y $0\leq\gamma<n$. Una función f medible Lebesgue pertenece a $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ si

$$\|f\|^p_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}=\sup_{t>0}t^p\Big|\{x\in\mathbb{R}^n:|f(x)|\omega^{-1}(x)>t\}\Big|<\infty.$$

Una función f localmente integrable pertenece a $BMO^\gamma(\omega)$ si existe una constante C tal que para toda bola $B\subset\mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma}\int_B|f-f_B|\leq C.$$

Luego, una función f pertenece a $BMO^\gamma_0(\omega)$, si $f\in BMO^\gamma(\omega)$ y existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma}\int_B|f|\leq C$$

para toda bola $B\subset\mathbb{R}^n$ centrada en el origen. Denotamos por $\|\cdot\|_{BMO^\gamma(\omega)}$ y $\|\cdot\|_{BMO^\gamma_0(\omega)}$ las normas que son naturales de asociar a estos espacios. Por último, dado $\eta\geq1$, decimos que ω pertenece a D_η, si satisface la siguiente condición de duplicación

$$\omega(tB)\leq Ct^{n\eta}\omega(B),$$

para todo $t>1$ y para toda bola $B\subset\mathbb{R}^n$.

A continuación enunciamos los resultados principales que hemos obtenido. Para tal fin, denotamos por $\lambda=n-(\alpha+\beta)$, $J_\lambda=\big[\frac{n}{\lambda},\frac{n}{(\lambda-1)^+}\big)$ y $RH(p)$ la condición reversa de Hölder con exponente p.

Teorema D. *Supongamos que $\alpha+\beta<n$ y $p\in J_\lambda$. Sea ω un peso que satisface $\omega\in RH(p')$, $\omega\in D_\eta$ para algún $1\leq\eta<\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{1}{n}+\frac{1}{p}$, y $\omega(-x)\leq c\omega(x)$ para casi todo $x\in\mathbb{R}^n$. Si $f\in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ entonces $T_{\alpha,\beta}f\in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta=1-\frac{\alpha+\beta}{n}-\frac{1}{p}$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta}f\|_{BMO^\delta(\omega)}\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

Teorema E. *Supongamos que* $n-1<\alpha+\beta\leq n$ *y* $0\leq\gamma<\frac{1}{n}$. *Sea* ω *un peso que satisface* $\omega\in D_\eta$, *para algún* $1\leq\eta<\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{1}{n}-\gamma$, *y* $\omega(-x)\leq c\omega(x)$ *para casi todo* $x\in\mathbb{R}^n$. *Si* $f\in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ *entonces* $T_{\alpha,\beta}f\in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta=1-\frac{\alpha+\beta}{n}+\gamma$. *Más aún, existe* C *independiente de* f *tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta}f\|_{BMO^\delta(\omega)}\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

El Teorema D extiende el correspondiente resultado probado en [RU13] para el caso $p=n/(n-(\alpha+\beta))$, es decir, $\delta=0$. Pues el teorema implica la acotación de $T_{\alpha,\beta}$ desde un espacio más grande $E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ y para una clase más amplia de pesos. Por otro lado, si bien el espacio de llegada $BMO^0(\omega)$ es más grande que la versión pesada de BMO usada en [RU13], ambos espacios coinciden para los pesos ω tales que $\omega^{n/(\alpha+\beta)}\in A_1$ (ver Observación 1.1.12 del Capítulo 1), considerados en ese artículo.

El Teorema E extiende el resultado de tipo BMO obtenido en [FF15a], pues ahora consideramos una clase más amplia de pesos. Por otro lado, el caso límite $p=\infty$ ($p'=1$) del Teorema D se corresponde con el Teorema E para $\gamma=0$, debido a que las hipótesis sobre los pesos coinciden.

Los resultados obtenidos para la familia de operadores $T_{\alpha,\beta}$ están contenidas en el trabajo [FF15b], enviado para ser considerado para su publicación, y están desarrollados en el Capítulo 3 de la tesis.

Habiendo comparado puntualmente la parte global de T_α con el operador de Calderón S, nos llevó a preguntarnos si se podrían obtener para S resultados similares a los teoremas D y E. A partir de esto, definimos el operador de Calderón modificado S_α por

$$S_\alpha f(x)=\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_{|y|\leq|x|}f(y)dy+\int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy,$$

con $0\leq\alpha<n$, siendo $S_0=S$.

A su vez, como S es comparable puntualmente con el operador integral de Hilbert H, definimos el operador integral de Hilbert modificado H_α por

$$H_\alpha f(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}dy,$$

con $0\leq\alpha<n$, siendo $H_0=H$.

Para estos operadores hemos obtenido.

Teorema F. (i) *Supongamos que* $\alpha>0$ *y* $\frac{n}{\alpha}\leq p<\frac{n}{(\alpha-1)^+}$. *Sea* ω *un peso que satisface* $\omega\in RH(p')$ *y* $\omega\in D_\eta$ *para algún* $1\leq\eta<1+\frac{1-\alpha}{n}+\frac{1}{p}$. *Si* $f\in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ *entonces* $S_\alpha f\in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta=\frac{\alpha}{n}-\frac{1}{p}$. *Más aún, existe* C *indenpendiente de* f *tal que*

$$\|S_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)}\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

(ii) Supongamos que $0 \le \alpha < 1$ *y* $0 \le \gamma < \frac{1}{n}$. *Sea* ω *un peso en* D_η *para algún* $1 \le \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} - \gamma$. *Si* $f \in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ *entonces* $S_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta = \frac{\alpha}{n} + \gamma$. *Más aún, existe* C *independiente de* f *tal que*

$$\|S_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

Teorema G. *(i) Supongamos que* $\alpha > 0$ *y* $\frac{n}{\alpha} \le p < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$. *Sea* ω *un peso que satisface* $\omega \in RH(p')$ *y* $\omega \in D_\eta$ *para algún* $1 \le \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} + \frac{1}{p}$. *Si* $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ *entonces* $H_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p}$. *Más aún, existe* C *indenpendiente de* f *tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

(ii) Supongamos que $0 \le \alpha < 1$ *y* $0 \le \gamma < \frac{1}{n}$. *Sea* ω *un peso en* D_η *para algún* $1 \le \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} - \gamma$. *Si* $f \in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ *entonces* $H_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta = \frac{\alpha}{n} + \gamma$. *Más aún, existe* C *independiente de* f *tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

En los teoremas para T_α y $T_{\alpha,\beta}$, una de las hipótesis sobre los pesos ω es que satisfagan $\omega(-x) \le c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, y está relacionada a las singularidades de los operadores. Pero, en los Teoremas F y G, esa hipótesis no es necesaria.

Los resultados para los operadores S_α y H_α están desarrollados en el Capítulo 4 de la tesis.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo introduciremos conceptos conocidos del análisis real y armónico que luego necesitaremos para enunciar y demostrar los resultados obtenidos a lo largo de esta tesis.

En general se dejará alguna referencia donde pueden encontrarse los detalles.

1.1. El operador maximal de Hardy-Littlewood

Las funciones maximales surgen naturalmente en el análisis armónico y han sido objetos de estudio para la comprensión y resolución de una amplia variedad de problemas en distintas áreas de la matemática. Una de las funciones maximales más destacada y estudiada ha sido la de Hardy-Littlewood, sus propiedades y su comportamiento están totalmente relacionados a la teoría de pesos de Muckenhoupt. Esta es una buena razón quizás, para asegurar que el estudio de acotación con pesos de operadores, es importante.

Dada una función f medible Lebesgue y localmente integrable, la función maximal Mf es el valor más grande de los promedios de f en cada punto. Precisamente, damos la siguiente definición.

Definición 1.1.1. Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, entonces Mf, la función maximal de Hardy-Littlewood de f, se define para $x \in \mathbb{R}^n$ por

$$Mf(x) = \sup_{B:x\in B} \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy, \tag{1.1}$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x. Estamos denotando por $|B|$ la medida de Lebesgue de B.

Existen diferentes definiciones del operador maximal de Hardy-Littlewood pero todas son equivalentes entre sí. Por ejemplo, una definición comúnmente usada por muchos autores es, reemplazar las bolas B de (1.1) por cubos Q que contienen a x para luego tomar el supremo sobre tales cubos Q. En [Gra09] y [CUF13] se pueden encontrar algunas de las definiciones equivalentes a la Definición 1.1.1. A medida que avancemos en la tesis, daremos varias definiciones utilizando bolas, pero como sucede para el operador maximal de Hardy-Littlewood, existen otras definiciones equivalentes.

Una función ω definida en $\mathbb{R}^n$ se dice un peso, si es localmente integrable y positiva en casi todo punto. Sea $1 \leq p < \infty$, un peso ω pertenece a la clase de Muckenhoupt, y lo denotamos por $\omega \in A_p$, si existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < C, \quad \text{si } 1 < p < \infty, \tag{1.2}$$

$$\frac{\omega(B)}{|B|} \leq C \operatorname*{ess\,inf}_{x\in B} \omega(x), \quad \text{si } p = 1, \tag{1.3}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, donde $\omega(B) = \displaystyle\int_B \omega$. Se define la clase A_∞ por

$$A_\infty = \bigcup_{1\leq p<\infty} A_p.$$

Sea ω un peso. Definimos el espacio $L^p(\omega)$, $1 < p < \infty$, como la colección de todas las funciones f medibles Lebesgue tales que

$$\|f\|_{L^p(\omega)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx\right)^{1/p} < \infty.$$

También, definimos el espacio $L^\infty(\omega)$ como la colección de todas las funciones f medibles Lebesgue tales que

$$\|f\|_{L^\infty(\omega)} = \|f\omega\|_\infty < \infty.$$

Nos referimos al espacio $L^p(\omega)$ como el espacio de Lebesgue pesado con exponente p.

El siguiente teorema muestra la relación entre la clase A_p y el operador maximal M. Una demostración de este resultado y las definiciones dadas anteriormente, están contenidas en [Duo01].

Teorema 1.1.2. *Sean $1 \leq p < \infty$ y ω un peso. Entonces $\omega \in A_p$ si y sólo si existe C tal que*

$$\omega\big(\{x \in \mathbb{R}^n : Mf(x) > t\}\big) \leq \frac{C}{t^p}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx, \tag{1.4}$$

para toda $f \in L^p(\omega)$ y para todo $t > 0$.

Más aún, si $p > 1$, entonces $\omega \in A_p$ si y sólo si existe C tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \big(Mf(x)\big)^p \omega(x)dx \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \omega(x)dx. \tag{1.5}$$

para toda $f \in L^p(\omega)$.

En general, si un operador satisface una condición como (1.4), se dice que es de tipo débil pesado (p, p) con respecto al peso ω, o bien que es de tipo débil pesado (p, p), cuando el contexto sea claro. Del mismo modo, si un operador satisface una condición como (1.5), se dice que es de tipo fuerte pesado (p, p), o bien que es de tipo pesado (p, p). Es usual denotar (1.4) y (1.5) por

$$\|Mf\|_{L^{p,\infty}(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)} \quad \text{y} \quad \|Mf\|_{L^p(\omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}$$

respectivamente.

Observación 1.1.3. Una caracterización de la acotación con pesos para M que se puede obtener de las definiciones, es la siguiente.

Sea ω un peso. Entonces $\omega \in A_1$ si y sólo si existe una constante C tal que

$$\|Mf\|_{L^\infty(\omega^{-1})} \leq C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}.$$

para toda $f \in L^\infty(\omega^{-1})$.

La clase de pesos de Muckenhoupt A_p tiene propiedades que permiten estudiar la acotación con pesos de varios operadores importantes en el análisis armónico. Nosotros enunciaremos algunas de estas propiedades, que luego necesitaremos en los siguientes capítulos. Las demostraciones se pueden encontrar en [Gra09].

Dado $1 < p < \infty$, sea p' tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. El número p' se llama el exponente conjugado de p. Si $p = 1$, su conjugado será $p' = \infty$, y si $p = \infty$, su conjugado será $p' = 1$.

Proposición 1.1.4. *Dado $1 \leq p < \infty$.*
(1) Si $p > 1$ y $\omega \in A_p$, entonces $\omega^{1-p'} \in A_{p'}$.
(2) Si $p < q < \infty$, entonces $A_p \subset A_q$.
(3) La medida $\omega(x)dx$ es duplicante, precisamente, existe C tal que

$$\omega(\lambda B) \leq C\lambda^{np}\omega(B).$$

para todo $\lambda > 1$ y para toda bola B.
(4) El peso potencia $\omega(x) = |x|^a \in A_1$ si y sólo si $-n < a \leq 0$. Sea $1 < p < \infty$, $\omega(x) = |x|^a \in A_p$ si y sólo si $-n < a < (p-1)n$.

Definición 1.1.5. Dado $1 < p < \infty$, un peso ω satisface la desigualdad reversa de Hölder con exponente p y lo denotamos por $\omega \in RH(p)$, si existe una constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^p\right)^{1/p} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B \omega,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1.6. *Sea $1 \leq p < \infty$, si $\omega \in A_p$ entonces existe $q > 1$ tal que $\omega \in RH(q)$.*

Para poder demostrar el teorema anterior, en general se necesita un resultado previo sobre los pesos en A_p, que enunciamos a continuación.

Lema 1.1.7. *Sean $\omega \in A_p$ y $0 < \alpha < 1$, entonces se cumplen.*
(1) Existe $0 < \beta < 1$ tal que para cualquier E subconjunto medible de una bola B que satisface $|E| \geq \alpha|B|$, tenemos que $\omega(E) \geq \beta\omega(B)$.
(2) Existe $0 < \beta < 1$ tal que para cualquier E subconjunto medible de una bola B que satisface $\alpha|B| \geq |E|$, tenemos que $\beta\omega(B) \geq \omega(E)$.

Una propiedad importante de la clase de Muckenhoupt que se desprende del Teorema 1.1.6 es la siguiente.

Corolario 1.1.8. *Si $\omega \in A_p$, entonces existen $\epsilon > 0$ y C constante tales que para toda bola B y E subconjunto medible de B se satisface*

$$\frac{\omega(E)}{\omega(B)} \leq C\left(\frac{|E|}{|B|}\right)^{\epsilon}.$$

Un último resultado que mencionamos es que se satisface la recíproca del Teorema 1.1.6.

Teorema 1.1.9. *Si $\omega \in RH(p)$ con $1 < p < \infty$, entonces $\omega \in A_\infty$.*

Notemos que en esta sección primero hemos introducido el operador maximal M, luego la clase de pesos A_p y por último los espacios de Lebesgue pesados $L^p(\omega)$. Después hemos enunciado el Teorema 1.1.2 que relaciona estos conceptos. Frecuentemente usaremos este esquema para introducir los operadores y enunciar las acotaciones con pesos asociados a estos operadores sobre adecuados espacios de funciones.

Finalizamos esta sección introduciendo el espacio pesado BMO. En [JN61], John y Nirenberg introdujeron las funciones de oscilación media acotada, BMO, como las funciones $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| \leq C,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ y alguna constante C, donde $f_B = \dfrac{1}{|B|}\displaystyle\int_B f$. Luego, una posible definición para el espacio pesado BMO es la siguiente.

Definición 1.1.10. Sea ω un peso. Una función f localmente integrable pertenece a $BMO(\omega)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f - f_B| \leq C, \tag{1.6}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

La seminorma de f en $BMO(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO(\omega)}$, es el ínfimo sobre tales constantes C.

Observación 1.1.11. Si ω es un peso duplicante, en el sentido de la Proposición 1.1.4, entonces para verificar que una función f localmente integrable pertenece a $BMO(\omega)$, es suficiente verificar que satisface la condición (1.6) para todas las bolas centradas en el origen y para todas las bolas $B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ de centro x y radio $r < c|x|$, donde c es una constante fija tal que $0 < c < 1$.

Observación 1.1.12. En [MW74] y [RU13] consideran el espacio BMO pesado respecto del peso ω como el conjunto de las funciones $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tales que

$$\sup_B \|\omega^{-1}\chi_B\|_\infty \frac{1}{|B|}\int_B |f - f_B| \leq C,$$

para alguna constante C, donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$. Denotamos, convenientemente en esta ocasión, $\mathsf{BMO}(\omega)$ a este espacio, para compararlo con el espacio $BMO(\omega)$ de la Definición 1.1.10. No es difícil mostrar que $\mathsf{BMO}(\omega) \subset BMO(\omega)$ para cualquier peso ω. Por otro lado, si $\omega^r \in A_1$ con $r \geq 1$, entonces se puede ver sin dificultad que $\mathsf{BMO}(\omega) = BMO(\omega)$.

El espacio BMO surge naturalmente de la clase de funciones que tienen desviación de sus promedios sobre cubos o bolas acotada. Este espacio de funciones es un objeto importante en el estudio del análisis armónico y está relacionado con el espacio de Hardy H^1, las medidas de Carleson, con problemas de Deformación Elástica, etc.

Una de las propiedades que usaremos del espacio $BMO(\omega)$ es la siguiente.

Proposición 1.1.13. *Si f es una función localmente integrable entonces*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO(\omega)} \leq \sup_B \frac{1}{\omega(B)} \inf_{C_B} \int_B |f(x) - C_B|dx \leq \|f\|_{BMO(\omega)},$$

donde C_B es una constante que depende de la bola B.

La demostración de esta proposición se puede encontrar en [Gra09], realizando las modificaciones obvias.

1.2. El operador de Calderón y la maximal local de Hardy-Littlewood

En esta sección enunciaremos algunos resultados de acotaciones con pesos para el operador de Calderón y la maximal local de Hardy-Littlewood, que luego usaremos en el Capítulo 2. En los siguientes teoremas enunciados, se puede apreciar cómo el comportamiento de estos operadores está relacionado a ciertas clases de pesos similares a la clase de Muckenhoupt.

Consideramos el operador clásico de Hardy P y su adjunto Q definidos por

$$Pf(x) = \frac{1}{|x|^n}\int_{|y|\leq|x|} f(y)dy, \quad Qf(x) = \int_{|y|\geq|x|} \frac{f(y)}{|y|^n}dy,$$

y el operador de Calderón S definido por

$$Sf(x) = Pf(x) + Qf(x).$$

En [DMRO13], los autores dan una caracterización sobre los pesos ω para los cuales el operador S es acotado en $L^p(\omega)$ para $1 < p < \infty$, y es de tipo débil pesado $(1,1)$. Llamaron a esta clase de pesos $A_{p,0}$. Específicamente, un peso ω pertenece a la clase $A_{p,0}$ si satisface la condición (1.2) o (1.3) según corresponda, pero sólo para bolas centradas en el origen. Ellos obtuvieron el siguiente teorema.

Teorema 1.2.1. *Sean $1 < p < \infty$ y ω un peso. El operador S es de tipo fuerte pesado (p,p) o de tipo débil pesado (p,p) si y sólo si $\omega \in A_{p,0}$. El operador S es de tipo débil pesado $(1,1)$ si y sólo si $\omega \in A_{1,0}$.*

En [LS10], los autores estudiaron las acotaciones con pesos sobre $L^p(\omega)$ para una maximal local. Para definir el operador maximal local de Hardy-Littlewood, introdujeron cubos locales de la siguiente manera: para $0 < k < 1$, un cubo $Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\|_\infty < r\}$ centrado en x con "radio" r y con lados paralelos a los ejes de coordenadas, es un cubo k-local si $0 < r \leq k|x|$. Denotaron por $\mathcal{O}_k$ la familia de todos los cubos k-locales y definieron una maximal local de Hardy-Littlewood por

$$M_{k,loc}f(x) = \sup_{Q \in \mathcal{O}_k : x \in Q} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f|, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

donde el supremo se toma sobre todos los cubos $Q \in \mathcal{O}_k$ tales que $x \in Q$.

En ese mismo trabajo, caracterizaron la clase de pesos para los cuales $M_{k,loc}$ es acotado de $L^p(\omega)$ en sí mismo para $1 < p < \infty$, y de tipo débil pesado $(1,1)$. Esta clase de pesos, denotada por $A_{p,k,loc}$, consiste de los pesos que satisfacen la condición (1.2) o (1.3) según corresponda, pero sólo para cubos k-locales. Después, probaron que $A_{p,k,loc} = A_{p,k\prime,loc}$ para cualesquiera $0 < k, k\prime < 1$. Por lo tanto, esta clase de pesos es denotada simplemente por $A_{p,loc}$ y se define

$$A_{\infty,loc} = \bigcup_{1 \leq p < \infty} A_{p,loc}.$$

Ellos obtuvieron el siguiente teorema.

Teorema 1.2.2. *Sea $0 < k < 1$ y sea ω un peso. El operador $M_{k,loc}$ es de tipo fuerte pesado (p,p) o de tipo débil pesado (p,p) para $1 < p < \infty$ si y sólo si $\omega \in A_{p,loc}$. El operador $M_{k,loc}$ es de tipo débil pesado $(1,1)$ si y sólo si $\omega \in A_{1,loc}$.*

En ambos artículos [DMRO13] y [LS10] algunas de las propiedades más importantes de la clase A_p son estudiadas en $A_{p,0}$ y $A_{p,loc}$, debido a que claramente las clases $A_{p,0}$ y $A_{p,loc}$ son más grandes que la clase A_p.

Continuando con el análisis de la maximal local, en [CRH11] y [HCR14] se estudiaron las acotaciones con pesos de $M_{k,loc}$ sobre adecuados espacios de tipo BMO locales, definidos sobre la semirrecta $\mathbb{R}^+ = (0,\infty)$. Para esto, llamaron intervalos sub-k-críticos a los intervalos $I(x,r) = (x-r, x+r)$ si $r < k|x|$, intervalos k-críticos si $r = k|x|$ e intervalos supra-k-críticos si $r > k|x|$ y no contienen al cero. En este contexto, los pesos son funciones localmente integrables, positivas en casi todo punto y definidas en la semirrecta $\mathbb{R}^+$.

Definición 1.2.3. Sean $0 < k < 1$ y ω un peso definido en $\mathbb{R}^+$. Una función f localmente integrable sobre $\mathbb{R}^+$ pertenece a $BMO_{k,loc}(\omega)$ si existe una constante C tal que se satisfacen

$$\frac{1}{\omega(I)} \int_I |f(x) - f_I| dx < C,$$

para todo intervalo I sub-k-crítico, y

$$\frac{1}{\omega(I)}\int_I |f(x)|dx < C,$$

para todos los intervalos I k-críticos y supra-k-críticos.

Si ω es un peso definido en $\mathbb{R}^+$, se define la norma de f en $BMO_{k,loc}(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO_{k,loc}(\omega)}$, como el ínfimo de las constantes C que satisfacen ambas condiciones de la definición 1.2.3.

En [CRH11], los autores obtuvieron el siguiente resultado.

Teorema 1.2.4. *Sean $0 < k < 1$ y ω un peso definido en $\mathbb{R}^+$. El operador $M_{k,loc}$ es acotado de $BMO_{k,loc}(\omega)$ en sí mismo si y sólo si $\omega \in A_{1,loc}$.*

1.3. El operador integral fraccionario y el operador maximal fraccionario

De manera similar al operador maximal de Hardy-Littlewood, el operador maximal fraccionario M_α y el operador integral fraccionario I_α también están relacionados a la clase de pesos de Muckenhoupt, y su estudio ha sido de gran interés para muchos matemáticos.

Comenzamos introduciendo el operador I_α. Los detalles de esta sección se pueden encontrar en [Ste70] y [MW74].

Definición 1.3.1. Sea $0 < \alpha < n$, el Potencial de Riesz I_α, también llamado el operador integral fraccionario con exponente α, es el operador de convolución dado por

$$I_\alpha f(x) = C(\alpha, n)\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy,$$

donde $C(\alpha, n) = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\pi^{n/2}2^\alpha\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Nosotros consideraremos I_α, al igual que muchos autores, sin la constante $C(\alpha, n)$, es decir

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}dy.$$

Lo cual no afectará el modo de usar los resultados para este operador.

Los Potenciales de Riesz no son acotados de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo, pero satisfacen una acotación de tipo "diagonal" en el sentido del siguiente teorema.

Teorema 1.3.2 (Lema de Sobolev)**.** *Sean $0 < \alpha < n$ y $1 \le p < n/\alpha$, definimos q por $1/q = 1/p - \alpha/n$. Si $p = 1$, entonces existe C tal que*

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > t\}\right| \le \left(\frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx\right)^q$$

para todo $t > 0$.
Si $p > 1$, *entonces entonces existe* C *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |I_\alpha f(x)|^q dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

para toda $f \in L^p(\omega)$.

Para enunciar el teorema sobre la acotación con pesos asociados al operador I_α, introducimos la clase de pesos $A_{p,q}$. Luego, enunciamos un lema que muestra la relación de las clases $A_{p,q}$ con las de Muckenhoupt A_r.

Definición 1.3.3. Sean $0 < \alpha < n$ y $1 < p < n/\alpha$ definimos q por

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Entonces, un peso ω pertenece a la clase $A_{p,q}$ si existe alguna constante C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega\right)\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^{-p'/q}\right)^{q/p'} \leq C,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Cuando $p = 1$, se define $A_{1,q} = A_1$.

Lema 1.3.4. *Sean* $0 < \alpha < n$ *y* $1 < p < n/\alpha$, *un peso* $\omega \in A_{p,q}$ *si y sólo si* $\omega^q \in A_r$ *con* $r = 1 + q/p'$.

Teorema 1.3.5. *Sean* $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ *y* $1/q = 1/p - n/\alpha$. *Entonces* $\omega \in A_{p,q}$ *si y sólo si existe* C *tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|I_\alpha f(x)|\omega(x)\big)^q dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|f(x)|\omega(x)\big)^p dx\right)^{1/p},$$

para toda $f \in L^p(\omega^p)$.

Si $1/q = 1 - n/\alpha$, *entonces* $\omega \in A_{1,q}$ *si y sólo si existe* C *tal que*

$$\omega^q\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |I_\alpha f(x)| > t\}\big) \leq \left(\frac{C}{t}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\omega(x)dx\right)^q,$$

para toda $f \in L^1(\omega)$.

Definición 1.3.6. Sea $0 < \alpha < n$, se define el operador maximal fraccionario M_α por

$$M_\alpha f(x) = \sup_{B: x\in B} \frac{1}{|B|^{1-\alpha/n}} \int_B |f(y)|dy,$$

donde el supremo se toma sobre todas las bolas $B \subset \mathbb{R}^n$ que contienen a x.

El operador M_α fue introducido por Muckenhoupt y Wheeden en [MW74], y en las estimaciones con pesos para los Potenciales de Riesz I_α, desempeña un rol similar al del operador maximal de Hardy-Littlewood en las integrales singulares.

Como una consecuencia de la desigualdad de Hölder, puede obtenerse la siguiente desigualdad puntual,

$$M_\alpha f(x) \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha/n} \big(Mf(x)\big)^{p/q},$$

para $1/q = 1/p - \alpha/n$. Esto muestra que los operadores maximales fraccionarios están fuertemente relacionados con el operador maximal de Hardy-Littlewood.

El operador M_α satisface un resultado análogo al Teorema 1.3.5.

Teorema 1.3.7. *Sean $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$ y $1/q = 1/p - n/\alpha$. Entonces $\omega \in A_{p,q}$ si y sólo si existe C tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|M_\alpha f(x)|\omega(x)\big)^q dx \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big(|f(x)|\omega(x)\big)^p dx \right)^{1/p},$$

para toda $f \in L^p(\omega^p)$.

Si $1/q = 1 - n/\alpha$, entonces $\omega \in A_{1,q}$ si y sólo si existe C tal que

$$\omega^q\big(\{x \in \mathbb{R}^n : |M_\alpha f(x)| > t\}\big) \leq \left(\frac{C}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\omega(x) dx \right)^q,$$

para toda $f \in L^1(\omega)$.

1.4. Clases de pesos y un espacio débil de Lebesgue

Las clases de pesos y el espacio de funciones que definimos a continuación, fueron introducidos en [HSV97] para obtener condiciones necesarias y suficientes para la acotación del operador integral fraccionario I_α en el rango $p \geq n/\alpha$.

Definición 1.4.1. Sean $0 < \lambda < n$ y $1 < p < \infty$. Decimos que un peso $\omega \in H(\lambda, p)$ si existe una constante C tal que

$$|B|^{1/p - \lambda/n + 1/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\omega^{p'}(y)}{|x_B - y|^{(n-\lambda+1)p'}} dy \right)^{1/p'} \leq C \frac{\omega(B)}{|B|}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, donde x_B es el centro de la bola B.

Si $p = \infty$, decimos que un peso $\omega \in H(\lambda, \infty)$ si existe una constante C tal que

$$|B|^{-\lambda/n + 1/n} \left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{\omega(y)}{|x_B - y|^{n-\lambda+1}} dy \right)^{1/p'} \leq C \frac{\omega(B)}{|B|}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 1.4.2. *Sean $0 < \lambda < n$ y $1 < p \leq \infty$. Para un peso ω las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) $\omega \in H(\lambda, p)$.

(2) $\omega \in RH(p')$ *y existen constantes positivas C y ϵ tales que*

$$\omega^{p'}\big(B(x_B, tr)\big) \leq C t^{(n-\lambda+1)p'-\epsilon} \omega^{p'}\big(B(x_B, r)\big)$$

para toda bola $B = B(x_B, r)$ y para todo $t \geq 1$.

(3) Existen constantes positivas C y ϵ tales que

$$\left(\frac{\omega^{p'}\big(B(x_B, tr)\big)}{|B(x_B, tr)|}\right)^{1/p'} \leq C t^{n/p-\lambda+1-\epsilon/p'} \frac{\omega\big(B(x_B, r)\big)}{|B(x_B, r)|}$$

para toda bola $B = B(x_B, r)$ y para todo $t \geq 1$.

Definición 1.4.3. Sean $1 \leq p < \infty$ y ω un peso. Una función f medible Lebesgue pertenece a $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ si

$$\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} = \sup_{t>0} t^p \big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)|\omega^{-1}(x) > t\}\big| < \infty.$$

$\|\cdot\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}$ es una quasinorma en $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$.

Lema 1.4.4. *Sean $1 < p < \infty$ y $\omega \in RH(p')$. Si $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ entonces existe una constante C independiente de f tal que*

$$\int_B |f| \leq C \|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{\omega(B)}{|B|^{1/p}}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Lema 1.4.5. *Sean $1 < p < \infty$ y $\omega \in H(\lambda, p)$. Si $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ entonces existe una constante C independiente de f tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B} \frac{|f(y)|}{|x_B - y|^{n-\lambda+1}} dy \leq C \|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{\omega(B)}{|B|^{1+1/n+1/p-\lambda/n}}$$

para toda bola $B = B(x_B, r) \subset \mathbb{R}^n$.

1.5. El operador de Calderón modificado

En [Bra78], [DHK97] y [Duo13] se estudian las acotaciones del operador de Calderón modificado S_α desde $L^p(v)$ en $L^q(u)$. Los detalles de la definición y del teorema que damos a continuación, se pueden encontar en los artículos antes citados.

Definición 1.5.1. Sea $0 \leq \alpha < n$, se define

$$S_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y| \leq |x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy.$$

Notemos que $S_0 = S$, el operador de Calderón.

Teorema 1.5.2. *Sean $0 < \alpha < n$ y $1 < p \leq q < \infty$. Entonces S_α es acotado de $L^p(v)$ en $L^q(u)$ si y sólo si existe C tal que*

$$\left(\int_{|x| \geq R} \frac{u(x)}{|x|^{(n-\alpha)q}} dx \right)^{1/q} \left(\int_{|x| \leq R} v(x)^{1-p'} dx \right)^{1/p'} < C \tag{1.7}$$

y

$$\left(\int_{|x| \geq R} \frac{v(x)^{1-p'}}{|x|^{(n-\alpha)p'}} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{|x| \leq R} u(x) dx \right)^{1/q} < C \tag{1.8}$$

para todo $R > 0$.

Los conceptos contenidos en las secciones 1.3, 1.4 y 1.5 serán usados en los Capítulos 3 y 4.

Capítulo 2

Acotación de T_α

En este capítulo de la tesis estudiaremos las acotaciones con pesos de la familia de operadores integrales T_α, primero sobre los espacios de Lebesgue y luego sobre espacios de tipo BMO locales.

Específicamente, sea n un número natural y $0 < \alpha < n$, definimos el operador T_α por

$$T_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy.$$

Como fue mencionado en la Introducción, estos operadores $\{T_\alpha\}_{0<\alpha<n}$ fueron introducidos por Ricci y Sjögren como una herramienta para demostrar algunos resultados relacionados al grupo de Heisenberg y demostraron la acotación de T_α sobre $L^2(\mathbb{R})$ en su publicación [RS88]. Luego, la acotación sin pesos y con pesos de esta familia de operadores integrales sobre distintos espacios de funciones fue estudiada en los artículos [GU93], [RU05], [RU12], [RU13], [FF15a], entre otros.

Los resultados de este capítulo están publicados en [FF15a].

2.1. Acotación de T_α sobre L^p

Una de las ideas subyacentes para el análisis de los operadores introducidos se encuentra contenida en el siguiente lema, el cual muestra que T_α está puntualmente controlado por los operadores de Calderón y una maximal local de Hardy-Littlewood.

Como es usual en análisis, a lo largo de este trabajo c y C denotarán constantes positivas, no necesariamente las mismas en cada ocasión. Dado un conjunto E medible Lebesgue, denotaremos por E^c el complemento de E en $\mathbb{R}^n$ y χ_E la función característica de E. Dada una bola $B = B(x,r)$ de centro x y radio r, denotaremos por tB la bola $B(x,tr)$. Denotamos $M_{loc} = M_{1/2,loc}$

Lema 2.1.1. *Sea $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no negativa, entonces existe C tal que*

$$T_\alpha f(x) \leq C\big(Sf(x) + M_{loc}f(x) + M_{loc}f(-x)\big),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Demostración. Sea $x \neq 0$. Llamamos $U_1 = B(0,|x|) \cap Q^c\big(x, \|x\|_\infty/2\big) \cap Q^c\big(-x, \|x\|_\infty/2\big)$ y $U_2 = B^c(0,|x|) \cap Q^c\big(x, \|x\|_\infty/2\big) \cap Q^c\big(-x, \|x\|_\infty/2\big)$. Descomponemos el operador T_α como

$$T_\alpha f(x) = T_\alpha\big(\chi_{U_1} f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{U_2} f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(x,|x|/2)} f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(-x,|x|/2)} f\big)(x). \tag{2.1}$$

Si $y \in U_1$ entonces $|x-y| \geq |x|/(2\sqrt{n})$ y $|x+y| \geq |x|/(2\sqrt{n})$, luego

$$T_\alpha\big(\chi_{U_1} f\big)(x) \leq cPf(x). \tag{2.2}$$

Si $y \in U_2$ entonces $|x-y| \geq |y|/(1+2\sqrt{n})$ y $|x+y| \geq |y|/(1+2\sqrt{n})$, luego

$$T_\alpha\big(\chi_{U_2} f\big)(x) \leq cQf(x). \tag{2.3}$$

Ahora, si $y \in Q\big(x, \|x\|_\infty/2\big)$ entonces $|x+y| > \|x\|_\infty$, luego

$$\begin{aligned}
&\int_{Q(x,\|x\|_\infty/2)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy & (2.4)\\
&\leq \frac{1}{\|x\|_\infty^{n-\alpha}} \int_{Q(x,\|x\|_\infty/2)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha} dy \\
&\leq \frac{c}{\|x\|_\infty^{n-\alpha}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j}\|x\|_\infty)^\alpha} \int_{2^{-j-1}\|x\|_\infty \leq \|x-y\|_\infty < 2^{-j}\|x\|_\infty} f(y)dy \\
&\leq cM_{loc} f(x) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(n-\alpha)}} \\
&= cM_{loc} f(x). & (2.5)
\end{aligned}$$

Similarmente, si $y \in Q\big(-x, \|x\|_\infty/2\big)$ entonces $|x-y| > \|x\|_\infty$, luego

$$\int_{B\left(-x,|x|/2\right)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy \leq cM_{loc} f(-x). \tag{2.6}$$

Por lo tanto, usando (2.2)-(2.6) para acotar puntualmente en (2.1), concluimos la demostración del lema.

□

Usando las caracterizaciones de las acotaciones con pesos para S y M_{loc} obtenidas en [DMRO13] y [LS10] (ver los enunciados 1.2.1 y 1.2.2 de la Sección 1.2 del Capítulo 1), podemos obtener.

Teorema 2.1.2. *Si $\omega \in A_{p,loc} \cap A_{p,0} = A_p$ y satisface $\omega(-x) \leq C\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces el operador T_α es de tipo fuerte pesado (p,p) para $1 < p < \infty$, y es de tipo débil pesado $(1,1)$ si $p = 1$.*

Demostración. Sea $f \in L^p(\omega)$ con $1 < p < \infty$. Usando el lema 2.1.1 y que S y M_{loc} son acotados sobre $L^p(\omega)$ para $\omega \in A_{p,loc} \cap A_{p,0}$, obtenemos

$$\|T_\alpha f\|_{L^p(\omega)} \leq C\big(\|Sf\|_{L^p(\omega)} + \|M_{loc} f\|_{L^p(\omega)} + \|M_{loc} f\|_{L^p(\omega)}\big) \leq C\|f\|_{L^p(\omega)}.$$

De manera similar, si $f \in L^1(\omega)$, entonces

$$\|T_\alpha f\|_{L^{1,\infty}(\omega)} \leq C\big(\|Sf\|_{L^{1,\infty}(\omega)} + \|M_{loc}f\|_{L^{1,\infty}(\omega)} + \|M_{loc}f\|_{L^{1,\infty}(\omega)}\big) \leq C\|f\|_{L^1(\omega)}.$$

Por último, como mencionamos en el Capítulo 1, es equivalente definir la clase de Muckenhoupt sobre bolas o sobre cubos. Por lo tanto, es inmediato de las definiciones que $A_p \subset A_{p,loc} \cap A_{p,0}$. A su vez, no es difícil mostrar que es equivalente definir la clase $A_{p,0}$ sobre bolas centradas en el origen o sobre cubos centrados en el origen. Luego se sigue que $A_{p,loc} \cap A_{p,0} \subset A_p$.

□

Observamos que el Teorema 2.1.2 establece la acotación de T_α entre espacios de Lebesgue $L^p(\omega)$ sin necesidad de mostrar primero el caso $\omega \equiv 1$.

Una importante clase de pesos en análisis armónico, es la de los pesos potencia de la forma $\omega(x) = |x|^a$, con $a \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, en el artículo [Duo13] se estudian las acotaciones del operador integral fraccionario sobre funciones radiales en espacios de Lebesgue pesados con pesos potencia.

No es difícil probar que un peso potencia $\omega \in A_p$ si y sólo si $\omega \in A_{p,0}$. Por otro lado, enunciamos en la Proposición 1.1.4: "El peso potencia $\omega(x) = |x|^a \in A_1$ si y sólo si $-n < a \leq 0$. Para $1 < p < \infty$, $\omega(x) = |x|^a \in A_p$ si y sólo si $-n < a < (p-1)n$".

Para concluir esta sección, podemos obtener como corolario del Teorema 2.1.2, la siguiente caracterización de la acotación con pesos de T_α sobre los espacios de Lebesgue para los pesos potencia.

Corolario 2.1.3. *Sea ω un peso potencia y sea $1 < p < \infty$.*

- *El operador T_α es de tipo fuerte pesado (p,p) asociado al peso ω, si y sólo si $\omega \in A_p$.*
- *El operador T_α es de tipo débil pesado $(1,1)$ asociado al peso ω, si y sólo si $\omega \in A_1$.*

Demostración. Sea $x \neq 0$. Si $y \in B(0,|x|)$ entonces $|x \pm y| \leq 2|x|$. Y si $y \in B^c(0,|x|)$ entonces $|x \pm y| \leq 2|y|$. Luego, si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y es no negativa

$$\begin{aligned} T_\alpha f(x) &= \int_{B(0,|x|)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy + \int_{B^c(0,|x|)} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy \\ &\geq C\left(\frac{1}{|x|^n} \int_{B(0,|x|)} f(y)dy + \int_{B^c(0,|x|)} \frac{f(y)}{|y|^n} dy\right) \\ &= C(Pf(x) + Qf(x)) = CSf(x). \end{aligned}$$

Usando este hecho, si T_α es de tipo fuerte pesado (p,p) o es de tipo débil pesado $(1,1)$, entonces S es de tipo fuerte pesado (p,p) o es de tipo débil pesado $(1,1)$, respectivamente. Luego, por el Teorema 1.2.1, resulta $\omega \in A_{p,0}$, o bien $\omega \in A_p$.

Las recíprocas de ambas afirmaciones del corolario son casos particulares del Teorema 2.1.2.

□

2.2. Acotación de T_α sobre L^∞

El espacio de funciones de oscilación media acotada BMO surge naturalmente en varias situaciones del análisis armónico. Las funciones del espacio $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ tienen la propiedad de oscilación media acotada sobre bolas, es decir, $L^\infty \subset BMO$, pero existen funciones no acotadas que también tienen esta propiedad. Como se puede apreciar en [GCRdF85], los operadores integrales singulares clásicos no son acotados de L^∞ en L^∞ sino que son acotados de L^∞ en BMO. En esta sección estudiaremos la acotación con pesos de T_α en este sentido.

Cabe destacar, que la importancia del espacio BMO en análisis armónico es mucho más profunda que la mencionada para el estudio de acotaciones de operadores. Por ejemplo el espacio BMO sirve como herramienta para la teoría de interpolación, está relacionado con las medidas de Carleson y los espacios de Hardy H^p, etc., (ver [CRW76], [FS72], [HSV07] y [JN61]).

Sea ω un peso entonces los espacios $L^\infty(\omega)$ y $BMO(\omega)$ están definidos como sigue. Una función f localmente integrable pertenece a $L^\infty(\omega)$ si

$$\|f\|_{L^\infty(\omega)} = \|f\omega\|_\infty < \infty.$$

Efectivamente, $\|\cdot\|_{L^\infty(\omega)}$ es una norma en $L^\infty(\omega)$.

Una función f localmente integrable pertenece a $BMO(\omega)$ si existe C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x) - f_B|dx \leq C,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$. La seminorma de f en $BMO(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO(\omega)}$, es el ínfimo sobre tales constantes C.

Puede mostrarse sin dificultad que $L^\infty(\omega^{-1}) \subset BMO(\omega)$.

Como queremos estudiar la acotación de T_α desde $L^\infty(\omega^{-1})$ en $BMO(\omega)$, tendremos en cuenta primero la acotación del operador de Hardy P y su adjunto Q sobre un espacio adecuado que también contiene a $L^\infty(\omega^{-1})$.

Definición 2.2.1. Sea ω un peso, una función f localmente integrable pertenece a $BM_0(\omega)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(x)|dx \leq C,$$

para toda bola B centrada en el origen.

Podemos definir la norma de f en $BM_0(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BM_0(\omega)}$, como el ínfimo sobre tales constantes C. Por otro lado, es inmediato que $\|f\|_{BM_0(\omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}$ para toda $f \in L^\infty(\omega^{-1})$, luego $L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega)$.

Ahora, como $|Qf|$ y $|T_\alpha f|$ son idénticamente infinito para una función f constante, no podemos esperar las acotaciones de estos operadores sobre todo el espacio $L^\infty(\omega^{-1})$. Por lo tanto definimos

$$E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big) = \big\{f \in L^\infty(\omega^{-1}) : |Qf(x)| < \infty \text{ para algún } x \neq 0\big\}$$

y

$$E\big(BM_0(\omega)\big) = \big\{f \in BM_0(\omega) : |Qf(x)| < \infty \text{ para algún } x \neq 0\big\}.$$

Observación 2.2.2. Frecuentemente usaremos el siguiente hecho en las demostraciones, si ω es un peso y E es un conjunto medible y acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\operatorname*{ess\,ínf}_E \omega \leq \frac{1}{|E|}\int_E \omega,$$

por lo tanto, si $\omega \in A_1$ tenemos que

$$\frac{\omega(B)}{|B|}\frac{|E|}{\omega(E)} \leq C\big(\operatorname*{ess\,ínf}_B \omega\big)\big(\operatorname*{ess\,ínf}_E \omega\big)^{-1} \leq C,$$

para toda bola B y cualquier conjunto $E \subset B$ con medida positiva.

Proposición 2.2.3. *Sea $\omega \in A_{1,0}$ entonces existe C tal que*

(1) $\|Pf\|_{L^\infty(\omega^{-1})} \leq C\|f\|_{BM_0(\omega)}$ *para toda* $f \in BM_0(\omega)$ *;*

(2) $\|Qf\|_{BMO(\omega)} \leq C\|f\|_{BM_0(\omega)}$ *para toda* $f \in E\big(BM_0(\omega)\big)$.

Demostración. La parte (1) es inmediata a partir de las definiciones de P y de los espacios.

Para la parte (2), sean $f \in E\big(BM_0(\omega)\big)$ y $\omega \in A_{1,0}$. Probemos que $Qf(x)$ esta bien definido para todo $x \neq 0$. En efecto, sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $Qf(x_0)$ es finito. Entonces $|Qf(x)| \leq Q|f|(x_0) < \infty$ para $|x| \geq |x_0|$. Si $0 < |x| < |x_0|$, entonces

$$\begin{aligned}
\big|Qf(x)\big| &= \left|\int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^n}dy\right| \\
&\leq \left|\int_{|x_0|>|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^n}dy\right| + \left|\int_{|y|>|x_0|}\frac{f(y)}{|y|^n}dy\right| \\
&\leq \frac{1}{|x|^n}\int_{B(0,|x_0|)}|f(y)|dy + \big|Qf(x_0)\big| \\
&\leq \|f\|_{BM_0(\omega)}\frac{1}{|x|^n}\,\omega\big(B(0,|x_0|)\big) + \big|Qf(x_0)\big| < \infty.
\end{aligned}$$

Ahora, sean $r > 0$ y $\nu \in \mathbb{R}^n$ tales que $|\nu| = r$, entonces

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)}\big|Qf(x) - Qf(\nu)\big|dx &\leq \int_{0<|x|<r}\int_{|x|<|y|<r}\frac{|f(y)|}{|y|^n}dydx \\
&= \int_{0<|y|<r}\frac{|f(y)|}{|y|^n}\left(\int_{B(0,|y|)}dx\right)dy \\
&\leq C\|f\|_{BM_0(\omega)}\omega\big(B(0,r)\big).
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{\omega(B(0,r))}\int_{B(0,r)}\big|Qf(x)-Qf(\nu)\big|dx \le C\|f\|_{BM_0(\omega)}. \tag{2.7}$$

Ahora, consideramos la bola $B(a,r)$ con $r \ge |a|/2$ y $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\nu| = 3r$. Como $B(a,r) \subset B(0,3r)$, usando (2.7) y Observación 2.2.2, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B(a,r))}&\int_{B(a,r)}\big|Qf(x)-Qf(\nu)\big|dx\\ &\le \frac{\omega(B(0,3r))}{\omega(B(a,r))}\frac{1}{\omega(B(0,3r))}\int_{B(0,3r)}\big|Qf(x)-Qf(\nu)\big|dx\\ &\le C\|f\|_{BM_0(\omega)}.\end{aligned}$$

Luego, si consideramos $B(a,r)$ con $r < |a|/2$ y $\nu \in \mathbb{R}^n$ tal que $|\nu| = |a|+r$, entonces $B(a,r) \subset B(0,|a|+r)$, $|x| > |a|-r$ para $x \in B(a,r)$, y $|a|-r > |a|/2$. Así, usando la Observación 2.2.2

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B(a,r))}\int_{B(a,r)}\big|Qf(x)-Qf(\nu)\big|dx &= \frac{1}{\omega(B(a,r))}\int_{B(a,r)}\left|\int_{|x|<|y|<|a|+r}\frac{f(y)}{|y|^n}dy\right|dx\\ &\le \frac{1}{\omega(B(a,r))}\int_{B(a,r)}\int_{|a|-r<|y|<|a|+r}\frac{|f(y)|}{|y|^n}dydx\\ &\le \frac{\big|B(a,r)\big|}{\omega(B(a,r))}\frac{1}{(|a|-r)^n}\int_{|y|<|a|+r}|f(y)|dy\\ &\le C\|f\|_{BM_0(\omega)}\left(\frac{|a|+r}{|a|-r}\right)^n\\ &\le C\|f\|_{BM_0(\omega)}.\end{aligned}$$

□

Estas propiedades para P y Q nos permiten dar otra demostración del siguiente resultado, ya obtenido en [RU13].

Teorema 2.2.4. *Si $\omega \in A_1$ y satisface $\omega(-x) \le c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces existe C tal que*

$$\|T_\alpha f\|_{BMO(\omega)} \le C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})},$$

para toda $f \in E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big)$.

Demostración. Sea $f \in E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big)$. Por la Proposición 2.2.3 y el Lema 2.1.1, tenemos que $T_\alpha f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ahora hacemos una descomposicíon similar a la que hicimos en el Lema 2.1.1. Sean $K_\alpha(x,y) = |x-y|^{-\alpha}|x+y|^{-n+\alpha}$ y $U = B(0,3|x|/2)\cap B^c(x,|x|/2)\cap B^c(-x,|x|/2)$, entonces

$$\begin{aligned}T_\alpha f(x) - Qf(x) &= T_\alpha(\chi_U f)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(x,|x|/2)}f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(-x,|x|/2)}f\big)(x)\\ &\quad - \int_{B(x,3|x|/2)}\frac{f(y)}{|y|^n}dy + \int_{|y|\ge 3|x|/2}\left(K_\alpha(x,y) - \frac{1}{|y|^n}\right)f(y)dy.\end{aligned}$$

De manera similar a la demostración del Lema 2.1.1, obtenemos

$$\begin{aligned}\Big|T_\alpha\big(\chi_U f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(x,|x|/2)}f\big)(x) + T_\alpha\big(\chi_{B(-x,|x|/2)}f\big)(x) - \int_{|x|\leq|y|<3|x|/2}\frac{f(y)}{|y|^n}dy\Big| \\ \leq C\big(P|f|(3x/2) + M|f|(x) + M|f|(-x)\big) \\ \leq C\big(M|f|(x) + M|f|(-x)\big).\end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio y $\omega \in A_1$, tenemos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{B^c(0,3|x|/2)} f(y)\left(K_\alpha(x,y) - \frac{1}{|y|^n}\right)dy\right| &\leq C|x|\int_{B^c(0,3|x|/2)}\frac{|f(y)|}{|y|^{n+1}}dy \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}|x|\int_{B^c\left(0,3|x|/2\right)}\frac{\omega(y)}{|y|^{n+1}}dy \\ &= C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}\sum_{i=0}^{\infty}|x|\int_{3|x|2^i/2\leq|y|<3|x|2^{i+1}/2}\frac{\omega(y)}{|y|^{n+1}}dy \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{|x|}{\big(2^i|x|\big)^{n+1}}\int_{|y|<3|x|2^{i+1}/2}\omega(y)dy \\ &\leq C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}\omega(x).\end{aligned}$$

Ahora, usando que ω satisface $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, obtenemos

$$\|T_\alpha f - Qf\|_{L^\infty(\omega^{-1})} \leq C\big(\|M(|f|)\|_{L^\infty(\omega^{-1})} + \|(M|f|)^\vee\|_{L^\infty(\omega^{-1})} + \|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}\big),$$

donde $(Mf)^\vee(x) = Mf(-x)$. Así, por la Proposición 2.2.3 podemos concluir el teorema. $\square$

2.3. Acotación de T_α sobre BMO de tipo local

En esta sección introducimos un adecuado espacio de tipo BMO para estudiar la acotación del operador T_α. Como consecuencia de ello, obtenemos un resultado que extiende el obtenido en el Teorema 2.2.4.

Definición 2.3.1. Sea ω un peso, una función f pertenece a $BMO_0(\omega)$ si $f \in BM_0(\omega)$ y existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B|f - f_B| \leq C,$$

para toda bola $B = B(x,r)$ con $r < |x|/8$.

Podemos definir la norma de f en $BMO_0(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO_0(\omega)}$, como el ínfimo sobre las constantes C que satisfacen simultáneamente las desigualdades de las definiciones 2.2.1 y 2.3.1.

Informalmente, decimos que $BMO_0(\omega)$ es un espacio de tipo BMO local, debido a la similitud con el espacio $BMO_{k,loc}(\omega)$ definido en [CRH11] para estudiar la acotación con pesos de la maximal local de Hardy-Littlewood $M_{k,loc}$ en estos espacios.

Es inmediato a partir de las definiciones, que $L^\infty(\omega^{-1}) \subset BMO(\omega) \cap BM_0(\omega) \subset BMO_0(\omega)$. Más aún, se puede ver sin dificultad que

$$BMO(\omega) \cap BM_0(\omega) = BMO_0(\omega). \tag{2.8}$$

Por la misma razón que mencionamos antes, definimos

$$E\big(BMO_0(\omega)\big) = \big\{f \in BMO_0(\omega) : |Qf(x)| < \infty \text{ para algún } x \neq 0\big\}.$$

Enunciamos el principal resultado de esta sección.

Teorema 2.3.2. *Sea $f \in E\big(BMO_0(\omega)\big)$. Si $\omega \in A_1$ y satisface $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $T_\alpha f \in BMO(\omega)$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|T_\alpha f\|_{BMO(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.$$

Este resultado extiende el Teorema 2.2.4, pues para $\omega \equiv 1$, la función

$$h_0(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x-2|} & \text{si } x \in (1,3), \\ 0 & \text{si } x \notin (1,3), \end{cases}$$

satisface $h_0 \in E\big(BMO_0(\omega)\big)$ pero $h_0 \notin L^\infty(\omega^{-1})$. En efecto, es conocido que la función

$$g_0(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases}$$

pertenece al espacio BMO. Además, si $f \in BMO$ entonces $\tau_y f \in BMO$, donde $\tau_y f(x) = f(x-y)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (ver [Gra09]). Luego, se sigue que $h_0 \in BMO$. Ahora, es inmediato que $h_0 \in L^1(\mathbb{R})$, y si $1 < r$ entonces

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} |h_0(x)|dx \leq \frac{1}{2}\|h_0\|_{L^1},$$

lo cual muestra que $h_0 \in BM_0$. Por último, si $x > 3$ entonces

$$|Qh_0(x)| \leq \int_{|y|\geq|x|} \frac{|h_0(y)|}{|y|}dy \leq \int_{|y|\geq 3} \frac{|h_0(y)|}{|y|}dy = 0.$$

Antes de proceder con la demostración del Teorema 2.3.2, necesitaremos algunos resultados previos.

Comenzamos dando una posible definición del espacio $BMO_{k,loc}(\omega)$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Para ello consideramos en $\mathbb{R}^n$, bolas sub-k-críticas a las bolas $B(x,r)$ si $r < k|x|$, bolas k-críticas si $r = k|x|$ y bolas supra-k-críticas si $r > k|x|$ y no contienen al cero. En este contexto, los pesos son funciones positivas en casi todo punto, definidas $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y localmente integrables sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Entonces, sean $0 < k < 1$ y ω un peso definido en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, una función f localmente integrable sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pertenece a $BMO_{k,loc}(\omega)$, si existe una constante C tal que se satisfacen

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B| dx < C, \tag{2.9}$$

para toda bola B sub-k-crítica, y

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x)| dx < C, \tag{2.10}$$

para todas las bolas B k-críticas y supra-k-críticas.

Si ω es un peso definido en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, se define la norma de f en $BMO_{k,loc}(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO_{k,loc}(\omega)}$, como el ínfimo de las constantes C que satisfacen simultáneamente las condiciones (2.9) y (2.10).

Con estas definiciones, se puede demostrar sin dificultad el siguiente resultado.

Lema 2.3.3. *Si $0 < k < 1$ y $\omega \in A_1$, entonces existe una constante C tal que $\|f\|_{BMO_{k,loc}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}$ para toda $f \in BMO_0(\omega)$.*

Para continuar, en [CRH11], la versión sobre $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ del siguiente lema es obtenida (ver Lema 3.3 de ese mismo trabajo). Afirmamos que la misma demostración, con las modificaciones obvias, puede ser adaptada a $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.3.4. *Sean $0 < k < 1$, $r \geq 1$ y $\omega \in A_1$. Entonces existe C tal que*

$$\left(\frac{1}{\omega(B)} \int_B |f(x) - f_B|^r \omega^{1-r}(x) dx \right)^{1/r} \leq C\|f\|_{BMO_{k,loc}(\omega)}$$

para toda bola B sub-k-crítica y para toda $f \in BMO_{k,loc}(\omega)$.

Ahora vamos a introducir el operador V_α, que es una localización de T_α, y estudiaremos su acotación. Sea $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi = 1$ en $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$, y $\psi = 0$ en $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^c$. Definimos

$$V_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy, \;\; x \neq 0.$$

Si f es no negativa, entonces $V_\alpha f \leq T_\alpha f$. Consecuentemente, por el Teorema 2.1.2, V_α es de tipo (p,p) con respecto a la medida de Lebesgue para $1 < p < \infty$.

El siguiente lema es la clave para la demostración del Teorema 2.3.2.

Lema 2.3.5. *Si $\omega \in A_1$, entonces V_α es acotado de $BMO_0(\omega)$ en sí mismo. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|V_\alpha f\|_{BMO_0(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.$$

Demostración. Sean $f \in BMO_0(\omega)$ y $t_0 = 3/4$. Primero demostraremos que la condición de oscilación media acotada de la Definición 2.3.1 se satisafce para $V_\alpha f$. Sea $B = B(x_0, r)$ con radio $0 < r < |x_0|/8$, queremos obtener que

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left|V_\alpha f(x) - c\right| dx \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}, \tag{2.11}$$

para algunas constantes c dependiendo de f y B, y C independiente de f.

Escribimos a f como

$$f = (f - f_B)\chi_{2B} + (f - f_B)\chi_{(2B)^c} + f_B = f_1 + f_2 + f_3,$$

donde $2B = B(x_0, 2r)$.

Primero, consideramos $V_\alpha f_1$. Como $\omega \in A_1$, entonces satisface $RH(s)$ con $s > 1$. Así $\omega^s \in A_1$. Elegimos $q > 1$ y $\gamma > 1$ tales que $s = \dfrac{\gamma q - 1}{\gamma - 1}$. Usando que V_α es de tipo (q, q) para $1 < q < \infty$ y la desigualdad de Hölder, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left|V_\alpha f_1\right| &\leq \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_B \left|V_\alpha f_1\right|^q \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_{2B} |f - f_B|^q \omega^{\frac{1-\gamma q}{\gamma}} \omega^{\frac{\gamma q - 1}{\gamma}} \right)^{1/q} \\
&\leq \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_{2B} |f - f_B|^{\gamma q} \omega^{1-\gamma q} \right)^{1/\gamma q} \left(\int_{2B} \omega^{\frac{\gamma q - 1}{\gamma}\gamma'} \right)^{1/\gamma' q} \\
&\leq \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_{2B} |f - f_{2B}|^{\gamma q} \omega^{1-\gamma q} \right)^{1/\gamma q} \left(\int_{2B} \omega^s \right)^{1/\gamma' q} \\
&\quad + \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_{2B} |f_{2B} - f_B|^{\gamma q} \omega^{1-\gamma q} \right)^{1/\gamma q} \left(\int_{2B} \omega^s \right)^{1/\gamma' q}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Ahora, analizaremos cada término de la última expresión en (2.12). Aplicando el Lema 2.3.4, la propiedad de duplicación para los pesos en A_p y el Lema 2.3.3 con $k = 1/4$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \left(\int_{2B} |f - f_{2B}|^{\gamma q} \omega^{1-\gamma q} \right)^{1/\gamma q} \left(\int_{2B} \omega^s \right)^{1/\gamma' q} \\
&\qquad \leq C\|f\|_{BMO_{t_0,loc}(\omega)} \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)} \omega(2B)^{1/\gamma q} |2B|^{1/\gamma' q} \left(\frac{\omega(2B)}{|2B|} \right)^{s/\gamma' q} \\
&\qquad \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)} |B|^{1/q' + 1/\gamma' q - s/\gamma' q} \omega(B)^{-1 + 1/\gamma q + s/\gamma' q} \\
&\qquad = C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Para el segundo término, usamos que $\omega^s \in A_{\gamma'}$, la propiedad de duplicación y el Lema

2.3.3 con $k = 1/4$. Entonces

$$\begin{aligned}\frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)}&\left(\int_{2B}|f_{2B}-f_B|^{\gamma q}\omega^{1-\gamma q}\right)^{1/\gamma q}\left(\int_{2B}\omega^s\right)^{1/\gamma' q}\\ &= \frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)}\left(\int_{2B}\omega^{1-\gamma q}\right)^{1/\gamma q}\left(\int_{2B}\omega^s\right)^{1/\gamma' q}|f_{2B}-f_B|\\ &\leq C\frac{|B|^{1/q'}}{\omega(B)}|2B|^{1/q}\frac{1}{|B|}\int_B|f-f_{2B}|\\ &\leq C\|f\|_{BMO_{t_0,loc}(\omega)}|B|^{1/q'+1/q-1}\\ &\leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Para continuar, consideramos $V_\alpha f_2$. Sea $x\in B$, entonces

$$\begin{aligned}\big|V_\alpha f_2(x)-V_\alpha f_2(x_0)\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_\alpha(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dy\\ &+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|K_\alpha(x,y)-K_\alpha(x_0,y)\big|dy. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Nuevamente analizaremos cada término.

Notemos que si $x\in B$, entonces $\frac{7}{8}|x_0|<|x|<\frac{9}{8}|x_0|$. Si $\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)\neq 0$ entonces $y\in B(x,|x|/2)$. Además, si $y\in B(x,|x|/4)$, entonces $\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)=1$. Así, si $\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|\neq 0$, entonces $y\in\Omega=\big[B(x,|x|/2)\cup B(x_0,|x_0|/2)\big]\cap\big[B^c(x,|x|/4)\cup B^c(x_0,|x_0|/4)\big]$. Ahora, si $y\in\Omega\backslash B(x_0,|x_0|/2)$, entonces $|y-x_0|\leq|y-x|+|x-x_0|\leq\frac{1}{2}|x|+r<\frac{11}{16}|x_0|$. Y si $y\in B(x_0,|x_0|/2)$, entonces $|y-x_0|<|x_0|/2$. Luego $\Omega\subset B(x_0,\frac{11}{16}|x_0|)=B_0$. Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos

$$\begin{aligned}\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big| &\leq \big|\psi'(\xi)\big|\left|\frac{|x-y|}{|x|}-\frac{|x_0-y|}{|x_0|}\right|\\ &\leq C\left(\left|\frac{|x-y|}{|x|}-\frac{|x_0-y|}{|x|}\right|+\left|\frac{|x_0-y|}{|x_0|}-\frac{|x_0-y|}{|x|}\right|\right)\\ &\leq C\frac{r}{|x_0|}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Observamos también que si $y\in\Omega$, entonces $|x-y|>c|x_0|$ y $|x+y|>c|x_0|$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_\alpha(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dy &\leq C\frac{r}{|x_0|^{n+1}}\int_{B_0}|f_2(y)|dy\\ &= C\frac{r}{|x_0||B_0|}\int_{B_0}|f_2(y)|dy. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Ahora, elegimos un número natural j_0 tal que $2^{j_0}r<d_0|x_0|\leq 2^{j_0+1}r$ donde $d_0=11/16$.

Denotamos por $L_j = B(x_0, 2^j r)$ para $j = 0, 1, 2 \dots j_0$, así $L_j \subset B_0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
|f - f_B| &\leq |f - f_{B_0}| + |f_{B_0} - f_{L_{j_0}}| + \sum_{j=1}^{j_0} |f_{L_j} - f_{L_{j-1}}| \\
&\leq |f - f_{B_0}| + \frac{C}{|L_{j_0}|}\int_{L_{j_0}} |f - f_{B_0}| + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{C}{|L_{j-1}|}\int_{L_{j-1}} |f - f_{L_j}| \\
&\leq |f - f_{B_0}| + \frac{C}{|B_0|}\int_{B_0} |f - f_{B_0}| + \sum_{j=1}^{j_0} \frac{C}{|L_j|}\int_{L_j} |f - f_{L_j}|. \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

Como B_0 y L_j, $j = 0, 1, 2 \dots j_0$, son bolas sub-t_0-críticas, usando (2.18), el Lema 2.3.3 con $k = 1/4$, y que $\frac{r}{|x_0|}(2 + j_0) \leq (1 + d_0)$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
C\frac{r}{|x_0|}\frac{1}{|B_0|}\int_{B_0} |f_2| &\leq C_{t_0}\|f\|_{BMO_0(\omega)}\frac{r}{|x_0|}\left(2\frac{\omega(B_0)}{|B_0|} + \sum_{j=1}^{j_0}\frac{\omega(L_j)}{|L_j|}\right) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}\frac{r}{|x_0|}\big(\operatorname*{ess\,ínf}_B \omega\big)(2 + j_0) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}\operatorname*{ess\,ínf}_B \omega. \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, por (2.17)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)|K_\alpha(x,y)\left|\psi\left(\frac{|x-y|}{|x|}\right) - \psi\left(\frac{|x_0-y|}{|x_0|}\right)\right|dydx \\
\leq C_{t_0}\|f\|_{BMO_0(\omega)}\frac{|B|}{\omega(B)}\operatorname*{ess\,ínf}_B \omega \\
\leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}. \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Ahora estimaremos el segundo término de (2.15). Aplicando el teorema del valor medio, tenemos

$$
\big|K_\alpha(x,y) - K_\alpha(x_0,y)\big| \leq C\frac{|x-x_0|}{|y-x_0|^{n+1}} < C\frac{r}{|y-x_0|^{n+1}}.
$$

Así

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)|\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|K_\alpha(x,y) - K_\alpha(x_0,y)\big|dydx \\
\leq C\frac{r|B|}{\omega(B)}\int_{B(x_0,|x_0|/2)}\frac{|f_2(y)|}{|y-x_0|^{n+1}}dy \\
= C\frac{r|B|}{\omega(B)}\int_{A(x_0,2r,|x_0|/2)}\frac{|f(y)-f_B|}{|y-x_0|^{n+1}}dy.
\end{aligned}
$$

Elegimos j_1 un número natural tal que $2^{j_1}r < |x_0|/2 \leq 2^{j_1+1}r$. Llamamos $A_j = A(x_0, 2^{j-1}r, 2^j r)$, $L_j = B(x_0, 2^j r)$ con $j = 1, 2 \ldots j_1$ y $A = A(x_0, 2^{j_1}r, |x_0|/2)$. Entonces

$$
\begin{aligned}
C\frac{r|B|}{\omega(B)} & \int_{A(x_0,2r,|x_0|/2)} \frac{|f(y)-f_B|}{|y-x_0|^{n+1}}dy \\
&\leq C\frac{r|B|}{\omega(B)}\left(\sum_{j=1}^{j_1}\int_{A_j}\frac{|f(y)-f_B|}{|y-x_0|^{n+1}}dy + \int_A \frac{|f(y)-f_B|}{|y-x_0|^{n+1}}dy\right) \\
&\leq C\frac{r|B|}{\omega(B)}\left(\sum_{j=1}^{j_1}\frac{1}{(2^j r)^{n+1}}\int_{A_j}|f-f_B| + \frac{1}{(2^{j_1}r)^{n+1}}\int_A |f-f_B|\right) \\
&\leq C\frac{|B|}{\omega(B)}\left(\sum_{j=1}^{j_1}\frac{1}{2^j|L_j|}\int_{L_j}|f-f_B| + \frac{1}{2^{j_1}|B(x_0,|x_0|/2)|}\int_{B(x_0,|x_0|/2)}|f-f_B|\right).
\end{aligned}
$$

Similares argumentos a los que usamos en (2.18)-(2.20), implican

$$
\begin{aligned}
\frac{|B|}{\omega(B)} & \left[\sum_{j=1}^{j_1}\frac{1}{2^j|L_j|}\int_{L_j}|f-f_B| + \frac{2^{-j_1}}{|B(x_0,|x_0|/2)|}\int_{B(x_0,|x_0|/2)}|f-f_B|\right] \\
&\leq C\frac{|B|}{\omega(B)}\left[\sum_{j=1}^{j_1}\frac{1}{2^j|L_j|}\int_{L_j}\left(|f-f_{L_j}| + \sum_{i=1}^{j}|f_{L_i}-f_{L_{i-1}}|\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2^{j_1}|B(x_0,|x_0|/2)|}\int_{B(x_0,|x_0|/2)}\left(|f-f_{B(x_0,|x_0|/2)}| + |f_{B(x_0,|x_0|/2)}-f_B|\right)\right] \\
&\leq C\|f\|_{BMO_{t_0,loc}(\omega)}\frac{|B|}{\omega(B)}\left[\sum_{j=1}^{j_1}\left(\frac{\omega(L_j)}{2^j|L_j|} + \frac{1}{2^j}\sum_{i=1}^{j}\frac{\omega(L_i)}{|L_i|}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\omega\big(B(x_0,|x_0|/2)\big)}{2^{j_1}\big|B(x_0,|x_0|/2)\big|} + \frac{1}{2^{j_1}|B|}\int_B \left|f-f_{B(x_0,|x_0|/2)}\right|\right] \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}\left[\sum_{j=1}^{j_1}\left(\frac{1}{2^j}+\frac{j}{2^j}\right)+2\right].
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

Luego por (2.15), (2.20) y (2.21) hemos probado que

$$
\frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_\alpha f_2(x) - V_\alpha f_2(x_0)\big|dx \leq C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.
$$

Pasamos a considerar $V_\alpha f_3$.

$$
\begin{aligned}
V_\alpha f_3(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)f_3}{|x-y|^\alpha|x+y|^{n-\alpha}}dy \\
&= f_3\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\psi\big(\big|x|x|^{-1}-z\big|\big)}{\big|x|x|^{-1}-z\big|^\alpha\big|x|x|^{-1}+z\big|^{n-\alpha}}dz
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_3 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(\big|R(e_1)-R(u)\big|\big)}{\big|R(e_1)-R(u)\big|^\alpha \big|R(e_1)+R(u)\big|^{n-\alpha}} du \\
&= f_3 \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(|e_1-u|\big)}{|e_1-u|^\alpha |e_1+u|^{n-\alpha}} du \\
&= f_3 \int_{B(0,1/2)} \frac{\psi\big(|\nu|\big)}{|\nu|^\alpha |2e_1+\nu|^{n-\alpha}} d\nu = C f_3,
\end{aligned}
$$

donde hicimos el cambio de variables $z = R(u)$ con R la rotación tal que $R(e_1) = x|x|^{-1}$. Como es usual, denotamos $e_1 = (1, 0 \dots 0)$. Por (2.12)-(2.15), (2.20) y (2.21) tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_\alpha f(x) - V_\alpha f_2(x_0) - V_\alpha f_3(x)\big| dx \\
&\qquad \le \frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_\alpha f_1(x)\big| dx + \frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_\alpha f_2(x) - V_\alpha f_2(x_0)\big| dx \\
&\qquad \le C \|f\|_{BMO_0(\omega)}.
\end{aligned}
$$

Es decir, (2.11) está probado.

Ahora demostraremos que la condición de acotación media de la Definition 2.3.1 se satisface para $V_\alpha f$. Sea $B = B(0,r)$, queremos probar que

$$
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_\alpha f(x)\big| dx \le C \|f\|_{BMO_0(\omega)},
$$

para alguna constante C independiente de f.

Si $x \in B$ y $\frac{|x-y|}{|x|} < \frac{1}{2}$, entonces $|y| < 2r$, y

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_\alpha f(x)\big| dx &\le \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)| \psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dy dx \\
&= \frac{1}{\omega(B)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \int_B \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dx dy \\
&\le \frac{1}{\omega(B)} \int_{2B} |f(y)| \int_B \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dx dy.
\end{aligned}
$$

La demostración quedará completa si

$$
\int_B \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dx \le C
$$

para $0 < |y| < 2r$. Entonces, sea R la rotación tal que $R(e_1) = y|y|^{-1}$ y hacemos el cambio de variables $R(u) = x|y|^{-1}$. Así, si $\psi\big(|u|^{-1}|u-e_1|\big) \ne 0$, se sigue que $0 < c_0 < |u| < c_1$ y $|u+e_1| \ge c > 0$. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
\int_B \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} dx &\le \int_{A(0,c_0,c_1)} \frac{\psi\big(|u|^{-1}|u-e_1|\big)}{|u-e_1|^\alpha |u+e_1|^{n-\alpha}} du \\
&\le C \int_{A(0,c_0,c_1)} \frac{1}{|u-e_1|^\alpha} du \le C.
\end{aligned}
$$

□

Demostración del Teorema 2.3.2. Sean $f \in E\big(BMO_0(\omega)\big)$ y $x \neq 0$. Definimos $U = B(0, 3|x|/2) \cap B^c(x, |x|/4) \cap B^c(-x, |x|/4)$. Entonces

$$\begin{aligned}
&T_\alpha f(x) - V_\alpha f(x) - V_{n-\alpha} f(-x) - Qf(x) \\
&\qquad = T_\alpha(\chi_U f)(x) - \int_{A(x,|x|/4,|x|/2)} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} f(y)dy \\
&\qquad\quad - \int_{A(-x,|x|/4,|x|/2)} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x+y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} f(y)dy \\
&\qquad\quad - \int_{|x|\le|y|<3|x|/2} \frac{f(y)}{|y|^n} dy + \int_{|y|\ge 3|x|/2} \left(K_\alpha(x,y) - \frac{1}{|y|^n}\right) f(y)dy.
\end{aligned}$$

Como $\omega \in A_1$, entonces

$$\begin{aligned}
&\Bigg| T_\alpha(\chi_U f)(x) - \int_{A(x,|x|/4,|x|/2)} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} f(y)dy \\
&\qquad - \int_{A(-x,|x|/4,|x|/2)} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x+y|\big)}{|x-y|^\alpha |x+y|^{n-\alpha}} f(y)dy - \int_{|x|\le|y|<3|x|/2} \frac{f(y)}{|y|^n} dy \Bigg| \\
&\qquad\qquad \le C \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0,3|x|/2)} |f(y)|dy \\
&\qquad\qquad \le C\omega(x) \|f\|_{BMO_0(\omega)}.
\end{aligned}$$

Similares argumentos a los que usamos en la demostración del Teorema 2.2.4, implican

$$\begin{aligned}
\left| \int_{|y|\ge 3|x|/2} \left(K_\alpha(x,y) - \frac{1}{|y|^n}\right) f(y)dy \right| &\le C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i\big(2^i|x|\big)^n} \int_{|y|<3|x|2^{i+1}/2} |f(y)|dy \\
&\le C\omega(x) \|f\|_{BM_0(\omega)}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\|T_\alpha f - V_\alpha f - (V_{n-\alpha} f)^\vee - Qf\|_{L^\infty(\omega^{-1})} \le C\|f\|_{BMO_0(\omega)}.$$

Así, por la Proposicíon 2.2.3, el Lema 2.3.5 y que $\omega(-x) \le C\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, el teorema queda demostrado.

□

2.4. Comparación entre espacios

Considerando (2.8) de la sección anterior, haremos una breve comparación entre los espacios $BM_0(\omega)$, $BMO_0(\omega)$ y $BMO(\omega)$ en el caso 1-dimensional para el peso $\omega \equiv 1$.

Sean

$$f_0(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{si } x \in (1,2), \\ 0 & \text{si } x \notin (1,2), \end{cases} \qquad \text{y} \qquad g_0(x) = \begin{cases} \log \dfrac{1}{|x|} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \ge 1. \end{cases}$$

Entonces,

(1) *$f_0 \in BM_0(\omega)$ pero $f_0 \notin BMO(\omega)$, luego se sigue que $f_0 \notin BMO_0(\omega)$;*

(2) *$g_0 \in BMO(\omega)$ pero $g_0 \notin BM_0(\omega)$.*

Por lo tanto, las inclusiones $BMO_0(\omega) \subset BM_0(\omega)$ y $BMO_0(\omega) \subset BMO(\omega)$ son estrictas, y los espacios $BM_0(\omega)$ y $BMO(\omega)$ son diferentes en el sentido que no hay contención entre ellos.

Veamos (1), en efecto, sea $1 < r \leq 2$

$$\frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f_0(x)dx = \frac{1}{2r}\int_1^r \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{1}{r}\sqrt{x-1}\bigg|_1^r = \frac{\sqrt{r-1}}{r} \leq 1,$$

esto muestra que $f_0 \in BM_0(\omega)$. Ahora, sea $\epsilon > 0$, y notemos que si $1 < x < 1+\epsilon$ entonces $\sqrt{x-1} < \sqrt{\epsilon}$, luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\epsilon}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\left|f_0(x) - \frac{1}{2\epsilon}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} f_0(t)dt\right|dx &= \frac{1}{2\epsilon}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\left|f_0(x) - \frac{1}{2\epsilon}\int_1^{1+\epsilon}\frac{1}{\sqrt{t-1}}dt\right|dx \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\left|f_0(x) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right|dx \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\int_{1-\epsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dx + \frac{1}{2\epsilon}\int_1^{1+\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon}},
\end{aligned}$$

lo cual muestra que $f_0 \notin BMO(\omega)$.

Es muy conocido que $g_0 \in BMO$ y que $g_0 \notin L^\infty(\mathbb{R})$ (ver [Duo01]). Veamos que $g_0 \notin BM_0(\omega)$, en efecto, sea $\epsilon > 0$, entonces

$$\frac{1}{2\epsilon}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}|g_0(x)|dx = \frac{-1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon}\log(x)dx = \frac{-1}{\epsilon}\Big(x\log(x) - x\Big)\bigg|_\epsilon^0 = -\log(\epsilon) + 1,$$

lo cual muestra (2).

Capítulo 3

Acotación de $T_{\alpha,\beta}$

En este capítulo estudiaremos una generalización de tipo fraccionario de los operadores integrales T_α, que denotaremos por $T_{\alpha,\beta}$. Primero, probaremos las acotaciones con pesos de $T_{\alpha,\beta}$ entre espacios de Lebesgue para pesos en la clase de Muckenhoupt. Luego, demostraremos las acotaciones con pesos de $T_{\alpha,\beta}$, $\alpha+\beta<n$, desde una versión débil del espacio L^p, con $n/(n-(\alpha+\beta)) \leq p < n/(n-(\alpha+\beta)-1)^+$, en adecuados espacios BMO^δ, para pesos cumpliendo una desigualdad reversa de Hölder y una condición de duplicación. Por último, probaremos las acotaciones con pesos de $T_{\alpha,\beta}$, $n-1<\alpha+\beta\leq n$, desde un subespacio de un espacio de tipo BMO_0^γ local en un adecuado espacio BMO^δ, para pesos cumpliendo una condición de duplicación. Es importante destacar, que en este último resultado, la clase de pesos considerada es más grande que A_∞.

Sean $n\geq 1$ y $\alpha,\beta>0$ tales que $\alpha+\beta\leq n$. Entonces $T_{\alpha,\beta}$ está definido por

$$T_{\alpha,\beta}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^\alpha |x+y|^\beta}dy.$$

Notemos que para el caso $\alpha+\beta=n$, entonces $T_{\alpha,\beta}=T_\alpha$. Los resultados obtenidos en este capítulo están contenidos en [FF15b].

3.1. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ de L^p en L^q

El siguiente lema muestra que $T_{\alpha,\beta}$ está puntualmente controlado por los operadores de Calderón modificado y maximal fraccionario. Denotamos por $\lambda = n-(\alpha+\beta)$.

Lema 3.1.1. *Sean $\alpha+\beta<n$ y $f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ no negativa, entonces*

$$cS_\lambda f(x) \leq T_{\alpha,\beta}f(x) \leq C\big(S_\lambda f(x) + M_\lambda f(x) + M_\lambda f(-x)\big),$$

para todo $x\in\mathbb{R}^n$, $x\neq 0$, donde c y C son independientes de f.

La demostración del Lema 3.1.1 se puede deducir de la demostración del Lema 2.1.1 del Capítulo 2, con las modificaciones obvias.

Teorema 3.1.2. *Sean $\alpha + \beta < n$, $1 < p < n/\lambda$ y $1/q = 1/p - n/\lambda$. Si $\omega \in A_{p,q}$ y satisface $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces existe C tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta} f\|_{L^q(\omega^q)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega^p)},$$

para toda $f \in L^p(\omega^p)$.

Demostración. Suponemos que $\alpha + \beta < n$, $1 < p < n/\lambda$ y $1/q = 1/p - n/\lambda$.

Por el Teorema 1.3.7, $\omega \in A_{p,q}$ si y sólo si M_λ es acotado de $L^p(\omega^p)$ en $L^q(\omega^q)$. A su vez, por el Lema 1.3.4 que $\omega \in A_{p,q}$ si y sólo si $\omega^q \in A_{1+q/p'}$. Ahora, no es difícil mostrar que si $\omega^q \in A_{1+q/p'}$ entonces se satisfacen las condiciones (1.7) y (1.8) del Teorema 1.5.2, con $u = \omega^q$ y $v = \omega^p$. Luego, si $\omega^q \in A_{1+q/p'}$, entonces S_λ es acotado de $L^p(\omega^p)$ en $L^q(\omega^q)$. Por lo tanto, la demostración del teorema sigue de estos hechos y del Lema 3.1.1 antes enunciado. □

Para concluir esta sección, podemos obtener como corolario del Lema 3.1.1 y del Teorema 3.1.2, la siguiente caracterización de la acotación con pesos de $T_{\alpha,\beta}$ entre espacios de Lebesgue para pesos potencia.

Corolario 3.1.3. *Sean $\alpha + \beta < n$, $1 < p < n/\lambda$ y $1/q = 1/p - n/\lambda$. Si $\omega(x) = |x|^a$ es un peso potencia, entonces $\omega \in A_{p,q}$ si y sólo si existe C tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta} f\|_{L^q(\omega^q)} \leq C\|f\|_{L^p(\omega^p)},$$

para toda $f \in L^p(\omega^p)$.

3.2. Clases de pesos y espacios de funciones para la acotación de $T_{\alpha,\beta}$

Siguiendo el esquema usado en los capítulos anteriores, una vez definidos los operadores, introducimos las clases de pesos con las cuales estudiaremos la acotación, y luego los espacios de funciones sobre los cuales estarán definidos los operadores.

Comenzamos recordando la desigualdad reversa de Hölder para pesos dada en la Definición 1.1.5. Sea $1 < p < \infty$, entonces $\omega \in RH(p)$, si existe C tal que

$$\left(\frac{1}{|B|}\int_B \omega^p\right)^{1/p} \leq C\frac{1}{|B|}\int_B \omega,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

Definición 3.2.1. Sea $\eta \geq 1$, un peso ω pertenece a D_η si satisface la siguiente condición de duplicación

$$\omega(tB) \leq Ct^{n\eta}\omega(B),$$

para todo $t > 1$, para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ y alguna constante C.

Como comentamos en el Capítulo 1, es conocido que todo peso en la clase de Muckenhoupt A_∞ pertenece a $RH(p)$ para algún p. Recíprocamente, todo peso en $RH(p)$ pertenece a A_∞. Por lo tanto, podemos escribir

$$A_\infty = \bigcup_{p>1} RH(p).$$

Por otro lado, si un peso ω pertenece a la clase de Muckenhoupt A_∞ entonces $\omega \in D_\eta$ para algún $\eta \geq 1$. Sin embargo, la recíproca no es cierta, esto fue obtenido por Fefferman y Muckenhoupt en [FM74]. Definimos el ejemplo de peso que consideraron los autores en su publicación.

Sea j un número entero, consideramos

$$f_j(x) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } 0 < x \leq 4^{-j-1} \\ 3/2 & \text{si } 4^{-j-1} < x \leq 3 \cdot 4^{-j-1}, \\ 1/2 & \text{si } 3 \cdot 4^{-j-1} < x \leq 4^{-j}, \end{cases}$$

y f_j de período 4^{-j}. Luego, para x positivo sea $j(x)$ el número entero tal que

$$4^{-j(x)-1} < x \leq 4^{-j(x)}.$$

Entonces definimos

$$W(x) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{j=0}^{2j(x)} f_j(x) & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 1, \\ W(-x) & \text{si } x < 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Fefferman y Muckenhoupt mostraron que el peso W satisface la condición de duplicación D_η para algún η, y que $W \notin A_\infty$.

Las clases de pesos $RH(p')$, D_η y $H(\lambda, p)$ (ver la Definición 1.4.1), satisfacen las siguientes relaciones que se obtienen a partir del Lema 1.4.2.

(1) Si $1 \leq \eta < 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{\lambda}{n}$, con $0 < \lambda < 1$ entonces, $D_\eta = H(\lambda, \infty)$.

(2) Si $0 < \lambda < n$ y $1 < p < \dfrac{n}{(\lambda-1)^+}$ entonces, $\omega \in RH(p')$ y $\omega^{p'} \in D_{\tilde{\eta}}$ para algún $1 \leq \tilde{\eta} < \dfrac{n-\lambda+1}{n}p'$ si y sólo si $\omega \in H(\lambda, p)$.

Luego, es fácil de comprobar.

(3) Si $0 < \lambda < n$ y $1 < p < \dfrac{n}{(\lambda-1)^+}$, entonces $\omega \in RH(p')$ y $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \leq \eta < 1 + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{\lambda}{n}$ si y sólo si $\omega \in H(\lambda, p)$.

Por lo tanto, si $1 < p < n/(\lambda - 1)^+$, la hipótesis $\omega \in H(\lambda, p)$ del Lema 1.4.5, puede ser reemplazada por las condiciones para ω dadas en (3).

Finalmente, observamos que si $\omega \in D_\eta$ entonces existe una constante C tal que

$$\omega(B) \leq C\omega\big(B \setminus \tfrac{1}{2}B\big) \tag{3.2}$$

para toda bola B en $\mathbb{R}^n$.

Ahora, repasamos la Definición 1.4.3 de $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$, e introducimos los espacios de funciones $BMO^\gamma(\omega)$ y $BMO^\gamma_0(\omega)$.

Dado un peso ω y $1 \leq p < \infty$, entonces $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ si

$$\|f\|^p_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} = \sup_{t>0} t^p \big|\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)|\omega^{-1}(x) > t\}\big| < \infty.$$

Definición 3.2.2. Sean ω un peso y $0 \leq \gamma < 1/n$. Una función f localmente integrable pertenece a $BMO^\gamma(\omega)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma} \int_B |f - f_B| \leq C \tag{3.3}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$.

La seminorma de f en $BMO^\gamma(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO^\gamma(\omega)}$, es el ínfimo sobre tales constantes C.

Definición 3.2.3. Sean ω un peso y $0 \leq \gamma < 1/n$. Una función f localmente integrable pertenece a $BMO^\gamma_0(\omega)$ si existe una constante C tal que f satisface la condición (3.3) para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$, y

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\gamma} \int_B |f| \leq C \tag{3.4}$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada en el origen.

La norma de f en $BMO^\gamma_0(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BMO^\gamma_0(\omega)}$, es el ínfimo sobre tales constantes C.

El espacio de funciones $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ es una versión del espacio de Lebesgue L^p-débil pesado y satisface $L^p(\omega^{-p}) \subset \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$.

Por otro lado, observamos que con estas definiciones el espacio $BMO^0(\omega)$ es el espacio $BMO(\omega)$ de la Definición 1.1.10. Esta versión pesada de $BMO(\omega)$, fue introducida por Muckenhoupt y Wheeden en [MW76]. Además $BMO^0_0(\omega)$ es el espacio $BMO_0(\omega)$ de la Definición 2.3.1. También, la familia de espacios $BMO^\gamma(\omega)$ está contenida en la familia de espacios pesados de Lipschitz $\mathcal{L}_\omega(\gamma)$ definidos y estudiados en [HSV97], y $BMO^\gamma(\omega)$ para $\omega \equiv 1$ es el conocido espacio integral de Lipschitz.

Antes de comenzar nuestro estudio sobre la acotación de $T_{\alpha,\beta}$ en los espacios antes definidos, notamos que $T_{\alpha,\beta}f$ puede ser idénticamente infinito para algunas funciones tanto en $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ como en $BMO^\gamma_0(\omega)$. Por ejemplo, sea $\omega \equiv 1$, consideramos las siguientes funciones,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/p}} & \text{si } x \in (1, \infty), \\ 0 & \text{si } x \notin (1, \infty); \end{cases}$$

y g una función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le g \le 1$, $g = 0$ en $B(0,1)$ y $g = 1$ en $B^c(0,2)$. Entonces no es difícil mostrar que $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $g \in BMO_0^\gamma(\omega)$. Pero tanto $T_{\alpha,\beta}f$ para $p \ge 1/(1-\alpha-\beta)$, como $T_{\alpha,\beta}g$, son idénticamente infinito.

Sin embargo, en el Lema 3.3.2 de la siguiente sección 3.3, mostraremos que si $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ o $f \in BMO_0^\gamma(\omega)$, y $T_{\alpha,\beta}f(x)$ es finito para algún punto x, entonces $T_{\alpha,\beta}f$ es finito en casi todo punto. Por esta razón, definimos

$$E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big) = \big\{f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}} : T_{\alpha,\beta}f(x) < \infty \text{ para algún } x \neq 0\big\}$$

y

$$E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big) = \big\{f \in BMO_0^\gamma(\omega) : T_{\alpha,\beta}f(x) < \infty \text{ para algún } x \neq 0\big\}.$$

Por último, si $\omega \equiv 1$ y g es una función en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le g \le 1$, $g = 1$ en $B(x_0,1)$ y $g = 0$ en $B^c(x_0,2)$ con $|x_0| = 8$, entonces g pertenece tanto a $E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ como a $E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$. Más aún, $g \in E\big(BMO_0^\gamma(W)\big)$ para el peso W definido por Fefferman y Muckenhoupt (ver (3.1)).

Para continuar, vamos a introducir un operador análogo al operador V_α que definimos en la sección 2.3 del capítulo 2. Su estudio será clave para demostrar los resultados principales sobre $T_{\alpha,\beta}$ de las siguientes secciones.

Sea ψ una función par en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le \psi \le 1$, $\psi = 1$ en $\big[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\big]$ y $\psi = 0$ en $\big[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\big]^c$. Definimos

$$V_{\alpha,\beta}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)f(y)}{|x-y|^\alpha|x+y|^\beta}dy, \quad x \neq 0.$$

Por simplicidad denotamos $K_{\alpha,\beta} = |x-y|^{-\alpha}|x+y|^{-\beta}$.

3.3. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$

Denotamos por $\lambda = n - (\alpha+\beta)$ y $J_\lambda = \big[\frac{n}{\lambda}, \frac{n}{(\lambda-1)^+}\big)$.

Lema 3.3.1. *Supongamos que $\alpha+\beta < n$ y $p \in J_\lambda$. Sea ω un peso que satisface $\omega \in RH(p')$, $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \le \eta < \frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$, y $\omega(-x) \le c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ entonces $V_{\alpha,\beta}f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = 1 - \frac{\alpha+\beta}{n} - \frac{1}{p}$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|V_{\alpha,\beta}f\|_{BMO^\delta(\omega)} \le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

Demostración. Sea $f \in \tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$. Observamos que por la equivalencia (3) de la sección anterior, estamos en condiciones de usar los lemas 1.4.4 y 1.4.5.

Mostraremos primero que la condición media acotada (3.4) de la Definición 3.2.3 se satisface para $V_{\alpha,\beta}f$. Esto es, sea $B = B(0,r)$, entonces queremos probar que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f(x)\big|dx \le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}, \tag{3.5}$$

para alguna constante C independiente de f y de r.

Si $x \in B$ y $\frac{|x-y|}{|x|} < \frac{1}{2}$, entonces $|y| < 2r$ y

$$\int_B \left|V_{\alpha,\beta}f(x)\right|dx \leq \int_{2B} |f(y)| \int_B \frac{\psi\left(|x|^{-1}|x-y|\right)}{|x-y|^{\alpha}|x+y|^{\beta}}dxdy. \tag{3.6}$$

Ahora probemos que

$$\int_B \frac{\psi\left(|x|^{-1}|x-y|\right)}{|x-y|^{\alpha}|x+y|^{\beta}}dx \leq Cr^{n-(\alpha+\beta)},$$

para $0 < |y| < 2r$. En efecto, sea R la rotación tal que $R(e_1) = y|y|^{-1}$. Hacemos el cambio de variables $R(u) = x|y|^{-1}$. Entonces, si $\psi\left(|u|^{-1}|u-e_1|\right) \neq 0$, se sigue que $0 < c_0 < |u| < c_1$ y $|u+e_1| \geq c > 0$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\int_B \frac{\psi\left(|x|^{-1}|x-y|\right)}{|x-y|^{\alpha}|x+y|^{\beta}}dx &\leq |y|^{n-(\alpha+\beta)} \int_{A(0,c_0,c_1)} \frac{\psi\left(|u|^{-1}|u-e_1|\right)}{|u-e_1|^{\alpha}|u+e_1|^{\beta}}du \\ &\leq Cr^{n-(\alpha+\beta)} \int_{A(0,c_0,c_1)} \frac{1}{|u-e_1|^{\alpha}}du \\ &\leq Cr^{n-(\alpha+\beta)}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Luego, por (3.6), (3.7), el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$ tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B \left|V_{\alpha,\beta}f(x)\right|dx &\leq C\frac{r^{n-(\alpha+\beta)}}{\omega(B)} \int_{2B} |f(y)|dy \\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{\omega(2B)}{\omega(B)} r^{n-(\alpha+\beta)-n/p} \\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora mostraremos que la condición de oscilación media acotada (3.3) se satisface para $V_{\alpha,\beta}f$. Sea $B = B(x_0, r)$ con radio $r < |x_0|/8$, queremos probar que existe una constante C independiente de f y de B tal que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B \left|V_{\alpha,\beta}f(x) - c\right|dx \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta},$$

para alguna constante c dependiendo de f y de B. Por (3.5), es suficiente considerar sólo tales bolas B.

Escribimos a f como

$$f = f \cdot \chi_{2B} + f \cdot \chi_{(2B)^c} = f_1 + f_2.$$

Primero consideramos $V_{\alpha,\beta}f_1$. Si $y \in 2B$ y $x \in B$ entonces $|x+y| \geq c|x_0|$. Así, usando el

Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f_1(x)\big|dx &\leq \frac{C}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_B\int_{2B}\frac{|f(y)|}{|x-y|^\alpha}dydx \\
&= \frac{C}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_{2B}|f(y)|\int_B\frac{1}{|x-y|^\alpha}dxdy \\
&= C\frac{r^{n-\alpha}}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_{2B}|f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} r^{n-(\alpha+\beta)-n/p} \\
&= C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Consideramos ahora $V_{\alpha,\beta}f_2$. Sea $x \in B = B(x_0, r)$,

$$\begin{aligned}
&\big|V_{\alpha,\beta}f_2(x) - V_{\alpha,\beta}f_2(x_0)\big| \\
&\quad\leq \int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dy \\
&\quad\quad + \int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big|dy. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

Analizaremos cada término de la desigualdad. Notemos que si $x \in B$, entonces $\frac{7}{8}|x_0| < |x| < \frac{9}{8}|x_0|$, es decir, $|x| \sim |x_0|$. Si $\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) \neq 0$ entonces $y \in B(x, |x|/2)$. Además, si $y \in B(x, |x|/4)$, entonces $\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) = 1$. Así, si $\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big| \neq 0$, entonces $y \in \Omega = \big[B(x, |x|/2) \cup B(x_0, |x_0|/2)\big] \cap \big[B^c(x, |x|/4) \cup B^c(x_0, |x_0|/4)\big]$. Ahora, si $y \in \Omega$, entonces $|y - x_0| < |x_0|$. Luego $\Omega \subset B(x_0, |x_0|) = B_0$. También, si $y \in \Omega$, entonces $K_{\alpha,\beta}(x,y) \leq C|x_0|^{-(\alpha+\beta)}$. Por lo tanto, usando el teorema del valor medio, obtenemos que

$$\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big| \leq C\frac{r}{|x_0|},$$

y entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dy \leq \frac{Cr}{|x_0|^{\alpha+\beta+1}}\int_{B_0}|f_2(y)|dy. \qquad (3.11)$$

Por (3.11), el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dydx \\
&\qquad\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{r^{n+1}\omega(B_0)}{|x_0|^{\alpha+\beta+1+n/p}\omega(B)} \\
&\qquad\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1+n/p}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{1-(\alpha+\beta)+n/p} \\
&\qquad\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Para seguir, estimamos el segundo término de (3.10). Si $x \in B$, $y \in B\big(x_0, |x_0|/2\big)$ e $y \in (2B)^c$, entonces por el teorema del valor medio

$$\big|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big| \leq C\frac{r}{|y-x_0|^{\alpha+\beta+1}}.$$

Así, por el Lema 1.4.5 y $\omega \in D_\eta$ tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n} &|f_2(y)|\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|K_{\alpha,\beta}(x,y)-K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big|dydx \\ &\leq C\frac{r^{n+1}}{\omega(B)}\int_{B^c(x_0,2r)}\frac{|f(y)|}{|y-x_0|^{\alpha+\beta+1}}dy \\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Por (3.10), (3.12) y (3.13) hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B\big|V_{\alpha,\beta}f_2(x) - V_{\alpha,\beta}f_2(x_0)\big|dx \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \tag{3.14}$$

Luego, por (3.8), (3.9) y (3.14) hemos demostrado el lema.

□

Lema 3.3.2. *(i) Sean $1 < p < \infty$, $\omega \in RH(p')$ y $\alpha+\beta < n$. Si $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ entonces $T_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.*
(ii) Sea f una función localmente integrable que satisface (3.4) de la Definición 3.2.2 con $0 \leq \gamma < 1/n$, y sea ω un peso en D_η para algún η. Si $T_{\alpha,\beta}f(x)$ es finito para algún $x \neq 0$, entonces $T_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea f una función no negativa y localmente integrable. Consideramos

$$P_{\alpha,\beta}f(x) = \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}}\int_{|y|<|x|}f(y)dy \quad \text{y} \quad Q_{\alpha,\beta}f(x) = \int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^{\alpha+\beta}}dy.$$

No es difícil obtener que

$$cQ_{\alpha,\beta}f(x) \leq T_{\alpha,\beta}f(x) \leq C\big(P_{\alpha,\beta}f(x) + Q_{\alpha,\beta}f(x) + V_{\alpha,\beta}f(x) + V_{\beta,\alpha}f(-x)\big),$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Por (3.6) y (3.7) del Lema anterior 3.3.1, resulta que $V_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Ahora supongamos que $T_{\alpha,\beta}f(x_0) < \infty$, $x_0 \neq 0$. Entonces $Q_{\alpha,\beta}f(x) < \infty$ para $|x| \geq |x_0|$, y si $0 < |x| < |x_0|$ entonces

$$Q_{\alpha,\beta}f(x) \leq \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}}\int_{|x|<|y|<|x_0|}f(y)dy + Q_{\alpha,\beta}f(x_0) < \infty.$$

Además, como

$$\int_{B(0,r)}\big(Q_{\alpha,\beta}f(x) - Q_{\alpha,\beta}f(\nu)\big)dx \leq \int_{B(0,r)}f(y)|y|^{n-(\alpha+\beta)}dy < \infty,$$

donde $|\nu| = r$, entonces $Q_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Si $\alpha+\beta < n$ es inmediato que $P_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, (i) sigue a partir del Lema 1.4.4.

Para (ii) solo resta probar que $P_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ en el caso $\alpha+\beta = n$. Sea $B_j = B(0, 2^{-j}r)$, $j = 0, 1, \ldots$. Usando (3.4), $\omega \in D_\eta$ y (3.2), Obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_0} \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0,|x|)} f(y)dydx &\leq C \int_{B_0} \frac{\omega(B(0,|x|))}{|x|^{n-n\gamma}}dx\\ &\leq Cr^{n\gamma-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^{j(n\gamma-n)}} \int_{B_j\setminus B_{j+1}} \omega(B_j)dx\\ &\leq Cr^{n\gamma} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\omega(B_j \setminus B_{j+1})}{2^{jn\gamma}}\\ &\leq Cr^{n\gamma}\omega(B_0).\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3.3. *Supongamos que $\alpha + \beta < n$ y $p \in J_\lambda$. Sea ω un peso que satisface $\omega \in RH(p')$, $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \leq \eta < \frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$, y $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in E(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}})$ entonces $T_{\alpha,\beta}f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = 1 - \frac{\alpha+\beta}{n} - \frac{1}{p}$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta}f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

Demostración. Sea $f \in E(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}})$. Sean φ_1 y φ_2 funciones pares en $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tales que $0 \leq \varphi_1, \varphi_2 \leq 1$, $\varphi_1 = 1$ en $[-2, 2]$, $\varphi_1 = 0$ en $[-3, 3]^c$, y $\varphi_2 = 1 - \varphi_1$. Luego, escribimos a $T_{\alpha,\beta}$ como

$$\begin{aligned}T_{\alpha,\beta}f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K_{\alpha,\beta}(x,y)\varphi_1(|x|^{-1}|y|)dy + \int_{\mathbb{R}^n} f(y)K_{\alpha,\beta}(x,y)\varphi_2(|x|^{-1}|y|)dy\\ &= T_1f(x) + T_2f(x).\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por (i) del Lema 3.3.2, se satisface que $T_{\alpha,\beta}f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Analizaremos cada operador T_j de la expresión (3.15). Primero consideramos T_1f. Sean $B = B(0,r)$ y $x \in B$. Usando que $|\varphi_1(|x|^{-1}|y|) - \psi(|x|^{-1}|x-y|) - \psi(|x|^{-1}|x+y|)| = 0$ para $y \in B(x, |x|/4) \cup B(-x, |x|/4)$, el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|T_1f(x) - V_{\alpha,\beta}f(x) - V_{\beta,\alpha}f(-x)\big|dx\\ &\qquad\leq \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\\ &\qquad\qquad\times \big|\varphi_1\big(|x|^{-1}|y|\big) - \psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x|^{-1}|x+y|\big)\big|dydx\\ &\qquad\leq \frac{C}{\omega(B)} \int_B \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}} \int_{B(0,3r)} |f(y)|dydx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{\omega\big(B(0,3r)\big)}{\omega(B) r^{n/p}} \int_B \frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}} dx \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}. && (3.16)
\end{aligned}$$

Para continuar, sea $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/16$. Por (3.16) es suficiente considerar sólo tales bolas B. Luego

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B &\big|T_1 f(x) - V_{\alpha,\beta} f(x) - V_{\beta,\alpha} f(-x) - \big(T_1 f - V_{\alpha,\beta} f - (V_{\beta,\alpha} f)^{\vee}\big)_B\big| dx \\
&\leq \frac{1}{\omega(B)|B|} \int_B \int_B \big|T_1 f(x) - V_{\alpha,\beta} f(x) - V_{\beta,\alpha} f(-x) \\
&\quad - \big(T_1 f(z) - V_{\alpha,\beta} f(z) - V_{\beta,\alpha} f(-z)\big)\big| dx dz, && (3.17)
\end{aligned}$$

donde $(V_{\beta,\alpha} f)^{\vee}(x) = V_{\beta,\alpha} f(-x)$. Para $x, z \in B$

$$\begin{aligned}
\big|T_1 f(x) &- V_{\alpha,\beta} f(x) - V_{\beta,\alpha} f(-x) - \big(T_1 f(z) - V_{\alpha,\beta} f(z) - V_{\beta,\alpha} f(-z)\big)\big| \\
&\leq \int_{\Omega_1} K_{\alpha,\beta}(x,y)|f(y)|\big|\varphi_1(|x|^{-1}|y|) - \psi(|x|^{-1}|x-y|) - \psi(|x|^{-1}|x+y|) \\
&\quad - \varphi_1(|z|^{-1}|y|) + \psi(|z|^{-1}|z-y|) + \psi(|z|^{-1}|z+y|)\big| dy \\
&\quad + \int_{\Omega_2} |f(y)|\big|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(z,y)\big| \\
&\quad \times \big|\varphi_1(|z|^{-1}|y|) - \psi(|z|^{-1}|z-y|) - \psi(|z|^{-1}|z+y|)\big| dy \\
&= \mathrm{I} + \mathrm{II}, && (3.18)
\end{aligned}$$

donde $\Omega_1 = \big[B^c(x,|x|/4) \cup B^c(z,|z|/4)\big] \cap \big[B^c(-x,|x|/4) \cup B^c(-z,|z|/4)\big] \cap B(0,3|x|) \cap B(0,3|z|) \subset B(0,4|x_0|)$ y $\Omega_2 = B^c(z,|z|/4) \cap B^c(-z,|z|/4) \cap B(0,4|x_0|)$.

Para estimar I, notemos que $|x \pm y| > c|x_0|$ para $y \in \Omega_1$, y por el teorema del valor medio

$$\big|\varphi_1(|x|^{-1}|y|) - \varphi_1(|z|^{-1}|y|)\big| \leq C\frac{r}{|x_0|}$$

y

$$\big|\psi(|x|^{-1}|x \pm y|) - \psi(|z|^{-1}|z \pm y|)\big| \leq C\frac{r}{|x_0|}.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{I} \leq \frac{Cr}{|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \int_{B(0,4|x_0|)} |f(y)| dy. \tag{3.19}$$

Para estimar II, notemos que si $y \in \Omega_2$ entonces $|x \pm y| > c|x_0|$ y $|z \pm y| > c|x_0|$, luego por el teorema del valor medio

$$|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(z,y)| \leq C\frac{r}{|x_0|^{\alpha+\beta+1}}.$$

Por lo tanto

$$\mathrm{II} \leq \frac{Cr}{|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \int_{B(0,4|x_0|)} |f(y)|dy. \tag{3.20}$$

Entonces, por (3.17)-(3.20), el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|T_1 f(x) - &V_{\alpha,\beta} f(x) - V_{\beta,\alpha} f(-x) - \big(T_1 f - V_{\alpha,\beta} f - (V_{\beta,\alpha} f)^\vee\big)_B\big| dx \\
&\leq \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \int_{B(0,4|x_0|)} |f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1+n/p}} \frac{\omega\big(B(0,4|x_0|)\big)}{\omega(B)} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1+n/p}} \left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{\alpha+\beta+1+n/p} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^\delta.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Así, por el Lema 3.3.1, (3.16) y (3.21), obtenemos que

$$\|T_1 f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}. \tag{3.22}$$

Ahora pasamos a considerar T_2. Notemos que

$$|T_2 f(x)| \leq \int_{|y|>|x|} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta}} dy < \infty \tag{3.23}$$

para todo $x \neq 0$ como vimos en la demostración del Lema 3.3.2. Sea $B = B(0,r)$, y sea ν tal que $|\nu| = r$. Aplicando el teorema del valor medio obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B &|T_2 f(x) - T_2 f(\nu)| dx \\
&\leq \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| K_{\alpha,\beta}(x,y) |\varphi_2(|x|^{-1}|y|) - \varphi_2(|\nu|^{-1}|y|)| dy dx \\
&\quad + \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \varphi_2(|\nu|^{-1}|y|) |K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(\nu,y)| dy dx \\
&\leq \frac{C}{\omega(B)} \int_B \int_{A(0,2|x|,3r)} |f(y)| K_{\alpha,\beta}(x,y) dy dx \\
&\quad + \frac{Cr}{\omega(B)} \int_B \int_{B^c(0,2r)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}} dy dx.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Nuevamente analizaremos cada término de la última expresión en (3.24) usando que $\omega \in D_\eta$.

Por el Lema 1.4.4,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{A(0,2|x|,3r)}|f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)dydx &\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_{B(0,3r)}\int_{B(0,|y|/2)}\frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta}}dxdy\\
&\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_{B(0,3r)}|f(y)||y|^{n-(\alpha+\beta)}dy\\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{\omega\big(B(0,3r)\big)}{\omega(B)}r^{n-(\alpha+\beta)-n/p}\\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^{\delta}. \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

Para el segundo término, por el Lema 1.4.5,

$$
\begin{aligned}
\frac{r}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c(0,2r)}\frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dydx &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{r^{n+1}}{\omega(B)}\frac{\omega(2B)}{r^{1+n/p+(\alpha+\beta)}}\\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^{\delta}. \qquad (3.26)
\end{aligned}
$$

Luego, por (3.24)-(3.26), hemos probado que

$$
\frac{1}{\omega(B)|B|^{\delta}}\int_B|T_2f(x)-T_2f(\nu)|dx \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \qquad (3.27)
$$

para toda bola B centrada en el origen.

Ahora, sea $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/2$, por (3.27) es suficiente considerar solo tales bolas B. Sea $\nu = \frac{x_0}{|x_0|}(|x_0|+r)$, por el teorema del valor medio

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)}\int_B|T_2f(x)-T_2f(\nu)|dx\\
&\quad\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)|\varphi_2(|x|^{-1}|y|)-\varphi_2(|\nu|^{-1}|y|)|dydx\\
&\qquad+\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|\varphi_2(|\nu|^{-1}|y|)|K_{\alpha,\beta}(x,y)-K_{\alpha,\beta}(\nu,y)|dydx\\
&\quad\leq \frac{Cr}{\omega(B)|x_0|}\int_B\int_{A(0,2|x|,3|\nu|)}\frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta}}dydx\\
&\qquad+\frac{Cr}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c(0,2|\nu|)}\frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dydx\\
&\quad\leq \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{1+\alpha+\beta}}\int_{B(0,5|x_0|)}|f(y)|dy+\frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\int_{B^c(0,2|\nu|)}\frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dy. \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Una vez más analizaremos cada término de la última expresión. Como $|\nu| \sim |a|$ y $|x| \sim |a|$, entonces por el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{r^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \int_{B(0,5|x_0|)} |f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \frac{\omega\big(B(0,5|x_0|)\big)}{|x_0|^{n/p}} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}. \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

Para el segundo término, como $|\nu| \sim |a|$, entonces por el Lema 1.4.5 y $\omega \in D_\eta$,

$$\begin{aligned}
\frac{r^{n+1}}{\omega(B)} \int_{B^c(0,2|\nu|)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}} dy &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{\omega(B)} \frac{\omega\big(B(x_0,3|x_0|)\big)}{|x_0|^{1+n/p+(\alpha+\beta)}} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

Por (3.27)-(3.30) tenemos que

$$\|T_2 f\|_{BMO^{\delta}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}. \qquad (3.31)$$

Luego, por (3.22) y (3.31), hemos demostrado el teorema.

□

3.4. Acotación de $T_{\alpha,\beta}$ sobre $BMO^{\gamma}(\omega)$

Comenzamos demostrando la acotación del operador $V_{\alpha,\beta}$, que como mencionamos, es fundamental para obtener el teorema sobre *tab*.

Lema 3.4.1. *Supongamos que $n-1 < \alpha+\beta \leq n$ y $0 \leq \gamma < \frac{1}{n}$. Sea ω un peso que satisface $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \leq \eta < \frac{\alpha+\beta}{n} + \frac{1}{n} - \gamma$, y $\omega(-x) \leq c\omega(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \in BMO_0^{\gamma}(\omega)$ entonces $V_{\alpha,\beta} f \in BMO_0^{\delta}(\omega)$ para $\delta = 1 - \frac{\alpha+\beta}{n} + \gamma$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|V_{\alpha,\beta} f\|_{BMO^{\delta}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}.$$

Demostración. Sea $f \in BMO_0^{\gamma}(\omega)$. Primero mostraremos que la condición media acotada (3.4) de la Definición 3.2.3 se satisface para $V_{\alpha,\beta} f$. Sea $B = B(0,r)$, por (3.6) y (3.7) de la demostración del Lema 3.3.1, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_{\alpha,\beta} f(x)\big| dx &\leq C \frac{r^{n-(\alpha+\beta)}}{\omega(B)} \int_{2B} |f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} |B|^{\delta}. \qquad (3.32)
\end{aligned}$$

Ahora mostraremos que la condición de oscilación media acotada (3.3) de la Definición 3.2.2 se satisface para $V_{\alpha,\beta}f$. Sea $B = B(x_0, r)$ con radio $r < |x_0|/8$, queremos probar que existe C independiente de f y de B tal que

$$\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left|V_{\alpha,\beta}f(x) - c\right| dx \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}, \tag{3.33}$$

para alguna constante c dependiendo de f y de B. Por (3.32), es suficiente considerar sólo tales bolas B.

Escribimos a f como

$$f = (f - f_B)\chi_{2B} + (f - f_B)\chi_{(2B)^c} + f_B = f_1 + f_2 + f_3.$$

Consideramos $V_{\alpha,\beta}f_1$. Si $y \in 2B$ y $x \in B$ entonces $|x + y| \geq c|x_0|$. Así

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \left|V_{\alpha,\beta}f_1(x)\right| dx &\leq \frac{C}{\omega(B)|x_0|^{\beta}} \int_B \int_{2B} \frac{|f(y) - f_B|}{|x - y|^{\alpha}} dydx \\
&\leq \frac{C}{\omega(B)|x_0|^{\beta}} \int_B \int_{B(x,3r)} \frac{|f(y) - f_{B(x,3r)}|}{|x - y|^{\alpha}} dydx \\
&\quad + \frac{C}{\omega(B)|x_0|^{\beta}} \int_B \int_{B(x,3r)} \frac{|f_{B(x,3r)} - f_B|}{|x - y|^{\alpha}} dydx. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Ahora analizaremos cada término en la última expresión (3.34). Llamamos $B_j = B(x, 2^{-j}3r)$, con $j = 0, 1, \ldots$. Usando (3.2) obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B(x,3r)} \frac{|f(y) - f_{B(x,3r)}|}{|x - y|^{\alpha}} dy &= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{B_j \setminus B_{j+1}} \frac{|f(y) - f_{B(x,3r)}|}{|x - y|^{\alpha}} dy \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{-j}r)^{\alpha}} \int_{B_j} |f(y) - f_{B_0}| dy \\
&\leq C \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}r)^{n-\alpha} \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} |f - f_{B_i}| \right) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}r)^{n-\alpha} \left(\sum_{i=0}^{j} \frac{\omega(B_i)}{|B_i|^{1-\gamma}} \right) \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega(B_i)}{|B_i|^{1-\gamma}} (2^{-i}r)^{n-\alpha} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\omega(B_i \setminus B_{i+1})}{(2^{-i}r)^{n(1-\gamma)-(n-\alpha)}} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} \int_{B_0} \frac{\omega(y)}{|x - y|^{n(1-\gamma)-(n-\alpha)}} dy.
\end{aligned}$$

Como $\omega \in D_\eta$, entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_B\int_{B(x,3r)}\frac{|f(y)-f_{B(x,3r)}|}{|x-y|^\alpha}dydx\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{1}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_B\int_{B_0}\frac{\omega(y)}{|x-y|^{n(1-\gamma)-(n-\alpha)}}dydx\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{1}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_{4B}\omega(y)\int_B\frac{1}{|x-y|^{n(1-\gamma)-(n-\alpha)}}dxdy\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n(1+\gamma)-\alpha}}{|x_0|^\beta}\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.
\end{aligned}\tag{3.35}$$

Luego, analizamos el segundo término de (3.34). Usando que $\omega \in D_\eta$, obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)|x_0|^\beta}\int_B\int_{B(x,3r)}\frac{|f_{B(x,3r)}-f_B|}{|x-y|^\alpha}dydx\\
&\qquad\le\frac{Cr^{n-\alpha}}{\omega(B)|x_0|^\beta}\frac{1}{|B|}\int_B\int_B|f(u)-f_{B(x,3r)}|dudx\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n-\alpha}}{\omega(B)|B||x_0|^\beta}\int_B\omega(B(x,3r))|B(x,3r)|^\gamma dx\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{\omega\big(B(x_0,4r)\big)r^{n-\alpha+n\gamma}}{\omega(B)|x_0|^\beta}\\
&\qquad\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.
\end{aligned}\tag{3.36}$$

Entonces, por (3.34)-(3.36) hemos obtenido que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B\big|V_{\alpha,\beta}f_1(x)\big|dx\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.\tag{3.37}$$

Pasamos a considerar $V_{\alpha,\beta}f_2$. Sea $x\in B=B(x_0,r)$,

$$\begin{aligned}
&\big|V_{\alpha,\beta}f_2(x)-V_{\alpha,\beta}f_2(x_0)\big|\\
&\qquad\le\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|dy\\
&\qquad\quad+\int_{\mathbb{R}^n}|f_2(y)|\psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big|K_{\alpha,\beta}(x,y)-K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big|dy.
\end{aligned}\tag{3.38}$$

Observamos que la desigualdad (3.11) de la demostración del Lema 3.3.1, se satisface para el primer término de la desigualdad (3.38). Luego, elegimos un número natural j_0 tal que $2^{j_0-1}r < |x_0| \le 2^{j_0}r$ y denotamos $B_j = B(x_0, 2^j r)$ para $j = 0, 1, \dots, j_0$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)| K_{\alpha,\beta}(x,y) \big|\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big) - \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big)\big| dydx \\
&\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \int_{B_{j_0}} |f_2(y)| dy \\
&\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}} \sum_{j=1}^{j_0} \frac{|B_{j_0}|}{|B_j|} \int_{B_j} |f(y) - f_{B_j}| dy \\
&\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)} \frac{r^{n+1+n\gamma}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1}} 2^{j_0 n} \sum_{j=1}^{j_0} 2^{jn(\gamma+\eta-1)} \\
&\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)} |B|^\delta. \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

Ahora estimaremos el segundo término de (3.38). Como $x \in B$, $y \in B\big(x_0, |x_0|/2\big)$ e $y \in (2B)^c$, entonces por el teorema del valor medio

$$
\big|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big| \le C \frac{r}{|y-x_0|^{\alpha+\beta+1}}.
$$

Si $A_j = A(x_0, 2^{j-1}r, 2^j r)$, $B_j = B(x_0, 2^j r)$ con $j \in \mathbb{N}$, entonces

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{\mathbb{R}^n} |f_2(y)| \psi\big(|x_0|^{-1}|x_0-y|\big) \big|K_{\alpha,\beta}(x,y) - K_{\alpha,\beta}(x_0,y)\big| dydx \\
&\le C \frac{r^{n+1}}{\omega(B)} \int_{A\left(x_0, 2r, \frac{|x_0|}{2}\right)} \frac{|f(y) - f_B|}{|y-x_0|^{\alpha+\beta+1}} dy \\
&\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} \frac{|f(y) - f_B|}{|y-x_0|^{\alpha+\beta+1}} dy \\
&\le \frac{Cr^{n-\alpha-\beta}}{\omega(B)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^{j(\alpha+\beta+1)}} \int_{B_j} |f(y) - f_B| dy \\
&\le \frac{r^{n-\alpha-\beta}}{\omega(B)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|B_j|}{2^{j(\alpha+\beta+1)}} \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{|B_i|} \int_{B_i} |f(y) - f_{B_i}| dy \\
&\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)} r^{n-\alpha-\beta} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|B_j|}{2^{j(\alpha+\beta+1)}} \sum_{i=1}^{j} 2^{i(n\eta+n\gamma-n)} r^{n\gamma-n} \\
&\le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)} |B|^\delta. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Luego, por (3.38)-(3.40) hemos probado que

$$
\frac{1}{\omega(B)} \int_B \big|V_{\alpha,\beta} f_2(x) - V_{\alpha,\beta} f_2(x_0)\big| dx \le C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)} |B|^\delta. \qquad (3.41)
$$

Finalmente, consideramos $V_{\alpha,\beta}f_3$.

$$\begin{aligned}
V_{\alpha,\beta}f_3(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)f_3}{|x-y|^{\alpha}|x+y|^{\beta}}dy \\
&= f_3|x|^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(\big||x|^{-1}x-z\big|\big)}{\big||x|^{-1}x-z\big|^{\alpha}\big||x|^{-1}x+z\big|^{\beta}}dz \\
&= f_3|x|^{n-(\alpha+\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(\big|R(e_1)-R(u)\big|\big)}{\big|R(e_1)-R(u)\big|^{\alpha}\big|R(e_1)+R(u)\big|^{\beta}}du \\
&= f_3|x|^{n-(\alpha+\beta)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi\big(|e_1-u|\big)}{|e_1-u|^{\alpha}|e_1+u|^{\beta}}du = Cf_3|x|^{n-(\alpha+\beta)},
\end{aligned}$$

donde hemos usado el cambio de variables $z = R(u)$ con R la rotacíon tal que $R(e_1) = x|x|^{-1}$, $e_1 = (1, 0 \ldots 0)$.

Como antes, sea j_0 un número natural tal que $2^{j_0-1}r < |x_0| \leq 2^{j_0}r$ y sea $B_j = B(x_0, 2^j r)$ para $j = 0, 1, \ldots, j_0$. Entonces

$$\begin{aligned}
|f_3| &\leq \frac{1}{|B|}\int_B |f(y)|dy \\
&\leq C\sum_{j=0}^{j_0} \frac{1}{|B_j|}\int_{B_j} |f(y)-f_{B_j}|dy + \frac{1}{|B_{j_0}|}\int_{B_{j_0}} |f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}\omega(B)|B|^{\gamma-1}\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^{n-n\gamma-n\eta}.
\end{aligned}$$

Luego, por el teorema del valor medio

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f_3(x) - V_{\alpha,\beta}f_3(x_0)\big|dx &\leq \frac{C|f_3|}{\omega(B)}\int_B \big||x|^{n-(\alpha+\beta)} - |x_0|^{n-(\alpha+\beta)}\big|dx \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\gamma}\left(\frac{r}{|x_0|}\right)^{n-n\gamma-n\eta} r|x_0|^{n-1-(\alpha+\beta)} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Por (3.37), (3.41) y (3.42) tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f(x) - V_{\alpha,\beta}f_2(x_0) - V_{\alpha,\beta}f_3(x_0)\big|dx \\
&\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f_1(x)\big|dx + \frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f_2(x) - V_{\alpha,\beta}f_2(x_0)\big|dx \\
&\quad + \frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|V_{\alpha,\beta}f_3(x) - V_{\alpha,\beta}f_3(x_0)\big|dx \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}.
\end{aligned}$$

Es decir, (3.33) se satisface y esto completa la demostración del lema.

□

Teorema 3.4.2. *Supongamos que* $n-1<\alpha+\beta\leq n$ *y* $0\leq\gamma<\frac{1}{n}$. *Sea* ω *un peso que satisface* $\omega\in D_\eta$, *para algún* $1\leq\eta<\frac{\alpha+\beta}{n}+\frac{1}{n}-\gamma$, *y* $\omega(-x)\leq c\omega(x)$ *para casi todo* $x\in\mathbb{R}^n$. *Si* $f\in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ *entonces* $T_{\alpha,\beta}f\in BMO^\delta(\omega)$ *para* $\delta=1-\frac{\alpha+\beta}{n}+\gamma$. *Más aún, existe* C *independiente de* f *tal que*

$$\|T_{\alpha,\beta}f\|_{BMO^\delta(\omega)}\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

Demostración. Sea $f\in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$. Usando las mismas funciones φ_1 y φ_2 definidas en la demostración del Teorema 3.3.3, escribimos a $T_{\alpha,\beta}$ del mismo modo como hicimos en (3.15)

$$T_{\alpha,\beta}f(x)=T_1f(x)+T_2f(x),$$

y analizaremos cada operador T_j.

Consideremos T_1f. Sea $B=B(0,r)$ y sea $x\in B$. Denotamos por $B_j=B(0,2^{-j}r)$, $j=0,1,\ldots$. Usando que $\big|\varphi_1(|x|^{-1}|y|)-\psi(|x|^{-1}|x-y|)-\psi(|x|^{-1}|x+y|)\big|=0$ para $y\in B\big(x,|x|/4\big)\cup B\big(-x,|x|/4\big)$, $\omega\in D_\eta$ y (3.2), tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)}\int_B\big|T_1f(x)-V_{\alpha,\beta}f(x)-V_{\beta,\alpha}f(-x)\big|dx\\
&\qquad\leq\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{\mathbb{R}^n}|f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)\\
&\qquad\qquad\times\big|\varphi_1\big(|x|^{-1}|y|\big)-\psi\big(|x|^{-1}|x-y|\big)-\psi\big(|x|^{-1}|x+y|\big)\big|dydx\\
&\qquad\leq\frac{C}{\omega(B)}\int_B\frac{1}{|x|^{\alpha+\beta}}\int_{B(0,3|x|)}|f(y)|dydx\\
&\qquad\leq\frac{C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}}{\omega(B)}\int_B\frac{|x|^{n\gamma}}{|x|^{\alpha+\beta}}\omega(B(0,3|x|))dx\\
&\qquad\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n\gamma-(\alpha+\beta)}}{\omega(B)}\sum_{j=0}^\infty\frac{1}{2^{j(n\gamma-(\alpha+\beta))}}\int_{B_j\setminus B_{j+1}}\omega\big(B\big(0,2^{-j}3r\big)\big)dx\\
&\qquad\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n+n\gamma-(\alpha+\beta)}}{\omega(B)}\sum_{j=0}^\infty\frac{\omega(B_j\setminus B_{j+1})}{2^{j(n+n\gamma-(\alpha+\beta))}}\\
&\qquad\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}\frac{|B|^\delta}{\omega(B)}\sum_{j=0}^\infty\omega(B_j\setminus B_{j+1})\\
&\qquad\leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.
\end{aligned}\tag{3.43}$$

Para continuar, sea $B=B(x_0,r)$ con $r<|x_0|/16$. Por las estimaciones (3.17)-(3.20) obtenidas en la demostración del Teorema 3.3.3 y $\omega\in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega(B)}\int_B\big|T_1f(x)-V_{\alpha,\beta}f(x)-V_{\beta,\alpha}f(-x)-\big(T_1f-V_{\alpha,\beta}f-(V_{\beta,\alpha}f)^\vee\big)_B\big|dx\\
&\qquad\leq\frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}}\int_{B(0,4|x_0|)}|f(y)|dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1-n\gamma}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{n\eta} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}. \qquad (3.44)
\end{aligned}$$

Luego, por el Lema 3.4.1, (3.43) y (3.44)

$$\|T_1 f\|_{BMO^{\delta}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}. \qquad (3.45)$$

Ahora consideramos $T_2 f$. Como ya lo mencionamos en (3.23) en la demostración del Teorema 3.3.3,

$$|T_2 f(x)| \leq \int_{|y|>|x|} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta}} dy < \infty$$

para todo $x \neq 0$. Sea $B = B(0,r)$ y sea ν tal que $|\nu| = r$. Por la desigualdad (3.24) obtenida en la demostración del Teorema 3.3.3, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B |T_2 f(x) - T_2 f(\nu)|dx &\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_B\int_{A(0,2|x|,3r)} |f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)dydx \\
&\quad + \frac{Cr}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c(0,2r)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dydx. \qquad (3.46)
\end{aligned}$$

Estimaremos cada término de la última expresión en (3.46) usando que $\omega \in D_{\eta}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{A(0,2|x|,3r)} |f(y)|K_{\alpha,\beta}(x,y)dydx &\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_{B(0,3r)}\int_{B(0,|y|/2)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta}}dxdy \\
&\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_{B(0,3r)} |f(y)||y|^{n-(\alpha+\beta)}dy \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} r^{n\gamma} r^{n-(\alpha+\beta)} \\
&= C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}. \qquad (3.47)
\end{aligned}$$

Para el segundo término,

$$\begin{aligned}
\frac{r}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c(0,2r)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dydx &\leq \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^j r)^{\alpha+\beta+1}}\int_{2^{j-1}r<|y|\leq 2^j r} |f(y)|dy \\
&\leq \frac{Cr^{n+1}\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega(B(0,2^j r))(2^j r)^{n\gamma}}{(2^j r)^{\alpha+\beta+1}} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j(\alpha+\beta+1-n\eta-n\gamma)}} \\
&\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}. \qquad (3.48)
\end{aligned}$$

Luego, por (3.46)-(3.48) hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^{\delta}}\int_B |T_2 f(x) - T_2 f(\nu)|dx \leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)} \tag{3.49}$$

para toda bola B centrada en el origen.

Ahora, sea $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/2$, por (3.49) es suficiente considerar solo tales bolas B. Sea $\nu = \frac{x_0}{|x_0|}(|x_0| + r)$, por (3.28) de la demostración del Teorema 3.3.3, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B &|T_2 f(x) - T_2 f(\nu)|dx \\ &\leq \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}}\int_{B(0,5|x_0|)} |f(y)|dy + \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\int_{B^c(0,2|\nu|)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dy.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Nuevamente analizaremos cada término de la última expresión usando que $\omega \in D_{\eta}$. Como $|\nu| \sim |x_0|$ y $|x| \sim |x_0|$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{r^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{\alpha+\beta+1}}\int_{B(0,5|x_0|)} |f(y)|dy &\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1-n\gamma}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{n\eta} \\ &\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Para el segundo término, como $|\nu| \sim |x_0|$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{r^{n+1}}{\omega(B)}\int_{B^c(0,2|\nu|)} \frac{|f(y)|}{|y|^{\alpha+\beta+1}}dy &\leq \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^j|\nu|)^{\alpha+\beta+1}}\int_{2^{j-1}|\nu|<|y|\leq 2^j|\nu|} |f(y)|dy \\ &\leq \frac{Cr^{n+1}\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega(B(0,2^j|\nu|))(2^j|\nu|)^{n\gamma}}{(2^j|\nu|)^{\alpha+\beta+1}} \\ &\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}\frac{r^{n+1-n\eta}}{|x_0|^{\alpha+\beta+1-n\eta-n\gamma}}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j(\alpha+\beta+1-n\eta-n\gamma)}} \\ &\leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}|B|^{\delta}.\end{aligned} \tag{3.52}$$

Luego, por (3.49)-(3.52) tenemos que

$$\|T_2 f\|_{BMO^{\delta}(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^{\gamma}(\omega)}. \tag{3.53}$$

Entonces, por (3.45) y (3.53), hemos demostrado el teorema.

□

Algunos comentarios sobre los teoremas principales de este capítulo están contenidos en la Introducción.

Capítulo 4

Acotación del operador de Calderón y del operador integral de Hilbert

En este capítulo introduciremos una generalización del operador de Calderón S y también del operador integral de Hilbert H. Luego, teniendo en cuenta las técnicas usadas para el análisis de $T_{\alpha,\beta}$ en el Capítulo 3, estudiaremos las acotaciones con pesos para estos operadores en los espacios $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $BMO^\gamma(\omega)$.

Sea f una función medible Lebesgue definida en $\mathbb{R}^n$, entonces S y H están definidos respectivamente por

$$Sf(x) = \frac{1}{|x|^n}\int_{|y|\leq|x|} f(y)dy + \int_{|y|>|x|}\frac{f(y)}{|y|^n}dy \quad \text{y} \quad Hf(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\frac{f(y)}{(|x|+|y|)^n}dy.$$

Recordamos que $S = P + Q$, donde P es el operador de Hardy y Q es el adjunto de P.

Para muchos autores, el operador P y distintas generalizaciones en n dimensiones, han sido objetos importantes de estudio dentro del análisis armónico, por ejemplo ver [Bra78], [DHK97], [Xia01], [Duo13], [DMRO13] y [CH14]. La desigualdad de Hilbert[1]

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{|f(y)||g(x)|}{x+y}dydx \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)}\left(\int_0^\infty |f(x)|^p dx\right)^{1/p}\left(\int_0^\infty |g(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'}$$

y sus aplicaciones en distintas áreas de la matemática (ver [HLP88] y [Wey08]), generaron numerosos trabajos relacionados a este tipo de desigualdades sin pesos y con pesos.

4.1. Acotación de S_α sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $BMO^\gamma(\omega)$

En esta sección mostraremos la acotación con pesos para una generalización del operador de Calderón sobre los espacios $E(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}})$ y $E(BMO^\gamma_0(\omega))$.

[1]La versión discreta de la desigualdad de Hilbert con una constante no óptima, fue demostrada por el mismo D. Hilbert, y fue publicada por H. Weyl en [Wey08].

Sea $0 \leq \alpha < n$, consideramos los operadores de tipo fraccionario de Hardy P_α y su adjunto Q_α definidos por

$$P_\alpha f(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}} \int_{|y|\leq|x|} f(y)dy, \quad Q_\alpha f(x) = \int_{|y|>|x|} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy,$$

y el operador de Calderón S_α definido por

$$S_\alpha f = P_\alpha f + Q_\alpha f,$$

para una función f medible Lebesgue definida en $\mathbb{R}^n$.

Frecuentemente, nos será útil escribir el operador S_α como

$$S_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \text{mín}\left\{1, \frac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}}\right\} \frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}} dy.$$

Teorema 4.1.1. *Supongamos que $\alpha > 0$ y $\frac{n}{\alpha} \leq p < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$. Sea ω un peso que satisface $\omega \in RH(p')$ y $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} + \frac{1}{p}$. Si $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ entonces $S_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p}$. Más aún, existe C indenpendiente de f tal que*

$$\|S_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

Demostración. Sea $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$. Si observamos la demostración de (i) del Lema 3.3.2 podemos concluir sin dificultad que $|S_\alpha f(x)| < \infty$ para todo $x \neq 0$ y que $S_\alpha f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Comenzamos considerando $B = B(0,r)$ y $x \in B$. Sea ν tal que $|\nu| = r$, y sea

$$K_\nu(x,y) = \text{mín}\left\{1, \frac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}}\right\} - \text{mín}\left\{1, \frac{|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha}}\right\}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu) &= \int_{|y|\leq|\nu|} K_\nu(x,y)\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy + \int_{|y|>|\nu|} K_\nu(x,y)\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy \\ &= \int_{|y|\leq|\nu|} K_\nu(x,y)\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pues, si $|y| \leq |\nu|$ entonces $K_\nu(x,y) \geq 0$, y si $|y| > |\nu|$ entonces $K_\nu(x,y) = 0$. Luego

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu)\big|dx &\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_B K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx \\ &= \frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\leq|x|} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx \\ &\quad + \frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|x|<|y|\leq r} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Ahora estimaremos cada término de (4.2).

Si $|y| \leq |x|$ entonces $K_\nu(x,y) = \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}} - \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha}}$. Luego, por el Lema 1.4.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\leq|x|} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx &\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_B |f(y)|dydx\\ &\quad + \frac{1}{\omega(B)}\int_B \frac{1}{|\nu|^{n-\alpha}}\int_B |f(y)|dydx\\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} r^{\alpha-n/p}\\ &= C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Para el segundo término de (4.2), como $0 \leq K_\nu(x,y) \leq 1$, por el Lema 1.4.4 tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|x|<|y|\leq r} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx &\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_{|x|<|y|\leq r} |f(y)|dydx\\ &\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B |f(y)|\int_{|x|\leq|y|}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}dxdy\\ &= \frac{C}{\omega(B)}\int_B |f(y)||y|^\alpha dy\\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Luego, por (4.2)-(4.4), hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B \left|S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu)\right|dx \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}, \tag{4.5}$$

para toda bola B centrada en el origen.

Pasamos a considerar bolas $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/8$. Por (4.5) es suficiente considerar sólo tales bolas B. Sean $x \in B$ y $\nu = \frac{|x_0|+r}{|x_0|}x_0$. Del mismo modo que obtuvimos (4.1), tenemos que

$$S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu) = \int_{|y|\leq|\nu|} K_\nu(x,y)\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy.$$

Ahora, observemos que si $|y| \leq |\nu|$ entonces $K_\nu(x,y) \geq 0$. Aplicando el teorema del valor medio y usando que $|\nu| \sim |x|$, entonces

$$K_\nu(x,y) \leq \frac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}} - \frac{|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha}} = |y|^{n-\alpha}\frac{|\nu|^{n-\alpha} - |x|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}|\nu|^{n-\alpha}} \leq C\frac{r|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha+1}}. \tag{4.6}$$

Luego, por el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B \left|S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu)\right|dx \leq C\frac{r}{\omega(B)|\nu|^{n-\alpha+1}}\int_B\int_{|y|\leq|\nu|}|f(y)|dydx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{|\nu|^{n-\alpha+1+n/p}} \frac{\omega(B(0,|\nu|))}{\omega(B)} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} \frac{r^{n+1}}{|\nu|^{n-\alpha+1+n/p}} \left(\frac{|\nu|}{r}\right)^{n+1-\alpha+n/p} \\
&\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}} |B|^{\delta}. \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.5) y (4.7), el teorema queda demostrado.

□

Teniendo en cuenta la Definición 2.2.1 vamos a considerar el siguiente espacio.

Definición 4.1.2. Sean ω un peso y $0 \leq \gamma < 1/n$. Una función f localmente integrable pertenece a $BM_0^{\gamma}(\omega)$ si existe una constante C tal que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^{\gamma}} \int_B |f| \leq C,$$

para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ centrada en el origen.

Podemos definir la norma de f en $BM_0^{\gamma}(\omega)$, denotada por $\|f\|_{BM_0^{\gamma}(\omega)}$, como el ínfimo sobre tales constantes C.

Por argumentos similares a los que introducimos $E\big(BM_0(\omega)\big)$, definimos

$$E\big(BM_0^{\gamma}(\omega)\big) = \{f \in BM_0^{\gamma}(\omega) : |Q_{\alpha} f(x)| < \infty \text{ para algún } x \neq 0\}.$$

Teorema 4.1.3. *Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$ y $0 \leq \gamma < \frac{1}{n}$. Sea ω un peso en D_{η} para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} - \gamma$. Si $f \in E\big(BM_0^{\gamma}(\omega)\big)$ entonces $S_{\alpha} f \in BMO^{\delta}(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n} + \gamma$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|S_{\alpha} f\|_{BMO^{\delta}(\omega)} \leq C\|f\|_{BM_0^{\gamma}(\omega)}.$$

Demostración. Sea $f \in E\big(BM_0^{\gamma}(\omega)\big)$. Si observamos la demostración de (ii) del Lema 3.3.2 podemos concluir sin dificultad que $S_{\alpha} f(x) < \infty$ para todo $x \neq 0$ y $S_{\alpha} f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Comenzamos considerando $B = B(0, r)$ y $x \in B$. Sea ν tal que $|\nu| = r$. Del mismo modo que en (4.2) de la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)} \int_B |S_{\alpha} f(x) - S_{\alpha} f(\nu)| dx \leq & \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{|y| \leq |x|} K_{\nu}(x,y) \frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy dx \\
&+ \frac{1}{\omega(B)} \int_B \int_{|x| < |y| \leq r} K_{\nu}(x,y) \frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}} dy dx, \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

donde $K_\nu(x,y) = \text{mín}\left\{1, \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}}\right\} - \text{mín}\left\{1, \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha}}\right\}$.

Para el primer término de (4.8), si $|y| \le |x|$ entonces $K_\nu(x,y) = \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|x|^{n-\alpha}} - \dfrac{|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha}}$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\le|x|} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx &\le \frac{1}{\omega(B)}\int_B \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_{|y|\le|x|}|f(y)|dydx\\ &\quad+\frac{1}{\omega(B)}\int_B\frac{1}{|\nu|^{n-\alpha}}\int_B|f(y)|dydx\\ &\le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\frac{\omega(B(0,|x|))}{|x|^{n-\alpha-n\gamma}}dx\\ &\quad+C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}r^{n\gamma+\alpha}.\end{aligned}$$

Denotando $B_j = B(0, 2^{-j}r)$, $j = 0, 1, \ldots$ y usando que $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\frac{\omega(B(0,|x|))}{|x|^{n-\alpha-n\gamma}}dx &\le C\frac{r^{n\gamma-(n-\alpha)}}{\omega(B)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{j(n\gamma-(n-\alpha))}}\int_{B_j\setminus B_{j+1}}\omega\big(B(0,2^{-j}r)\big)dx\\ &\le C\frac{r^{n\gamma+\alpha}}{\omega(B)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\omega(B_j\setminus B_{j+1})}{2^{j(n\gamma+\alpha)}}\\ &\le C\frac{|B|^\delta}{\omega(B)}\sum_{j=0}^{\infty}\omega(B_j\setminus B_{j+1})\\ &= C|B|^\delta.\end{aligned}\tag{4.9}$$

Así hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\le|x|}K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx \le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.\tag{4.10}$$

Para el segundo término de (4.8) consideraremos dos casos. Primero supongamos que $\alpha > 0$. Como $0 \le K_\nu(x,y) \le 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|x|<|y|\le r}K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx &\le \frac{1}{\omega(B)}\int_B\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_{|x|<|y|\le r}|f(y)|dydx\\ &\le \frac{1}{\omega(B)}\int_B|f(y)|\int_{|x|\le|y|}\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}dxdy\\ &= \frac{C}{\omega(B)}\int_B|f(y)||y|^\alpha dy\\ &\le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Para el caso $\alpha = 0$, como $0 \leq K_\nu(x,y) \leq 1$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B \int_{|x|\leq|y|\leq r} K_\nu(x,y)\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx &\leq \frac{1}{\omega(B)}\int_B \frac{|f(y)|}{|y|^n}\int_{|x|\leq|y|} 1dxdy \\
&\leq \frac{C}{\omega(B)}\int_B |f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta. \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

Luego, por (4.8)-(4.12) hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B \big|S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu)\big|dx \leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}, \qquad (4.13)$$

para toda bola B centrada en el origen.

Pasamos a considerar bolas $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/8$. Por (4.13) es suficiente considerar sólo tales bolas B. Sean $x \in B$ y $\nu = \frac{|x_0|+r}{|x_0|}x_0$. Del mismo modo que obtuvimos (4.1) y (4.6) en la demostración del teorema anterior, tenemos que

$$S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu) = \int_{|y|\leq|\nu|} K_\nu(x,y)\frac{f(y)}{|y|^{n-\alpha}}dy$$

y $K_\nu(x,y) \leq C\dfrac{r|y|^{n-\alpha}}{|\nu|^{n-\alpha+1}}$. Usando $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\omega(B)}\int_B \big|S_\alpha f(x) - S_\alpha f(\nu)\big|dx &\leq C\frac{r^{n+1}}{\omega(B)|\nu|^{n-\alpha+1}}\int_{|y|\leq|\nu|}|f(y)|dy \\
&\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n+1}}{|\nu|^{n-\alpha+1-n\gamma}}\frac{\omega(B(0,|\nu|))}{\omega(B)} \\
&\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n+1}}{|\nu|^{n-\alpha+1-n\gamma}}\left(\frac{|\nu|}{r}\right)^{n+1-\alpha-n\gamma} \\
&\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de (4.13) y (4.14) el teorema queda demostrado.

$\square$

En el caso que $\gamma = 0$, es inmediato que $L^\infty(\omega^{-1}) \subset BM_0(\omega)$. Luego, a partir del Teorema 4.1.3, obtenemos.

Corolario 4.1.4. *Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$. Sea ω un peso en D_η para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n}$. Si $f \in E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big)$ entonces $S_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n}$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|S_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}.$$

A partir de las definiciones 3.2.3 y 4.1.2, es inmediato que $BMO_0^\gamma(\omega) \subset BM_0^\gamma(\omega)$, y si $f \in BMO_0^\gamma(\omega)$ entonces $\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)} \leq \|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}$. Luego por el Teorema 4.1.3, obtenemos.

Corolario 4.1.5. *Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$ y $0 \leq \gamma < \frac{1}{n}$. Sea ω un peso en D_η para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} - \gamma$. Si $f \in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ entonces $S_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n} + \gamma$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|S_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

4.2. Acotación de H_α sobre $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$ y $BMO^\gamma(\omega)$

En esta sección mostraremos la acotación con pesos para una generalización del operador integral de Hilbert sobre los espacios $E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ y $E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$. El operador integral de Hilbert H surge a partir de la versión continua de la desigualdad de Hilbert (ver [HLP88, Capítulo IX]).

Sea $0 \leq \alpha < n$, consideramos el operador integral de tipo fraccionario de Hilbert H_α definido por

$$H_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} dy,$$

para una función f medible Lebesgue definida en $\mathbb{R}^n$. Se puede ver fácilmente la siguiente comparación

$$H_\alpha f \leq S_\alpha f \leq 2^{n-\alpha} H_\alpha f \tag{4.15}$$

para funciones f no negativas. Por lo tanto podemos concluir inmediatamente que $H_\alpha f$ es localmente integrable si $S_\alpha f$ lo es.

Sean $x, \nu \in \mathbb{R}^n$, escribimos

$$\begin{aligned} |H_\alpha f(x) - H_\alpha f(\nu)| \leq & \int_{|y|\leq|\nu|} |f(y)| \left| \frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} - \frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}} \right| dy \\ & + \int_{|y|>|\nu|} |f(y)| \left| \frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}} - \frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}} \right| dy. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Teorema 4.2.1. *Supongamos que $\alpha > 0$ y $\frac{n}{\alpha} \leq p < \frac{n}{(\alpha-1)^+}$. Sea ω un peso que satisface $\omega \in RH(p')$ y $\omega \in D_\eta$ para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} + \frac{1}{p}$. Si $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$ entonces $H_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n} - \frac{1}{p}$. Más aún, existe C indenpendiente de f tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}.$$

Demostración. Sea $f \in E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$. Por la comparación (4.15) y lo visto para S_α en el comienzo de la demostración del Teorema 4.1.1, tenemos que $|H_\alpha f(x)| < \infty$ para todo $x \neq 0$ y

$H_\alpha f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Sean $B = B(0,r)$ y $x \in B$. Sea ν tal que $|\nu| = r$. Por el Lema 1.4.4, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\le|\nu|}|f(y)|\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx &\le \frac{C}{\omega(B)}\int_B\int_B\frac{|f(y)|}{|x|^{n-\alpha}}dydx\\ &\le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\int_B\frac{1}{|x|^{n-\alpha+n/p}}dx\\ &= C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned}\tag{4.17}$$

Para analizar el segundo término de (4.16), usamos que $|y| > |\nu|$ y el teorema del valor medio, entonces

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right| \le C\frac{r}{|y|^{n-\alpha+1}}.$$

Luego, por el Lema 1.4.5

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|>|\nu|}|f(y)|\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx &\le \frac{Cr}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dydx\\ &\le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}r^{\alpha-n/p}\\ &= C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned}\tag{4.18}$$

Luego, por (4.16)-(4.18), hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B\big|H_\alpha f(x) - H_\alpha f(\nu)\big|dx \le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}},\tag{4.19}$$

para toda bola B centrada en el origen.

Pasamos a considerar bolas $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/8$. Por (4.19) es suficiente considerar sólo tales bolas B. Sean $x \in B$ y $\nu = \frac{|x_0|+r}{|x_0|}x_0$, entonces tenemos que $|\nu| \sim |x|$ y $|x| \sim |x_0|$. Usando que $|y| \le |\nu|$ y el teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right| \le C\frac{r}{|x_0|^{n-\alpha+1}}.$$

Luego, por el Lema 1.4.4 y $\omega \in D_\eta$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\le|\nu|}&|f(y)|\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx\\ &\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{n-\alpha+1}}\int_{|y|\le|\nu|}|f(y)|dy\\ &\le C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{n-\alpha+1+n/p}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{n+1-\alpha+n/p}\\ &= C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta. \end{aligned}\tag{4.20}$$

Ahora, usando que $|y|>|\nu|$ y el teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|\leq C\frac{r}{|y|^{n-\alpha+1}}.$$

Luego, por el Lema 1.4.5 y $\omega\in D_\eta$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|>|\nu|}|f(y)|&\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx\\ &\leq\frac{Cr}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|>|\nu|}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dydx\\ &\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{n-\alpha+1+n/p}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{n+1-\alpha+n/p}\\ &=C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}}|B|^\delta.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Por lo tanto, de (4.16) con $\nu=\frac{|x_0|+r}{|x_0|}x_0$, (4.20) y (4.21), tenemos que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B\left|H_\alpha f(x)-H_\alpha f(\nu)\right|dx\leq C\|f\|_{\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}},$$

para todas las bolas $B=B(x_0,r)$ consideradas. Esto completa la demostración del teorema. □

Teorema 4.2.2. *Supongamos que $0\leq\alpha<1$ y $0\leq\gamma<\frac{1}{n}$. Sea ω un peso en D_η para algún $1\leq\eta<1+\frac{1-\alpha}{n}-\gamma$. Si $f\in E\big(BM_0^\gamma(\omega)\big)$ entonces $H_\alpha f\in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta=\frac{\alpha}{n}+\gamma$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)}\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}.$$

Demostración. Sea $f\in E\big(BM_0^\gamma(\omega)\big)$. Por la comparación (4.15) y lo visto para S_α en el comienzo de la demostración del Teorema 4.1.3, tenemos que $|H_\alpha f(x)|<\infty$ para todo $x\neq 0$ y $H_\alpha f\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Sean $B=B(0,r)$ y $x\in B$. Sea ν tal que $|\nu|=r$. Usando que $\omega\in D_\eta$ y (4.9) de la demostración del Teorema 4.1.3, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\leq|x|}|f(y)|&\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx\\ &\leq\frac{C}{\omega(B)}\int_B\frac{1}{|x|^{n-\alpha}}\int_{|y|\leq|x|}f(y)dydx\\ &\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\frac{\omega(B(0,|x|))}{|x|^{n-\alpha-n\gamma}}dx\\ &\leq C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.\end{aligned}\tag{4.22}$$

Para continuar, usando (4.11) y (4.12) de la demostración del Teorema 4.1.3 para $\alpha > 0$ y $\alpha = 0$ respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|x|<|y|\le|\nu|}|f(y)|\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx&\\ \le \frac{C}{\omega(B)}\int_B\int_{|x|<|y|\le r}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha}}dydx&\\ \le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.& \qquad (4.23)\end{aligned}$$

Por otro lado, usando que $|y| > |\nu|$ y el teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right| \le C\frac{r}{|y|^{n-\alpha+1}}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|>|\nu|}|f(y)|\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx&\\ \le \frac{C}{\omega(B)}\int_B\int_{B^c}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dydx&\\ \le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(2^jr)^{n-\alpha+1}}\int_{2^{j-1}r<|y|\le 2^jr}|f(y)|dy&\\ \le \frac{Cr^{n+1}\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\omega(B(0,2^jr))(2^jr)^{n\gamma}}{(2^jr)^{n-\alpha+1}}&\\ \le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^{j(n-\alpha+1-n\eta-n\gamma)}}&\\ \le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta.& \qquad (4.24)\end{aligned}$$

Luego, por (4.16) y (4.22)-(4.24), hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B\left|H_\alpha f(x)-H_\alpha f(\nu)\right|dx \le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}, \qquad (4.25)$$

para toda bola B centrada en el origen.

Ahora consideramos bolas $B = B(x_0, r)$ con $r < |x_0|/8$. Por (4.25) es suficiente considerar sólo tales bolas B. Sean $x \in B$ y $\nu = \frac{|x_0|+r}{|x_0|}x_0$, entonces tenemos que $|\nu| \sim |x|$ y $|x| \sim |x_0|$. Usando que $|y| \le |\nu|$ y el teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right| \le C\frac{r}{|x_0|^{n-\alpha+1}}.$$

Luego, como $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|\le|\nu|}|f(y)|&\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx\\ &\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)|x_0|^{n-\alpha+1}}\int_{|y|\le|\nu|}|f(y)|dy\\ &\le \|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n+1}}{|x_0|^{n-\alpha+1-n\gamma}}\left(\frac{|x_0|}{r}\right)^{n+1-\alpha-n\gamma}\\ &\le \|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta. \end{aligned}\tag{4.26}$$

Por otro lado, usando que $|y|>|\nu|$ y el teorema del valor medio

$$\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|\le C\frac{r}{|y|^{n-\alpha+1}}.$$

Luego, como $\omega \in D_\eta$, tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega(B)}\int_B\int_{|y|>|\nu|}|f(y)|&\left|\frac{1}{(|x|+|y|)^{n-\alpha}}-\frac{1}{(|\nu|+|y|)^{n-\alpha}}\right|dydx\\ &\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\int_{|y|>|\nu|}\frac{|f(y)|}{|y|^{n-\alpha+1}}dy\\ &\le \frac{Cr^{n+1}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{(2^j|\nu|)^{n-\alpha+1}}\int_{2^{j-1}|\nu|<|y|\le 2^j|\nu|}|f(y)|dy\\ &\le \frac{Cr^{n+1}\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}}{\omega(B)}\sum_{j=1}^\infty\frac{\omega(B(0,2^j|\nu|))(2^j|\nu|)^{n\gamma}}{(2^j|\nu|)^{n-\alpha+1}}\\ &\le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}\frac{r^{n+1-n\eta}}{|x_0|^{n-\alpha+1-n\eta-n\gamma}}\sum_{j=1}^\infty\frac{1}{2^{j(n-\alpha+1-n\eta-n\gamma)}}\\ &\le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)}|B|^\delta. \end{aligned}\tag{4.27}$$

Por (4.16) y (4.26)-(4.27), hemos probado que

$$\frac{1}{\omega(B)|B|^\delta}\int_B\left|H_\alpha f(x)-H_\alpha f(\nu)\right|dx\le C\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)},$$

para todas las bolas $B=B(x_0,r)$ consideradas. Esto completa la demostración del teorema. □

Como ya mencionamos, en el caso que $\gamma=0$, es inmediato que $L^\infty(\omega^{-1})\subset BM_0(\omega)$. Luego, a partir del Teorema 4.2.2, obtenemos.

Corolario 4.2.3. *Supongamos que $0\le\alpha<1$. Sea ω un peso en D_η para algún $1\le\eta<1+\frac{1-\alpha}{n}$. Si $f\in E\big(L^\infty(\omega^{-1})\big)$ entonces $H_\alpha f\in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta=\frac{\alpha}{n}$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)}\le C\|f\|_{L^\infty(\omega^{-1})}.$$

También mencionamos que $BMO_0^\gamma(\omega) \subset BM_0^\gamma(\omega)$, y si $f \in BMO_0^\gamma(\omega)$ entonces $\|f\|_{BM_0^\gamma(\omega)} \leq \|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}$. Luego por el Teorema 4.2.2, obtenemos.

Corolario 4.2.4. *Supongamos que $0 \leq \alpha < 1$ y $0 \leq \gamma < \frac{1}{n}$. Sea ω un peso en D_η para algún $1 \leq \eta < 1 + \frac{1-\alpha}{n} - \gamma$. Si $f \in E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$ entonces $H_\alpha f \in BMO^\delta(\omega)$ para $\delta = \frac{\alpha}{n} + \gamma$. Más aún, existe C independiente de f tal que*

$$\|H_\alpha f\|_{BMO^\delta(\omega)} \leq C\|f\|_{BMO_0^\gamma(\omega)}.$$

Algunos comentarios sobre los teoremas principales de este capítulo están contenidos en la Introducción.

Bibliografía

[Bra78] J. Scott Bradley, *Hardy inequalities with mixed norms*, Canad. Math. Bull. **21** (1978), no. 4, 405–408. MR 523580 10, 49

[CH14] Nguyen Minh Chuong and Ha Duy Hung, *Bounds of weighted Hardy-Cesàro operators on weighted Lebesgue and BMO spaces*, Integral Transforms Spec. Funct. **25** (2014), no. 9, 697–710. MR 3210357 49

[CRH11] Aníbal Chicco Ruiz and Eleonor Harboure, *Weighted local BMO spaces and the local Hardy-Littlewood maximal operator*, Rev. Un. Mat. Argentina **52** (2011), no. 1, 47–56. MR 2816209 6, 7, 20, 21

[CRW76] R. R. Coifman, R. Rochberg, and Guido Weiss, *Factorization theorems for Hardy spaces in several variables*, Ann. of Math. (2) **103** (1976), no. 3, 611–635. MR 0412721 16

[CUF13] David V. Cruz-Uribe and Alberto Fiorenza, *Variable lebesgue spaces*, first ed., Applied and Numerical Harmonic Analysis, Birkhäuser Basel, 2013. 1

[DHK97] Pavel Drábek, Hans P. Heinig, and Alois Kufner, *Higher-dimensional Hardy inequality*, General inequalities, 7 (Oberwolfach, 1995), Internat. Ser. Numer. Math., vol. 123, Birkhäuser, Basel, 1997, pp. 3–16. MR 1457264 10, 49

[DMRO13] Javier Duoandikoetxea, Francisco J. Martín-Reyes, and Sheldy Ombrosi, *Calderón weights as Muckenhoupt weights*, Indiana Univ. Math. J. **62** (2013), no. 3, 891–910. MR 3164849 5, 6, 14, 49

[Duo01] Javier Duoandikoetxea, *Fourier analysis*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001, Translated and revised from the 1995 Spanish original by David Cruz-Uribe. MR 1800316 2, 28

[Duo13] ______, *Fractional integrals on radial functions with applications to weighted inequalities*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **192** (2013), no. 4, 553–568. MR 3081635 10, 15, 49

[FF15a] Elida Ferreyra and Guillermo Flores, *Weighted estimates for integral operators on local BMO type spaces*, Math. Nachr. **288** (2015), no. 8–9, 905–916. XII, XIV, 13

[FF15b] ———, *Weighted inequalities for integral operators on $BMO^{\gamma}(\omega)$ spaces*, Preprint, submitted (2015). xiv, 29

[FM74] Charles Fefferman and Benjamin Muckenhoupt, *Two nonequivalent conditions for weight functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **45** (1974), 99–104. MR 0360952 (50 #13399) 31

[FS72] C. Fefferman and E. M. Stein, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129** (1972), no. 3-4, 137–193. MR 0447953 16

[GCRdF85] José García-Cuerva and José L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Mathematics Studies, vol. 116, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1985, Notas de Matemática [Mathematical Notes], 104. MR 807149 (87d:42023) 16

[Gra09] Loukas Grafakos, *Modern Fourier analysis*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 250, Springer, New York, 2009. MR 2463316 (2011d:42001) 1, 3, 5, 20

[GU93] T. Godoy and M. Urciuolo, *About the L^p-boundedness of some integral operators*, Rev. Un. Mat. Argentina **38** (1993), no. 3-4, 192–195. MR 1276023 (95e:47069) xi, 13

[HCR14] Eleonor Harboure and Aníbal Chicco Ruiz, *BMO spaces related to Laguerre semigroups*, Math. Nachr. **287** (2014), no. 2-3, 254–280. MR 3163578 6

[HLP88] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1988, Reprint of the 1952 edition. MR 944909 49, 55

[HSV97] Eleonor Harboure, Oscar Salinas, and Beatriz Viviani, *Boundedness of the fractional integral on weighted Lebesgue and Lipschitz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 1, 235–255. MR 1357395 (97d:42014) xiii, 9, 32

[HSV07] ———, *A look at* $\mathrm{BMO}_{\phi}(\omega)$ *through Carleson measures*, J. Fourier Anal. Appl. **13** (2007), no. 3, 267–284. MR 2334610 16

[JN61] F. John and L. Nirenberg, *On functions of bounded mean oscillation*, Comm. Pure Appl. Math. **14** (1961), 415–426. MR 0131498 4, 16

[LS10] Chin-Cheng Lin and Krzysztof Stempak, *Local Hardy-Littlewood maximal operator*, Math. Ann. **348** (2010), no. 4, 797–813. MR 2721641 (2011g:42041) 6, 14

[Muc72] Benjamin Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207–226. MR 0293384 xi

[MW74] Benjamin Muckenhoupt and Richard Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261–274. MR 0340523 xi, xii, 5, 7, 9

[MW76] Benjamin Muckenhoupt and Richard L. Wheeden, *Weighted bounded mean oscillation and the Hilbert transform*, Studia Math. **54** (1975/76), no. 3, 221–237. MR 0399741 32

[RS88] Fulvio Ricci and Peter Sjögren, *Two-parameter maximal functions in the Heisenberg group*, Math. Z. **199** (1988), no. 4, 565–575. MR 968322 (90d:43006) xi, 13

[RU05] María Silvina Riveros and Marta Urciuolo, *Weighted inequalities for integral operators with some homogeneous kernels*, Czechoslovak Math. J. **55(130)** (2005), no. 2, 423–432. MR 2137148 xi, 13

[RU12] P. Rocha and M. Urciuolo, *On the H^p-L^q boundedness of some fractional integral operators*, Czechoslovak Math. J. **62(137)** (2012), no. 3, 625–635. MR 2984623 xi, 13

[RU13] María Silvina Riveros and Marta Urciuolo, *Weighted inequalities for fractional type operators with some homogeneous kernels*, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) **29** (2013), no. 3, 449–460. MR 3019784 xi, xii, xii, xiv, xiv, 5, 13, 18

[Ste70] Elias M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970. MR 0290095 7

[Wey08] H. Weyl, *Singuläre Integralgleichungen*, Math. Ann. **66** (1908), no. 3, 273–324. MR 1511502 49

[Xia01] J. Xiao, *L^p and BMO bounds of weighted Hardy-Littlewood averages*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **262** (2001), no. 2, 660–666. 49

Índice alfabético

bolas k-críticas, 6

clase A_∞, 2
clase de Muckenhoupt A_p, 2
clase de pesos
    $A_{p,0}$, 6
    $A_{p,loc}$, 6
    $A_{p,q}$, 8
    $H(\lambda, p)$, 9
condición de duplicación D_η, 31

desigualdad de Hilbert, 49
desigualdad reversa de Hölder, 3, 30

espacio
    $BMO_{k,loc}(\omega)$, 6, 21
    $E\big(BMO_0(\omega)\big)$, 20
    $E\big(BM_0(\omega)\big)$, 17
    $E\big(BMO_0^\gamma(\omega)\big)$, 33
    $E\big(\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}\big)$, 33
    $BM_0(\omega)$, 16
    $BM_0^\gamma(\omega)$, 52
    $BMO(\omega)$, 4
    $BMO_0(\omega)$, 19
    $BMO^\gamma(\omega)$, 32
    $BMO_0^\gamma(\omega)$, 32
espacio $BMO(\omega)$, 16
espacio $L^\infty(\omega^{-1})$, 16
espacio de Lebesgue
    $L_0^\infty(\omega^{-1})$, 17
    $L^p(\omega)$, 2
    $\tilde{L}^p_{\omega^{-1}}$, 10, 32
exponente conjugado, 3

función
    $(Mf)^\vee$, 19
    $(V_{\beta,\alpha}f)^\vee$, 38

núcleo
    K_α, 18
    $K_{\alpha,\beta}$, 33

operador
    de Calderón, 5, 49
    integral de Hilbert, 49
    integral de Hilbert modificado, 55
    adjunto de Hardy, 5
    adjunto de Hardy modificado, 50
    de Calderón modificado, 11, 50
    de Hardy, 5
    de Hardy modificado, 50
    integral fraccionario, 7
    maximal de Hardy-Littlewood, 1
    maximal fraccionaria, 8
    maximal local de Hardy-Littlewood, 6
operador de tipo
    débil pesado (p, p), 3
    fuerte pesado (p, p), 3
operador integral
    $P_{\alpha,\beta}$, 36
    $Q_{\alpha,\beta}$, 36
    T_α, 13
    V_α, 21
    $T_{\alpha,\beta}$, 29
    $V_{\alpha,\beta}$, 33

pesos
    duplicantes, 3
    potencia, 3