EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIV JORNADAS

VOLUMEN 10 (2004), Nº10

Pío García
Patricia Morey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Del algoritmo usado por Arquímedes de Siracusa para el cálculo de la raíz cuadrada de tres

*Jorge A. Peri**

Introducción

En un tratado que se cree fue escrito hacia el 225 AC, Arquímedes usó una aproximación de la raíz cuadrada de tres, sorprendentemente cercana al valor real. El siracusano llegó a una aproximación inferior de 265/153 = 1,73202614379085, -con un error de 0,000024663778027-, y a una aproximación superior de 1351/780 = 1,732051282051282, -con un error de 0,000000474482405. Uno de los temas discutidos en la historia de las matemáticas es cual fue el método que utilizó para obtener estos valores, muchos autores se han dedicado a la cuestión. El tema aparece mencionado ya en los textos de principios del siglo XX [Rouse Ball, 1908]:

> Parece ser ..... que [Arquímedes] tenía algún método (al presente desconocido) para extraer la raíz cuadrada de los números aproximadamente.

Una de las opiniones considera la posibilidad de que haya usado un método similar al de los Pitagóricos [Heath, 1921]:

> ... el cálculo [de PI] comienza de un límite superior y uno inferior del valor de la raíz cuadrada de 3, que Arquímedes asume sin ningún comentario como (265/153) < sqrt(3) < (1351/780). ¿Como logró Arquímedes llegar a esta aproximación particular? Ningún enigma ha ejercido mas fascinación entre los autores interesados en la historia de las matemáticas........ otra sugestión es haya hallado las soluciones sucesivas enteras de las ecuaciones x^2 - 3y^2 = 1 y x^2 - 3y^2 = -2 en forma similar a los Pitagóricos.

En este trabajo se coincide con esta última idea, a la que se intenta completar con dos elementos:

a) Encontrar la línea de observaciones y razonamientos que pudieron llevar a Arquímedes a estas ecuaciones.

b) Descripción de un procedimiento simple para encontrar las sucesivas soluciones enteras.

Otros autores ven en el método de Arquímedes una anticipación de uno de los algoritmos usados por los hindúes [Bell, 1937]:

> ... él también dio métodos para aproximar raíces cuadradas que muestran que él anticipó la invención de los hindúes de las fracciones periódicas continuas.

También, hubo autores que lo vincularon con un antiguo algoritmo usado por los Babilonios:

* Universidad Nacional de Luján.

Su método para computar raíces cuadradas fue similar al usado por los Babilonios."[Boyer, 1968]

... él siempre trabajó con racionales, y cuando llegó a la raíz cuadrada de 3, usó 265/153 < sqrt(3) < 1351/780. Estos límites vienen de un algoritmo de los Babilonios. [Fowler, 2003]

Se han sugerido algoritmos recursivos que permiten llegar a los valores obtenidos por el siracusano [Kline, 1972]:

El también obtuvo una excelente aproximación de la raíz cuadrada de 3, a saber: (1351/780) > sqrt(3) > (265/153), pero no explica como obtuvo este resultado. Entre las muchas conjeturas en la literatura histórica concernientes a esta derivación, la siguiente es muy plausible. Dado un número A, si uno lo escribe como a^2 +- b, donde a^2 es la raíz racional mas cercana a A, -mayor o menor-, y b es el resto, entonces a +- b/2a > sqrt(A) > a+-/(2a-1). Varias aplicaciones de este procedimiento producen los resultados de Arquímedes.

Pese a los posibles métodos sugeridos, los trabajos más modernos no dan por resuelto el enigma:

Arquímedes aproximó sqrt(3) por el valor ligeramente menor 265/153... Cómo él logró obtener sus raíces cuadradas con semejante precisión... es uno de los enigmas que nos ha legado este hombre extraordinario. [Beckmann, 1977]

Arquímedes... toma de hecho, sqrt(3) = 1351/780, una estimación muy cercana... pero no dice como obtuvo este resultado, y sobre esta cuestión ha habido mucha especulación. [Sondheimer, 1981]

El hecho de ser capaz de llegar tan lejos y obtener una estimación tan buena de PI es una "estupenda hazaña de imaginación y cálculo [O'Connor, 1996], [Wilson, 2000].

Sondheimer, además sugiere que, debido al sistema numérico primitivo usado por los griegos, Arquímedes debió haber tenido dificultad con las complicadas fracciones involucradas en el método de los Babilonios.

Nosotros no compartimos totalmente la mayoría de las opiniones anteriores, basados en los siguientes datos:

a) El cálculo de raíces cuadradas fue conocido en distintas culturas de la antigüedad como la Indú y la China [Joseph, 1994] [Joseph, 1997], incluidas civilizaciones miles de años anteriores a la época de Arquímedes, como el caso de los Babilonios [Robson, 2000, 1] [Robson, 2000, 2] [Wagner, 1998] [Fowler, 1998] [Robson, 1997], y probablemente por pueblos mucho mas primitivos como es el caso de los de la América precolombina [Esparza, 1978] [Peri, 2003]. Con respecto a los Babilonios, los autores coinciden en afirmar que disponían de un método iterativo, que es un caso particular del método usado por los sistemas digitales modernos, y con el cuál lograban precisiones elevadas.

b) Si bien el sistema de notación numérica de los griegos era aditivo y poco adaptado para cálculos complicados, se sabe que utilizaban el ábaco [Bitto], que resulta ser un auxiliar de cálculo poderoso para este tipo de operaciones.

Creemos que con estos dos antecedentes es difícil pensar que los griegos fueran tan limitados, y nos inclinamos a pensar que en realidad Arquímedes tuvo las herramientas para resolver este problema con facilidad y en forma casi rutinaria, y que las opiniones que se detallaron anteriormente se deben a la subestimación de la capacidad de cálculo de los griegos y los romanos.

No obstante nuestra opinión anterior, en este trabajo conjeturamos que la capacidad de cálculo de la época era limitada, y proponemos un método sencillo basado en operaciones aditivas y multiplicaciones simples.

Un método surgido de la observación

En lo que sigue, intentaremos describir una posible forma de atacar el problema, considerando el espíritu especulativo de los griegos y reconstruyendo todos los cálculos, utilizando para ello únicamente los elementos auxiliares con los que se pudo haber contado en la época: un ábaco simple, una tabla de cuadrados perfectos y algún elemento que permita anotar los resultados parciales.

Partimos de algunas consideraciones y restricciones básicas:

a) Arquímedes no se enfrentó a la necesidad de encontrar un algoritmo para obtener raíces cuadradas no enteras en general, sino que se dedicó al caso particular de la raíz cuadrada de 3, que es el que él necesitaba para computar el valor de PI.

b) Sabemos que los griegos han usado tablas para ayudarse en sus cálculos. Entre estas tablas, posiblemente hayan tenido una tabla de cuadrados de los primeros números naturales, digamos del 1 al 100.

c) El algoritmo debe incluir el menor número de cálculos posible, y estos deben poder efectuarse con un ábaco simple.

d) Arquímedes buscaba expresar su raíz aproximada mediante un número racional en forma fraccionaria, con una expresión del tipo a/b, donde "a" y "b" son números naturales.

Con estas consideraciones, trataremos de reconstruir una posible línea de razonamiento que nos lleve a los valores obtenidos por Arquímedes. Proponemos los siguientes pasos:

I. Si a/b es una aproximación de sqrt(3), obviamente tiene que cumplirse que

(a/b)^2 ~ 3

(usamos "~" para indicar "aproximadamente igual")

la relación anterior también la podemos expresar como:

a^2/b^2 ~ 3

Como "a" y "b" son números naturales, "a^2" y "b^2" son necesariamente cuadrados perfectos.

II. Con lo anterior, el problema se reduce a encontrar dos cuadrados perfectos cuyo cociente sea aproximadamente igual a 3, ya que sabemos que nunca podrá ser igual, porque en ese caso la raíz de 3 sería racional. Para facilitar los cálculos podemos expresar la relación anterior como:

$$a^2 \sim 3 * b^2$$

es decir, debemos buscar un cuadrado perfecto (a^2) que sea aproximadamente igual al triplo de otro (b^2).

III. Buscar dos números "aproximadamente iguales", equivale a buscar dos números cuya diferencia sea mínima. Como trabajamos con números naturales, esa diferencia será 1; ya vimos que no puede ser 0, porque como dijimos en ese caso sqrt(3) no sería irracional. Con esta consideración, la expresión anterior la podemos escribir como:

$$| a^2 - 3*b^2 | = 1$$

aquí llegamos a una de las ecuaciones que se detallaron anteriormente [Heath, 1921].

IV. La búsqueda de "a^2" y "b^2" se resuelve fácilmente por comparación entre una tabla de cuadrados perfectos y otra con los triplos de los cuadrados perfectos. El problema se reduce a encontrar en la misma dos números, uno de cada columna, cuya diferencia sea 1. Para los primeros naturales tenemos la siguiente tabla:

Número	Cuadrado	Triplo
1	1	3
2	4	12
3	9	27 *
4	16	48 ←
5	25 *	75
6	36	108
7	49 ←	147
8	64	192
9	81	243

V. En la tabla señalamos con flechas el primer caso, para a=7 y b=4, en efecto:

$$a^2 - 3*b^2 = 7^2 - 3*4^2 = 49 - 48 = 1$$

y estos valores nos dan una primera aproximación para la raíz buscada:

$$\mathrm{sqrt}(3) \sim 7/4 = 1.75$$

comparando este valor con la aproximación de 16 dígitos de una calculadora actual, encontramos que tiene un error aproximado de

$$1{,}75 - 1{,}732050807568877 = 0{,}017949192431123 \sim 1.8E\text{-}2$$

y multiplicando esta aproximación por sí misma nos da:

$$1{,}75 * 1{,}75 = 3{,}0625$$

VI. En esta tabla también marcamos con asteriscos la primer solución para la otra ecuación propuesta por Heath, que es x^2 - 3y^2 = -2, en efecto:

x^2 - 3*y^2 = 5^2 - 3*3^2 = 25 - 27 = -2

estos valores nos dan una aproximación de

sqr(3) ~ 5/3 = 1,66...

es importante observar que la primera de estas ecuaciones da una aproximación por exceso y la segunda una aproximación por defecto.

VII. Si seguimos buscando en la tabla, encontramos las dos filas siguientes:

...		
15	225	675
...		
26	676	2028
...		

con a=26 y b=15, entonces:

a^2 - 3*b^2 = 26^2 - 3*15^2 = 676 - 675 = 1

con lo cual la segunda aproximación es:

sqrt(3) ~ 26/15 = 1.7333...

con un error de

1,7333.... - 1,732050807568877 = 0,001282525764456 ~ 1.3E-3

y su cuadrado: 1,7333... * 1,7333... ~ 3,0044...

VIII. El siguiente caso es

56	3136	9408
97	9409	28227

con una aproximación de

sqrt(3) ~ 97/56 = 1,732142857142857

un error de 0,000092049573 98
y un cuadrado de 3,00031887755102

IX. Probablemente Arquímedes no pudo hacer un cálculo del error como el que estamos haciendo aquí, pero sí pudo observar que los cuadrados de las aproximaciones se acercan cada vez mas a 3, este cálculo es mas fácil porque se puede hacer con los mismos valores de la tabla, en efecto

1,732142857142857 ^ 2 = 97^2 / 56^2 = 9409/3136 = 3,00031887755102

X. A esta altura, Arquímedes pudo haberse dado por satisfecho con la precisión obtenida. Pero seguramente ha observado que las aproximaciones son cada vez mayores, con lo que pudo verse impulsado a buscar en la tabla más números que cumplan con las condiciones anteriores. Con los métodos de cálculo modernos podemos fácilmente construir la tabla hasta llegar a los valores que usó Arquímedes:

a	b	a^2	3*b^2	a/b	(a/b)^2
7	4	49	48	1,75	3,0625
26	15	676	675	1,73333333333	3,00444444444
97	56	9409	9408	1,73214285714	3,00031887755
362	209	131044	131043	1,73205741626	3,00002289324
1351	780	1825201	185200	1,73205128205	3,00000164365

XI. Si bien la tabla anterior muestra como se puede llegar a los valores usados por el siracusano, requiere que él haya dispuesto de tablas de cuadrados de números mayores que 1000 con incrementos de 1, y de sus triplos, si esto fue así queda resuelto el problema, las soluciones se encuentran buscando en las tablas, y el límite de la precisión está dado solamente por la extensión de las mismas. Nosotros supondremos que no dispuso de tablas tan grandes, y que pudo intentar extrapolar nuevos valores a partir de los conocidos, buscando alguna relación entre ellos. Supongamos que solo contaba con tablas de cuadrados hasta 100, y que intentó encontrar alguna posible relación entre los distintos valores de "a" y "b"; observemos la siguiente tabla:

a	b	a(i+1)/a(i)	b(i+1)/b(i)
7	4	26/7 = 3,714285	15/4 = 3,75
26	15	97/26 = 3,730769	56/15 = 3,733
97	56		

¿Es posible que Arquímedes se haya percatado de esta pseudoregularidad?; supondremos que sí, y que también haya observado que:

$$b(2)/b(1) = 15/4 = 3{,}75 = 2 + 1{,}75 = 2 + 7/4 =$$
$$= 2 + a(1)/b(1)$$

y que

$$b(3)/b(2) = 56/15 = 3{,}733... = 2 + 1{,}733333 = 2 + 26/15 =$$
$$= 2 + a(2)/b(2)$$

en general:

$$b(i+1)/b(i) = 2 + a(i)/b(i)$$

esto nos permite extrapolar el valor de b(i+1) a partir del valor de a(i) y de b(i):

$$b(i+1) = b(i) * (2 + a(i)/b(i))$$

o, distribuyendo:

$$b(i+1) = 2*b(i) + a(i)$$

con esta expresión, dada una determinada aproximación b(i)/a(i), podemos obtener el valor de "b" de la próxima aproximación mediante dos operaciones sencillas, una duplicación y una suma. Aplicando esta fórmula con a(1) y b(1)

$$b(2) = 2 * 4 + 7 = 15$$

XII. Para el cálculo de los valores de "a", es posible que nuestro héroe haya observado que:

$a(2) = 26 = 7 + 4 + 15 = a(1) + b(1) + b(2)$

$a(3) = 97 = 26 + 15 + 56 = a(2) + b(2) + b(3)$

Esto puede expresarse en una fórmula general:

$$a(i) = a(i-1) + b(i-1) + b(i)$$

Utilizando esta fórmula y la anterior pueden obtenerse los sucesivos valores de "a", en efecto:

$b(4) = 2 * b(3) + a(3) = 2 * 56 + 97 = 209$

$a(4) = a(3) + b(3) + b(4) = 97 + 56 + 209 = 362$

$b(5) = 2 * b(4) + a(4) = 2 * 209 + 362 = 780$

$a(5) = a(4) + b(4) + b(5) = 362 + 209 + 780 = 1351$

Estos últimos son los valores tomados por Arquímedes.

XIII. ¿Por qué razón Arquímedes se dio por satisfecho con este resultado?. Podemos intentar dar algunas posibles razones:

- La aproximación lograda es alta para las pretensiones de la época, en efecto:

$$(1351/780)^2 = 3{,}00000164$$

- Si bien las operaciones aritméticas utilizadas son simples, los números utilizados son cada vez mayores, lo que dificulta los cálculos.

Conclusiones

Se ha mostrado de qué forma Arquímedes de Siracusa pudo llegar al resultado tan preciso de la raíz cuadrada de 3, que intriga a los matemáticos modernos. El método se resuelve a partir de la observación de la tabla de cuadrados perfectos, del uso de un instrumento de cálculo elemental como es el ábaco, y de un poco de ingenio, que a los griegos no les faltaba.

Adicionalmente, se hace notar que el uso del ábaco por los griegos y romanos, implica necesariamente el uso de una notación posicional para la representación de los números naturales. La resolución de la aparente contradicción entre este dato y la notación aditiva que se les adjudica a ambas culturas es una cuestión por resolver.

Bibliografía

[Bitto] Bitto, Diana: *Progetto SeT "Il Ciclo dell'Informazione"*. Il Museo dell'Informatica. Abachi. http://www.dimi.uniud.it/~cicloinf/mostra/Pagina02.html

[Beckmann, 1977] Beckmann, P.: *A History Of PI.* 1977

[Boyer, 1968] Boyer, C. B.: *A History of Mathematics.* 1968

[Esparza, 1978] Esparza Hidalgo, D.: *Nepohualtlzintzin.* Ed. Diana. México. 1978

[Fowler, 1998] Fowler, D. and Robson, E.: *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics*: YBC 7289 in Context. Historia Mathematica 25 (1998), 366-378

[Fowler, 2003] Fowler, Michael: *Basic Ideas in Greek Mathematics.* http://landau1.phys.virginia.edu/classes/109/lectures/greek_math.htm

[Heath, 1921] Heath, T.: *A History of Greek Mathematics.* 1921

[Joseph, 1997] Joseph, G. G.: *What is a Square Root?*. Mathematics in School, May (1997). 4-9

[Joseph, 1994] Joseph, G. G.: *The Crest of the Peacock.* Penguin Books. London (1994)

[Kline, 1972] Kline, M.: *Mathematical Thought From Ancient To Modern Times.* 1972

[O'Connor, 1996] O'Connor, J.J., and E.F. Robertson: *The MacTutor History of Mathematics Archive.* World Wide Web . 1996.

[Peri, 2003] Peri, J.; Rodriguez, C. G. y Scucimarri, J.: *La calculadora de los Mayas.* Presentado en SEM. Chivilcoy. (2003)

[Robson, 2000, 1] Robson, E.: *Mathematical cuneiform tablets in Philadelphia Part 1: problems and calculations.* SCIAMVS 1 (2000), 11-48

[Robson, 1997] Robson, E.: *Three Old Babylonian Methods for Dealing with "Pythagorean" Triangles.* JCS 49 (1997) 51-72

[Robson, 2000, 2] Robson, E.: *Mesopotamian Mathematics: Some Historical Background.* MAA Notes 51 (2000) 149-158

[Rouse Ball, 1908] Rouse Ball, W.W.: *Short Account of the History of Mathematics.* 1908

[Sondheimer, 1981] Sondheimer and Rogerson: *Numbers and Infinity.* 1981

[Wagner, 1998] Wagner, C. H.: *Hammurabi's calculator.* Yearbook. National Council of Teachers of Mathematics. 1998. pp 86-90

[Wilson, 2000] Wilson, David: *The History of Pi. History of Mathematics.* Rutgers, Spring 2000