EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIV JORNADAS

VOLUMEN 10 (2004), Nº10

Pío García
Patricia Morey
Editores

ÁREA **L**OGICO-**E**PISTEMOLÓGICA DE LA **E**SCUELA DE **F**ILOSOFÍA
CENTRO DE **I**NVESTIGACIONES DE LA **F**ACULTAD DE **F**ILOSOFÍA Y **H**UMANIDADES
UNIVERSIDAD **N**ACIONAL DE **C**ÓRDOBA

Vaguedad y modalidades contextuales

*Luis A. Urtubey**

Se suele aceptar como un criterio para determinar si un predicado es vago, que permita la existencia de los llamados casos limítrofes, de modo tal que no resulte claro si el predicado se aplica o no en un caso particular. Así, por ejemplo, ¿cuál debería ser el número de cabellos que debería tener un hombre para no ser considerado calvo? La vaguedad es un rasgo que impregna el lenguaje natural, pero que asimismo ha mostrado ser algo recalcitrante frente a su tratamiento teórico. Sobre todo, porque cualquier intento de caracterizar la semántica de las expresiones vagas (es decir, lo que ellas significan) o su lógica (qué razonamientos con ellas son válidos) debe dar también una solución satisfactoria de la antigua paradoja conocida como *sorites*. Una versión de esta paradoja para el predicado "calvo" es la siguiente. Un hombre que no tiene ningún cabello, es calvo. Asimismo, un solo cabello no puede hacer ninguna diferencia entre ser calvo y no serlo. De modo que para cualquier número n resulta aceptable que si alguien con n cabellos es calvo, también lo seguirá siendo si tiene $n + 1$ cabellos. Luego, alguien con 1.000.000 de cabellos es calvo. Se puede ver entonces que a partir de premisas que parecen inobjetables y a través de un razonamiento correcto se llega, no obstante, a una conclusión absurda.

Existe hoy una enorme literatura sobre la vaguedad, producto de la consideración del tema por parte de filósofos, lingüistas y lógicos a través de las últimas décadas, lo que ha generado también una diversidad de enfoques y teorías que compiten entre sí, cada una con sus propios problemas y limitaciones. Estas discusiones han tenido éxito en cuanto a aclarar más el fenómeno de la vaguedad, aunque para muchos se está lejos de alcanzar un consenso sobre cuestiones relevantes. Entre estos diversos enfoques, se ubica en particular el que pone énfasis en el carácter contextual de los términos vagos. Un término se considera "sensible al contexto", cuando su contribución al contenido proposicional puede variar según las circunstancias en que se lo usa, sin que esto signifique un cambio en el significado que regularmente tiene este término en el lenguaje. Un ejemplo típico de expresiones de esta clase, que suele citarse como paradigmático, es el de las llamadas "expresiones indexicales", como el pronombre personal "yo". Algo que resulta también de este enfoque, es que vincula el problema del razonamiento con términos vagos, con el problema general de la caracterización de un contexto y del razonamiento contextual, del cual sería un caso particular. Esta consideración lógica de los contextos ha tomado énfasis sobre todo en la literatura vinculada con la llamada Inteligencia Artificial, en particular a partir de los trabajos de John McCarthy, conocido ya por su significativo aporte en relación con la lógica no monotónica. También la literatura en este terreno ha crecido y se ha diversificado notoriamente, en cuanto el interés por el estudio de una noción formal de contexto se extiende a diversas disciplinas, desde la semántica y la pragmática a la ciencia cognitiva, la lingüística y la ontología formal.

* Universidad Nacional de Córdoba.

Epistemología e Historia de la Ciencia, Volumen 10 (2004), N° 10

R. Thomason (2001) señala, refiriéndose a los trabajos de McCarthy sobre contextos, que los ejemplos más detallados y esclarecedores en que la teoría de los contextos se puede usar, se originan en la integración de fuentes de conocimiento y módulos. En este sentido, un contexto se considera como una fuente de conocimiento, de modo que la manera más sencilla de formalizarlo, sería identificarlo directamente con el conjunto de proposiciones que este ofrece. El tratamiento intensional de los contextos que emprende Thomason tiene también afinidad con ideas que propone Stalnaker (1999) al respecto. Para este último, un contexto (en un punto particular del discurso) se puede identificar con el cuerpo de información que se presupone, en este punto, que comparten los participantes en el discurso. Esta información que define el contexto, se puede representar entonces con un conjunto de mundos posibles, denominado "conjunto contexto", que incluye todos los mundos que son compatibles con la información. Estas ideas ubican también a los contextos en una tipología que comparten con las proposiciones. Puede entonces en cierto modo interpretarse la forma en que un agente accede a la información que le proporciona un contexto o múltiples contextos, considerando que cada uno de ellos ofrece al agente un conjunto de proposiciones, que este va recogiendo. Pero si se quiere que los contextos estén comunicados entre ellos, es decir, que cada contexto acceda a la información desde otros contextos, la representación anterior parece muy limitada. Para representar esta interacción entre contextos, necesaria también para el razonamiento contextual, Thomason encuentra que hace falta que los contextos, en cuanto objetos formales, se ubiquen ontológicamente a la par de las modalidades. Es decir, que se puedan tratar los contextos como operadores modales, sin que esto signifique identificar la lógica de los contextos con la lógica modal. Particularmente, resultará interesante considerar a los contextos como simples agentes epistémicos, dentro del marco de una lógica epistémica de múltiples agentes, o multimodal.

En un artículo relativamente reciente Ken Akiba (2000) desarrolla también una interpetación de la vaguedad como modalidad, apoyándose en este caso, en el análisis de la vaguedad que se origina en la semántica de supervaluaciones. La idea básica es que la vaguedad se puede tratar en analogía con las modalidades temporales y aléticas, en términos de mundos posibles, para lo cual las precisificaciones de la semántica de supervalucaiones, resultan ser ahora los mundos necesarios para la estructura relacional de la modalidad. En este sentido, un objeto vago es un objeto que coincide con diferentes objetos precisos o nítidos, en diferentes mundos. En línea con lo anterior, también esta estructura relacional ubica este análisis de la vaguedad en el ámbito intencional.

El presente trabajo, de carácter más bien programático, se propone explorar una consideración de la vaguedad como una modalidad, particularmente en el marco antes referido de las modalidades contextuales. Para esto se tomará en cuenta el antecedente que proporciona el planteo de Akiba arriba mencionado, considerando, por otra parte, que las precisificaciones mismas pueden entenderse a modo de contextos asociados con la presencia de términos vagos, siguiendo también antecedentes de David Lewis y otros autores al respecto, tal como ya se planteo en Urtubey (2001). De este modo, la lógica de la vaguedad podría resultar una particular lógica de contextos y compartir también la agenda de esta última.

Se explorarán en este sentido, algunos resultados dentro de una posible formalización de esta lógica en el marco de la teoria de la demostración. Cabe advertir, que en aras de la brevedad del trabajo, asumiremos algunos conocimientos de lógica de primer orden.

Desde una perspectiva como la adoptada en las lógicas subestructurales una lógica es una herramienta para representar y razonar sobre "cualidades de los objetos": poder de duración (recursos), influencia (acciones), etc. El carácter de la cualidad se formaliza por medio de una estructura, ubicada a ambos lados de " $\vdash$ ": conjuntos, multiconjuntos, listas, etc. El conjunto de conectivas (operaciones) asociada con cada lógica, depende de la estructura del prosecuente y del postsecuente. En este planteo, siguiendo una idea de Restall (2003) un contexto, expresado en un lenguaje, se puede representar por un "estado" $\{X \vdash Y\}$, siendo X e Y conjuntos de enunciados del lenguaje, tal que resulta *incongruente* aceptar X y rechazar Y. De lo antes señalado por Tomason (2001), resulta un problema no obstante sobre la intencionalidad de los contextos: La expresión "En el contexto C_i se afirma que A", corresponde al tipo: <<w,t>,<w,t>>, i.e., un contexto tiene como input y output, proposiciones, dado que un contexto "pasa" información a otro contexto también. La sugerencia de Thomason como ya vimos- lleva a pensar un contexto como *modalidad.*

En este sentido Akiba (2000) introduce a su vez una analogía con la "indefinición" formalizada en las modalidades aléticas y temporales, considerando "estados" o "fragmentos" temporales como mundos posibles. Un objeto vago es un objeto que coincide con distintos objetos precisos a través de diferentes mundos (*precisificaciones*). Un predicado vago (conjunto vago) es un objeto (definido a través de los mundos), que contiene diferentes miembros en distintas *precisificaciones*. Si vinculamos este planteo con la caracterización de los contextos que antes señalamos, resulta en principio una idea atractiva pensar la formalización de la vaguedad como una modalidad contextual. Dentro de la extensión permitida por este trabajo, nuestro propósito es efectuar una aproximación a esta idea, formalizando desde esta perspectiva una version de la paradoja del sorites, a modo de ejemplo, apoyándonos en los cálculos de secuentes para lógicas modales. Para una introducción y algunos desarrollos de estos cálculos pueden consultarse Wansing (2000), Kosta Dosen (1985) o Indrzejczak (1997).

Este tipo de cálculos se remontan a la idea de Dana Scott de comienzos de los años 70, del pasado siglo, en cuanto a considerar que la implicación estricta representa en el lenguaje objeto una relación metalingüística, que afirma la existencia de una deducción de A a B, de acuerdo con lo cual se la puede considerar como una herramienta para formalizar la noción de regla derivada en un sistema. Un aspecto característico del cálculo que emplearemos es el uso de secuentes de grado 2, los cuales tienen dos clases de relaciones deductivas, una principal y otra auxiliar. Los secuentes principales pueden tener colecciones de fórmulas (como en el caso clásico) o exclusivamente colecciones de secuentes auxiliares en ambos lados. Hay reglas estructurales y operaciones lógicas sobre el nivel estructural (principal), reglas para pasar del nivel clásico al secundario y reglas para transformar expresiones como $\{X \vdash_n Y\}$ en expresiones del lenguaje objeto. Las reglas para las constantes modales, en nuestro caso para contextos, involucran secuentes de nivel 2, mientras que las reglas para las constantes logicas ordinarias sólo requieren secuentes de nivel 1. En este sentido, la regla D^n *infra* es una regla descendente, ya que permite pasar de un contexto a otro subcontexto. En cambio la regla modal $[A]_x$ es una regla ascendente, que permite el paso en el otro sentido.

Una regla particular es la regla *cut*, que aquí además de la transitividad expresa una forma dinámica de identificación de dos ocurrencias de fórmulas en diferentes contextos. Ella permite la transitividad de las pruebas por cuyo medio los contextos se pueden componer indefinidamente sin prestar atención a sus modificaciones. Hay que observar que la relación deductiva auxiliar no es transitiva. Por medio de la regla cut, la ocurrencia de una fórmula se identifica en el prosecuente y postsecuente para sustituirla por la fórmula de la cual se deriva. Por lo demás, la regla referida al condicional es la acostumbrada regla de introducción en los cálculos de secuentes.

Para el análisis del ejemplo que indicamos nos serviremos a continuación de un sistema como el de Kosta Dosen del que tomamos algunas reglas adaptadas a este caso. No incluimos aquí todas las reglas, sino sólo las empleadas en la derivación del ejemplo, ya que resultaría bastante engorroso siendo además innecesario, para cuya consulta remitimos al trabajo antes referido de este autor.

Reglas para recuentes de grado 2

CUT

$$\frac{\Gamma \vdash^{2} \{\theta \vdash^{1} B\} \qquad \{\theta \vdash^{1} B\}, \Delta \vdash^{2} \Lambda}{\Gamma, \Delta \vdash^{2} \Lambda}$$

D^n

$$\frac{\varnothing \vdash^{2} \{\Gamma \vdash^{1} \Delta\}}{\{\Gamma \vdash^{1} \Delta\}}$$

$[A]_x$

$$\frac{\Gamma, \{\varnothing \vdash^{1} A\} \vdash^{2} \Sigma, \{\Theta \vdash^{1} \Delta\}}{\Gamma \vdash^{2} \Sigma, \{\Theta, [A]_{ci} \vdash^{1} \Delta\}}$$

(Con $[A]_{ci} \neq [A]_{cj}$ Si $C_i \neq C_j$)

$(\rightarrow)$

$$\frac{\Gamma, A \vdash^{1} \Delta, B}{\Gamma \vdash^{1} \Delta, (A \rightarrow B)}$$

Usaremos para esta aplicación la sigueinte versión de la "paradoja del hombre calvo" (*falakros*), análoga a la del "sorites" o montón.

1. $\forall n$ (x no es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza $\rightarrow$ x no es calvo cuando tiene n-1 cabellos en su cabeza)
2. x no es calvo cuando x tiene un millón de cabellos en su cabeza.
3. Por lo tanto, (3) x no es calvo cuando x tiene 0 cabellos en su cabeza.

El análisis de la paradoja procede de este modo. En primer lugar, (1) no puede ser completamente verdadera, pues la paradoja reduce al absurdo este supuesto. Como se sabe la otra posibilidad, que (1) sea completamente falsa, tiene como consecuencia que $\exists n$ (x no es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza y x es calvo cuando tiene n-1 cabellos en su cabeza), es completamente verdadera, lo cual parece algo irreal.

Sea entonces, $v(1)$, el valor de (1), igual a $1-\delta$, para algún $\delta > 0$. La idea es que para algunos propósitos prácticos, se puede ignorar el valor δ. Supongamos, de este modo, que el valor de cada instancia de eliminación de una cuantificación universal $\forall xP$ es idéntico al valor de $\forall xP$ mismo. Representemos 'x es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza' con 'B_n'. El valor de la conclusión del primer paso del argumento se obtiene resolviendo la ecuación:

$1-\delta = 1 - (1 - v(\sim B999{,}999))$

y el segundo paso, ~B999,998 resolviendo:

$1 - \delta = 1 - ((1 - \delta) - v(\sim B999{,}998))$

y así sucesivamente. Los valores de los elementos de esta secuencia: ~B1,000,000, ~B999,999, ... descienden de modo contínuo hacia 0. Sin embargo este decrecimiento es localmente despreciable:

~B100,000,000	1
~B999,999	$1-\delta$
~B999,998	$1-2\delta$
~B999,997	$1-3\delta$

Cada iteración del *modus ponens* preserva la verdad *bastante*, en cuanto que el valor de la conclusión siempre difiere sólo en una cantidad 'despreciable' del valor de la conjunción de las premisas. Hay que decir que en esta versión de la paradoja se asume también la vaguedad de *orden superior*, porque es parte de la naturaleza de las cosas que no podemos especificar el mínimo j tal que $\forall n>j$ $(\sim Bn \rightarrow \sim Bn\text{-}1)$, es completamente verdadero. Y no podemos especificar tampoco el máximo k tal que $v(\forall n<k\ (\sim Bn \rightarrow \sim Bn\text{-}1)) < 1$.

Veamos entonces el análisis formal del argumento siguiendo el que efectúa Copeland(1998). Abreviaremos la premisa (1) del argumento, la premisa mayor, con la letra 'M', la regla *cut* en este caso corresponde a su versión clásica[1]. La primera iteración en la cadena de razonamiento puede representarse de este modo:

M $\vdash$ ~B1,000,000 → ~B999,999

~B1,000,000 → ~B999,999, ~B1,000,000 $\vdash$ ~B999,999

M, ~B1,000,000 $\vdash$ ~B999,999 por CUT.

La segunda iteración es

M $\vdash$ ~B999.999→~B999,998

~B999,999 → ~B999,998, ~B999,999 $\vdash$ ~B999,998

M, ~B999,999 $\vdash$ ~B999,998 por CUT.

Fundiendo estos resultados por una aplicación posterior de CUT, resulta:

M, M, ~B1,000,000 $\vdash$ ~B999,998

Al final de una cadena de inferencias que forma un argumento de esta clase, arribamos a:

$M, M, \ldots, M, \sim B1{,}000{,}000 \vdash \sim B0$

(Cuántas ocurrencias de 'M'? 1.000.000, quizás?). Por la contracción irrestricta, esto puede transformarse en la paradójica:[2]

$M, \sim B1{,}000{,}000 \vdash \sim B0$

Para la formalización del argumento, aplicando las reglas para secuentes anteriores, añadiremos como axioma específico:

$\{\Gamma \vdash^{1} A(n)\} \vdash^{2} \{\Gamma \vdash^{1} A(n\text{-}m)\}$

Este axioma se inspira en que dado que se supone que M (premisa mayor) se da en cualquier contexto, tal como también parece estar en el fondo de la paradoja, puede asumirse su afirmación sin restricciones como una regla derivada, lo cual quiere expresar el axioma de algún modo, a través de la posibilidad $\Gamma = \varnothing$ en el secuente auxiliar. Es decir, que en alguna clase de contextos, tiene cierta necesariedad la afirmacion: "$\forall n$ (x no es calvo cuando x tiene n cabellos en su cabeza$\rightarrow$ x no es calvo cuando tiene n-1 cabellos en su cabeza)". Dicho en términos de la interpretación que indicamos al comienzo, sería incongruente afirmar una cosa sin sostener también la otra

El argumento podría entonces reproducirse con la siguiente inferencia contextual:

$$\begin{array}{c}
\{\varnothing \vdash^{1} A(n)\} \vdash^{2} \{\varnothing \vdash^{1} A(n\text{-}i)\} \\ \hline
\varnothing \vdash^{2} \{[A(n)]_{co} \vdash^{1} A(n\text{-}i)\} \\ \hline
\{[A(n)]_{co} \vdash^{1} A(n\text{-}i)\} \\ \hline
\{\varnothing \vdash^{1} [A(n)]_{co} \rightarrow A(n\text{-}i)\} \\ \hline
\{\varnothing \vdash^{1} [A(n)]_{co} \rightarrow A(n\text{-}i)\} \vdash^{2} \{\varnothing \vdash^{1} A(n\text{-}m)\} \\ \hline
\varnothing \vdash^{2} \{[[A(n)]_{co} \rightarrow A(n\text{-}i)]_{c1} \vdash^{1} A(n\text{-}m)\}
\end{array}$$

...

..

.

A modo de conclusión, permítasenos terminar esta propuesta con algunas consideraciones sobre esta derivación algo críptica. La primera línea y luego la penúltima son aplicaciones del axioma. $[A]_x$ permite obtener la segunda línea. La idea intuitiva asociada a la regla aquí es recoger precisamente la necesariedad de M en un contexto particular "c_o", haciéndolo explícito. "$[A(n)]_{co}$", puede interpretarse como "Contextualizado A(n)". Lo cual a su vez remite a la vaguedad del predicado presente en A(n). Aquí ya el nivel en que se ubica la derivación es clásico, por lo que comienza a generarse la paradoja. Por la regla descendente D^n se obtiene plenamente este efecto, quedando sólo derivaciones *intracontextuales*, por decirlo de algún modo La regla justamente hace alusión a la ausencia de supuestos propios de un contexto o al menos podría decirse, que por abarcar una clase ya especificada, pueden considerarse por *default* sin problemas. La introducción del condicional en la línea siguiente, es una maniobra en el mismo sentido, amenazando con la aplicación -algo descarada- del modus ponens. Una nueva aplicación de $[A]_x$ permite recoger la variación contextual dada por el condicional y que queda expresada en el anidamiento de las modalidades, que impediría también la aplicación directa del modus ponens, al menos sin más reglas para modalidaes. Este proceso continuaría con leves variaciones contextuales hasta quedar fuera de todo contexto admisible. Obsérvese, que si bien no usamos la regla *cut* en la derivación del ejemplo, ella permitiría combinar contextos en la medida que se identifique que comparten sustancialmente información. Lo que específicamente debería tomar la forma de una combinación de derivaciones y una ramificación de la derivación.

Finalmente, cabe reconocer que el esquema de la derivación no parece evitar en última instancia la paradoja que genera la vaguedad de orden superior, como queda sugerido por los puntitos finales. No es esta tampoco la intención, ya que se sabe que este rasgo es eneludible en esta clase de tratamiento de los predicados vagos. En este sentido, lo que se pone de relieve es que el contrrol sobre el manejo contextual tiene que ser independiente del razonamiento.

Bibliografía

Akiba, K. (2000), "Vagueness as a modality", *Phil. Quart.*, 50, 200.

Copeland, J.(1997) "Vague identity and fuzzy logic", *J.Ph.*, (514-534).

Dosen, K. (1985), "Sequent systems for modal logics", *JSL*, 50, 1.

Indrzejczak, A. (1997), "Generalized sequent calculus for propositional modal logics", *Logica Trianguli*, 1.

McCarthy, J, Buvac, S. (1997), "Formalizing context", en Aliseda, A. (et al.) (eds.), *Computing Natural Language*, Stanford University Press, U.S.A.

Restall, G., (2003) "Multiple conclusions", *International Congrese of Logic, Methodology and Philosophy of Science Proceedings*, Oviedo.

Stalnaker, R. (1999), *Context and Content*, O.U.P, New York.

Urtubey, L. (2001), "Evolución de la vaguedad", en Victor Rodriguez, Luis Salvático (eds), *Epistemlogía e Historia de la Ciencia*, vol. 9, 2003, U.N.C., Córdoba.

Thomason, R. (2001), "Contextual Intentional Logic", *preprint*, University of Michigan.

Wansing, H. (2000), "Sequent systems for modal logics", en Gabbay, D et al. (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, 2nd. Ed. vol 8., Kluwer.

Notas

1 Cut: $\Gamma \vdash \Delta, A \quad A, \Theta \vdash \Sigma \Rightarrow \Gamma, \Theta \vdash \Delta, \Sigma$. Como de costumbre, las letras griegas representan secuencias de fórmulas separadas por comas o fórmulas simples, o bien una secuencia vacía. Las letras latinas, a su vez, representan fórmulas.

2 Contracción: $A, A, \Gamma \vdash \Delta \Rightarrow A, \Gamma \vdash \Delta$.