EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIII JORNADAS

VOLUMEN 9 (2003), Nº9

Víctor Rodríguez
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La idea de lenguaje universal en el álgebra de la lógica de Ernst Schröder*

Javier Legris†

1. Introducción

Los trabajos de Ernst Schröder (1841-1902) dedicados al álgebra de la lógica han sido considerados como la culminación y la sistematización de la labor de Boole, McColl, De Morgan y Peirce. Esto vale especialmente para sus *Lecciones sobre el álgebra de la lógica* (Schröder 1890-1895), en cuyo tercer volumen se desarrolla de manera exhaustiva el "álgebra de relativos" iniciada por Peirce y que lleva a un sistema algebraico equiparable con la lógica de predicados. En lo que sigue se mostrará que uno de los objetivos de este sistema formal consistía en el desarrollo de un lenguaje universal en el cual fundar las ciencias, idea que tiene un origen leibniziano. La universalidad del lenguaje se manifiesta en la multiplicidad de aplicaciones posibles.

La idea de lenguaje universal ocupó la atención de matemáticos y filósofos en el siglo XIX tanto en el sentido de una lengua de comunicación universal para la ciencia, como en el sentido de un lenguaje formal en el cual formular toda teoría científica, y en ambos casos la tradición leibniziana de la *characteristica universalis* y los nuevos desarrollos del álgebra resultaron muy influyentes. Así, surgió la idea de concebir el álgebra, en particular el "álgebra de la lógica", como un lenguaje universal, consistiendo su universalidad en poder tener una multiplicidad de interpretaciones. Esto presupone una riqueza expresiva del lenguaje algebraico para poder representar cualquier aspecto de la realidad.

Schröder desarrolló en su *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* (1873) lo que llamó *álgebra absoluta*, que abarcaba tanto el álgebra como la lógica. Posteriormente, la determinación de la dualidad entre suma y producto (determinación debida a Boole, pero que Schröder hizo de manera independiente) condujo a analogías entre lógica y álgebra. La lógica se tornó un modelo del álgebra. En su obra *Operationskreis der Logikkalkuls* (1877), Schröder se ocupó exclusivamente de la lógica por primera vez, discutiendo los sistemas de Boole.

En el vol. I (1890) de las *Vorlesungen über die Algebra der Logik* se ocupó de la lógica de clases y, en el vol. II (1891), de la lógica de enunciados. El cumplimiento de los objetivos que Schröder se había fijado para el álgebra absoluta se alcanzan con la inclusión de la "lógica de relaciones" (*Logik der Relative*) en la primera parte del vol. III de las *Vorlesungen*, donde se basa en la obra de Charles Peirce. Todo el sistema entero tenía conceptos (*Begriffe*) como elementos básicos (*Urbegriffe*, *Grundbegriffe*), que se sometían a un conjunto de operaciones básicas (*Grundoperationen*), aplicable a todo el campo de objetos del pensamiento (véase 1890, p. 93).

† Universidad de Buenos Aires. CONICET

Uno de los objetivos que tenía Schröder era desarrollar un lenguaje científico universal con el cual dar fundamento a la física y las demás ciencias naturales. En relación con este objetivo es que lleva a cabo una profunda innovación en la lógica. En un esbozo autobiográfico de 1901 Schröder mencionaba entre sus resultados un número de contribuciones que "se refieren a una reforma y desarrollo ulterior de la lógica." En estas contribuciones, se proponía

> Configurar la lógica como una disciplina computacional [*rechnerisch*]; en especial hacer que los conceptos relativos sean susceptibles de un tratamiento exacto e incluso quitarles todo sustento en el ámbito de la filosofía de las grandes frases por medio de su emancipación de las ataduras usuales del lenguaje ordinario [*Wortsprache*]. Así, se puede abrir camino para un lenguaje científico universal, que se diferencie diametralmente de las aspiraciones lingüísticas *à la* Volapük y que se presente como un lenguaje simbólico [*Zeichensprache*] antes que como una lengua fonética. (Schröder 1901, cit. en Peckhaus 1994.)

2. La idea de lenguaje universal en Leibniz y sus proyecciones

El programa leibniziano para reconstruir la ciencia se basaba en un lenguaje universal, cuyo núcleo es la *characteristica universalis*, entendida como una teoría acerca de signos (GP VII, 205). Esta es la herramienta que permite representar estructuras y procesos de pensamiento a través de un sistema de signos y sus transformaciones. Con esta *characteristica* se obtiene conocimiento simbólico.

Los símbolos corresponden no sólo a términos, sino también a enunciados. Las ideas seminales de la *characteristica* se encuentran ya en *De arte combinatoria*, donde el *ars characteristica* construye y ordena signos, de un modo tal que represente las mismas relaciones en las que están los pensamientos referidos. La *lingua characteristica* resulta ser una aplicación de la combinatoria (A VI.1, 202). Los caracteres son entidades materiales accesibles a la percepción mediante los cuales se representan relaciones entre objetos; pueden ser letras, signos matemáticos, figuras geométricas o dibujos. La estructura de las expresiones refleja la estructura de los objetos representados. El lenguaje es composicional: conceptos más complejos resultan de componer conceptos simples. Leibniz mismo escribe:

> Recientemente algunos hombres eminentes imaginaron cierta lengua o característica universal, según la cual se ordenan perfectamente todas las nociones y cosas, y con cuyo auxilio diversas naciones pueden comunicar los pensamientos del espíritu, y cada uno es capaz de leer en su lengua lo que el otro escribe. (GP VII 184.)

La conexión entre caracteres puede efectuarse por medio de un cálculo, entendido como una operación que se define para aquellos (véase la carta a Tschirnhaus de mayo de 1678: "Calculus quam operatio per characteres" (GM IV, 462)). En otro texto Leibniz caracteriza la noción de cálculo del modo siguiente.

> El *cálculo*, o sea, la *operación* consistente en la producción de relaciones por medio de transformaciones de las fórmulas, realizadas según ciertas leyes prescritas. (GP VII 206.)

En este sentido, el cálculo es una técnica aplicada a una *lingua characteristica*. En el texto C 326 f., la *characteristica* se estructura en la formación de expresiones y en el pasaje de expresiones dadas a otras. Una expresión es simple o compuesta. Las compuestas surgen por medio de aposición o coalición. La coalición lleva a la obtención de nuevos caracteres. En la aposición deben tomarse en consideración el orden de los caracteres.

Sybille Krämer considera los siguientes rasgos esenciales de la noción leibniziana de cálculo (véase Krämer 1992, p. 228): (a) Existe un conjunto finito de caracteres o símbolos fundamentales. (b) Los caracteres se organizan de acuerdo con reglas de formación ("appositio" o "connexio"), dando lugar a fórmulas que son meras cadenas de signos. (c) Por medio de reglas de transformación se establecen relaciones entre las fórmulas. La "substitutio" es una regla de este tipo. (d) La finalidad del cálculo reside en la producción de expresiones y su transformación mediante reglas (de formación o transformación). En los cálculos los signos conforman sistemas cuyas reglas son independientes de su interpretación (véase GP VII 298).

3. La interpretación de Trendelenburg de la *characteristica universalis*

Adolf Trendelenburg tuvo una influencia indirecta en el desarrollo de los lenguajes formales de la lógica moderna al haber transmitido ideas de Leibniz. En su crítica a Hegel, planteó la necesidad de una vuelta a la lógica deductiva y de una transformación de la misma. Esta fue la "cuestión lógica" discutida a mediados del siglo XIX en el contexto filosófico alemán.

Pero además, en su conferencia de 1856 "Sobre el proyecto leibniziano de una característica universal" ["Über Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik"] ofrecida en la Academia de Ciencias de Berlín, hizo una presentación de las ideas de Leibniz que resultó muy influyente en el pensamiento posterior, en particular en Schröder (y también – debe mencionarse – en Frege). Trendelenburg comienza destacando el papel de los signos en el pensamiento y la comunicación y afirma que en la ciencia se pueden idear signos que "representen de manera diferenciada y sintética los rasgos que están diferenciados y sintetizados en un concepto" (Trendelenburg 1867, p. 3). Como ejemplos de esta "conceptografía" (*Begriffsschrift*) menciona el sistema decimal (p. 4). Esta perspectiva puede extenderse a cualesquiera objetos, conduciendo a un "lenguaje característico de conceptos." Leibniz llevó a cabo este programa con su *lingua characteristica*, cuyo objetivo era obtener

> Una expresión adecuada y general de la esencia y que sea posible, por medio de una descomposición de conceptos en elementos, un tratamiento de los mismos a través del cálculo. (Pág. 4.)

Sin embargo, Trendelenburg criticó la aplicación de los cálculos de conceptos a los silogismos, ya que, argumenta, la conexión de las propiedades en los conceptos es más compleja de lo que Leibniz supone (p. 24). Schröder cita directamente a Trendelenburg (por ejemplo, Schröder 1890, p. 94).

4. El álgebra absoluta

Como se mencionó antes, Schröder desarrolló el álgebra absoluta, que abarcaba tanto el álgebra como la lógica. Al final de su *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra* propone un "programa" para el álgebra formal "en el sentido estricto de la palabra," que consiste en

> Aquellas investigaciones sobre las leyes de operaciones algebraicas [...] que se refieren a números generales puros de un dominio ilimitado de números, *acerca de cuya naturaleza no se hace supuesto alguno.* (1873, p. 233.)

El álgebra formal es la base para el estudio de diferentes sistemas específicos de números y de operaciones de cálculo. Schröder resume así los objetivos del álgebra formal (1873, p. 293 s.):

1. El álgebra formal reúne en una totalidad sistemática todos los supuestos que sirven para definir operaciones de conexión (*Verknüpfungsoperationen*) entre números de un dominio numérico determinado.
2. El álgebra formal establece, dadas cualesquiera premisas, el sistema completo de consecuencia ("Separation der Folgerungsmengen").
3. El álgebra formal investiga qué sistemas numéricos cerrados pueden construirse por medio de las operaciones definidas.
4. El álgebra formal determina el significado (*Bedeutung*) que corresponde a estos números y operaciones (geométrico, físico, etc.), el "sustrato real" subyacente.

Los dos primeros objetivos pueden considerarse sintácticos; los dos últimos, semánticos. Compárese la situación con la "axiomática formal" de Hilbert. Para Schröder los números son signos (*Zeichen*), con lo cual se aparta totalmente de la tradición que define el concepto de número por medio de magnitud y medida, permitiéndole tener una concepción más abstracta de la matemática. El dominio – *Zahlengebiet* – de los sistemas algebraicos puede ser de cualquier tipo. Y el objeto del álgebra absoluta son las regularidades a las que obedecen los operadores, las leyes "puras" que rigen a las operaciones. En un texto de 1874, *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*, Schröder considera operaciones (suma, p. ej.) entre conceptos, juicios, números y puntos sobre el plano. Consideraciones semejantes hace en su reseña de la *Begriffsschrift* de Frege: el cálculo abstracto se aplica a un agregado (*Mannigfaltigkeit*) cualquiera que puede estar constituido por dominios (*Gebiete*) arbitrarios, tales como partes de una superficie, sin considerar la medida (véase 1880, p. 85).

5. El álgebra de la lógica como "notación conceptual"

Según Schröder, el "álgebra de relativos" constituye la forma más desarrollada del álgebra de la lógica. El lenguaje algebraico está conformado por los siguientes signos (véase Schröder 1890, 1891, 1895, 1898): *A*, *B*, *C*, *D*, ... son signos para elementos constantes (objetos o también enunciados). Los signos *i*, *j*, *h*, *k*, ..., *a*, *b*, *c* son variables para clases o enunciados. Las variables con subíndices a_{ij}, b_{ij}..., son variables para relaciones diádicas. Además, deben considerarse de manera esencial los siguientes símbolos: 0 (elemento cero), 1 (elemento unidad), + (operación suma), • (operación multiplicación), Σ_i (signo de suma de los i), Π_i (signo para el producto de los i), – (negación), $\leq$ (orden, subsunción), = (igualdad, identidad). Son leyes del álgebra de relativos, por ejemplo, las siguientes expresiones: $\Sigma_i a_i + \Sigma_i b_j = \Sigma_i \Sigma_j (a_i + b_j)$, $\Sigma_i \Pi_j a_{ij} \leq \Pi_j \Sigma_i a_{ij}$ (véase Schröder 1895, pp. 99 y s.).

Con el esquema básico del "álgebra de la lógica", en particular el álgebra de relativos, expuesto en las *Lecciones*, Schröder se proponía desarrollar un sistema simbólico, un lenguaje universal, diferente de una gramática general que sea común a todos las lenguas históricas (*Kultursprachen*). Se trata de lo que llamaríamos un lenguaje formal y que él considera el "sistema de designación más racional" de alcance universal y que tiene por finalidad expresar todos los procesos de pensamiento (*das rationellste Bezeichungssystem für die Benennung aller Objekte und den Ausdruck aller Vorgänge des Denkens*, 1890, p. 64). Sus signos, a diferencia de las palabras de las lenguas históricas, representan conceptos, de modo que la tarea consiste en – una vez más retomando ideas de Trendelenburg 1867 – "poner en contacto inmediato la configuración del signo con el contenido del concepto" (1890, p. 93). Schröder expresa su propósito con las siguientes palabras:

> Ha surgido para nosotros el ideal de configurar nuestro entero sistema de conceptos en un sistema organizado de manera estrictamente científica, construyendo todos los conceptos a partir de la menor cantidad posible de conceptos básicos [*Grundbegriffen*] u originarios [*Urbegriffen*], por medio de la menor cantidad posible de operaciones básicas [*Grundoperationen*] (Schröder 1890, p. 93)

> Surge el problema de establecer una correspondencia regida por leyes entre el signo y la cosa, por medio de una adecuada configuración del signo [...] inventando, en lugar de la palabra ya existente en el lenguaje, signos tales que representen de manera diferenciada y sintética las notas diferenciadas y sintetizadas en el concepto. (*Loc. cit.*)

> Una notación semejante, si puede extenderse al ámbito *total* de los objetos del pensamiento, se convertirá en un *lenguaje característico* de conceptos, *conceptografía* [*Begriffsschrift*], en oposición a los signos de las palabras, que son más o menos indiferentes al contenido de las representaciones; y se convertirá en un lenguaje *universal* de objetos [*Pasigraphie*], en oposición a las lenguas particulares de los pueblos. Así, hemos alcanzado la idea de un *lenguaje universal* [*Universalsprache*] filosóficamente científico. (*Loc. cit.*)

Así, Schröder señala que el sistema entero del álgebra de la lógica constituye una *lengua característica* de conceptos, una *Begriffsschrift*, que refleja los rasgos de sus contenidos y una lengua general de objetos, y una *Pasigraphie*, en oposición a las lenguas particulares. Con ello, se obtiene un "philosophisch wissenschaftliche Universalsprache" (1890, loc. cit.). Schröder reconoce los orígenes leibnizianos de estas ideas (véase 1890, p. 95) y señala que su realización es posible únicamente si se determinan operaciones básicas entre conceptos:

> La realización del ideal imaginado de una clasificación científica y de una designación sistemática de todo lo nombrable debe, no obstante, [...] tener como presupuesto el conocimiento completo de determinadas *operaciones* básicas que unan los elementos conceptuales y el dominio de sus leyes. Este trabajo preliminar debe ser resultado de la lógica. (*Loc. cit.*)

6. La pasigrafía

Schröder se ocupó posteriormente de un lenguaje universal o *Pasigraphie* (escritura universal) en su contribución al Primer Congreso Internacional de Matemática (Zurich, agosto de 1897). Allí dice que el objetivo de la pasigrafía es

> La constitución definitiva de un lenguaje universal científico que esté libre de las peculiaridades nacionales y que esté destinado mediante su construcción a proporcionar el fundamento para la filosofía verdadera, es decir, exacta. (Schröder 1898, p. 147.)

En este lenguaje pueden expresarse todos los conceptos de cada ciencia individual a partir de un conjunto mínimo de conceptos fundamentales (*Urbegriffen*) o categorías y por medio de operaciones "puramente lógicas" de aplicación universal que pueden considerarse un *calculus ratiocinator*.

> Para las categorías y operaciones de esta 'lingua characteristica' o 'scriptura universalis' se emplean signos y símbolos sencillos, de fácil manejo, como, por ejemplo, letras. Sin embargo, estos (a diferencia de las 'palabras' de una lengua viva) son manejadas de manera *absolutamente consecuente* o con rigor matemático. (Schröder 1898, p. 148.)

Schröder introduce un análisis de la matemática en términos de la pasigrafía, según el cual la matemática resulta ser una rama de la "lógica general" (Schröder 1898, p. 149). En efecto, la lógica general basta para construir todos los conceptos aritméticos (número, finitud, límite, función, suma, etc.), de modo que no se requieren otros principios que no sean los de la lógica general (Schröder 1898, p. 149).

Schröder intentaba concretar estas ideas sobre la pasigrafía en su álgebra de relaciones, que concibe como un instrumento para representar contextos matemáticos y que hace a las demostraciones breves, abarcables y más simples. El álgebra de relaciones se convierte así en un lenguaje formal, que por medio de interpretaciones se puede aplicar a diferentes ámbitos como la geometría, la teoría de conjuntos, la teoría de números, etc.

7. Observaciones finales

Aquí se entrecruzan varias ideas sobre el lenguaje universal. El álgebra de la lógica es un lenguaje universal en tanto presenta diferentes interpretaciones posibles en muy diferentes dominios (tal como Schröder lo expresa al comienzo del vol. II de sus *Lecciones*). Pero, a su vez, sólo el álgebra de relativos sirve como lenguaje universal, y Schröder la usa de un modo semejante al simbolismo de Peano (o, incluso, a la notación conceptual de Frege).

Según Volker Peckhaus, el álgebra y la lógica de relativos de Schröder representan el intento de convertir el programa del álgebra absoluta en un programa de fundamentos para todas las ciencias formalizables, aproximándose así al programa logicista de Frege (Peckhaus 1997, pp. 282-283). No obstante, debe tenerse en cuenta que Schröder no se ponía como objetivo principal la formalización de la matemática, sino que su álgebra de la lógica respondía más al ideal de matematizar la lógica, tomada ésta como una disciplina de aplicación universal.

Posteriormente, Leopold Löwenheim retomó este camino. En su célebre artículo de 1915 sobre la validez de fórmulas de primer orden en diferentes dominios, Löwenheim sigue la notación algebraica de Schröder para cuantificadores y conectivas, y la presentación del sistema del "cálculo de relativos" (que correspondería a la lógica de primer orden) se hace sin recurrir a axiomas o reglas de inferencia. Löwenheim adopta el cálculo de relaciones tal como Schröder lo había formulado en el vol. III de sus *Lecciones* (Schröder 1895). En su trabajo "Logic As Calculus and Logic As Language", van Heijenoort destaca la novedad de los resultados de Löwenheim: "con Schröder, él se toma la libertad de cambiar el universo de discurso a voluntad y de basar sus consideraciones en cambios semejantes" (van Heijenoort 1967a, p. 444), y así renueva contactos con la tradición de Schröder y Boole, opacada en aquel momento. Es a través de Löwenheim que esta tradición cumplió un papel fundamental en el desarrollo de la metamatemática.

Años más tarde, Löwenheim defendió las ventajas del cálculo de relaciones de Peirce y Schröder frente al sistema de Russell. Lamentaba que se hubiera abandonado la "armonía y belleza" de la matemática (Löwenheim 1940, p. 1) y, con ello, se hubiera limitado la investigación lógica: sus propios resultados habrían sido imposibles de expresar adecuadamente en el sistema de los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell, ya que, afirma, "signos inadecuados paralizan la productividad" (*loc. cit.*). El concepto de "conjunto de conjuntos" no es expresable en el lenguaje del cálculo de relaciones de Schröder. No obstante, es posible formalizar toda la matemática en él, asignando letras de individuos a clases y relaciones. En particular, ofrece una definición de número como propiedad de conjuntos (Löwenheim 1940, p. 5). Por lo demás, Löwenheim hace en su presentación algunas modificaciones en la simbología del cálculo aproximándola a la de los *Principia Mathematica* (los "coeficientes relacionales" – que corresponden a predicados – en mayúscula).

Nota

* Este trabajo forma parte del proyecto de cooperación argentino-alemana Antorchas/DAAD 14116-198.

Referencias

Krämer, Sybille (1992), "Symbolische Erkenntnis bei Leibniz", *Zeitschrift für philosophische Forschung*, 46, pp. 224-237.

Leibniz, Gottfried Wilhelm (GM), *Mathematische Schriften*, edición de Carl Immanuel Gerhardt, 7 vols. Berlín – Londres: Asher & Co. – Natt, 1849-1863. [Reimpr.: Hildesheim, Olms, 1962.]

Leibniz, Gottfried Wilhelm (GP), *Die philosophische Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, edición de Carl Immanuel Gerhardt, 7 vols. Berlín: Weidmann, 1875-1890. [Reimpr.: Hildesheim, Olms, 1961-1962.]

Leibniz, Gottfried Wilhelm (C), *Opuscules et fragments inédits*, edición de Louis Couturat. París: Alcan, 1903. [Reimpr.: Hildesheim, Olms, 1961.]

Löwenheim, Leopold (1940). "Einkleidung der Mathematik in schröderschen Relativkalkül", *Journal of Symbolic Logic*, 5, pp. 1-115.

Peckhaus, Volker (1994), "Wozu Algebra der Logik? Ernst Schröders Suche nach einer universalen Theorie der Verknüpfungen", en *Modern Logic*, 4, pp. 357-381.

Peckhaus, Volker (1997), *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenchaft*. Berlín: Akademie Verlag.

Schröder, Ernst (1873), *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*. Lepizig: B.G. Teubner.

Schröder, Ernst (1874), *Über die formalen Elemente der absoluten Algebra*. Stuttgart: Schweizerbart'sche Buchdruckerei.

Schröder, Ernst (1877), *Der Operationskreis der Logikkalkuls*. Leipzig: Teubner. [Reedición: Darmstadt, Wissenchaftliche Buchgesellschaft, 1966.]

Schröder, Ernst (1880), Reseña de *Begriffschrift* de Gottlob Frege, en *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, 25, pp. 81-94.

Schröder, Ernst (1890), *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)*, vol. I. Leipzig: Teubner.

Schröder, Ernst (1895), *Vorlesungen über die Algebra der Logik (exacte Logik)*, vol. III. Leipzig: Teubner.

Schröder, Ernst (1898), "Über Pasigraphie, ihren gegenwärtige Stand und die pasigraphische Bewegung in Italien", en *Verhandlungen der Ersten Internationales Mathematiker-Kongresses in Zürich vom 9. bis 11. August 1897*, comp. por Ferdinand Rudio. Leipzig: Teubner, pp. 147-162. [Reedición: Nendeln, Kraus, 1967.] [Trad. inglesa en *The Monist* 9 (1899), pp. 44-62, (corrigenda, p. 320).]

Trendelenburg, Friedrich Adolf (1867), "Ueber Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik", en *Historische Beiträge zur Philosophie*, Bd. 3: *Vermischte Abhandlungen* de F.A. T. Berlín: Bethge, pp. 1-47.

Van Heijenoort, Jean (1967), "Logic As Calculus And Logic As Language", en *Boston Studies in The Philosophy of Science*, comp. por R.S. Cohen y M. Wartofsky. Dordrecht, Reidel.