Espacios vectoriales y espacios de Lukasiewich

*José Eduardo Blazek**

Este trabajo puede considerarse como una extensión del que fuera presentado en las *X Jornadas de Epistemología e Historia de la Ciencia,* titulado "Una representación de los operadores de Lukasiewich sobre un espacio vectorial", en el cual se definen y explican una serie de conceptos matemáticos que son utilizados nuevamente.

El presente trabajo se divide en cuatro partes En la primera se explican brevemente los operadores de Lukasiewich de tres estados, y la posibilidad de construir con estos un espacio vectorial. En la segunda parte se construye efectivamente un espacio vectorial para las funciones de tres estados En la tercera parte definimos un Espacio a partir de los operadores de Lukasiewich. Y en la cuarta parte se estudia la generalización de los conceptos expuestos en el Espacio de Lukasiewich respecto de los Espacios Vectoriales.

Operadores de Lukasiewich

El sistema lógico planteado por Lukasiewich está basado en los operador implicación y negación clásicos a los cuales se les ha agregado un estado intermedio.

Para la descripción de ambos operadores se utiliza el conjunto de valores {0, ½, 1}, y quedan determinados en las Tabla 1 y Tabla 2.

El operador implicación puede calcularse como.

$$x \Rightarrow y \equiv Max\{1, 1 - x + y\}$$

TABLA 1: $x \Rightarrow y$

	0	½	1
0	1	1	1
½	½	1	1
1	0	½	1

Y el operador de negación que es involutivo debido a que $\neg(\neg x) = x$, puede calcularse como:

$$\neg x \equiv 1 - x$$

TABLA 2:

x	$\neg x$
0	1
½	½
1	0

* Universidad Nacional de San Luis.

Sin embargo son utilizados con mayor frecuencia los operadores llamados **t-norma** y **t-conorma**, estas pueden calcularse a partir de las siguientes relaciones y sus resultados pueden verse en las Tabla 3 y Tabla 4:

$$x \,\&\, y \equiv Max\{0, x+y-1\} \quad \text{(t-norma)}$$
$$x \oplus y \equiv \neg(\neg x \,\&\, \neg y) \quad \text{(dual)}$$
$$x \oplus y \equiv Min\{1, x+y\} \quad \text{(t-conorma)}$$

TABLA 3: t-norma

	0	½	1
0	0	0	0
½	0	0	½
1	0	½	1

TABLA 4: t-conorma

	0	½	1
0	0	½	1
½	½	1	1
1	1	1	1

Para que el tratamiento matemático de estos operadores resulte más simple, el conjunto de valores que se toma es {0, 1, 2}. Pudiendo pasar de un conjunto al otro utilizando la transformación lineal T: {0, ½, 1}$\rightarrow Z_3$, definida como T(x) = 2x, y su inversa $T^{-1}(x) = x/2$.

Por esto las tablas y las relaciones anteriores quedan de la siguiente forma.

TABLA 5: $x \Rightarrow y$

	0	1	2
0	2	2	2
1	1	2	2
2	0	1	2

TABLA 6:

x	$\neg x$
0	2
1	1
2	0

$$x \Rightarrow y \equiv Max\{2, 2-x+y\} \qquad \neg x \equiv 2-x$$

TABLA 7: t-norma

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	0	1
2	0	1	2

TABLA 8: t-conorma

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	2
2	2	2	2

$$x \,\&\, y \equiv Max\{0, x+y-2\} \qquad x \oplus y \equiv Min\{2, x+y\}$$

Espacio vectorial

Si tomamos las funciones $f : Z_3^n \rightarrow Z_3$ sobre el cuerpo Z_3 (conjunto de valores {0, 1, 2}), vemos que en forma análoga con lo que sucedía con Z_2 en la lógica clásica, describe un espacio vectorial.

Si nos remitimos al espacio vectorial más simple que podemos construir, o sea el espacio de las funciones $f: Z_3 \to Z_3$ sobre Z_3 vemos que las posibles funciones que allí aparecen son:

TABLA 9:

x	$f(x)$
0	a
1	b
2	c

Donde $a, b, c \in Z_3$, esto nos dice que tenemos 3^3=27 funciones distintas.

Las operaciones que utilizamos son las básicas + y * sobre Z_3, para ello debemos considerar los siguientes resultados:

a. $p + p + p \equiv 3*p \equiv 0$
b. $p * p * p \equiv p^3 \equiv p$
c. $p * p \equiv p^2 \equiv 0$ sii $p \equiv 0$ sino $p^2 \equiv 1$

De acuerdo con estos resultados se construyen las Tablas 10 y 11:

TABLA 10: x + y

	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

TABLA 11: x * y

	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

De esta manera solo hacen falta tres funciones básicas para que a partir de éstas y de las operaciones podamos construir todas las demás.

Al conjunto de estas funciones básicas, se lo llama Base del espacio. Una base de este espacio se puede ver en la Tabla 12.

TABLA 12: Base

	$v_0(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$
0	1	0	0
1	0	1	0
2	0	0	1

Estas funciones pueden calcularse a través de la siguiente fórmula:

$$v_i(x) = 2*(x+2*i)^2 + 1$$

Así una función cualquiera del espacio queda escrita:

$$f(x) = av_0(x) + bv_1(x) + cv_2(x)$$

Si queremos extender este concepto a las variable solo hace falta definir la base de esos espacios a partir de la definición anterior:

$$v_k(x,y)=v_i(x)*v_j(y)$$

donde k=i+3j. O con más variables:

$$v_k(x_0,\dots,x_n)=v_{i_0}(x_0)*\dots*v_{i_n}(x_n)$$

donde $k=i_0+3i_1+\dots+3^n i_n$

Espacio de Lukasiewich

Como el intentar construir un espacio vectorial con los operadores de Lukasiewich t-norma y t-conorma resulta imposible, estudiamos el espacio siguiente

Definimos a continuación un conjunto de funciones $f:Z_3\to Z_3$ sobre Z_3, generado por la base del espacio {$w_0(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$} redefiniendo las descriptas en la Tabla 12 (ver Tabla 13), pero utilizando los operadores de Lukasiewich t-conorma y t-norma en vez de los usuales + y * respectivamente. A este conjunto lo llamamos *Espacio de Lukasiewich*

TABLA 13: Base

	$w_0(x)$	$w_1(x)$	$w_2(x)$
0	2	0	0
1	0	2	0
2	0	0	2

Estas funciones pueden calcularse a través de la siguiente fórmula:

$$w_i(x)=(x+2*i)^2+2$$

Con esta base y los operadores de Lukasiewich la función de la Tabla 9 se escribe como:

$$f(x)=a\,\&\,w_0(x)\oplus b\,\&\,w_1(x)\oplus c\,\&\,w_2(x)$$

Esto es debido a que $a\oplus 0=a$ y $a\,\&\,2=a$, de forma que si no eligiéramos esta base no podríamos representar todas las funciones. Esto muestra que no es verdaderamente un espacio vectorial ya que solo posee un conjunto de vectores.

No cumple la propiedad que dice que si multiplicamos cada vector de una base por un número distinto de cero obtenemos otra base.

De la misma forma que antes, si queremos extender este concepto a las variable solo hace falta definir la base de esos espacios a partir de la definición anterior:

$$w_k(x,y)=w_i(x)\,\&\,w_j(y)$$

donde k=i+3j. O con más variables.

$$w_k(x_0,\dots,x_n)=w_{i_0}(x_0)\,\&\dots\&\,w_{i_n}(x_n)$$

donde $k=i_0+3i_1+\dots+3^n i_n$

Teorema

Espacios Vectoriales Débiles

Definición: Sea un conjunto **K** provisto de dos operaciones una $\oplus$ y $\otimes$, sean n_0 y n_1 sus neutros respectivamente, y sea **E** = $\mathbf{K}^n$ el producto cartesiano n-ésimo de **K**. Diremos que **E** es un *espacio vectorial débil sobre K* si $n_0 \neq n_1$, ambos son neutros para todos los elementos de K y que $k\otimes n_0 = n_0 \; \forall k \in K$

Teorema

Sea **E** = $\mathbf{K}^n$ un espacio vectorial débil sobre **K**, entonces existe un conjunto de *n* elementos de **E** que puede representar a todos los elementos **E** como combinación de las operaciones $\oplus$ y $\otimes$. A este conjunto lo llamaremos *Base Débil*.

Dem.

Sea $B = \{v_i\}_{1 \le i \le n}$, con $v_i \in E \; \forall i$ y construido de la siguiente forma.

$$v_i = (v_i^1, \ldots, v_i^n) = \begin{cases} v_i^j = n_0 \text{ si } i \neq j \\ v_i^j = n_1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

De esta forma cualquier elemento de **E** queda escrito.

$x \in E \Leftrightarrow x = (x_1, \ldots, x_n)$ con $x_i \in K \; \forall i$ si definimos la suma sobre elementos de **E** y el producto de elementos de **K** sobre elementos de **E** como las operaciones extendida al producto cartesiano habituales se obtiene:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) = (x_1 \otimes n_1 \oplus x_2 \otimes n_0 \oplus \ldots \oplus x_n \otimes n_0, \ldots, x_1 \otimes n_0 \oplus x_2 \otimes n_0 \oplus \ldots \oplus x_n \otimes n_1) =$$

$$(x_1 \otimes n_1, x_1 \otimes n_0 \ldots, x_1 \otimes n_0) \oplus (x_2 \otimes n_0, x_2 \otimes n_1 \ldots, x_2 \otimes n_0) \oplus \ldots \oplus (x_n \otimes n_0, x_n \otimes n_0 \ldots, x_n \otimes n_1) =$$

$$x_1 \otimes (n_1, n_0, \ldots, n_0) \oplus x_2 \otimes (n_0, n_1 \ldots, n_0) \oplus \ldots \oplus x_n \otimes (n_0, n_0 \ldots, n_1) =$$

$$x_1 \otimes v_1 \oplus x_2 \otimes v_2 \oplus \ldots \oplus x_n \otimes v_n = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \otimes v_i$$

$$x = \bigoplus_{i=1}^{n} x_i \otimes v_i$$

Conclusión

Al igual que en el trabajo anterior, mediante este procedimiento se introduce las funciones del cálculo proposicional de tres estados y los operadores de Lukasiewich en una estructura matemática de amplios alcances. De ninguna manera se obtiene la expresión mínima de la función en cuestión, sino una forma de escribirlas a partir de funciones y operaciones básicas.

Además, ya conociendo la imposibilidad de construir un espacio vectorial a partir de los operadores de Lukasiewich (t-norma y t-conorma), hemos extendido la definición de *Espacios Vectoriales* a la de *Espacios Vectoriales Débiles* para que de todas formas podamos escribir cualquier función a través de estos operadores.