Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza

Fa.M.A.F – U.N.C

INFORME FINAL

Título: UNA EXPERIENCIA DE ENSEÑANZA DE LA LOGARITMACIÓN EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Autores: Barrionuevo Brenda y Langhoff Alexis
Profesor supervisor de MOPE: Gerez Cuevas José Nicolás

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 19-11-2015

Clasificación:

97 Mathematical Education

Palabras Claves:

Logaritmo – Problemas – Resolución de problemas – Problemática - Comprensión – Planificación y exploración – Errores

Resumen:

El presente informe describe la experiencia de práctica profesional realizada por dos estudiantes de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF), en dos divisiones de quinto año de un colegio bilingüe-bicultural de la ciudad de Córdoba. El tema desarrollado en las prácticas es "Logaritmación" y constó de dos partes. La primera, que incluye la introducción al tema con la "Leyenda del tablero de ajedrez", tuvo como eje central la resolución de problemas matemáticos. En la segunda parte se estudiaron las propiedades del logaritmo y una introducción a las ecuaciones logarítmicas.

Por último, considerando diferentes perspectivas teóricas, se reflexiona sobre una problemática asociada al desarrollo de las prácticas, la cual se titula: *dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas: una experiencia de estudio del objeto logaritmo en quinto año del nivel secundario.*

Abstract

The present report describes the experience of professional training made by two students from Mathematics, Astronomy and Physics University (FaMAF), in two sections of a fifth grade in a bilingual-bicultural secondary school in the city of Córdoba. The topic developed in the training is "Logarithm" and it consisted of two parts. The first includes introduction to the topic with the "legend of the chess board", it had as a main issue the mathematic problems-solving. The properties of the logarithm and an introduction to the logarithmic equations were studied in the second part.

Finally, considering different theoretical perspectives, it reflects about problems associated with the development of training, which is entitled: *difficulties of students in problem solving: a study experience of the object logarithm in fifth year of high school.*

Agradecemos:

Al equipo de docentes de Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE), por el acompañamiento y la contención durante el trayecto de nuestras prácticas, por brindarnos las herramientas que nos acompañarán en nuestra vida profesional, y por sobre todas las cosas, por recordarnos siempre que, antes que ser "buenos profesores", debemos ser "buenas personas".

Al profesor tutor de las divisiones A y B de quinto año donde realizamos nuestras prácticas, por la generosidad y el afecto que nos brindó siempre.

A quienes fueron nuestros primeros alumnos, por la buena predisposición que tuvieron y por el trabajo realizado en clase.

A nuestros compañeros de MOPE, por su solidaridad y por compartir con nosotros los buenos y malos momentos.

A nuestras familias, por su apoyo incondicional a lo largo de toda nuestra carrera, principalmente en esta etapa final, por querernos y cuidarnos siempre.

Cuando uno puede darse cuenta del placer de dudar, de pensar, de frustrarse con un problema y que eso no va en desmedro de la persona, entonces empieza a aprender.

Adrián Paenza

ÍNDICE

PREFACIO

El siguiente informe tiene el objetivo de comunicar la experiencia desarrollada en nuestras prácticas docentes y analizarla a través del estudio de una problemática definida a partir de ella, como así también rescatar todos aquellos aportes que pueden ser de utilidad para otros docentes o futuros docentes, recuperando y compartiendo nuestras experiencias vividas y reflexiones personales.

Las prácticas fueron realizadas en dos divisiones de quinto año de un colegio bilingüe bicultural de la ciudad de Córdoba, en el marco de la materia Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE) correspondiente al último año del Profesorado de Matemática de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) de la Universidad Nacional de Córdoba (UNC).

Este trabajo se estructura en 4 secciones. La introducción presenta una descripción general de la institución, su infraestructura y las dinámicas sociales que se establecen en el contexto escolar. Además se realiza una descripción del trabajo que se realiza en la clase de matemática dictada por el profesor responsable de los cursos donde realizamos nuestras prácticas, como así también características muy generales del trabajo que realizan estos mismos alumnos en otras materias. Esta información se obtuvo de las observaciones que realizamos en una instancia previa al inicio de las prácticas.

La segunda sección detalla las actividades llevadas a cabo en el marco de las prácticas, su planificación, implementación y modificación en función de los emergentes, como así también el tipo de evaluación que se implementó.

En una tercera sección, se analiza un aspecto particular de las prácticas que delimitamos como una problemática relevante. La misma está centrada en las dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas, y es estudiada a partir de distintos aportes teóricos sobre el tema.

Por último, en la cuarta sección, se realizan las reflexiones finales en torno a la problemática abordada en la sección 3, y también una breve reflexión sobre nuestras prácticas en general.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Caracterización de la institución

La institución donde realizamos nuestras prácticas es una escuela paritaria italo argentina bilingüe bicultural. El hecho de ser una escuela paritaria significa que, además de cumplir con todas las exigencias del Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba, la escuela presenta una oferta formativa integral que responde a los requerimientos del sistema educativo italiano. Los alumnos "paritarios", a diferencia de los "no paritarios", rinden dos exámenes, uno al finalizar segundo año y otro al finalizar sexto año. Según el desempeño en los mismos, se les otorga el titulo avalado por la Unión Europea. Más allá de esta distinción, a todos se les ofrece una formación bilingüe y bicultural, que incorpora una perspectiva europea.

La escuela dispone de una página web, donde plasma sus objetivos institucionales: "*brindar al estudiante una formación cultural amplia, una sensibilidad inter-cultural, una visión del mundo integral y articulado que se explicita a través de un proceso creativo, atendiendo al desarrollo de una personalidad crítica y consciente, integrada armónicamente en la realidad social. Esta meta puede ser alcanzada solamente si el estudiante «está bien en la escuela» y si es guiado en todas las dimensiones del propio crecimiento cognitivo, operativo y relacional.*

Por lo tanto la Institución:

- *Ofrece una formación bilingüe y bicultural que incorpora una perspectiva europea dirigida a ampliar las experiencias formativas de los alumnos y a predisponerlos hacia nuevas oportunidades;*
- *Tiende a promover las potencialidades individuales de cada estudiante, a través de una instrucción polivalente, armónica y atenta a las interconexiones entre los distintos idiomas y culturas;*
- *Tiene como objetivo prioritario la promoción de la lengua y de la cultura italianas dentro de la comunidad argentina, permitiendo al mismo tiempo, a los estudiantes de origen italiano, el redescubrimiento y la recuperación de las propias raíces lingüístico-culturales;*
- *Promueve el respeto recíproco, la comprensión de los propios derechos y los de los demás, el constante interés por el estudio y la capacidad de pensar de manera crítica y creativa.*

El proyecto bilingüe y bicultural se propone también, a través de la ampliación de la oferta formativa, a:

- *Constituirse en un centro de cultura y educación capaz de fusionar e integrar los dos sistemas escolares, italiano y argentino, de manera armónica;*
- *Proveer una sólida cultura de base que, partiendo de la interiorización de las habilidades adquiridas, se centre en la capacidad de actuar y profundizar nuevas informaciones con el ambiente que lo circunda;*
- *Estimular la toma de conciencia de la realidad y el aprovechamiento adecuado del patrimonio cultural y ambiental, con especial referencia a la Argentina e Italia."*

La institución cuenta con nivel inicial, primario y secundario, y ofrece a sus estudiantes tres alternativas para el Ciclo Orientado: "Economía y gestión de las organizaciones", "Turismo y hotelería" e "Idioma" (Liceo Lingüístico).

La equivalencia entre los años del secundario argentino en Córdoba y el secundario italiano es la siguiente:

Secundario Argentino	Scuola Sec. di I e II grado
1er año	2a Media
2° año	3a Media
3° año	1° Liceo
4° año	2° Liceo
5° año	3° liceo
6° año	4° liceo

Figura 1: cuadro comparativo

En la página web del colegio (sección "institucional – nuestro edificio – aspectos generales") podemos encontrar los recursos materiales y los criterios para su utilización.

Recursos materiales internos y externos de la escuela

A- Recursos internos: Estructura y servicio.

En el interior de la institución escolar funcionan:

- *2 laboratorios de informática.*
- *Biblioteca.*
- *Laboratorio de Ciencias.*
- *Comedor y cocina.*
- *Portería (incluye vigilancia las 24 hs).*
- *Gimnasio cubierto con piso de parquet.*
- *2 S.U.M. (1 equipado para sala de video multimedia).*
- *Campo de deportes.*
- *Librería*
- *Sala de Artes plásticas*
- *Venta de uniformes escolares*

B- Criterios y modalidad de utilización de los recursos, de los espacios y de los laboratorios.

Criterios:

- *Máximo aprovechamiento.*
- *Asistencia.*
- *Guía.*

Modalidad:

- *Designación de docentes y colaboradores responsables*
- *Programación horaria para las clases*
- *Confección de reglas para su correcto uso*

1.2 Información de los cursos y recursos disponibles

Las prácticas se realizaron en 5° A y 5° B, a cargo de un mismo docente de la institución. 5° A cuenta con 28 alumnos (13 mujeres y 15 varones, de los cuales uno de ellos es alumno de intercambio de nacionalidad española) y 5° B cuenta con 30 alumnos (15 mujeres y 15 varones). La división "A" tenía como practicante a Brenda Barrionuevo y la división "B" a Alexis Langhoff.

El horario de ingreso del nivel secundario es a las 7:30 hs, concluyendo la jornada escolar a las 15:55 hs. Dos veces a la semana los alumnos proceden a realizar una formación para presenciar el izamiento de la bandera y para ser informados sobre distintas situaciones institucionales.

Cada quinto año contaba con una carga horaria de seis módulos de clase de 75 minutos cada uno, con tres recreos: un primer recreo de 10 minutos, un segundo recreo de 15 minutos y un tercer recreo de una hora de duración, en el cual los alumnos, en su gran mayoría, destinan para almorzar. Los módulos de matemática se encuentran distribuidos como se puede observar en la figura 2:

HORA	HORARIO	LUNES	MARTES	MIÉRCOLES	JUEVES	VIERNES
1	7:30 – 8:10		5° A	5° B		5° A
2	8:10 – 8:45		5° A	5° B		5° A
RECREO						
3	8:55 – 9:35		5° B			
4	9:35 –10:10		5° B			
RECREO						

Figura 2: Horarios

Dentro de los primeros 15 minutos posteriores al ingreso, los preceptores controlan la asistencia de los alumnos en las aulas de cada curso. Si el profesor se demora en llegar al aula, los alumnos permanecen tranquilos esperándolo (algunos suelen sentarse en el pasillo en este lapso de tiempo), y en muchos casos el preceptor llega antes y les pide acomodarse en los bancos para controlar la asistencia. Cuando esto no ocurre, el preceptor interrumpe la clase cuando esta ya ha sido iniciada y procede a “tomar lista”.

Si bien estos estudiantes, en su gran mayoría, no poseen problemas de inasistencia, es muy común que algunos alumnos realicen viajes por motivos personales (competencias con clubes deportivos, intercambio, etc.), lo cual hace que se ausenten por un buen período de tiempo, que según el motivo del viaje puede variar entre un par de días y a veces hasta 6 meses o un año (cuando se trata de intercambio). En este último caso, tanto los directivos como la institución son informados con anterioridad sobre estos viajes y en conjunto con el alumno y su familia se busca la forma de organizar y acordar como se desarrollará el ciclo lectivo del estudiante. En el caso particular de las clases de matemática que observamos, cuando el alumno se ausentaba solo por algunos días, el profesor tutor no tomaba ninguna medida en particular, salvo cuando esta ausencia coincidía con la fecha de alguna evaluación, donde se acordaba realizarla antes o después del viaje. En nuestras prácticas una alumna de 5° A nos solicitó realizar la evaluación con una semana de anterioridad porque debía realizar un viaje personal, a lo cual accedimos. A su vez otra alumna del mismo curso asistió las dos primeras clases y también como motivo de un viaje volvió a asistir recién a la evaluación. Mientras que en 5° B un alumno se ausentó casi todas las clases por el mismo motivo.

Queremos destacar como algo que nos resultó llamativo el hecho de que es muy normal en la escuela que los alumnos salgan de una clase (autorizados por el docente) para realizar una evaluación con otro docente que está dictando clases en otro curso. En el transcurso de nuestras prácticas tuvimos la presencia de dos alumnos de años menores que realizaron una evaluación en el 5°B mientras dictábamos la clase. Previamente el profesor tutor (quien además tiene horas cátedras de física en la institución) nos solicitó autorización para esto, informándonos que era una práctica habitual en la escuela.

Además de los viajes personales que realizan algunos alumnos, queremos mencionar que la institución desarrolla a lo largo del ciclo lectivo distintas actividades escolares y extra escolares (talleres, simposios, congresos, visitas a lugares específicos como complemento del trabajo realizado en algunas materias, actividades deportivas, etc.), que afectan a todo el curso (inclusive a veces a todo el alumnado de la escuela). Esto repercute no solo en la planificación anual de los docentes (al inicio del ciclo lectivo ya se les informa sobre algunos viajes escolares que se van a realizar) sino también en la planificación semanal, ya que no siempre estas actividades son informadas con la suficiente antelación.

En nuestras prácticas tuvimos distintas situaciones como las recién mencionadas. En una de ellas se nos avisó un martes que al día siguiente los alumnos no iban a concurrir a clase porque tenían una visita a una exposición de carreras universitarias. También sucedió que al iniciar una clase nos enteramos que casi la mitad del curso se debía retirar a la mitad del módulo para realizar una actividad con los alumnos del nivel inicial. Ante esta situación le transmitimos nuestra inquietud al profesor tutor, quien habló con la directora para que finalmente se retiraran del aula faltando 15 minutos para finalizar la clase. En un tercera instancia fuimos avisados con una semana de anticipación que los alumnos del 5° A no asistirían a clase, pues realizarían actividades compartidas con estudiantes de otra institución, relacionadas con su orientación "Economía y gestión de las organizaciones". Esto repercutió en el desarrollo de nuestras prácticas en varios aspectos: por un lado sucedió que no siempre pudimos dar dos clases por semana, lo cual implicó destinar más tiempo en algunas clases a tratar de "retomar el tema", pues hacía 7 días que los alumnos no tenían matemática. Por otro lado, al postergarse la finalización de nuestras prácticas casi dos semanas, sucedió que la fecha de la evaluación coincidió casi con el cierre del trimestre, donde a los alumnos se le juntan las evaluaciones de todas las materias en un período de 10 días. Si bien esto es normal que ocurra en esta institución, no deja de ser una situación de estrés para los alumnos, que a su vez repercute en el desarrollo de la clase. En nuestro caso particular se pudo visualizar en el incumplimiento de algunas tareas, y más aún, cuando tenían alguna evaluación en el módulo siguiente a la clase de matemática, era casi inevitable que antes de finalizar la clase algunos alumnos saquen la carpeta de otra materia para "repasar". Incluso los mismos alumnos en alguna ocasión pidieron poder repasar, a lo cual decidimos no acceder.

Nos parece importante destacar que en nuestras observaciones pudimos ver que los estudiantes, casi como una práctica habitual cuando tenían evaluaciones o algún tipo de presentación, estudiaban para las mismas en las clases de los módulos anteriores. En el caso del profesor tutor, lo que hacía era "acordar" con los alumnos que les daría los últimos 15 minutos de clase para "repasar", con la condición de que aprovecharan bien el resto del tiempo para trabajar con las actividades propuestas (si la clase ya había comenzado 20 minutos tarde como ocurría en la mayoría de los casos, la misma tenía una duración de tan solo 40 minutos). El resto de los profesores no optaban por esta modalidad. Algunos les llamaban fuertemente la atención a los alumnos cuando veían que estaban haciendo cosas de otra materia, y otros, casi con resignación, no tomaban ningún tipo de decisión cuando veían que esto sucedía.

En cuanto al cumplimiento con la normativa escolar sobre el uso del uniforme (unisex: pantalón jogging azul, remera institucional, buzo o campera gris; jumper azul institucional para las mujeres), todos los alumnos se visten acorde a los requerimientos de la institución.

En la escuela está permitido que los alumnos posean celulares, pero dentro del aula está prohibido su uso, salvo que el docente decida que se utilice para realizar alguna actividad específica. En muchas materias se lo utilizaba para tener acceso a internet cuando la conexión de las notebooks fallaba. De esta manera, como pudimos observar en la asignatura "Literatura" por ejemplo, se accedía a archivos que se encontraban en la web para poder trabajar con ellos. En el caso de matemática y algunas materias de administración, los alumnos lo utilizaban como calculadora (nosotros también permitimos que se le diera ese uso).

Las aulas donde se trabajó se encuentran ubicadas en el segundo piso, donde se encuentra la gran mayoría de las aulas que corresponden al nivel secundario (en el primer piso se encuentra el nivel primario, mientras que el nivel inicial se encuentra ubicado en un sector de la planta baja, donde también hay algunas aulas que pertenecen al secundario).

Las aulas se encuentran en muy buen estado, son amplias y luminosas, con sistema de calefacción central, ventiladores, sistema de audio, acceso a la red de internet y toma corrientes en dos de las cuatro paredes del aula.

La ubicación de los alumnos en el aula no es fija, aunque la mayoría mantiene diariamente un mismo lugar en todas las asignaturas. Se distribuyen en tres columnas, dejando dos pasillos para circular. Los bancos son simples, sin embargo se sientan formando filas de a dos.

En lo referente a los materiales didácticos necesarios para desempeñar la tarea áulica, el colegio dispone de pizarras de acrílico forrado y borradores para fibras. Cada docente debe llevar sus propios marcadores a su clase pero la institución se encarga de recargarlos con tinta.

En la institución funciona el "aula móvil": un armario con ruedas donde están guardadas aproximadamente 20 notebook, la cual se ilustra en la figura 3.

Figura 3: aula móvil

Esto implica que se cuenta con una disponibilidad por curso de una computadora como mínimo cada dos alumnos. Además, se cuenta con un cañón de proyección. Los profesores que quieran hacer uso de alguno de estos recursos, tienen que pedirlo con anterioridad al encargado de los laboratorios para así reservarlo, ya que son muy utilizados por la gran mayoría de los docentes y sin reserva es complicado acceder.

En todas las materias, cada docente completa el libro de temas en el cual debe constar: el día de la semana, la fecha, el mes, el número de clase, el número de unidad, el tema de la clase del día, las actividades que se desarrollan y la firma del docente. También hay un espacio correspondiente a observaciones y otro para la firma de la autoridad que supervisó la clase, en caso que hubiese habido alguna.

La limpieza está cuidadosamente lograda a través de la ubicación estratégica de numerosos cestos y gracias a una empresa privada que se encarga de mantenerla.

En general, los alumnos tienen buena disciplina y son respetuosos, y en la heterogeneidad de ambos cursos conviven variadas personalidades: tímidos, participativos, verborrágicos, etc. A pesar de ello podemos destacar como característica común a los dos cursos el hecho de que los alumnos hablan mucho entre ellos, inclusive en situaciones donde es necesario hacer silencio, como por ejemplo cuando algún alumno está contando algo para el resto del curso, ya sea desde el banco o estando al frente en la pizarra. Esto llevó a que en reiteradas ocasiones interrumpiéramos la clase para pedir silencio, principalmente en el quinto “B”.

Pudimos percibir en nuestras prácticas que la relación entre los alumnos es de cierta camaradería, algo que ya nos había anticipado el profesor tutor en las observaciones (en general los profesores se referían a estos alumnos caracterizándolos como “cariñosos” pero muy “charlatanes”). Su experiencia escolar no transcurre solamente en las aulas, sino que la escuela propone todos los años distintos viajes académicos, convivencias, competencias deportivas, etc. Muchos alumnos pasan largas horas en la escuela realizando distintas actividades. La relación que mantienen con el preceptor también es de mucha confianza, pero siempre manteniendo el respeto mutuo. Asimismo, tanto desde los directivos como del cuerpo docente se trata de que los alumnos se sientan dentro de una “gran familia”, como ellos mismos lo expresan, con lo cual hay una gran preocupación por el estado emocional y afectivo de los mismos.

También es importante destacar que la relación entre los docentes y directivos es de constante diálogo. Durante los recreos se reúnen en la sala de profesores, intercambian experiencias de clases, inquietudes, consultas, y también discuten de temas sindicales, mientras comparten café.

En general tanto, tanto el ambiente físico como el humano, nos parecieron muy gratos y propicios a la hora de efectuar la tarea docente.

1.3 La clase de matemática

El docente de matemática a cargo de los cursos donde realizamos las prácticas es profesor de matemáticas y profesor de física (ya había tenido estos cursos en cuarto año en la asignatura “Física”, y los volverá a tener en esa materia en sexto año en caso de seguir siendo el responsable de dictarla, como así también “Matemática”). La relación que mantiene con los alumnos es de mucha confianza y respeto mutuo.

Las clases de matemática observadas presentan siempre la misma estructura. Para cada tema hay una introducción teórica que es desarrollada por el profesor de manera expositiva en la pizarra. Esta parte teórica es acompañada de ejemplos y posteriormente propone ejercicios para que resuelvan los alumnos.

Tanto el teórico, como los ejemplos y las actividades, el profesor las extraía de la bibliografía propuesta en el programa de la materia. En el caso de la unidad de "Función cuadrática" utilizó el libro "MATEMÁTICA I Polimodal" (Kaczor, P y otros. 1999. Buenos Aires, Argentina. Editorial Santillana). Los alumnos contaban con un juego de fotocopias donde estaba todo este material.

A continuación presentamos una secuencia de uno de los temas que observamos (correspondiente a la unidad 2 del programa de la materia: "Función cuadrática"), en este caso "fórmula resolvente", tal cual lo presentó el docente tutor.

Parte teórica:

Formula resolvente de la ecuación de 2° grado

Dada $ax^2 + bx + c$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El contenido del cuadro anterior fue escrito por el docente tutor en la pizarra, mientras que en el juego de fotocopias que tenían los alumnos (extraído de la bibliografía ya mencionada) figuraba lo siguiente:

Fórmula resolvente

Las soluciones $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ de una ecuación de la forma $\boldsymbol{a}\mathbf{x}^2 + \boldsymbol{b}\mathbf{x} + \boldsymbol{c} = \mathbf{0}$ (con $a \neq 0$) pueden obtenerse reemplazando los coeficientes $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ en las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c}}{2 \,.\, a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c}}{2 \,.\, a}$$

Para abreviar, las reunimos en una sola fórmula:

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \,.\, a \,.\, c}}{2 \,.\, a}$$

Figura 4: introducción a la fórmula resolvente extraído de la bibliografía

Observaciones: como en esta fórmula hay una raíz cuadrada, si el *radicando* es negativo diremos que la ecuación que intentamos resolver *no tiene solución en el conjunto de los números reales.*

Si la ecuación es cuadrática, pero no tiene la forma $ax^2 + bx + c = 0$, resolvemos todas las operaciones indicadas para reducirla a esa forma.

Figura 5: observaciones sobre la fórmula de la figura 4

Luego de haber escrito la fórmula resolvente el profesor aclaró que la misma se puede demostrar, pero que dicha demostración no la realizarían. Muchos alumnos plantearon que no entendían lo que estaba escrito en la pizarra, haciendo hincapié principalmente en la notación "x_1,x_2". El profesor aclaró que se deberían aprender la fórmula de memoria, y procedió a dar dos ejemplos.

Ejemplo1: Resolvamos la ecuación $3x^2 - 2x - 1 = 0$ aplicando la fórmula resolvente.

- Identificamos los coeficientes $\longrightarrow$ $a = \ldots\ldots \quad b = \ldots\ldots \quad c = \ldots\ldots$
- Reemplazamos en la fórmula $\longrightarrow$ $x_1, x_2 = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}{\ldots\ldots}$
- Operamos $\longrightarrow$ $x_1, x_2 = \dfrac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots}}{6} = \dfrac{\ldots\ldots \pm \sqrt{\ldots\ldots\ldots}}{6} = \dfrac{2 \pm 4}{6}$
- **Atención con este paso:** el símbolo ± indica que una de las soluciones se obtiene usando el +, y la otra, usando el –, así:

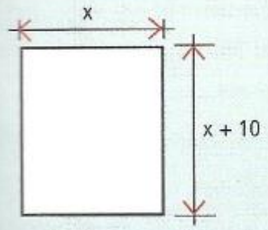
$$x_1, x_2 = \frac{2 \pm 4}{6} \quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{6} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \Rightarrow x_1 = \ldots\ldots \\[2ex] x_2 = \dfrac{2-4}{6} = \dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \Rightarrow x_2 = \ldots\ldots \end{cases}$$

Figura 6: ejemplo desarrollado por el profesor tutor en clase

Si bien tanto este ejemplo como el que se mostrará a continuación son extraídos de la bibliografía, el profesor tutor los desarrolló de manera muy similar en la pizarra, siguiendo el orden y la secuencia del libro.

El ejemplo 1 lo resolvió en conjunto con los alumnos, a los cuales les iba realizando preguntas como: “¿quiénes son los coeficientes?”, “¿cómo queda escrita la fórmula resolvente”?, “¿cómo se obtienen los dos resultados?”.

Ejemplo 2: Un diagramador está definiendo las dimensiones que tendrá una revista. Necesita que el largo sea 10 cm mayor que el ancho y que la superficie de cada página resulte de 600 cm^2. ¿Cuáles son las medidas que cumplen ambas condiciones?



- Planteamos la ecuación → $x(x + 10) =$ ......
- Aplicamos la propiedad distributiva → .... = ...
- Pasamos 600 al primer miembro → .... = 0
- Identificamos los coeficientes → $a =$ ...... $b =$ ...... $c =$ ......

- Aplicamos la fórmula resolvente y calculamos:

$$x_1, x_2 = \frac{\text{.........} \pm \text{.........................}}{\text{..............}} = \text{..}$$

- Como soluciones de la ecuación obtuvimos $\mathbf{x_1} =$ ...... y $\mathbf{x_2} =$ .... Descartamos ...... porque no tiene sentido en este problema y concluimos que la revista tendrá .... cm de largo y .... cm de ancho.

Figura 7: ejemplo desarrollado por el profesor tutor en clase

Para el ejemplo de la figura 7, luego de escribir el enunciado, dio 2 o 3 minutos para que lo pensaran y nuevamente empezó a efectuar preguntas al frente para resolverlo entre todos: “¿qué tipo de planteo podemos efectuar?” , “¿cómo utilizamos la fórmula resolvente para resolver lo planteado?”, “¿cuál de las dos respuestas tiene sentido?”. Cuando la respuesta de algún alumno era correcta automáticamente se procedía con el desarrollo de la actividad, y en caso de que no lo fuera el profesor preguntaba si alguien más tenía otro tipo de respuesta. Cuando ésta se hacía presente continuaba el desarrollo. Esta modalidad era la que prevalecía en todas las clases.

En general los estudiantes se mostraban muy participativos en esta instancia, sin miedo a preguntar ni a equivocarse.

Al finalizar el ejemplo 1 el profesor graficó la parábola en un sector de la pizarra y preguntó si observaban alguna relación entre las raíces y la coordenada “x” del vértice. Ante la respuesta “está justo a la mitad” de un alumno, generalizó lo siguiente:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

A continuación propuso las siguientes actividades:

10- Resuelvan las siguientes ecuaciones cuadráticas:

a) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ b) $3x - x^2 = 0$

c) $x^2 = 0{,}01$ d) $x - \frac{1}{2}x^2 = x^2 + 2$

e) $(x - 1)(x + 3) = -\frac{1}{2}x$ f) $-x^2 - x = 5 - \frac{(x+1)}{2}$

Figura 8: ejercicios propuestos por el docente

La realización de los ejercicios se lleva a cabo de forma individual, pero los alumnos se controlan entre sí los resultados obtenidos, por lo general con el compañero de banco o alguno cercano en cuanto a la ubicación en el aula. Al cabo de unos minutos (no más de 10) el profesor pregunta los resultados de los tres primeros y los escribe en la pizarra para que todos "controlen el resultado". Luego se dio como tarea lo siguiente:

11- Hallen los números reales que verifican que:
a) el doble de su cuadrado más la mitad de su triple es igual a 0.
b) el cuadrado de su consecutivo es igual a la diferencia entre su doble y -10.

12- Pedro, de 52 años, tiene un nieto de 2 años. ¿Después de cuántos años la razón entre la edad del abuelo y la del nieto será igual a las tres cuartas partes del tiempo transcurrido para que eso suceda?

13. Hallen las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su altura es 3 cm mayor que su base y que su superficie es de 70 cm^2.

14. Las medidas en centímetros de la hipotenusa y del cateto mayor de un triángulo rectángulo son números naturales consecutivos. Al cateto menor le faltan 7 cm para igualar al mayor. ¿Cuánto miden los tres lados?

15. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $\sqrt{41}$ cm y uno de los catetos mide 4 cm. ¿En cuánto hay que aumentar la medida de la longitud de los catetos para que la superficie del triángulo aumente en 200 cm^2?

Figura 9: tarea extraescolar propuesta por el docente.

Nos pareció importante describir esta secuencia para mostrar el tipo de trabajo que se realizaba en el aula, ya que tuvo gran influencia en nuestra posterior planificación.

Se puede observar que los ejercicios en su gran mayoría se ubican en un paradigma del ejercicio en un contexto de "matemáticas puras" (Skovmose, 2000); solo una minoría se ubica en el mismo paradigma del ejercicio en un contexto de semirrealidad (los cuáles no se resolvieron en la clase, sino que se dieron como tarea).

En general el profesor siempre considera las preguntas efectuadas por los alumnos, y en primera instancia trata de que se respondan entre ellos; luego interviene para realizar las correcciones pertinentes si son necesarias. No hay períodos demasiado largos de reflexión sobre lo que se está haciendo, se trata siempre de avanzar bastante rápido con la clase. Gran parte de los alumnos no realizan ningún tipo de registro en sus carpetas, salvo algunas anotaciones puntuales.

En las clases observadas se puso mucho énfasis en el análisis de gráficos, lo cual conlleva a que a veces se pierda demasiado tiempo graficando. Cabe destacar que no se utiliza la computadora como recurso.

Si bien se fomentan los debates por parte del profesor, nada de lo que se debate queda registrado, ni en la pizarra ni en las carpetas de los alumnos.

En cuanto a los instrumentos de acreditación podemos decir que hay 2 exámenes por trimestre (como mínimo), uno de ellos transcurrido la mitad de este período y otro, al final. También se le da mucha importancia al compromiso y a la responsabilidad, tanto en las actividades propuestas dentro del aula como las extra-escolares.

1.4 Comentarios relacionados a los alumnos y sus actitudes con los distintos docentes.

Pudimos observar que el nivel de participación e interés por el trabajo no se manifiesta de igual manera en todas las materias. De hecho, el comportamiento de los alumnos no es el mismo con todos los docentes. Mientras que en las clases de matemática siempre prevalece el respeto y un comportamiento acorde a las normativas de la institución, no se puede afirmar lo mismo en el resto de las asignaturas.

La utilización de los recursos tecnológicos y las distintas propuestas de trabajo también varían mucho. Se observa desde “nula” utilización de las TICs hasta docentes que las usan prácticamente en todas las clases. Desde propuestas de trabajo para realizarse en forma individual hasta aquellas que promueven el trabajo grupal y cooperativo, incluyendo debates que incluyen a la totalidad del curso.

En general los alumnos no tienen problemas para afrontar los distintos tipos de actividades por más variadas que sean, pero se puede observar que se dispersan mucho cuando las propuestas son para trabajar en grupo. Esto hace que algunos docentes se pongan un tanto nerviosos y les llamen la atención constantemente, lo que conlleva a que la clase pierda el hilo conductor que venía trayendo debido a tantas interrupciones.

2. DISEÑO DE LA PRÁCTICA E IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA

2.1 Planificación anual del curso

A continuación presentamos las unidades que conforman el programa de contenidos correspondiente al ciclo lectivo 2015 de quinto año y un pequeño análisis del mismo. El programa completo se encuentra en la sección ANEXO.

Unidad número 1: "Números Complejos"

Unidad número 2: "Función cuadrática"

Unidad número 3: "Logaritmación"

Unidad número 4: "Funciones Logarítmicas y Exponenciales"

Considerando el texto "*El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*" de Gvirtz y Palamidessi (2008), dentro de las variables de la planificación propuesta por estos autores observamos que *las metas, objetivos o expectativas de logro*[1], figuran explícitamente en el programa brindado por la docente.

Para *la selección de los contenidos* se tiene en cuenta el diseño curricular argentino y ciertos aspectos del italiano. Se eligen pocos temas a tratar con la intención de que sean bien profundizados. Queremos destacar que el programa de la materia sufrió algunas modificaciones curriculares con respecto a al ciclo lectivo 2014. El concepto de función cuadrática y ecuación cuadrática se introduce por primera vez en quinto año. Uno de los argumentos que presenta el docente para esta modificación es que prefiere dar primero la unidad de "números complejos", para que se adquiera la noción de raíces imaginarias. La unidad de "Cónicas" se quitó del programa de 5° y se introdujo en el programa de 6°; mientras que las unidades de "Logaritmación" y "Funciones Logarítmicas y exponenciales" que hasta hace un año se dictaban en 6° se introdujo en el programa de 5°.

En cuanto a la *organización de los contenidos* consideramos que está dada por *disciplinas*, ya que se priorizan los nexos lógicos desde el punto de vista del docente. Y la *secuenciación del contenido*

[1] Al lector interesado en profundizar sobre estas variables de planificación ver: Gvirtz, S. y Palamidessi, M. (2008): *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*, Editorial Aique. Buenos Aires, cap.6

responde a las *relaciones conceptuales*, porque refleja las relaciones entre los conceptos siguiendo una estructura lógica.

Las *tareas y actividades* no están presentes en el programa, pero podemos aproximarnos a esta variable considerando la información que se precisa en la *FUNDAMENTACIÓN* y en los *OBJETIVOS GENERALES,* de donde rescatamos el "*énfasis en el planteo de problemas, la discusión y reflexión de posibles resoluciones".* Profundizaremos más sobre esto en la sección donde se aborda la "problemática".

En lo referente a la *selección de los materiales y recursos*, en la planificación no se aclara como se les va a presentar el contenido a los alumnos. Se considera explícitamente la bibliografía a utilizar.

Tanto la *participación de los alumnos* como la *organización del escenario* no se especifican, como así tampoco como se va a realizar la *evaluación de los aprendizajes.*

Por último nos parece importante realizar un pequeño análisis sobre el programa de la materia y su relación con el *Diseño Curricular de Educación Secundaria de la provincia de Córdoba*, pero centrándonos en la unidad número 3 del programa que corresponde a "Logaritmación", pues es la unidad que debimos desarrollar en nuestras prácticas.

Rescatamos a continuación los objetivos del *Diseño Curricular de Educación Secundaria, Orientación Economía y Administración (2012-2015)* en torno al concepto logaritmo para quinto año:

- *Analizar el comportamiento de las funciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas, desde las diferentes formas de representación, interpretando sus parámetros.*
- *Usar y analizar variaciones funcionales (polinómicas, exponenciales y logarítmicas) y no funcionales como herramientas para resolver problemas recurriendo cuando sea posible al uso reflexivo de recursos tecnológicos.*
- *Utilizar e interpretar ecuaciones polinómicas, exponenciales y logarítmicas como modelo matemático para resolver problemas, seleccionando el modelo más adecuado en función del problema.*

Se puede observar que el concepto "logaritmación" no aparece como tal dentro de los objetivos, sino que se plantea el estudio del logaritmo (en forma implícita) a partir del análisis de funciones exponenciales y logarítmicas, y el estudio de ecuaciones exponenciales y logarítmicas aplicadas a la resolución de problemas.

En la sección *"APRENDIZAJES Y CONTENIDOS"* de este diseño, el concepto logaritmo tampoco se hace presente de manera explícita, pero, como ya hemos mencionado, se plantea el estudio de funciones exponenciales y logarítmicas (dentro del "*EJE ALGEBRA Y FUNCIONES"*) y se hace mucho hincapié en la resolución de problemas a partir del análisis funcional y a partir de ecuaciones logarítmicas.

Nos parece muy importante comentar que, si bien en el momento de pensar y diseñar la planificación de nuestras prácticas pudimos plasmar algunas cosas que formaban parte de nuestros propios intereses y objetivos (como por ejemplo darle mucha importancia a la resolución de problemas), siempre lo hicimos respetando el orden y la secuenciación que tiene el programa de la materia (al menos en cuanto a las unidades y a los temas que ellas contienen), pues la institución y el docente tutor así lo requerían. Es decir, en nuestras prácticas se desarrolló la unidad 3 que refiere a "Logaritmación", y a la hora de pensar nuestra propuesta debimos tener en cuenta que no podíamos hacerlo a partir del análisis funcional, pues eso es un tema que corresponde a la unidad 4, que luego desarrollaría el profesor tutor una vez finalizada nuestras prácticas.

2.2 Contenido desarrollado por el docente previo al inicio de prácticas

Previo al inicio de nuestras prácticas el profesor tutor desarrolló la unidad número 2 que corresponde a función cuadrática. Los temas que se desarrollaron mientras realizábamos nuestras observaciones fueron los siguientes:

- Forma Polinómica.
- -Elementos y gráfica de la parábola: raíces, vértice, eje de simetría, desplazamiento vertical y horizontal, ordenada al origen.
- -Forma Canónica y Factorizada.

Para el desarrollo de esta unidad el profe siguió con bastante exactitud uno de los libros citados en la bibliografía del programa[2]. En la introducción ya se mostró algo sobre el tipo de actividades que se plantearon, y en el desarrollo de la problemática se abordará algo más sobre esto.

[2] El mismo libro mencionado en la Introducción, donde se mostró una secuencia de trabajo en el aula.

2.3 La unidad trabajada

Como ya se mencionó, el tema que desarrollamos en nuestras prácticas fue el correspondiente a la unidad 3: "Logaritmación", con algunas modificaciones que surgieron tanto del profesor tutor, como del profesor supervisor y de nuestros propios objetivos.

Entre las distintas modificaciones que se realizaron decidimos no incluir "cambio de base" en nuestra planificación por el hecho de que consideramos que serían demasiados temas para la cantidad de clases que íbamos a desarrollar. Además, si bien no aparece en el programa de la materia, el profesor tutor solicitó que desarrolláramos "ecuaciones logarítmicas", pues formaba parte de su planificación personal y era un requisito de adaptación al diseño curricular de Italia. La planificación personal del docente tutor consistía en una guía de definiciones y actividades que seguían exactamente el mismo orden en el que aparecen los temas en el programa. En dicha guía, a la cual tuvimos acceso (el docente nos la ofreció), se observa que no se contempla el trabajo con resolución de problemas, como así tampoco la utilización de la calculadora y las netbooks. Sí se puede apreciar una fuerte intención por el desarrollo algebraico (utilizando tanto expresiones que contienen solo números como aquellas que tienen número y letras), aplicando la definición de logaritmo y sus propiedades.

En el marco de nuestras observaciones le preguntamos al profesor tutor por la utilización de las netbooks, y nos comentó que no formaban parte de su propuesta de trabajo en ninguna unidad de la materia, como así tampoco la utilización del cañón proyector.

En cuanto a nuestra propuesta decidimos incluir la "resolución de problemas" como aspecto central de nuestra planificación. También decidimos incluir la calculadora como una herramienta importante en la clase de matemática y, como precisaremos más adelante, la utilización de la computadora en un momento específico de las prácticas.

Sabiendo que la calculadora iba a formar parte del trabajo que realizaran los alumnos en nuestras clases, antes de comenzar las prácticas, fuimos un día al colegio exclusivamente para ver qué tipo de calculadora manejaban los estudiantes, y para recordarles que iba a ser imprescindible que la tuvieran desde el primer día. Los dos modelos que más se utilizaban eran los que se muestran en la figura x, siendo el de la izquierda el que tenía la gran mayoría de los alumnos.

Para planificar nuestra primera clase, en un principio, habíamos pensado en tratar de conseguir que la mayor parte de los alumnos contara con el modelo más nuevo, simplemente para evitar el tipo de cálculo que se debe llevar a cabo en el modelo más viejo en el momento trabajar con logaritmos en una base distinta a la decimal. Como esto no fue posible se decidió simplemente explicar el funcionamiento de ambos modelos[3], pero sin fundamentar por qué el modelo más viejo operaba de esa manera (en dicho modelo se debe utilizar el cambio de base para calcular logaritmos que no son decimales o neperianos).

Figura 10: Calculadoras

Si bien al momento de pensar y diagramar nuestra planificación sabíamos que la misma iba a contener una propuesta de trabajo que en gran parte iba a ser nueva para los alumnos, consideramos que dicha propuesta forma parte de una perspectiva del aprendizaje de la matemática, que como se cita en Shoenfeld (2000, p.3):

> *"La matemática es una disciplina viva que intenta comprender los patterns[4] que penetran tanto el mundo alrededor nuestro como el mundo adentro nuestro. Aunque el lenguaje de la matemática se basa en reglas que deben aprenderse, para la motivación es importante que los estudiantes vayan más allá de las reglas y sean capaces de expresar cosas en el lenguaje de la matemática. Esta transformación sugiere cambios tanto en los contenidos curriculares como en el estilo de la docencia. Requiere que se renueve el esfuerzo para concentrarse en:*
>
> - *la búsqueda de soluciones, no sólo la memorización de procedimientos,*
> - *la exploración de patterns, no sólo la memorización de fórmulas,*

[3] Esto se realizó durante una de las clases, inmediatamente después de dar la definición formal de logaritmo.
[4] "Patterns" significa patrones de diseño o de comportamientos, arreglo de formas, repetición, regularidades

- *la formulación de conjeturas, no sólo hacer ejercicios.*

A medida que la enseñanza empiece a reflejar estos énfasis, los estudiantes tendrán oportunidades para estudiar matemática como una disciplina en evolución, dinámica y exploratoria y no como un cuerpo rígido, absoluto, cerrado, de leyes para memorizar. Serán alentados a considerar la matemática como una ciencia, no como un canon, y a reconocer que la matemática trata efectivamente sobre patterns y no meramente sobre números".

2.4 Actividades propuestas y comentarios sobre las mismas

Para introducir al concepto de Logaritmos, construimos una primera clase en la que se pusiera de manifiesto una razón de ser de este conocimiento vinculado a la resolución de ecuaciones exponenciales, de modo que el estudio de este saber se contextualice y cobre un sentido vinculado a la resolución de problemas matemáticos. Por eso, planteamos una actividad inicial que apuntaba por una parte a la construcción de una función exponencial (aunque no fue objetivo definirla como tal) para en ese marco estudiar el logaritmo para casos particulares donde no se conozca alguno de los valores de una de las variables.

Elegimos el contexto de la Leyenda del Tablero de Ajedrez, en la que la cantidad de granos de trigo que se colocan en cada casillero sucesivo del tablero crece de forma geométrica (se duplica), y entonces para calcular la cantidad de granos en el casillero n, la cantidad de granos es 2^n.

Se le repartió a los alumnos una guía impresa a cada uno que contenía la introducción al tema con la “Leyenda del tablero” y las actividades para trabajar en las primeras clases. Antes de comenzar con la primera actividad les comentamos los criterios de evaluación que figuraban al principio de la guía, que describiremos con más detalle en la sección “EVALUACIÓN”. Les dimos 5 minutos para que leyeran la leyenda en forma individual o con el compañero del lado, la cual se muestra a continuación, con el mismo formato que se les presentó a los alumnos:

Introducción:

La leyenda del tablero de ajedrez y los granos de trigo

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle. Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez. Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara.

-Sissa, quiero recompensarte dignamente por el ingenioso juego que has inventado —dijo el rey.
El sabio contestó con una inclinación.
— Soy bastante rico como para poder cumplir tu deseo más elevado —continuó diciendo el rey—. Di la recompensa que te satisfaga y la recibirás.
Sissa continuó callado.

— No seas tímido —le animó el rey—. Expresa tu deseo. No escatimaré nada para satisfacerlo.
— Grande es tu magnanimidad, soberano. Pero concédeme un corto plazo para meditar la respuesta. Mañana, tras maduras reflexiones, te comunicaré mi petición.
Cuando al día siguiente Sissa se presentó de nuevo ante el trono, dejó maravillado al rey con su petición, sin precedente por su modestia.— Soberano —dijo Sissa—, manda que me entreguen un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez.

— ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey.
— Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32…
Basta —le interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente.
Pero has de saber que tu petición es indigna de mi generosidad. Al pedirme tan mísera recompensa, menosprecias, irreverente, mi benevolencia. En verdad que, como sabio que eres, deberías haber dado mayor prueba de respeto ante la bondad de tu soberano. Retírate. Mis servidores te sacarán un saco con el trigo que solicitas.
Sissa sonrió, abandonó la sala y quedó esperando a la puerta del palacio.

Luego de que los alumnos leyeran la leyenda (la cual no incluía el final) pedimos que nos comenten brevemente de qué se trataba y le repartimos un papel en blanco a cada uno para que escriban, sin utilizar la calculadora y sin realizar cálculos en la hoja, la cantidad de granos que creían que Sissa le estaba pidiendo al rey. El propósito de esto fue que puedan realizar una estimación (casi a modo de adivinanza) que no les lleve más de dos minutos, para luego poder comparar sus resultados con los que obtendrían más adelante y ver quién se aproximó más. Los resultados que escribieron iban desde 120 granos hasta un millón de granos.

A continuación mostraremos la secuencia de actividades propuestas en nuestras prácticas luego de esta lectura introductoria, con comentarios de sucesos que consideramos relevantes destacar. Cabe aclarar que todas las actividades figuraban en la guía que habíamos armado para los alumnos, y en este informe serán presentadas conservando el mismo formato y la misma numeración con la que se les presentó a los alumnos. La guía fue entregada, una primera parte, en la primera clase, y una segunda parte transitando la mitad de las prácticas.

Actividad 1

Supongamos que la petición de Sissa al rey hubiera sido la misma, pero colocando dos granos en la primer casilla en vez de uno, 4 en la segunda, 8 en la tercera, 16 en la cuarta, y así sucesivamente… A partir de esta modificación en la historia, intenta responder las siguientes preguntas: (puedes ayudarte con el tablero)

a) ¿Hay alguna casilla que posea más de 1000 granos? ¿Y más de 100000? ¿Se supera el millón de granos en alguna casilla? En cada caso de que la respuesta sea afirmativa indiquen cuál es la primera casilla que supera dicha cantidad y cuántos granos hay exactamente en dicha casilla. Explica cómo obtuviste ese resultado.
b) ¿Es posible averiguar la cantidad de granos que hay en la casilla 24 recuperando las respuestas del ítem a) y sin tener que calcular la cantidad de granos que hay en las casillas intermedias? Con el mismo argumento, ¿pueden averiguar los granos que hay en la casilla 27? ¿y en la 32? Si la respuesta es afirmativa expliquen cómo lo harían.
c) ¿Es posible hallar los granos de cualquier casilla sin averiguar los granos de las casillas anteriores?

Para la realización de esta actividad solicitamos que formaran grupos de 4 o 5 integrantes, y a cada grupo le repartimos un tablero cuadriculado de 8x8 (lo suficientemente grande para que pudieran escribir dentro de cada cuadrito) con las casillas enumeradas en forma horizontal (del 1 al 64), el cual se muestra en la figura 11.

Si bien aclaramos que no era obligación la utilización del tablero, nuestra intención era que pudieran ayudarse con el mismo para resolver las actividades (todos los grupos lo terminaron utilizando).

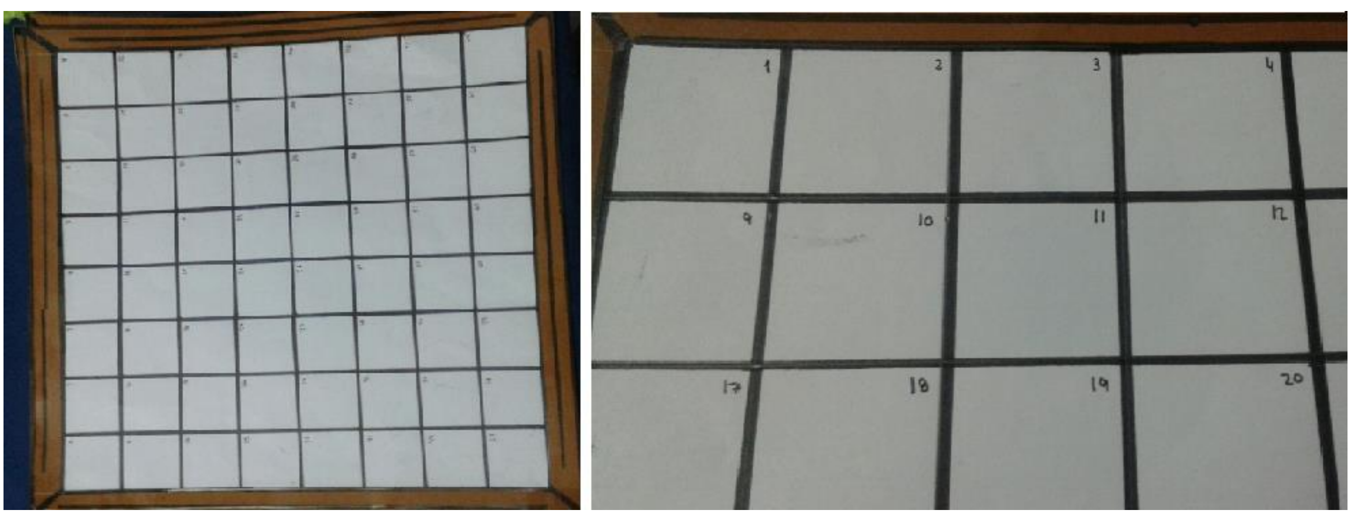


Figura 11: Tablero

También hicimos hincapié en que, si bien el trabajo era grupal, todos debían tener los distintos desarrollos efectuados escritos en sus carpetas, y las respuestas a cada consigna. Les recordamos que este aspecto era uno de los que iba a ser evaluado. Les dimos 20 minutos para realizar esta actividad y les anticipamos que luego de este período de tiempo íbamos a realizar una puesta en común donde cualquier grupo pasaría al frente a contar algún ítem de la actividad. Esta modalidad de trabajo (dar un determinado tiempo para que los alumnos trabajen y luego realizar una puesta en común) se repitió en casi todas las actividades a lo largo de las prácticas. Nuestra intención con esta puesta en común era que todos los grupos participen y que se puedan familiarizar con esta forma de trabajo en la hora de matemática, diferente a la que venían teniendo con el profesor tutor; y además poder rescatar la mayor cantidad de ideas, razonamientos y soluciones posibles, para poder indagar sobre las similitudes y diferencias que hay entre ellas. La puesta en común, tal como nosotros la pensamos, siempre apunta al debate, a la socialización de las distintas ideas y razonamientos que los alumnos han desarrollado y a la reflexión de los mismos.

Cabe destacar que mientras los alumnos trabajaban nosotros estábamos todo el tiempo recorriendo el aula e interactuando con ellos, viendo qué iban pensando, qué dificultades iban surgiendo, etc.

Nuestro propósito con la actividad 1 era que, a medida que fueran tratando de responder las preguntas, pudieran ir construyendo la idea de que es posible relacionar la cantidad de granos de un casillero con el número que posee dicho casillero, y a su vez relacionarlo finalmente con la cantidad de granos de la primera casilla.

Para resolver el ítem a) la mayoría de los grupos lo pensaron y trabajaron de manera similar. En el primer casillero pusieron el número 2, en el segundo el 4, en el tercero 8, en el quinto 32, y así sucesivamente. De esta manera lograron determinar que en la casilla 10 se superaban los 1000 granos, en la casilla 17 se superaban los 100000 y en la 20, el millón. Cuando se realizó la puesta en común estos datos quedaron escritos en la pizarra.

Para el ítem b) surgieron distintas propuestas de los grupos. Aquí mostramos algunos de los planteos:

1. Al tener ya la cantidad de granos de la casilla 20 (pues en el primer punto ya se averiguó que en esa casilla se supera el millón de granos) se va multiplicando por 2 hasta llegar a la casilla 24

$$1048576\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2\ x\ 2 = 16777216$$

E incluso aparecieron expresiones del tipo

$$1048576\ x\ 16 = 16777216$$

Y

$$1048576\ x\ 2^4 = 16777216$$

Para las casilla 27 y 32 se plantea el mismo razonamiento, pero ahora se puede partir de la casilla 24:

$$casilla\ 27 = casilla\ 24\ x\ 8 = 16777216\ x\ 8 = 16777216\ x\ 2^3 = 134217728$$

Se procede en forma análogo para la casilla 32.

2. Se multiplican la "cantidad de granos" de determinadas casillas para obtener los de otra. Por ejemplo:

$$granos\ de\ la\ casilla\ 24 = granos\ de\ la\ casilla\ 20\ x\ granos\ de\ la\ casilla\ 4$$

3. Razonamiento similar al anterior pero utilizando la potenciación:

$$granos\ de\ la\ casilla\ 24 = (granos\ de\ la\ casilla\ 12)^2$$

$$granos\ de\ la\ casilla\ 32 = (granos\ de\ la\ casilla\ 15)^2\ x\ granos\ de\ la\ casilla\ 2$$

4.

$$granos\ de\ la\ casilla\ 24 = 2^{24}$$

$$granos\ de\ la\ casilla\ 27 = 2^{27}$$

$$granos\ de\ la\ casilla\ 32 = 2^{32}$$

En la puesta en común, que se realizó cuando la gran mayoría de los grupos ya había terminado de resolver los incisos a) y b), quedaron escritos en la pizarra la mayoría de estos planteos, y valiéndonos del último resolvimos entre todos el ítem c (muchos grupos ya lo habían pensado). Arribamos a la siguiente expresión:

$$2^{casilla} = granos\ de\ trigo$$

(donde “casilla” hace referencia al número de la casilla, y “granos de trigo” hace referencia a la cantidad de granos que hay en dicha casilla), y la propusimos como una solución bastante eficiente para calcular la cantidad de granos de cualquier casilla.

Cuando se planificó esta clase pensamos en que no necesariamente esa expresión iba a aparecer en forma inmediata, con lo cual habíamos armado en un afiche un tablero como el que se muestra en la figura 12, que finalmente en ese momento decidimos, en ambos cursos, que no hacía falta utilizarlo.

2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	(…)	
	(…)	2^{27}	2^{28}	2^{29}	(…)		
			(…)	2^{61}	2^{62}	2^{63}	2^{64}

Figura 12: tablero

Luego de que en la pizarra quedara escrita la expresión $2^{casilla} = granos\ de\ trigo$, preguntamos cómo se podría reescribir esta expresión de modo tal que sea más cómoda tanto para leerla como para escribirla, es decir, que se asemeje a lo que podría ser una “fórmula matemática” que permita calcular los granos de trigo en cualquier casilla. Un alumno propuso lo siguiente:

$$2^x = y$$

Donde *x* es el número de casilla e *y* son los granos de trigo de esa casilla.

A continuación pedimos que los alumnos eligieran una cantidad de granos que visualicen en alguna casilla, como por ejemplo los de la casilla 9, y escribimos

$$2^x = 1024$$

Con esto, planteamos el siguiente interrogante: *“supongamos que no sabemos que en la casilla 10 hay 1024 granos de trigo, ¿cómo haríamos para calcular la casilla usando la expresión que encontramos?”*

Los alumnos plantearon la idea de “despejar la x”, y para ello propusieron varios razonamientos que procedemos a mostrar:

- $x = \frac{1024}{2}$
- $2 = \frac{1024}{x}$
- $x = \sqrt[2]{1024}$
- $x = \sqrt[n]{1024}$

Fuimos discutiendo cada uno de los casos y vimos que: o bien el resultado que se obtenía no satisfacía la expresión inicial, o bien el planteo no conducía a ninguna respuesta. De esta manera concluimos que con las herramientas matemáticas de las que disponían hasta ese momento, no se podía hallar el valor de “*x*”. Para ello propusimos una operación a la que denominamos “logaritmo”, y escribimos en la pizarra:

$$2^x = 1024 \rightarrow x = \log_2 1024 = 10$$

Y explicamos cómo se leía esa notación: *“el logaritmo en base 2 de 1024 es igual a 10”.*

Luego se generalizó para cualquier cantidad de granos y se escribió:

$$2^n = y \rightarrow n = \log_2 y$$

Aclarando que también se puede escribir como

$$\log_2 y = n \rightarrow 2^n = y$$

Y que las dos expresiones anteriores las podemos representar en una sola de la siguiente manera:

$$\log_2 y = n \leftrightarrow 2^n = y$$

Explicamos que el símbolo de la doble implicación no hace otra cosa más que reunir las dos expresiones que preceden, y hace referencia a que una expresión es equivalente a la otra.

A continuación se dio la definición formal de logaritmo, que los alumnos tenían en su guía.

Definición de logaritmo

Dados a y b positivos, llamaremos logaritmo en base ***a*** de ***b*** al exponente que debe ser aplicado a ***a*** para obtener como resultado ***c***. Lo escribiremos

$$\log_a b = c \ \leftrightarrow \ a^c = b$$

Con a ≠ 1 y c en los reales.

Es importante resaltar que se destinó un tiempo de la clase para explicar cómo se utilizaba la calculadora para el cálculo de logaritmos, principalmente en el modelo que figura a la izquierda de la figura 10 (el modelo de la derecha es más nuevo y permite calcular logaritmos en cualquier base con una notación idéntica a la que utilizan los alumnos, que no es otra que la que se propuso en la definición formal de logaritmo). Se dejó escrito en el pizarrón un ejemplo como el que sigue (para el modelo más viejo):

"En la calculadora: $log_2 1024 = (log\ 1024)\ /\ (log\ 2)$*"*

A continuación se le pidió a los alumnos que traten de resolver el ítem a) de la actividad 1, pero ahora utilizando la definición de logaritmo. Aquí aparecen por primera vez resultados "no enteros" en el cálculo de logaritmos, y la necesidad de reflexionar sobre estos resultados dentro del contexto del problema. Por ejemplo, para hallar en qué casilla se superan los 1000 granos se realizó

$$log_2 1000 = 9{,}96 \leftrightarrow 2^{9{,}96} = 1000$$

Con lo cual los 1000 granos se superan en la casilla 10, pues no existe la casilla número 9,96. También se remarcó en este momento que, por lo general, trabajaríamos siempre con dos decimales, redondeando el segundo.

La primera tarea que se presentó en la guía es la siguiente:

TAREA

1) Calcular:
   -el logaritmo en base 2 de 400
   -el logaritmo en base 2 de un número cuyo resultado sea entero
   - el logaritmo en base 2 de un número cuyo resultado no sea entero
   (Ayuda: el sitio http://www.miniwebtool.com/log-base-2-calculator/ nos permite calcular cualquier logaritmo en base 2 de una manera muy simple)
2) Leer el final de la historia en el siguiente link para después poder comentarlo en clase:

http://matematicascercanas.com/2014/03/10/la-leyenda-del-tablero-de-ajedrez-y-los-granos-de-trigo/

De esta tarea solo decidimos dar el punto 2, pues consideramos que ya habíamos trabajado suficiente en la clase con cálculos de logaritmos muy similares a los que se proponen en el punto 1. La gran mayoría de los alumnos cumplió con esta tarea, con lo cual se charló en clase sobre el final de la historia y comparamos la cantidad de granos que efectivamente le pedía Sissa al rey (superior a los 18 trillones de granos), con la cantidad de granos que ellos habían escrito en el papel que le dimos la primera clase.

Actividad 2

a) Supongamos ahora que Sissa le pidió al rey 3 granos en el primer casillero y solicitó que la cantidad de granos de un casillero triplique al casillero anterior. ¿Cómo averiguarías a partir de qué casilla se supera el millón de granos? ¿y los 100 millones?
b) ¿Y si Sissa coloca 4 granos en la primer casilla y va cuadriplicando?
c) ¿Qué ocurriría si Sissa pide 10 granos en la primera casilla, y que en cada casilla haya 10 veces la cantidad de granos de la casilla anterior? ¿En qué casillero se alcanzan o superan los 100 millones?
d) Supongamos ahora que Sissa pide que le coloquen 3 granos en la primera casilla, y que cada casilla duplique a su precedente. ¿En qué casilla supera o alcanza los 100 millones? ¿Y si coloca 2 en la primera casilla y va triplicando?

Para resolver esta actividad, al igual que en la actividad 1, propusimos el trabajo grupal y una puesta en común después de un tiempo pautado.

La mayoría de los grupos resolvió los incisos a, b y c pensando en la similitud que tenían con lo que habían realizado en la actividad 1, pero considerando que ahora ya tenían la definición de logaritmo como herramienta, con lo cual uno de los objetivos de esta actividad era que se pusiera en juego la idea de que ya no hacía falta "tantear" para poder resolver una ecuación exponencial.

Una vez que los grupos habían finalizado con el ítem c, se realizó una primera puesta en común, donde rescatamos las siguientes expresiones de entre las distintas propuestas de los alumnos:

$\log_3 y = x \leftrightarrow 3^x = y$ (para resolver el ítem a)

$\log_4 y = x \leftrightarrow 4^x = y$ (para resolver el ítem b)

$\log_{10} y = x \leftrightarrow 10^x = y$ (para resolver el ítem c)

Se aprovechó (así estaba planificado) el desarrollo del ítem c) para presentar el concepto de "logaritmo decimal". La definición que se dio (estaba en la guía que tenían los alumnos) es la siguiente:

Logaritmo decimal

$$\log_{10} y = n \leftrightarrow 10^n = y$$

Y en cuanto a la notación se tiene que

$$\log y = \log_{10} y$$

Luego se mostró cómo utilizar la tecla *log* de la calculadora, que permite calcular logaritmos decimales en forma directa (sin tener que utilizar el cambio de base).

El trabajo con el ítem d) presentó mayores dificultades, pues las expresiones exponenciales a las que se debía arribar eran del siguiente tipo:

$3x2^n$ y $2x3^n$

Las dificultades no solo se presentaron al momento de pensar qué expresión modelizaba la situación problemática, sino también, una vez que se hallaba la expresión, cómo resolverla haciendo uso del logaritmo. Esta situación particular se analizará con más detalle en el desarrollo de la problemática.

Nos parece importante destacar que, si bien esta propuesta de trabajo era distinta a la que los alumnos venían realizando en sus clases de matemática, se mostraron muy predispuestos y con un gran entusiasmo al momento de afrontarla. Las discusiones que se generaron en las "puestas en común" fueron muy positivas, tanto para los alumnos como para nosotros. Con esto hacemos referencia a que los estudiantes mostraron mucho interés en participar, y se discutieron y analizaron muchos razonamientos distintos que habían surgido de los distintos grupos. Incluso se llegó a la instancia de que algunos grupos "defendían" de manera efusiva sus planteos por sobre los de sus compañeros, mostrándose totalmente convencidos de lo que habían realizado.

Fue muy importante nuestra labor en estos debates para tratar de gestionar las discusiones, no solo en cuanto a los desarrollos matemáticos y a los planteos que se estaban exponiendo, sino también haciendo mucho énfasis en el respeto mutuo, principalmente al momento de escucharse y dirigirse al otro.

Actividad 3

1) Realiza los siguientes cálculos

a) $x-(y.z)$

b) $\frac{w+p}{q}$

Siendo

$$\log_5 625 = x$$
$$\log_2 256 = y$$
$$\log_3 2187 = z$$
$$\log_7 5764801 = w$$
$$\log_{13} 28561 = p$$
$$\log_4 4096 = q$$

2) Resuelve los siguientes problemas

a) Cierto animal posee en su cuerpo una cantidad de bacterias que se triplica en cantidad cada 15 horas aproximadamente. Este animal muere cuando su cuerpo posee más de un millón de bacterias. Si inicialmente esta enfermedad comienza con una sola bacteria en su cuerpo, ¿Puedes estimar cuánto tiempo pasará hasta que muera este animal? ¿Qué ocurriría si la enfermedad comenzara con 10 bacterias en el cuerpo?

b) La extensión de zona desértica se cuadruplica en cierta comarca cada 10 años. Si hoy existen 40 hectáreas desérticas ¿dentro de cuantos años ocupara toda la comarca que tiene 29.160 hectáreas de superficie?

La actividad 3 se compone de dos puntos. El punto 1 tenía como objetivo reforzar el cálculo de logaritmos, el uso de la calculadora y la notación. Durante las clases hicimos mucho hincapié en respetar la notación, principalmente la que se presentaba en la definición del logaritmo (como por ejemplo respetar los subíndices).

Esta parte de la actividad se terminó dejando como tarea y luego se controló en la clase (los alumnos no tuvieron dificultades en resolverla). Queremos destacar que, en el marco de nuestras observaciones, el profesor tutor nos comentó que casi todos los alumnos realizaban actividades extra-escolares (deportivas, artísticas, etc.), con lo cual el siempre trataba de “medir” la cantidad de tarea que se daba acorde a las posibilidades de realización de los alumnos. Teniendo en cuenta esto, nosotros también tratamos de que la tarea no fuese tan abultada, y de no dar tarea de un día para el siguiente (los alumnos de 5to B tenían clases en días consecutivos).

En cuanto al segundo punto de la actividad, tiene carácter de “resolución de problemas” (en la sección destinada a la problemática se detallará qué definición de “problema” consideran los autores de este informe), y se trabajaron en clase con la misma modalidad utilizada para la actividad del tablero. La diferencia es que ahora no se pidió que conformen grupos de “tantos integrantes”, sino más bien que trabajen con el compañero del lado, o incluso con los compañeros más cercanos. Desde esta actividad hasta la finalización de nuestras prácticas, se repitió esta organización para trabajar, donde cada alumno ya sabía que podía compartir esa instancia de trabajo con cualquier compañero.[5]

Si bien las dificultades en la resolución de problemas es el tema que abordaremos en la siguiente sección, nos gustaría realizar algunos comentarios.

Como ya mencionamos anteriormente, en nuestras observaciones pudimos distinguir actividades que tenían el carácter de "problemas" (o al menos esa era la caracterización que el docente hacía de determinadas actividades), pero las mismas rara vez se realizaban en clase. Más bien, se daban como tarea y luego no se discutían, sino que el profesor tutor solo "controlaba"[6] que las hubieran hecho. Con lo cual esta propuesta de resolver problemas en la clase para luego discutirlos en una puesta en común era totalmente novedoso para los alumnos. Por lo tanto este tipo de actividad no solo presentaba un desafío para los alumnos, sino que presentaba un desafío para nosotros mismos, pues estábamos proponiendo un tipo de trabajo que nunca habíamos observado en estos cursos, lo que implicaba no saber cómo iban a reaccionar los estudiantes frente a esto.

En una primera instancia las frases que más escuchamos dentro del aula eran: "no entiendo", "no sé qué hacer", "no me sale nada". Frente a esto, nuestra postura fue la misma que la que veníamos teniendo con las actividades anteriores, ir recorriendo el aula todo el tiempo e ir viendo "qué iba pasando", qué no se entendía, qué dificultades se iban presentando. Siempre nuestra intención fue que ellos mismos fueran reflexionando sobre lo que estaban haciendo, y que pudieran compartir y discutir sus propias reflexiones y desarrollos con sus compañeros. Cuando veíamos que había una duda o una dificultad que se presentaba en la mayoría de los grupos, pedíamos que dejaran de trabajar solo unos minutos y tratábamos de aclararlo (como por ejemplo entender el enunciado del problema).

Las dificultades generales que se presentaron fueron las siguientes:

- Interpretación del enunciado del problema
- Traducir el enunciado a una expresión algebraica que permita la resolución del mismo
- Resolver la expresión algebraica encontrada
- Interpretar y reflexionar sobre el resultado obtenido dentro del contexto del problema.

[5] Ya desde la segunda y tercera clase los alumnos incorporaron esa forma de trabajo colaborativa, para luego implementarla de manera "normal" en la clase de matemática. Ya no hizo más falta recordarles que podían trabajar en pequeños grupos.
[6] Al iniciar la clase pasaba rápidamente por los bancos chequeando si habían hecho algo, no "lo que habían hecho".

Como se puede observar, no detallamos aquí dificultades particulares, pues las precisaremos en la sección siguiente. Si bien las dificultades se presentaban en todo el proceso de resolución, cabe aclarar que hay algunas que tienen mucho más peso que otras. Por ejemplo: eran pocos los alumnos que no entendían los enunciados (o más bien las dudas eran muy puntuales), pero sí había una dificultad generalizada en traducir ese enunciado en una expresión algebraica que permitiera la posterior resolución del problema.

Otro aspecto que no queremos dejar de mencionar es el tiempo que se destinó a la resolución de problemas. En el caso particular de estos dos problemas correspondientes a la actividad 3, habíamos planificado que los alumnos trabajen sobre los mismos unos 20 minutos aproximadamente, para luego pasar a la siguiente instancia de discusión. El tiempo finalmente empleado fue casi el doble, debido principalmente a las dificultades generales que ya hemos mencionado, y a la "adaptación" que estaban viviendo los alumnos a esta nueva propuesta de trabajo en la clase de matemática.

Manteniendo el orden que tenía la guía de actividades que les dimos a los alumnos, se presenta la siguiente tarea:

<u>TAREA:</u>

a) Considerando nuevamente la leyenda del tablero de ajedrez: hallar cuántos granos de trigo hay en las casillas 33 y 34 y ver qué ocurre en la calculadora cuando intentas averiguar estos valores. Prueba realizarlo también con la calculadora científica que tienen las computadoras, o con la del buscador Google (recuerda que para escribir una potencia se usa el símbolo ^, por ejemplo: 4^2 se escribe 4^2).
b) Explique brevemente la forma en que aparece el resultado obtenido en la calculadora en el punto partir de la información que se muestra en el siguiente link: http://genesis.uag.mx/edmedia/material/fisica/introduccion11.htm
c) Retomando el problema 2b) de la actividad 3, supongamos ahora que existen 150 hectáreas desérticas y que ahora la comarca tiene un total de 40000 hectáreas. ¿Dentro de cuántos años la zona desértica ocupará toda la comarca?

Aquí se decidió dar como tarea solo el punto c), pues el punto a y b tenían como objetivo reforzar ciertos aspectos relacionados con la utilización de la calculadora que poseen las computadoras, y consideramos en ese momento privilegiar otro tipo de actividades, como por ejemplo, seguir reforzando el trabajo con la resolución de problemas.

Actividad 4

1) El logaritmo de un cierto número en base 3 es 4. Halle dicho número.

2) El logaritmo de una cierta base del número 1024 es 5. Calcula la base.

3) Al variar la altura respecto al nivel del mar la presión atmosférica varía de tal modo que en cada punto es, aproximadamente, 0,9 veces la presión que existe un kilómetro más abajo. Si la presión al nivel del mar es 1 atmósfera:

a- ¿Qué presión habrá a 10 km de altura?

b- ¿Cuántos kilómetros habrá que subir para que la presión en ese punto sea 0,1215 atm? ¿Y para 0,5 atm?

c- ¿A qué altura habrá una presión de 1,2 atmósferas? ¿Qué significa el resultado obtenido?

En la actividad 4 se invirtieron las actividades. Primero se trabajó con el problema 3, y luego con los puntos 1 y 2.

El problema 3 generó, en casi todos los alumnos de ambos cursos, inconvenientes al momento de interpretar el enunciado. Si bien dimos un tiempo considerable para el trabajo grupal, y algunos grupos lograron avanzar un poco, al ver las múltiples dificultades que iban presentando los alumnos tomamos la decisión de discutirlo entre todos, y esquematizar en el pizarrón la situación que se estaba planteando en el enunciado.

El esquema que se dibujó en la pizarra fue similar al que se muestra en la figura 13. El mismo se fue construyendo a medida que íbamos interactuando con los alumnos a través de distintas preguntas, y se fue armando “de abajo hacia arriba”, hasta llegar a la expresión de $(0,9)^x$ atm. Una vez finalizado el dibujo y luego de haber discutido sobre el mismo, quedó en la pizarra la siguiente expresión (surgida de la discusión):

$$(0,9)^x = y$$

$$x = km\ de\ altura\ respecto\ al\ nivel\ del\ mar$$

$$y = presión\ atmosférica$$

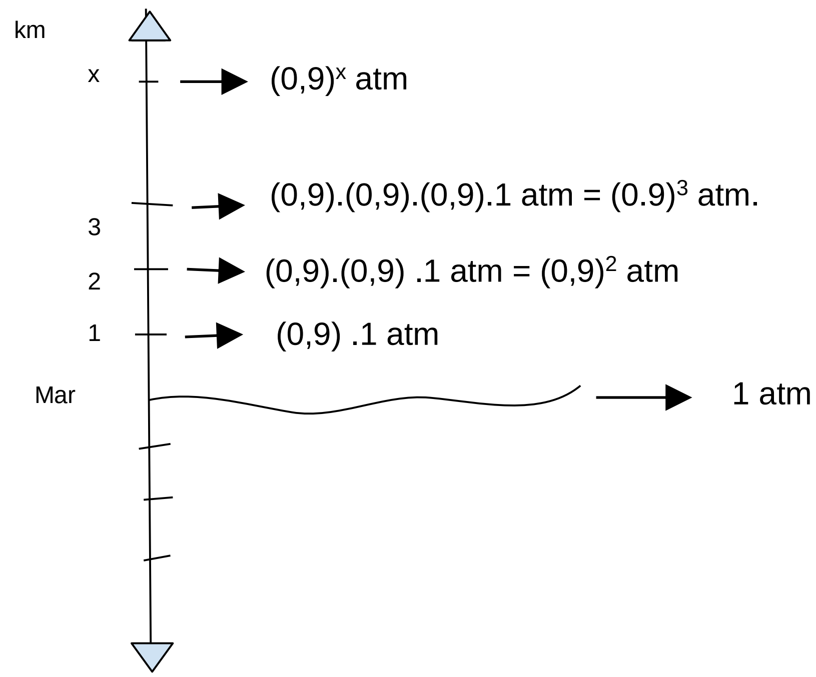


Figura 13: esquema realizado en clase

A diferencia de otros problemas, pudimos ver que los alumnos necesitaron de mucha ayuda para poder resolverlo, e incluso en el momento en que estábamos armando el gráfico en la pizarra se notó que la participación de los estudiantes fue menor que en otras instancias, y que los que respondían algunas preguntas nuestras eran siempre los mismos alumnos.

Este problema se abordará con mayor profundidad en la sección correspondiente a la problemática.

Un detalle importante es que este problema nos permitió, por primera vez desde que iniciamos nuestras prácticas, que los alumnos obtengan un resultado negativo luego de calcular el logaritmo de un número determinado. Pues para resolver el ítem c) del problema, los alumnos efectuaron

$$log_{0,9} 1{,}2 = -1{,}73$$

En este caso los estudiantes no tuvieron dificultades en asociar este resultado con el contexto del problema, y afirmar que el mismo hacía referencia a una presión por debajo del nivel del mar.

Luego de este problema se prosiguió con los puntos 1 y 2 de la actividad 4, que tenían como objetivo introducir las ecuaciones logarítmicas.

La principal dificultad que tuvieron los alumnos, tal como lo habíamos anticipado en nuestra planificación, fue poder traducir el enunciado en una expresión algebraica que permitiera resolver la situación que se planteaba.

Tanto en el problema relacionado a la presión atmosférica como en estas dos actividades para introducir ecuaciones, pudimos percibir que en gran parte de los alumnos (sin que ellos nos lo dijeran explícitamente) se hacía presente la siguiente idea: *"ya sabían que para resolver la actividad debían utilizar el logaritmo, por lo tanto solo bastaba con averiguar, dentro de los datos que proporcionaba el enunciado, quién era la base, quién era el argumento, y quién debía ser el resultado, para de esa manera resolver el problema".* Volveremos sobre esto en el estudio de la problemática.

Actividad 5: Hallar el valor de x

a) $\log_2 x = -1$
b) $\log_x(\frac{1}{8}) = -3$
c) $\log_{\sqrt{2}} 8 = x$
d) $\log_3 x^4 = 8$
e) $\log(x - 2) = 2$
f) $\log_5 x + \log_5 15625 = 10$
g) $2 \log x = -3 \log x + 5$
h) $\log_{\frac{1}{2}} (2x) + \log_{\frac{1}{2}} 4 = \log_{\frac{1}{2}} 8$
i) $\log_x 32 = 5 + \log_3 1$
j) $\log_3 \sqrt{x} = \log_3 \sqrt[3]{243}$
k) $\log_{\sqrt{2}}(4 + x) = 8$

Para la actividad 5 se propuso resolver las 3 primeras ecuaciones en la clase, y luego de tarea debían elegir 3 más que no hayan hecho aún y tratar de resolverlas. A aquellos alumnos que avanzaron muy rápido con la resolución de las tres primeras, se les dijo que podían seguir haciendo todas las que continuaban en la lista.

Es importante destacar que, si bien la planificación era la misma para ambos cursos, los “tiempos” de los alumnos de cada división no eran los mismos. En el quinto “A”, en general, los alumnos presentaban menores dificultades para el trabajo con la resolución de problemas que en el quinto “B”, como así también al momento de hacer desarrollos exclusivamente del tipo algebraico. Esto llevó a que en aquellas actividades donde se presentaban mucha cantidad de ejercicios en la guía (como por ejemplo ecuaciones), se pudiera avanzar con más ejercicios en el quinto A, y llegar a resolver aquellos que presentaban un grado de dificultad mayor que los que se encontraban al principio de cada actividad.[7]

Actividad 6

a) Arma en la planilla de cálculo Excel la siguiente tabla y completa los valores faltantes utilizando la función LOG.

x	**log2(x)**	**log2(2x)**	**log2(x/2)**
0,5			
1			
1,5			
2			
2,5			
3			
3,5			
4			
4,5			
5			
5,5			
6			
6.5			
7			
7,5			
8			

b) Grafica en un mismo par de ejes coordenados los valores de toda la tabla. Utiliza un gráfico de dispersión (X,Y) que muestre solo los puntos dentro de los ejes coordenados, e interpreta a qué valores hacen referencia dichos ejes.

[7] En general en las listas de ejercicios, la dificultad iba de menor a mayor con respecto al orden de los ejercicios (los primeros eran más “simples” que los últimos)

Nuestra intención con esta actividad era que, mediante un trabajo de tipo exploratorio y haciendo uso de las netbooks, los alumnos pudieran arribar a las propiedades del logaritmo. En el quinto A tuvimos acceso a 15 notebooks (una cada dos aproximadamente) y en el quinto B a 30 máquinas, de las cuáles utilizamos 23 porque había 8 que estaban sin carga en la batería. Esta diferencia en el número de computadoras se debió a que justo el día que se trabajó con esta actividad en el quinto A, había mayor demanda de las mismas por parte de otros docentes.

Para realizar esta actividad también utilizamos el cañón proyector, ya que armamos una presentación (realizada con el software power point) que nos serviría de apoyo para ir guiando el desarrollo de la actividad.

A continuación mostramos la secuencia de diapositivas que tenía la presentación, con algunos comentarios sobre el trabajo desarrollado.

Figura 14: Diapositiva 1. Carátula de la presentación

Para realizar la actividad 6 fuimos trabajando en simultáneo con los alumnos. Es decir, mientras íbamos explicando en forma oral cómo se procedía con la actividad, los estudiantes podían visualizar esta explicación en el proyector, ya que además de la presentación, mostramos cómo se debía trabajar con el Excel.

Actividad

a) Arma en la planilla de cálculo Excel la siguiente tabla y completa los valores faltantes utilizando la función LOG.

x	log2(x)	log2(2x)	log2(x/2)
0,5			
1			
1,5			
2			
2,5			
3			
3,5			
4			
4,5			
5			
5,5			
6			
6,5			
7			
7,5			
8			

Figura 15: Diapositiva 2

x	log2(x)	log2(2x)	log2(x/2)
0,5	-1	0	-2
1	0	1	-1
1,5	0,58496	1,58496	-0,415
2	1	2	0
2,5	1,32193	2,32193	0,32193
3	1,58496	2,58496	0,58496
3,5	1,80735	2,80735	0,80735
4	2	3	1
4,5	2,16993	3,16993	1,16993
5	2,32193	3,32193	1,32193
5,5	2,45943	3,45943	1,45943
6	2,58496	3,58496	1,58496
6,5	2,70044	3,70044	1,70044
7	2,80735	3,80735	1,80735
7,5	2,90689	3,90689	1,90689
8	3	4	2

Figura 16: Diapositiva 3

En la diapositiva 2 se presenta la actividad, y posteriormente se muestra cómo construir la tabla en Excel. Luego que todos los alumnos pudieron construir la tabla se mostró la diapositiva 3. Inmediatamente después se prosiguió a resolver el inciso b) de la actividad, con lo cual nuevamente en el proyector los alumnos pudieron visualizar qué pasos debían seguir para poder graficar lo que se les solicitaba.

Luego de que todos tuvieran el gráfico en sus computadoras, se mostró la diapositiva de la figura 17.

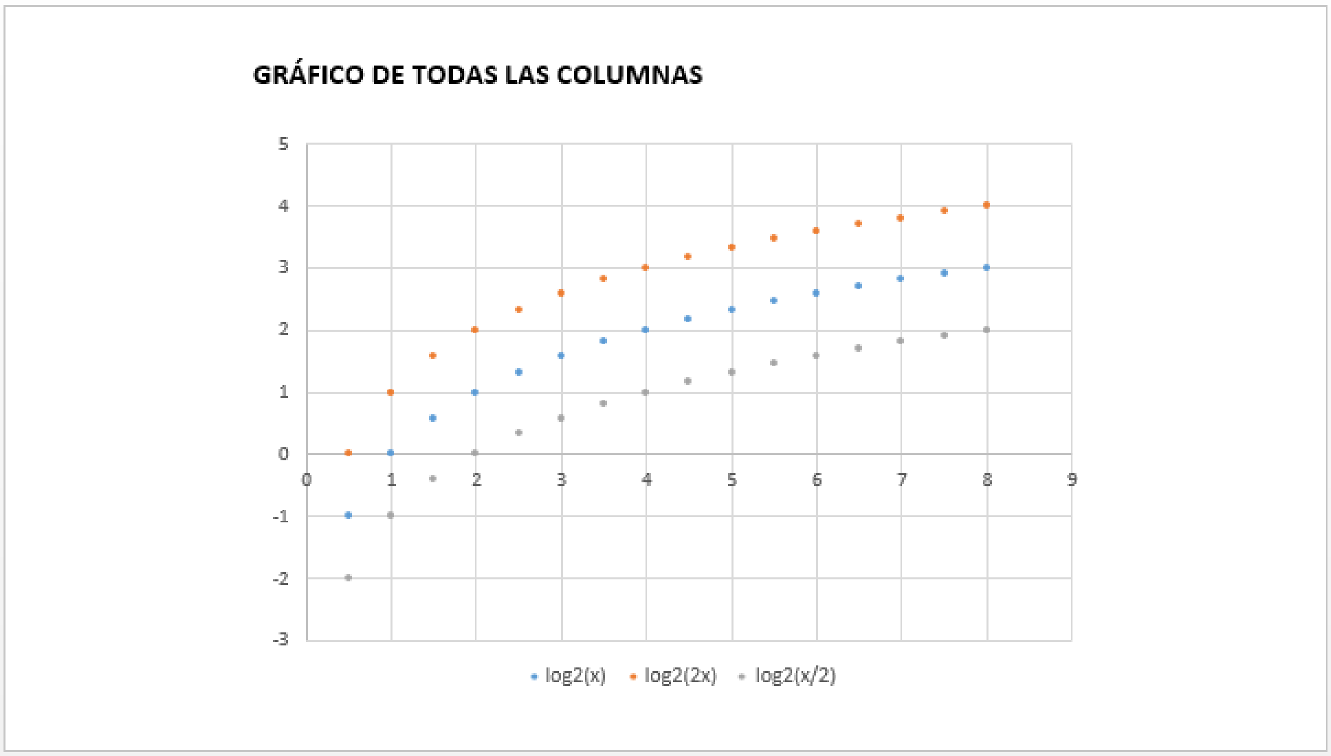


Figura 17: Diapositiva 4

Una vez que finalizamos con la actividad 6 lo que se realizó fue un trabajo exploratorio guiado por nosotros, con la finalidad de que los alumnos pudieran observar algunas relaciones tanto en el gráfico como en la tabla que habían construido en Excel. Esto se llevó adelante mediante preguntas que fuimos realizando en forma oral, con ayuda de las diapositivas que se mostrarán a continuación. Cabe aclarar que las diapositivas eran animadas, y cada renglón que se observa aparecía cuando nosotros considerábamos que los alumnos lo debían visualizar, ya que simplemente eran, o bien preguntas que se les realizaba, o bien afirmaciones a las que ellos ya habían arribado mirando el gráfico y/o la tabla.

Para x=1	Para x=2	Para x=3	Para x=4
$\log_2 1 = 0$	$\log_2 2 = 1$	$\log_2 3 = 1{,}58$	$\log_2 4 = 2$
$\log_2 2 \cdot 1 = 1$	$\log_2 2 \cdot 2 = 2$	$\log_2 2.3 = 2{,}58$	$\log_2 2 \cdot 4 = 3$
$\log_2 1/2 = -1$	$\log_2 2/2 = 0$	$\log_2 3/2 = 0{,}58$	$\log_2 4/2 = 1$

Para x=3
$2{,}58 = 1{,}58 + 1$
$\log_2 2.3 = \log_2 3 + 1$

Para x=4
$3 = 2 + 1$
$\log_2 2 \cdot 4 = \log_2 4 + 1$

y recordando que $\log_2 2 = 1$ tenemos

$\log_2 2.3 = \log_2 3 + \log_2 2$

$\log_2 2 \cdot 4 = \log_2 4 + \log_2 2$

¿Qué sucede con la siguiente expresión?

$$\log_2(2 \cdot x) = ?$$
$$\log_2(2 \cdot x) = \log_2 x + 1 = 1 + \log_2 x = \log_2 2 + \log_2 x$$

Figura 18: Diapositiva 5

Observando el gráfico anterior, ¿cuánto vale la siguiente expresión?

$$\log_2(2 \cdot 4) = ?$$
$$\log_2(2 \cdot 4) = 3$$

¿Cómo se pueden escribir el 2 y el 4 como potencias de 2?

$$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2(2^1 \cdot 2^2)$$
$$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2(2^{1+2})$$

Recordemos que $\log_2 2^x = x$, con lo cual se tiene

$$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2(2^1 \cdot 2^2) = \log_2(2^{1+2}) = 1 + 2$$

Y finalmente, si $1 = \log_2 2$ y $2 = \log_2 4$ se tiene

$$\log_2(2 \cdot 4) = \log_2 2 + \log_2 4$$

Figura 19: Diapositiva 6

Con la expresión de color azul de la diapositiva 6 ($\log_2(2^{1+2})$) se pasaba mediante un hipervínculo a las dos siguientes diapositivas:

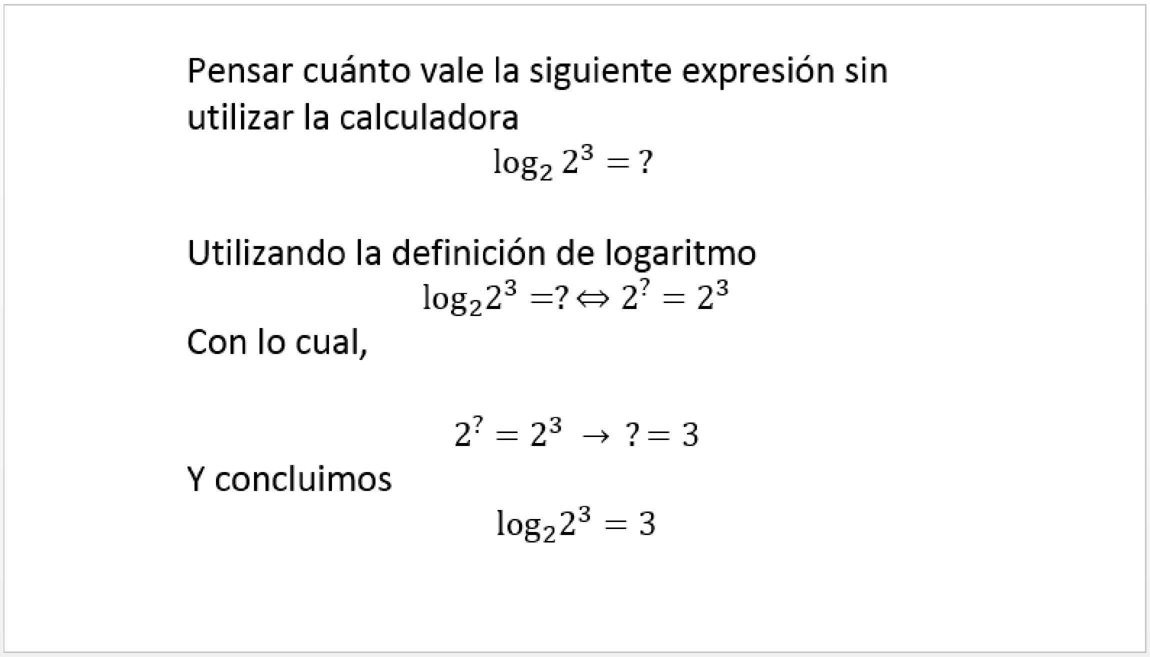


Figura 20: Diapositiva 7

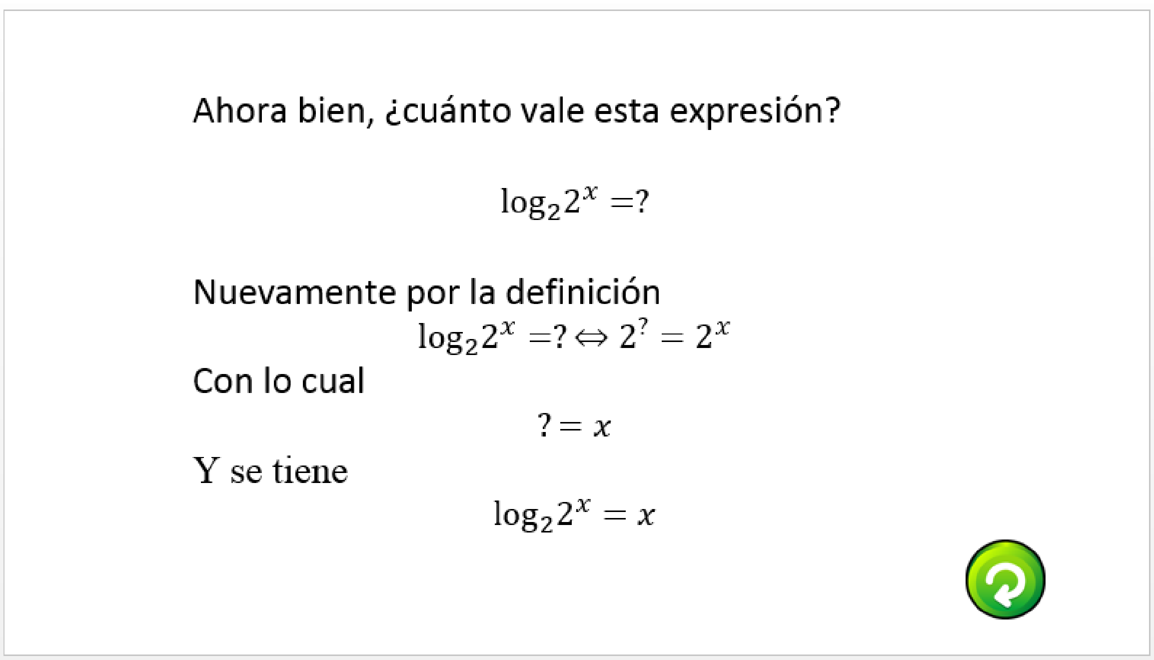


Figura 21: Diapositiva 8

Luego de que se arribara a la expresión $\log_2 2^x = x$ trabajando con las diapositivas de las figuras 20 y 21 (las cuales generaron muchas dudas, principalmente en el quinto B) se continuó la presentación desde la diapositiva de la figura 19, luego del hipervínculo resaltado con azul.

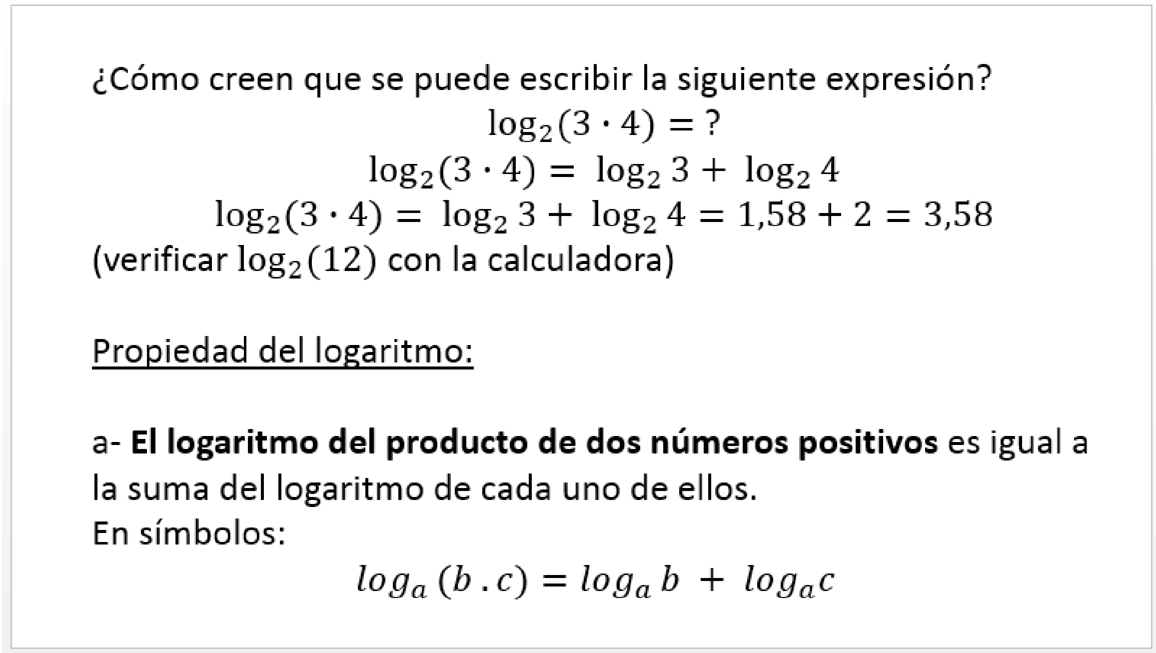


Figura 22: Diapositiva 9

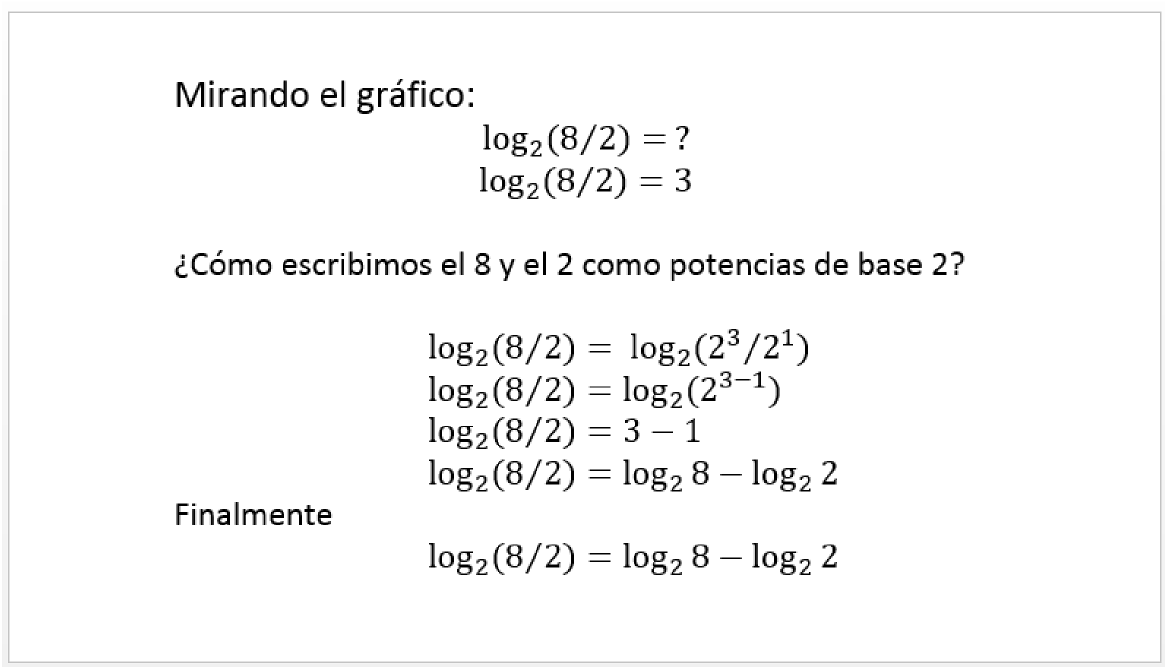


Figura 23: Diapositiva 10

Cómo se podría escribir la siguiente expresión:

$$\log_2(7/3) = ?$$
$$\log_2(7/3) = \log_2 7 - \log_2 3$$
$$\log_2(7/3) = 2{,}80 - 1{,}58$$
$$\log_2(7/3) = 1{,}22$$

(Verificarlo con la calculadora)

Propiedad del logaritmo:

b- **El logaritmo del cociente de dos números positivos** es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.

En símbolos:

$$log_a \left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - log_a c$$

Figura 24: Diapositiva 11

Si bien la propuesta inicial era la misma para las dos divisiones y en ambos cursos se generaron muchas dudas en los alumnos en relación a la actividad, fueron mayores las dificultades que se evidenciaron en el quinto B que en el quinto A. La realización de la actividad 6 y la posterior obtención de las propiedades estaban planificados para realizarse en una clase, y terminó demandando dos clases completas para cada curso.

En primera instancia nos demandó mucho más tiempo del que creíamos el armado de la tabla y el gráfico, pues en general los alumnos no tenían demasiados conocimientos sobre el trabajo con el Excel. Y luego el trabajo exploratorio para obtener las propiedades, más allá de que fue totalmente guiado por nosotros, también generó mucha incertidumbre en los estudiantes.

En el caso particular del quinto B, se tomó la decisión de justificar la segunda propiedad (el logaritmo del cociente de dos números positivos) a partir de la similitud que tenía con la primera: si el logaritmo del producto de dos números es la suma de los logaritmos de cada número, es de esperar que el logaritmo de un cociente sea el cociente de los logaritmos del numerador y el denominador. Este razonamiento no fue planteado directamente por nosotros, sino que se les preguntó a los alumnos que creían que podía suceder con la primera expresión de la figura 10, y quedó planteado en la pizarra la respuesta de una alumna:

$$\log_2(8/2) = \log_2 8 - \log_2 2$$

En el quinto A se decidió trabajar directamente con la pizarra en la clase posterior al trabajo con las netbooks, y se justificó la segunda propiedad de manera muy similar a cómo se había pensado en la presentación.

La diapositiva que se muestra a continuación no fue proyectada con el cañón, sino que fue trabajada directamente en la pizarra.

¿Cómo se puede reescribir la siguiente expresión?

$$\log_2 x^2 = ?$$
$$\log_2 x^2 = \log_2(x \cdot x)$$
$$\log_2 x^2 = \log_2 x + \log_2 x$$
$$\log_2 x^2 = 2 \cdot \log_2 x$$

Y la siguiente?

$$\log_2 x^3 = ?$$
$$\log_2 x^3 = \log_2(x \cdot x \cdot x)$$
$$\log_2 x^3 = \log_2 x + \log_2 x + \log_2 x$$
$$\log_2 x^3 = 3 \cdot \log_2 x$$

Lo observamos en el gráfico

Figura 25: Diapositiva 12

Se observa que la diapositiva 12 finaliza con “Lo observamos en el gráfico”. Al decidir ya no trabajar más con el cañón (en ambos cursos se optó por esto luego de haber trabajado con la netbooks para la primera propiedad) el gráfico que se observa en la figura 26 no se pudo mostrar, con lo cual directamente se formalizó la tercera propiedad como se visualiza en la figura 27.

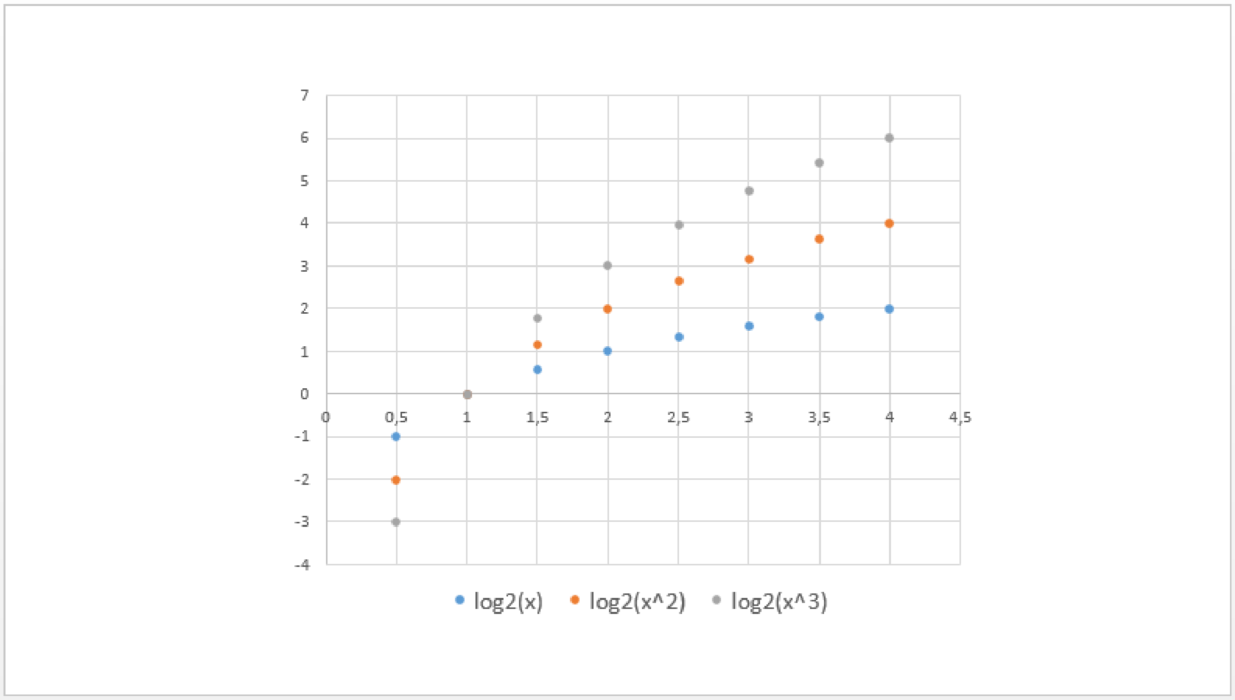


Figura 26: Diapositiva 13

<u>Propiedad del logaritmo:</u>

c- **El logaritmo de la potencia de un número positivo** con exponente real es igual al producto del exponente y el logaritmo del número.

En símbolos:

$$log_a\, b^n \;= n\,.\,log_a\, b \quad (b > 0)$$

Existe otra manera de escribir la raíz de un número positivo:

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}},$$

Con lo cual se tiene

$$log_a \sqrt[n]{b} \;= log_a\, b^{\frac{1}{n}} \;= \frac{1}{n}\,.\,log_a\, b$$

Figura 27: Diapositiva 14

Las propiedades, tal como se han mostrado en las diapositivas, estaban escritas en el material que se les dio a los alumnos de la siguiente manera:

PROPIEDADES DEL LOGARITMO

a- **El logaritmo del producto de dos números positivos** es igual a la suma del logaritmo de cada uno de ellos.
En símbolos:

$$log_a\,(b\,.\,c) = log_a\,b\;+\;log_a c$$

b- **El logaritmo del cociente de dos números positivos** es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor.
En símbolos:

$$log_a\,(\frac{b}{c})\;= log_a\,b\;-\;log_a\,c$$

c- **El logaritmo de la potencia de un número positivo** con exponente real es igual al producto del exponente y el logaritmo del número.
En símbolos:

$$log_a\,b^n\;= n\,.\,log_a\,b$$

Existe otra manera de escribir la raíz de un número positivo:

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}\,,$$

Con lo cual se tiene

$$log_a\,\sqrt[n]{b}\;= log_a\,b^{\frac{1}{n}}\;=\;\frac{1}{n}\,.\,log_a\,b$$

La mayor dificultad al momento de interpretar las propiedades se presentó en la última expresión que se muestra en el cuadro de arriba, la cual se fue trabajando y explicando a medida que los alumnos iban realizando las actividades posteriores.

A continuación se muestra la actividad 7, que si bien tiene tres incisos, solo se trabajó con los dos primeros por una cuestión de tiempo.

Del inciso a) propusimos realizar el 1 y el 2 en clase, mientras que el 3 y el 4 quedaron de tarea. Y del inciso b) se trabajó con el punto 1 (en ambos cursos) y en el quinto A se llegó a trabajar también el punto 5. Al igual que con otras actividades, a aquellos alumnos que lograban avanzar más rápido, se les proponía seguir con los ejercicios restantes.

Actividad 7:

a) Sabiendo que $\log_3 243 = 5$, $\log_3 81 = 4$ y $\log_3 2187 = 7$, resuelve utilizando las propiedades del logaritmo.

1. $log_3(243 \cdot 81) =$

2. $log_3(2187/243) =$

3. $log_3\left(\frac{81 \cdot 2187}{243}\right) =$

4. $log_3\left(\frac{2187 \cdot 243}{81}\right) + log_3(\frac{243}{81}) =$

b) Utilizando las propiedades del logaritmo, efectúa los siguientes cálculos.

1. $log_{\sqrt{5}}\,(\sqrt{\frac{1}{5}.25}) =$

2. $log_{\sqrt{2}}\,(\frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}) =$

3. $log_3\,(\frac{3}{81.\sqrt[4]{27}}) =$

4. $log_2(\frac{\sqrt[3]{64}\,.2^3}{2^4.\sqrt{128}}) =$

5. $log\ 0{,}02 + log\ 0{,}005 + log\ \frac{1}{10} =$

6. $log_{\frac{3}{2}}\left[\frac{4}{9}.\sqrt{(3:2)^{-1}}\right] =$

7. $\ln(\frac{e^3 \cdot \sqrt{e^3}}{e^2 \cdot e^{-4}}) =$

c) Desarrolla las siguientes expresiones utilizando las propiedades vistas. Considera positivos todos los argumentos de los logaritmos.

1. $log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{3\,.\sqrt{a}}{b}\right) =$

2. $log\left[\frac{5\,.a\,.\sqrt[7]{b}}{b^4}\right] =$

3. $log_2\left[\frac{(a+2)^3.\sqrt{a}}{a}\right] =$

La actividad 8 que figuraba en el material de los alumnos no se realizó por cuestión de tiempo, con lo cual se la agregó al ANEXO de este informe (al igual que otras actividades que iremos mencionando)

Actividad 9

Coloca verdadero cuando se cumpla la igualdad y falso cuando no. Justifica tu respuesta.

a. $2.log\ 5 - log\ 4 = 2.log\ (\frac{5}{4})$

b. $\frac{log\ a}{log\ b} = log\ (\frac{a}{b})$

c. $log_2 \sqrt[n]{a} = \frac{n}{2} log_2\ a$

d. $log_2\ 2.b = 1 + log_2\ b$

e. $log_8\ (a^4.b) = log_2\ a + log_8\ b$

Se decidió que la actividad 9 no se trabajara en el quinto B hasta la “clase de repaso”, pues en esta división ya nos habíamos atrasado bastante con todo lo planificado. Mientras que en quinto A se trabajaron los puntos 1 y 2.

Actividad 10

Aplica las propiedades del logaritmo para llevar las siguientes expresiones en la forma de un solo logaritmo.

a. $log_3\ 5 + 4.log_3\ t =$

b. $log\ 3 + log\ 7 + log\ 10 =$

c. $\frac{1}{2} .log_e\ x + 2.log_e\ (x+1) - log_e\ 7 =$

d. $log_2\ (3x - 1) + 3.log_2\ (x-1) - 4.log_2\ (x-2) =$

e. $\ln(x^2+1) - \ln(x-3) =$

En quinto A se trabajaron los incisos a) y c), mientras que en quinto B se dieron como tarea los mismos ejercicios, los cuales luego se controlaron en la clase de repaso.

Para la introducción al “número e” se había planificado una actividad asociada a la matemática financiera, más específicamente al trabajo con el interés simple y compuesto. A partir del conocimiento por parte de los alumnos del número e, se definiría luego el “logaritmo natural”. Esta actividad no se pudo realizar (también por motivos de tiempo) y se puede mirar en el anexo.

Se tomó la decisión de dar como tarea (en ambos cursos) la actividad 12 que figura a continuación:

Actividad 12

a) Mira el video del siguiente link: https://www.youtube.com/watch?v=MKgjf-1XcNM
b) El autor del video propone realizar una inversión de $100 y va reinvirtiendo su dinero por períodos cada vez más cortos. Realiza el mismo procedimiento pero invirtiendo $1 y compara los valores que vas obteniendo con los que obtiene el autor. ¿Tienen alguna similitud? ¿Qué dinero obtendrías si vas al banco una vez por hora?
c) Escribe los primeros 10 dígitos del número que obtienes.

En dicha actividad se proponía mirar un video de no más de 6 minutos, donde se mostraba el trabajo con interés simple y compuesto, para arribar al número 271,8281828… En los incisos b) y c) se proponía un trabajo similar al mostrado en el video, con el cual se llegaba efectivamente al número 2,718281828… En el quinto A solo algunos alumnos realizaron la tarea, a los cuales se les pidió que comentaran lo que habían hecho para luego definir en el pizarrón el número *e*. En el quinto B ningún alumno había mirado el video, con lo cual se optó en ese momento por relacionar al número *e* con el número *pi*, por algunas características similares que poseen ambos números (por ejemplo, los dos son irracionales y figuran en la calculadora), y presentarlo directamente con su valor correspondiente.

Luego de que los alumnos verificaran en sus calculadoras dónde se podía encontrar el número, se definió el logaritmo natural como aquél logaritmo cuya base es el número *e,* y en el pizarrón quedó escrita la siguiente expresión:

$Log_e = Ln$

Se les propuso a los alumnos calcular algunos logaritmos para que utilicen la tecla correspondiente en la calculadora. En el quinto B, por ejemplo, quedó escrita la siguiente expresión en la pizarra:

$$\ln 7 = 1{,}94 \quad pues \;\; e^{1{,}94} = 7$$

En ambos cursos se les preguntó a los alumnos qué resultado obtenían al calcular el logaritmo natural del número e, y luego de escuchar las respuestas se escribió en la pizarra:

$$\ln e = 1 \leftrightarrow e^1 = e$$

La guía de actividades que les habíamos entregado a los alumnos finalizaba con una actividad destinada a la resolución de ecuaciones (más complejas que las que se habían resuelto anteriormente) y una lista de problemas. Ambas propuestas figuran en el anexo y no se trabajaron en clase, aunque en el caso del quinto A, el primer problema de la lista fue incluido en la clase de repaso.

2.5 Clase de repaso

Al momento de realizar nuestra planificación uno de los criterios institucionales que nos planteó el profesor tutor es la existencia de una "clase de repaso" previa a la evaluación escrita (la prueba escrita era considerada por la institución el instrumento principal de evaluación). Esta última debía reflejar los contenidos trabajados en clase, pero por sobre todas las cosas, debía tener cierta similitud, en cuanto a las actividades propuestas, a la clase de repaso (ya habíamos presenciado en nuestras observaciones que el tipo de actividades que se planteaban en la prueba escrita eran casi casi idénticas a las de la clase de repaso).

Conforme a esto decidimos armar la clase de repaso pensando directamente en el tipo de ejercicio y problemas que luego incluiríamos en la evaluación escrita.

2.5.1 Clase de repaso 5° A

1. Sabiendo que $log_3 243 = 5$ y $log_3 2187 = 7$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo**:
   a) $log_3 \frac{2187}{(243)^2} =$
   b) $log_3 \frac{243}{81 \cdot 2187} =$

2. Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta**:
   a) $2.log\, a - log\, b = 2.log\,(\frac{a}{b})$
   b) $log_2(2.b) = 1 + log_2 b$

3. Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo:
   a) $log_2\ 3x + 3.log_2 x - log_2 (x-2) =$
   b) $ln (x^2+1) - ln (x-3) =$

4. Hallar el valor de x
   a) $\log(\mathrm{x}-2) = 2$
   b) $\log_{\mathrm{x}} 32 = 5 + \log_3 1$
   c) $\log_{\sqrt{2}}(4+\mathrm{x}) = 8$
   d) $\log_5 x + log_5 30 = 3$

5. Resuelve
   a) La extensión de zona desértica se quintuplica en cierta comarca cada 15 años. Si hoy existen 80 hectáreas desérticas, ¿Dentro de cuántos años ocupará toda la comarca que tiene 32621 hectáreas de superficie?
   b) Una piscina pierda la tercera parte de su volumen de agua cada semana. Si en un momento dado almacenaba 80.000 litros ¿Aproximadamente cuánto tiempo debe pasar para que le queden 1000 litros?

2.5.2 Clase de repaso 5°B

1. Sabiendo que $log_3 243 = 5$ y $log_3 2187 = 7$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) :**
   a) $log_3 \frac{2187}{243^2} =$
   b) $log_3 \frac{243}{81 \cdot 2187} =$

2. Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta**:
   a) $log_2(2.b) = 1 + log_2 b$
   b) $\frac{\log a}{\log b} = log\ (\frac{a}{b})$

3. Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo:
   a) $log_2\ 7 + 3.log_2 x =$
   b) $ln\, x^2 - ln (x-3) =$

4. Hallar el valor de x
   a) $\log(\mathrm{x}+150) = 3$

b) $\log_5 x + log_5 15625 = 10$

5. Resuelve

a) La extensión de zona desértica se quintuplica en cierta comarca cada 15 años. Si hoy existen 80 hectáreas desérticas, ¿Dentro de cuántos años ocupará toda la comarca que tiene 32621 hectáreas de superficie?

b) La manera en la que ciertas bacterias atacan el cuerpo de un animal está dada por la siguiente expresión:

$$4 \cdot 5^x = y$$

donde *"x"* representa la *cantidad de períodos de 15 horas de duración* en los que se propaga la enfermedad e *"y",* el *número de bacterias* que posee su cuerpo en esa cantidad de períodos transcurridos. Este animal morirá cuando su cuerpo posea más de 100000 de bacterias ¿Cuánto tiempo pasará aproximadamente hasta que se produzca su muerte?

2.6 Evaluación

El Diseño Curricular de Educación Secundaria de la provincia de Córdoba (2011- 2015) incluye su propuesta educativa oficial respecto de la evaluación y lo hace en términos que se reproducen en el documento de apoyo curricular *"La evaluación de los aprendizajes en Educación Secundaria"*, donde se adopta la conceptualización de evaluación que proponen Stufflebeam y Shinkfield (1993, citado en dicho documento), quienes la caracterizan por el proceso de diseñar, recoger y analizar sistemáticamente cualquier información. En este documento se caracteriza a la evaluación como un *"proceso integral"* y *"continuo"*, donde *"el profesor siempre está recogiendo datos y tomando decisiones; es decir, evaluando permanentemente, registrando el proceso global desarrollado por el grupo: sus construcciones, sus dificultades, las detenciones y los silencios de algunos integrantes… y ajustando su tarea de enseñanza a este registro."*

Acordando con esta perspectiva analizaremos e informaremos los procesos de evaluación y control que decidimos utilizar en nuestras prácticas docentes.

2.6.1 Evaluación en desarrollo

En nuestra primera clase presentamos tres "criterios para la evaluación en desarrollo", que mencionamos a continuación:

- ✓ Compromiso y participación en clase tanto en el desempeño individual como grupal
- ✓ Presentaciones orales y escritas, tanto individuales como grupales
- ✓ Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas

Con “presentaciones orales y escritas” hacemos referencia, por un lado, a los momentos en los cuales los alumnos pasaban al frente a realizar y/o contar alguna actividad, y también cuando lo hacían desde su banco en forma oral; y por el otro lado (las presentaciones escritas) nos referimos exclusivamente a la presentación de carpetas y al seguimiento que fuimos realizando de las mismas.

Debido a que por cuestiones de tiempo no todos los alumnos pudieron pasar al frente al menos una vez a lo largo de nuestras prácticas, decidimos incluir las “presentaciones orales” dentro de lo que es “compromiso y participación en clase”, y en “presentaciones escritas” considerar la presentación de carpetas, como ya hemos mencionado.

A estos tres criterios que desarrollaremos en detalle a continuación, se le sumó una evaluación escrita. Es importante destacar que, al ser una escuela paritaria, la institución considera ciertos aspectos que son requeridos por los veedores de Italia, entre los cuales se encuentra el hecho de darle una gran importancia a la evaluación individual y escrita, como así también a la “clase de repaso” previa a la evaluación.

Para evaluar el “compromiso y participación en clase” lo que hicimos fue tratar de recolectar la mayor información posible durante las clases sobre algunos aspectos, los cuáles mencionamos a continuación.

El alumno:

- ➢ Trabajó o no trabajó (tanto en forma individual como grupal, dependiendo la actividad)
- ➢ Pasó al frente a desarrollar y/o explicar una actividad
- ➢ Expuso desde el banco algún planteo, idea o desarrollo realizado

Estos ítems se plasmaban en una hoja que por lo general llevaba el practicante que no estaba a cargo de la clase, tratando siempre de que al finalizar la clase se tuviese al menos algún tipo de observación por cada alumno. En esa misma hoja se controlaba la asistencia y la tarea en caso de que se hubiese dado. El encabezado de esa hoja consistía en lo siguiente:

CURSO: **FECHA:**

Alumno	Asist.	Tarea	OBSERVACIONES

En cuanto a las "presentaciones escritas" hubo diferencias entre los cursos a la hora de evaluarlas, ya que en 5° B se pidieron las carpetas para corregirlas y en 5° A el control que se realizó consistió más bien en ir viendo durante las clases las producciones que iban realizando los alumnos y cuánto de esto quedaba plasmado en sus carpetas. En ambos cursos se insistió mucho con la idea de que se escriba lo máximo posible sobre las actividades que se van realizando.

Cada uno de los tres criterios de la "evaluación en desarrollo" tuvo una valoración numérica que incidió en la nota final de la "evaluación en desarrollo", que a su vez luego incidió en la nota de la evaluación escrita. Al finalizar nuestras prácticas se le entregó al profesor tutor una "nota final" de cada alumno, con todas las notas parciales y la descripción del procedimiento que se había utilizado para obtener dicha nota final. Lo mismo se hizo con cada uno de los alumnos.

Si bien el docente tutor no acostumbraba a utilizar este tipo de "evaluación continua" en forma tan explícita (sí consideraba la responsabilidad en las tareas, las presentaciones de trabajos prácticos y algunas otras instancias que le permitieran a los alumnos "levantar la nota"), se mostró muy conforme con este proceso que estábamos llevando a cabo.

A continuación mostramos el material que se entregó a los alumnos, distinguiendo ambas divisiones, ya que se visualizan algunas diferencias. Este material, que fue impreso en una hoja, se anexó a la evaluación escrita y fue entregado con la misma.

Cabe destacar que al momento de entregar esta evaluación a los alumnos, los mismos se mostraron muy satisfechos con los puntajes que habían obtenido.

EVALUACIÓN EN DESARROLLO 5° A

Alumno:

Se consideran los siguientes ítems:

- ✓ Compromiso y participación en clase, tanto en el desempeño individual como grupal.
- ✓ Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas.

<u>Criterios para la obtención de la calificación</u>

En primera instancia se considera un puntaje por **responsabilidad en el cumplimiento de las tareas**, y esta calificación incide directamente en la calificación de **compromiso y participación en clase** según el siguiente cuadro:

Calificación de “responsabilidad en el cumplimiento de las tareas”	Incidencia en la nota de “compromiso y participación en clase”
9-10	Suma 1 punto
6-7-8	No suma puntos
5-6	Resta 1 punto

La nota de **evaluación en desarrollo** se obtiene sumando o restando a la nota de “compromiso y participación en clase” el puntaje asignado según el cuadro anterior.

<u>Criterios para la obtención de la calificación final</u>

De acuerdo a la calificación de la evaluación en desarrollo y al puntaje obtenido en la evaluación escrita, la calificación final se obtiene contemplando el siguiente cuadro:

Calificación de evaluación en desarrollo	Sobre el puntaje de la evaluación escrita
9-10	Suma 2 pts.
8	Suma 1,5 pts.
7	Suma 1 p.
6	Suma 0,5 pts.
5	No suma puntos
4	Resta 1/2 punto

Nota de **“responsabilidad en el cumplimiento de las tareas”:**
Nota de **“compromiso y participación en clase”:**
Nota final **de evaluación en desarrollo**:

EVALUACIÓN EN DESARROLLO 5° B

Alumno:

Se consideran los siguientes ítems:

- ✓ Compromiso y participación en clase, tanto en el desempeño individual como grupal.
- ✓ Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas.
- ✓ Presentaciones escritas (carpeta)

Criterios para la obtención de la calificación

En primera instancia se considera un puntaje por **responsabilidad en el cumplimiento de las tareas**, que incidirá directamente sobre las **presentaciones escritas** (en este caso la carpeta) de la siguiente manera:

Cantidad de tareas presentadas (de un total de 5)	**Incidencia en la nota de las presentaciones escritas (carpeta)**
5 tareas	Suma 2 puntos
4 tareas	Suma 1,5 puntos
3 tareas	Suma 1 punto
2 tareas	Suma 1/2 punto
1 tarea	No suma puntos
Ninguna	Resta 1/2 punto

Para obtener la calificación de **evaluación en desarrollo** se promedia la nota de **presentaciones escritas** con la nota de **compromiso y participación en clase.**

Consideraciones sobre las presentaciones escritas

Sobre la presentación de la carpeta se consideraron los siguientes aspectos:

- Si está o no completa.
- Si está o no ordenada.
- El tipo de registro que se ha realizado de las distintas actividades que se han propuesto en las clases, tanto individuales como grupales.

CALIFICACIÓN FINAL

<u>Criterio para la obtención de la calificación final</u>

De acuerdo a la calificación de la **evaluación en desarrollo** y al puntaje obtenido en la **evaluación escrita**, la calificación final se obtiene contemplando el siguiente cuadro:

Calificación de evaluación en desarrollo	Sobre el puntaje de la evaluación escrita
Mayor o igual a 9	Suma 2 pts.
Mayor o igual a 8 y menor a 9	Suma 1,5 pts.
Mayor o igual a 7 y menor a 8	Suma 1 p.
Mayor o igual a 6 y menor a 7	Suma 0,5 pts.
Mayor o igual a 5 y menor a 6	No suma puntos
Menor a 5	Resta 1/2 punto

La calificación final se obtiene sumando (o restando) el puntaje obtenido en la evaluación escrita con el puntaje correspondiente a la calificación de la evaluación en desarrollo.

Puntaje de **"responsabilidad en el cumplimiento de las tareas":**
Nota de **"presentaciones escritas"** (carpeta):
Nota de **"compromiso y participación en clase":**
Nota final **de evaluación en desarrollo**:

Mostramos a continuación los puntajes obtenidos de dos alumnos (uno de quinto A y otro de quinto B) para ejemplificar lo expuesto anteriormente.

<u>Alumno de 5° A</u>

- Nota de **"responsabilidad en el cumplimiento de las tareas":** 5 (resta un punto a la nota de "compromiso y participación en clase, que termina siendo la nota final de "evaluación en desarrollo")
- Nota de **"compromiso y participación en clase":** 9
- Nota final **de evaluación en desarrollo**: 8 (se obtiene de restar un punto a la nota anterior)

Al obtener un puntaje final de 8 este alumno sumó 1,5 pts. para la evaluación escrita.

Alumno de 5° B

- Puntaje de **“responsabilidad en el cumplimiento de las tareas”:** 0,5 (Suma medio punto a la carpeta. Esto implica haber presentado 2 tareas de un total de 5)
- Nota de **“presentaciones escritas”** (carpeta): 6,50 (su nota de carpeta correspondía a un 6)
- Nota de **“compromiso y participación en clase”:** 7
- Nota final **de evaluación en desarrollo**: 6,75 (es el promedio de las dos notas anteriores)

Al tener un puntaje final de 6,75, este alumno sumó medio punto para la evaluación escrita.

2.6.2 Evaluación escrita

Como ya hemos mencionado se realizó una evaluación escrita en la última clase de nuestras prácticas. La misma fue elaborada respetando el criterio que propone la institución en cuánto a la selección del tipo de ejercicios que se incluyen en dicha evaluación, los cuales deben tener total similitud con los que se trabajaron en la clase de repaso.

Con el criterio ya mencionado se armó un total de 5 evaluaciones, dos por cada división (tema 1 y tema 2) y una evaluación que se le tomó a una alumna sola la semana previa a la fecha que se había establecido para los cursos, con motivo de que la estudiante debía realizar un viaje y no podía rendir con sus compañeros (el profesor tutor se encargó de tomarle la evaluación a esta alumna)

El tiempo establecido para el desarrollo de la evaluación fue de 75 minutos aproximadamente, que corresponde a la duración del módulo completo de clase. Como en ambos cursos se perdieron unos minutos para iniciar la evaluación (la entrada al aula, la toma de asistencia y la explicación de algunos detalles puntuales de la prueba) se le permitió a los alumnos utilizar parte del recreo si necesitaban más tiempo.

Aquí se muestran dos de las cinco evaluaciones que se armaron (las otras tres se pueden mirar en la sección ANEXO), respetando el mismo formato con el que se las presentamos a los alumnos. Si bien el tipo de ejercicio es el mismo en todas, el nivel de complejidad es levemente superior en las que corresponden al quinto A, acorde a lo que se trabajó en clase y a las distintas producciones y avance de los alumnos que fuimos observando a lo largo de las prácticas.

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Unidad III: Logaritmación **Curso: 5to Año A**

Tema 1

Nombre: ____ **Fecha:** __ /__ / __

Objetivos de la evaluación:

- Utilizar la definición de logaritmo en las distintas situaciones problemáticas que se presentan.
- Construir argumentaciones.
- Reconocer y distinguir los distintos tipos de notación que se utilizan ($log_a\, b$, $log\, b$, $ln\, b$)
- Interpretar el enunciado de un problema y poner en juego los conocimientos adquiridos para su resolución. Evaluar e interpretar la/s solución/es obtenida/s dentro del contexto del problema.
- Aplicar las propiedades del logaritmo para realizar transformaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar la calculadora como herramienta de cálculo.
- Realizar un correcto manejo algebraico de los desarrollos (utilización de paréntesis, jerarquía de las operaciones, transformaciones algebraicas en general).
- Utilizar una correcta escritura a la hora de efectuar los desarrollos matemáticos que implique:
  - ✓ Una clara exposición sobre los razonamientos efectuados.
  - ✓ Respeto por las notaciones con subíndices, superíndices, etc.

Calificación:

Punto 1		Punto 2	Punto 3		Punto 4		Punto 5		Eval. Desarrollo	Puntaje Final

1) Resuelve

a) La extensión de zona desértica se triplica en cierta comarca cada 12 años. Si hoy existen 50 hectáreas desérticas, ¿Dentro de cuántos años ocupará toda la comarca que tiene 15000 hectáreas de superficie? **(1,5 pts)**

b) Recordando la historia del tablero de ajedrez estudiada en clase, habíamos visto que, cuando Sissa le pedía al rey que colocara 3 granos en la primera casilla y que los granos de cada casilla dupliquen la cantidad de granos de la casilla anterior, la expresión que permitía calcular la cantidad de granos de la casilla "x" era:

$$3.2^{x-1}$$

De acuerdo a esa expresión, ¿en qué casilla se superan los 5 millones de granos? **(1,5 pts.)**

2) Sabiendo que $log_6\, 216 = 3$, $log_6\, 46656 = 6$ y $log_6\, 1296 = 4$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo. (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) (0,5 p)**

$$\log_6(21466\,.\,6152696) - \log_6[(216)^2] =$$

3) Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta** (elige 2 de los 3 para resolver). **(2p./1 p. cada uno)**

a. $p\,.\log_a c - \log_a m + \log_a b = \log_a(\frac{c^p}{m.b})$

b. $\log_4(\sqrt[4]{256}\ .\,4\,.\,x) = \log_4 x + 2$

c. $\log_3(3{:}\,x^4) = 1 - 4\,.\log_3 x$

4) Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo.

a. $log\ 4 + log\ a^3 + 5.\ log\ (2.b) =$ **(0,75 p)**

b. $ln\ (2.x + 3) - ln\ x =$ **(0,75 p)**

5) Hallar el valor de x

a. $log\ (5.x + 20) = 3$ **(1 p)**

b. $log_x\ 81 = log_3\ 1 + 4$ **(1 p)**

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Unidad III: **Logaritmación** **Curso:** **5to Año B**

Tema 1

Nombre: ____ **Fecha: __ /__ / __**

Objetivos de la evaluación:

- Utilizar la definición de logaritmo en las distintas situaciones problemáticas que se presentan.
- Construir argumentaciones.
- Reconocer y distinguir los distintos tipos de notación que se utilizan ($\log_a b$, $\log b$, $\ln b$)
- Interpretar el enunciado de un problema y poner en juego los conocimientos adquiridos para su resolución. Evaluar e interpretar la/s solución/es obtenida/s dentro del contexto del problema.
- Aplicar las propiedades del logaritmo para realizar transformaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar la calculadora como herramienta de cálculo.
- Realizar un correcto manejo algebraico de los desarrollos (utilización de paréntesis, jerarquía de las operaciones, transformaciones algebraicas en general).
- Utilizar una correcta escritura a la hora de efectuar los desarrollos matemáticos que implique:
    - ✓ Una clara exposición sobre los razonamientos efectuados.
    - ✓ Respeto por las notaciones con subíndices, superíndices, etc.

Calificación:

Punto 1		**Punto 2**	**Punto 3**		**Punto 4**		**Punto 5**		**Eval. Desarrollo**	**Puntaje Final**

1) Resuelve

a) Recordando la historia del tablero de ajedrez estudiada en clase, supongamos que Sissa le pide al rey colocar 5 granos en la primera casilla y que cada casilla quintuplique la cantidad de granos de la casilla precedente. ¿En qué casillero se superan o alcanzan los 180 millones de granos? **(1,5 pts.)**

b) En cierta comarca, una zona desértica se extiende actualmente unas 90 hectáreas y se duplica cada 8 años. La expresión que permite calcular cuánto será la extensión de dicha región desértica luego de que transcurra una determinada cantidad de tiempo es $90 \cdot 2^x$ (donde "x" representa la cantidad de períodos de 8 años que transcurrirán desde la actualidad). ¿Dentro de cuántos años la zona desértica ocupará toda la comarca, si ésta tiene 32400 hectáreas de superficie? **(1,5 pts.)**

2) Sabiendo que $\log_7 2401 = 4$, $\log_7 343 = 3$ y $\log_7 16807 = 5$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo. (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) (0,5 p)**

$$log_7\left(\frac{16807}{343}\right) + log_7\left(\frac{2401}{16807 \cdot 343}\right) \quad =$$

3) Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta** (elije 2 de los 3 para resolver). **(2p./1 p. cada uno)**

a. $\log_4(4 \cdot x) = \log_4 x + 1$
b. $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
c. $\log_7(7 \cdot x^2) = 1 + 2 \cdot \log_7 x$

4) Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo.

a. $\ln x - \ln(2x + 3) =$ **(0,75 p)**
b. $log\, 5 + log\, a + 3 \cdot log\, b =$ **(0,75 p)**

5) Hallar el valor de x

a) $\log(5\mathrm{x} - 1) = 3$ **(1 p)**
b) $\log_2 4096 + \log_2 x = 17$ **(1 p)**

2.6.3 Resultados evaluaciones

2.6.3.1 Resultados "Evaluación en desarrollo"

Debido a la diferencia que se puede evidenciar entre los criterios para la "Evaluación en desarrollo" del quinto A y el quinto B, es que se obtuvieron notas enteras en el primero y no necesariamente enteras en el segundo, como se puede observar en los siguientes histogramas.

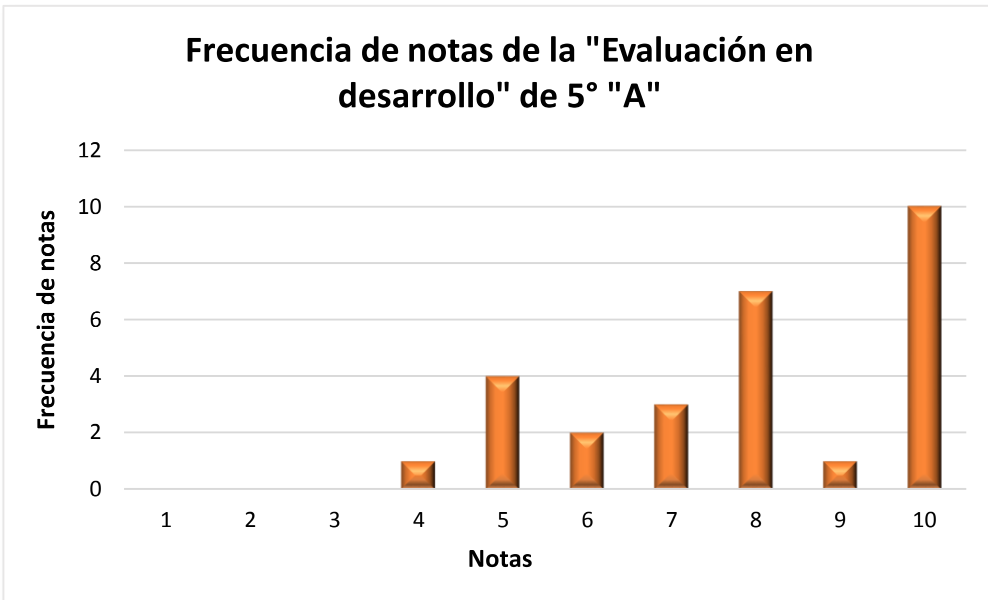


Figura 28: Histograma que muestra la frecuencia de notas de la "Evaluación en desarrollo" de 5° "A"

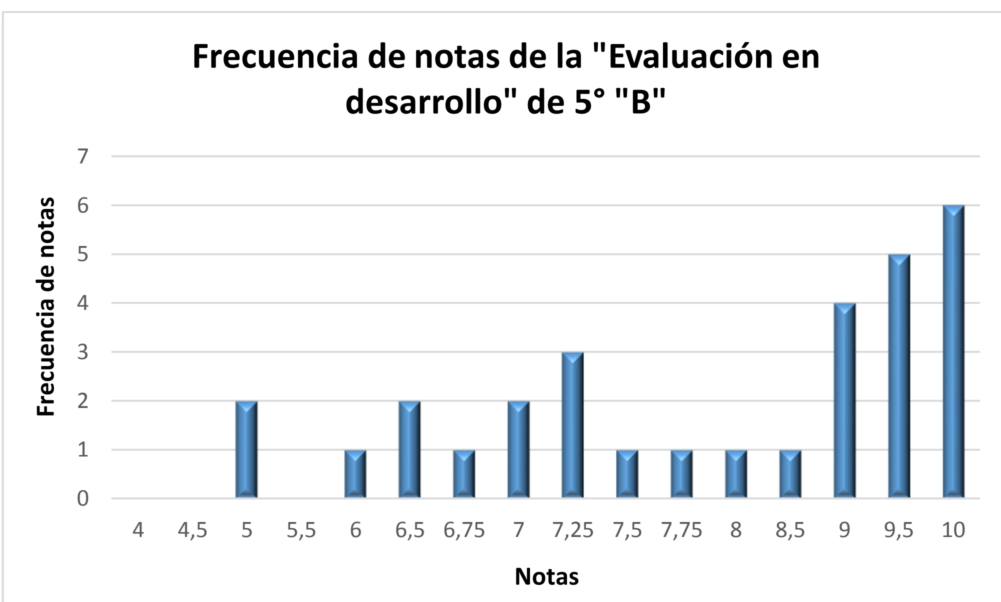


Figura 29: Histograma que muestra la frecuencia de notas de la "Evaluación en desarrollo" de 5° "B"

2.6.3.2 Calificación final

Aquí mostramos los resultados de la calificación final, que incluye la nota de la evaluación escrita más el puntaje extra obtenido por la evaluación en desarrollo. Esta nota les fue entregada a los alumnos la clase siguiente a la evaluación escrita.

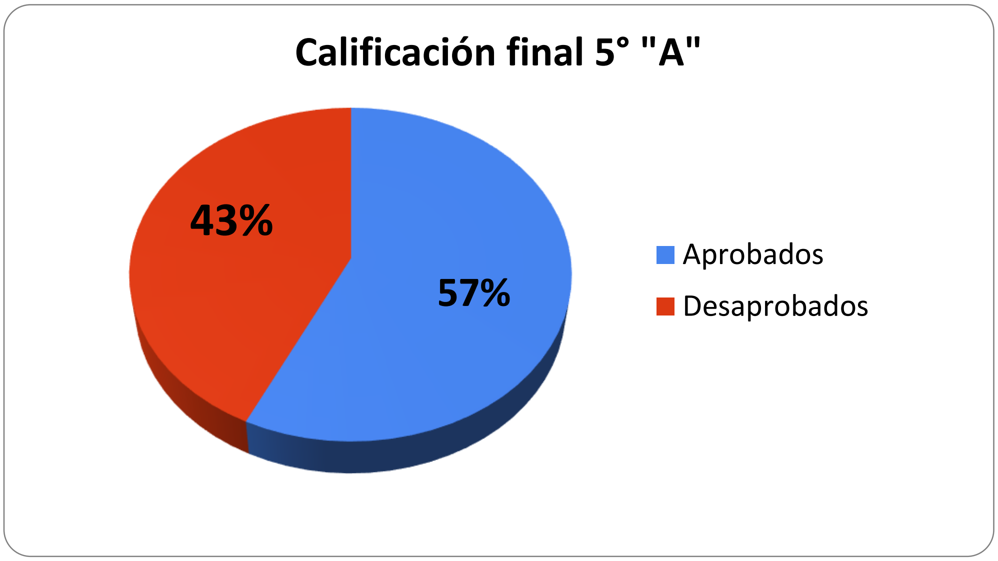


Figura 30: Gráfico circular que indica el porcentaje de aprobados y desaprobados en 5° "A"

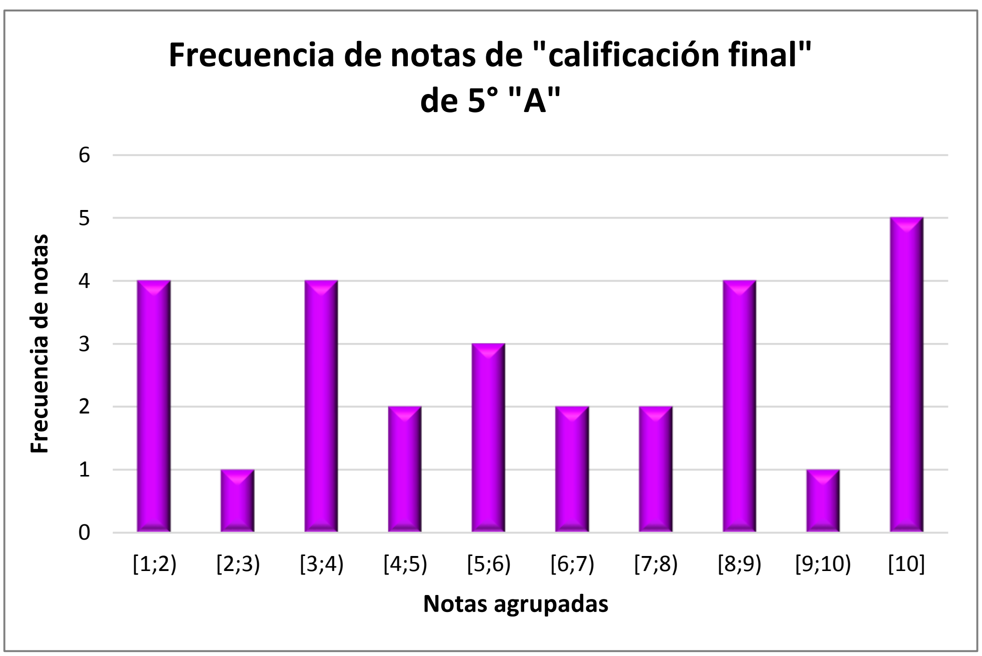


Figura 31: Histograma que muestra la frecuencia de notas agrupadas de la "Calificación final" de 5° "A"

Las figura 31 y 33 muestran “notas agrupadas” por intervalos[8]. Nos pareció conveniente armar los histogramas de esa manera ya que las calificaciones finales contenían resultados no enteros, y decidimos no redondear al momento de entregarles las notas a los alumnos.

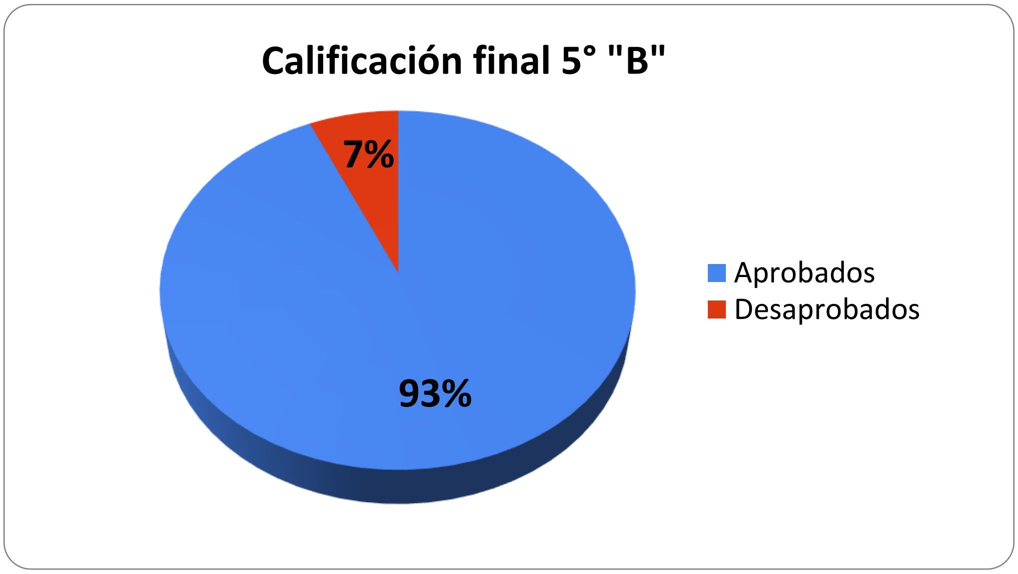


Figura 32: Gráfico circular que indica el porcentaje de aprobados y desaprobados en 5° “A”

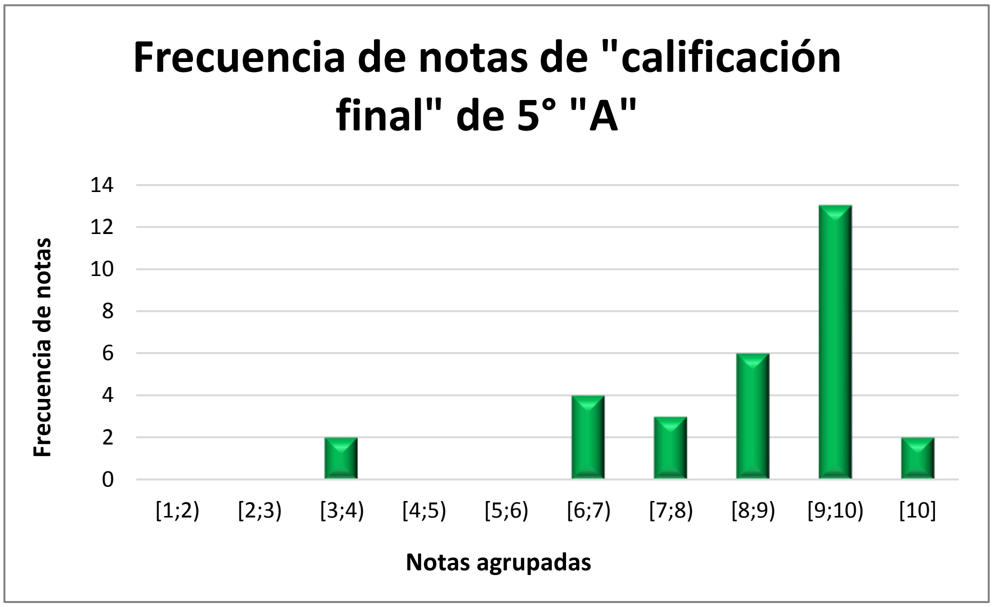


Figura 33: Histograma que muestra la frecuencia de notas agrupadas de la “Calificación final” de 5° “B”

[8] El intervalo [1;2) agrupa las notas que están entre 1 y 2, incluyendo al 1 pero no incluyendo al 2 (igual con el resto de los intervalos). La última barra indicada con [10] hace referencia a la cantidad de alumnos que obtuvieron esa nota.

2.6.4 Algunas consideraciones sobre la evaluación

Podemos observar que en general, y según nuestra consideración, las notas de la "Evaluación en desarrollo" fueron buenas, con un número de desaprobados bastante pequeño (solo dos en quinto B y cinco en quinto A). Los estudiantes de ambos cursos se mostraron muy participativos y comprometidos con el trabajo que se les propuso (salvo ese pequeño número de alumnos ya mencionado), más allá de las distintas intervenciones que debimos realizar para ordenar la comunicación dentro del aula, que no siempre resultó ser tan fluida, principalmente en los debates (se reflexionará sobre esto en la siguiente sección de este informe).

En cuanto a los criterios utilizados para este tipo de evaluación, observamos que la mayor falencia se evidenció en el "cumplimiento de las tareas", algo que ya nos había anticipado el docente tutor en el período de observaciones.

Sobre las evaluaciones escritas si se evidenciaron mayores diferencias entre un curso y otro. Reflexionando sobre este hecho, podemos mencionar dos factores que consideramos que pueden haber influido. Por un lado, la clase de repaso en quinto B se realizó un día antes de la evaluación escrita, lo que puede haberle permitido a los alumnos llegar con los "temas frescos", mientras que en quinto A hubo una semana entre la clase de repaso y la evaluación. Y por otro lado, podemos mencionar el grado de dificultad de algunos de los ejercicios propuestos para esta instancia. Si bien todos los temas que se evaluaron fueron abordados en clase, a los ejercicios de aplicación de las propiedades del logaritmo (incluyendo el "verdadero y falso") y a las ecuaciones se les destinó un tiempo considerablemente menor que, por ejemplo, a la resolución de problemas. Esto puede haber repercutido en los errores que luego se observaron en las evaluaciones de este curso, que en su gran mayoría eran de tipo algebraico. En el caso particular del "verdadero o falso", creemos que la complejidad del ejercicio que se propuso fue incluso mayor que los abordados en la clase de repaso, lo cual incidió luego en los resultados obtenidos por los alumnos.

3. ELECCIÓN Y ANÁLISIS DE UN PROBLEMA

En el capítulo 2 de este informe el lector habrá podido observar los distintos “problemas matemáticos”[8] que formaron parte de nuestra planificación, e incluso en el ANEXO figuran aquellos problemas que formaron parte de la guía de actividades que se les dio a los alumnos, pero que por una cuestión de tiempo no se lograron trabajar en clase.

Esta decisión de trabajar con problemas en gran parte de las clases (inclusive la introducción al tema, como ya se pudo ver en la sección anterior, se realizó con un problema) no fue azarosa ni mucho menos. Los autores de este informe consideramos que resolver problemas es efectivamente “hacer matemática”[9], y que la matemática realmente consiste en problemas y soluciones. También pensamos que la resolución de problemas aporta significativamente a la *“búsqueda del sentido”* (Sadovsky, 2005), ya que *“Uno de los objetivos esenciales (y al mismo tiempo una de las dificultades principales) de la enseñanza de la matemática es precisamente que lo que se ha enseñado esté cargado de significado, tenga sentido para el alumno” (Charnay, R. 1988, en Parra y Saiz, 1994).* Consideramos que para que esta construcción del sentido se vea reflejada en los alumnos, es esencial que las nociones matemáticas puedan aparecer como herramientas para resolver problemas, para que luego estas herramientas puedan ser estudiadas por sí mismas.

Creemos que el abordaje de la matemática a través de la resolución de problemas colabora en cierto modo a que los propios alumnos reflexionen sobre sus “creencias”[10] acerca de lo que es la matemática, colocándolos frente a una situación desafiante (al menos eso es lo que intentamos en gran parte de nuestras prácticas). *“Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tiene entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros, a plantear preguntas que le permitan avanzar…”* (Sadovsky, 2005, pág.13)

[8] Abordamos este concepto en el transcurso de la sección
[9] Acordamos con lo que plantea el Diseño Curricular 2011-2015 del Ciclo Básico de la Educación Secundaria para la Provincia de Córdoba: “la Matemática se presenta como una actividad de producción, por lo que hacer matemática implica dar la posibilidad de crearla, producirla” (pág. 35).
[10] Lampert (1990) citado en Schoenfeld (1992), habla sobre las “creencias de los estudiantes”. Se mencionarán algunas en el transcurso de esta sección.

Por último, afirmamos que la resolución de problemas debe ocupar un lugar central en la enseñanza, y que la clase de matemática debería basarse en la resolución de problemas, coincidiendo con lo que Schoenfeld (1992) afirma:

"Esta perspectiva del aprendizaje de la matemática pretende producir estudiantes ***cuantitativamente letrados****. Así capacitados pueden entender, interpretar la enorme variedad de datos que encuentran diariamente y hacer juicios fundados sobre esas interpretaciones. Pueden usar matemática en forma práctica (desde aplicaciones simples que utilizan proporcionalidad para recetas y para modelos en escala, hasta complejas proyección de presupuestos, análisis estadísticos y modelos de computación. Y también son pensadores flexibles con un repertorio amplio de técnicas y perspectivas para encarar nuevos problemas y situaciones. Fundamentalmente son* ***analíticos*** *tanto cuando piensan soluciones para problemas como cuando examinan argumentos presentados por otros." (pág.3)*

En el transcurso de nuestras prácticas pudimos evidenciar las múltiples dificultades que tuvieron los alumnos en el trabajo con resolución de problemas, y durante ese tiempo, pero más aún cuando finalizamos nuestras prácticas, nos cuestionamos y reflexionamos sobre estas dificultades. La importancia que le dimos a la resolución de problemas en nuestra planificación, el tiempo que se le destinó en clase y las dificultades que tuvieron los alumnos, fueron algunos de los argumentos que nos llevaron a abordar la problemática que definimos a continuación:

Problemática: dificultades de los estudiantes en la resolución de problemas: una experiencia de estudio del objeto logaritmo en quinto año del nivel secundario.

En primera instancia, y antes de realizar cualquier tipo de estudio sobre la problemática elegida, nos pareció de suma importancia poder respondernos la pregunta que sigue a continuación.

3.1 ¿Qué lugar ocupó la resolución de problemas en nuestras prácticas?

Si bien ya hemos dejado bien en claro cuál es nuestra visión sobre el papel que debe jugar la resolución de problemas en la clase de matemática, debemos mencionar que, en la instancia de planificación de nuestras prácticas, fue imprescindible considerar el contexto institucional en el cual iban a desarrollarse las mismas[11], lo que implicó atender, como ya se ha mencionado, ciertos comentarios

[11] Ver en sección 2

planteados por el profesor tutor, relacionados exclusivamente con los temas que él consideraba que debían desarrollarse durante nuestras clases. Ahora bien, este contexto institucional no impidió (en parte debido a la "libertad" que nos brindó el profesor tutor para proponer un tipo de trabajo distinto al que él tenía en su planificación del tema "Logaritmación") que nosotros al menos intentáramos plasmar en algunas clases (principalmente en las que se trabajó con la resolución de problemas) nuestros objetivos y nuestros propios intereses, ligados a una perspectiva sobre la enseñanza de la matemática que ya hemos descripto.

A través de la resolución de problemas, nosotros tratamos de que los alumnos recorran un camino que los lleve a la obtención de una nueva herramienta matemática, en este caso el logaritmo. Y una vez que este objeto matemático se hizo presente, poder utilizarlo para la resolución de nuevos problemas con variados niveles de dificultad, que permitan a su vez al alumno seguir estudiando el objeto matemático en cuestión.

En mayor o menor medida, creemos que en las clases de resolución de problemas se pudieron plasmar algunas de las propuestas que menciona la NCTM (1989), citada por Schoenfeld (1992):

- *la búsqueda de soluciones, no sólo la memorización de procedimientos,*
- *la exploración de patterns, no sólo la memorización de fórmulas,*
- *la formulación de conjeturas, no sólo hacer ejercicios.*

En ese camino que recorrieron los alumnos se encontraron con múltiples dificultades, y nuestra intención es tratar de abordar algunas teóricamente, pero sin dejar de lado nuestras propias impresiones sobre lo sucedido en ese proceso.

Para comenzar el abordaje de nuestra problemática, nos pareció importante indagar sobre qué es un "problema matemático", pues si bien en nuestra formación hemos leído autores como Polya y Schoenfeld (los cuales nos brindaron la concepción previa de "problema matemático" que teníamos al momento de diagramar nuestra planificación), creemos que tener un espectro más amplio sobre este concepto nos puede ser de gran utilizad para la problemática que estamos planteando.

3.2 ¿Qué es un “problema matemático”?

Al momento de consultar bibliografía que nos orientara en la respuesta a esta pregunta, nos dimos cuenta que, además de ser un tema muy recurrente en los textos relacionados a la enseñanza de la matemática, ha sido abordado a lo largo de la historia, y son muchos los autores que proponen múltiples y diversos significados.

Dado que existe una diversidad de respuestas a esta pregunta, nos pareció necesario señalar los rasgos característicos en donde las definiciones llegan a cierto consenso, o puntos donde tengan convergencia. Para ello se enunciarán a continuación una serie de características que permitirán reconocer un “problema matemático”, y con las cuales los autores de este informe acordamos. Estas características, siguiendo a Villalobos (2008), son:

- *Todo problema matemático debe representar una dificultad intelectual y no solo operacional o algorítmica. Debe significar un real desafío para los estudiantes.*
- *Todo problema debe ser en sí mismo, un objeto de interés. Por tanto debe ser motivante y contextual.*
- *Debe tener multiformas de solución, es decir, puede estar sujeto a conocimientos previos, experiencias o se pueden resolver mediante la utilización de textos o personas capacitadas.*
- *Puede estar adscrito a un objeto matemático o real, o simplemente a la combinación de ambos.*
- *Debe tener una dificultad no tan solo algorítmica, sino también en el desarrollo de habilidades cognitivas.*
- *Debe establecerse en la idea de posibles soluciones mediante diferentes métodos, con exigencias e interrogantes relacionales.*
- *Se debe dar en una variedad de contextos, en distintas formas de representación de la información y que en lo posible sean resueltos por medios de distintos modelos matemáticos.*

De acuerdo a las características expuestas, podemos decir que resolver un problema matemático requiere la puesta en marcha de una serie de procesos cognitivos y de un razonamiento que apelan directamente a involucrar activamente al estudiante en la búsqueda de un modelo matemático que pueda representar la situación planteada, lo que va más allá de ejercitar una operación determinada de forma mecánica y repetitiva como se hace en el caso de la *operatoria con carga verbal* (Villalobos, 2008).

Para ejemplificar esto, supongamos la siguiente situación: *"Juanito tiene que comprar dos kilos de bananas, cada kilo cuesta $20. ¿Cuánto cuestan dos kilos de bananas?*

La situación planteada anteriormente corresponde a una simple *operatoria con carga verbal*, ya que el estudiante de antemano sabe la respuesta (suponiendo que corresponde a un estudiante que domine el campo conceptual[12] de la multiplicación). Los ejemplos de operatoria con carga verbal son muy típicos en muchos de los libros de texto que circulan cotidianamente en las aulas, y solo sirven para que el estudiante siga ejercitando un algoritmo, solo agregando algún enunciado que de la pauta sobre qué tipo de operación aritmética se debe realizar.

3.3 ¿Qué podemos decir sobre el concepto "resolución de problemas"?

Otro aspecto que nos pareció importante abordar antes de comenzar con el análisis de las dificultades de los alumnos, es el del concepto "resolución de problemas".

A partir de la lectura de diferentes autores, hemos podido observar que existe un acuerdo general en aceptar la idea de que el objetivo primario de la educación matemática debería ser que los alumnos aprendan matemática a partir de la resolución de problemas. Sin embargo, al igual que con el término "problema matemático", son múltiples las interpretaciones que se pueden encontrar sobre este concepto, por lo tanto este objetivo no es del todo claro. Schoenfeld (1992) señalaba que la literatura sobre resolución de problemas es muy pobre, y sostiene que el significado del término hace referencia a aspectos que van desde *"trabajar con ejercicios rutinarios"* hasta *"hacer matemática como un profesional".*

Muchos autores sostienen que, históricamente, los problemas han ocupado un lugar central en el currículum de matemática, pero no la resolución de problemas. *"Generalmente, la resolución de problemas ha sido objeto de aprendizaje y no de enseñanza: profesores evalúan con problemas cuando nunca en sus clases han trabajado algo parecido. Olvidando que no debería evaluarse lo que no se ha trabajado, lo que no se ha enseñado."* (Céliz, M.J., Feliziani, V.A y Zingaretti, M.L, 2007)

[12] Se entiende como campo conceptual al "conjunto de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas en estrecha conexión" (Vergnaud, 1995).

A continuación, rescatamos un fragmento del Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba (2011-2015):

"Resolver problemas en el Nivel Secundario:

La resolución de problemas es una de las tareas propias del quehacer matemático; por ello, será una prioridad a lo largo de la escolaridad inicial y primaria, y también en el Nivel Secundario. Los estudiantes deberán tener múltiples ocasiones de plantear, explorar y resolver problemas, como así también de reflexionar en torno a ellos, progresando hacia el uso de razonamientos matemáticos y reconociendo los límites de las argumentaciones empíricas. Será tarea del docente, entonces, gestionar este tránsito, logrando que el estudiante se apoye en elaboraciones ya realizadas en la escuela y las modifique –o abandone- para construir el sentido del conocimiento al que se apunta." (pág.45)

Como se puede apreciar, el diseño curricular plantea varios aspectos que ya hemos venido mencionando. No solo plantea la importancia que debe tener la resolución de problemas en la enseñanza de la matemática, sino que además ubica al docente como el encargado de gestionar este proceso.

Ahora bien, no se observa que el Diseño Curricular dé alguna definición del concepto "resolución de problemas", al menos en forma explícita, pero se dejan entrever algunas cuestiones como "plantear", "explorar", "razonar matemáticamente", "reflexionar", "construir el sentido del conocimiento"...

Si bien no es nuestra intención realizar un análisis sobre las distintas acepciones que ha tenido y que tiene en la actualidad el concepto "resolución de problemas", nos parece importante resaltar que las distintas interpretaciones que se pueden hacer van de la mano con los problemas que el docente elige para presentar a sus alumnos y los objetivos que persigue con dichos problemas.

Para ejemplificar esto, proponemos recordar la primera actividad que realizamos con el tablero de ajedrez[13], la cual transcribimos a continuación:

Actividad 1

Supongamos que la petición de Sissa al rey hubiera sido la misma, pero colocando dos granos en la primer casilla en vez de uno, 4 en la segunda, 8 en la tercera, 16 en la cuarta, y así sucesivamente… A partir de esta modificación en la historia, intenta responder las siguientes preguntas: (puedes ayudarte con el tablero)

a) ¿Hay alguna casilla que posea más de 1000 granos? ¿Y más de 100000? ¿Se supera el millón de granos en alguna casilla? En cada caso de que la respuesta sea afirmativa indiquen cuál es la primera casilla que supera dicha cantidad y cuántos granos hay exactamente en dicha casilla. Explica cómo obtuviste ese resultado.

[13] Ver "Leyenda del tablero de ajedrez" en la sección 2

b) *¿Es posible averiguar la cantidad de granos que hay en la casilla 24 recuperando las respuestas del ítem a) y sin tener que calcular la cantidad de granos que hay en las casillas intermedias? Con el mismo argumento, ¿pueden averiguar los granos que hay en la casilla 27? ¿Y en la 32? Si la respuesta es afirmativa expliquen cómo lo harían.*
c) *¿Es posible hallar los granos de cualquier casilla sin averiguar los granos de las casillas anteriores?*

Retomando algunas de las características de los problemas matemáticos mencionadas por Villalobos anteriormente, podemos observar que estamos en presencia de varias de ellas. Es un problema que efectivamente representa una dificultad que va más allá de la simple aplicación de una operación o un algoritmo (principalmente el ítem c). Pudimos apreciar que resultó interesante para los alumnos, los cuales propusieron distintos y variados planteos para la resolución de los distintos puntos, obtenidos mediante el desarrollo de distintas habilidades cognitivas.

El objetivo que nos propusimos con este problema fue que los alumnos puedan construir un modelo exponencial[8] para luego poder discutir sobre ese modelo, ver con qué herramientas matemáticas cuentan para poder operar sobre el mismo (en este caso despejar una incógnita) y de esa manera introducir el concepto de "logaritmo". Con esto podemos afirmar que hemos utilizado la instancia de resolución de un problema *"como contexto"* (Stanic y Kilpatrick, 1988, citados en Schoenfeld, 1992), posibilitándonos la introducción de un nuevo tema para los alumnos, y con el convencimiento de que esto puede favorecer el aprendizaje de dicho contenido. La concepción de "resolver problemas como contexto", según los autores mencionados, hace referencia a la utilidad de los mismos como vehículos al servicio de otros objetivos curriculares.

Algunos autores como Dewey, Polya, Shoenfeld y Fridman presentan una serie de etapas o fases para abordar el proceso de la resolución de un problema, las cuales han estado sujetas a múltiples interpretaciones[9].

José Carrillo Yáñez (1998), plantea las fases como *"estados por los que se pasa y a los que se puede volver a lo largo del proceso de resolución" (pág.104)* y, considerando las propuestas de los tres

[8] En este caso es el que les permita calcular la cantidad de granos de trigo de cualquier casilla, que se expresa como 2^n, siendo n el número de casillas.
[9] Si se desea profundizar sobre estas interpretaciones, recomendamos leer: Céliz, M.J., Feliziani, V.A y Zingaretti, M.L. (2007) La resolución de problemas como objeto de enseñanza y medio para el aprendizaje. En: Abrate, R y Pochulu, M (Comp.). *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática.* Universidad Nacional de Villa María. Cap. 9, p.180.

primeros autores mencionados anteriormente, propone las siguientes fases en el proceso general de resolución de problemas:

0. IDENTIFICACIÓN: En esta fase el sujeto detecta un problema. En muchos casos esta fase no tiene lugar en el contexto escolar, debido a que, si en alguna ocasión es presentado un problema, éste es mostrado como tal.
1. COMPRENSIÓN: el resolutor intenta hacerse una idea, una composición mental de la situación; procura entender las partes del problema, "hacer suyo" el problema.
2. PLANIFICACIÓN Y EXPLORACIÓN: aquí el sujeto intenta obtener información y ordenarla con vistas a idear una estrategia que resuelva el problema. El objetivo es "hacerse de un plan".
3. EJECUCIÓN: aquí el resolutor se encuentra desarrollando el plan trazado en la fase anterior.
4. VERIFICACIÓN: también podría llamarse "revisión", "evaluación" o incluso "control". El resolutor verifica o comprueba si la solución tiene sentido o es correcta, o revisa el razonamiento anterior, o evalúa las consecuencias de haber elegido determinada estrategia; en suma, controla el proceso.

Por otro lado, Fridman (1985, citado en Abrate y Pochulu, 2007) propone las siguientes etapas:

Primera etapa: Análisis del problema	Entender de qué problema se trata, ¿cuáles son sus condiciones?, ¿en qué consisten sus requerimientos?
Segunda etapa: Escritura esquemática del problema	Utilización de todo tipo de simbolizaciones: signos, literales, dibujos, gráficos, esquemas, etc. Es una forma más esquemática para fijar los resultados de la etapa anterior.
Tercera etapa: Búsqueda de un método de resolución	La búsqueda del plan para resolver un problema constituye la parte central del proceso de resolución. Una recomendación muy importante es que no es posible enseñar a ejecutar la búsqueda del plan de resolución de un problema, sino que es necesario aprender a hacerlo uno mismo.
Cuarta etapa: Aplicación del método de resolución	Una vez encontrado el método se hace necesario aplicarlo para obtener la solución del problema presentado.
Quinta etapa: Prueba de la resolución	Es necesario convencerse de que dicha resolución es correcta y que satisface los requerimientos del problema.

Sexta etapa: Análisis del problema	Se realiza una investigación del problema: se establecen las condiciones bajo las cuáles el problema tiene solución, cuántas son las resoluciones posibles, bajo qué condiciones el problema no tiene solución, etc.
Séptima etapa: Formulación de la respuesta al problema	Una vez convencidos de la exactitud de la solución se debe formular de manera precisa la respuesta al problema.
Octava etapa: Análisis de la resolución del problema	Se realiza un análisis de la solución obtenida con fines cognoscitivos y de aprendizaje y se sacan conclusiones a partir de dicha solución.

Cuadro 1: Modelo de Fridman para la resolución de problemas

Nosotros consideramos que el proceso de resolución no es lineal, sino que es un proceso cíclico, dinámico, creativo y significativo, donde hay marchas hacia adelante y hacia atrás, donde incluso a veces se saltean etapas para posteriormente volver sobre las mismas. Por ello, nos pareció también importante rescatar la interrelación de fases que proponen Céliz, Feliziani y Zingaretti, citados en Abrate y Pochulu (2007) donde, considerando las etapas de Fridman, plantean el esquema de la figura 34:

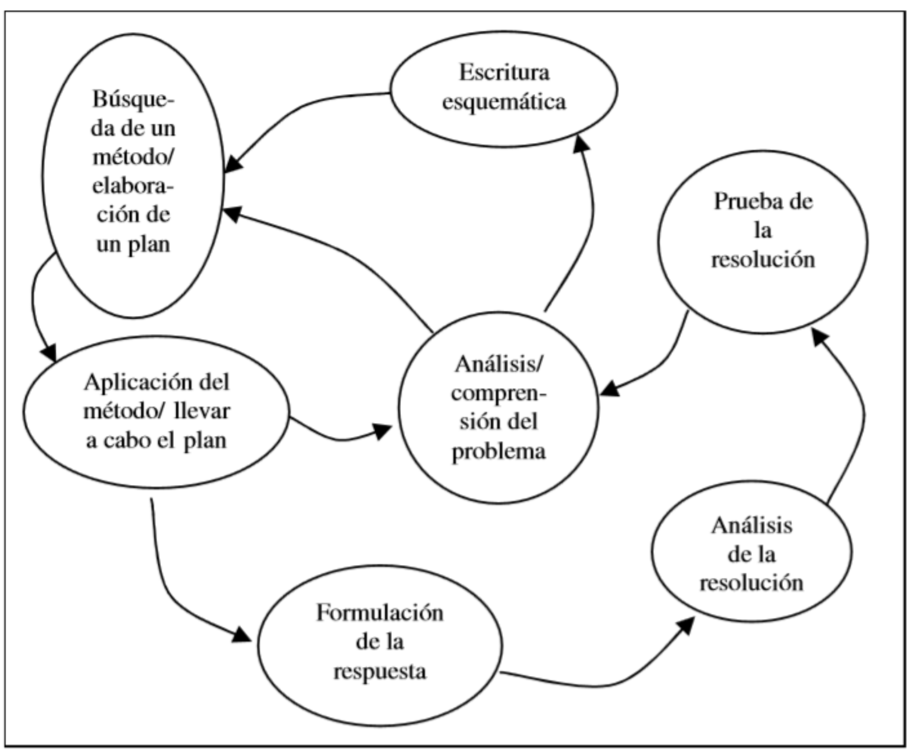


Figura 34: interrelación de fases en la resolución de un problema

Tanto lo que propone José Carrillo Yáñez como la interrelación de fases que se muestra arriba nos parecen sumamente válidas, y creemos que no se contraponen en absoluto, pues el primer autor considera, más implícitamente, la interrelación entre las etapas. Haremos uso de estas dos propuestas para abordar las dificultades de la primera parte del análisis.

3.4 Análisis de las dificultades en la resolución de problemas

El abordaje de las dificultades de los alumnos en la resolución de problemas, en el marco de nuestra problemática, constará de dos partes. En primera instancia estudiaremos algunas dificultades que presentaron los alumnos en el proceso de resolución de un problema particular que se trabajó en una de las clases, considerando las etapas que hemos presentado anteriormente en el marco teórico. Y en segunda instancia estudiaremos las dificultades a partir del análisis de errores en las producciones matemáticas de los alumnos. En esta instancia consideramos los problemas propuestos en las evaluaciones, y haremos uso de la "teoría de procesamiento de la información".

3.4.1 Primera parte: Dificultades de los alumnos en el proceso de resolución de un problema particular

Hemos decidido seleccionar para el análisis el problema número 3 presente en la actividad cuatro[10]. La elección del mismo tuvo que ver básicamente por dos motivos: por un lado es un problema que se trabajó en los dos cursos, y por otro lado consideramos que, de los problemas que se trabajaron en ambos cursos, fue en el que los alumnos presentaron la mayor cantidad de dificultades en el proceso de resolución.

Enunciado del problema:

Al variar la altura respecto al nivel del mar la presión atmosférica varía de tal modo que en cada punto es, aproximadamente, 0,9 veces la presión que existe un kilómetro más abajo. Si la presión al nivel del mar es 1 atmósfera:

- ***a-*** *¿Qué presión habrá a 10 km de altura?*
- ***b-*** *¿Cuántos kilómetros habrá que subir para que la presión en ese punto sea 0,1215 atm? ¿Y para 0,5 atm?*
- ***c-*** *¿A qué altura habrá una presión de 1,2 atmósferas? ¿Qué significa el resultado obtenido?*

---

[10] Ver sección 2

La modalidad de trabajo fue la misma que se utilizó para la resolución de todos los problemas. En este caso no hizo falta aclarar que el trabajo podía realizarse en grupo ni la cantidad de integrantes de los mismos, sino que los alumnos por su cuenta se acomodaron para trabajar de a dos, tres y hasta cuatro integrantes.

Nosotros, al igual que en el resto de las clases, fuimos recorriendo los grupos todo el tiempo para ir atendiendo las consultas.

Analizaremos las dificultades en las distintas etapas que propone José Carrillo Yáñez, pero sin considerar la etapa de "identificación", puesto que el problema fue dado como tal.

ETAPA 1: COMPRENSIÓN

Hubo múltiples y variadas dificultades en esta etapa. La frase *"no entiendo"* es la que más circuló por el aula en los primeros minutos de trabajo (a diferencia de otros problemas donde los alumnos solo habían consultado por dudas más bien puntuales), y rescatamos una pregunta que realizó un alumno en quinto B mientras recorríamos los grupos: *"¿profe, hay algo más difícil que esto en el tema que estamos viendo?".* Ante este interrogante se optó por no responder, sino más bien empezar a dialogar con los integrantes del grupo para ir viendo cuáles eran las dudas que tenían, y a partir de ello ir buscando alguna manera de empezar a pensar una estrategia que al menos les permita avanzar en el proceso de resolución.

Destacamos a continuación algunas observaciones puntuales que evidenciamos al recorrer los grupos en esta primera etapa de resolución:

- ✓ En general, la predisposición de los alumnos para abordar el problema no fue la misma que se observó con el resto de los problemas. Notamos cierto desánimo en muchos alumnos.
- ✓ Luego de leer el enunciado y pensar unos minutos, el problema era abandonado (en muchos casos, principalmente en el quinto B, el problema se abandonaba incluso cuando los alumnos ya habían estado dialogando con nosotros sobre la comprensión del enunciado)
- ✓ La gran mayoría no entendió, en primera instancia, lo que significa la frase "*0,9 veces la presión que existe un kilómetro más abajo"* en el contexto del problema.

- ✓ Ya iniciados en el proceso de resolución, los alumnos se mostraron más confundidos con las preguntas de los incisos b) y c) que con la a).

Además de la pregunta realizada por el alumno que mencionamos arriba, también escuchamos comentarios como "*profe, ¿no va a tomar esto en la evaluación no?*" (Aclaramos que todo lo visto en clase podía entrar en la evaluación, y que de hecho íbamos a tomar problemas), o *"este es más difícil que los otros"*. Claramente percibimos que los alumnos sentían que el problema era más difícil que los que venían realizando.

Si bien es difícil saber lo que siente un alumno cuando se enfrenta a un problema, nos parece que el "desánimo" y el hecho de "abandonar" el problema rápidamente, podría estar relacionado a "*Dificultades asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas."* (Socas Robayna, s.f.) Este autor, en referencia a las matemáticas, afirma que:

> *"Muchos alumnos tienen sentimientos de tensión y miedo hacia ellas. Sin lugar a duda muchos son los aspectos que influyen en esta aversión. Por ejemplo, la naturaleza jerárquica del conocimiento matemático, la actitud de los profesores de Matemáticas hacia sus alumnos, los estilos de enseñanza y las actitudes y creencias hacia las Matemáticas que les son transmitidas. Muchas de las actitudes negativas y emocionales hacia las Matemáticas están asociadas a la ansiedad y el miedo. La ansiedad por acabar una tarea, el miedo al fracaso, a la equivocación, etc., generan bloqueos de origen afectivo que repercuten en la actividad matemática de los alumnos"*

Pensando en algunas cosas que plantea este autor, nos preguntamos lo siguiente: *¿tiene que ver esta actitud de los alumnos frente a un problema "más difícil que los anteriores" con el tipo de trabajo matemático que vienen realizando a lo largo de los años en las clases de matemática?* Schoenfeld (1992), en relación a esto, sostiene que *"los estudiantes elaboran su sentido de la matemática –y así de cómo usan la matemática- a partir de sus experiencias con la matemática (en su mayor parte en el aula)" (pág. 9)*

Sin lugar a dudas nos resulta imposible responder la pregunta que nos planteamos, pues desconocemos el tipo de enseñanza de la matemática que se les ha brindado a los alumnos en sus años de escolaridad previos, pero sí hemos observado el tipo de trabajo matemático que se realizó en la unidad anterior a la que nosotros desarrollamos (Unidad 2: Función cuadrática)[11] Aquí los alumnos el único contacto que tuvieron con "problemas matemáticos" fueron ejemplos desarrollados en la pizarra

[11] Ver sección 1: INTRODUCCIÓN

por el docente tutor, y dos o tres problemas que figuraban en una lista de ejercicios que eran para realizar de tarea, y que luego no se discutieron en clase.

Socas Rabayna (s.f.) plantea también un tema que nos parece importante destacar, el de las *creencias hacia las matemáticas,* y sobre esto, Schoenfeld (1992) citando a Lampert, M (1990), sostiene:

> *"Comúnmente, la matemática está asociada con la certeza; saberla, con ser capaz de dar la respuesta correcta, rápidamente. Estos supuestos culturales están formados por la experiencia escolar, en la cual hacer matemática significa ajustarse a las reglas establecidas por el profesor, saber matemática significa recordar y aplicar la regla correcta cuando el profesor hace una pregunta; y la verdad matemática está determinada cuando la respuesta es ratificada por el profesor. Las creencias sobre cómo hacer matemática y qué significa conocerla en la escuela son adquiridas en el transcurso de años de mirar, escuchar y practicar."(pág. 37)*

Frente a esta situación lo que planteamos en los grupos fue la idea de que se tomaran un tiempo para pensarlo y discutirlo (incluso pensarlo en forma individual para luego compartirlo a sus compañeros), y que no necesariamente debía ser el mismo tiempo que para los otros problemas ya resueltos; e intentamos transmitir cierto "optimismo" frente a esa situación, tratando de alejar cualquier idea relacionado a una de las creencias de los estudiantes que menciona Lampert (1990, citado en Schoenfeld, 1992): *"Los estudiantes que comprendieron matemática resolverán cualquier problema asignado en no más de cinco minutos".* De esta manera vimos que gran parte de los alumnos trataron de volver a encarar el problema.

Otra dificultad que evidenciamos, y que está estrictamente relacionada con el enunciado, es la interpretación de la frase "*0,9 veces la presión que existe un kilómetro más abajo",* pero más específicamente el significado de *"0,9 veces".* (Ya habíamos observado que, en problemas anteriores, algunos alumnos tenían dificultades en interpretar "el doble de…" o "el triple de…" y realizaban preguntas como *"¿multiplico por dos o elevo al cuadrado?*")

Una de las interpretaciones que podemos realizar sobre esto está asociada a lo que plantea Robayna (s.f) cuando afirma que:

> *"Nos encontramos, de esta manera, con diferentes conflictos asociados a la comprensión y comunicación de los objetos matemáticos. Uno de estos conflictos nace de la ayuda que la lengua común presta a la interpretación de los signos matemáticos. El lenguaje habitual usado en la comunicación puede expresar su significado aunque se cometan abusos morfosintácticos, tales como roturas de reglas gramaticales o faltas de ortografía"*
>
> "(…) *Las palabras de igual significado en la lengua común y en Matemáticas tienen su principal problema en saber que, en efecto, el significado es el mismo. A veces, los alumnos pueden pensar que una palabra de lenguaje habitual, toma un significado distinto y a veces "misterioso", cuando se emplea en Matemáticas. Pertenecen estas dificultades a otro dominio del lenguaje matemático que es la Pragmática y se*

refiere al estudio del sentido que se da al discurso en función del contexto en el que se enuncia."

Ante esta dificultad, lo que tratamos de proponer en los grupos fue que ejemplifiquen con otros valores la situación descrita en el enunciado. Por ejemplo, pensar qué significaría *"2 veces la presión…"*, luego *"1,5 veces la presión…"* y finalmente *"0,9 veces la presión…",* con la intención de que apareciera la idea de que el 0,9 es un factor multiplicativo en el contexto del problema. Esto resultó en varios de los grupos.

Por último fuimos preguntando en los grupos si sabían, por haberlo visto en alguna otra materia, la relación que podía existir entre la presión atmosférica y la altura respecto al nivel del mar. Algunos contestaron que sí (lo recordaban de física), pero la mayoría dijo "no acordarse". En ese momento no decidimos aclarar en los grupos que tipo de relación había entre la presión y la altura, pues consideramos que sería más provechoso que se pudiera discutir más adelante con la participación de todos. Le sugerimos a todos los grupos que traten de realizar un diagrama o un bosquejo en sus cuadernos, para tratar de representar de alguna manera el enunciado del problema, aclarando que les podría servir de gran ayuda (solo un alumno en quinto A había optado por realizar un bosquejo en su cuaderno).

Con respecto a esto último que hemos mencionado, vamos a introducir el concepto de "heurístico", mencionado por autores como Polya, Kilpatrick y Schoenfeld, ya que creemos que nos puede ser muy útil para el análisis que venimos realizando.

Para Schoenfeld (1980, citado en Carrillo Yáñez, J. 1988), un heurístico es una *"(…) insinuación o sugerencia general o estrategia, independiente de cualquier tópico particular o materia de estudio, que ayuda al resolutor a aproximarse y comprender un problema y ordenar eficientemente sus recursos para resolverlo." (pág.107)*

Carrillo Yáñez (1998) propone una serie de heurísticos para las distintas fases de resolución de un problema. Mencionaremos aquí los heurísticos que aporta para la fase de *"Comprensión"*:

- Organizar la información
    - ✓ Imaginar mentalmente la situación
    - ✓ Releer el enunciado
    - ✓ Seleccionar el material adecuado
    - ✓ Disponer de un modelo manipulativo
    - ✓ Utilizar algún tipo de esquema gráfico (dibujar un diagrama)

- Ejemplificar
- Expresar en otros términos (formular con otras palabras la situación descrita en el enunciado)

Como se puede observar, en esta etapa del proceso de resolución tratamos de proponer algunos de los heurísticos que menciona el autor, pero solo logramos que muy pocos grupos, por ejemplo, logren armar un diagrama de la situación (algunos grupos del quinto A y tan solo un par de alumnos en el quinto B)

ETAPA 2: PLANIFCACIÓN Y EXPLORACIÓN

Aquí también observamos varias dificultades. La primera que mencionamos (muy general) es la dificultad para "concebir un plan". Gran parte de los alumnos (principalmente en el quinto B), habiendo ya discutido sobre la interpretación del enunciado, lo primero que plantearon son expresiones del siguiente tipo:

✓ $\log_{10} 0{,}9$
✓ $\log_{0{,}9} 10$
✓ $\log_{x} 0{,}9 = 10$
✓ $\log_{0{,}9} x = 10$

Pudimos evidenciar una clara intención de utilizar el logaritmo sin realizar ningún tipo de análisis previo, algo que ya había sucedido con varios alumnos en los problemas anteriores. Inmediatamente después que se había planteado alguna expresión como las expuestas, muchos estudiantes nos llamaban para preguntarnos: *"¿está bien así profe?"*, y nos mostraban alguna de las expresiones mencionadas arriba.

Al preguntar sobre lo que habían pensado para plantear dichas expresiones, la mayoría de los estudiantes propiciaban respuestas del tipo *"usamos el logaritmo al igual que en los problemas anteriores", o "tengo dudas sobre dónde colocar el 0,9".*

Volviendo sobre las "creencias" que menciona Lampert, podemos relacionar esto con una posible idea subyacente en los alumnos asociada a una concepción sobre la matemática, y en este caso particular la resolución de problemas, la cual consiste en que la misma solo conlleva la aplicación de fórmulas y algoritmos.

Aquí también nos parece importante mencionar el cuadro 1 y la interrelación de fases de la figura 34. Si bien el hecho de "saltear etapas" puede ser parte del proceso de resolución de problemas (así lo creemos nosotros), en este problema particular no resultó beneficioso para los alumnos saltear la etapa dos que propone Fridman, asociada a la escritura esquemática del problema, ya que la realización de algún dibujo les hubiera facilitado, además de la comprensión del enunciado, arribar a la expresión exponencial que proporcionaba el modelo para resolver el problema, que en este caso era $0{,}9^x$ (luego veremos que ante esta situación terminamos realizando, en ambos curso, un dibujo en la pizarra que permitiera esclarecer las dudas).

Mencionaremos aquí solo algunos de los heurísticos que propone Carrillo Yáñez para la fase de *"Planificación y exploración"*:

- Simplificar
- Estimar
- Buscar regularidades con intención de generalizar
- Tantear
- Considerar problemas equivalentes
- Partir de lo que se sabe
- Descomponer el problema
- Explorar problemas similares
- Conjeturar

Pensando en las expresiones propuestas por los alumnos, en los comentarios que nos realizaron sobre los mismos y en los heurísticos expuestos, podríamos considerar que los alumnos tuvieron algún tipo de intención de "considerar problemas equivalentes" o "explorar problemas similares". Pero en ese intento solo consideraron la idea de que "*en el resto de los problemas utilizamos el logaritmo*", y no el hecho de que, en primera instancia, siempre habían planteado una ecuación exponencial que modelaba la situación problemática.

Si bien insistimos con la idea de que reflexionaran sobre los desarrollos que habían realizado en los problemas anteriores, notamos que la mayoría de los estudiantes no encontraba ningún tipo de similitud entre este problema y los propuestos anteriormente.

Uno de los razonamientos que más visualizamos en los grupos es el siguiente:

$$presión\ al\ nivel\ del\ mar = 1\ atmósfera$$

$$presión\ 1\ km\ arriba\ del\ nivel\ del\ mar = 1\ atmósfera + 0,9$$

$$presión\ 2\ km\ arriba\ del\ nivel\ del\ mar = 1\ atmósfera + 0,9 + 0,9$$

y así sucesivamente hasta llegar a los 10 km.

Podemos observar que no aparece la idea de que el 0,9 es un factor multiplicativo de la presión, y tampoco que la presión disminuye con la altura.

Frente a este panorama, en ambos cursos se optó por realizar una discusión entre todos sobre el problema e ir armando un dibujo en la pizarra que ayude a su comprensión y a la "posible elaboración de un plan" para resolverlo.

El esquema que se dibujó en la pizarra, y que ya fue expuesto en la sección 2, fue similar al que se muestra en la siguiente figura.

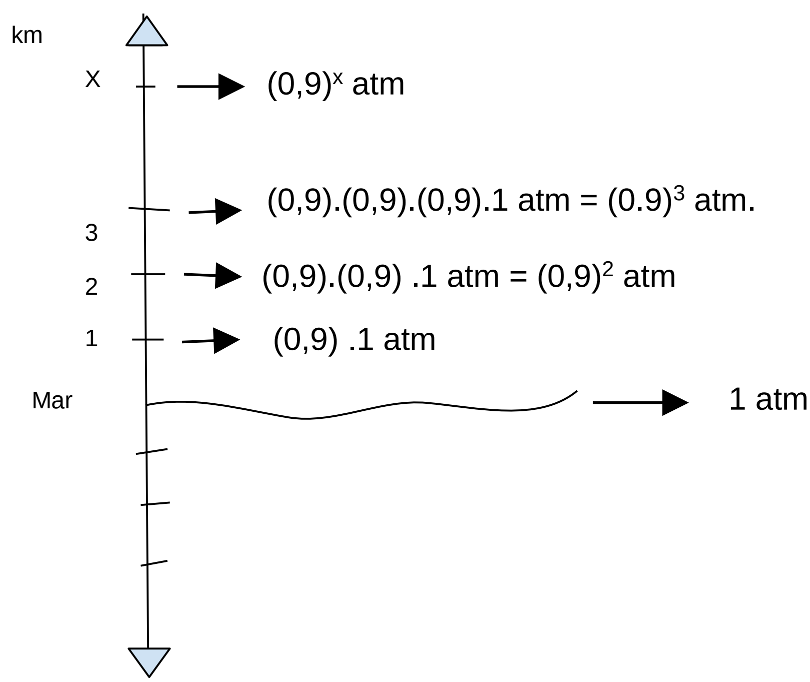


Figura 35: esquema realizado en clase

El esquema de la figura 35 se fue construyendo a medida que íbamos interactuando con los alumnos a través de distintas preguntas, y se fue armando "de abajo hacia arriba", hasta llegar a la expresión de $(0{,}9)^{x}\ atm$.

Esta instancia no se desarrolló de igual manera en los dos cursos, ya que en el quinto B la clase finalizó cuando en el esquema se había planteado hasta la expresión $(0{,}9)^{2}\ atm$. De esta manera se dejó como tarea tratar de pensar cómo se podía seguir abordando el problema e intentar resolver al menos el primer inciso. A la clase siguiente ningún alumno había podido avanzar con el mismo.

En el quinto A no hubo interrupciones y se pudo realizar el esquema completo y arribar a las soluciones en una misma clase.

En la división B, a medida que se iba construyendo el dibujo, íbamos colocando los resultados de la presión atmosférica que se obtenían a medida que aumentaba la altura. Notamos que recién en esa instancia se terminó de comprender que la presión disminuye con la altura. En el quinto A como esta noción ya se había discutido en los grupos, no hizo falta retomarla.

Una vez finalizado el dibujo y luego de haber discutido sobre el mismo, quedó en la pizarra la siguiente expresión (surgida de la discusión):

$$(0{,}9)^{x} = y$$

$$x\ = km\ de\ altura\ respecto\ al\ nivel\ del\ mar$$

$$y\ = presión\ atmosférica$$

<u>ETAPA 3</u>: EJECUCIÓN

En esta etapa volvimos a proponer que trabajaran ellos solos (con la modalidad de siempre) y aclaramos que haríamos pasar al frente a cualquiera para que anotaran los resultados que iban obteniendo.

Para el inciso a) no se presentaron demasiadas dificultades; los alumnos reemplazaron el valor de 10 km en la variable *x* y obtuvieron

$$(0{,}9)^{10} = 0{,}34867844\ atm\ \approx 0{,}35$$

Para los incisos b) y c) se discutió un poco más en los grupos, principalmente por el hecho de que era la primera vez que trabajaban con una base no entera, y les resultaba poco familiar.

En ambos cursos quedaron escritas expresiones como las siguientes:

Para el inciso b)

$$y = \log_{0,9} 0{,}1215 = 20\ km$$

$$y = \log_{0,9} 0{,}5 = 6{,}58\ km$$

Para el inciso c)

$$y = \log_{0,9} 1{,}2 = -1{,}73\ km$$

Consideramos que en esta etapa no hubo demasiadas dificultades, salvo algunas consultas puntuales sobre si efectivamente el 0,9 se debía colocar en la base del logaritmo. Atribuimos esto a que las bases que veníamos trabajando eran enteras.

ETAPA 4: VERIFICACIÓN

Esta etapa no se desarrolló exactamente después de la etapa anterior, sino que a medida que los alumnos iban obteniendo resultados e iban pasando al pizarrón, se iban discutiendo y analizando los mismos. Es decir, la tercera y cuarta etapa se fueron intercalando todo el tiempo a medida que se avanzaba con la resolución del problema.

Básicamente lo que tratamos de realizar en esta etapa es discutir sobre la siguiente pregunta: *¿tiene sentido la respuesta?* Como ya habíamos discutido sobre el contexto del problema y ya todos los alumnos tenían en claro que la presión disminuía con la altura, no se presentaron dificultades en esto. Quizás nos quedó la duda de saber exactamente si todos los alumnos entendieron el significado de un resultado negativo en el contexto del problema, ya que en los dos cursos pasaron situaciones similares. Al preguntar sobre qué significaba un resultado de ese tipo, rápidamente uno o dos alumnos aportaron la idea de que *"ese valor se corresponde con una presión por debajo del nivel del mar".* Al preguntar si todos entendían esto, varios alumnos más afirmaron que sí, y considerando que el profesor tutor nos dijo que eso ya lo habían estudiado en física, decidimos proseguir con la clase.

Para las dos últimas etapas rescatamos nuevamente la idea de "interrelación de fases" propuesta en la figura 35. A medida que los alumnos iban desarrollando el método de resolución e iban reflexionando sobre las respuestas, en muchos casos, terminaban de comprender el problema.

3.4.1.1 En relación al contrato didáctico

Si bien aquí solo hemos analizado un problema (de varios que propusimos en las clases), y justamente es uno de los que se propuso al final de las clases que iban a ser destinadas a resolución de problemas (con lo cual los alumnos ya tenían muy incorporada la modalidad de trabajo), nos parece importante hablar sobre el contrato didáctico subyacente en el aula.

A lo largo de las clases que destinamos exclusivamente a la resolución de problemas, sentimos que tuvimos que realizar un esfuerzo importante para organizar la instancia que denominamos "puesta en común", lo cual se vio reflejado de manera distinta en los dos quintos. Por un lado, en el quinto A fue necesario pedir reiteradas veces que hicieran silencio y que se escucharan entre ellos, y en el quinto B, además de eso, el practicante tuvo que mantener todo el tiempo un tono de voz muy elevado para poder organizar el debate (En el quinto B, a lo largo de las prácticas, siempre fue necesario realizar más intervenciones que en la otra división para que los alumnos hicieran silencio en determinadas situaciones que lo ameritaban). Cabe destacar que los alumnos eran muy participativos y que la instancia de discusión siempre fue muy rica, tanto para los alumnos (en ambos cursos) como para nosotros, pero tenían dificultades para hacer silencio cuando un compañero estaba exponiendo algo, ya sea al frente o sentado en el banco.

Creemos que estas situaciones se pueden haber producido por una ruptura del "contrato didáctico", tal como Brousseau (1984) la define:

> *"Conjunto de comportamientos (específicos) del maestro que son esperados por los alumnos, y conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro, y que regulan el funcionamiento de la clase y las relaciones maestro-alumno-saber, definiendo así los roles de cada uno y la repartición de las tareas: ¿quién puede hacer qué?, ¿quién debe hacer qué?, ¿cuáles son los fines y los objetivos?... "*

Cabe aclarar que esta ruptura del contrato didáctico que mencionamos se plantea exclusivamente en relación a las clases que presenciamos en la instancia de observaciones[12]. Los alumnos se encontraban ahora en una situación donde, trabajando en grupo, debían explorar, ensayar, buscar distintas alternativas, proponer soluciones y confrontarlas con las de sus compañeros, defenderlas y discutirlas. Y nosotros como practicantes (en el rol de docentes), presentamos la actividad,

[12] Ver sección 1

gestionamos las diferentes fases del proceso que iban transitando los alumnos y organizamos la comunicación de la clase, interviniendo en los momentos que consideramos adecuados.

Esta modalidad de trabajo, relacionada al contrato didáctico que hemos mencionado, se mantuvo a lo largo de todas las clases que destinamos a la resolución de problemas, y si bien siempre costó que los alumnos se escucharan en las "puestas en común", esto fue mejorando levemente con el transcurso de las clases. Y en cuanto al trabajo grupal, los alumnos desde la segunda o tercera clase ya lo veían como algo totalmente natural en la clase de matemática, a tal punto que ya no hizo falta decirles que podían trabajar en pequeños grupos y discutir entre ellos.

3.4.2 Segunda parte: análisis de los errores de los alumnos en sus producciones matemáticas en la instancia de resolución de problemas

Haciendo uso de la teoría de procesamiento de la información, como afirma Luis Rico (1995) "*los problemas matemáticos pueden descomponerse en varios componentes de procesamiento (...)".* Cada uno de ellos *"(...) son, por su naturaleza, internos y, por lo tanto, hay que utilizar métodos indirectos de observación (...)"* (pág.87) si se quiere analizarlos.

De esta manera, tomaremos como método indirecto de observación para comprender los procesos mentales en la resolución de problemas por parte de los alumnos al *"análisis de los errores de los sujetos en sus producciones matemáticas".*

Para ello, consideraremos los problemas propuestos en las evaluaciones escritas, e intentaremos clasificar los principales errores cometidos en esta instancia para luego realizar un breve análisis sobre los mismos. Recurriremos a dos tipos de clasificación de errores: la primera, devenida de la teoría de procesamiento de información y la otra, de carácter más empírico, surgida del análisis constructivo de las soluciones.

3.4.2.1 El papel de los errores en el aprendizaje de las matemáticas

Desde el punto de vista del constructivismo, diremos que el "error" es un elemento usual y fundamental en el proceso de construcción de los conocimientos, puesto que consideramos que brinda información útil acerca de ciertos aspectos "deficientes" surgidos a lo largo del proceso de estudio de un determinado objeto matemático. Es por ello que, *"el proceso mencionado de construcción deberá* *incluir su diagnóstico, detección, corrección y superación mediante actividades que promuevan el ejercicio de la crítica sobre las propias producciones". (Ibid, pág.75)*.

"La interpretación exclusiva de los errores como instrumentos de diagnóstico y corrección explota sólo parcialmente el potencial educativo del error discutido (...) Con tal suposición, solamente profesores e investigadores podrían estar implicados en el proceso de analizar el error" (Ibid, p.94) Por tal motivo, ampliaremos esta caracterización del error, considerándolo también como una *"plataforma para explorar nuevos conocimientos matemáticos"* (Borassi, 1987, citado en Rico, 1995). De esta manera, los propios estudiantes no *"quedarían privados de la oportunidad de implicarse en la actividad de explicar y dotar de sentido a sus propios errores, una actividad que puede resultar altamente motivadora y provocadora".* (Rico, 1995, pág.94)

Finalmente concluimos que por medio del análisis de los errores no sólo podemos determinar cuáles son aquellos "conceptos o nociones deficientes" que se presentan a lo largo del proceso de construcción de un conocimiento matemático. Sino que constituye un trabajo que busca aportar mejoras en la enseñanza y aprendizaje de la matemática, tanto de parte de los profesores e investigadores, como de los alumnos.

3.4.2.2 Tratamiento de errores cometidos por los alumnos en las evaluaciones escritas

En este apartado, nos encargaremos de establecer un análisis diagnóstico de algunos de los errores que presentaron los alumnos en torno a la resolución de problemas. Para ello, determinaremos dos marcos de análisis: uno teórico y otro de trabajo, que servirán como base del estudio de procedimientos de resolución específicos de donde se desprenden los errores considerados.

Finalmente, distinguiremos algunas dificultades que consideramos, tuvieron los alumnos en el marco del trabajo de resolución de problemas en la evaluación.

3.4.2.3 Marco teórico: Clasificación de los errores

Kilpatrick, Gómez y Rico (1995), sostienen que:

> *"(...) Los errores pueden ser o bien sistemáticos o por azar. Los primeros son mucho más frecuentes y, por lo general, más efectivos para revelar los procesos mentales subyacentes; estos errores se toman como síntomas que señalan hacia un método o comprensión equivocada subyacente, que el estudiante considera y*

utiliza como correcto. Los errores por azar reflejan falta de cuidado y lapsus ocasionales, y tienen relativamente poca importancia (...)" (p. 84)

Analizando los distintos procedimientos realizados por los alumnos en las evaluaciones escritas, notamos que los errores que algunos de estos presentaban formaban parte, o bien del grupo de "errores sistemáticos", o del de aquellos efectuados al azar. Para el primero de los grupos, consideraremos las siguientes clasificaciones citadas por los autores anteriores:

"Clasificación de los errores en función de la teoría de procesamiento de la información" (Radatz, H. citado en Rico, 1995)

1. Errores debidos a dificultades de lenguaje.
2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial.
3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento.
5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

"Clasificación empírica de los errores sobre un análisis constructivo de las soluciones de alumnos de secundaria en matemáticas" (Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar, 1987, citado en Rico 1995)

1. Datos mal utilizados.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje.
3. Inferencias no válidas lógicamente.
4. Teoremas o definiciones deformados.
5. Falta de verificación en la solución.
6. Errores técnicos.

3.4.2.4 Análisis de las resoluciones y clasificación de los errores en las producciones matemáticas de los alumnos en el marco de la resolución de problemas.

Analizaremos distintos procedimientos efectuados por los alumnos en la resolución de los problemas que se evaluaron en forma escrita en el examen de logaritmación. Recordemos que se trata de problemas matemáticos a los cuales se les destinó bastante tiempo de comprensión, trabajo e interpretación, durante las clases.

Para ser más descriptivos, trabajaremos con las resoluciones del *"problema del tablero de ajedrez"* [13] donde aparece una expresión general que vincula las casillas de un tablero con la cantidad de granos que hay en ella y, mediante la cual, se pide que se determine el número de casilla en la que se encuentra una cantidad de granos dada. También aparecerán procedimientos devenidos de la resolución del *"problema de las hectáreas desérticas"*. En este caso, la expresión exponencial (ecuación) no está dada explícitamente, sino que es parte del problema interpretar los datos y arribar a ella, para finalmente hallar una solución a la cual se le debe otorgar sentido en el contexto de trabajo.

Posteriormente, clasificaremos algunos errores de estas resoluciones en función de las clasificaciones presentadas en el apartado anterior y finalmente, determinaremos algunas dificultades de los alumnos en la resolución de los problemas matemáticos considerados, que observamos a partir de este trabajo.

- *Resolución 1:*

$$5.5^x = 180000000$$

$$5^x = 180000000 : 5$$

$$5^x = 36000000$$

$$x = log_5 36000000$$

$$x = 10{,}81$$

Rta: En la casilla 11 se superan los 180 millones de granos.

Esta resolución fue la que más se presentó a la hora de resolver el problema del tablero de ajedrez en 5 "B". El enunciado determinaba: "Sissa le pide al rey colocar 5 granos en la primera casilla y que cada casilla quintuplique la cantidad de granos de la casilla precedente". En función de este dato, debían calcular la casilla en la cual se alcanzaban o superaban los 180 millones de granos de trigo. Al

[13] Este problema se presenta de manera diferente en las evaluaciones de los dos cursos. En el 5 "A" la expresión aparece en el enunciado mientras que el 5 "B", deben determinarla. Trabajaremos con ambas visiones del problema

plantear la ecuación exponencial (donde la cantidad de granos se obtiene en función de las casillas del tablero, representadas estas en el exponente de la misma), parece que los alumnos interpretaron el problema de la misma manera en la que se pensó el de las hectáreas desérticas en clase. Es decir, la situación identificaba una cantidad inicial que siempre permanecía constante (cantidad de hectáreas desérticas inicial de una comarca), que luego se veía afectada por la forma en la que se extendía la zona desértica (se triplicaba, cuadruplicaba, quintuplicaba…), y así se escribía la expresión exponencial general. Consideramos que lo que se presenta aquí es "una falta de comprensión semántica de los textos matemáticos". Más aún, "errores de traducción desde un esquema semántico en el lenguaje natural a un esquema más formal en el lenguaje matemático". Estas características corresponden a la categoría "Errores debidos a dificultades de lenguaje", perteneciente a la primera de las clasificaciones mencionadas.

Es importante aclarar que este razonamiento puede ser considerado correcto o incorrecto dependiendo de la manera que se haya encarado el problema. Es decir, si el alumno está de acuerdo en considerar una "casilla 0" como casilla inicial, el procedimiento y la respuesta son correctos. Si se comienza con una "casilla 1", la expresión " 5.5^{x}" no contempla el valor "5 granos en la primera casilla" que menciona el enunciado. De hecho, según la expresión anterior, se tendría que en la casilla 1 hay 25 granos de trigo.

- *Resolución 2:*

$$3\,.\,2^{x-1} = 5000000$$

$$2^{x-1} = 5000000 : 3$$

$$2^{x}\,.\,2^{-1} = 1666666,\underline{6}$$

$$2^{x-1}\,.\,\frac{1}{2} = 1666666,\underline{6}$$

$$2^{x} = 1666666,\underline{6} : \frac{1}{2}$$

$$log_2\, x = 3333333,\underline{3}2$$

Este es el procedimiento de resolución del problema del tablero de ajedrez que realizó uno de los alumnos. Como se puede observar, logró plantear correctamente la ecuación exponencial y arribar a una expresión similar a las trabajadas en clase en las instancias de trabajo con problemas matemáticos. Es decir, el alumno pasa de tener la ecuación $3 \,.\, 2^{x-1} = 5000000$ a una expresión equivalente

$$2^{x} = 1666666,\underline{6} : \frac{1}{2}.$$

En el siguiente paso, vemos que resuelve correctamente el miembro derecho de la ecuación. Pero en el otro se presenta una "confusión" con el concepto de logaritmo. Esto puede radicar en el hecho de que el alumno es consciente de que ha resuelto un problema similar en clases y sabe que debe usar logaritmo para poder hacerlo. Pero, con este razonamiento, concluye de manera indirecta, que las expresiones " 2^{x} " y " $\log_2 x$" son equivalentes, cuando en realidad lo que se obtiene al aplicar la definición de logaritmo es " $x = \log_2 3333333,\underline{3}$ ".

De esta manera podríamos clasificarlo en la categoría "Definiciones deformadas", que contempla a aquellos *"errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable (...) Realizar una valoración o desarrollo inadecuado de una definición (...)"* (Movshovitz-Hadar y otros, 1987, citado en Rico 1995)

- *Resolución 3:*

$$3.\,2^{x-1} = 5000000$$

$$(3.2)^{x-1} = 5000000$$

$$log_{(3.2)}\, 5000000 = x - 1$$

$$log_6\, 5000000 = x - 1$$

$$8{,}61 = x - 1$$

$$8{,}61 + 1 = x$$

$$9{,}61 = x$$

Rta: se superan los 5 millones de granos en la casilla 10.

Se presentaron varias resoluciones similares a esta para este problema. Aquí no aparecen confusiones en cuanto a la definición de logaritmo, de hecho se realiza un uso correcto del mismo. El error se produce porque se consideran equivalentes las expresiones “ 3.2^{x-1} “ y “ $(3.2)^{x-1}$ “ que, de forma implícita, termina siendo “ 6^{x-1}”. De esta manera, se produce una *“Interpretación incorrecta del lenguaje”*, categoría que incluye a *“los errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto. Esto ocurre al poner un problema en ecuaciones expresando una relación diferente de la enunciada (...)”* (Ibid.)

- *Resolución 4:*

1 casilla ---- 3 granos

2 casilla ---- 3.1

x casilla ---- 5000000 granos

$$log_3(5000000)^3 \ = 28{,}08$$

Rta: En la casilla 28 supera los 5 millones de granos.

En un principio, este alumno establece una interpretación del problema analizando la correspondencia “número de casilla - cantidad de granos”. Toma como ejemplo las casillas 1, 2 y luego, la x. Para la casilla 2, la representación de la cantidad de granos termina siendo incorrecta. En esta manera de representar la situación enunciada hay vestigios de las clases de resolución de problemas, donde, en un comienzo, se establecía un análisis de la situación (plasmado aquí en la manera en la que el alumno encara el problema) para llegar a una expresión que dependiera de una casilla “x”, determinar una ecuación y luego, hacer uso del logaritmo.

Es claro que la expresión que el alumno plantea no está relacionada con la definida en el enunciado y no corresponde al análisis que se venía realizando en un comienzo.

- *Resolución 5:*

Cada 12 años ---- 3 veces más

actualm. 50 hectáreas

15000 hectareas ---- años ?

$$log_{12}(15000)^3 = 11{,}60$$

Rta: dentro de 11,60 años va a tener 15000 hectáreas.

Este alumno es el mismo que realiza la "resolución 4". Podemos observar que intenta operar efectuando un procedimiento similar al anterior. De hecho, la expresión mediante la cual determina la solución de este problema es idéntica en estructura a la que usa en el anterior. Este error puede clasificarse mediante la categoría *"Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento"* (Radatz, H. citado en Rico, 1995), en la cual se considera que *"la experiencia sobre problemas similares anteriores puede producir una rigidez en el modo habitual de pensamiento y una falta de flexibilidad para codificar y decodificar nueva información (...)".* (ibid.)

- *Resolución 6:*

$$30.\,2^x = 45000$$

$$2^x = 1500$$

$$log_2 1500 = x$$

$$10{,}55 = x$$

$$30\,.\,2^{10{,}55} = 44976{,}71$$

$$44976{,}71\; x\; 25 = 1124417{,}75$$

Rta: $1124417{,}75$*. Cantidad de año en el que se ocupará la comarca.*

Este es el procedimiento que efectuó uno de los alumnos para resolver el "problema de las hectáreas desérticas".

Podemos observar que el desarrollo se realiza correctamente. Se plantea la ecuación exponencial correspondiente, se aplica adecuadamente la definición de logaritmo y se determina la solución de la misma.

El error aparece cuando se intenta determinar la respuesta del problema mediante una manipulación algebraica no fundamentada. La solución obtenida termina siendo totalmente descabellada en relación a los datos del problema, dando indicios de que no se está interpretando correctamente lo que representa la incógnita de la ecuación exponencial. Otra vez se hace presente de manera confusa la forma de resolver este tipo de problemas en clase, donde se obtenía una incógnita en periodos y se debía realizar una multiplicación, en la cual uno de los factores fácilmente reconocibles en el enunciado, era la cantidad de años de duración del periodo considerado.

Al resolver la ecuación y obtener resultados de este tipo, muy pocos alumnos realizaron una verificación de la solución que habían obtenido. Más aún, para estudiantes, el proceso de "verificación" coincidía con el de "ejecución", pues optaban por arribar a la solución "tanteando".

Este tipo de error está contenido en la categoría "*Falta de verificación de la solución"* (Movshovitz-Hadar y otros, 1987, citado en Rico 1995) compuesta por *"errores que se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada (...) "* (Ibid.)

- *Resolución 7:*

$$2 \,.\, 30^{x} = 45000$$

$$30^{x} = \frac{45000}{2}$$

$$30^{x} = 22500$$

$$log_{30}\, 22500 = x$$

$$2{,}94 = x$$

La forma de hallar la respuesta del problema fue la siguiente:

$$2{,}94 \,.\, 25 = 73{,}66$$

- *Resolución 8:*

$$log_{3} 50^{x} = 15000$$

$$x \,.\, log_{3}\, 50 = 15000$$

$$x.\, 3{,}56 = 15000$$

$$x = \frac{15000}{3{,}56}$$

$$x = 4213{,}48$$

Este tipo de errores fue muy frecuente cuando se comenzó a trabajar con el concepto y la definición de logaritmo: No reconocer cuál era la base de la potencia en la expresión exponencial, intentar usar el logaritmo sin plantear la exponencial tratando de "adivinar" la base de este, entre otros.

En el caso de la resolución 7, el alumno tuvo una confusión con el orden de los datos de la expresión exponencial. Pese a esto, la forma de resolver la ecuación fue correcta y logró contextualizar la respuesta.

El alumno que realizó la resolución 8 también tuvo confusiones con la base de la expresión exponencial. Se agrega, además, que hay una confusión en el proceso de resolución de este tipo de ecuaciones: se sabe que se debe usar el logaritmo para obtener el resultado, pero existen dudas sobre cuándo hay que hacerlo.

Por tales motivos, los errores que aparecen en este tipo de resoluciones se podrían clasificar en la categoría *"Datos mal utilizados" (Ibid.),* que engloba aquellos casos en los que *"(...) se asigna a una parte de la información un significado inconsistente con el enunciado; se utilizan los valores numéricos de una variable para otra distinta; o bien, se hace una lectura incorrecta del enunciado (...)" (Ibid.)*

- *Resolución 9:*

$$2\,.\,3^{x-1} = 5000000$$

$$3^{x-1} = \frac{5000000}{2}$$

$$3^{x-1} = 2500000$$

$$\frac{x-1}{3} = 2500000$$

$$x - 1 = 2500000\,.\,3$$

$$x = 7500000 + 1$$

$$x = 7500001$$

Tenemos aquí otra forma de resolver el "problema del tablero de ajedrez".

En este caso, se establece una división entre el exponente de la expresión y la base de la misma, en lugar de usarse la definición de logaritmo. Por tal motivo, consideramos que este tipo de error se debe a un *"Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos"* (Radatz, H. citado en Rico, 1995) que contempla *"todas las deficiencias de conocimiento sobre contenido y procedimientos específicos para la realización de una tarea matemática. Estas deficiencias incluyen la ignorancia de los algoritmos, conocimiento inadecuado de los hechos básicos, procedimientos incorrectos en la aplicación de técnicas y dominio insuficientes de símbolos y conceptos necesarios."* (Ibid.)

Podemos decir que el concepto de logaritmo no se hizo presente en esta resolución, es más, se vió "deformado" mediante la expresión algebraica " $\frac{x-1}{3}$ ". Cuando se obtuvo una solución al problema, no se realizó la verificación de la misma. Esto podría haber logrado que el alumno interpretara el resultado obtenido y se adentrara en la búsqueda del error en el procedimiento efectuado.

Es importante aclarar que un error puede pertenecer a varias de estas categorías de clasificación, como intentamos mostrar en la última parte del análisis de la "resolución 9".

Además, la categoría *"Aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos"* es de las más abarcativas. De hecho, todos los errores que consideramos en este análisis están contemplados aquí y son de los más notorios en las evaluaciones escritas.

3.4.2.5 Dificultades de los alumnos determinadas a partir del análisis y clasificación de los errores en la resolución de problemas específicos.

- Dificultad para interpretar la situación problemática:

Puesto que se analizan resoluciones efectuadas en una instancia de evaluación escrita integradora, se debe considerar que los alumnos ya han trabajado con este tipo de problemas durante las clases, y como la "resolución de problemas" fue una de nuestras principales actividades - objetivo, se le destinó bastante tiempo.

Creemos que, además de la situación de estrés que conlleva este tipo de instancia, parece presentarse cierta "saturación" de información que puede llegar a ocasionar estas "generalizaciones" en la forma de resolver problemas, sin un previo análisis de la situación.

- Dificultades en el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes:

Si bien la mayoría de los alumnos lograron plantear una ecuación exponencial inicial (algunos, correcta y otros, como mostramos en algunas resoluciones, con cierta confusión en el orden de los datos), notamos que se presentaron varias dificultades en relación al "pasaje" de una ecuación a otra mediante la aplicación de una determinada operación algebraica. Mostramos a continuación algunos casos donde se deduce que los alumnos consideran equivalentes ("≈") ciertas expresiones:

➔ Caso 1:

$$2^x = 1666666,\underline{6} : 2$$

$$\frac{1}{2}\, log_2\, x \ = \ 3333333,\underline{3}$$

Se deduce que:

$$2^x \approx \ log_2\, x$$

➔ Caso 2:

$$3\,.\,2^{x-1} \ = 5000000$$

$$(3.2)^{x-1} \ = \ 5000000$$

$$log_{(3.2)}\, 5000000 \ = x - 1$$

$$log_6\, 5000000 \ = \ x - 1$$

De donde se deduce que:

$$3.\, 2^{x-1} \approx \ (3.2)^{x-1} \ \approx \ 6^{x-1}$$

➔ Caso 3:

$$3^{x-1} = 2500000$$

$$\frac{x-1}{3} = 25000003^{x-1} = 2500000$$

De donde se deduce que:

$$3^{x-1} \ \approx \ \frac{x-1}{3}$$

Estos planteos nos hacen ver que existe cierto desconocimiento sobre el hecho de que al trabajar con expresiones algebraicas o ecuaciones es necesario conservar la *denotación* (Frege, 1892, citado en Sessa, C. 2005) de los mismos. En este sentido, los alumnos efectúan procedimientos algebraicos sobre una de las ecuaciones con intención de obtener otras que le permitan determinar el valor de la incógnita. En el medio de este proceso, no son conscientes de que expresiones equivalentes deben conservar el conjunto solución.

3.5 Algunas reflexiones sobre la problemática

En esta sección nos proponemos analizar y reflexionar brevemente sobre todo lo abordado en la problemática, no solo desde una perspectiva teórica, sino también desde lo "vivencial", tratando se ser lo suficientemente críticos con nuestras prácticas docentes, y de esa manera tratar de acercarnos a las respuestas de algunos interrogantes que consideramos importantes: ¿Qué decisiones tomamos a lo largo de nuestras prácticas en relación a esta problemática que se presentó?, ¿fueron las correctas?, ¿podríamos haber tomado otras?, ¿qué rol jugó nuestra planificación?; y varias preguntas más que nos iremos haciendo.

En primera instancia, y considerando la primera parte del análisis de la problemática, creemos que las mayores dificultades de los alumnos en la resolución de problemas se presentaron en las dos primeras etapas que propone Carrillo Yáñez (1998): COMPRENSIÓN y PLANIFICACIÓN Y EXPLORACIÓN. Esto, a su vez, está directamente relacionado con las dificultades de los alumnos para interrelacionar distintas fases (tal como se plantea en el esquema de la figura 34), con la evidente "carencia de heurísticos" que presentan ("dibujar un diagrama", "ejemplificar", "explorar problemas similares", etc) y la utilización incorrecta de los heurísticos que poseen (por ejemplo, "al considerar problemas similares" se podía observar como los estudiantes plasmaban en sus desarrollos o en los planteos que nos hacían la idea de que "problemas similares conllevan soluciones idénticas"). Y estas dificultades se hicieron presente en el marco de una modalidad de trabajo que sin lugar a dudas generó, en mayor o menor medida, una "ruptura en el contrato didáctico", en relación al tipo de trabajo matemático que venían realizando los alumnos, como ya hemos mencionado en secciones anteriores.

Ahora cabe preguntarnos cuál fue nuestro accionar frente a todo este análisis que hemos realizado en el párrafo anterior, y qué decisiones podríamos haber tomado que no se tomaron, pensando también en los interrogantes planteados anteriormente.

Si bien la planificación del trabajo con resolución de problemas fue una instancia a la que le dedicamos mucho tiempo de análisis y discusión (como también al resto de las actividades, con la diferencia que la "resolución de problemas" era el eje de nuestras prácticas), creemos que nos faltó profundizar sobre las posibles dificultades que podrían presentar los alumnos en la instancia de resolución de problemas, considerando que la propuesta era, a priori, diferente a la que se había observado en las clases previas a nuestras prácticas. Con esto nos referimos a que, contar con una planificación que nos permitiese anticiparnos (aún más de lo que ya nos anticipaba la planificación que teníamos) a las dificultades, dudas e interrogantes de los alumnos, y también a esta ruptura del contrato didáctico, hubiera sido una herramienta de mucha ayuda para nosotros.

Cabe destacar que en la instancia de resolución de problemas también incluimos las "puestas en común", las cuales en determinados momentos de las prácticas nos costó bastante gestionar.

En relación a esto, Gvirtz y Palamidesi (2008) sostienen que:

> *La tarea de reflexión sobre la actividad en sí de enseñanza es importante ya que nos permite conocerla para poder actuar e interactuar cada vez mejor. En esto será de gran ayuda el momento de la planificación. De cara a los múltiples condicionantes de las situaciones de enseñanza (el currículo y el cuerpo de contenidos, las diversas filosofías de la enseñanza o ideas reguladoras, la evaluación que deberá hacerse de los alumnos, los ritmos de trabajo impuestos por el contexto social e institucional) el diseño de la práctica de enseñanza nos servirá de guía, de eje vertebrador y nos permitirá pensar una y otra vez sobre nuestra propia tarea. Como un puente sutil tendido entre la provisionalidad del conocimiento y la incertidumbre de la situación educativa, el diseño y la planificación constituyen un momento y una herramienta para afirmar nuestra condición de enseñanza. Es nuestra hipótesis de trabajo que, seguramente, hemos de ajustar en un futuro…" (pág. 205).*

En cuanto a las decisiones que fuimos tomando durante el proceso de resolución de los distintos problemas que les presentamos a los alumnos, nos parece importante rescatar las *"Acciones de enseñanza para la resolución de problemas"* que propone Schoenfeld (1992), considerando una investigación realizada por Lester, Garófalo y Kroll (1989). Si bien creemos que no hay ninguna "receta mágica" que como futuros profesores podamos seguir para abordar la resolución de problemas en las clases de matemática, nos parece que las acciones que describe este autor concuerdan mucho con nuestra perspectiva sobre la enseñanza de la matemática (de la cual ya hemos hablado), y en particular con el trabajo con problemas matemáticos que hemos realizado en nuestras prácticas.

Acciones de enseñanza para la resolución de problemas

Acciones de enseñanza	Propósito
Antes	
1. Leer el problema -discutir palabras o frases que los estudiantes pueden no entender	Ilustrar la importancia de leer cuidadosamente; prestar atención a vocabulario especial
2. Hacer una discusión con toda la clase para destacar la importancia de entender el problema.	Destacar los datos importantes, clarificar el proceso.
3. (Opcional) Discusión con toda la clase de posibles estrategias para resolver el problema.	Obtener ideas sobre caminos posibles para resolver el problema.
Durante	
4. Observar a los estudiantes y hacerles preguntas para determinar dónde están.	Diagnosticar puntos potencialmente fructíferos y puntos débiles.
5. Dar sugerencias cuando es necesario.	Ayudar a los estudiantes a superar bloqueos.
6. Formular, cuando corresponda, generalizaciones a los problemas.	A los que terminan primero, desafiarlos a generalizar.
7. Requerir a los estudiantes que obtuvieron una solución que “respondan a la pregunta”.	Requerir a los estudiantes que revisen su trabajo y asegurarse que le den sentido.
Después	
8. Mostrar y discutir soluciones.	Mostrar y nombrar diferentes estrategias.
9. Relacionar con problemas anteriormente resueltos o hacerles resolver extensiones.	Demostrar la aplicabilidad general de las estrategias de resolución de problemas.
10. Discutir aspectos especiales, por ejemplo figuras.	Mostrar cómo los aspectos pueden influir en los enfoques.

Considerando que hemos afirmado que las mayores dificultades de los alumnos se hicieron presentes en las etapas de “comprensión” y “planificación y exploración”, podríamos reflexionar sobre el “antes” y el “durante” que propone Schoenfeld, en relación a nuestro accionar en el aula en esas instancias.

Si bien consideramos que el trabajo en pequeños grupos fue muy fructífero en muchos aspectos, también creemos que hubiera sido interesante pensar en instancias de discusiones donde participe todo el curso en el “antes” y no solo en el “durante” o el “después” (en este último siempre hubo discusiones donde participaban todos, lo que hemos venido denominando “puestas en común” o “debates”). Con esto no estamos diciendo que discutir entre todos el problema antes de que los alumnos comiencen a trabajar en pequeños grupos sobre el mismo es “mejor” o “peor” que no hacerlo, sino que hubiera sido una alternativa para tener en cuenta cuando el enunciado, a priori, presentaba dificultades para su comprensión (como el problema de la atmósfera). De hecho en el problema de la atmósfera se optó por interrumpir el trabajo en grupo que estaban realizando los alumnos para pasar a una instancia donde se discutió entre todos el enunciado.

Por otro lado, hemos advertido sobre la “carencia de heurísticos” en los alumnos. Es probable que estas discusiones en el “antes” hubiesen ayudado a saldar parte de esta carencia. Si bien intentamos hacerlo a medida que íbamos recorriendo los grupos, y en algunos dio buenos resultados, no consideramos el hecho de que, de una discusión previa al inicio del trabajo con un problema (antes de que los alumnos lo empiecen a explorar en pequeños grupos) se puede obtener una “lluvia de ideas”, y el análisis de las mismas puede colaborar a que más cantidad de estudiantes comprendan el problema, e incluso puedan empezar a pensar en algunas estrategias de resolución.

En cuanto al “durante” que propone el autor, queremos recatar la frase *“diagnosticar puntos potencialmente fructíferos…”.* Nos parece sumamente importante el hecho de considerar lo que “sí han podido pensar”, lo que “sí han podido plantear” los alumnos, por más mínimo que sea, más allá de que nuestra problemática se centre en “dificultades de los estudiantes…”. Justamente creemos que la mejor manera (o al menos la que nosotros consideramos desde nuestra formación) de afrontar una problemática en el aula de matemática, no es solo centrándonos en las dificultades y en lo que “no pueden hacer los alumnos”, sino también reflexionando sobre sus virtudes, sus posibilidades, sus ideas, sus razonamientos, y sobre lo que efectivamente “sí pudieron hacer” frente a una propuesta de trabajo.

En referencia a esto, consideramos que a lo largo de nuestras prácticas realizamos un esfuerzo importante por rescatar todo aquello que los alumnos producían, tanto en forma oral como en forma escrita, y ver de qué manera esos aportes contribuían o no a la resolución de un problema, pero siempre considerándolos valiosos. También tratamos de que ellos mismos consideren valiosos sus aportes, tanto en las discusiones como cuando trabajaban en grupo o en forma individual, más allá de que fueran más o menos correctos.

Relacionando esto último con las clases que habíamos observado en la instancia previa a nuestras prácticas, pudimos ver que muchos alumnos que pasaban desapercibidos en la clase de matemática, tuvieron una participación mucho más activa, proponiendo ideas en los debates y hasta incluso pasando al pizarrón a escribir algún desarrollo que habían realizado.

Además de que muchos alumnos mejoraron su participación en clase, en general las dos divisiones mostraron avances también en otros aspectos. Pudimos observar algunas diferencias entre las primeras clases y las últimas en cuanto a algunas actitudes frente a la resolución de problemas, entre ellas la paciencia y la perseverancia al abordar un enunciado. También notamos que las discusiones que se daban en los grupos fueron mejorando en cuanto a su "calidad" mientras avanzaban las clases, y la idea de que "hacer matemática" no es un mero acto individual y solitario se fue instalando en los cursos, sin la necesidad de que lo recordásemos todo el tiempo.

Sumado a los avances mencionados, observamos en la clase de repaso como, al momento de trabajar con problemas, las dudas y dificultades ya estaban mucho más repartidas entre las distintas etapas de resolución que hemos mencionado anteriormente. Es decir, había mayor cantidad de alumnos que habían podido sortear las dos primeras etapas ("comprensión" y "planificación y exploración") y ya presentaban dudas más bien concretas relacionadas a la fase de "ejecución". Y los alumnos que seguían mostrando dificultades para la parte inicial de la resolución, ya no lo hacían con una "hoja en blanco" como pudimos observar en las primeras clases, sino que ahora se evidenciaba algún tipo de desarrollo que ellos "habían podido pensar, discutir con sus compañeros y plasmar en una hoja".

En la segunda parte del análisis de la problemática se trataron los errores más frecuentes producidos por los alumnos en la instancia de resolución de problemas. En base a ese análisis, acordamos con lo que sostiene Rico (1995):

"(…) al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a los compañeros o al profesor ayudarle a completar el conocimiento adicional o llevarlo a comprender por sí mismo aquello que estaba mal". (pág. 76)

Es importante destacar que nuestro análisis sobre los errores producidos por los alumnos en la resolución de problemas se realizó considerando los problemas de las evaluaciones, es decir, en la instancia final de nuestras prácticas. Con esto estamos diciendo que no utilizamos este análisis como una herramienta que nos ayudase en el desarrollo de nuestras clases.

Luego de haber considerado el "análisis de los errores" como uno de los ejes de nuestra problemática, podemos afirmar que hubiera sido muy provechoso para nuestras prácticas implementar una metodología que nos permitiese considerar y analizar los errores en las producciones de los alumnos a lo largo de todas las clases. Una opción podría haber sido pedir sistemáticamente las carpetas, algo que si bien estaba dentro de lo que se le evaluaba a los estudiantes (las producciones escritas), no logramos realizarlo de manera tal que nos permitiese efectuar un estudio más profundo sobre las producciones de los alumnos. Quizás otra alternativa hubiera sido rescatar de alguna manera errores puntuales mientras recorríamos los grupos para luego analizarlos, aunque esta opción siempre tiene sus dificultades debido al dinamismo que presenta el aula y a la incomodidad que genera tener que estar realizando anotaciones todo el tiempo (lo pudimos evidenciar al realizar anotaciones que luego nos servirían para la evaluación en desarrollo)

Como el lector habrá podido notar, hemos tratado que las reflexiones sobre el análisis de la problemática no giren solo en torno a lo producido por los alumnos, sino que también estén relacionadas, en mayor o menor medida, con nuestro accionar a lo largo de las prácticas.

Creemos que es fundamental prestar especial atención no solo a las dificultades que expresan los alumnos, sino también a nuestras propias dificultades a la hora de enseñar matemática desde la resolución de problemas. En este sentido, acordamos con lo que señala Burkhardt (1988, citado en Schoenfeld, 1992) sobre algunos problemas que dificultan la tarea docente en relación a este tipo de enseñanza:

"Matemáticamente: Los docentes deben percibir las implicaciones de las diferentes aproximaciones de los estudiantes, si son fructíferas, y si no, qué las podría hacer fructíferas.

> *Pedagógicamente: El docente debe decidir cuándo intervenir y qué sugerencias pueden ayudar a los estudiantes mientras deja la solución en sus manos, y además, hacer esto con cada estudiante o grupo de estudiantes en la clase.*
> *Personalmente: El docente se encontrará a menudo en la posición, inusual para profesores de matemática y poco cómoda para muchos, de no saber; trabajar bien sin saber todas las respuestas requiere experiencia, confianza y autoestima." (pág.32)*

A modo de cierre de esta sección queremos resaltar la idea de que "hacer matemática" utilizando la resolución de problemas es posible, pero que no deja de ser todo un desafío que conlleva el análisis y la reflexión de múltiples factores. No se aprende a resolver problemas de un día para el otro, y no existen recetas infalibles para tal cosa, pero consideramos que la enseñanza de diferentes estrategias ("heurísticos") juega un rol importante. *"(…) Para que el rendimiento o desempeño [performance] de los estudiantes en la resolución de problemas mejore, deben intentar resolver una variedad de tipos de problemas regularmente y por un lapso prolongado"* (Lester, 1989, citado en Schoenfeld, 1992), y además, *"(…) los problemas que se planteen deben ser variados en la presentación, el número de soluciones, los métodos posibles de resolución y los tipos de conceptos matemáticos que intervienen"* (Alsina, C. y otros, 2002. Citado en Villalobos, 2008).

Por otro lado sostenemos, tal como afirma Halmos (1980, citado en Schoenfeld, 1992), que la resolución de problemas es el "corazón de la matemática", y como futuros profesores aspiramos a contribuir con la idea de que la resolución de problemas sea un objetivo en sí mismo en las aulas de matemática. *"(…) Las aulas deben ser comunidades en las cuales la matemática adquiera sentido, y lo que como docentes esperamos de los estudiantes, sea realmente practicado"* (Schoenfeld, 1992).

4. REFLEXIONES FINALES

Reflexionar acerca de nuestras prácticas nos lleva a pensar en una experiencia única e inolvidable, pero no solo por ser, en nuestro caso, nuestra primera experiencia frente a un aula, sino por todo lo que significó para nosotros como etapa de aprendizaje y reflexión. Una etapa que tuvo cosas muy gratificantes como también otras que no lo fueron tanto, pero donde sentimos que cada instancia de trabajo y de reflexión que abordamos como equipo, cada debate que tuvimos y cada decisión que tomamos, nos sirvieron para crecer un poco más como futuros profesionales.

Nos llevamos un grato recuerdo de la institución donde realizamos nuestras prácticas docentes, como así también del profesor tutor, que nos dio siempre una palabra de aliento e hizo que nos sintiéramos muy cómodos en la escuela; y de todos los alumnos, los cuales mostraron una predisposición muy grande ante nuestra propuesta de trabajo.

No podemos dejar de mencionar a quien fue nuestro profesor supervisor, el Licenciado Nicolás Gerez Cuevas, al cual le agradecemos profundamente todos sus consejos y sugerencias, pero sobre todas las cosas la confianza y la tranquilidad que nos transmitió en todo momento.

Si bien este informe muestra la experiencia desarrollada en nuestras prácticas docentes, las mismas fueron el producto de un trabajo muy largo e intenso que desarrollamos en la materia Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE). Esta materia nos brindó muchísimas herramientas que luego tratamos de implementar, en mayor o menor medida, a lo largo de nuestras prácticas, y que seguramente conservaremos y puliremos a lo largo de nuestra profesión, e iremos incorporando muchas más producto de nuestra propia experiencia docente. Pero por sobre todas las cosas, MOPE nos transmitió un mensaje que nos parece muy importante resaltar, y es la idea de ser "críticos y reflexivos" a la hora de ejercer nuestra profesión docente, y de tener en cuenta que en el aula de matemática, como cualquier otra asignatura, no solo se deben transmitir conocimientos, sino que también se deben transmitir valores.

Como futuros profesores sabemos que nos espera un gran desafío y que esto es solo el primer paso, pero que sin lugar a dudas es un paso muy grande y que difícilmente olvidaremos.

5. BIBLIOGRAFÍA

ABRATE, R y POCHULU, M. (2008) *Diseño y resolución de problemas para la clase de geometría.* Editor: Universidad Nacional de Villa María.

CÉLIZ, M.J., FELIZIANI, V.A y ZINGARETTI, M.L (2007) La resolución de problemas como objeto de enseñanza y medio para el aprendizaje. En: Abrate, R y Pochulu, M. (Comp) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática.* Universidad Nacional de Villa María. Cap. 9, pp.179-192)

CARRILLO YÁÑEZ, J. (1998) *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones.* Universidad de Huelva

CHARNAY, R (1988) Aprender (por medio de) la resolución de problemas. En: Parra, C. & Saiz, I. (Comp). *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires. Paidós. Cap III, pp. 51-63

Diseño Curricular del Ciclo Básico de la Educación Secundaria (2011-2015) Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba. Disponible en http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec.php (Consultado en noviembre 2015)

Diseño Curricular de la Educación Secundaria. Orientación economía y administración (2011-2015). Disponible en http://www.igualdadycalidadcba.gov.ar/SIPEC-CBA/publicaciones/EducacionSecundaria/DiseniosCurricSec.php (Consultado en noviembre 2015)

GVIRTZ, S. y PALAMIDESSI, M. (2008) *El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza*. Editorial Aique. Buenos Aires.

GONZÁLEZ, F. (2007) Cómo desarrollar clases de Matemática centradas en resolución de problemas. En: Abrate, R y Pochulu, M. (Comp) *Experiencias, propuestas y reflexiones para la clase de matemática.* Universidad Nacional de Villa María. Cap. 12, pp.235-262)

INOSTROZA, F. (sin fecha) Dificultades en la resolución de problemas matemáticos y su abordaje pedagógico. Un desafío pendiente para profesores y estudiantes. Disponible en: http://es.slideshare.net/profedoc/artculo-publicable-dificultadesresolucinproblemasmatemticos1 (Consultado en noviembre 2015)

KACZOR, P. Y OTROS. (1999) *Matemática I Polimodal.* Santillana. Buenos Aires

KILPATRICK, J; GÓMES, P. y RICO, L. (1995) *Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes; resolución de problemas; evaluación; historia.* Grupo Editorial Iberoamericana. Colombia

La evaluación de los aprendizajes en Educación Secundaria, Documento de apoyo curricular. Ministerio de Educación de la provincia de Córdoba. Disponible en: www.igualdadycalidadcba.gov.ar (Consultado en noviembre del 2015)

ROBAYNA SOCAS M. (1997) Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Disponible en: http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/SocasM97-2532.PDF (Consultado en noviembre 2015)

SADOVSKY, P. (2005) *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Libros del Zorzal. Buenos Aires.

SCHOENFELD, A. (2000) *Aprender a pesar matemáticamente: resolución de problemas, metacognición y compresión en matemática*. Traducción H. Alagia y D. Fregona. Córdoba, Argentina. Traducción de: Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sens making in mathematics.

SESSA, C. (2005) *Iniciación al estudio didáctico del algebra: orígenes y perspectivas.* Libros del Zorzal. Buenos Aires, Argentina.

SKOVMOSE, O. (2000) Escenarios de investigación. *Revista EMA*, Vol. 6, N° 1, p. 3-26.

VILANOBA, S. Y OTROS (sin fecha). La educación matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. Disponible en http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF (Consultado en noviembre de 2015)

VILLALOBOS, X. (2008): Resolución de problemas matemáticos: un cambio epistemológico con resultados metodológicos. *Revista REICE*. Vol 6 (3*).* Madrid: España. Disponible en: http://www.redalyc.org/pdf/551/55160303.pdf (Consultado en noviembre 2015)

6. ANEXOS

6.1 Anexo 1: Programa de 5° Año

- FUNDAMENTACIÓN

La Matemática es un producto social y cultural. Como ciencia y como actividad de producción, tiene una forma característica de explicar, argumentar, razonar, validar y comunicar, empleando siempre un lenguaje bien definido. Para permitir que los alumnos se acerquen a la construcción de conocimientos matemáticos se pondrá énfasis en el planteo de problemas, la discusión y reflexión de posibles resoluciones, ello con la intervención del docente como mediador y gestor de un modo de trabajo para permitir la progresiva evolución de dicho proceso de construcción del conocimiento matemático. La reflexión, la valoración de las distintas formas de resolución que surjan de las interacciones en clase, y el aprecio del error como instancia de aprendizaje, serán fundamentales para permitir el desarrollo de la confianza y el compromiso del grupo de alumnos con la tarea.

- OBJETIVOS GENERALES

* Incorporar al lenguaje y modo de argumentación habituales las distintas formas de expresión matemática: numérica, gráfica, con el fin de comunicarse de manera precisa y rigurosa.
* Valorar el conocimiento matemático como formador de la personalidad en los planos cognitivo, afectivo y social.
* Valorar el pluralismo de ideas como requisito tanto para el debate matemático como para la participación de la vida en sociedad.
* Valorar el lenguaje preciso, claro y conciso de la Matemática como organizador del pensamiento.
* Responsabilidad en el cumplimiento de las tareas y respeto por las consignas de trabajo.
* Reconocimiento de la insuficiencia de los números reales para expresar todas las raíces de una ecuación como lo indica su grado.
* Caracterizar el campo numérico de los complejos por sus usos y propiedades; y operar adecuadamente con ellos.
* Emplear e interpretar funciones y ecuaciones cuadráticas como modelo matemático para resolver problemas.

- Aplicar conceptos y propiedades de logaritmos en la resolución de ecuaciones.
- Aplicar los conceptos de función exponencial y logarítmica en la representación gráfica.

Unidad número 1: “Números Complejos”

- Repaso de conjuntos numéricos.

- La unidad imaginaria.

- Resolución de ecuaciones con solución no real.

- Partes de un número complejo.

- Representación gráfica de los números complejos.

- Operaciones en C: suma, resta, multiplicación y división.

- Potencias de i

Unidad número 2: “Función cuadrática”

- Forma Polinómica.

-Elementos y gráfica de la parábola: raíces, vértice, eje de simetría, desplazamiento vertical y horizontal, ordenada al origen.

-Discriminante.

-Máximos y Mínimos. Crecimiento y Decrecimiento.

-Forma Canónica y Factorizada.

-Propiedades de las raíces. Reconstrucción de la fórmula de la función cuadrática.

-Sistemas de ecuaciones mixtos.

Unidad número 3: “Logaritmación”

-Logaritmo. Concepto.

-Propiedades de los logaritmos.

-Logaritmo decimal y neperiano.

-Cambio de base.

Unidad número 4: "Funciones Logarítmicas y Exponenciales"

- Ecuación de la función logarítmica. Elementos y gráfico: raíces, ordenada al origen, asíntota. -- Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función. Dominio e Imagen.

-Ecuación de la función exponencial. Elementos y gráfico: raíces, ordenada al origen, asíntota.

-Análisis del crecimiento y decrecimiento de la función. Dominio e Imagen.

- BIBLIOGRAFÍA

*Matemática 1 Polimodal; P Kackzor; Ed. Santillana

*Matemática 1 Activa; A Berio, L Colombo y otros; Ed. Puerto de Palos

*Carpeta de Matemática 1 Polimodal, Ed. Aique.

*Material práctico en idioma italiano elaborado por los profesores, que se trabajan en cada clase.

6.2 Anexo 2: Actividades que no se realizaron

Actividad 8

a) Considerando *log p = - 3*, *log z = - 4 = log b*, *log m = 2*, calcula:

1. $log\left[\frac{p\,.\sqrt[3]{p^2}}{\sqrt{p}}\right]$

2. $log\left[\frac{z^2.\sqrt[4]{z^3}}{\sqrt{z}}\right]$

3. $log\left[\frac{m^{-3}.\sqrt[4]{m^5}}{\sqrt[7]{m^2}}\right]$

4. $log\left[\frac{\sqrt[4]{b}\,.b^3}{\sqrt[5]{b}}\right]$

b)

1. Considerando que *log h = -1,5; log k = ½; log m = 2,5* ¿Cuál es el valor de T?

$$T = \sqrt[5]{\frac{h\,.k^3}{m^2}}$$

2. Si ahora tenemos: $log_4\, r = -2$; $log_4\, p = 3/5$; $log_4\, q = 3{,}2$ ¿Cuál es el valor de G?

$$G = \sqrt[7]{\frac{p\,.q^2}{r}}$$

3. Y si $\log_3 a = 2/5$; $\log_3 b = -2{,}5$; $\log_3 c = 1/3$ ¿Cuál es el valor de M?

$$M = \sqrt[5]{\frac{a\,.b^2}{c^3}}$$

INTERÉS SIMPLE Y COMPUESTO

El interés simple es utilizado todos los días en la vida personal y en los negocios de muchas personas. Cuando se ahorra, cuando se invierte dinero, cuando se presta o se toma prestado, cuando se ofrecen descuentos, cuando se calcula el precio de un alquiler, cuando se tiene un negocio y se quiere saber cuál sería su valor si quisiéramos venderlo, y muchas cosas más.

Para entender lo que significa el interés simple, y posteriormente el interés compuesto, introduciremos algunos conceptos previos que nos serán de gran ayuda, como por ejemplo: el *plazo fijo*, el *capital*, el *interés*, la *tasa de interés*, y el *monto*.

El **plazo fijo** es una alternativa de inversión que consta básicamente de lo siguiente: una persona realiza un depósito de x cantidad de dinero en un banco o institución financiera durante un plazo de tiempo previamente establecido. Durante ese tiempo el banco utiliza el dinero libremente, pero se compromete a pagarle a esta persona (inversor) al momento de devolverle el depósito una suma mayor de dinero.

Se llama **capital** al dinero que se deposita al efectuar una inversión financiera. La ganancia obtenida se llama **interés**, y el porcentaje de ganancia que ofrece el banco se denomina **tasa de interés**. Finalizado el plazo la persona puede retirar del banco el capital más los intereses; a tal suma la denominaremos **monto** ($M = C + I$). Por ejemplo, un plazo fijo de 10.000 pesos con un interés anual del 10% implica que, al cabo de un año, el ahorrista cobrará 1.000 pesos en concepto de intereses, con lo cual podrá retirar del banco 11000 pesos.

A continuación se propone un problema para aplicar los conceptos vistos.

Actividad 11

a) Una persona deposita la suma de $1500 en un plazo fijo a una tasa anual del 16%. Si decide invertir su dinero durante un año ¿De cuánto dinero dispondrá al finalizar la inversión?

Si en vez de un año decidiera invertir solo durante tres meses, ¿de cuánto dinero dispondría al finalizar ese período?

b) Si la misma persona decidiera renovar el plazo fijo cada 3 meses pero reinvirtiendo el dinero obtenido hasta ese momento, hasta completar los 12 meses. ¿Cuánto dinero tendrá al final de esta nueva operación? (seguimos considerando un capital inicial de $1500 y una tasa anual del

Las operaciones en las que el capital no se retira y se reinvierte por períodos regulares se llaman de **interés compuesto**. En estas operaciones, la acción de reinvertir el dinero por otros períodos regulares se llama **capitalización**. Las operaciones que no tienen reinversiones intermedias, como en el punto (a) del problema, se llaman de **interés simple.**

Actividad 13

Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas.

a. $\log_5 x + log_5 30 = 3$

b. $2\, log\, x = log\,(5x - 6)$

c. $log_{\frac{1}{4}}(x+2) + 3 = log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

d. $log_{\frac{1}{3}}(x+5) + 2 = log_{\frac{1}{3}}(x-2)$

e. $log_4 \sqrt{x} - log_4 \sqrt[7]{4} = -log_4 \sqrt[5]{4}$

f. $\log_3 \sqrt{x} + \log_3 \sqrt[4]{x} = \log_3 \sqrt[5]{3}$

g. $[3 \log x]^2 + \log x \cdot x = 1$

h. $\log_{\frac{1}{4}}(x+2) + 3 = \log_{\frac{1}{4}}(x-3)$

6.3 Anexo 3: Problemas de aplicación

1) Una piscina pierda la tercera parte de su volumen de agua cada semana. Si en un momento dado almacenaba 80.000 litros ¿Aproximadamente cuánto tiempo debe pasar para que le queden 1000 litros?

2) Cierto país reduce a la mitad el número de coches contaminantes cada 10 años. Si ahora hay 6.500.000 de esos coches ¿dentro de cuántos años aproximadamente se podrán tener tan solo 50000 coches contaminantes?

3) En enero de 2005 se adquirió un auto a $120000. Si cada año que pasa, el nuevo valor del auto es el 90% del año anterior. ¿Dentro de cuántos años valdrá aproximadamente $50000?

4) La glotocronología es un método para calcular la antigüedad de una lengua. Se basa en el hecho de que en teoría, en un tiempo largo ocurren cambios lingüísticos con rapidez constante. Así, si una lengua tiene originalmente N palabras básicas, en t milenios el número N_t de palabras que permanecen en la lengua está dado por $N_t = N(0{,}805)^t$. Por ejemplo, en 500 años (0,5 de milenio) permanecen $(0{,}805)^{0{,}5} \approx 0{,}897 = 89{,}7\%$ del número inicial de palabras. ¿En cuántos años quedarán solo la mitad del número inicial de palabras?

5) Escala de Richter

Existen diversas escalas para medir la intensidad de los terremotos. La medida apropiada debería ser la energía liberada. Sin embargo esta medida se escapa de la noción intuitiva del desastre. El terremoto de mayor intensidad ha liberado una energía aproximada de 2×10^{17} joules, lo cual es exorbitantemente grande comparado con un ligero movimiento. Se ha convenido en estandarizar la energía por $E_0 = 10^{4.4}$ joules, que corresponde a la energía liberada por un leve movimiento. Más específicamente la magnitud M en la escala de Richter se define como:

$$M = \frac{2}{3}\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

- **a)** ¿Cuál fue la magnitud en la escala de Richter del terremoto más intenso?
- **b)** Si la intensidad de un terremoto fue de cero puntos en la escala Richter. ¿Cuánta energía liberó dicho terremoto? En relación a la energía liberada: ¿cuánto más intenso es el terremoto del punto (a)?
- **c)** ¿Cuántos puntos medirá en la escala de Richter un terremoto cuya intensidad de energía liberada es 10 veces más grande que la energía estándar? ¿Y si es 100 veces más grande?

6) Ley de enfriamiento de Newton

Esta ley establece que la tasa de enfriamiento de un objeto es proporcional a la diferencia de temperaturas entre el objeto y la de sus alrededores. Este modelo aplica cuando la diferencia de temperaturas no es muy grande.

$$T = T_0 + D_0 e^{-kt}$$

Con:

$T = Temperatura\ en\ un\ tiempo\ t\ de\ un\ objeto$

$T_0 = Temperatura\ de\ los\ alrededores\ del\ objeto\ en\ cuestión$

$D_0 = Diferencia\ de\ la\ temperatura\ inicial\ entre\ el\ objeto\ \ y\ sus\ alrededores$

$k = Constante\ que\ depende\ del\ tipo\ de\ objeto$

$t = Tiempo$

- **a)** La ley de enfriamiento de Newton se utiliza, en criminalística, para determinar la hora de la muerte en investigaciones de homicidio. La temperatura normal de una persona es de $36{,}7°\ C$ y se ha determinado experimentalmente que la constante es $k = 0,19468$, para estos casos. Si en una ciudad donde la temperatura es de$18°\ C$ se halla un cuerpo con $23°\ C$. Determine la muerte del occiso.
- **b)** Una olla llena de agua se lleva a ebullición en una habitación con temperatura de $23°\ C$. Después de 15 minutos la temperatura del agua ha disminuido de 96 a $74\ °\ C$, calcule la temperatura después de 20 minutos e ilustre graficando la función de temperatura.

6.4 Anexo 4: Evaluaciones escritas

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Unidad III: Logaritmación **Curso: 5to Año A**

Nombre: ____ **Fecha: __ /__ / __**

Objetivos de la evaluación:

- Utilizar la definición de logaritmo en las distintas situaciones problemáticas que se presentan.
- Construir argumentaciones.
- Reconocer y distinguir los distintos tipos de notación que se utilizan ($\log_a b$, $\log b$, $\ln b$)
- Interpretar el enunciado de un problema y poner en juego los conocimientos adquiridos para su resolución. Evaluar e interpretar la/s solución/es obtenida/s dentro del contexto del problema.
- Aplicar las propiedades del logaritmo para realizar transformaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar la calculadora como herramienta de cálculo.
- Realizar un correcto manejo algebraico de los desarrollos (utilización de paréntesis, jerarquía de las operaciones, transformaciones algebraicas en general).
- Utilizar una correcta escritura a la hora de efectuar los desarrollos matemáticos que implique:
  - ✓ Una clara exposición sobre los razonamientos efectuados.
  - ✓ Respeto por las notaciones con subíndices, superíndices, etc.

Calificación:

Punto 1		**Punto 2**	**Punto 3**		**Punto 4**		**Punto 5**		**Eval. Desarrollo**	**Puntaje Final**

1) Resuelve

c) La extensión de zona desértica se quintuplica en cierta comarca cada 15 años. Si hoy existen 80 hectáreas desérticas, ¿Dentro de cuántos años ocupará toda la comarca que tiene 32560 hectáreas de superficie? **(1,5 pts)**

d) Recordando la historia del tablero de ajedrez estudiada en clase, habíamos visto que, cuando Sissa le pedía al rey que colocara 3 granos en la primera casilla y que los granos de cada casilla dupliquen la cantidad de granos de la casilla anterior, la expresión que permitía calcular la cantidad de granos de la casilla "x" era

$$3 \cdot 2^{x-1}$$

De acuerdo a esa expresión, ¿en qué casilla se superan los 3 millones de granos? **(1,5 pts)**

2) Sabiendo que $\log_5 625 = 4$, $\log_5 15625 = 6$ y $\log_5 125 = 3$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo. (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) (0,5 p)**

$$log_5\left(\frac{625}{15625 \cdot 125}\right) + \ log_5\left(\frac{15625}{125}\right) \ =$$

3) Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta** (elije 2 de los 3 para resolver). **(2p./1 p. cada uno)**

a. $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
b. $\log_3(3 \cdot x) = \log_3 x + 1$
c. $\log_5(5 \cdot x^3) = 1 + 3 \cdot \log_5 x$

4) Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo.

a. $log\ 3\ +\ log\ a\ +\ 2 \cdot log\ b =$ **(0,75 p)**
b. $\ln(x^2 + 1) - \ln x =$ **(0,75 p)**

5) Hallar el valor de x

e) $\log(3\mathrm{x} + 1) = 2$ **(1 p)**
f) $\log_{\mathrm{x}} 16\ =\ \log_3 1 + 4$ **(1 p)**

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Unidad III: Logaritmación **Curso: 5to Año A**

Tema 2

Nombre: ____ **Fecha: __ /__ / __**

Objetivos de la evaluación:

- Utilizar la definición de logaritmo en las distintas situaciones problemáticas que se presentan.
- Construir argumentaciones.
- Reconocer y distinguir los distintos tipos de notación que se utilizan ($log_a\, b$, $log\, b$, $ln\, b$)
- Interpretar el enunciado de un problema y poner en juego los conocimientos adquiridos para su resolución. Evaluar e interpretar la/s solución/es obtenida/s dentro del contexto del problema.
- Aplicar las propiedades del logaritmo para realizar transformaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar la calculadora como herramienta de cálculo.
- Realizar un correcto manejo algebraico de los desarrollos (utilización de paréntesis, jerarquía de las operaciones, transformaciones algebraicas en general).
- Utilizar una correcta escritura a la hora de efectuar los desarrollos matemáticos que implique:
  - ✓ Una clara exposición sobre los razonamientos efectuados.
  - ✓ Respeto por las notaciones con subíndices, superíndices, etc.

Calificación:

Punto 1		Punto 2	Punto 3		Punto 4		Punto 5		Eval. Desarrollo	Puntaje Final

1) Resuelve

a. Recordando la historia del tablero de ajedrez estudiada en clase, habíamos visto que, cuando Sissa le pedía al rey que colocara 2 granos en la primera casilla y que los granos de cada casilla tripliquen la cantidad de granos de la casilla anterior, la expresión que permitía calcular la cantidad de granos de la casilla "x" era

$$2 \cdot 3^{x-1}$$

De acuerdo a esa expresión, ¿en qué casilla se superan los 7 millones de granos? **(1,5 pts)**

b. La extensión de zona desértica se duplica en cierta comarca cada 25 años. Si hoy existen 30 hectáreas desérticas, ¿Dentro de cuántos años ocupará toda la comarca que tiene 45000 hectáreas de superficie? **(1,5 pts)**

2) Sabiendo que $log_7\ 343 = 3$, $log_7 117649 = 6$ y $log_7\ 2401 = 4$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo. (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) (0,5 p)**

$$\log_7[(343)^3] + \log_7\left(\frac{117649}{343.2401}\right) =$$

3) Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta** (elige 2 de los 3 para resolver). **(2p./1 p. cada uno)**

a. $n.\log_a b - \log_a c + \log_a d = \log_a\left(\frac{b^n}{c.d}\right)$

b. $\log_3\left(\sqrt[3]{27}\,.\,3\,.\,x\right) = 2 + \log_3 x$

c. $\log_4(4.x) = \log_4 x + 1$

4) Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo.

a. $2.log\ (3.a) + log\ b^{3} + log\ (a.b) =$ **(0,75 p)**

b. $ln\ (x + 3) - ln\ (x) =$ **(0,75 p)**

5) Hallar el valor de x

a. $log\ (25.\ x + 7500) = 4$ **(1 p)**

b. $log_x\ 15625 = log_3\ 243 + 1$ **(1 p)**

EVALUACIÓN DE MATEMÁTICA

Unidad III: Logaritmación **Curso: 5to Año B**

Tema 2

Nombre: ____ **Fecha: __ /__ / __**

Objetivos de la evaluación:

- Utilizar la definición de logaritmo en las distintas situaciones problemáticas que se presentan.
- Construir argumentaciones.
- Reconocer y distinguir los distintos tipos de notación que se utilizan ($\log_a b$, $\log b$, $\ln b$)
- Interpretar el enunciado de un problema y poner en juego los conocimientos adquiridos para su resolución. Evaluar e interpretar la/s solución/es obtenida/s dentro del contexto del problema.
- Aplicar las propiedades del logaritmo para realizar transformaciones algebraicas.
- Resolver ecuaciones logarítmicas.
- Utilizar la calculadora como herramienta de cálculo.
- Realizar un correcto manejo algebraico de los desarrollos (utilización de paréntesis, jerarquía de las operaciones, transformaciones algebraicas en general).
- Utilizar una correcta escritura a la hora de efectuar los desarrollos matemáticos que implique:
  - ✓ Una clara exposición sobre los razonamientos efectuados.
  - ✓ Respeto por las notaciones con subíndices, superíndices, etc.

Calificación:

Punto 1		Punto 2	Punto 3		Punto 4		Punto 5		Eval. Desarrollo	Puntaje Final

1) Resuelve

a) En cierta comarca, una zona desértica se extiende actualmente unas 60 hectáreas y se triplica cada 12 años. La expresión que permite calcular cuánto será la extensión de dicha región desértica luego de que transcurra una determinada cantidad de tiempo es $60 \cdot 3^x$ (donde “x” representa la cantidad de períodos de 12 años que transcurrirán desde la actualidad). ¿Dentro de cuántos años la zona desértica ocupará toda la comarca, si ésta tiene 33000 hectáreas de superficie? **(1,5 pts.)**

b) Recordando la historia del tablero de ajedrez estudiada en clase, supongamos que Sissa le pide al rey colocar 3 granos en la primera casilla y que cada casilla triplique la cantidad de granos de la casilla precedente. ¿En qué casillero se superan o alcanzan los 150 millones de granos? **(1,5 pts.)**

2) Sabiendo que $\log_5 625 = 4$, $\log_5 15625 = 6$ y $\log_5 125 = 3$, resuelve **utilizando las propiedades del logaritmo. (Usar los resultados dados, sin calcular otros logaritmos) (0,5 p)**

$$log_5\left(\frac{625}{15625 \cdot 125}\right) + \; log_5\left(\frac{15625}{125}\right) \; =$$

3) Coloca Verdadero cuando se cumpla la igualdad y Falso, cuando no. **Justifica tu respuesta** (elije 2 de los 3 para resolver). **(2p./1 p. cada uno)**

a. $\log_a b \cdot \log_a c = \log_a(b \cdot c)$
b. $\log_3(3 \cdot x) = \log_3 x + 1$
c. $\log_5(5 \cdot x^3) = 1 + 3 \cdot \log_5 x$

4) Aplica las **propiedades del logaritmo** para llevar las siguientes expresiones en forma de un único logaritmo.

a. $log\ 3 + log\ a + 2 \cdot log\ b =$ **(0,75 p)**
b. $\ln(x^2 + 1) - \ln x =$ **(0,75 p)**

5) Hallar el valor de x

a. $\log(3\mathrm{x} + 1) = 2$ **(1 p)**
b. $\log_3 x + \log_3 6561 = 14$ **(1 p)**