Funciones zeta de grupos

por Diego Sulca

Presentado como parte de los requerimientos para la obtención del
grado de Doctor en Matemática
en la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Universidad Nacional de Córdoba

y como parte de los requerimientos para la obtención del
grado de Doctor en Ciencias: Mathemáticas
en la
Facultad de Ciencias

Katholieke Universiteit Leuven

Junio de 2015

Director: Dr. Karel Dekimpe

Director: Dr. Paulo Tirao

A mis padres

Resumen

Para un grupo algebraico unipotente $\mathfrak{N}$ sobre un cuerpo de números K, definimos dos invariantes $\alpha^{\leq}(\mathfrak{N})$ y $\alpha^{\triangleleft}(\mathfrak{N})$ tales que en el caso $K=\mathbb{Q}$ ellos son respectivamente la abscisa de convergencia de la función zeta de subgrupos y la abscisa de convergencia de la función zeta de subgrupos normales de cualquier subgrupo aritmético de $\mathfrak{N}$. Se prueba que estos invariantes son de naturaleza geométrica, es decir, si F/K es una extensión finita de cuerpos entonces $\alpha^*(\mathfrak{N}\otimes_K F)=\alpha^*(\mathfrak{N})$, y si $\mathfrak{M}$ es otro grupo algebraico unipotente sobre K tal que $\mathfrak{N}\otimes_K K'\cong\mathfrak{M}\otimes_K K'$ para alguna extensión de cuerpos K'/K, entonces $\alpha^*(\mathfrak{N})=\alpha^*(\mathfrak{M})$ $(*\in\{\leq,\triangleleft\})$. En particular, si dos grupos nilpotentes finitamente generados y libres de torsión Γ_1 y Γ_2 tienen $\mathbb{R}$-completaciones de Mal'cev isomorfas como grupos de Lie, entonces Γ_1 y Γ_2 tienen la misma tasa de crecimiento de subgrupos y de subgrupos normales de índice finito. Para todo esto, desarrollamos una teoría de funciones zeta de grupos nilpotentes con exponentes en anillos más generales que el anillo de los enteros.

Un trabajo análogo se realiza para extensiones de grupos finitos por grupos algebraicos unipotentes sobre cuerpos de números en general.

Como aplicación de nuestros métodos, presentaremos los cálculos explícitos de las funciones zeta de subgrupos de todos los grupos almost-Bieberbach de dimensión 3, es decir, los grupos fundamentales de las infra-nilvariedades de dimensión 3.

Palabras claves: funciones zeta de grupos, grupos nilpotentes, integrales cónicas.

2010 Mathematics subject Classification: 20E07, 11M41.

Abstract

For a unipotent algebraic group $\mathfrak{N}$ over a number field K, we define two invariants $\alpha^{\leq}(\mathfrak{N})$ and $\alpha^{\triangleleft}(\mathfrak{N})$ such that in the case $K = \mathbb{Q}$ they are respectively the abscissa of convergence of the subgroup zeta function and the abscissa of convergence of the normal zeta function of any arithmetic subgroup of $\mathfrak{N}$. We prove that these invariants have a geometric nature, that is, if F/K is a finite field extension then $\alpha^*(\mathfrak{N} \otimes_K F) = \alpha^*(\mathfrak{N})$, and if $\mathfrak{M}$ is another unipotent algebraic group over K such that $\mathfrak{N} \otimes_K K' \cong \mathfrak{M} \otimes_K K'$ for some field extension K'/K then $\alpha^*(\mathfrak{N}) = \alpha^*(\mathfrak{M})$ $(* \in \{\leq, \triangleleft\})$. In particular, if two finitely generated torsion free nilpotent groups Γ_1 and Γ_2 have isomorphic $\mathbb{R}$-Mal'cev completions as Lie groups, then Γ_1 and Γ_2 have the same subgroup growth rate and the same normal subgroup growth rate. To do this, we develop a theory of zeta functions of nilpotent groups with exponents in rings which are more general than the ring of integers.

An analogous work is done for extensions of finite groups by unipotent algebraic groups over number fields.

As an application of our methods, we present the calculation of the subgroup zeta functions of all the 3-dimensional almost-Bieberbach groups, that is, the fundamental groups of the 3-dimensional infra-nilmanifolds.

Key words: zeta functions of groups, nilpotent groups, p-adic integrals.

2010 Mathematics subject Classification: 20E07, 11M41.

Índice

Introducción

¿Es posible clasificar lo inclasificable?

En matemáticas, los problemas de clasificación han sido sin dudas ejes fundamentales que han guiado el rumbo de muchos matemáticos. Clasificar es lo que todos pensamos: tener suficientes etiquetas que nos permitan distinguir de manera efectiva los objetos en una determinada familia. El primer ejemplo con el cual nos topamos todos cuando estudiamos matemáticas es la clasificación de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre un cuerpo dado. En este caso, los enteros no negativos pueden servirnos como etiquetas: para cada entero no negativo n hay exactamente un espacio vectorial (salvo equivalencia lineal) de dimensión n. Decimos entonces que la dimensión es un invariante del espacio vectorial que determina completamente su estructura.

La década de 1980 se ha encontrado con uno de los logros más celebrados en la historia de la matemática: la clasificación de los grupos finitos simples. Estos son los bloques elementales con los cuales podemos armar cualquier otro grupo finito. Sin embargo, aún usando uno de los bloques más simples como por ejemplo lo es el grupo cíclico de dos elementos C_2, el problema de clasificar todos los grupos que se obtienen pegando varios bloques iguales a C_2 (la familia de los 2-grupos finitos) es considerado salvaje: no podríamos encontrar un conjunto razonable de etiquetas que nos permitan distinguirlos a todos.

¿Qué podemos esperar entonces en el mundo de los grupos infinitos?. Si bien ya no es razonable aspirar a una clasificación de los mismos, es notable cómo la naturaleza de algunos invariantes puede impactar de una manera rotunda en la estructura de los objetos. Un ejemplo paradigmático es la celebrada caracterización por Gromov de los grupos con crecimiento polinomial que describimos a continuación.

El teorema de Gromov

Para un grupo finitamente generado G y un conjunto generador S, la longitud $l_S(g)$ de un elemento g de G es el menor entero k para el cual existen elementos $s_1, \ldots, s_k \in S \cup S^{-1}$ tales que $g = s_1 \ldots s_k$. Poniendo $d_S(g,h) = l_S(gh^{-1})$, se prueba que (G, d_S) es un espacio métrico. Denotamos por $b_S(n)$ a la cantidad de elementos de G de longitud $\leq n$ y ponemos $\beta_G = \limsup_n \frac{\log b_S(n)}{\log n} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el cual se prueba que es independiente de S. Decimos que G tiene *crecimiento polinomial* si $\beta_G < +\infty$. En tal caso, resulta que β_G es el menor número real para el cual $b_G(n) = O(n^{\beta_G + \epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$.

El celebrado Teorema de Gromov [Gro81] afirma que G tiene crecimiento polinomial si y sólo si G contiene un subgrupo de índice finito que es nilpotente. En tal caso, β_G se calcula usando la fórmula de Bass-Guivarc'h: $\beta_G = \sum_{k=1}^{c} k \operatorname{rank}(\Gamma_k(N)/\Gamma_{k+1}(N))$, donde N es un subgrupo nilpotente de G de índice finito y $N = \Gamma_1(N) \geq \Gamma_2(N) \geq \ldots \geq \Gamma_{c+1}(N) = 1$ es su serie central descendente [Ba72].

Crecimiento de subgrupos

Podríamos decir que el problema en el cual tiene origen esta tesis es el análogo al anterior, donde en vez de contar elementos de longitud $\leq n$ con respecto a un conjunto generador, esta vez contamos subgrupos de índice $\leq n$.

Para un grupo finitamente generado G y un entero positivo n, la cantidad de subgrupos de G de índice $\leq n$ es finita y será denotada por $\sigma_n(G)$. Sea $\mathcal{L}_G$ el lattice de subgrupos de G de índice finito y para $H, K \in \mathcal{L}_G$ ponemos $D_G(H, K) = \log([K : K \cap H][H : K \cap H])$. No es difícil ver que $(\mathcal{L}_G, D_G)$ es un espacio métrico; por lo tanto, $\sigma_n(G)$ no es más que el número de elementos de $\mathcal{L}_G$ que están en la bola cerrada de centro G y radio $\log n$. En contraste con el caso anterior, esta vez $\sigma_n(G)$ es un invariante de G (no depende de ningún conjunto de generadores).

El estudio asintótico de la sucesión $(\sigma_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ tomó mucho auge a partir de la década de 1990 dando origen a una nueva área dentro de la teoría de grupos denominada *Crecimiento de subgrupos*. Para conocer más sobre el desarrollo en esta área citamos por ejemplo a [Lub93], [LS03] y a las referencias que allí se encuentran.

Sea G un grupo finitamente generado. Ponemos $\alpha(G) = \limsup_n \frac{\log \sigma_n(G)}{\log n}$ y decimos que G *tiene crecimiento polinomial de subgrupos* si $\alpha(G) < +\infty$. En este caso, $\alpha(G)$ resulta ser el menor número real para el cual $\sigma_n(G) = O(n^{\alpha(G)+\epsilon})$ para todo $\epsilon > 0$ y por lo tanto será llamado la *tasa de crecimiento de subgrupos de* G. El análogo al Teorema de Gromov fue probado por Lubotzky, Mann y Segal en [LMS93]: *si G es un grupo finitamente generado y residualmente finito, entonces G tiene crecimiento polinomial de subgrupos si y sólo si G tiene un subgrupo de índice finito que es soluble de rango finito.* El residuo $R(G)$ de un grupo G es la intersección de todos sus subgrupos de índice finito. Puesto que $\sigma_n(G)$ no distingue entre G y $G/R(G)$, para estudiar la sucesión $\sigma_n(G)$ podemos siempre reemplazar G por $G/R(G)$ y suponer así que $R(G) = 1$. En tal caso, diremos que G es residualmente finito. Un grupo G tiene rango finito si existe $r \in \mathbb{N}$ tal que todo subgrupo finitamente generado de G puede generarse por r elementos. Ejemplos de grupos con crecimiento polinomial de subgrupos son entonces los grupos nilpotentes y finitamente generados, y más en general los grupos policíclicos (los que se obtienen por extensiones sucesivas de grupos cíclicos) y cualquier extensión de un grupo finito por un grupo policíclico.

Hasta ahora, no se conoce una expresión general para $\alpha(G)$ en términos de G. Según du Sautoy y Grunewald, este es uno de los problemas más desafiantes en el área [dSG06].

Grupos nilpotentes y funciones zeta

Para un grupo finitamente generado G y un entero positivo n, denotamos por $a_n(G)$ a la cantidad de subgrupos de G de índice n. Con la notación de la sección anterior tenemos $\sigma_n(G) = \sum_{k=1}^{n} a_k(G)$. En el trabajo fundacional [GSS88], Grunewald, Segal y Smith introducen la *funcion zeta de subgroups de G* como una herramienta analítica para analizar no sólo el comportamiento asintótico de la sucesión $(\sigma_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ sino también las propiedades aritméticas de la sucesión $(a_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$. Ella es la serie de Dirichlet

$$\zeta_G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(G)}{n^s} \qquad (s \in \mathbb{C}).$$

De la teoría general de series de Dirichlet, sabemos que $\zeta_G(s)$ converge en algún semiplano complejo no vacío si y sólo si $(\sigma_n(G))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene crecimiento polinomial, es decir, cuando G tiene crecimiento polinomial de subgrupos. Si este es el caso y además $\alpha(G) > 0$ entonces $\alpha(G)$ es la abscisa de convergencia de $\zeta_G(s)$, es decir, $\zeta_G(s)$ converge para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) > \alpha(G)$ y $\zeta_G(s)$ diverge para todo $s \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}(s) < \alpha(G)$. Por lo tanto, si G es un grupo finitamente generado con crecimiento polinomial de subgrupos, la serie $\zeta_G(s)$ no es sólo un objeto formal sino también un objeto analítico, y el problema de relacionar $\alpha(G)$ con la estructura de G se extiende al siguiente: *¿qué propiedades analíticas tiene la función zeta de subgrupos de G? y ¿qué propiedades de la estructura de G revelan estas propiedades analíticas?*.

Cuando G es un grupo nilpotente y finitamente generado, este tiene crecimiento polinomial de subgrupos y su función zeta de subgrupos tiene una descomposición como un producto de Euler

$$\zeta_G(s) = \prod_{p \text{ primo}} \zeta_{G,p}(s),$$

donde $\zeta_{G,p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{p^k}(G)p^{-ks}$ es la *función zeta de subgrupos de G local en p*. Esto no es más que el reflejo de la propiedad de que los cocientes finitos de G son grupos nilpotentes finitos, por lo tanto ellos son el producto de sus subgrupos de Sylow.

El ejemplo más básico es con $G = \mathbb{Z}$, el grupo infinito cíclico. Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ es el único subgrupo de $\mathbb{Z}$ de índice n, tenemos $\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s)$, la función zeta de Riemann. La factorización como un producto de Euler se reduce en este caso a la conocida factorización $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}$. Ejemplos menos triviales son

$$\zeta_{\mathbb{Z}^h}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\ldots\zeta(s-h+1) \ \text{ y } \ \zeta_{H_3}(s) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)},$$

donde $\mathbb{Z}^h$ es el grupo abeliano libre en h generadores y H_3 es el grupo de Heisenberg

$$H_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Se lee de las expresiones anteriores que $\alpha(\mathbb{Z}^h) = h$ para todo $h \in \mathbb{N}$, mientras que $\alpha(H_3) = 2$. En general, hasta ahora lo más que se puede establecer sobre $\alpha(G)$ son cotas tales como por ejemplo $h(G^{ab}) \leq \alpha(G) \leq h(G)$, donde para un grupo nilpotente G, $h(G)$ denota su longitud de Hirsch (la cual puede interpretarse como la "dimensión" o el "rango" de G) y $G^{ab} = G/[G,G]$ es la abelianización de G.

Si T es el subgrupo de torsión de un grupo nilpotente y finitamente generado G entonces puede probarse que $\alpha(G) = \alpha(G/T)$ y $\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{G/T,p}(s)$ para todo primo p que no divide el orden de T; por lo tanto, no perdemos mucho si suponemos de ahora en más que G es un grupo nilpotente, finitamente generado y libre de torsión. Un tal grupo es llamado un *τ-grupo*.

En [GSS88, Proposition 1.8] se prueba que si G_1 y G_2 son dos τ-grupos conmensurables entonces $\alpha(G_1) = \alpha(G_2)$. Decir que G_1 y G_2 son conmensurable significa que para cada $i = 1, 2$ existe un subgrupo H_i de G_i de índice finito tal que H_1 y H_2 son isomorfos. Si G es un τ-grupo, existe una sucesión $\beta = (x_1, \ldots, x_h)$ de elementos de G llamada una base de Mal'cev para G de modo que todo elemento del grupo puede escribirse de manera única en la forma $x_1^{a_1} \ldots x_h^{a_h}$ con $a_1, \ldots, a_h \in \mathbb{Z}$. Si identificamos G con $\mathbb{Z}^h$ mediante esta base, la multiplicación $G \times G \to G$ resulta un mapa polinomial $m_\beta : \mathbb{Z}^h \times \mathbb{Z}^h \to \mathbb{Z}^h$ y el mapa $G \times \mathbb{Z} \to G$ dado por $(x, r) \mapsto x^r$ resulta un mapa polinomial $e_\beta : \mathbb{Z}^h \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^h$. Para un cuerpo K de característica cero, la K-completación de Mal'cev de G es el grupo G^K cuyo conjunto subyacente está formado por las expresiones de la forma $x_1^{r_1} \ldots x_h^{r_h}$ con

$r_i \in K$. Identificando G^K con K^h la multiplicación en G^K es el mapa $K^h \times K^h \to K^h$, extensión del mapa m_β, y además G^K tiene una operación de exponenciación por elementos de K dada por el mapa $K^h \times K \to K^h$, extensión del mapa e_β. Esta última operación convierte a G^K en un grupo nilpotente K-*potenciado* y un K-morfismo entre por ejemplo G_1^K y G_2^K es un morfismo de grupos que conmuta con esta operación. Se tiene que dos τ-grupos G_1 y G_2 son conmensurables si y sólo si $G_1^{\mathbb{Q}}$ y $G_1^{\mathbb{Q}}$ son $\mathbb{Q}$-isomorfos. Por lo tanto el resultado anterior se reescribe diciendo que $\alpha(G)$ es en realidad un invariante de la $\mathbb{Q}$-completación de Mal'cev de G. Uno de los resultados que probaremos en esta tesis es el siguiente.

Teorema A. *Si G_1 y G_2 son dos τ-grupos para los cuales existe un cuerpo K de característica cero tal que G_1^K y G_2^K son K-isomorfos, entonces $\alpha(G_1) = \alpha(G_2)$.*

La conclusión de este teorema puede expresarse diciendo que la tasa crecimiento de subgrupos en los grupos nilpotentes es un invariante geométrico pues depende sólo de la $\mathbb{C}$-completación de Mal'cev del grupo.

Hay otra forma de escribir este resultado. Los grupos que se obtienen como la $\mathbb{Q}$-completación de Mal'cev de un τ-grupo son precisamente los grupos de la forma $\mathfrak{G}(\mathbb{Q})$, donde $\mathfrak{G}$ es un grupo algebraico unipotente sobre $\mathbb{Q}$. Dos τ-grupos son conmensurables si y sólo si ellos son isomorfos a subgrupos aritméticos del mismo grupo algebraico unipotente. El resultado mencionado en el párrafo anterior al Teorema A se traduce diciendo que para un grupo algebraico unipotente $\mathfrak{G}$ sobre $\mathbb{Q}$ es posible definir un invariante $\alpha(\mathfrak{G})$ el cual puede calcularse como la abscisa de convergencia de la función zeta de subgrupos de cualquier subgrupo aritmético de $\mathfrak{G}$. El Teorema A dice que $\alpha(\mathfrak{G})$ es un invariante geométrico de $\mathfrak{G}$, es decir, si $\mathfrak{N}$ es otro grupo algebraico unipotente sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\mathfrak{G} \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong \mathfrak{N} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ para algún cuerpo K de característica cero, entonces $\alpha(\mathfrak{G}) = \alpha(\mathfrak{N})$ (aquí $\mathfrak{G} \otimes_{\mathbb{Q}} K$ denota $\mathfrak{G} \otimes_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Q})} \mathrm{Spec}(K)$).

Surge entonces la pregunta de si es posible definir de manera razonable $\alpha(\mathfrak{G})$ para grupos algebraicos unipotentes sobre cuerpos de números más generales. Responder a esto nos daría más indicios sobre la naturaleza del invariante $\alpha(\mathfrak{G})$. Tanto la demostración del Teorema A como la respuesta a esta pregunta va a depender fuertemente del estudio realizado por du Sautoy y Grunewald sobre integrales cónicas en [dSG00] y cuyos resultados resumiremos a continuación.

Sea K un cuerpo de números con anillo de enteros algebraicos O y sea $\mathcal{D} = (f_0, g_0, \ldots, f_l, g_l)$ una colección de polinomios no nulos en $K[\mathbf{X}] = K[X_1, \ldots, X_m]$. Para cada ideal primo no nulo $\mathfrak{p}$ de O definimos

$$Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p}) = \int_{V_\mathfrak{p}} |f_0(\mathbf{x})|^s |g_0(\mathbf{x})| d\mu(\mathbf{x}) \quad (s \in \mathbb{C}),$$

donde $V_\mathfrak{p} = \{\mathbf{x} \in \hat{0}_\mathfrak{p}^m : v_\mathfrak{p}(f_i(\mathbf{x})) \leq v_\mathfrak{p}(g_i(\mathbf{x})),\ i = 1, \ldots, l\}$. Aquí $\hat{O}_\mathfrak{p}$ es la completación $\mathfrak{p}$-ádica de O, $v_\mathfrak{p}$ es la valuación discreta asociada a $\mathfrak{p}$, $|\cdot|$ es la norma $\mathfrak{p}$-ádica dada por $|x| = q_\mathfrak{p}^{-v_\mathfrak{p}(x)}$, con $q_\mathfrak{p}$ el cardinal de $0/\mathfrak{p}$, y μ es la medida de Haar en $\hat{O}_\mathfrak{p}^m$ normalizada de modo que $\mu(\hat{O}_\mathfrak{p}^m) = 1$.

Decimos que $Z_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{p})$ es una *integral cónica sobre* K con dato de integral cónica $\mathcal{D}$. Esta es una función racional en $q_\mathfrak{p}^{-s}$ [Den84] y, por lo tanto, puede escribirse como una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{\mathfrak{p},k} q_\mathfrak{p}^{-ks}$. Obtenemos así una serie de Dirichlet

$$Z_{\mathcal{D}}(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(O) \backslash (0) \\ a_{\mathfrak{p},0} \neq 0}} a_{\mathfrak{p},0}^{-1} Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p}),$$

la cual es llamada una *integral cónica global sobre* K (con dato $\mathcal{D}$).

En [dSG00] se obtiene que la serie $Z_{\mathcal{D}}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ tiene coeficientes no negativos y que cuando no es la función constante ella tiene las siguientes propiedades.

(i) $Z_{\mathcal{D}}(s)$ tiene abscisa de convergencia racional $\alpha_{\mathcal{D}}$ y la abscisa de convergencia de cada factor local $Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p})$ es menor estricta que $\alpha_{\mathcal{D}}$.

(ii) Existe $\delta > 0$ tal que $Z_{\mathcal{D}}(s)$ admite continuación meromorfa al semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha_D - \delta\}$ y $\alpha_{\mathcal{D}}$ es el único polo en la recta $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = \alpha_{\mathcal{D}}\}$.

(iii) Sea (Y, h) una resolución para $F(\mathbf{x}) = \prod_{i=0}^{l} f_i(\mathbf{X}) g_i(\mathbf{X})$ sobre K y sean $(E_i)_{i \in T}$ las componentes irreducibles del esquema reducido $(h^{-1}(D))_{\mathrm{red}}$ sobre $\mathrm{Spec}(K)$, donde $D = \mathrm{Spec}(\frac{K[\mathbf{X}]}{F})$. Entonces existen funciones racionales $P_I(X, Y) \in K(X, Y)$ para cada $I \subset T$ con la propiedad de que para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O (más precisamente para todos aquellos $\mathfrak{p}$ para los cuales Y tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$) se tiene

$$Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p}) = \sum_{I \subset T} c_{\mathfrak{p},I} P_I(q_{\mathfrak{p}}, q_{\mathfrak{p}}^{-s}),$$

donde $c_{\mathfrak{p},I} = |\{a \in \bar{Y}(\mathbb{F}_{q_{\mathfrak{p}}}) : a \in \bar{E}_i \text{ si y sólo si } i \in I\}|$ y $\bar{Y}$ significa reducción del esquema Y modulo $\mathfrak{p}$.

Cabe mencionar que en [dSG00] se supone $K = \mathbb{Q}$, pero un análisis detallado muestra que todo sigue siendo válido para cuerpos de números en general.

Sea ahora K' un cuerpo de números que contiene a K, O' su anillo de enteros algebraicos y $\mathcal{D}'$ la misma colección $\mathcal{D}$ pero donde a los polinomios se los considera con coeficientes en K'. Obtenemos una integral cónica global sobre K' que se denota por $Z_{\mathcal{D}'}(s)$. Nuestro resultado clave para probar el Teorema A es el siguiente.

Teorema B. *Las series $Z_{\mathcal{D}}(s)$ y $Z_{\mathcal{D}'}(s)$ tienen la misma abscisa de convergencia.*

Este resultado puede interpretarse como una generalización del hecho de que todas las funciones zeta de Dedekind tienen abscisa de convergencia 1. El siguiente resultado respecto al comportamiento de los factores locales por extensión de base hace más fuerte esta analogía.

Teorema C. *Si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de O para el cual Y tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p}'$ es un ideal maximal de O' que yace sobre $\mathfrak{p}$, entonces*

$$Z_{\mathcal{D}'}(s, \mathfrak{p}') = \sum_{I \subset T} c_{\mathfrak{p}',I} P_I(q_{\mathfrak{p}'}, q_{\mathfrak{p}'}^{-s}),$$

donde esta vez $\mathfrak{q}_{\mathfrak{p}'} = |O'/\mathfrak{p}'|$ y $c_{\mathfrak{p}',I} = |\{a \in \bar{Y}(\mathbb{F}_{q_{\mathfrak{p}'}}) : a \in \bar{E}_i$ si y sólo si $i \in I\}|$.

¿Qué tiene que ver todo esto con funciones zeta de grupos?. En [dSG00] se prueba que si G es un τ-grupo de longitud de Hirsch h, existe un dato $\mathcal{D}$ de integral cónica sobre $\mathbb{Q}$ tal que para todos salvo una cantidad finita de primos p se tiene $\zeta_{G,p}(s) = Z_{\mathcal{D}}(s-h)$, mientras que para los primos excepcionales se prueba que las abcisas de convergencia de los factores locales correspondientes son menores estrictas que la de $\zeta_G(s)$. La idea es asociarle a G un anillo de Lie $L(G)$ via la correspondencia de Mal'cev [Se83, Cap. 6], luego definir la función zeta de $L(G)$ (asociada al problema de contar subanillos de índice finito), luego probar que $\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{L(G),p}(s)$ para todos salvo una cantidad finita de primos p y finalmente probar que existe $\mathcal{D}$ tal que $\zeta_{L(G)}(s) = Z_{\mathcal{D}}(s-h)$. Nosotros vamos a probar este resultado nuevamente sin pasar por el anillo de Lie. Esto será necesario para nuestro estudio posterior de funciones zeta de grupos virtualmente τ-grupos.

Teorema D. *Si G es un τ-grupo de longitud de Hirsch $h \geq 1$, entonces existe un dato de integral cónica $\mathcal{D}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\zeta_G(s) = Z_{\mathcal{D}}(s-h)$.*

Se sigue de las propiedades de integrales cónicas enunciadas anteriormente que $\zeta_G(s)$ tiene abscisa de convergencia racional y continuación meromorfa más allá de la abscisa de convergencia, sin polos en la recta $\Re(s) = \alpha(G)$ aparte de $\alpha(G)$. Como $\alpha(G) \geq h(G^{ab}) \geq 1$, podemos aplicar [dSG00, Theorem 4.20] para concluir al igual que en [dSG00, Theorem 5.7] el siguiente corolario.

Corolario. *Si $w(G)$ es el orden del polo $\zeta_G(s)$ en $\alpha(G)$, entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$a_1(G) + \ldots + a_n(G) \sim c \cdot n^{\alpha(G)} (\log n)^{w(G)-1}, \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

Volvamos a considerar nuevamente un esquema de grupos unipotente $\mathfrak{G}$ sobre un cuerpo de números K con anillo de enteros O. En el capítulo 1 desarrollaremos los fundamentos necesarios para que por ejemplo podamos hablar de grupos nilpotentes con exponentes en $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$, la completación $\mathfrak{p}$-ádica de O con respecto a un ideal maximal $\mathfrak{p}$. En particular, se define lo que es un $\tau_{\hat{O}_{\mathfrak{p}}}$-grupo, sus $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$-subgrupos y su función zeta asociada al problema de contar $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$-subgrupos de índice finito. Veremos que $\mathfrak{G}(\hat{O}_{\mathfrak{p}})$ está definido para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O y que es un $\tau_{\hat{O}_{\mathfrak{p}}}$-grupo cuya función zeta de $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$-subgrupos se denotará $\zeta_{\mathfrak{G},\mathfrak{p}}(s)$. Nuestro próximo resultado es

Teorema E. *Si $\mathfrak{G}$ es un grupo algebraico unipotente de dimensión h sobre un cuerpo de números K, entonces existe un dato $\mathcal{D}$ de integral cónica sobre K tal que para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ del anillo de enteros algebraicos de K se tiene $\zeta_{\mathfrak{G},\mathfrak{p}}(s) = (1 - |O/\mathfrak{p}|^{-1})^{-h} Z_{\mathcal{D}}(s-h, \mathfrak{p})$.*

Este resultado nos permite definir $\alpha(\mathfrak{G})$ como $\alpha_{\mathcal{D}}$, donde $\mathcal{D}$ es un dato de integral cónica que satisface la conclusión del teorema y este número no depende de qué $\mathcal{D}$ elijamos. En efecto, para otro tal dato $\mathcal{D}_1$ se tiene por este teorema que $Z_{\mathcal{D}}(s-h, \mathfrak{p}) = Z_{\mathcal{D}_1}(s-h, \mathfrak{p})$ para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ del anillo de enteros algebraicos de K; por lo tanto, nuestra afirmación se sigue de la propiedad (i) sobre integrales cónicas enunciada más arriba. Cuando $K = \mathbb{Q}$ esta definición coincide con la ya previamente vista para este caso. Terminaremos esta serie de enunciados con el siguiente resultado que determina la naturaleza geométrica de $\alpha(\mathfrak{G})$.

Teorema F. *Sea $\mathfrak{G}$ un grupo algebraico unipotente sobre un cuerpo de números K.*

(i) Si $K \hookrightarrow K'$ es una extensión finita de cuerpos entonces $\alpha(\mathfrak{G} \otimes_K K') = \alpha(\mathfrak{G})$.

(ii) Si $\mathfrak{N}$ es otro grupo algebraico unipotente sobre K y $K \hookrightarrow K'$ es una extensión de cuerpos tal que $\mathfrak{G} \otimes_K K' \cong \mathfrak{N} \otimes_K K'$ entonces $\alpha(\mathfrak{G}) = \alpha(\mathfrak{N})$.

Funciones zeta de grupos virtualmente nilpotentes

Hemos visto que si G es un τ-grupo y H es un subgrupo de G de índice finito, entonces $\alpha(G) = \alpha(H)$ pues H y G resultan conmensurables. Esto es válido aún si eliminamos la hipótesis de ser libres de torsión. Más aún, resulta que $\zeta_{G,p}(s) = \zeta_{H,p}(s)$ para todo primo p que no divide al índice $[G : H]$. Sin embargo, cuando salimos del mundo nilpotente, aún en el ejemplo más sencillo como lo es el grupo dihedral infinito $D_\infty = \mathbb{Z} \rtimes C_2$, la función zeta muestra ser un objeto muy sensible cuando se pasa a subgrupos. En efecto, $\zeta_{D_\infty}(s) = \zeta(s-1) + 2^{-s}\zeta(s)$, cuya abscisa de convergencia es 2, mientras que $\zeta_{\mathbb{Z}}(s) = \zeta(s)$, cuya abscisa de convergencia es 1. Motivados en entender estos fenómenos, en [dSMS99] du Sautoy, McDermott y Smith estudian funciones zeta de grupos que son extensiones de grupos finitos por grupos abelianos libres, incluyendo por ejemplo a todos los grupos cristalográficos. El resultado más relevante de aquel trabajo es que las funciones zeta de estos grupos tienen continuación meromorfa a todo el plano complejo. Cabe mencionar que esto no es cierto en general aún para las funciones zeta de τ-grupos [dSW08, Chap. 7]. En [dSMS99] se presentan también los resultados obtenidos en la tesis doctoral de McDermott [McD97] con respecto al cálculo explícito de las funciones zeta de los grupos cristalográficos planos. Esta colección de cálculos constituyen los primeros ejemplos de funciones zeta de grupos finitamente generados calculadas fuera del mundo nilpotente.

Un grupo G se dice *virtualmente nilpotente* si contiene un subgrupo nilpotente de índice finito. Si además G es finitamente generado, puede verse fácilmente que G contiene un subgrupo de índice finito que es un τ-grupo. Vamos a considerar extensiones de grupos $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ donde N es un τ-grupo y F es un grupo finito. La *función zeta de subextensiones de* $\mathfrak{G}$ es la serie

$$\zeta_{\mathfrak{G}}(s) = \sum_{A \leq_f G, AN=G} [G : A]^{-s}.$$

Para cada subgrupo H de F se obtiene una extensión $\mathfrak{G}_H : 1 \to N \xrightarrow{\iota} \pi^{-1}(H) \xrightarrow{\pi} H \to 1$ y se ve fácilmente que $\zeta_G(s) = \sum_{H \leq F}[F : H]^{-s}\zeta_{\mathfrak{G}_H}(s)$. Por lo tanto, para deducir propiedades analíticas de funciones zeta de grupos virtualmente nilpotentes basta estudiar las funciones zeta de subextensiones para extensiones de grupos finitos por τ-grupos. Para estas funciones zeta tenemos el siguiente teorema.

Teorema G. *Si $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es una extensión de un grupo finito F por un τ-group N de longitud de Hirsch h, entonces existe un dato de integral cónica $\mathcal{D}$ sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\zeta_{\mathfrak{G}}(s) = Z_{\mathcal{D}}(s - h - |F| + 1)$.*

Como consecuencia de todo lo que venimos diciendo se tiene

Corolario. *Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ una extensión de grupos donde N un τ-grupo y F es un grupo finito. Entonces $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$ y $\zeta_G(s)$ tienen abcisas de convergencia racional y continuación meromorfa a una región más alla de sus abscisas de convergencia.*

Para un cuerpo de característica cero K, vamos a definir en el Capítulo 1 lo que sería la K-completación de Mal'cev $\mathfrak{G}^K$ de una extensión $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$, donde N es un τ-grupo y F un grupo finito, y también lo que sería un K-isomorfismo entre K-completaciones de Mal'cev de extensiones de este tipo.

Teorema H. *Para $i = 1, 2$, sea $\mathfrak{G}_i : 1 \to N_i \xrightarrow{\iota_i} G_i \xrightarrow{\pi_i} F_i \to 1$ una extensión de un grupo finito F_i por un τ-grupo N_i. Si existe un cuerpo K de característica cero tal que $\mathfrak{G}_1^K$ y $\mathfrak{G}_2^K$ son K-isomorfos, entonces $\zeta_{\mathfrak{G}_1}(s)$ y $\zeta_{\mathfrak{G}_2}(s)$ tienen la misma abscisa de convergencia.*

Se pueden considerar extensiones $\mathfrak{G} : 1 \to \mathfrak{N} \to \mathfrak{G} \to F \to 1$ donde F es un grupo finito y $\mathfrak{N}$ es un grupo algebraico unipotente sobre un cuerpo de números. Todo lo que enunciamos para grupos algebraicos unipotentes puede enunciarse también en esta situación. Para no ser repetitivos invitamos al lector a leer los enunciados en el Capítulo 3.

Otro tipo de conteo

En vez de considerar todos los subgrupos de índice finito de un grupo podríamos considerar sólo aquellos que son normales. Definiendo $a_n^{\triangleleft}(G)$ como el número de subgrupos normales de G de índice n, la *función zeta de subgrupos normales de* G es la serie de Dirichlet $\zeta_G^{\triangleleft}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\triangleleft}(G)}{n^s}$. Todo lo que hemos dicho hasta ahora con respecto a $\zeta_G(s)$ también lo vamos a establecer para $\zeta_G^{\triangleleft}(s)$.

Grupos almost-Bieberbach y cálculos explícitos

De la teoría de variedades riemaniannas compactas planas se sabe que estas están completamente determinada por su grupo fundamental. Estos a su vez pueden caracterizarse de manera puramente algebraica: un grupo E es el grupo fundamental de una variedad riemanniana compacta plana si y sólo si E es finitamente generado, libre de torsión y contiene un subgrupo normal abeliano de índice finito. A un tal grupo se lo llama *grupo de Bieberbach* y su *dimensión* es la dimensión de la variedad riemanniana correspondiente. Salvo isomorfismo, hay exactamente 10 grupos de Bieberbach de dimensión 3. En el Capítulo 4 se presenta el cálculo de la función zeta de subgrupos de cada uno de ellos. Esto aporta más ejemplos de funciones zeta de subgrupos calculadas para grupos virtualmente abelianos aparte de las funciones zeta de subgrupos de los grupos cristalográficos planos calculadas por McDermott en [McD97].

Una generalización de las variedades riemannianas compactas planas son las infra-nilvariedades. Para una definición de estos, referimos al lector al capítulo 4. Un grupo E es el grupo fundamental de una infra-nilvariedad si y sólo E es finitamente generado, libre de torsión y tiene un subgrupo normal nilpotente de índice finito; además este grupo determina la variedad. A un tal grupo se lo llama un *grupo almost-Bieberbach* y su *dimensión* es la dimensión de la infra-nilvariedad asociada. Los grupos almost-Bieberbach de dimensón 3 también están clasificados y hay una cantidad infinita de ellos. Nosotros presentaremos el cálculo explícito de la función zeta de subgrupos de cada uno de ellos. Estos son los primeros cálculos de funciones zeta de grupos virtualmente nilpotentes que no son nilpotentes ni tampoco virtualmente abelianos.

¿Ecuación funcional?

Uno de los resultados más importantes en la teoría de funciones zeta de grupos fue probado por Voll en [Vol10] y refiere a la existencia de una ecuación funcional que satisfacen los factores locales de las funciones zeta de los factores locales. Si G es un τ-grupo de longitud de Hirsch h, existen variedades proyectivas lisas V_t, $t \in \{1, \ldots, m\}$, definidas sobre $\mathbb{Q}$, y funciones racionales $W_t(X,Y) \in \mathbb{Q}(X,Y)$ tales que para todos salvo una cantidad finita de primos p se tiene

(i) $\zeta_{G,p}(s) = \sum_{t=1}^{m} b_t(p) W_t(p, p^{-s})$, donde $b_t(p) = |\bar{V}_t(\mathbb{F}_p)|$ y $\bar{V}_t$ es la reducción de V_t mod p.

(ii) Poniendo $\zeta_{G,p}(s)|_{p \to p^{-1}} = \sum_{t=1}^{m} b_t(p^{-1}) W_t(p^{-1}, p^s)$, donde $b_t(p^{-1}) = p^{-\dim(V_t)} b_t(p)$, se verifica la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{G,p}(s)|_{p \to p^{-1}} = (-1)^h p^{\binom{h}{2} - hs} \zeta_{G,p}(s).$$

Notar que la forma de esta ecuación funcional depende sólo de la longitud de Hirsch de G. En todos nuestros cálculos de funciones zeta de subgrupos de los grupos almost-Bieberbach notaremos que también se presentan ecuaciones funcionales para los factores locales, pero esta vez van a depender del grupo G y del primo p.

Agradecimientos

Quiero agradecer en primer lugar a la FaMAF y a toda su gente por haberme brindado este lindo espacio para poder desarrollar mi carrera y haberme enseñado muchísimo no sólo de matemáticas sino también de muchos aspectos importantes de la vida. Agradezco especialmente a mi director Paulo por abrirme muchas puertas en este proceso, a Roberto Miatello cuyos sabios consejos y ayuda estuvieron siempre presente sobre todo cuando más lo he necesitado, y a los profesores Jorge Vargas y Pedro Sánchez tanto por la amistad como por las constantes charlas de matemáticas que tanto he disfrutado.

En segundo lugar quiero agradecer a Orlando Villamayor quien me ha devuelto esa pasión por las matemáticas y me ha enseñado a apreciarla mejor contagiándome ese deseo de querer entender las cosas a detalle. También a Christopher Voll cuyas charlas de matemáticas fueron determinantes para la finalización de esta tesis.

No puedo dejar de agradecer a quienes hicieron de mi estadía en Córdoba un período muy agradable. A toda la gente amiga y compañera dentro y fuera de la FaMAF, los compañeros de oficina, el equipo borbotónico, los grandes asados entre amigos, las juntadas para ver a River, etc. También a Cecilia, cuya compañía en este último período fue invalorable.

Finalmente, agradezco a mis padres, Martín y Josefina, por haberme acompañado y apoyado en todas las decisiones que he tomado. Su gran cariño fue un pilar sólido en todo este tiempo.

Capítulo 1

Elementos de teoría de grupos

En este capítulo se desarrollan los conceptos necesarios sobre teoría de grupos que serán usados más adelante en nuestro estudio de las funciones zeta de grupos. Empezaremos repasando la teoría de grupos nilpotentes con exponentes en anillos binomiales, o más precisamente en anillos que llamaremos c-binomiales. La completación de Mal'cev es la que nos permitirá cambiar el anillo de exponentes. Luego para un anillo c-binomial introduciremos los grupos virtualmente R-grupos nilpotentes y sus completaciones de Mal'cev. La mayoría de los resultados que enunciaremos son clásicos y pueden encontrarse en [Hal69] y [War76], por lo cual salvo excepciones no daremos ninguna cita de ellos y sólo pondremos en proposiciones aquellos que sean nuevos o que estén expresados de manera muy distinta a como se encuentran en las fuentes mencionadas.

1.1 Grupos nilpotentes

1.1.1. Sea N un grupo. La *serie central ascendente* de N es la serie normal $1 = Z_0(N) \leq Z_1(N) \leq Z_2(N) \leq \ldots$ definida recursivamente por $Z_i(N) = \{x \in N : [x, y] \in Z_{i-1}(N)\ \forall y \in N\}$ para $i > 0$. La *serie central descendente* de N es la serie normal $N = \Gamma_1(N) \geq \Gamma_2(N) \geq \ldots$ definida recursivamente por $\Gamma_i(N) = [N, \Gamma_{i-1}(N)]$ para todo $i > 1$. Se verifica que $\Gamma_i(\Gamma_j(N)) \leq \Gamma_{i+j}(N)$ para todo $i, j \geq 1$. El grupo N se dice *nilpotente* si existe un entero c tal que $Z_c(N) = N$ y al menor de tales enteros se lo denomina la *clase (de nilpotencia) de N*. Resulta en tal caso que $\Gamma_i(N) \leq Z_{c-i+1}(N)$ para $1 \leq i \leq c$. Más aún, N es nilpotente si y sólo si existe un entero c tal que $\Gamma_{c+1}(N) = 1$ y el menor de tales enteros coincide con la clase de nilpotencia de N. A $Z(N) = Z_1(N)$ se lo llama *el centro de N* y a $N^{ab} = N/\Gamma_2(N)$ se lo llama *la abelianización de N*.

1.1.2. Un grupo nilpotente, finitamente generado y sin elementos de torsión aparte de la identidad es llamado un *τ-grupo*. Si N es un τ-grupo de clase c, cada cociente $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ es un grupo abeliano libre de rango finito. Al número $h(N) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{rank}(Z_i(N)/Z_{i-1}(N))$ se lo denomina la *longitud de Hirsch de N*. Una *base de Mal'cev para N* es una sucesión $(x_1, \ldots, x_h)$ tal que si $N_i = \langle x_i, \ldots, x_h \rangle$ entonces N_i es normal en N y $N_i/N_{i+1} \cong \mathbb{Z}$ para $i = 1, \ldots, h$. Dos bases de Mal'cev para N tienen siempre la misma cantidad de elementos, la cual coincide con la longitud de Hirsch de N. Se puede obtener una base de Mal'cev para N poniendo en sucesión en primer lugar elementos de N que se proyectan a una base para $N/Z_{c-1}(N)$, luego elementos de $Z_{c-1}(N)$ que se proyectan a una base de $Z_{c-1}(N)/Z_{c-2}(N)$, y así sucesivamente.

1.1.3. Si $(x_1, \ldots, x_h)$ es una base de Mal'cev para N, todo elemento de N se escribe de manera única en la forma $x_1^{a_1} \ldots x_h^{a_h}$ con $a_1, \ldots, a_h \in \mathbb{Z}$. Para simplificar la notación escribiremos $\mathbf{x}^{\mathbf{a}} =$

$x_1^{a_1} \dots x_h^{a_h}$. La multiplicación y la exponenciación en N con respecto a esta base están dadas por mapas polinomiales: existen polinomios $f_1, \dots, f_h \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_h, Y_1, \dots, Y_h]$ y $g_1, \dots, g_h \in \mathbb{Q}[X_1, \dots, X_h, Z]$ tales que escribiendo $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_h)$ y $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_h)$ se tiene

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \mathbf{x}^{\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})} \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})^r = \mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{a},r)} \quad \text{para} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^h, r \in \mathbb{Z}.$$

En (1.2.10) daremos información más precisa sobre estos polinomios.

1.1.4. (Fórmula de Hall-Petresco) Sea F el grupo libre en los generadores $x_1, \dots, x_m$. Se definen palabras $\tau_n(x_1, \dots, x_m) = \tau_n(\mathbf{x})$ inductivamente por la fórmula

$$x_1^n \dots x_m^n = \tau_1(\mathbf{x})^n \tau_2(\mathbf{x})^{\binom{n}{2}} \dots \tau_{n-1}(\mathbf{x})^{\binom{n}{n-1}} \tau_n(\mathbf{x}).$$

Resulta entonces que $\tau_n(x_1, \dots, x_m) \in \Gamma_n(F)$. Más aún, si G es el grupo libre en los generadores $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t$ y $\phi : G \to F$ es el homomorfismo que lleva x_i en x_i e y_i en 1, entonces $\phi(\tau_n(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_t)) = \tau_n(x_1, \dots, x_m)$.

Como aplicación, tenemos que si N es un grupo nilpotente de clase $\leq c$, entonces para todo $x_1, \dots, x_m \in N$ y $r \in \mathbb{Z}$ vale la igualdad

$$x_1^r \dots x_m^r = \tau_1(\mathbf{x})^r \tau_2(\mathbf{x})^{\binom{r}{2}} \dots \tau_c(\mathbf{x})^{\binom{r}{c}};$$

y además para todo morfismo de grupos nilpotentes $f : M \to N$ se tiene que $\tau_n(f(x_1), \dots, f(x_m)) = f(\tau_n(x_1, \dots, x_m))$ para todo $x_1, \dots, x_m \in M$ y $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.1.5. Para $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})$ al subgrupo de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ de todas las matrices triangulares superiores con sólo 1's en la diagonal. Este es un τ-grupo de clase $n-1$ y con longitud de Hirsch $\frac{n(n-1)}{2}$. La serie central ascendente de $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})$ está dada por $Z_i(\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})) = \{A \in \mathrm{U}_n(\mathbb{Z}) : A_{ij} = 0 \text{ si } j - i < n - i\}$. Denotando por E_{rs} a la matriz con entrada 1 en el lugar (r,s) y con 0's en los lugares $(r', s') \neq (r, s)$, se observa que las clases de las matrices $I_n + E_{k,k+i}$ con $1 \leq i \leq n-1$ y $1 \leq k \leq n-i$ módulo $Z_i(\mathrm{U}_n(\mathbb{Z}))$ forman una base del grupo abeliano libre $Z_i(\mathrm{U}_n(\mathbb{Z}))/Z_{i-1}(\mathrm{U}_n(\mathbb{Z}))$. Por lo tanto, escribiendo $x_{ik} = I_n + E_{k,k+i}$ resulta que $(x_{ik})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i}$, ordenado de acuerdo al orden lexicográfico de los pares (i,j), es una base de Mal'cev para $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})$.

Por otro lado, si N es un τ-grupo entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que N es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})$ ([Hal69, Theorem 7.5]).

1.2 Grupos nilpotentes R-potenciados

1.2.1. Sea $c \in \mathbb{N}$. Un anillo R se dice *c-binomial* si es un dominio íntegro de característica cero tal que para todo $r \in R$ y para todo $1 \leq k \leq c$ se tiene $\binom{r}{k} = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!} \in R$. Ejemplos son el anillo de enteros $\mathbb{Z}$, el anillo de enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p = \varprojlim \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ para todo primo p, la completación profinita $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de $\mathbb{Z}$ y la localización de cualquier dominio íntegro de característica cero con respecto a un subconjunto que contiene a $1, 2, \dots, c$, como por ejemplo cualquier cuerpo de característica cero.

1.2.2. Sea $c \in \mathbb{N}$ y R un anillo c-binomial. Un grupo nilpotente N se dice *R-potenciado* si es de clase a lo sumo c y si para cada $x \in N$ y para cada $r \in R$ se ha definido un elemento x^r de modo que

(i) $x^0 = 1$, $x^1 = x$ y $x^{r+s} = (x^r)^s$ para todo $x \in N$ y $r, s \in R$;

(ii) $yx^ry^{-1} = (yxy^{-1})^r$ para todo $x, y \in N$ y $r \in R$; y

(iii) para todo $x_1, \ldots, x_m \in N$ y $r \in R$ se verifica la fórmula de Hall-Petresco (1.1.4)

$$(x_1 \ldots x_m)^r = \tau_1(x_1, \ldots, x_m)^r \tau_2(x_1, \ldots, x_m)^{\binom{r}{2}} \ldots \tau_c(x_1, \ldots, x_m)^{\binom{r}{c}}.$$

Un morfismo de grupos $\varphi : M \to N$ entre grupos nilpotentes R-potenciados se dice un R-morfismo si verifica $\varphi(x^r) = \varphi(x)^r$ para todo $x \in N$ y $r \in R$. Tenemos así la categoría de los grupos nilpotentes R-potenciados.

Notar que para $c = 1$, la categoría de grupos nilpotentes R-potenciados coincide con la categoría de R-módulos, es decir, un grupo abeliano R-potenciado es los mismo que un R-módulo y un R-morfismo entre grupos abelianos R-potenciados es un morfismo de R-módulos.

1.2.3. Sea N un grupo nilpotente R-potenciado. Un subgrupo M de N se dice un *R-subgrupo* si $x^r \in M$ para todo $x \in M$ y $r \in R$. La intersección de una familia arbitraria de R-subgrupos es un R-subgrupo. Si M es un R-subgrupo normal de N entonces M/N es un grupo nilpotente R-potenciado si definimos $(xM)^r$ como x^rM y el mapa cociente $N \to N/M$ es un R-morfismo. Más aún, el mapa $K \mapsto K/M$ da una correspondencia uno a uno entre los R-subgrupos de N que contienen a M y los R-subgrupos de N/M. Si A es un R-subgrupo de N y M es un R-subgrupo normal de N entonces AM es un R-subgrupo de N y el isomorfismo canónico $AN/N \cong A/A \cap N$ es un R-isomorfismo. Los elementos de la serie central ascendente y la serie central descendente de N son R-subgrupos.

El producto $\prod_{i \in I} N_i$ de una cantidad arbitraria de grupos nilpotentes R-potenciados N_i es de nuevo un grupo nilpotente R-potenciado si definimos $(x_i)^r = (x_i^r)$ para $(x_i) \in \prod_{i \in I} N_i$ y $r \in R$, y él es un producto en la categoría de grupos nilpotentes R-potenciados.

Proposición 1.2.4. *Sea S un subconjunto de un grupo nilpotente R-potenciado N y sea $\langle S \rangle_R$ el subconjunto de todos los elementos de N que pueden escribirse en la forma $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$ con $x_1, \ldots, x_k \in S$ y $r_1, \ldots, r_k \in R$. Entonces $\langle S \rangle_R$ es un R-subgrupo de N.*

Demostración. Es claro que $\langle S \rangle_R$ es un subgrupo de N. Para $x_1, \ldots, x_k \in S$ y $r_1, \ldots, r_k, r \in R$ queremos ver que $(x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k})^r \in \langle S \rangle_R$. Cuando $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} \in \langle S \rangle_R \cap \Gamma_{c+1}(N) = 1$ no hay nada que probar. Si $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k} \in \langle S \rangle_R \cap \Gamma_i(N)$ con $i \le c$ entonces por la fórmula de Hall-Petresco tenemos

$$x_1^{rr_1} \ldots x_k^{rr_k} = (x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k})^r \tau_2(x_1^{r_1}, \ldots, x_k^{r_k})^{\binom{r}{2}} \ldots \tau_c(x_1^{r_1}, \ldots, x_k^{r_k})^{\binom{r}{c}},$$

y el resultado se sigue por inducción pues $\tau_j(x_1^{r_1}, \ldots, x_k^{r_k}) \in \langle S \rangle_R \cap \Gamma_j(\Gamma_i(N)) \subseteq \langle S \rangle_R \cap \Gamma_{j+i}(N)$. $\square$

1.2.5. Sea N un grupo nilpotente R-potenciado. Decimos que un conjunto $S \subseteq N$ genera N si todo elemento de N puede escribirse como $x_1^{r_1} \ldots x_k^{r_k}$ con $x_1, \ldots, x_k \in S$ y $r_1, \ldots, r_k \in R$, es decir, $N = \langle S \rangle_R$. Seguń (1.2.4) esto equivale a decir que N es el menor R-subgrupo de N que contiene a S. Si además S puede elegirse finito, decimos que N es finitamente generado (como grupo R-potenciado). En tal caso, existe una serie subnormal $N = N_1 \ge \ldots \ge N_n \ge N_{n+1} = 1$ formada por R-subgrupos tales que N_i/N_{i+1} es un R-módulo cíclico [War76, Theorem 3.8]. Más aún, si M es un R-subgrupo de N, entonces $M = (M \cap N_1) \ge \ldots \ge (M \cap N_n) \ge (M \cap N_{n+1}) = 1$ es una serie subnormal de M con $M \cap N_i/M \cap N_{i+1} \cong (M \cap N_i)N_{i+1}/N_{i+1}$, el cual es un R-submódulo del R-módulo cíclico N_i/N_{i+1}. Concluímos por ejemplo que si R es noetheriano entonces todo R-subgrupo de un grupo nilpotente R-potenciado y finitamente generado es tambén finitamente generado; en particular, los factores $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ de la serie central ascendente son R-módulos finitamente generados.

1.2.6. Un elemento x de un grupo nilpotente R-potenciado N se dice un elemento de R-torsión si existe $r \in R$ distinto de 0 tal que $x^r = 1$. El conjunto de todos los elementos de R-torsión de N es un R-subgrupo normal de N que lo denotamos $t_R(N)$. Decimos que N es libre de R-torsión si $t_R(N) = 1$ y si además N es finitamente generado decimos que N es un *τ_R-grupo*.

Si N es un τ_R-grupo entonces $Z(N)$ es un R-módulo que es libre de torsión y $N/Z(N)$ es un τ_R-grupo. En efecto, si $x \in N$ satisface $x^r \in Z(N)$ para algún $r \neq 0$ entonces $(yxy^{-1})^r = yx^ry^{-1} = x^r$ para todo $y \in N$, y la conclusión resulta de [War76, Lemma 10.8]. Se concluye por inducción que cada cociente $Z_{i+1}(N)/Z_i(N)$ es un R-módulo libre de torsión.

1.2.7. Sea R un anillo c-binomial que es un dominio de ideales principales y sea N un τ_R-grupo de clase c. Por (1.2.5) y (1.2.6) cada $Z_i(N)/Z_{i-1}(N)$ es un R-módulo libre de rango finito. Al número $h(N) = \sum_{i=1}^{c} \operatorname{rank}_R(Z_i(N)/Z_{i-1}(N))$ se lo llama la R-longitud de Hirsch de N. Una sucesión $(x_1, \dots, x_h)$ de elementos de N se dice una *R-base de Mal'cev* para N si el R-subgrupo N_i de N generado por $\{x_i, \dots, x_h\}$ es normal y $N_i/N_{i+1} \cong R$ para $i = 1, \dots, h$. El número de elementos de cualquier R-base de Mal'cev para N coincide con la R-longitud de Hirsch de N. Una R-base de Mal'cev para N se obtiene poniendo en sucesión en primer lugar elementos de N que se proyectan a una base de $N/Z_{c-1}(N)$, luego elementos de $Z_{c-1}(N)$ que se proyectan a una base de $Z_{c-1}(N)/Z_{c-2}(N)$, y así sucesivamente.

Resulta que si $(x_1, \dots, x_h)$ es una R-base para Mal'cev para N entonces cada $(x_i, \dots, x_h)$ es una R-base de Mal'cev para N_i y todo elemento de N se escribe de manera única en la forma $x_1^{r_1} \dots x_h^{r_h}$ con $r_1, \dots, r_h \in R$.

1.2.8. Para $k \in \mathbb{N}$ denotamos $\binom{X}{k} = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!} \in \mathbb{Q}[X]$ y definimos $\binom{X}{0} = 1$. Para un entero positivo c, denotamos por B_X^c al subanillo de $\mathbb{Q}[X]$ generado por el menor subconjunto S de $\mathbb{Q}[X]$ que contiene a $\{\binom{X}{1}, \dots, \binom{X}{c}\}$ y con la propiedad de que para $f, g \in S$ la composición $f \circ g$ también pertence a S. Para $h > 1$, denotamos por $B_{X_1,\dots,X_h}^c$ al subanillo de $\mathbb{Q}[X_1, \dots, X_h]$ generado por los subanillos $B_{X_1}, \dots, B_{X_h}$. Notar que si R es un anillo c-binomial y $r_1, \dots, r_h \in R$, entonces $f(r_1, \dots, r_h) \in R$ para cualquier $f \in B_{X_1,\dots,X_h}^c$.

Lema 1.2.9. *Sea R un anillo c-binomial. Si $f_1, \dots, f_l \in B_{X_1,\dots,X_h}^c \otimes R$ y $g \in B_{Y_1,\dots,Y_l}^c \otimes R$ entonces $g(f_1, \dots, f_l) \in B_{X_1,\dots,X_h}^c \otimes R$.*

Demostración. Como $B_{Y_1,\dots,Y_l}^c \otimes R$ está generado como R-álgebra por los subanillos $B_{Y_1}^c, \dots, B_{Y_l}^c$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $l = 1$ y $g \in B_{Y_1}^c$. Más aún, por definición de $B_{Y_1}^c$, basta considerar sólo el caso en que g es de la forma $\binom{Y_1}{k}$ con $1 \leq k \leq c$. Como R es c-binomial, el resultado se sigue claramente si probamos que $\binom{-X}{k} \in B_X^k$ y $\binom{X+Y}{k}, \binom{XY}{k} \in B_{X,Y}^k$. Por un lado, tenemos las identidades bien conocidas

(i) $\binom{X+Y}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{X}{i}\binom{Y}{k-i} \in B_{X,Y}^k$,

(ii) $\binom{-X}{k} = (-1)^k \binom{X+k-1}{k} = (-1)^k \sum_{i=0}^{k} \binom{X}{i}\binom{k-1}{k-i} \in B_X^k$.

Por otro lado, para $a \in \mathbb{Z}$ el polinomio $f_a(Y) = \binom{aY}{k}$ tiene grado a lo sumo k. Usando la fórmula bien conocida (válida para un polinomio cualquiera de grado a lo sumo k y coeficientes racionales)

$$f_a(Y) = \sum_{r=0}^{k} \sum_{i=0}^{r} (-1)^{r-i} \binom{r}{i} f_a(i) \binom{Y}{r},$$

obtenemos $\binom{XY}{k} = \sum_{r=0}^{k}\sum_{i=0}^{r}(-1)^{r-i}\binom{r}{i}\binom{Xi}{k}\binom{Y}{r}$. Finalmente aplicamos sucesivamente (i) al polinomio $\binom{Xi}{i}$ y obtenemos que $\binom{XY}{k} \in B_{X,Y}^{k}$. □

Proposición 1.2.10. *Sea R un anillo c-binomial que es un dominio de ideales principales y sea N un τ_R-grupo con R-base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$. Entonces existen polinomios $f_1, \ldots, f_h \in B^{c}_{X_1,\ldots,X_h,Y_1,\ldots,Y_h} \otimes R$ y $g_1, \ldots, g_h \in B^{c}_{X_1,\ldots,X_h,Z} \otimes R$ tales que escribiendo $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_h)$ y $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_h)$ se tiene*

$$\mathbf{x}^{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{x}^{\mathbf{b}} = \mathbf{x}^{\mathbf{f}(\mathbf{a},\mathbf{b})} \quad \textit{y} \quad (\mathbf{x}^{\mathbf{a}})^r = \mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{a},r)} \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in R^h, r \in R.$$

Si $\tilde{N}$ es otro τ_R-grupo con R-base de Mal'cev $(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_{\tilde{h}})$ y $\varphi : N \to \tilde{N}$ es un R-morfismo, entonces existen polinomios $p_1, \ldots, p_{\tilde{h}} \in B^{c}_{X_1,\ldots,X_h} \otimes R$ tales que escribiendo $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_{\tilde{h}})$ se tiene

$$\varphi(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) = \tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{p}(\mathbf{a})} \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{a} \in R^h.$$

Demostración. La primera parte sale de la demostración de [Hal69, Teorema 6.5] usando como punto de partida la fórmula de Hall-Petresco para N y el Lema 1.2.9. Para la segunda parte, poniendo $\varphi(x_i) = \tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{w}_i}$ se tiene $\varphi(\mathbf{x}^{\mathbf{a}}) = \varphi(x_1)^{a_1} \ldots \varphi(x_h)^{a_h} = \tilde{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_1,a_1)} \ldots \tilde{\mathbf{x}}^{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{w}_h,a_h)}$, donde esta vez $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{g}}$ son las colecciones de polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en $\tilde{N}$ con respecto a la base dada. El resultado se sigue combinando la primera parte con el Lemma 1.2.9. □

1.2.11. Sea R un anillo c-binomial que es un dominio de ideales principales y sea N un τ_R-grupo de longitud de Hirsch h con R-base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$. Denotemos por N_i al R-subgrupo de N generado por $\{x_i, \ldots, x_h\}$. Sea M un R-subgrupo de N. Tenemos que $(M \cap N_i)/(M \cap N_{i+1}) \cong (M \cap N_i)N_{i+1}/N_{i+1}$ como grupos R-potenciados y este último es isomorfo a un sub-R-módulo de $N_i/N_{i+1} \cong R$. Luego $(M \cap N_i)/(M \cap N_{i+1})$ es 0 o es isomorfo a R. Se sigue que M es un τ_R-grupo de R-longitud de Hirsch $h(M) \leq h$ y que $h(M) = h$ si y sólo si $M \cap N_i \neq M \cap N_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, h$. En este último caso, si $y_i \in M \cap N_i$ se proyecta a un generador del R-módulo $(M \cap N_i)/(M \cap N_{i+1})$, entonces $(y_1, \ldots, y_h)$ resulta una R-base de Mal'cev para M. Diremos que $(y_1, \ldots, y_h)$ es una *base buena* para M (con respecto a $(x_1, \ldots, x_h)$). Notemos que y_i se escribe como $x_i^{r_{ii}} \ldots x_h^{r_{ih}}$ para ciertos $r_{ij} \in R$ con $r_{ii} \neq 0$. Diremos que la matriz triangular superior $\mathbf{r} = (r_{ij}) \in \mathrm{Tr}(h, R)$ representa esta base buena.

1.2.12. Con las hipótesis de (1.2.11), supongamos además que para todo $r \in R$ no nulo se tiene que R/rR es finito. Los R-subgrupos M de N con $h(M) = h$ son precisamente los R-subgrupos de índice finito. En efecto, $[N : M] = \prod_{i=1}^{h}[N_iM : MN_{i+1}] = \prod_{i=1}^{h}[N_i : (M \cap N_i)N_{i+1}]$, el cual es finito si y sólo si $M \cap N_i \neq M \cap N_{i+1}$ para todo $i = 1, \ldots, h$. Más aún, siguiendo (1.2.11) obtenemos que si (r_{ij}) representa una base buena para M entonces $[N_i : (M \cap N_i)N_{i+1}] = |R/r_{ii}R|$ y por lo tanto $[N : M] = \prod_{i=1}^{h}|R/r_{ii}R|$.

Ejemplo 1.2.13. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea R un anillo $(n-1)$-binomial. Denotemos por $\mathrm{U}_n(R)$ al subgrupo de $\mathrm{GL}_n(R)$ de todas las matrices triangulares superiores que tienen sólo 1's en la diagonal. El grupo $\mathrm{U}_n(R)$ es nilpotente de clase $n-1$ y es R-potenciado si ponemos $A^r = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r}{k}(A - I_n)^k$, donde I_n es la matriz identidad ([War76, Corollary 10.25]). Notar que esta suma es finita pues $(A - I_n)^k = 0$ para todo $k \geq n$. Resulta también que $\mathrm{U}_n(R)$ es un τ_R-grupo. Al igual que en (1.1.5), la serie central ascendente de $\mathrm{U}_n(R)$ está dada por $Z_i(\mathrm{U}_n(R)) = \{A \in \mathrm{U}_n(R) : A_{ij} = 0 \text{ si } j - i < n - i\}$. Con la notación de (1.1.5), la clase de los x_{ik} módulo $Z_{i-1}(\mathrm{U}_n(R))$, con $1 \leq k \leq n - i$, forman una base para $Z_i(\mathrm{U}_n(R))/Z_{i-1}(\mathrm{U}_n(R))$. Luego $(x_{ik})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i}$, ordenado de acuerdo al orden lexicográfico de los pares (i, j), es una R-base de Mal'cev para $\mathrm{U}_n(R)$.

Recíprocamente, si R es un anillo c-binomial para todo $c \in \mathbb{N}$ (también llamado un anillo binomial) y N es un τ_R-grupo, entonces existe n tal que N es isomorfo a un R-subgrupo de $\mathrm{U}_n(R)$ ([War76, Theorem 11.7]).

1.3 Completación de Mal'cev

1.3.1. Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo (de anillos) entre anillos c-binomiales. Si M es un grupo nilpotente S-potenciado, entonces M puede considerarse un grupo nilpotente R-potenciado si definimos $x^r = x^{\alpha(r)}$ para $x \in M$ y $r \in R$, y en tal caso lo vamos a denotar $M_{[\alpha]}$. Del mismo modo, si $\varphi : M \to M'$ es un S-morfismo entonces $\varphi : M_{[\alpha]} \to M'_{[\alpha]}$ es un R-morfismo que será denotado por $\varphi_{[\alpha]}$. Se obtiene así un funtor covariante de la categoría de grupos nilpotentes S-potenciados en la categoría de grupos nilpotentes R-potenciados al cual llamaremos el *funtor de restricción de escalares.*

Si N es un grupo nilpotente R-potenciado y M es un grupo nilpotente S-potenciado, un mapa $\varphi : N \to M$ se dice un α-morfismo si es un R-morfismo de N en $M_{[\alpha]}$.

Proposición 1.3.2. *Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Si N es un grupo nilpotente R-potenciado, existe un grupo nilpotente S-potenciado $N \otimes_R S$ y un α-morfismo $\iota : N \to N \otimes_R S$ con la siguiente propiedad universal: para todo grupo nilpotente S-potenciado M y para todo α-morfismo $\varphi : N \to M$, existe un único S-morfismo $\tilde{\varphi} : N \otimes_R S \to M$ tal que $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$.*

Demostración. Consideremos la clase $\mathcal{C}$ cuyos objetos son los pares (f, M) donde M es un grupo nilpotente S-potenciado y $f : N \to M$ es un α-morfismo tal que $f(N)$ genera a M como grupo S-potenciado. Decimos que dos pares (f, M) y (f', M') son equivalentes si existe un S-isomorfismo $\phi : M \to M'$ tal que $\phi \circ f = f'$. Esta clase es no vacía pues la abelianización $N^{ab} = N/\Gamma_2(N)$ de N es un R-modulo (1.2.3) y tomando a f como la composición $N \to N^{ab} \to N^{ab} \otimes_R S$, donde el segundo mapa es el morfismo canónico, obtenemos que $(f, N^{ab} \otimes_R S)$ es un elemento de $\mathcal{C}$. Por otro lado, las clases de equivalencias de estos pares constituyen un conjunto. En efecto, todo par (f, M) es equivalente a un par (f', M'), donde M' tiene como conjunto subyacente a un subconjunto de $(N \times S)^{\mathbb{N}}$ (esto es pues M está generado como grupo S-potenciado por $f(N)$). Sea $\{(f_i, M_i)\}_{i \in I}$ un conjunto de pares en la clase $\mathcal{C}$ tal que cualquier otro par de la clase es equivalente a uno de este conjunto. Luego $\prod_{i \in I} M_i$ es un grupo nilpotente S-potenciado y los α-morfismos $f_i : N \to M_i$ se levantan de manera única a un α-morfismo $f : N \to \prod_{i \in I} M_i$. Sea $N \otimes_S R$ el S-subgrupo de $\prod_{i \in I} M_i$ generado por $f(N)$ y sea $\iota : N \to N \otimes_S R$ la corestricción de f. Si $\varphi : N \to M$ es un α-morfismo y M' es el S-subgrupo de M generado por $\varphi(N)$, entonces (φ, M') es equivalente a uno de los pares (f_i, M_i) y, por lo tanto, existe un S-morfismo $\varphi' : \prod_{i \in I} M_i \to M'$ tal que $\varphi' \circ f = \varphi$. Si $\tilde{\varphi} : N \otimes_R S \to M$ es la restricción de φ', entonces se tiene que $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$. Finalmente la unicidad de la extensión de φ se debe a que $N \otimes_R S$ está generado por $\iota(N)$. □

1.3.3. Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Para un grupo nilpotente R-potenciado N, al par $(N \otimes_R S, \iota)$ de la Proposición 1.3.2 (o cualquier otro equivalente a él) lo vamos a llamar *la α-completación de Mal'cev de N* o la *S-completación de Mal'ev de N* cuando no haya lugar a confusión. También diremos que $N \otimes_R S$ es la S-completación de Mal'cev de N y que ι el morfismo canónico. Si $f : N_1 \to N_2$ es un R-morfismo de grupos nilpotentes R-potenciados entonces existe por (1.3.2) un único S-morfismo $f \otimes_R S : N_1 \otimes_R S \to N_2 \otimes_R S$, llamado la *$S$-extensión de f*, tal que $(f \otimes_R S) \circ \iota_{N_1} = \iota_{N_2} \circ f$, donde para $i = 1, 2$, $\iota_{N_i} : N_i \to N_i \otimes_R S$ es el morfismo canónico. Resulta así que la aplicación $N \mapsto N \otimes_R S$ define un funtor covariante de la categoría de grupos nilpotentes

R-potenciados en la categoría de grupos nilpotentes S-potenciados y la Proposición 1.3.2 afirma que este funtor es adjunto a izquierda al funtor de restricción de escalares (1.3.1). A este funtor se lo denomina la *S-completación de Mal'cev.*

Se sigue de la propiedad universal de $N \otimes_R S$ que si N es un grupo abeliano S-potenciado, es decir un R-módulo, la S-completación de Mal'cev de N coincide con el producto tensorial de N por S. Esto justifica nuestra notación.

1.3.4. Si $\beta : S \to T$ es un segundo morfismo de anillos c-binomiales y N es un grupo nilpotente R-potenciado, la propiedad universal (1.3.2) da un isomorfismo natural $(N \otimes_R S) \otimes_S T \cong N \otimes_R T$.

1.3.5. Sea $\alpha : R \to S$ una extensión de anillos c-binomiales tales que R es un dominio de ideales principales y sea N un τ_R-grupo con R-base de Mal'cev $(x_1, \dots, x_h)$. Sean $f_1, \dots, f_h \in B^c_{X_1,\dots,X_h,Y_1,\dots,Y_h} \otimes R$ y $g_1, \dots, g_h \in B^c_{X_1,\dots,X_h,Z} \otimes R$ los polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en N con respecto a esta base (1.2.10). La definición de B^c_X muestra que si $s_1, \dots, s_h, s'_1, \dots, s'_h, s \in S$, entonces $f^\alpha_i(s_1, \dots, s_h, s'_1, \dots, s'_h) \in S$ y $g^\alpha_i(s_1, \dots, s_h, s) \in S$ para $i = 1, \dots, h$, donde f^α_i y g^α_i denotan las imágenes de f_i y g_i en $B^c_{X_1,\dots,X_h,Y_1,\dots,Y_h} \otimes S$ y en $B^c_{X_1,\dots,X_h} \otimes S$ respectivamente. Definimos entonces N^S como el conjunto de todas las expresiones formales $\mathbf{x}^{\mathbf{s}} = x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h}$ con $s_i \in S$, con multiplicación y exponenciación dadas por $\mathbf{x}^{\mathbf{s}}\mathbf{x}^{\mathbf{s}'} = \mathbf{x}^{\mathbf{f}^\alpha(\mathbf{s},\mathbf{s}')}$ y $(\mathbf{x}^{\mathbf{s}})^s = \mathbf{x}^{\mathbf{g}^\alpha(\mathbf{s},s)}$ respectivamente. Con estas operaciones, N^S resulta un grupo nilpotente S-potenciado de clase igual a la de N, y si N_i es el τ_R-subgrupo de N con R-base de Mal'cev $(x_i, \dots, x_h)$ entonces N_i^S es un S-subgrupo normal de N^S tal que $N_i^S/N_{i+1}^S \cong S$ [Hal69, p. 48]. Denotamos por $\iota_N : N \to N^S$ al morfismo $x_1^{r_1} \dots x_h^{r_h} \mapsto x_1^{\alpha(r_1)} \dots x_h^{\alpha(r_h)}$.

Proposición 1.3.6. *El par (ι_N, N^S) es la S-completación de Mal'cev de N.*

Demostración. Sea $\iota : N \to N \otimes_R S$ la S-completación de Mal'cev de N. Por la propiedad universal de la S-completación de Mal'cev, existe un S-morfismo $f : N \otimes_R S \to N^S$ tal que $f(\iota(x_i)) = x_i$ para $i = 1, \dots, h$. El mapa f es suryectivo pues $\{x_1, \dots, x_h\}$ genera N^S. Para ver que f es inyectivo basta ver que todo elemento de $N \otimes_R S$ se escribe en la forma $\iota(x_1)^{s_1} \dots \iota(x_h)^{s_h}$ con $s_i \in S$, pues en tal caso $f(\iota(x_1)^{s_1} \dots \iota(s_h)^{s_h}) = x_1^{s_1} \dots x_h^{s_h}$ y, por definición, este elemento es 1 en N^S si y sólo si $s_1 = \dots = s_h = 0$.

Finalmente, denotemos por $(N \otimes_R S)_i$ al S-subgrupo de $N \otimes_R S$ generado por $\{\iota(x_i), \dots, \iota(x_h)\}$, de modo que $(N \otimes R)_1 = N \otimes R$. Veamos que todo elemento de $(N \otimes_R S)_i$ puede escribirse en la forma $\iota(x_i)^{s_i} \dots \iota(x_h)^{s_h}$ con $s_i, \dots, s_h \in S$. La afirmación es clara si $i = h$, por lo tanto podemos suponer que $i < h$. Por inducción, bastará ver que para $i < j \leq h$ y $s, s' \in S$ se tiene $\iota(x_j)^{s'}\iota(x_i)^s = \iota(x_i)^s u$ para algún $u \in (N \otimes_R S)_{i+1}$. Por empezar, tenemos $\iota(x_j)^{s'}\iota(x_i)^s = \iota(x_i)^s(\iota(x_j)(\iota(x_j^{-1}x_i^{-1}x_j))^s\iota(x_i)^s)^{s'}$. Poniendo $z = x_j^{-1}x_i^{-1}x_j$ y usando la fórmula de Hall-Petresco obtenemos $\iota(z)^s\iota(x_i)^s = (\iota(x_j^{-1}x_i^{-1}x_jx_i))^s\iota(\tau_2(z, x_i))^{\binom{s}{2}} \dots \iota(\tau_c(z, x_i))^{\binom{s}{c}}$. Claramente se tiene que $x_j^{-1}x_i^{-1}x_jx_i, \tau_2(z, x_i), \dots, \tau_c(z, x_i) \in N_{i+1}$, y por lo tanto $\iota(z)^s\iota(x_i)^s \in (N \otimes_R S)_{i+1}$. Luego nuestro objetivo se alcanza tomando $u = \iota((x_jz^sx_i^s)^{s'})$. □

Proposición 1.3.7. *Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo inyectivo de anillos c-binomiales que son dominios de ideales principales y sea N un τ_R-grupo. Si M es un R-subgrupo de N, entonces la S-completación de Mal'cev de M es el S-subgrupo de N generado por la imagen de M en $N \otimes_R S$.*

Demostración. Vamos a suponer que R es un subanillo de S y que α es la inclusión. Sea $(x_1, \dots, x_h)$ una R-base de Mal'cev para N y usemos la descripción N^S de $N \otimes_R S$ por lo cual ι es la inclusión

(1.3.5). Sea $N_i = \langle x_i, \dots, x_h \rangle_R$. Vimos en (1.2.11) que $M = M \cap N_1 \geq \dots \geq M \cap N_h \geq M \cap N_{h+1} = 1$ es una serie normal de M tal que $M \cap N_i / M \cap N_{i+1} \cong R$ ó 0. Sea $\{i_1, \dots, i_t\}_< \subseteq \{1, \dots, h\}$ el subconjunto ordenado de los $i \in \{1, \dots, h\}$ tales que $M \cap N_i / M \cap N_{i+1} \cong R$. Sea $y_{i_k} \in (M \cap N_{i_k}) \setminus (M \cap N_{i_{k+1}})$ tal que $y_{i_k}(M \cap N_{i_{k+1}})$ es un generador del R-módulo cíclico $(M \cap N_{i_k})/(M \cap N_{i_{k+1}})$. Resulta entonces que $(y_{i_1}, \dots, y_{i_t})$ es una R-base de Mal'cev para M. De la fórmula de Hall Petresco resulta inmediato que $\langle M \rangle_S$ es exactamente el subconjunto de N^S de los elementos de la forma $y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t}$ con $s_1, \dots, s_t \in S$.

Veamos que todo elemento de $\langle M \rangle_S$ puede escribirse de manera única en la forma $y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t}$ con $s_i \in S$. En efecto, supongamos que $y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t} = y_{i_1}^{u_1} \dots y_{i_t}^{u_t}$. En la S-base de Mal'cev $(x_1, \dots, x_h)$ para N^S, el elemento y_{i_1} tiene la forma $x_{i_1}^{r_{i_1 i_1}} \dots x_h^{r_{i_1 h}}$ para ciertos r_{ij}'s en R con $r_{i_1 i_1} \neq 0$. De la fórmula de Hall-Petresco se sigue que $y_{i_1}^{s_1} = x_{i_1}^{s_1 r_{i_1 i_1}} z$ para algún $z \in N_{i_1+1}^S$ y por lo tanto $y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t} = x_{i_1}^{s_1 r_{i_1 i_1}} z_1$ para algún $z_1 \in N_{i_1+1}^S$. De manera análoga $y_{i_1}^{u_1} \dots y_{i_t}^{u_t} = x_{i_1}^{u_1 r_{i_1 i_1}} z_2$ para algún $z_2 \in N_{i_1+1}^S$. Luego $x_{i_1}^{(s_1 - u_1) r_{i_1 i_1}} \in N_{i_1+1}^S$ y, por lo tanto, $(s_1 - u_1) r_{i_1 i_1} = 0$. Concluímos que $s_1 = u_1$ y, por lo tanto, $y_{i_2}^{s_2} \dots y_{i_t}^{s_t} = y_{i_2}^{t_2} \dots y_{i_t}^{s_t}$. Nuestra afirmación se sigue ahora por inducción.

Finalmente, la inclusión $i : M \to N$ induce un S-morfismo $i \otimes_R S : M \otimes_R S \to N^S$ cuya imagen es claramente $\langle M \rangle_S$. Usando la descripción M^S de $M \otimes_R S$ en (1.3.5) a partir de la R-base de Mal'cev $(y_{i_1}, \dots, y_{i_t})$, obtenemos que $i \otimes_R S$ es el mapa $y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t} \mapsto y_{i_1}^{s_1} \dots y_{i_t}^{s_t}$, el cual por lo visto en el párrafo anterior resulta inyectivo. Luego $i \otimes_R S : M^S \to \langle M \rangle_S$ es un S-isomorfismo. $\square$

Ejemplo 1.3.8. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea R un anillo $(n-1)$-binomial que es un dominio de ideales principales. Vimos en (1.1.5) y (1.2.13) que el conjunto $(x_{ik})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i}$, ordenado de acuerdo al orden lexicográfico de los pares (i, k), es una base de Mal'cev para $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})$ y una R-base de Mal'cev para $\mathrm{U}_n(R)$. La inclusión $i : \mathrm{U}_n(\mathbb{Z}) \to \mathrm{U}_n(R)$ se extiende a un R-morfismo $\tilde{i} : \mathrm{U}_n(\mathbb{Z}) \otimes R \to \mathrm{U}_n(R)$ que es claramente suryectivo. Usando la descripción $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z})^R$ de $\mathrm{U}_n(\mathbb{Z}) \otimes R$ (1.3.5) con respecto a la base de Mal'cev $(x_{ik})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq k \leq n-i}$ se obtiene claramente que $\tilde{i}$ es inyectivo y por lo tanto un R-isomorfismo.

Se sigue de (1.3.4) que si $\alpha : R \to S$ es un morfismo de anillos $(n-1)$-binomiales que son dominios de ideales principales entonces $\mathrm{U}_n(S)$ es la S-completación de Mal'cev de $\mathrm{U}_n(R)$.

Ejemplo 1.3.9. El anillo de enteros profinitos $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ es c-binomial para todo $c \in \mathbb{N}$ pues $\mathbb{Z}$ es denso en $\hat{\mathbb{Z}}$ y $\binom{r}{c}$ es una función continua en r. Si G es un grupo profinito nilpotente de clase c y $x \in G$, el mapa $\mathbb{Z} \to G$ dado por $r \mapsto x^r$ se extiende, por propiedad universal de la completación profinita, a un morfismo continuo $\hat{\mathbb{Z}} \to G$. Esto nos permite definir x^r para todo $r \in \hat{\mathbb{Z}}$ y resulta así que G es un grupo nilpotente $\hat{\mathbb{Z}}$-potenciado. En efecto, la fórmula de Hall-Petresco (1.2.2, (iii)) vale para todo $r \in \mathbb{Z}$ pues G es nilpotente de clase c, luego también vale para todo $r \in \hat{\mathbb{Z}}$ por continuidad.

Sea N es un τ-grupo con base de Mal'cev $(x_1, \dots, x_h)$ y pongamos $N_i = \langle x_i, \dots, x_h \rangle$. Sea $\hat{N}$ la completación profinita de N y sea $\bar{N}_i$ la clausura de N_i en $\hat{N}$. De la teoría de grupos profinitos, se sigue que $\bar{N}_i$ es un subgrupo normal de $\hat{N}$ tal que $\bar{N}_i / \bar{N}_{i+1} \cong \hat{\mathbb{Z}}$, el cual está generado topológicamente por $x_i \bar{N}_{i+1}$. Resulta entonces que $(x_1, \dots, x_h)$ es una $\hat{\mathbb{Z}}$-base de Mal'cev para $\hat{N}$. Ahora la propiedad universal de $N \otimes \hat{\mathbb{Z}}$ permite extender la inclusión $N \to \hat{N}$ a todo $N \otimes \hat{\mathbb{Z}}$. La descripción de $N \otimes \hat{\mathbb{Z}} \cong N^{\hat{\mathbb{Z}}}$ en (1.3.5) muestra que esta extensión es un isomorfismo de grupos nilpotentes $\hat{\mathbb{Z}}$-potenciados.

Ejemplo 1.3.10. Para un primo p, el anillo de enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_k \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ es c-binomial para todo $c \in \mathbb{N}$ pues $\mathbb{Z}$ es denso en él. Con exactamente el mismo razonamiento de (1.3.9) se prueba que si N es un τ-grupo, la completación pro-p $\hat{N}_p$ de N es un grupo nilpotente $\mathbb{Z}_p$-potenciado que es isomorfo a $N \otimes \mathbb{Z}_p$.

1.4 Extensiones de grupos

1.4.1. Una *extensión de grupos* es una sucesión exacta de grupos no necesariamente conmutativos $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$, es decir, ι es un morfismo inyectivo, π es un morfismo suryectivo y $\iota(N) = \ker \pi$. También se dice que $\mathfrak{S}$ es una extensión de F por N y cuando los mapas ι y π sean evidentes haremos abuso del lenguaje y diremos que G es una extensión de F por N. Un *morfismo de extensiones* de la extensión $1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ en la extensión $1 \to N' \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} F' \to 1$ es una terna (u, v, w) de morfismos $N \xrightarrow{u} N'$, $G \xrightarrow{v} G'$ y $F \xrightarrow{w} F'$ tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "u"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "v"] & F \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 1 \\
1 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\iota'"] & G' \arrow[r, "\pi'"] & F' \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}$$

es conmutativo. Un morfismo de la forma $(\mathrm{id}_N, v, \mathrm{id}_F) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}'$ es necesariamente un isomorfismo y será llamado una equivalencia de extensiones de F por N, y las extensiones $\mathfrak{S}$ y $\mathfrak{S}'$ de F por N serán llamadas equivalentes. Las clases de equivalencias de extensiones de F por N forman un conjunto que será denotado $\mathrm{Coext}(F.N)$. En efecto, veremos en (1.4.6) que toda clase de equivalencia contiene una extensión cuyo término central es un grupo con conjunto subyacente $N \times F$.

1.4.2. Toda extensión $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ determina una acción $\mu : G \to \mathrm{Aut}(N)$ dada por conjugación: $\iota(\mu(g)(x)) = g\iota(x)g^{-1}$. Este morfismo mapea $\iota(N)$ sobre $\mathrm{Inn}(N)$, el grupo de los automorfismos interiores de N, y por lo tanto induce un morfismo $\varphi : F \to \mathrm{Out}(N) = \mathrm{Aut}(N)/\mathrm{Inn}(N)$, al cual se lo denomina *kernel de la extensión*. En general cualquier morfismo de F en $\mathrm{Out}(N)$ se denomina un *kernel abstracto*.

Notar que dos extensiones equivalentes de F por N poseen el mismo kernel. Dado un kernel abstracto $\varphi : F \to \mathrm{Out}(N)$, al conjunto de todas las clases de equivalencias de extensiones de F por N con kernel φ se lo denota $\mathrm{Coext}_\varphi(F, N)$.

1.4.3. Sea $\varphi : F \to \mathrm{Out}(F)$ un kernel abstracto. Como $\mathrm{Aut}(N)$ deja invariante al centro $Z(N)$ de N y $\mathrm{Inn}(N)$ actúa trivialmente allí, $\mathrm{Out}(N)$ actúa en $Z(N)$. Pre-componiendo esta acción con φ obtenemos una acción de F en $Z(N)$ que hace de este último un F-módulo. Si además existe una extensión de F por N con kernel φ, entonces existe una biyección entre $\mathrm{Coext}_\varphi(F, N)$ y $H^2(F, Z(N))$ [McL75, Theorem 8.8, Chap. IV].

1.4.4. Dada una extensión $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$, a una función (no necesariamente un morfismo) $s :\to G$ tal que $s(1) = 1$ y $\pi(s(f)) = f$ para todo $f \in F$ la llamamos una *sección normalizada de* $\mathfrak{S}$. Para una tal sección normalizada podemos definir dos mapas $\phi : F \to Aut(N)$ y $\psi : F \times F \to N$ de modo que $\iota(\phi(f)(x)) = s(f)\iota(x)s(f)^{-1}$ y $s(f)s(f') = \psi(f, f')s(ff')$ para todo $x \in N$ y $f, f' \in F$. Notar que ϕ es un levantamiento del kernel de $\mathfrak{S}$ y que todo elemento de G se escribe de manera única en la forma $\iota(n)s(f)$ con $n \in N$ y $f \in F$. La multiplicación en G en términos de estos mapas viene dada por $\iota(n)s(f)\iota(n')s(f') = \iota(n)\phi(f)(n')\psi(f, f')s(ff')$.

Al par (ϕ, ψ) lo llamaremos *el cociclo asociado a* $(\mathfrak{S}, s)$. Se verifican las siguientes propiedades

(i) $\psi(f, 1) = \psi(1, f) = 1$ para $f \in F$;

(ii) $\phi(f)\phi(f') = \mu_{\psi(f,f')}\phi(ff')$ para $f, f' \in F$ (para $x \in N$, $\mu_x \in \mathrm{Aut}(N)$ es el mapa $y \mapsto xyx^{-1}$);

(iii) $\psi(f, f')\psi(ff', f'') = \phi(f)(\psi(f', f''))\psi(f, f'f'')$ para $f, f', f'' \in F$.

En efecto (i) y (iii) salen de escribir la propiedad del elemento neutro y la asociatividad en G cuando expresamos sus elementos en la forma $\iota(n)s(f)$, mientras que (ii) es inmediata de la definición.

1.4.5. Recíprocamente, dado un par de mapas $\phi : F \to \mathrm{Aut}(N)$ y $\psi : F \times F \to N$ que satisfacen las condiciones (i), (ii) y (iii) establecidas anteriormente, se obtiene una extension $\mathfrak{S}_{\phi,\psi} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} N \times_{\phi,\psi} F \xrightarrow{\pi} F \to 1$, donde $N \times_{\phi,\psi} F$ es el grupo con conjunto subyacente $N \times F$ y con multiplicación $(n, f) * (n', f') = (n\phi(f)(n')\psi(f, f'), ff')$, ι es el mapa $\iota(n) = (n, 1)$ y π es el mapa $\pi(n, f) = f$. Resulta que (ϕ, ψ) es el cociclo asociado a $(\mathfrak{S}_{\phi,\psi}, s)$, donde $s(f) = (1, f)$ para $f \in F$.

1.4.6. Notar que si (ϕ, ψ) es el cociclo asociado a una extensión $1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ y a una sección normalizada $s : F \to G$, entonces el mapa $\iota(n)s(f) \mapsto (n, f)$ de G en $N \times_{\phi,\psi} F$ define una equivalencia de extensiones de F por N.

1.5 Grupos virtualmente nilpotentes R-potenciados

1.5.1. Sea R un anillo c-binomial. Un *grupo virtualmente nilpotente R-potenciado* es una extensión de grupos $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ donde N es un grupo nilpotente R-potenciado, F un grupo finito y el morfismo $\mu : G \to \mathrm{Aut}(N)$ tiene imagen contenida en $\mathrm{Aut}_R(N)$, es decir, G actúa en N por R-automorfismos. Como $\mathrm{Inn}(N)$ actúa en N por R-automorfismos entonces $\mathrm{Out}_R(N) = \mathrm{Aut}_R(N)/\mathrm{Inn}(N)$ es un subgrupo de $\mathrm{Out}(N)$; por lo tanto, decir que G actúa en N por R-automorfismos equivale a decir que el kernel de $\mathfrak{S}$ tiene imagen contenida en $\mathrm{Out}_R(N)$. En consecuencia, si $\mathfrak{S}$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado entonces cualquier extensión de F por N equivalente a $\mathfrak{S}$ es también un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado (1.4.2). Cuando R sea un dominio de ideales principales y N un τ_R-grupo diremos simplemente que $\mathfrak{S}$ es un grupo virtualmente τ_R-grupo.

Un morfismo de extensiones $(u, v, w) : \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_2$ entre grupos virtualmente nilpotentes R-potenciados se dice un R-morfismo si u es un R-morfismo de grupos nilpotentes R-potenciados. Se obtiene así la categoría de grupos virtualmente nilpotentes R-potenciados.

1.5.2. Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Todo grupo virtualmente nilpotente S-potenciado y todo S-morfismo entre grupos virtualmente nilpotentes S-potenciados pueden considerarse respectivamente un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado y un R-morfismo entre grupos virtualmente nilpotente R-potenciados. Obtenemos así un functor covariante $\mathfrak{S} \mapsto \mathfrak{S}_{[\alpha]}$ de la categoría de grupos virtualmente nilpotentes S-potenciados en la categoría de grupos virtualmente nilpotentes R-potenciados al cual llamaremos el *funtor de restricción de escalares.*

Si $\mathfrak{S}$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado y $\mathfrak{T}$ es un grupo virtualmente nilpotente S-potenciado, un R-morfismo de $\mathfrak{S}$ en $\mathfrak{T}_{[\alpha]}$ se denomina un *α-morfismo.*

Proposición 1.5.3. *Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Si $\mathfrak{S}$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado, existe un grupo virtualmente nilpotente S-potenciado $\mathfrak{S} \otimes_R S$ y un α-morfismo $(i, j, k) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{S} \otimes_R S$ con la siguiente propiedad universal: para todo grupo virtualmente nilpotente S-potenciado $\mathfrak{T}$ y para todo α-morfismo $(\alpha, \beta, \gamma) : \mathfrak{S} \to \mathfrak{T}$, existe un único S-morfismo $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) : \mathfrak{S} \otimes_R S \to \mathfrak{T}$ tal que $(\tilde{\alpha} \circ i, \tilde{\beta} \circ j, \tilde{\gamma} \circ k) = (\alpha, \beta, \gamma)$.*

Demostración. Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ y fijemos una sección normalizada $s : F \to G$ de $\mathfrak{G}$ con cociclo asociado (ϕ, ψ). Consideremos la S-completación de Mal'cev $i : N \to N \otimes_R S$ de N. Sean $\tilde{\phi}$ y $\tilde{\psi}$ definidos por $\tilde{\phi}(f) = \phi(f) \otimes_R S$ $(f \in F)$ y $\tilde{\psi} = i \circ \psi$ (1.3.3). EL hecho de que el par $(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})$ satisface también las condiciones (i), (ii) y (iii) de (1.4.4) se sigue inmediatamente de la propiedad funtorial de la S-completación de Mal'cev. Por (1.4.5), obtenemos una extensión $\mathfrak{G} \otimes_R S : 1 \to (N \otimes_R S) \to (N \otimes_R S) \times_{(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})} F \to F \to 1$ que es un grupo virtualmente nilpotente S-potenciado pues su kernel abstracto tiene como levantamiento a $\tilde{\phi} : N \to \mathrm{Aut}_R(N \otimes_R S)$ (1.4.5). Poniendo $j(\iota(n)s(f)) = (i(n), f)$ y $k = \mathrm{id}_F$, se puede ver fácilmente que $(i, j, k) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G} \otimes_R S$ es un α-morfismo.

Veamos ahora que $(i, j, k) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{G} \otimes_R S$ satisface la propiedad universal enunciada. Sea $\mathfrak{T} : 1 \to M \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{T}}} H \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{T}}} K \to 1$ un grupo virtualmente nilpotente S-potenciado y sea $(\alpha, \beta, \gamma) : \mathfrak{G} \to \mathfrak{T}$ un α-morfismo. Por la priopiedad universal de $N \otimes_R S$, existe un único S-morfismo $\tilde{\alpha} : N \otimes_R S \to M$ tal que $\tilde{\alpha} \circ i = \alpha$. Como $k = \mathrm{id}_F$, la única opción posible para $\tilde{\gamma}$ es $\tilde{\gamma} = \gamma$. Por último, si queremos definir $\tilde{\beta}$ de modo que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ sea un morfismo entonces deberíamos tener $\tilde{\beta}(n, 1) = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n))$; si además queremos que $\tilde{\beta} \circ j = \beta$ entonces deberíamos tener $\tilde{\beta}(1, f) = \tilde{\beta}(j(s(f))) = \beta(s(f))$. Como en $(N \otimes_R S) \times_{(\tilde{\phi}, \tilde{\psi})} F$ se tiene $(n, f) = (n, 1)(1, f)$, resulta entonces que la única definición posible para $\tilde{\beta}$ es $\tilde{\beta}(n, f) = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n))\beta(s(f))$. Notar que esta definición de $\tilde{\beta}$ satisface $\pi_{\mathfrak{T}}(\tilde{\beta}(n, f)) = f$; por lo tanto, si probamos que $\tilde{\beta}$ es un morfismo de grupos entonces se siguirá que $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma})$ es un S-morfismo. Luego sólo resta probar que $\tilde{\beta}$ es un morfismo.

Por un lado tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}((n, f) \cdot (n', f')) &= \tilde{\beta}((n\tilde{\phi}(f)(n')\tilde{\psi}(f, f'), ff') = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n\tilde{\phi}(f)(n')\tilde{\psi}(f, f')))\beta(s(ff')) \\ &= \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n)\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(f)(n'))\tilde{\alpha}(\tilde{\psi}(f, f')))\beta(s(ff')).\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\tilde{\beta}(n, f)\tilde{\beta}(n', f') = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n))\beta(s(f))\iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n'))\beta(s(f')) = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n)\mu_{\beta(s(f))}(\tilde{\alpha}(n')))\beta(s(f))\beta(s(f'))$$

donde $\mu_{\beta(s(f))} \in \mathrm{Aut}_S(M)$ es el automorfismo tal que $\iota_{\mathfrak{T}}(\mu_{\beta(s(f))}(m)) = \beta(s(f))\iota_{\mathfrak{T}}(m)(\beta(s(f)))^{-1}$; como $\beta(s(f))\beta(s(f')) = \beta(s(f)s(f')) = \beta(\iota(\psi(f, f'))s(ff')) = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(i(\psi(f, f'))))\beta(s(ff'))$, nuestra expresión anterior se convierte en $\iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(n)\mu_{\beta(s(f))}(\tilde{\alpha}(n'))\tilde{\alpha}(\tilde{\psi}(f, f')))\beta(s(ff'))$.

Comparando las expresiones para $\tilde{\beta}((n, f) \cdot (n', f'))$ y $\tilde{\beta}(n, f)\tilde{\beta}(n', f')$ a las cuales hemos arribado, vemos que sólo necesitamos probar que los morfismos $\iota_{\mathfrak{T}} \circ \tilde{\alpha} \circ \tilde{\phi}(f)$ y $\iota_{\mathfrak{T}} \circ \mu_{\beta(s(f))} \circ \tilde{\alpha}$ de $N \otimes_R S$ a $\iota_{\mathfrak{T}}(M)$ son iguales. Como ellos son claramente S-morfismos, es suficiente probar que ambos son extensiones a $N \otimes_R S$ del R-morfismo $N \to \iota_{\mathfrak{R}}(M)$ dado por $n \mapsto \beta(s(f)\iota(n)s(f)^{-1})$. Para el primer mapa tenemos

$$\iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(\tilde{\phi}(f)(i(n)))) = \iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(i(\phi(f)(n)))) = \iota_{\mathfrak{T}}(\alpha(\phi(f)(n))) = \beta(\iota(\phi(f)(n))) = \beta(s(f)\iota(n)s(f)^{-1}).$$

Para el segundo mapa tenemos

$$\begin{aligned}\iota_{\mathfrak{T}}(\mu_{\beta(s(f))}(\tilde{\alpha}(i(n)))) &= \beta(s(f))\iota_{\mathfrak{T}}(\tilde{\alpha}(i(n)))\beta(s(f)^{-1}) = \beta(s(f))\iota_{\mathfrak{T}}(\alpha(n))\beta(s(f)^{-1}) \\ &= \beta(s(f))\beta(\iota(n))\beta(s(f)^{-1}) = \beta(s(f)\iota_1(n)s(f)^{-1}),\end{aligned}$$

lo cual prueba nuestra afirmación. □

1.5.4. Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Si $\mathfrak{G}$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado, al par $(\mathfrak{G} \otimes_R S, (i, k, k))$ de la Proposición 1.5.3 (o cualquier equivalente a él) se lo denominará *la α-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$* o la *S-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$*. Como consecuencia de (1.5.3) se obtiene que la aplicación $\mathfrak{G} \mapsto \mathfrak{G} \otimes_R S$ define un funtor de la categoría de grupos virtualmente nilpotentes R-potenciados en la categoría de grupos virtualmente nilpotentes S-potenciados que es adjunto a izquierda al functor de restricción de escalares (1.5.2) . A este funtor lo llamaremos la *S-completación de Mal'cev.*

Proposición 1.5.5. *Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales. Sean $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado, $\mathfrak{T} : 1 \to N' \xrightarrow{\iota'} G' \xrightarrow{\pi'} F' \to 1$ un grupo virtualmente nilpotente S-potenciado y $(i', j', k') : \mathfrak{G} \to \mathfrak{T}$ un α-morfismo tal que (N', i') es la S-completación de Mal'cev de N y k' es un isomorfismo. Entonces $(\mathfrak{T}, (i', j', k'))$ es la S-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$.*

Demostración. Sea $(\tilde{i'}, \tilde{j'}, \tilde{k'}) : \mathfrak{G} \otimes_R S \to \mathfrak{T}$ el S-morfismo que extiende a (i', j', k'). Por unicidad (salvo isomorfismo) de la S-completación de Mal'cev de N resulta que $\tilde{i'}$ es un S-isomorfismo. Como $\tilde{k'}$ es también claramente un isomorfismo, resulta que $\tilde{j'}$ es un isomorfismo. □

1.5.6. Si $\beta : S \to T$ es otro morfismo de anillos c-binomiales y $\mathfrak{G}$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado, entonces (1.5.3) da un isomorfismo natural $(\mathfrak{G} \otimes_R S) \otimes_S T \cong \mathfrak{G} \otimes_R T$.

Ejemplo 1.5.7. Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo virtualmente τ-grupo. Podemos suponer que N es un subgrupo de G y que ι es la inclusión. Sea $\hat{G}$ la completación profinita de G. Entonces la clausura $\bar{N}$ de N en $\hat{G}$ se identifica con la completación profinita $\hat{N}$ de N y más aún $\hat{G}/\hat{N} \cong G/N$. Se obtiene así una extensión $\hat{\mathfrak{G}} : 1 \to \hat{N} \xrightarrow{\hat{\iota}} \hat{G} \xrightarrow{\hat{\pi}} F \to 1$ que resulta un grupo virtualmente nilpotente $\hat{\mathbb{Z}}$-potenciado por (1.3.9) y por el hecho de que todo automorfismo de N es continuo [NS07]. Más aún, si $i : N \to \hat{N}$ y $j : \to \hat{G}$ son las inclusiones naturales, entonces (i, j, id_F) es un morfismo de extensiones. Luego por (1.5.5) y (1.3.9) se obtiene que $(\hat{\mathfrak{G}}, (i, j, \mathrm{id}_F))$ es la $\hat{\mathbb{Z}}$-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$. A esta también la llamaremos *la completación profinita de* $\mathfrak{G}$.

Ahora $\hat{N}$ es el producto de sus pro-p subgrupos de Sylow $\hat{N}_p$, y cada $\hat{N}_p$ se identifica con la completación pro-p de N. Poniendo $T_p = \prod_{q \neq p} \hat{N}_q$, donde el producto se toma sobre todos los primos q que son distintos de p, entonces T_p es un subgrupo cerrado característico de $\hat{N}$ y $\hat{N}/T_p = \hat{N}_p$. Se obtiene una extensión $\hat{\mathfrak{G}}_p : 1 \to \hat{N}_p \to \hat{G}/T_p \to F \to 1$ que resulta un grupo virtualmente nilpotente $\mathbb{Z}_p$-potenciado por (1.3.9) y por el hecho de que todo automorfismo de $\hat{N}_p$ es continuo [DdSMS99, Corollary 1.21]. Si $u : \hat{N} \to \hat{N}/T_p = \hat{N}_p$ y $v : \hat{G} \to \hat{G}/T_p$ son las proyecciones naturales, entonces $(u, v, \mathrm{id}_F) : \hat{\mathfrak{G}} \to \hat{\mathfrak{G}}_p$ es claramente un morfismo, y como $u \circ i : N \to \hat{N}_p$ es la $\mathbb{Z}_p$-completación de Mal'cev de N (1.3.10), concluimos por (1.5.5) que $(\hat{\mathfrak{G}}_p, (u \circ i, v \circ j, \mathrm{id}_F))$ es la $\mathbb{Z}_p$-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$. A esta también la llamaremos *la completación pro-p de* $\mathfrak{G}$.

1.5.8. Diremos que una extensión $1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es *escindida* si existe un morfismo $\sigma : F \to G$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_F$.

Lema 1.5.9. *Sea F un grupo finito de orden r y sea M un F-módulo donde la multiplicación por r es inyectiva. Entonces $H^i(F, M) = 0$ para todo $i \geq 1$.*

Demostración. Por [McL75, Proposition 5.3, Chap. IV], si $x \in H^i(F, M)$ $(i \geq 1)$ entonces $rx = 0$, y como por hipótesis $x \mapsto rx$ es inyectiva, se obtiene $x = 0$. □

La siguiente proposición es sólo una adaptación de [Dek96, Lemma 3.1.12]

Proposición 1.5.10. *Sean R un anillo c-binomial, N un grupo nilpotente R-potenciado y F un grupo finito tal que $r = |F| \in R^*$. Entonces*

(i) Todo kernel abstracto $\varphi : F \to \mathrm{Out}_R(N)$ se levanta a un morfismo $\phi : F \to \mathrm{Aut}_R(N)$.

(ii) Toda extensión de F por N que es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado es escindida.

Demostración. La prueba es por inducción en la clase de nilpotencia de N. Si N es abeliano (i) es trivial pues $\mathrm{Out}_R(N) = \mathrm{Aut}_R(N)$ y (ii) se sigue de (1.5.9) y (1.4.3) pues al ser r una unidad de R la mulitplicación por r es un automorfismo de N. Supongamos que N no es abeliano y sea $\Phi(F)$ la pre-imagen de $\varphi(F)$ por la proyección $\mathrm{Aut}_R(N) \to \mathrm{Out}_R(N)$, obteniéndose así una extensión $1 \to \mathrm{Inn}(N) \to \Phi(F) \to \varphi(F) \to 1$. Notar que el morfismo $\mu : N \to \mathrm{Inn}(N)$, dado por conjugación, induce un isomorfismo $N/Z(N) \cong \mathrm{Inn}(N)$ y que la acción por conjugación de $\Phi(F)$ sobre $N/Z(N)$ inducida por esta identificación no es otra que la restricción de la acciíon natural de $\mathrm{Aut}_R(N)$ sobre $N/Z(N)$, es decir $\sigma(xZ(N)) = \sigma(x)Z(N)$. Obtenemos así un grupo virtualmente nilpotante R-potenciado $1 \to N/Z(N) \to \Phi(F) \to \varphi(F) \to 1$, por lo tanto, su kernel es un morfismo $\varphi' : \varphi(F) \to \mathrm{Out}_R(N/Z(N))$. Como la clase de $N/Z(N)$ es menor que la de N, por hipótesis inductiva la extensión $1 \to N/Z(N) \to \Phi(F) \to \varphi(F) \to 1$ es escindida y, por lo tanto, existe un morfismo sección $\phi' : \varphi(F) \to \Phi(F)$. Tomando $\phi = \phi' \circ \varphi$ resulta claro que ϕ levanta a φ. Finalmente, si $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado con kernel $\varphi : F \to \mathrm{Out}_R(N)$ y $\phi : F \to \mathrm{Aut}_R(N)$ es un morfismo que levanta a φ, entonces $\mathfrak{S}_\phi : 1 \to N \to N \rtimes_\phi F \to F \to 1$ también tiene kernel φ. Como por (1.5.9) se tiene $H^2(F, Z(M)) = 0$, se sigue de (1.4.3) que $\mathfrak{S}$ es equivalente a $\mathfrak{S}_\phi$, es decir, $\mathfrak{S}$ es escindida. $\square$

Ejemplo 1.5.11. (i) Si K es un cuerpo de característica cero, todo grupo virtualmente nilpotente K-potenciado es una extensión escindida.

(ii) Si $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo virtualmente τ-grupo, entonces para todos salvo una cantidad finita de primos p, la $\mathbb{Z}_p$-completación de Mal'cev $\hat{\mathfrak{S}}_p$ de $\mathfrak{S}$ es escindida. En efecto, $|F|$ es una unidad en $\mathbb{Z}_p$ cuando p no divide a $|F|$.

(iii) Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos c-binomiales y sea $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo virtualmente nilpotente R-potenciado. Si $\mathfrak{S}$ es escindida entonces también lo es $\mathfrak{S} \otimes_R S$. En efecto, si $G \cong N \rtimes_\phi F$ para un morfismo $\phi : F \to \mathrm{Aut}_R(N)$ y $\tilde{\phi}$ es la composición $F \xrightarrow{\phi} \mathrm{Aut}_R(N) \xrightarrow{-\otimes_R S} \mathrm{Aut}_S(N)$, entonces usando (1.5.5) se verifica fácilmente que $(N \otimes_R S) \rtimes_{\tilde{\phi}} F$ es la S-completación de Mal'cev de $\mathfrak{S}$.

Teorema 1.5.12. *Sea K un cuerpo de característica cero. Si $\mathfrak{S}_1$ y $\mathfrak{S}_2$ son dos grupos virtualmente τ_K-grupos y si existe una extensión de cuerpos $K \hookrightarrow \tilde{K}$ tal que $\mathfrak{S}_1 \otimes_K \tilde{K}$ y $\mathfrak{S}_2 \otimes_K \tilde{K}$ son $\tilde{K}$-isomorfos, entonces existe una extensión finita de cuerpos $K \hookrightarrow k$ tal que $\mathfrak{S}_2 \otimes_K k$ y $\mathfrak{S}_2 \otimes_K k$ son k-isomorfos.*

Demostración. Por (1.5.11, (i)), tales extensiones son escindidas y, por lo tanto, podemos tomarlas de la forma $\mathfrak{S}_i : 1 \to N_i \to N_i \rtimes_{\phi_i} F_i \to F_i \to 1$ para un morfismo $\phi_i : F \to \mathrm{Aut}_K(N_i)$ $(i = 1, 2)$. Vimos en (1.5.11, (iii)) que para una extensión k de K se tiene $\mathfrak{S}_i \otimes_K k : 1 \to N_i \otimes_K k \to (N_i \otimes_K k) \rtimes_{\phi_i} F_i \to F_i \to 1$, donde haciendo abuso de la notación denotamos también por ϕ_i a la composición $F_i \xrightarrow{\phi_i} \mathrm{Aut}_K(N_i) \to \mathrm{Aut}_k(N \otimes_K k)$.

Fijemos un $\tilde{K}$-isomorfismo $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) : \mathfrak{S}_1 \otimes_K \tilde{K} \to \mathfrak{S} \otimes_K \tilde{K}$. Para una extensión k de K y un k-isomorfismo (α, β, γ) de $\mathfrak{S}_1 \otimes_K k \to \mathfrak{S}_2 \otimes_K k$, se puede ver fácilmente que $\beta : (N_1 \otimes_K k) \rtimes_{\phi_1} F_1 \to (N_2 \otimes_K k) \rtimes_{\phi_2} F_2$ es de la forma $\beta(x, f) = (\alpha(x)s(f), \gamma(f))$ para una función $s : F_1 \to N_2 \otimes_K k$. La propiedad de que (α, β, γ) es un isomorismo se traduce en términos de esta función s diciendo que α es un k-isomorfismo, que $\gamma : F_1 \to F_2$ es un isomorfismo y que $s : F_1 \to N_2 \otimes_K k$ satisface la siguiente propiedad:

$$\alpha(\phi_1(f)(x))s(ff') = s(f)\phi_2(\gamma(f))(\alpha(x)s(f')) \text{ para } f, f' \in F_1, x \in N_1. \qquad (*)$$

En efecto, esto sale de escribir la condición para que la función $(x, f) \mapsto (\alpha(x)s(f), \gamma(f))$ sea un morfismo (en cuyo caso será un isomorfismo pues α y γ lo son).

Fijaremos $\gamma = \tilde{\gamma}$. Nuestro objetivo es encontrar una extensión finita k de K de modo que existan un k-isomorfismo $\alpha : N_1 \otimes_K k \to N_2 \otimes_K k$ y una función $s : F_1 \to N_2$ que satisfaga la condición (*).

Fijemos K-bases de Mal'cev $(x_1, \dots, x_h)$ y $(y_1, \dots, y_h)$ para N_1 y N_2 respectivamente y usemos la descripción N_i^k de $N_i \otimes_K k$ dada en (1.3.5). Un k-morfismo $\alpha : N_1^k \to N_2^k$ queda completamente determinado por la matriz $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in k^{h\times h}$ tal que $\alpha(x_i) = y_1^{a_{i1}} \dots y_h^{a_{ih}}$. Recíprocamente, una tal matriz define una función $\alpha_\mathbf{a} : N_1^k \to N_2^k$ dada por $\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}) = (\mathbf{y}^{\mathbf{a}_1})^{r_1} \dots (\mathbf{y}^{\mathbf{a}_h})^{r_1}$ (aquí $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h$ denotan las filas de $\mathbf{a}$). Por (1.2.10) existen polinomios $p_1, \dots, p_h \in K[(X_{ij})_{1\le i,j\le h}, Z_1, \dots, Z_h]$ tales que para toda matriz $\mathbf{a} \in k^{h\times h}$ y para todo $\mathbf{r} \in K^h$ se tiene $\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}) = y_1^{p_1(\mathbf{a},\mathbf{r})} \dots y_h^{p_h(\mathbf{a},\mathbf{r})}$. De manera análoga una matriz $\mathbf{b} \in k^{h\times h}$ define una función $\delta_\mathbf{b} : N_2^k \to N_1^k$ tal que $\delta(\mathbf{y}^\mathbf{r}) = (x_1^{\mathbf{b}_1})^{r_1} \dots (x_h^{\mathbf{b}_h})^{r_h}$ y existen polinomios $q_1, \dots, q_h \in K[(X_{ij})_{1\le i,j\le h}, Z_1, \dots, Z_h]$ tales que para todo $\mathbf{b} \in k^{h\times h}$ y $\mathbf{r} \in k^h$ tenemos $\delta_\mathbf{b}(\mathbf{y}^\mathbf{r}) = x_1^{q_1(\mathbf{b},\mathbf{r})} \dots x_h^{q_h(\mathbf{b},\mathbf{r})}$. Decir que $\mathbf{a} \in k^{h\times h}$ define un isomorfismo $\alpha_\mathbf{a}$ significa que la función $\alpha_\mathbf{a}$ es un k-morfismo y que existe una matriz $\mathbf{b} \in k^{h\times h}$ tal que $\delta_\mathbf{b} \circ \alpha_\mathbf{a} = \mathrm{id}_{N_1^k}$ y $\alpha_\mathbf{a} \circ \delta_\mathbf{b} = \mathrm{id}_{N_2^k}$. A continuación vamos a traducir estas condiciones con condiciones polinómicas.

Sean $\mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = (p_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \dots, p_h(\mathbf{T}, \mathbf{Z}))$ y $\mathbf{q}(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = (q_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \dots, q_h(\mathbf{T}, \mathbf{Z}))$. Denotaremos por $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ (resp. $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{g}}$) a las colecciones de polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en N_1 (resp. N_2) con respecto de la base $(x_1, \dots, x_h)$ (resp. $(y_1, \dots, y_h)$).

El mapa $\alpha_\mathbf{a}$ es un k-morfismo si y sólo si $\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}\mathbf{x}^{\mathbf{r}'}) = \alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r})\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^{\mathbf{r}'})$ y $\alpha_\mathbf{a}((\mathbf{x}^\mathbf{r})^u) = (\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}))^u$ para todos $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in k^h$ y $u \in k$. Por un lado, $\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}\mathbf{x}^{\mathbf{r}'}) = \alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^{\mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}')}) = \mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{f}(\mathbf{r},\mathbf{r}'))}$ y $\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r})\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^{\mathbf{r}'}) = \mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r})}\mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}')} = \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}'))}$. Por otro lado, $\alpha_\mathbf{a}((\mathbf{x}^\mathbf{r})^u) = \alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{r},u)}) = \mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{g}(\mathbf{r},u))}$ y $(\alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}))^u = (\mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r})})^u = \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),u)}$. Luego $\mathbf{a}$ define un k-morfismo si y sólo si $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), \mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{r}')) = \mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ y $\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, u)) = \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{r}), u)$ para todos $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in k^h$ y $u \in k$ (como estas son identidades polinómicas con coeficientes en K sólo basta verificarlas para $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in K^h$ y $u \in K$). Sea $\mathfrak{I}$ el ideal de $K[(T_{ij})_{1\le i,j\le h}]$ generado por los polinomios que son entradas de las h-uplas de los polinomios $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{r}), \mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{r}')) - \mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))$ y $\mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{g}(\mathbf{r}, u)) - \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{r}), u)$ con $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in K^h$ y $u \in K$. Se concluye entonces que $\alpha_\mathbf{a}$ es un k-morfismo de N_1^k en N_2^k si y sólo si $\mathbf{a}$ es un cero de $\mathfrak{I}$.

Para dos matrices $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in k^{h\times h}$ tenemos $\delta_\mathbf{b} \circ \alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^\mathbf{r}) = \delta_\mathbf{b}(\mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r})}) = \mathbf{x}^{\mathbf{q}(\mathbf{b},\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}))}$ y $\alpha_\mathbf{a} \circ \delta_\mathbf{b}(\mathbf{y}^\mathbf{r}) = \alpha_\mathbf{a}(\mathbf{x}^{\mathbf{q}(\mathbf{b},\mathbf{r})}) = \mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{q}(\mathbf{b},\mathbf{r}))}$. Luego $\delta_\mathbf{b}$ es una inversa de $\alpha_\mathbf{a}$ si y sólo si $\mathbf{q}(\mathbf{b}, \mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{r})) = \mathbf{r}$ y $\mathbf{p}(\mathbf{a}, \mathbf{q}(\mathbf{b}, \mathbf{r})) = \mathbf{r}$ para todo $\mathbf{r} \in k^h$. Como estas identidades son polinomiales con coeficientes en K basta verfificarlas para $\mathbf{r} \in K^h$ Sea $\mathfrak{I}'$ el ideal de $K[(T_{ij})_{1\le i,j\le h}, (U_{ij})_{1\le i,j\le h}]$ generado por los polinomios del ideal $\mathfrak{I}$ y las entradas de las h-uplas de los polinomios $\mathbf{q}(\mathbf{U}, \mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{r})) - \mathbf{r}$ y $\mathbf{p}(\mathbf{T}, \mathbf{q}(\mathbf{U}, \mathbf{r})) - \mathbf{r}$ para $\mathbf{r} \in K^h$. Concluímos que $\alpha_\mathbf{a}$ es un k-isomorfismo si y sólo si existe existe una matriz $\mathbf{b} \in k^{h\times h}$ tal que $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ es un cero de $\mathfrak{I}'$.

Una función $s : F_1 \to N_2^k$ está dada por una colección de h-uplas $\mathbf{v} = (\mathbf{v}^f) \in \prod_{f\in F_1} k^h$ de modo que $s(f) = s_v(f) = \mathbf{y}^{\mathbf{v}^f}$. Por (1.2.10) existen h-uplas de polinomios $\mathbf{p}^f(\mathbf{X})$ $(f \in F_1)$ y $\tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{f}}(\mathbf{Y})$

($\tilde{f} \in F_2$) tales que $\phi_1(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{p}^f(\mathbf{r})}$ y $\phi_2(\tilde{f})(\mathbf{y}^{\mathbf{r}}) = \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{p}}^{\tilde{f}}(\mathbf{r})}$ para todo $\mathbf{r} \in k^h$. Sea $\mathbf{a} = (a_{ij}) \in k^{h\times h}$. El lado izquierdo de (*) para $\alpha_{\mathbf{a}}$ y $s_{\mathbf{v}}$ resulta

$$\alpha_{\mathbf{a}}(\phi_1(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}}))s_{\mathbf{v}}(ff') = \alpha(\mathbf{x}^{\mathbf{p}^f(\mathbf{r})})\mathbf{y}^{\mathbf{v}^{ff'}} = \mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{p}^f(\mathbf{r}))}\mathbf{y}^{\mathbf{v}^{ff'}} = \mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{p}^f(\mathbf{r})),\mathbf{v}^{ff'})};$$

mientras que el lado derecho de (*) resulta

$$\begin{aligned} s_{\mathbf{v}}(f)\phi_2(\gamma(f))(\alpha_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}^r)s_{\mathbf{v}}(f')) &= \mathbf{y}^{\mathbf{v}^f}\phi_2(\gamma(f))(\mathbf{y}^{\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r})}\mathbf{y}^{\mathbf{v}^{f'}}) = \mathbf{y}^{\mathbf{v}^f}\phi_2(\gamma(f))(\mathbf{y}^{\tilde{f}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),\mathbf{v}^{f'})}) \\ &= \mathbf{y}^{\mathbf{v}^f}\mathbf{y}^{\tilde{\mathbf{p}}^{\gamma(f)}(\tilde{f}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),\mathbf{v}^{f'}))} = \mathbf{y}^{\tilde{f}(\mathbf{v}^f,\tilde{\mathbf{p}}^{\gamma(f)}(\tilde{f}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),\mathbf{v}^{f'})))}. \end{aligned}$$

Se verifica (*) para $\alpha_{\mathbf{a}}$ y $s_{\mathbf{v}}$ si y sólo si $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{p}^f(\mathbf{r})),\mathbf{v}^{ff'}) = \tilde{f}(\mathbf{v}^f,\tilde{\mathbf{p}}^{\gamma(f)}(\tilde{f}(\mathbf{p}(\mathbf{a},\mathbf{r}),\mathbf{v}^{f'})))$ para todos $f, f' \in F_1$ y $\mathbf{r} \in k^h$. Como estas son identidades polinómicas con coeficientes en K, basta verificarlas sólo para $\mathbf{r} \in K^h$. Sea $\mathfrak{I}''$ el ideal de $K[(T_{ij})_{1\leq i,j\leq h}, (V_i^f)_{1\leq i\leq h,\ f\in F}]$ generado por las entradas de las h-uplas de los polinomios $\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{p}(\mathbf{T},\mathbf{p}^f(\mathbf{r})),\mathbf{V}^{ff'}) - \tilde{f}(\mathbf{V}^f,\tilde{\mathbf{p}}^{\gamma(f)}(\tilde{f}(\mathbf{p}(\mathbf{T},\mathbf{r}),\mathbf{V}^{f'})))$ para $f, f' \in F$ y $\mathbf{r} \in K^h$. Finalmente denotemos por $\mathfrak{I}'''$ al ideal de $K[(T_{ij})_{1\leq i,j\leq h}, (U_{ij})_{1\leq i,j\leq h}, (V_i^f)_{1\leq i\leq h,\ f\in F}]$ generado por los polinomios de $\mathfrak{I}'$ y de $\mathfrak{I}''$.

Concluímos que $\alpha_{\mathbf{a}}$ es un k-isomorfismo y que $\alpha_{\mathbf{a}}$ y $s_{\mathbf{v}}$ satisfacen (*) si y sólo si existe $\mathbf{b} \in k^{h\times h}$ tal que $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{v})$ es un cero del ideal $\mathfrak{I}'''$. Como una tal solución existe para $k = \tilde{K}$ (la obtenida a partir de $(\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma})$) entonces $\mathfrak{I}'''$ no puede ser todo B. Luego por el Teorema de los ceros de Hilbert (Hilbert's nullsellensatz), $\mathfrak{I}'''$ tiene una solución $((a_{ij}),(b_{ij}),v_i^f) \in \bar{K}^{h^2+h^2+h|F_1|}$, donde $\bar{K}$ es la clausura algebraica de K. Dada una tal solución, la demostración se completa tomando k el subcuerpo de $\bar{K}$ generado por las entradas de esta solución. □

Corolario 1.5.13. *Sea K es un cuerpo de característica cero y sean N_1 y N_2 dos τ_K-grupos. Si existe un cuerpo K' que contiene a K tal que $N_1 \otimes_K K'$ y $N_2 \otimes_K K'$ son K'-isomorfos, entonces existe una extensión finita k de K tal que $N_1 \otimes_K k$ y $N_2 \otimes_K k$ son k-isomorfos.*

1.6 Grupos algebraicos unipotentes

Para un anillo conmutativo (no nulo) R, el término R-álgebra siempre va a significar una R-álgebra conmutativa con unidad, a menos que se expecifica explícitamente lo contrario. El término R-álgebra de Lie va a significar un R-módulo con una forma R-lineal alternada que satisface la identidad de Jacobi. Una R-álgebra de Lie $(\mathfrak{n}, [\cdot,\cdot])$ se dice nilpotente si existe un entero positivo c tal que $[x_1,[x_2,[\ldots,[x_c,x_{c+1}]\ldots]]] = 0$ para todos $x_1,\ldots,x_c,x_{c+1} \in \mathfrak{n}$, y al menor de tales enteros c se lo llamaremos la clase de nilpotencia de $\mathfrak{n}$. Cuando no especifiquemos, la letra K siempre va a denotar un cuerpo de característica cero.

1.6.1. Para un cuerpo K, denotaremos por K-Alg a la categoría de K-álgebras. Denotamos también por Sets a la categoría de conjuntos, por Groups a la categoría de grupos y por F : Sets $\to$ Groups al funtor de olvido. Un *esquema de grupos afín sobre* K es un funtor covariante $\mathfrak{G} : K\text{-Alg} \to \text{Groups}$ tal que $F \circ \mathfrak{G}$ es representable, es decir, él es naturalmente isomorfo a un funtor de la forma $\mathrm{Hom}_{K\text{-Alg}}(A,-)$ para alguna K-álgebra A. Por el lema de Yoneda, la K-álgebra A está univocamente determinada (salvo isomorfismo) por $\mathfrak{G}$, ella se denota por $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ y se llama el anillo coordenado de $\mathfrak{G}$. Un *morfismo* $\varphi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ entre esquemas de grupos afines sobre K es simplemente una transformación natural, es decir, una colección de morfismos de grupos $\varphi_R : \mathfrak{G}_1(R) \to \mathfrak{G}_2(R)$ tal que para todo morfismo de K-álgebras $\alpha : R \to S$ se tiene

$\varphi_S \circ \mathfrak{G}_1(\alpha) = \mathfrak{G}_2(\alpha) \circ \varphi_R$. Por aplicación del lema de Yoneda, todo morfismo $\varphi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ de esquemas de grupos afines induce un morfismo de K-álgebras $\mathcal{O}(\varphi) : \mathcal{O}(\mathfrak{G}_2) \to \mathcal{O}(\mathfrak{G}_1)$. Un *subgrupo afín* de un esquema de grupos afín $\mathfrak{G}$ sobre K es un subfuntor $\mathfrak{H}$ de $\mathfrak{G}$ tal que $F \circ \mathfrak{H}$ es representable y el morfismo inducido $\mathcal{O}(\mathfrak{G}) \to \mathcal{O}(\mathfrak{H})$ es suryectivo.

1.6.2. Decimos que un esquema de grupos afín $\mathfrak{G}$ sobre un cuerpo K es un *grupo algebraico afín sobre K* si $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$ es una K-álgebra finitamente generada. Un morfismo $\varphi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ entre grupos algebraicos afines sobre K es simplemente, al igual que antes, una transformación natural. Si $\mathfrak{H}$ es un subgrupo afín de un grupo algebraico afín $\mathfrak{G}$ sobre K, $\mathfrak{H}$ es también un grupo algebraico afín sobre K pues $\mathcal{O}(\mathfrak{H})$ resulta un cociente de $\mathcal{O}(\mathfrak{G})$.

1.6.3. Sea $K \hookrightarrow K'$ una extensión de cuerpos y sea $\mathfrak{G}$ un grupo algebraico afín sobre K. Se obtiene un grupo algebraico afín $\mathfrak{G} \otimes_K K'$ sobre K' si para cada K'-álgebra R' y para cada morfismo de K'-álgebras φ' ponemos $\mathfrak{G} \otimes_K K'(R') = \mathfrak{G}(R')$ y $\varphi' = \varphi'$, donde en el lado derecho de la primera igualdad se considera a R' como K'-álgebra mientras que en el lado derecho de la segunda igualdad se considera a φ' como un morfismo de K-álgebras. En efecto, es fácil ver que $\mathcal{O}(\mathfrak{G} \otimes_K K') = \mathcal{O}(\mathfrak{G}) \otimes_K K'$, la cual resulta una K'-álgebra finitamente generada. Si $\varphi : \mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ es un morfismo de grupos algebraicos afines sobre K, obtenemos un morfismo de grupos algebraicos afines $\varphi \otimes_K K' : \mathfrak{G}_1 \otimes_K K' \to \mathfrak{G}_2 \otimes_K K'$ sobre K' poniendo $(\varphi \otimes_K K')_{R'} = \varphi_{R'}$. Obtenemos así un funtor covariante $- \otimes_K K'$ de la categoría de grupos algebraicos afines sobre K en la categoría de grupos algebraicos afines sobre K'.

1.6.4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para una $\mathbb{Q}$-álgebra R, denotamos por $\mathrm{U}_n(R)$ al grupo multiplicativo de las matrices triangulares superiores $n \times n$, con entradas en R y con sólo 1's en la diagonal. Para un morfismo de $\mathbb{Q}$-álgebras $R \xrightarrow{\alpha} S$, $\mathrm{U}_n(\alpha) : \mathrm{U}_n(R) \to \mathrm{U}_n(S)$ es el morfismo natural inducido por α. Resulta que U_n es un grupo algebraico afín sobre $\mathbb{Q}$ cuyo anillo coordenado es claramente $\mathbb{Q}[(X_{ij})_{1 \le i < j \le n}]$.

Sea K un cuerpo de característica cero. Un *grupo algebraico unipotente sobre K* es un grupo algebraico afín que es isomorfo a un subgrupo afín de $\mathrm{U}_n \otimes_{\mathbb{Q}} K$ para algún n.

1.6.5. *La fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff.* En $\mathbb{Q}[[X]]$ se consideran las series formales

$$\mathcal{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} X^n \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} X^n.$$

Estas verifican las conocidas identidades $\mathcal{E}(\mathcal{L}(X)) = 1 + X$ y $\mathcal{L}(\mathcal{E}(X) - 1) = X$. Denotamos ahora por $\mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ a la $\mathbb{Q}$-álgebra asociativa de las series de potencias en las variables no-conmutativas X, Y. La serie de Baker-Campbell-Hausdorff es la serie

$$\Phi(X, Y) = \mathcal{L}(\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) - 1) \in \mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle.$$

Es fácil ver que en $\mathbb{Q}\langle\langle X, Y, Z\rangle\rangle$ se verifican las identidades $\Phi(X, 0) = \Phi(0, X) = X$, $\Phi(X, -X) = 0$ y $\Phi(X, \Phi(Y, Z)) = \Phi(\Phi(X, Y), Z)$. Consideramos ahora en $\mathbb{Q}\langle\langle X, Y\rangle\rangle$ el corchete de Lie $(U_1, U_2) = U_1U_2 - U_2U_1$. Para $r > 2$ definimos recursivamente $(U_1, \ldots, U_r) = ((U_1, \ldots, U_{r-1}), U_r)$. Para un vector $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de enteros positivos escribimos $\langle \mathbf{e} \rangle = e_1 + \ldots + e_n$ y

$$(X, Y)_{\mathbf{e}} = (X, \underbrace{Y, \ldots, Y}_{e_1}, \underbrace{X, \ldots, X}_{e_2}, \ldots).$$

La *fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff* ([DdSMS99, Proposition 6.29]) afirma la existencia de números racionales $q_{\mathbf{e}} \in \mathbb{Q}$ tales que

$$\Phi(X,Y) = X + Y + \frac{1}{2}(X,Y) + \sum_{n\geq 3}\sum_{\langle \mathbf{e}\rangle = n-1} q_{\mathbf{e}}(X,Y)_{\mathbf{e}}.$$

1.6.6. Sea K un cuerpo de característica cero y sea $\mathfrak{n}$ una K-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Para cada K-álgebra R, podemos definir en $\mathfrak{n}\otimes_K R$ una operación $x * y = \Phi(X,Y)$ usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff, la cual resulta ser una suma finita pues si la clase de nilpotencia de $\mathfrak{n}$ es c, entonces $[x,y]_{\mathbf{e}} = 0$ para todos $x,y \in \mathfrak{n}\otimes_K R$ si $\langle \mathbf{e}\rangle \geq c$. Denotamos por $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})(R)$ al conjunto $\mathfrak{n}\otimes_K R$ con la operación $*$. De las propiedades de la serie $\Phi(X,Y)$ resulta que $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})(R)$ es un grupo. Si $\alpha : R \to S$ es un morfismo de K-álgebras, es claro que $(\mathrm{id}_{\mathfrak{n}}\otimes_K\alpha)(\Phi(x,y)) = \Phi(\mathrm{id}_{\mathfrak{n}}\otimes_K\alpha(x), \mathrm{id}_{\mathfrak{n}}\otimes_K\alpha(y))$, por lo cual $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})(\alpha) := \mathrm{id}_{\mathfrak{n}}\otimes_K\alpha$ es un morfismo de grupos. Luego tenemos un funtor covariante $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n}) : K\text{-Alg} \to \mathrm{Groups}$. Más aún, si $\mathfrak{n}$ es de dimensión h, entonces $F\circ \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es isomorfo al funtor $R \to \mathfrak{n}\otimes_K R \cong R^h$, el cual está representado por $K[X_1,\ldots,X_h]$. Concluímos entonces que $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es un grupo algebraico afín sobre K.

Si $\varphi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{m}$ es un morfismo de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita, entonces $\varphi\otimes_K R : \mathfrak{n}\otimes_K R \to \mathfrak{m}\otimes_K R$ es un morfismo de R-álgebras de Lie, y usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff obtenemos que $(\varphi\otimes_K R)(\Phi(x,y)) = \Phi((\varphi\otimes_K R)(x), (\varphi\otimes_K R)(y))$ para todos $x,y \in \mathfrak{n}\otimes_K R$. Luego $\mathrm{BCH}_K(\varphi)_R := \varphi\otimes_K R$ es un morfismo de grupos, el cual puede verse fácilmente que es natural en R. Obtenemos así un morfismo $\mathrm{BCH}_K(\varphi) : \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n}) \to \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{m})$ de grupos algebraicos afines sobre K.

Se obtiene entonces un funtor BCH_K de la categoría de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita en la categoría de grupos algebraicos afines sobre K.

1.6.7. Sea K' una extensión de K. Para toda K-álgebra de Lie nilpotente $\mathfrak{n}$ de dimensión finita tenemos $(\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})\otimes_K K')(R') = \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})(R') = (\mathfrak{n}\otimes_K R', *)$ y $\mathrm{BCH}_{K'}(\mathfrak{n}\otimes_K K')(R') = ((\mathfrak{n}\otimes_K K')\otimes_{K'} R', *) \cong (\mathfrak{n}\otimes_K R', *)$, y por lo tanto $\mathrm{BCH}_{K'}(\mathfrak{n}\otimes_K K') \cong \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})\otimes_K K'$. Se puede ver fácilmente que este isomorfismo es natural en $\mathfrak{n}$.

1.6.8. Sea $n \in \mathbb{N}$. Para una $\mathbb{Q}$-álgebra R denotamos por $\mathfrak{u}_n(R)$ a la R-álgebra de Lie formada por las matrices $n\times n$ con entradas en R que son triangulares superiores estrictias, es decir, que tienen sólo 0's en la diagonal. Notar que $\mathrm{U}_n(R) = 1 + \mathfrak{u}_n(R)$ y además $\mathfrak{u}_n(R) = \mathfrak{u}_n(\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}} R$. Si $x \in \mathfrak{u}_n(R)$ entonces $\exp_R(x) := \mathcal{E}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{n!} \in 1 + \mathfrak{u}_n(R) = \mathrm{U}_n(R)$, y si $1 + x \in \mathrm{U}_n(R)$ entonces $\log_R(1+x) := \mathcal{L}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k \in \mathfrak{u}_n(R)$. Como $\mathcal{L}(\mathcal{E}(X) - 1) = X$ y $\mathcal{E}(\mathcal{L}(X)) = 1 + X$, se sigue que $\log_R : \mathrm{U}_n(R) \to \mathfrak{u}_n(R)$ y $\exp : \mathfrak{u}_n(R) \to \mathrm{U}_n(R)$ son biyecciones, una la inversa de la otra. Para $x,y \in \mathfrak{u}_n(R)$ tenemos que $x*y = \Phi(x,y) = \mathcal{L}(\mathcal{E}(x)\mathcal{E}(y) - 1) = \log_R(\exp_R(x)\exp_R(y))$ y, por lo tanto, $\exp_R(x*y) = \exp_R(x)\exp_R(y)$. Luego $\exp_R : \mathrm{BCH}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{u}_n(\mathbb{Q}))(R) \to \mathrm{U}_n(R)$ es un isomorfismo de grupos que es claramente natural en R. Se obtiene así un isomorfismo $\exp : \mathrm{BCH}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{u}_n(\mathbb{Q})) \to \mathrm{U}_n$ de grupos algebraicos afines sobre $\mathbb{Q}$.

1.6.9. Si K es un cuerpo de característica cero y $\mathfrak{n}$ es una K-subálgebra de Lie de $\mathfrak{u}_n(K) = \mathfrak{u}_n(\mathbb{Q})\otimes_{\mathbb{Q}} K$, entonces la inclusión $\mathfrak{n} \hookrightarrow \mathfrak{u}_n(K)$ produce un morfismo de grupo algebraicos afines $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n}) \to \mathrm{BCH}_K(\mathfrak{u}_n(K))$. Identificando a $\mathfrak{n}\otimes_K R$ con un subconjunto de $\mathfrak{u}_n(K)\otimes_K R = \mathfrak{u}_n(R)$ resulta que $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es un subfuntor de $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{u}_n(K))$. Identificamos a $F\circ\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{u}_n(K))$ (recordemos que $F : \mathrm{Groups} \to \mathrm{Sets}$ es el funtor de olvido) con el funtor $R \mapsto R^{\binom{n}{2}}$, el cual está representado por $K[(T_{ij})_{1\leq i<j\leq n}]$. Si $\mathfrak{n}$, como subespacio de $K^{\binom{n}{2}}$, está definido por las funcionales

lineales $f_1, \ldots, f_t$, entonces el funtor $R \to \mathfrak{n} \otimes_K R$ está claramente representado por el cociente $K[(T_{ij})_{1 \le i < j \le n}]/(f_1, \ldots, f_t)$. Concluímos que $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es un subgrupo afín de $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{u}_n(K)) = \mathrm{BCH}_{\mathbb{Q}}(\mathfrak{u}_n(\mathbb{Q})) \otimes_{\mathbb{Q}} K \cong \mathrm{U}_n \otimes_{\mathbb{Q}} K$. Luego $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es un grupo algebraico unipotente sobre K.

1.6.10. Sea $\mathfrak{n}$ una K-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita. Por el Teorema de Ado para álgebras de Lie nilpotentes, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{n}$ es isomorfa a una K-subálgebra de Lie de $\mathfrak{u}_n(K)$. Por lo anterior resulta entonces que $\mathrm{BCH}_K(\mathfrak{n})$ es un grupo algebraico unipotente sobre K.

Teorema 1.6.11. *El funtor* BCH_K *define una equivalencia de categorías entre la categoría de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita y la de grupos algebraicos unipotentes sobre K.*

Demostración. Esto es [DG70, pág. 499, Cor. 4.5]. □

1.6.12. Sea K un cuerpo de característica cero. Si $\mathfrak{n}$ es una K-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, denotamos por $\mathrm{N}_K(\mathfrak{n})$ al grupo $(\mathfrak{n}, *)$ definido usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff y en donde se ha definido además la operación $x^r := rx$ para $x \in \mathfrak{n}$ y $r \in K$. Veamos que $\mathrm{N}_K(\mathfrak{n})$ es un grupo nilpotente K-potenciado. En efecto, podemos suponer que $\mathfrak{n}$ es una K-subálgebra de Lie de $\mathfrak{u}_n(K)$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Vimos en (1.6.8) que el mapa $\exp_K : (\mathfrak{n}, *) \to \exp_K(\mathfrak{n}) \le \mathrm{U}_n(K)$ es un isomorfismo de grupos, por lo tanto basta ver que $\exp(\mathfrak{n})$ con la operación $(1+x)^r := \exp_K(r \log_K(1+x))$ es un grupo nilpotente K-potenciado. Usando la identidad $\exp_K(r \log(1+x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r}{k} x^k$ obtenemos que la operación definida es la inducida por la de $\mathrm{U}_n(K)$ (1.2.13). Luego $\exp_K(\mathfrak{n})$ con la operación $(1+x)^r = \exp_K(r \log_K(1+x))$ es un K-subgrupo de $\mathrm{U}_n(K)$ y, por lo tanto, él no es sólo un grupo nilpotente K-potenciado sino también un τ_K-grupo.

Si $\varphi : \mathfrak{n} \to \mathfrak{m}$ es un morfismo de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita, entonces $\varphi(x^k) = \varphi(kx) = k\varphi(x) = \varphi(x)^k$; por lo tanto, $\mathrm{N}_K(\varphi) = \varphi : \mathrm{N}_K(\mathfrak{n}) \to \mathrm{N}_K(\mathfrak{m})$ no es sólo un morfismo de grupos sino también un K-morfismo. Luego N_K es un funtor de la categoría de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita en la categoría de τ_K-grupos.

Teorema 1.6.13. *El funtor* N_K *define una equivalencia de categorías entre la categoría de K-álgebras de Lie nilpotentes de dimensión finita y la categoría de τ_K-grupos.*

Demostración. Esto está probado en [Mal49] para $K = \mathbb{Q}$. Para cuerpos generales de característica cero la prueba es exactamente la misma. □

1.6.14. Sea K un cuerpo de característica cero. Como aplicación de (1.6.13) y del hecho de que $\exp_K : \mathrm{N}_K(\mathfrak{u}_n(K)) \to \mathrm{U}_n(K)$ da un K-isomorfismo, obtenemos que el mapa $\mathfrak{n} \mapsto \exp_K(\mathfrak{n})$ da una correspondencia uno a uno entre las K-subálgebras de Lie de $\mathfrak{u}_n(K)$ y los K-subgrupos de $\mathrm{U}_n(K)$ cuya aplicación inversa es $N \to \log_K(N)$.

1.6.15. Sea $K \to K'$ una extensión de cuerpos. Si $\mathfrak{n}$ es una K-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita, entonces $\mathrm{N}_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K' = \mathrm{N}_{K'}(\mathfrak{n} \otimes_K K')$. En efecto, podemos suponer que $\mathfrak{n}$ es una subálgebra de $\mathfrak{u}_n(K)$. Luego $\exp_K : \mathrm{N}_K(\mathfrak{n}) \to \exp_K(\mathfrak{n}) \le \mathrm{U}_n(K)$ es un K-isomorfismo. Vimos en (1.3.8) que $\mathrm{U}_n(K') = \mathrm{U}_n(K) \otimes_K K'$, y esto junto con (1.3.7) implican que $\exp_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K'$ es el K'-subgrupo de $\mathrm{U}_n(K')$ generado por $\exp_K(\mathfrak{n})$. Es claro entonces que $\exp_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K' \subseteq \exp_{K'}(\mathfrak{n} \otimes_K K')$. Luego $\log_{K'}(\exp_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K')$ es una K'-subálgebra de Lie de $\mathfrak{n} \otimes_K K'$ que contiene a $\mathfrak{n}$ (1.6.14). Concluímos así que $\exp_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K' = \exp_{K'}(\mathfrak{n} \otimes_K K')$, y por lo tanto $\mathrm{N}_K(\mathfrak{n}) \otimes_K K' \cong \mathrm{N}_{K'}(\mathfrak{n} \otimes_K K')$. Es fácil ver que este isomorfismo es natural en $\mathfrak{n}$.

1.6.16. Finalmente, sea $\mathfrak{N}$ un grupo algebraico unipotente sobre un cuerpo K de característica cero. Vimos que $\mathfrak{N} = \mathrm{BCH}(\mathfrak{n})$ para alguna K-álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita $\mathfrak{n}$ y por lo tanto $\mathfrak{N}(K)$ puede considerarse como un τ_K-grupo vía el isomorfismo $\mathfrak{N}(K) \cong \mathrm{N}_K(\mathfrak{n})$. De la misma forma, si $\varphi : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ es un morfismo de grupos algebraicos unipotentes sobre K entonces $\varphi_K : \mathfrak{N}(K) \to \mathfrak{M}(K)$ es un K-morfismo. Como consecuencia de todo lo que hemos dicho hasta ahora obtenemos

Corolario 1.6.17. *Sea K un cuerpo de característica cero. Entonces la aplicación $\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}(K)$ define una equivalencia de categorías entre la categoría de grupos algebraicos unipotentes sobre K y la categoría de τ_K-grupos. Además para una extensión K' de K se tiene un isomorfismo natural $\mathfrak{N}(K) \otimes_K K' \cong (\mathfrak{N} \otimes_K K')(K')$.*

Proposición 1.6.18. *Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ dos grupos algebraicos unipotentes sobre un cuerpo K de característica cero. Si existe una extensión K' de K tal que $\mathfrak{N}\otimes_K K' \cong \mathfrak{M}\otimes_K K'$ como grupos algebraicos afines sobre K', entonces existe una extensión finita k de K tal que $\mathfrak{N}\otimes_K k$ y $\mathfrak{M}\otimes_K k$ son isomorfos como grupos algebraicos afines sobre k.*

Demostración. Esto es consecuencia inmediata del corolario anterior junto con (1.5.13). $\square$

Capítulo 2

Integrales cónicas

Las integrales cónicas son cierto tipo de integrales p-ádicas. Ellas van a ser muy importante para nuestro estudio de las propiedades analíticas de las distintas funciones zeta de grupos que consideraremos más adelante. Ellas fueron introducidas y estudiadas por du Sautoy y Grunewald en [dSG00]. En este capítulo se tratarán algunas de sus propiedades más importantes.

2.1 Integrales cónicas y Resolución de singularidades

2.1.1. Sea K un cuerpo de números con anillo de enteros algebraicos O. Para un ideal maximal $\mathfrak{p}$ de O, $q_{\mathfrak{p}}$ denotará el cardinal del cuerpo residual $O/\mathfrak{p}$, $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$ la completación $\mathfrak{p}$-ádica de O, $\hat{K}_{\mathfrak{p}}$ el cuerpo de fracciones de $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$, $v_{\mathfrak{p}} : \hat{K}_{\mathfrak{p}} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuación $\mathfrak{p}$-ádica, y usaremos siempre la norma $\mathfrak{p}$-ádica: $|x|_{\mathfrak{p}} = q_{\mathfrak{p}}^{-v_{\mathfrak{p}}(x)}$. Como $\hat{O}_{\mathfrak{p}}$ es un grupo topológico compacto Hausdorff, en él o más generalmente en $\hat{O}_{\mathfrak{p}}^n$ ($n \in \mathbb{N}$), denotaremos por $\mu_{\hat{O}_{\mathfrak{p}}^n}$ a la medida de Haar normalizada de modo que $\mu_{\hat{O}_{\mathfrak{p}}^n}(\hat{O}_{\mathfrak{p}}^n) = 1$.

2.1.2. Fijemos una colección de polinomios no nulos $\mathcal{D} = (f_0, g_0, f_1, g_1, \ldots, f_l, g_l)$ con $f_i, g_i \in K[X_1, \ldots, X_m] = K[\mathbf{X}]$ $(i = 0, \ldots, l)$. Para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(O) \setminus \{0\}$ ponemos

$$V_{\mathfrak{p}} = \{\mathbf{x} \in \hat{O}_{\mathfrak{p}}^m : v_{\mathfrak{p}}(f_i(\mathbf{x})) \leq v_{\mathfrak{p}}(g_i(\mathbf{x})) \text{ para } i = 1, \ldots, l\}.$$

A la función compleja

$$Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p}) = \int_{V_{\mathfrak{p}}} |f_0(\mathbf{x})|_{\mathfrak{p}}^s |g_0(\mathbf{x})|_{\mathfrak{p}} \mu_{\hat{O}_{\mathfrak{p}}^m}$$

se la llama una *integral cónica sobre* K y a $\mathcal{D}$ se lo llama el *dato de integral cónica.*

2.1.3. Escribimos $F = \prod_{i=0}^{l} f_i g_i$, $X = \operatorname{Spec}(K[\mathbf{X}])$ y $D = \operatorname{Spec}(\frac{K[\mathbf{X}]}{(F)}) \subseteq X$. Fijemos *una resolución* (Y, h) *para* F *sobre* K, esto es, un subesquema cerrado Y de algún $\mathbf{P}_X^k = \mathbb{P}_K^k \times_K X$ junto con un morfismo $h : Y \to X$ que es la restricción a Y de la proyección $\mathbf{P}_X^k \to X$, que verifican las siguientes propiedades.

(i) Y es liso sobre $\operatorname{Spec}(K)$;

(ii) la restricción $h : Y \setminus h^{-1}(D) \to X \setminus D$ es un isomorfismo; y

(iii) el esquema reducido $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$ asociado a $h^{-1}(D)$ tiene solo cruzamientos normales como subesquema de Y.

Denotemos por $(E_i)_{i\in T}$ a los subesquemas cerrados integrales de Y cuyos espacios subyacentes son las componentes irreducibles de $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$. Decir que $(h^{-1}(D))_{\text{red}}$ tiene solo cruzamientos normales significa que para cada $a \in Y$, existe un sistema regular de parámetros $(c_1, \dots, c_n)$ del anillo local $\mathcal{O}_{Y,a}$ de Y en a tal si $a \in E_i$ entonces el ideal de E_i en $\mathcal{O}_{Y,a}$ está generado por uno de los elementos $c_1, \dots, c_n$.

Por el Teorema de Resolución de Singularidades de Hironaka [Hir64, p. 146, Corollary 3], una tal resolución siempre existe.

2.1.4. Para cada $i \in T$, denotamos por N_i a la multiplicidad de E_i en el divisor de $F \circ h$ y por $\nu_i - 1$ a la multiplicidad de E_i en el divisor de $h^*(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_m)$. A la colección de pares (N_i, ν_i) $(i \in T)$ la llamaremos *el dato numérico de la resolución* (Y, h) *para* F. Notar que $N_i \geq 1$ y además los E_i $(i \in T)$ son las únicas componentes del divisor de $F \circ h$. Del mismo modo $\nu_i \geq 1$ para todo $i \in T$ y por (2.1.3, (ii)) los E_i $(i \in T)$ son las únicas posibles componentes en el divisor de $h^*(dX_1 \wedge \dots \wedge dX_m)$. Aparte del dato numérico de la resolución, vamos a considerar también $N_i(f_j)$ y $N_i(g_j)$, las multiplicidades de E_i en los divisores de $f_j \circ h$ y $g_j \circ h$ respectivamente ($i \in T$, y $j = 0, \dots, l$). Agregando esta nueva colección de pares $(N_i(f_j), N_i(g_j))$ $(i \in T, 0 \leq j \leq l)$ al dato numérico de la resolución, obtenemos una colección llamada *el dato numérico de la resolución con respecto a* $\mathcal{D}$. Notar que $N_i = \sum_{j=0}^{l}(N_i(f_j) + N_i(g_j))$.

2.1.5. A cada subconjunto $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ de T con $r \leq m$ le vamos a asociar un par (N_I, C_I), donde N_I es una colección de números y C_I es un cono poliedral convexo racional. La colección de números N_I es: $A_{j,I} = N_{i_j}(f_0)$ y $B_{j,I} = N_{i_j}(g_0) + \nu_{i_j}$ para $j = 1, \dots, r$ y $A_{j,I} = 0, B_{j,I} = 1$ para $r < j \leq m$. El cono es

$$C_I = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m_{>0} : \sum_{j=1}^{r} N_{i_j}(f_i)x_j \leq \sum_{j=1}^{r} N_{i_j}(g_i)x_j \text{ para } i = 1, \dots, l \right\}$$

Se puede escribir este cono como una unión disjunta de conos simpliciales $C_1, \dots, C_{w_I}$ de la forma

$$C_j = \{\alpha_1 v_{j1} + \dots + \alpha_{m_j} v_{jm_j} : \alpha_k \in \mathbb{R}_{>0}, \text{ para } k = 1, \dots, m_j\}$$

donde $\{v_{j1}, \dots, v_{jm_j}\}$ es un conjunto linealmente independiente de vectores de $\mathbb{R}^m$ con entradas enteras no negativas y con la propiedad de que una región fundamental de $\mathbb{Z}v_{i1} + \dots + \mathbb{Z}v_{im_i}$ no contiene puntos de $\mathbb{Z}^m$ en su interior [Dan78, p. 123-124]. Escribimos $v_{jk} = (q_{jk1}, \dots, q_{jkm}) \in \mathbb{N}_0^m$ y definimos $A_{k,I,j} = \sum_{i=1}^{m} q_{jki}A_{i,I} \in \mathbb{N}_0$ y $B_{k,I,j} = \sum_{i=1}^{m} q_{jki}B_{i,I} \in \mathbb{N}$. De este modo, al par (N_I, C_I) le asociamos la siguiente función racional

$$Z_{(N_I,C_I)}(X,Y) = (1-X)^m \sum_{j=1}^{w_I} \prod_{k=1}^{m_j} \frac{X^{B_{k,I,j}} Y^{A_{k,I,j}}}{1 - X^{B_{k,I,j}} Y^{A_{k,I,j}}}.$$

2.1.6. Para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(O) \setminus \{0\}$, sea $O_\mathfrak{p}$ la localización de O en $\mathfrak{p}$ y sea $k_\mathfrak{p} = O/\mathfrak{p}$. Identificamos a $\operatorname{Spec}(K)$ con un subesquema abierto de $\operatorname{Spec}(O_\mathfrak{p})$ y a $\operatorname{Spec}(k_\mathfrak{p})$ con un subesquema cerrado de $\operatorname{Spec}(O_\mathfrak{p})$. Ponemos $\tilde{X} = \operatorname{Spec}(O_\mathfrak{p}[\mathbf{X}])$ y $\bar{X} = \operatorname{Spec}(k_\mathfrak{p}[\mathbf{X}])$ de modo que $X = \tilde{X} \times_{O_\mathfrak{p}} \operatorname{Spec}(K)$ se identifica con un subesquema abierto de $\tilde{X}$ y $\bar{X} = \tilde{X} \times_{O_\mathfrak{p}} \operatorname{Spec}(k_\mathfrak{p})$ con un subesquema cerrado de $\tilde{X}$. Del mismo modo $\mathbf{P}^k_X = \mathbf{P}^k_{\tilde{X}} \times_{O_\mathfrak{p}} \mathrm{Spec}(K)$ se identifica con un subesqума abierto de $\mathbf{P}^k_{\tilde{X}}$ y $\mathbf{P}^k_{\bar{X}} = \mathbf{P}^k_{\tilde{X}} \times_{O_\mathfrak{p}} \mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$ con un subesquema cerrado de $\mathbf{P}^k_{\tilde{X}}$.

Para un subesquema cerrado Z de $\mathbf{P}^k_X$ denotamos por $\tilde{Z}$ a la clausura esquemática de Z en $\mathbf{P}^k_{\tilde{X}}$. Resulta que Z es un subesquema abierto de $\tilde{Z}$ que se identifica con $\mathbf{P}^k_{\tilde{X}} \times_{O_\mathfrak{p}} \mathrm{Spec}(K)$ [EGA I, Proposition 9.5.10]. La reducción módulo $\mathfrak{p}$ de Z es el subesquema cerrado $\bar{Z} = \tilde{Z} \times_{O_\mathfrak{p}} \mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$ de $\tilde{Z}$ y que también puede verse como un subesquema cerrado de $\mathbf{P}^k_{\bar{X}} = \mathbf{P}^k_{\tilde{X}} \times_{O_\mathfrak{p}} \mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$. Denotamos por $\bar{h} : \bar{Y} \to \bar{X}$ a la restricción de la proyección $\mathbf{P}^k_{\bar{X}} \to \bar{X}$.

2.1.7. Se dice que la resolución (Y, h) para F sobre K *tiene buena reducción módulo* $\mathfrak{p}$ [Den87] si

(i) $\bar{Y}$ es lisa sobre $\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$,

(ii) cada $\bar{E}_i$ es lisa sobre $\mathrm{Spec}(k_\mathfrak{p})$ y $\cup_{i\in T}\overline{E_i}$ tiene solo cruzamientos normales como subesquema de $\bar{Y}$, y

(iii) $\bar{E}_i$ y $\bar{E}_j$ no tienen componentes irreducibles en común cuando $i \neq j$.

Para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O la resolución (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$ [Den87, Theorem 2.4].

Proposición 2.1.8. *Supongamos que (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$. Para $a \in \bar{Y}(k_\mathfrak{p})$ ponemos $I_a = \{i \in T : a \in \bar{E}_i\}$. Entonces $|I_a| \leq m$ y*

$$Z_\mathcal{D}(s, \mathfrak{p}) = \sum_{a\in \bar{Y}(k_\mathfrak{p})} Z_{(N_{I_a}, C_{I_a})}(q_\mathfrak{p}^{-1}, q_\mathfrak{p}^{-s}).$$

Demostración. El esquema $\bar{Y}$ es regular de dimensión m ([Den87, Proposition 2.6]) y como $\cup_{i\in T}\bar{E}_i$ tiene sólo cruzamientos normales (2.1.7, (ii)) resulta que $|I_a| \leq m$ para todo $a \in \bar{Y}$. Lo demás se sigue de [dSG00, p. 804-805] para el caso $K = \mathbb{Q}$ y la misma prueba sirve también para el caso general. □

Corolario 2.1.9. *Supongamos que (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$. Entonces*

$$Z_\mathcal{D}(s, \mathfrak{p}) = (1 - q_\mathfrak{p}^{-1})^m \sum_{I\subset T} c_{\mathfrak{p},I} \sum_{j=1}^{w_I} \prod_{k=1}^{m_j} \frac{q_\mathfrak{p}^{-(A_{k,I,j}s+B_{k,I,j})}}{1 - q_\mathfrak{p}^{-(A_{k,I,j}s+B_{k,I,j})}},$$

donde $c_{\mathfrak{p},I} = |\{a \in \bar{Y}(k_\mathfrak{p}) : a \in \bar{E}_i$ si y sólo si $i \in I\}|$.

2.1.10. Por el corolario anterior $Z_\mathcal{D}(s, \mathfrak{p})$ es una función racional en $q_\mathfrak{p}^{-s}$ con coeficientes no negativos si (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$. Usando [dSG00, Proposition 3.3] se puede concluir lo mismo para todo ideal maximal $\mathfrak{p}$. Por lo tanto podemos escribir a $Z_\mathcal{D}(s, \mathfrak{p})$ como una serie de potencias en $q_\mathfrak{p}^{-s}$ cuyo término constante se denota por $a_{\mathfrak{p},0}$. Por [dSG00, p. 806] se tiene que $a_{\mathfrak{p},0} \neq 0$ para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O. Se obtiene así una serie de Dirichlet con coeficientes no negativos

$$Z_\mathcal{D}(s) = \prod_{\substack{\mathfrak{p}\in \mathrm{Spec}(O)\setminus\{0\} \\ a_{\mathfrak{p},0}\neq 0}} a_{\mathfrak{p},0}^{-1} Z_\mathcal{D}(s, \mathfrak{p}),$$

la cual se denomina una *integral cónica global sobre* K (con dato $\mathcal{D}$). También decimos que $Z_\mathcal{D}(s)$ está definida como producto de Euler de integrales cónicas sobre K. Denotaremos siempre por $\alpha_\mathcal{D}$ a su abscisa de convergencia.

2.1.11. Asociemos ahora a $\mathcal{D}$ el siguiente cono poliedral racional

$$\overline{D_T} = \left\{ u \in \mathbb{R}^T_{\geq 0} : \sum_{i \in T} N_i(f_j)u(i) \leq \sum_{i \in T} N_i(g_j)u(i), \text{ para } j = 1, \ldots, l \right\}.$$

Existen vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q \in \mathbb{N}_0^T$ tales que

(i) $\mathbb{N}_0^T \cap \mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_k = \mathbb{N}_0 \mathbf{e}_k$ para $k = 1, \ldots, r$,

(ii) todo elemento de $\overline{D_T}$ puede expresarse como combinación lineal de $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r\}$ con coeficientes reales no negativos, y

(iii) ningún $\mathbf{e}_k$ es combinación lineal con coeficientes no negativos de los $\{\mathbf{e}_j\}_{j \neq k}$.

Estos vectores están univocamente determinados por $\overline{D_T}$ y los llamaremos *los generadores enteros extremales de* $\overline{D_T}$. En efecto, el conjunto $\{\mathbb{R}_{\geq 0}\mathbf{e}_k : k = 1, \ldots, q\}$ es exactamente el conjunto de las aristas extremales de $\overline{D_T}$.

Definimos para cada $k = 1, \ldots, q$ las siguientes constantes:

$$A_k = \sum_{i \in T} \mathbf{e}_k(i) N_i(f_0) \in \mathbb{N}_0 \ \text{ y } \ B_k = \sum_{i \in T} \mathbf{e}_k(i)(N_i(g_0) + \nu_i) \in \mathbb{N}.$$

Teorema 2.1.12. *Supongamos que $Z_{\mathcal{D}}(s)$ no es la función constante.*

(i) Para $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(O) \setminus \{0\}$, si $Z_{\mathfrak{D}}(s, \mathfrak{p})$ no es una función constante, entonces su abscisa de convergencia es uno de los números racionales $-\frac{B_k}{A_k}$ donde $k = 1, \ldots, q$ y $A_k \neq 0$.

(ii) $\alpha_{\mathcal{D}} = \max\{\frac{1-B_k}{A_k} : A_k \neq 0\}$. Por lo tanto, la abscisa de convergencia de cada factor $Z_{\mathcal{D}}(s, \mathfrak{p})$ es menor estricta que $\alpha_{\mathcal{D}}$.

(iii) Existe $\delta > 0$ tal que $Z_{\mathcal{D}}(s)$ tiene continuación meromorfa al semiplano $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha_{\mathcal{D}} - \delta\}$. Además la función continuada no tiene polos en la recta $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = \alpha_{\mathcal{D}}\}$ aparte de $\alpha_{\mathcal{D}}$.

Demostración. Esto es el Corollary 3.4, el Lemma 4.15 y el Corollary 4.22 de [dSG00], donde se asume $K = \mathbb{Q}$. La prueba para el caso general es exactamente la misma. En efecto, los principales ingredientes en aquellas demostraciones son: (1) la estimación de Lang-Weil en [LW54] la cual se enuncia sobre cualquier cuerpo finito, y (2) las propiedades de las funciones L de Artin en [Mar79], las cuales se enuncian en el contexto de cuerpos de números en general. □

2.2 Extensión de base

2.2.1. Vamos a conservar toda la notación de la sección anterior. Sea K' un cuerpo de números que contiene a K y denotemos por O' a su anillo de enteros algebraicos. Denotemos por $\mathcal{D} \otimes_K K'$ a la misma colección $\mathcal{D}$ pero donde a los polinomios se los considera con coeficientes en K'. Ponemos $X' = X \times_K \operatorname{Spec}(K') = \operatorname{Spec}(K'[\mathbf{X}])$, $D' = D \times_K \operatorname{Spec}(K') = \operatorname{Spec}(\frac{K'[\mathbf{X}]}{(F)})$, $Y' = Y \times_K \operatorname{Spec}(K')$ y $h' = h \times_K \mathrm{id}_{\operatorname{Spec}(K')}$, de modo que Y' resulta un subesquema cerrado de $\mathbf{P}^k_X \times_K \operatorname{Spec}(K') = \mathbf{P}^k_{X'}$ y h' es la restricción a Y' de la proyección $\mathbf{P}^k_{X'} \to X'$. Resulta entonces que (Y', h') es una resolución para F sobre K' [Den87, Proposition 2.3], la cual decimos que se obtuvo a partir de (Y, h) por extensión de escalares. Denotamos por $p : Y' \to Y$ a la proyección.

2.2.2. Sean $(E'_{i'})_{i'\in T'}$ los subesquemas cerrados integrales de Y' cuyos espacios subyacentes son las componentes irreducibles de $(h'^{-1}(D'))_{red} = (h^{-1}(D))_{red} \times_K \operatorname{Spec}(K')$. Existe una función suryectiva $\pi : T' \to T$ tal que $p(E'_{i'}) = E_{\pi(i')}$ para todo $i' \in T'$ y además para cada $i \in T$ las componentes irreducibles de $E_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$ son precisamente los $E'_{i'}$ con $i' \in \pi^{-1}(i)$ [EGA IV, 4.4.1]. Más aún, como $\cup_{i\in T} E_i$ tiene solo cruzamientos normales, cada E_i es liso sobre $\operatorname{Spec}(K)$ y por lo tanto $E_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$ es liso sobre K'. Luego $E_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$ es la unión disjunta de sus componentes irreducibles, o en otras palabras, $E'_{i'_1} \cap E'_{i'_2} = \emptyset$ si $\pi(i'_1) = \pi(i'_2)$ y $i'_1 \neq i'_2$.

Sea $N'_{i'}(f_j), N'_{i'}(g_j), \nu'_{i'}$, $(i' \in T', j = 0, \ldots, l)$, el dato numérico de la resolución (Y', h') respecto a $\mathcal{D} \otimes_K K'$.

Proposición 2.2.3. *Para $i' \in T'$ y $j = 0, \ldots, l$ se tiene $N'_{i'}(f_j) = N_{\pi(i')}(f_j)$, $N'_{i'}(g_j) = N_{\pi(i')}(g_j)$ y $\nu'_{i'} = \nu_{\pi(i')}$.*

Demostración. Sea $\pi(i') = i$ y denotemos por a' y a a los puntos genéricos de $E'_{i'}$ y E_i respectivamente, de modo que $p(a') = a$. Como E_i y $E'_{i'}$ tienen codimension 1 en Y e Y' respectivamente, los anillos $O_{Y',a'}$ y $O_{Y,a}$ son anillos de valuación discreta. Si t es el generador del ideal maximal de $O_{Y,a}$, el morfismo $\beta : O_{Y,a} \to O_{Y',a'}$ manda t en un elemento que forma parte de un sistema de parametros regular para $O_{Y',a'}$ [EGA IV, **0**, 20.5.14] y por lo tanto $\beta(t)$ genera el ideal maximal de $O_{Y',a'}$. La proposición ahora es inmediata pues si un elemento $\gamma \in O_{Y,a}$ tiene orden n en $O_{Y,a}$, él es de la forma $\gamma = t^n s$ con s una unidad. Como $\beta(s)$ es unidad en $O_{Y',a'}$ y $\beta(\gamma) = \beta(t)^n \beta(s)$, entonces $\beta(\gamma)$ tiene orden n en a'. La proposición resulta clara a partir de esto. □

2.2.4. Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O para el cual (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{p}'$ un ideal maximal de O' que yace sobre $\mathfrak{p}$, es decir $\mathfrak{p}' \cap O = \mathfrak{p}$. Por [Den87, Proposition 2.3], (Y', h') tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}'$. Por otro lado es claro que $\tilde{E}_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$ es la clausura esquemática de $E_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$ y por lo tanto $\{\tilde{E'_{i'}} : \pi(i') = i\}$ es el conjunto de las componentes irreducibles de $\tilde{E}_i \times_K \operatorname{Spec}(K')$. Como este último esquema es regular ([Den87, Proposition 2.6]) entonces $\tilde{E'_{i'_1}} \cap \tilde{E'_{i'_2}} = \emptyset$ si $\pi(i'_1) = \pi(i'_2) = i$ y $i'_1 \neq i'_2$. Se concluye así que cada $\bar{E}_i \times_{k_{\mathfrak{p}}} \operatorname{Spec}(k_{\mathfrak{p}'})$ es la unión disjunta de los distintos $\bar{E'_{i'}} = \tilde{E'_{i'}} \cap \bar{Y}$ con $\pi(i') = i$.

Proposición 2.2.5. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O tal que (Y, h) tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}$. Sea $\mathfrak{p}'$ un primo de O' que yace sobre $\mathfrak{p}$. Entonces*

$$Z_{\mathcal{D}\otimes_K K'}(s, \mathfrak{p}') = (1 - q_{\mathfrak{p}'}^{-1})^m \sum_{I\subset T} c_{\mathfrak{p}',I} \sum_{j=1}^{w_I} \prod_{k=1}^{m_j} \frac{q_{\mathfrak{p}'}^{-(A_{k,I,j}s+B_{k,I,j})}}{1 - q_{\mathfrak{p}'}^{-(A_{k,I,j}s+B_{k,I,j})}},$$

donde $c_{\mathfrak{p}',I} = |\{a \in \bar{Y}(k_{\mathfrak{p}'}) : a \in \bar{E}_i$ si y sólo si $i \in I\}|$.

En este caso la expresión $a \in \bar{E}_i$ significa que la imagen del $k_{\mathfrak{p}}$-morfismo a está contenida en $\bar{E}_i$.

Demostración. Para $a' \in \bar{Y}'$, ponemos $I'_{a'} = \{i' \in T' : a' \in \bar{E}'_{i'}\}$. Como (Y', h') tiene buena reducción módulo $\mathfrak{p}'$ (2.2.4), de la Proposición 2.1.8 se sigue que $|I'_{a'}| \leq m$ y que

$$Z_{\mathcal{D}\otimes_K K'}(s, \mathfrak{p}') = \sum_{a'\in\bar{Y}'(k_{\mathfrak{p}'})} Z_{(N_{I'_{a'}}, C_{I'_{a'}})}(q_{\mathfrak{p}'}^{-1}, q_{\mathfrak{p}'}^{-s}),$$

donde esta vez $N_{I'_{a'}}$ y $C_{I'_{a'}}$ se calculan a partir del dato $N'_{i'}(f_j), N'_{i'}(g_j), \nu'_{i'}$, $(i' \in T', j = 0, \ldots, l)$(2.1.5). Por (2.2.4), se sigue que $\pi : I'_{a'} \to \pi(I'_{a'})$ es una biyección. Sea entonces $I' \subset T'$ tal que $|I'| \leq m$

y $\pi : I' \to \pi(I')$ es una biyección, y sea $I = \pi(I')$. Se sigue de la Proposición 2.2.3 que el par $(N_{I'}, C_{I'})$ coincide con el par (N_I, C_I), y por lo tanto $Z_{(N_{I'},C_{I'})}(X,Y) = Z_{(N_I,C_I)}(X,Y)$. De la expresión anterior concluímos entonces

$$Z_{\mathcal{D}\otimes_K K'}(s,\mathfrak{p}') = \sum_{I\subset T} c'_{\mathfrak{p}',I} Z_{(N_I,C_I)}(q_{\mathfrak{p}'}^{-1}, q_{\mathfrak{p}'}^{-s}),$$

donde $c'_{\mathfrak{p}',I} = |\{a' \in \bar{Y}'(k_{\mathfrak{p}'}) : \pi(I'_{a'}) = I\}|$. Finalmente es claro que $\pi(I'_{a'}) = I$ si y sólo si $I_{p(a')} = I$, y que si vemos a a' como un elemento de $\bar{Y}(k_{\mathfrak{p}'})$ (que se identifica con $\bar{Y}'(k_{\mathfrak{p}'})$) entonces $p(a')$ es precisamente la imagen del $k_{\mathfrak{p}'}$-morfismo a'. Luego $\{a' \in \bar{Y}'(k_{\mathfrak{p}'}) : \pi(I'_{a'}) = I\} = \{a' \in \bar{Y}(k_{\mathfrak{p}'}) : a' \in \bar{E}_i$ si y sólo si $i \in I\}$. Esto concluye la demostración. $\square$

Teorema 2.2.6. *$Z_{\mathcal{D}}(s)$ y $Z_{\mathcal{D}\otimes K'}(s)$ tienen la misma abscisa de convergencia.*

Demostración. Usando la Proposición 2.2.3 concluímos que el cono asociado a $\mathcal{D}\otimes_K K'$, análogo al definido en (2.1.11), es

$$\overline{D_{T'}} = \left\{ u' \in \mathbb{R}^{T'}_{\geq 0} : \sum_{i\in T} N_i(f_j)\left(\sum_{i'\in\pi^{-1}(i)} u'(i')\right) \leq \sum_{i\in T} N_i(g_j)\left(\sum_{i'\in\pi^{-1}(i)} u'(i')\right),\ j=1,\dots,l\right\}. \tag{*}$$

Siguiendo (2.1.11) se obtienen vectores con coordenadas enteras $\mathbf{e}'_1,\dots,\mathbf{e}'_{q'}$ que son las que generan las aristas extremales del cono. Resulta de la Proposición 2.2.3 que las constantes asociadas análogas a las definidas en (2.1.11) son

$$A'_k = \sum_{i\in T} N_i(f_0)\left(\sum_{i'\in\pi^{-1}(i)} \mathbf{e}'_k(i')\right) \text{ y } B'_k = \sum_{i\in T}(N_i(g_0)+\nu_i)\left(\sum_{i'\in\pi^{-1}(i)} \mathbf{e}'_k(i')\right), k=1,\dots,q'. \tag{**}$$

Por el Teorema 2.1.12, la abscisa de convergencia de $Z_{\mathcal{D}'}(s)$ resulta igual a $\max\{\frac{1-B'_k}{A'_k} : A'_k \neq 0\}$. El teorema será entonces consecuencia inmediata del siguiente lemma. $\square$

Lema 2.2.7. *El conjunto de pares (A_k, B_k) con $k = 1,\dots,q$ coincide con el conjunto de pares (A'_k, B'_k) con $k = 1,\dots,q'$.*

Demostración. Lo primero a observar es que el cono $\overline{D_{T'}}$ puede definirse para cualquier conjunto finito T' y para cualquier mapa suryectivo $\pi : T' \to T$ usando la expresión (*), y con él podemos definir las constantes A'_k y B'_k usando las expresiones en (**).

En segundo lugar, dada una función suryectiva $\pi : T' \to T$, podemos definir un mapa $\Pi : \mathbb{R}^{T'}_{\geq 0} \to \mathbb{R}^{T}_{\geq 0}$ poniendo $\Pi(u')(i) = \sum_{i'\in\pi^{-1}(i)} u'(i')$. Este mapa es claramente suryectivo y satisface $\Pi^{-1}(\overline{D_T}) = \overline{D_{T'}}$. Decimos que $\mathbf{e}' \in \overline{D_{T'}}$ *yace sobre* $\mathbf{e} \in \overline{D_T}$ si $\Pi(\mathbf{e}') = \mathbf{e}$ y para todo $i \in T$ existe $i' \in \pi^{-1}(i)$ tal que $\mathbf{e}'(i') = \mathbf{e}(i)$. Notar que el conjunto de vectores $\mathbf{e}'$ que yacen sobre un $\mathbf{e} \in \overline{D_T}$ es no vacío. Denotamos por $\mathcal{B}_{T'}$ al conjunto de todos los vectores en $\overline{D_{T'}}$ que yacen sobre alguno de los vectores $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_k$. Si probamos que $\mathcal{B}_{T'}$ es exactamente el conjunto de generadores enteros extremales de $\overline{D_{T'}}$ (2.1.11), entonces usando (**) obtendremos que para $\mathbf{e}'_{k'}$ que yace sobre $\mathbf{e}_k$ se tiene $(A'_{k'}, B'_{k'}) = (A_k, B_k)$ y con esto claramente nuestro lema estará probado.

Por último se observa fácilmente que si $\pi' : T'' \to T'$ es otra función suryectiva, entonces el cono obtenido a partir de $\overline{D_{T'}}$ y π' es el mismo que el que se obtiene a partir de $\overline{D_T}$ y $\pi\circ\pi'$, y además si

$\mathcal{B}_{T''}$ es el conjunto de vectores de $\mathcal{D}_{T''}$ que yacen sobre alguno de los vectores $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_q$, entonces $\mathcal{B}_{T''}$ es el conjunto de vectores que yacen sobre alguno de los vectores de $\mathcal{B}_{T'}$.

Usando todo esto y el hecho de que el mapa $\pi : T' \to T$ (si no es biyectivo) se escribe como una composición de mapas suryectivos $T' = T_n \to T_{n-1} \to \ldots \to T_1 \to T_0 = T$ tales que para cada $i = 1, \ldots, n$ se tiene que $|T_i| = |T_{i-1}| + 1$, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $T = \{1, \ldots, t\}$, $T' = \{0, \ldots, t\}$ y que el mapa π está dado por $\pi(0) = \pi(1) = 1$ y $\pi(i) = i$ para todo $i = 2, \ldots, t$.

Cada vector $\mathbf{e}_k = (v_{k1}, \ldots, v_{kt})$ tiene a lo más dos vectores que yacen sobre él. Ellos son $\mathbf{e}_k^0 = (v_{k1}, 0, v_{k2}, \ldots, v_{kt})$ y $\mathbf{e}_k^1 = (0, v_{k1}, v_{k2}, \ldots, v_{kt})$. Tenemos que ver que el conjunto $\{\mathbf{e}_k^\delta : k = 1, \ldots, q \text{ y } \delta = 0, 1\}$ es el conjunto de los generadores enteros extremales de $\overline{D_{T'}}$ (2.1.11). En primer lugar, si $\alpha \mathbf{e}_k^\delta \in \mathbb{N}_0 \mathbf{e}_k^\delta$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, entonces $\alpha \mathbf{e}_k \in \mathbb{N}_0 \mathbf{e}_k$ y por lo tanto $\alpha \in \mathbb{N}_0$. En segundo lugar, si $(x_0, x_1, \ldots, x_t) \in \overline{D_{T'}}$ entonces $(x_0 + x_1, x_2, \ldots, x_t) \in \overline{D_T}$ y por lo tanto este puede escribirse como $\sum_{k=1}^q \alpha_k \mathbf{e}_k$ para ciertos $\alpha_i \geq 0$. En particular $x_0 + x_1 = \sum_{k=1}^q \alpha_k v_{k1}$. Puede escribirse $\alpha_k = \beta_k + \gamma_k$ con $\beta_k, \gamma_k \geq 0$ de modo que $x_0 = \sum_{k=1}^q \beta_k v_{k1}$ y $x_1 = \sum_{k=1}^q \gamma_k v_{k1}$. Resulta claro entonces que $(x_0, x_1, \ldots, x_t) = \sum_{k=1}^q (\beta_k \mathbf{e}_k^0 + \gamma_k \mathbf{e}_k^1)$. Finalmente, supongamos por ejemplo que $\mathbf{e}_k^0$ es combinación lineal con coeficientes positivos de los otros elementos de $\mathcal{B}_{T'}$. Estos necesariamente son de la forma $\mathbf{e}_j^0$ pues la segunda coordenada de $\mathbf{e}_k^0$ es 0. Luego esta expreseión de $\mathbf{e}_k^0$ como combinación lineal de otros $\mathbf{e}_j^0$'s con coeficientes positivos induce a una expresión de $\mathbf{e}_k$ como combinación lineal con coeficientes positivos de otros $\mathbf{e}_j$'s, lo cual es absurdo. Luego $\mathcal{B}_{T'}$ es el conjunto de generadores extremales de $\overline{D_{T'}}$, y esto completa la demostración. □

Capítulo 3

Funciones zeta de grupos

3.1 Introducción

3.1.1. Para un grupo G denotamos por $\mathscr{F}_G^{\leq}$ y $\mathscr{F}_G^{\lhd}$ respectivamente a los lattices de subgrupos de G de índice finito y de subgrupos normales G de índice finito. Para $n \in \mathbb{N}$, sean $a_n^{\leq}(G) = |\{A \in \mathscr{F}_G^{\leq} : [G:A] = n\}|$ y $a_n^{\lhd}(N) = |\{A \in \mathscr{F}_G^{\lhd} : [G:A] = n\}|$. Cuando estos números son todos finitos, *la función zeta de subgrupos de* G y *la función zeta de subgrupos normales de* G son las series de Dirichlet

$$\zeta_G^{\leq}(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_G^{\leq}} [G:A]^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\leq}(G)}{n^s} \quad \text{y} \quad \zeta_G^{\lhd}(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_G^{\lhd}} [G:A]^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\lhd}(G)}{n^s},$$

cuyas abcisas de convergencias se denotarán por $\alpha^{\leq}(G)$ y $\alpha^{\lhd}(G)$ respectivamente. Para un primo p, las funciones zeta de subgrupos y de subgrupos normales de G locales en p son las series

$$\zeta_{G,p}^{\leq}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p^k}^{\leq}(G)}{p^{ks}} \quad \text{y} \quad \zeta_{G,p}^{\lhd}(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{p^k}^{\lhd}(G)}{p^{ks}}$$

Siempre usaremos el símbolo $* \in \{\leq, \lhd\}$ para dirigirnos a ambos casos simultaneamente.

3.1.2. Si N es un τ-grupo de longitud de Hirsch $h \geq 1$, las siguientes propiedades fueron establecidas en [GSS88], [dSG00] y [Vol10].

(i) $\alpha^*(N)$ es un número racional $\leq h$ que depende sólo de la $\mathbb{Q}$-completación de Mal'cev de N.

(ii) $\zeta_N^*(s)$ admite una factorización como un producto de Euler $\zeta_N^*(s) = \prod_p \zeta_{N,p}^*(s)$, donde cada factor local $\zeta_{N,p}^*(s)$ es una función racional $\frac{P_p^*(p^{-s})}{Q_p^*(p^{-s})}$ en p^{-s} con polinomios $P_p^*(X)$ y $Q_p^*(X)$ de coeficientes enteros y grados acotados por una constante que no depende de p.

(iii) $\zeta_{N,p}^*(s)$ satisface una ecuación funcional de la forma $\zeta_{N,p}^*(s)|_{p \to p^{-1}} = (-1)^h p^{-hs+\binom{h}{2}} \zeta_{N,p}^*(s)$.

(iv) Existe $\delta^* > 0$ tal que $\zeta_N^*(s)$ admite continuación meromorfa a $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \alpha^*(N) - \delta^*\}$ y la función continuada tiene a $\alpha^*(N)$ como único polo en la recta $\{s \in \mathbb{C} : \Re(s) = \alpha^*(N)\}$.

(v) Si $b^*(N)$ es el orden del polo de la función continuada en $\alpha^*(N)$ entonces existe $c^* > 0$ tal que

$$a_1^*(N) + \ldots + a_n^*(N) \sim c^* \cdot n^{\alpha^*(N)} (\log n)^{b^*(N)-1} \quad \text{cuando} \quad n \to \infty.$$

3.1.3. Sea $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ una extensión de grupos y sea $* \in \{\leq, \lhd\}$. Para $H \in \mathscr{F}_F^*$ ponemos $\mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^* = \{A \in \mathscr{F}_G^* : \pi(A) = H\}$ y definimos su respectiva función zeta como

$$\zeta_{\mathfrak{S},H}^*(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^*} [\pi^{-1}(H) : A]^{-s},$$

cuya abscisa de convergencia será denotada por $\alpha^*(\mathfrak{S}, H)$. Para un primo p, ponemos $\mathscr{F}_{\mathfrak{S},H,p}^* = \{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^* : [\pi^{-1}(H) : A] \text{ es una potencia de } p\}$ cuya función zeta asociada será

$$\zeta_{\mathfrak{S},H,p}^*(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H,p}^*} [\pi^{-1}(H) : A]^{-s}.$$

De particular interés van a ser las series $\zeta_{\mathfrak{S}}^{\leq}(s) = \zeta_{\mathfrak{S},F}^{\leq}(s)$ y $\zeta_{\mathfrak{S}}^{\lhd}(s) = \zeta_{\mathfrak{S},F}^{\lhd}(s)$ a las cuales llamaremos las *funciones zeta de subextensiones y de subextensiones normales de* $\mathfrak{S}$ respectivamente. Sus abcisas de convergencia serán denotadas por $\alpha^{\leq}(\mathfrak{S})$ y $\alpha^{\lhd}(\mathfrak{S})$ respectivamente. De manera análoga escribimos $\zeta_{\mathfrak{S},p}^*(s) = \zeta_{\mathfrak{S},F,p}^*(s)$.

Proposición 3.1.4. *Si $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo virtualmente τ-grupo entonces se verifica lo siguiente.*

(i) $\zeta_G^*(s) = \sum_{H \in \mathscr{F}_F^*} [F : H]^{-s} \zeta_{\mathfrak{S},H}^*(s)$.

(ii) Para cada $H \in \mathscr{F}_F^*$ y para cada primo p se tiene $\zeta_{\mathfrak{S},H,p}^*(s) = \zeta_{\hat{\mathfrak{S}}_p,H}^*(s)$, donde $\hat{\mathfrak{S}}_p$ es la completación pro-p de $\mathfrak{S}$ (1.5.7).

(iii) Para cada $H \in \mathscr{F}_F^*$ se tiene el producto de Euler $\zeta_{\mathfrak{S},H}^*(s) = \prod_p \zeta_{\hat{\mathfrak{S}}_p,H}^*(s)$.

Demostración. (i) Como $\mathscr{F}_G^* = \bigcup_{H \in \mathscr{F}_F^*} \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^*$ y $[G : A] = [F : H][\pi^{-1}(H) : A]$, para cualquier $A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^*$ obtenemos

$$\zeta_G^*(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_G^*} [G : A]^{-s} = \sum_{H \in \mathscr{F}_F^*} [F : H]^{-s} \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^*} [\pi^{-1}(H) : A]^{-s} = \sum_{H \in \mathscr{F}_F^*} [F : H]^{-s} \zeta_{\mathfrak{S},H}^*(s).$$

(ii) Podemos suponer que N es un subgrupo de G y que ι es la inclusión. Consideremos la completación profinita $1 \to \hat{N} \to \hat{G} \xrightarrow{\hat{\pi}} F \to 1$ de $\mathfrak{S}$ de modo que N, G y $\hat{N}$ son subgrupos de $\hat{G}$ (1.5.7). Todo subgrupo de índice finito de $\hat{G}$ es abierto pues G es finitamente generado como grupo profinito [NS07]; por lo tanto, de la teoría general de completaciones profinitas, $A \mapsto \bar{A}$ (donde $\bar{A}$ denota la clausura topológica de A en $\hat{G}$) da un isomorfismo de lattices entre $\mathscr{F}_G^*$ y $\mathscr{F}_{\hat{G}}^*$ que preserva índices relativos, es decir, $[\bar{B} : \bar{A}] = [B : A]$ para todos $A \leq B$ en $\mathscr{F}_G^*$. Es claro que $\hat{\pi}(\bar{A}) = \pi(A)$ para todo $A \in \mathscr{F}_G^*$ por lo cual en la correspondencia entre $\mathscr{F}_G^*$ y $\mathscr{F}_{\hat{G}}^*$, $\mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^*$ se corresponde con $\mathscr{F}_{\hat{\mathfrak{S}},H}^*$, y además de la preservación de índices relativos resulta que $\mathscr{F}_{\mathfrak{S},H,p}^*$ se corresponde con $\mathscr{F}_{\hat{\mathfrak{S}},H,p}^*$. Obtenemos así que $\zeta_{\mathfrak{S},H}^*(s) = \zeta_{\hat{\mathfrak{S}},H}^*(s)$ y para cada primo p, $\zeta_{\mathfrak{S},H,p}^*(s) = \zeta_{\hat{\mathfrak{S}},H,p}^*(s)$.

Se tiene $\hat{N} = \prod_p \hat{N}_p$, donde $\hat{N}_p$ es el subgrupo pro-p de Sylow de $\hat{N}$ (el cual se identifica con la completación pro-p de N). Ponemos $N'_p = \prod_{q\neq p} \hat{N}_q$, donde el producto se toma sobre todos los primos q diferentes de p, y así $\hat{\mathfrak{G}}_p : 1 \to \hat{N}_p \to \hat{G}/N'_p \to F \to 1$ es la completación pro-p de $\mathfrak{G}$ (1.5.7). Para $A \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}$, se tiene que $A \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$ si y sólo si $A \cap \hat{N}$ tiene índice una potencia de p en $\hat{N}$, y este es el caso si y sólo si $A \cap \hat{N}$ contiene a N'_p. Esto implica que $A \mapsto A/N'_p$ da una correspondencia uno a uno que preserva índices entre $\mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$ y $\mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}}_p,H}$, y por lo tanto $\zeta^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}(s) = \zeta^*_{\hat{\mathfrak{G}}_p,H}(s)$.

(iii) Basta probar por lo anterior que $\zeta^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}(s) = \prod_p \zeta^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}(s)$. Se sigue por lo afirmado en el párrafo anterior que para $A \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}$ se tiene $AN'_p \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$; obtenemos así un mapa $\Psi^* : \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H} \to \prod_p \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$ dado por $A \to (AN'_p)_p$. Notar que para $A \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}$ se tiene $AN'_p = \hat{\pi}^{-1}(H)$ para todos salvo una cantidad finita de primos p.

Para $A \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}$ se tiene $A = \cap_p AN'_p$. En efecto, $[\hat{\pi}^{-1}(H) : A] = [\hat{N} : A \cap \hat{N}] = \prod_p [\hat{N} : (A \cap \hat{N})N'_p] = \prod_p [\hat{N} : AN'_p \cap \hat{N}] = \prod_p [\hat{\pi}^{-1}(H) : AN'_p] = [\hat{\pi}^{-1}(H) : \cap_p AN'_p]$. Recíprocamente, dados $A_p \in \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$, donde $A_p = \hat{\pi}^{-1}(H)$ para todos salvo una cantidad de primos p, entonces poniendo $A = \cap_p A_p$ tenemos $[A\hat{N} : A] = [\hat{N} : A \cap \hat{N}] = [\hat{N} : \cap_p (A_p \cap \hat{N})] = \prod_p [\hat{N} : A_p \cap \hat{N}] = \prod_p [\hat{\pi}^{-1}(H) : A_p] = [\hat{\pi}^{-1}(H) : \cap_p A_p]$. Luego $A\hat{N} = \hat{\pi}^{-1}(H)$, y como también obtuvimos anteriormente $[\hat{\pi}^{-1}(H) : A] = \prod_p [\hat{\pi}^{-1}(H) : AN'_p]$, la inclusión obvia $AN'_p \subseteq A_p$ implica $A_p = AN'_p$.

Concluímos así que $A \mapsto (AN'_p)_p$ da una biyección entre $\mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H}$ y el conjunto de aquellos $(A_p)_p \in \prod_p \mathscr{F}^*_{\hat{\mathfrak{G}},H,p}$ tales que $A_p = \hat{\pi}^{-1}(H)$ para todos salvo una cantidad finita de primos p, y más aún $[\hat{\pi}^{-1}(H) : A] = \prod_p [\hat{\pi}^{-1}(H) : AN'_p]$. Esto es exactamente la transcripción del producto de Euler que queríamos probar. □

3.1.5. Sea R un anillo c-binomial que es un dominio de valuación discreta con cuerpo residual finito de q elementos y elemento uniformizador $\pi \in R$. Para un τ_R-grupo N, todo R-subgrupo de N de índice finito tiene índice una potencia de q (1.2.12). Denotemos por $a^{\leq_R}_{q^k}(N)$ y $a^{\triangleleft_R}_{q^k}(N)$ respectivamente al número de R-subgrupos de N y de R-subgrupos normales de N de índice q^k. Veremos en (3.1.6) que estos números son siempre finitos por lo que podemos definir *la función zeta de R-subgrupos de N* y *la función zeta de R-subgrupos normales de N* como las siguientes series complejas:

$$\zeta^{\leq_R}_N(s) = \sum_{B \leq_R N} [N : B]^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\leq_R}_{q^k}(N)}{q^{ks}} \quad \text{y} \quad \zeta^{\triangleleft_R}_N(s) = \sum_{B \triangleleft_R N} [N : B]^{-s} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{\triangleleft_R}_{q^k}(N)}{q^{ks}}.$$

Como $\pi^k R$ es el único R-submódulo de R de índice q^k, se tiene $\zeta^{\leq_R}_R(s) = \zeta^{\triangleleft_R}_R(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q^{ks}} = \frac{1}{1-q^{-s}}$ en cuyo caso escribiremos simplemente $\zeta_R(s)$. El siguiente lema no es más que una adaptación de [dSG00, Prop. 1 y Prop. 4]

Lema 3.1.6. $\zeta^{\leq_R}_{R^h}(s) = \zeta_R(s)\zeta_R(s-1)\ldots\zeta_R(s-h+1)$. *Más en general, sea N es un τ_R-grupo de R-longitud de Hirsch h. Entonces para $s \in \mathbb{R}$ se tiene $\zeta^{\leq_R}_N(s) \leq \zeta^{\leq_R}_{R^h}(s)$.*

Demostración. Razonemos por inducción en h. Para $h = 1$ no hay nada que probar y por lo tanto supongamos $h > 1$. Sea Z un R-subgrupo cíclico del centro de N tal que N/Z es libre de R-torsión. Sean U, V R-subgrupos de N tales que $V \leq Z \leq U$ y con $[N : U]$ y $[Z : V]$ finitos. El conjunto de R-subgrupos B de N con $BZ = U$ y $B \cap Z = V$ está en correspondencia 1-1 con los R-subgrupos de U/V que son complementos de Z/V. Cuando un tal complemento Q_0 existe (lo cual ciertamente sucede si N es abeliano pues Z/V es el R-módulo de torsión del R-módulo U/V), es fácil ver que la correspondencia usual entre $\{Q \leq U/V : Q(Z/V) = U/V, Q \cap (Z/V) = 1\}$ y $\mathrm{Hom}(U/Z, Z/V)$ hace corresponder R-subgrupos con R-morfismos. Por lo tanto, la cantidad de R-subgrupos B de N con $BZ = U$ y $B \cap Z = V$ es menor o igual que $|\mathrm{Hom}_R(U/Z, Z/V)| \leq |Z/V|^{h-1}$, donde la última desigualdad se sigue pues U/Z tiene R-longitud de Hirsch $h-1$. La igualdad se da si N es abeliano. Para un tal R-subgrupo B se tiene que $[N : B] = [N : U][Z : V]$. Luego

$$\begin{aligned}
\zeta_N^{\leq_R}(s) &= \sum_{V \leq_R Z \leq U \leq_R N} [N : U]^{-s}[Z : V]^{-s} |\{B \leq_R : BZ = U, B \cap Z = V\}| \\
&\leq \sum_{V \leq_R Z \leq U \leq_R N} [N : U]^{-s}[Z : V]^{-s+h-1} \\
&\leq \zeta_{N/Z}^{\leq_R}(s)\zeta_Z^{\leq_R}(s-h+1) \leq \zeta_{R^{h-1}}^{\leq_R}(s)\zeta_R(s-h+1)
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad vale por hipótesis inductiva. Como todas estas desigualdad son igualdades en el caso en que N es abeliano entonces la demostración se completa por inducción. $\square$

3.1.7. Sea R un anillo c-binomial que es un dominio de valuación discreta y con cuerpo residual finito. Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo virtualmente τ_R-grupo (1.5.1). Un subgrupo A de G se dice un R-subgrupo si $A \cap N$ es un R-subgrupo de N. Denotamos por $\mathscr{F}_G^{\leq_R}$ y $\mathscr{F}_G^{\lhd_R}$ a los lattices de R-subgrupos de G y de R-subgrupos normales de G de índice finito y cuyas funciones zeta asociadas se denotarán por $\zeta_G^{\leq_R}(s)$ y $\zeta_G^{\lhd_R}(s)$ respectivamente. Para $* \in \{\leq, \lhd\}$ y $H \in \mathscr{F}_F^*$ ponemos $\mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*_R} = \{A \in \mathscr{F}_G^{*_R} : \pi(A) = H\}$ cuya función zeta asociada será

$$\zeta_{\mathfrak{G},H}^{*_R}(s) = \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*_R}} [\pi^{-1}(H) : A]^{-s}.$$

Las series $\zeta_{\mathfrak{G}}^{\leq_R}(s) := \zeta_{\mathfrak{G},F}^{\leq_R}(s)$ y $\zeta_{\mathfrak{G}}^{\lhd_R}(s) := \zeta_{\mathfrak{G},F}^{\lhd_R}(s)$ van a ser llamadas las *funciones zeta de R-subextensiones y de R-subextensiones normales de* $\mathfrak{G}$. Con la misma prueba de (3.1.4, (i)) se prueba que $\zeta_G^{*_R}(s) = \sum_{H \in \mathscr{F}_F^*} [F : H]^{-s} \zeta_{\mathfrak{G},H}^{*_R}(s)$; por lo tanto, las propiedades analíticas de $\zeta_G^{*_R}(s)$ pueden estudiarse a partir de las propiedades analíticas de las distintas funciones zeta $\zeta_{\mathfrak{G},H}^{*_R}(s)$.

3.2 Funciones zeta de grupos: caso local

3.2.1. Fijemos $c \in \mathbb{N}$ y un anillo c-binomial R que es un dominio de valuación discreta completo con cuerpo residual finito. Sean P el ideal maximal de R, q el número de elementos de R/P y K el cuerpo de fracciones de R. Sea $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ la valuación discreta y para $r \in R$ ponemos $|r| = q^{-v(r)}$, su norma P-ádica. Se tiene que R es un grupo compacto y de Hausdorff y entonces vamos a denotar por μ_R a la medida de Haar en R normalizada de modo que $\mu(R) = 1$, mientras que en R^n ($n \in \mathbb{N}$) siempre consideraremos la topología producto con la medida producto denotada por μ_{R^n}. Se obtiene por ejemplo que $\mu_R(rR) = |r|$ para todo $r \in R$.

Fijemos también un τ_R-grupo N con R-longitud de Hirsch h y una R-base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$ para N. El R-subgrupo de N generado por $\{x_i, \ldots, x_h\}$ será denotado por N_i. Denotaremos por $\varphi : R^h \to N$ a la biyección $(r_1, \ldots, r_h) \mapsto x_1^{r_1} \ldots x_h^{r_h}$, y por $\varphi_i : R^{h-i+1} \to N_i$ a la restricción de φ a R^{h-i+1}. Los polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en N con respecto a la base $(x_1, \ldots, x_h)$ serán denotados por $f_1, \ldots, f_h \in K[X_1, \ldots, X_h, Y_1, \ldots, Y_h]$ y $g_1, \ldots, g_h \in K[X_1, \ldots, X_h, Z]$ (1.2.10).

A N lo consideraremos siempre como un grupo topológico con la topología donde una base de entornos de la identidad es la familia de R-subgrupos de índice finito, o equivalentemente, R-subgrupos de longitud de Hirsch h (1.2.12). Notar que todo R-subgrupo de N de índice finito contiene un R-subgrupo normal de índice finito. En efecto, si B es un R-subgrupo de N de índice finito, existe a lo más una cantidad finita de subgrupos conjugados de B (3.1.6) y todos ellos son también R-subgrupos; luego la intersección de todos ellos es un R-subgrupo normal de índice finito. Notemos también que para todo $x \in R$, el morfismo de grupos $e_x : r \mapsto x^r$ de R en N es continuo. En efecto, si B es un R-subgrupo normal abierto de N entonces $\varphi^{-1}(B)$ es un R-subgrupo de R y por lo tanto es de la forma rR para algún $r \in R$. Como el morfismo inducido $R/rR \to N/B$ resulta inyectivo y N/B es finito, entonces R/rR es finito, por lo cual $r \neq 0$ y luego rR es abierto.

Lema 3.2.2. *N es un grupo profinito, es decir, es un grupo topolígico compacto, de Hausdorff y tiene una base de entornos de la identidad formada por subgrupos abiertos. Además φ es un homeomorfismo.*

Demostración. Basta probar la última afirmación. Si $\pi_i : R^h \to R$ es la proyección en la i-ésima coordenada entonces el mapa φ es la multiplicación de los mapas $e_{x_i} \circ \pi_i$ y por lo tanto es continuo. Para completar la demostración bastará probar que N es de Hausdorff, pues en tal caso $\varphi : R^h \to N$ será una biyección continua de un espacio compacto sobre un espacio de Hausdorff y, por lo tanto, un homeomorfismo.

Vamos a razonar por inducción en h. Si $h = 1$ entonces $N \cong R$ como grupos topológicos y por lo tanto N es de Hausdorff. Supongamos que $h > 1$ y sea $x \in N$ distinto de 1. Si $x \notin N_2$, la preimagen de cualquier R-subgrupo de $N/N_2 \cong R$ de índice finito que no contiene a la imagen de x es un R-subgrupo de N de índice finito que no contiene a x. Si $x \in N_2$, por hipótesis inductiva existe un R-subgrupo normal B' de N_2 de índice finito en N_2 y que no contiene a x. El grupo N actúa por conjugación en la familia de R-subgrupos N_2. Por (3.1.6) la órbita de B' es finita y por lo tanto el normalizador de B' en N tiene índice finito. Luego existe $y \in N \setminus N_2$ tal que $yB'y^{-1} = B'$. Es claro que $B = y^R B'$ es un R-subgrupo de N de índice finito y que no contiene a x. □

Corolario 3.2.3. *Para cada $i = 1, \ldots, h$, N_i es un R-subgrupo cerrado de N cuya topología inducida por la de N coincide con su topología como τ_R-grupo.*

Demostración. Es claro por la proposición anterior que N_i es un cerrado de N pues $N_i = \varphi(R^{h-i+1})$ y R^{h-i+1} es un cerrado en R^h. Aplicando la proposición anterior a la restricción $\varphi|_{R^{h-i+1}} = \varphi_i; R^{h-i+1} \to N_i$ obtenemos entonces que la topología de N_i como τ_R-grupo coincide con la topología como subespacio de N. □

Lema 3.2.4. *Si μ_N denota la medida de Haar en N normalizada de modo que $\mu_N(N) = 1$, entonces para todo boreliano S de R^h se tiene que $\mu_{R^h}(S) = \mu_N(\varphi(S))$. En particular, para todo R-subgrupo B de N y para todo $g \in N$ se tiene $\mu_{R^h}(\varphi^{-1}(gB)) = [N : B]^{-1}$.*

Demostración. Notar que por la descripción de la topología en N y por el hecho de que φ es un homeomorfismo (3.2.2), basta probar la última afirmación. Vamos a razonar por inducción en h. Como la afirmación para $h = 1$ es trivial, podemos suponer que $h > 1$. Sea B un R-subgrupo abierto de N con base buena $(y_1, \ldots, y_h)$, de modo que para cada $i = 1, \ldots, h$ se tiene $y_i = x_i^{r_{ii}} \ldots x_h^{r_{ih}}$ para ciertos $r_{ij} \in R$ con $r_{ii} \neq 0$, y sea $g = x_1^{\delta_1} \ldots x_h^{\delta_h} \in N$. Se tiene entonces $\varphi^{-1}(gB) =$

$\{(r_1,\dots,r_h)\in R^h : x_1^{r_1}\dots x_h^{r_h}\in gy_1^R(B\cap N_2)\}$. Para $r\in R$ tenemos que $gy_1^r = x_1^{\delta+r_{11}r}g_r$, donde $g_r = x_1^{-\delta_1-r_{11}r}gy_1^r$ es claramente un elemento de N_2. Notar que la aplicación $r\mapsto\varphi^{-1}(g_r)$ de R en R^{h-1} es continua pues la multiplicación y la exponenciación en N están dadas por mapas polinomiales. Sean $t_1,\dots,t_m$ representantes de las distintas clases laterales a izquierda de $B\cap N_2$ en N_2. Por hipótesis inductiva aplicada a N_2, cada $\varphi^{-1}(t_i(B\cap N_2))$ es un abierto en R^{h-1} con medida de Haar relativa $[N_2 : B\cap N_2]^{-1}$. Sea $V_i=\{r\in R : g_r\in t_i(B\cap N_2)\}$, el cual resulta entonces un abierto de R. Luego

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(gB) &= \bigcup_{i=1}^{m}\{(r_1,\dots,r_h) : r_1\in\delta_1+r_{11}V_i, x_2^{r_2}\dots x_h^{r_h}\in t_i(B\cap N_2)\}\\ &= \bigcup_{i=1}^{m}(\delta_1+r_{11}V_i)\times\varphi^{-1}(t_i(B\cap N_2))\end{aligned}$$

donde la unión es disjunta. Concluímos que $\mu_{R^h}(\varphi^{-1}(gB)) = \sum_{i=1}^m \mu_R(\delta_1+r_{11}V_i)\mu_{R^{h-1}}(\varphi^{-1}(t_i(B\cap N_2))) = \sum_{i=1}^m |r_{11}|\mu_R(V_i)[N_2 : B\cap N_2]^{-1} = \sum_{i=1}^h \mu_R(V_i)[N : BN_2]^{-1}[N_2 : B\cap N_2]^{-1} = [N:B]^{-1}$, donde la última igualdad vale pues la unión de todos los V_i's es R. □

3.2.5. Para un R-subgrupo abierto B de N denotamos por $\mathcal{M}(B)$ al conjunto de todas las matrices $(r_{ij})\in\mathrm{Tr}(h,R)$ que representan una base buena para B (1.2.11). Notar que para cualquier $(r_{ij})\in\mathcal{M}(B)$ se tiene que $|r_{ii}| = [N_i : (B\cap N_i)N_{i+1}]^{-1}$ y $[N:B]^{-1}=\prod_{i=1}^h|r_{ii}|$ (1.2.12).

Lema 3.2.6. *$\mathcal{M}(B)$ es un subconjunto abierto de $\mathrm{Tr}(h,R) = R^h\times R^{h-1}\times\dots\times R$ con medida $(1-q^{-1})^h\prod_{i=1}^h|r_{ii}|^i$.*

Demostración. Sea $(y_1,\dots,y_h)$ una base buena para B y escribamos $y_i = x_i^{r_{ii}}\dots x_h^{r_{ih}}$. Es claro que $(t_{ij})\in\mathrm{Tr}(h,R) = R^h\times R^{h-1}\times\dots\times R$ representa una base buena para B si y sólo si $x_i^{t_{ii}}\dots x_h^{t_{ih}}\in y_i^{R^*}(B\cap N_{i+1})$ para $i=1,\dots,h$. Como $(y_1,\dots,y_h)$ es una R-base de Mal'cev para B entonces por (3.2.2) y (3.2.4) se tiene que $y_i^{R^*}(B\cap N_{i+1})$ es un abierto de $B\cap N_i$ con medida relativa $\mu(R^*) = 1-q^{-1}$. Como $B\cap N_i$ es abierto en N_i con medida relativa $[N_i : B\cap N_i] = |r_{ii}|\dots|r_{hh}|$, entonces $y_i^{R^*}(B\cap N_{i+1})$ es un abierto de N_i con medida $(1-q^{-1})\prod_{k=i}^h|r_{kk}|$. Por (3.2.2) y (3.2.4) aplicados a $\varphi_i : R^i\to N_i$ se sigue $\mathcal{M}(B) = \varphi_1^{-1}(y_1^{R^*}(B\cap N_2))\times\dots\times\varphi_{h-1}^{-1}(y_{h-1}^{R^*}(B\cap N_h))\times\varphi_h^{-1}(y_h^{R^*})$ es un abierto de $R^h\times R^{h-1}\times\dots\times R$ con medida $(1-q^{-1})^h\prod_{i=1}^h|r_{ii}|^i$. □

Denotamos por $\mathcal{M}^{\leq_R}$ y $\mathcal{M}^{\triangleleft_R}$ respectivamente a los conjuntos de matrices en $\mathrm{Tr}(h,R)$ que representan una base buena para algún R-subgrupo abierto de N y para algún R-subgrupo normal abierto de N. Por (3.2.6), estos son subconjuntos abiertos de $\mathrm{Tr}(h,R)$. Denotamos por μ a la medida de Haar normalizada en $\mathrm{Tr}(h,R) = R^{h(h+1)/2}$. Se obtiene el siguiente resultado análogo a [GSS88, Proposition 2.6].

Proposición 3.2.7. *Para $*\in\{\leq,\triangleleft\}$ se tiene*

$$\zeta_N^{*_R}(s) = (1-q^{-1})^{-h}\int_{\mathcal{M}^{*_R}}|r_{11}|^{s-1}\dots|r_{hh}|^{s-h}d\mu$$

Demostración. Para un R-subgrupo abierto B de N y una matriz $(r_{ij})\in\mathrm{Tr}(h,R)$ que representa una base buena para B se tiene por (3.2.5) y (3.2.6) que $|r_{ii}|$ depende sólo de B y además $[N :$

$B]^{-s} = \prod_{i=1}^h |r_{ii}|^s = (1-q^{-1})^{-h}(\prod_{i=1}^h |r_{ii}|^{s-i})\mu(\mathcal{M}(B)) = (1-q^{-1})^{-h}\int_{\mathcal{M}(B)} |r_{11}|^{s-1}\dots|r_{hh}|^{s-h}d\mu$. Para $* \in \{\leq, \lhd\}$ se tiene entonces

$$\begin{aligned}\zeta_N^{*_R}(s) &= \sum_{B *_R N}[N:B]^{-s} = \sum_{B *_R N}(1-q^{-1})^{-h}\int_{\mathcal{M}(B)} |r_{11}|^{s-1}\dots|r_{hh}|^{s-h}d\mu \\ &= (1-q^{-1})^{-h}\int_{\mathcal{M}^{*_R}} |r_{11}|^{s-1}\dots|r_{hh}|^{s-h}d\mu\end{aligned}$$

□

La siguiente descripción de $\mathcal{M}^{*_R}$ es análoga a la obtenida en [GSS88, Lemma 2.4 y Lemma 2.5].

Proposición 3.2.8. *Sea* $\mathbf{r} = (r_{ij}) \in \mathrm{Tr}(h, R)$ *cuyos vectores filas los denotamos por* $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_h$.

(i) $\mathbf{r} \in \mathcal{M}^{\leq_R}$ *si y sólo si* $r_{11}\dots r_{hh} \neq 0$ *y* $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_j}] \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_{j+1}}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\rangle_R$ *para* $1 \leq i < j \leq h$.

(ii) Si $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_h$ *son los vectores de la base canónica de* R^h, *entonces* $\mathbf{r} \in \mathcal{M}^{\lhd_R}$ *si y sólo si* $r_{11}\dots r_{hh} \neq 0$ *y* $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{e}_j}] \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_{i+1}}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\rangle_R$ *para* $1 \leq i < h$ *y* $1 \leq j < h$.

Demostración. Denotemos $B_i = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\rangle_R$. Si $(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h})$ es base buena para $B = B_1$ entonces ella es una R-base de Mal'cev para B; por lo tanto $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_j}] \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_{j+1}}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\rangle_R$ para $1 \leq i < j \leq h$ y $|r_{11}|\dots|r_{hh}| = [N : B]^{-1} \neq 0$. Si además B es normal entonces $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{e}_j}] \in N_{i+1} \cap B = B_{i+1}$. Recíprocamente, si $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_j}] \in B_i$ para $1 \leq i < j \leq h$ entonces todo elemento de B_i se escribe en la forma $(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i})^{a_i}\dots(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_h})^{a_h}$ con $a_i, \dots, a_h \in R$; por lo tanto $B_i = B \cap N_i$, que es normal en B, y $B_i = (\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i})^R B_{i+1}$. Además, si $r_{ii} \neq 0$ entonces $\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i} \notin N_{i+1} \supseteq B_{i+1}$ y , por lo tanto, $B_i/B_{i+1} \cong R$. Por lo tanto $\{\mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\}$ es una R-base de Mal'cev para B y $\mathbf{r}$ representa una base buena. Por otro lado, si se verifica $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{e}_j}] \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_{i+1}}, \dots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h}\rangle_R$ para todo $1 \leq i, j < h$, entonces cada B_i es un R-subgrupo normal en N y es fácil ver que se verifica $[\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_j}] \in B_i$ para $1 \leq i < j \leq h$. Como antes, se concluye que $\mathbf{r}$ representa una base buena. □

3.2.9. Con las hipótesis de antes, sea ahora F un grupo finito y $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ una extensión de F por N que es un grupo virtualmente τ_R-grupo (1.5.1). Sea $\sigma : F \to G$ una sección normalizada con cociclo asociado (ϕ, ψ) (1.4.4) y supongamos (esto siempre es posible) que $\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1}$. Vamos a suponer además que N es un subgrupo de G y que ι es la inclusión. Fijamos $H \in \mathscr{F}_F^*$. Para $A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{S},H}^{*_R}$ es fácil ver que existen $n_f \in N$ $(f \in H)$ tales que

$$A = (A \cap N) \cup \bigcup_{f \in H\setminus\{1\}} (A \cap N)n_f\sigma(f).$$

Esto nos permite definir $\mathcal{T}(A)$ como el conjunto de todos los pares de matrices $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, R) \times \prod_{f \in H\setminus\{1\}} R^h$ tales que $\mathbf{r}$ representa una base buena para $A \cap N$ y $\{1\} \cup \bigcup_{f\in H\setminus\{1\}}\{\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)\}$ es una transversal de las clases laterales a derecha de $A \cap N$ in A.

Lema 3.2.10. $\mathcal{T}(A)$ *es un subconjunto abierto de* $\mathrm{Tr}(h, R) \times \prod_{f\in H\setminus\{1\}} R^h$ *con medida de Haar*

$$\mu(\mathcal{T}(A)) = (1-q^{-1})^h \prod_{i=1}^h |r_{ii}|^{i+|H|-1}.$$

Demostración. Si $A = (A \cap N) \cup \bigcup_{f \in H \setminus \{1\}} (A \cap N) n_f \sigma(f)$ con $n_f \in N$, entonces claramente $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}(A)$ si y sólo si $\mathbf{r} \in \mathcal{M}(A \cap N)$ y $(A \cap N)\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f) = (A \cap N) n_f \sigma(f)$ para todo $f \in H \setminus \{1\}$. La última igualdad es equivalente a $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \in (A \cap N) n_f$, y esta condición equivale a $\mathbf{v}_f \in \varphi^{-1}((A \cap N) n_f)$. Por lo tanto $\mathcal{T}(A) = \mathcal{M}(A \cap N) \times \prod_{f \in H \setminus \{1\}} \varphi^{-1}((A \cap N) n_f)$, y este es un subconjunto abierto de $\mathrm{Tr}(h, R) \times \prod_{H \setminus \{1\} \times h} R^h$ (3.2.2) con medida $\mu(\mathcal{M}(A \cap N))[N : A]^{-|H|+1}$ (3.2.4). El resultado se sigue de (3.2.5) y (3.2.6). $\square$

3.2.11. Para $* \in \{\leq, \lhd\}$, sea $\mathcal{T}_H^{*R} = \bigcup_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*R}} \mathcal{T}(A)$. Por el Lema 3.2.10, este es un subconjunto abierto de $\mathrm{Tr}(h, R) \times_{f \in H \setminus \{1\}} R^h$.

Proposición 3.2.12. *Sea μ la medida de Haar normalizada en $\mathrm{Tr}(h, R) \times_{f \in H \setminus \{1\}} R^h$. Entonces*

$$\zeta_{\mathfrak{G},H}^{*R}(s) = (1 - q^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}_H^{*R}} \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^{s-i-|H|+1} d\mu$$

Demostración. Para $A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*R}$, se tiene por (3.2.5) y (3.2.10) que $[\pi^{-1}(H) : A]^{-s} = [N : A \cap N]^{-s} = \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^s = (1 - q^{-1})^{-h} \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^{s-i-|H|+1} \mu(\mathcal{T}(A)) = (1 - q^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}(A)} \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^{s-i-|H|+1} d\mu$. Luego

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathfrak{G},H}^{*R}(s) &= \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*R}} [\pi^{-1}(H) : A]^{-s} = \sum_{A \in \mathscr{F}_{\mathfrak{G},H}^{*R}} (1 - q^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}(A)} \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^{s-i-|H|+1} d\mu \\
&= (1 - q^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}_H^{*R}} \prod_{i=1}^{h} |r_{ii}|^{s-i-|H|+1} d\mu.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposición 3.2.13. *Para $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, R) \times \prod_{f \in H \setminus \{1\}} R^h$ denotamos por $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_h$ a las filas de $\mathbf{r}$. Se verifica lo siguiente.*

(i) $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_H^{\leq R}$ *si y sólo si* $\mathbf{r} \in \mathcal{M}^{\leq R}$ *y además*

- *(a)* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f})^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f \in H \setminus \{1\}$ *y* $i = 1, \ldots, h$;
- *(b)* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}} \psi(f, f')(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'}})^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f, f' \in H \setminus \{1\}$ *con* $ff' \neq 1$ *y* $i = 1, \ldots, h$; *y*
- *(c)* $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f^{-1}}}) \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f \in H \setminus \{1\}$.

(ii) $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_H^{\lhd R}$ *si y sólo si* $\mathbf{r} \in \mathcal{M}^{\lhd R}$, *se verifica (a), (b), (c), y además*

- *(a')* $\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}) \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f \in F \setminus \{1\}$ *y* $i = 1, \ldots, h$;
- *(b')* $x_i \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \phi(f)(x_i^{-1}) \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f \in F \setminus \{1\}$ *y* $i = 1, \ldots, h$; *y*
- *(c')* $\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}}) \psi(f, f') \psi(ff', f^{-1})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'f^{-1}}})^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ *para* $f \in F \setminus H, f' \in H \setminus \{1\}$.

Demostración. Para $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, R) \times \prod_{f \in H \setminus \{1\}} R^h$ vamos a denotar $B_{\mathbf{r}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{r}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{r}_h} \rangle_R$ y $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}} = B_{\mathbf{r}} \cup \bigcup_{f \in H \setminus \{1\}} B_{\mathbf{r}} \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f} \sigma(f)$. Se tiene que $B_{\mathbf{r}} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}} \cap N$.

(i) Notar que $(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_H^{\leq R}$ si y sólo si $\mathbf{r}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{r}}$ y además $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ es un subgrupo de G. Asumiendo que $\mathbf{r}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{r}}$, como N es normal en $\pi^{-1}(H)$

y $B_{\mathbf{r}} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}} \cap N$ se tiene que $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ es un subgrupo de G si y sólo si $\{\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)\}_{f\in H\setminus\{1\}}$ está contenido en el normalizador $N_G(B_{\mathbf{r}})$ de $B_{\mathbf{r}}$ y $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}/B_{\mathbf{r}}$ es un subgrupo de $N_G(B_{\mathbf{r}})/B_{\mathbf{r}}$. Ahora $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f) \in N_G(B_{\mathbf{r}})$ si y sólo si $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}\sigma(f)^{-1}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f})^{-1} = \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f})^{-1} \in B_{\mathbf{t}}$ para $i = 1,\ldots,h$, es decir (a); y si esto vale para todo $f \in H \setminus \{1\}$ entonces $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}/B_{\mathbf{t}}$ es un subgrupo de $N_G(B_{\mathbf{r}})/B_{\mathbf{r}}$ si y sólo si $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}}\sigma(f')(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'}}\sigma(ff'))^{-1} \in B_{\mathbf{r}}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f^{-1}}}\sigma(f^{-1})) = \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f^{-1}}}) \in B_{\mathbf{r}}$ para $f, f' \in H \setminus \{1\}$ con $ff' \neq 1$. Esto es (b) y (c) pues $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}}\sigma(f')(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'}}\sigma(ff'))^{-1} = \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\sigma(f)\sigma(f')\sigma(f'^{-1}f^{-1})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'}})^{-1} = \mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\psi(f,f')(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'}})^{-1}$.

(ii) Notar que $(\mathbf{r},\mathbf{v}) \in \mathcal{R}_H^{\lhd R}$ si y sólo si $B_{\mathbf{r}}$ es normal en G, $\mathbf{r}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{r}}$ y $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}/B_{\mathbf{r}}$ es un subgrupo normal de $G/B_{\mathbf{r}}$. Asumamos entonces que $\mathbf{r}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{r}}$ y que $B_{\mathbf{r}}$ es normal en N. Las condiciones anteriores se traducen entonces diciendo que $\{\sigma(f)\}_{f\in F}$ está en el normalizador de $B_{\mathbf{t}}$, $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ es un subgrupo de G y los conjuntos $\{x_i\}_{1\le i\le h}$ y $\{\sigma(f)\}_{f\in F\setminus\{1\}}$ están contenidos en el normalizador de $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$. Usando (i), esto equivale a que se cumplan (a), (b), (c), $\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}\sigma(f)^{-1} = \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}_i}) \in B_{\mathbf{r}}$ para $f \in F \setminus \{1\}$ y $i = 1,\ldots,h$, es decir (a'), $x_iA_{\mathbf{r},\mathbf{v}}x_i^{-1} \in A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ para $i = 1,\ldots,h$ y $\sigma(f)A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}\sigma(f)^{-1} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ para $f \in F \setminus \{1\}$. Para traducir estas últimas dos condiciones, asumamos que $B_{\mathbf{r}}$ es normal en G y que $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ es un subgrupo de G. La normalidad de $B_{\mathbf{r}}$ implica la igualdad $x_iA_{\mathbf{r},\mathbf{v}}x_i^{-1} = B_{\mathbf{r}} \cup \bigcup_{f\in H\setminus\{1\}} B_{\mathbf{r}}x_i\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)x_i^{-1}$ y como $x_i\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)x_i^{-1} = x_i\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(x_i^{-1})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\sigma(f)$ obtenemos que $x_iA_{\mathbf{r},\mathbf{v}}x_i^{-1} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ para $i = 1,\ldots,h$ equivale a $x_i\mathbf{x}^{\mathbf{v}_f}\phi(f)(x_i^{-1}) \in B_{\mathbf{t}}$ para $i = 1,\ldots,h$ y $f \in F \setminus \{1\}$, es decir (b'). Asumiendo también esta condición, resulta que $A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ es normal en $NA_{\mathbf{r},\mathbf{v}} = \pi^{-1}(H)$ y por lo tanto la condición $\sigma(f)A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}\sigma(f)^{-1} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ sólo necesita ser verificada para $f \in F \setminus H$. La normalidad de $B_{\mathbf{r}}$ implica $\sigma(f)A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}\sigma(f)^{-1} = B_{\mathbf{r}} \cup \bigcup_{f'\in H\setminus\{1\}} B_{\mathbf{r}}\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}}\sigma(f')\sigma(f^{-1})$. Como $\sigma(f)\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}}\sigma(f')\sigma(f^{-1}) = \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\psi(f,f')\sigma(ff')\sigma(f^{-1}) = \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\psi(f,f')\psi(ff',f^{-1})\sigma(ff'f^{-1}) = \phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\psi(f,f')\psi(ff',f^{-1})$ obtenemos que la condición $\sigma(f)A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}\sigma(f)^{-1} = A_{\mathbf{r},\mathbf{v}}$ para $f \in F \setminus H$ equivale a la condición $\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{f'}})\psi(f,f')\psi(ff',f^{-1})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{ff'f^{-1}}})^{-1} \in B_{\mathbf{r}}$ para $f \in F \setminus H$ y $f' \in H \setminus \{1\}$, es decir (c'). $\square$

3.3 Funciones zeta de grupos: caso global

3.3.1. Sea K un cuerpo de números y N un τ_K-grupo con K-base de Mal'cev $(x_1,\ldots,x_h)$. Sean $f_1,\ldots,f_h \in K[\mathbf{X},\mathbf{Y}]$ y $g_1,\ldots,g_h \in K[\mathbf{X},Z]$, donde $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_h)$ y $\mathbf{Y} = (Y_1,\ldots,Y_h)$, los polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en N con respecto a esta base (1.2.10). Escribimos $\mathbf{f} = (f_1,\ldots,f_h)$ y $\mathbf{g} = (g_1,\ldots,g_h)$. Los polinomios que expresan el conmutador serán muy frecuentes en nuestro análsis. Ellos son $c_i(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = f_i(\mathbf{f}(\mathbf{X},\mathbf{Y}),\mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{Y},\mathbf{X}),-1))$ $(i = 1,\ldots,h)$ y escribiremos $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_h)$.

3.3.2. Para una colección de variables variables $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_h)$ siempre denotaremos $\mathbf{X}^i = (0,\ldots,0,X_i,\ldots,X_h)$ y $\mathbf{X}^{(i)} = (X_i,\ldots,X_h)$. Esto también se aplica a colecciones de polinomios $\mathbf{p} = (p_1,\ldots,p_h)$. A continuacón, algunas de las propiedades de los polinomios $f_1,\ldots,f_h$, $g_1,\ldots,g_h$ y $c_1,\ldots,c_h$ que serán usadas frecuentemente.

- $f_j(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i) = 0$ y $g_j(\mathbf{X}^i,Z) = 0$ para $1 \le j < i \le h$,
- $f_i(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i) = X_i + Y_i$ y $g_i(\mathbf{X}^i,Z) = X_iZ$ para $1 \le i \le h$, y
- $c_k(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^j) = 0$ para $1 \le i,j,k \le h$ y $k \le \min\{i,j\}$.

3.3.3. Para $i = 1,\ldots,h$, sean $\mathbf{f}^{(i)} = (f_i(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i),\ldots,f_h(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i))$, $\mathbf{g}^{(i)} = (g_i(\mathbf{X}^i,Z),\ldots,g_h(\mathbf{X}^i,Z))$ y $\mathbf{c}^{(i)} = (c_i(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i),\ldots,c_h(\mathbf{X}^i,\mathbf{Y}^i))$. Notar que estos son precisamente los polinomios que representan la multiplicación, la exponenciación y el conmutador en N_i, el K-subgrupo de N generado por $\{x_i, \ldots, x_h\}$, con respecto a la K-base de Mal'cev $(x_i, \ldots, x_h)$.

3.3.4. A partir de $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ y de colecciones de variables $\mathbf{T} = (T_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq h}$ y $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_h)$, vamos a definir polinomios $p_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \ldots, p_h(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ y $q_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \ldots, q_h(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ del siguiente modo:

(1) Elegimos variables auxiliares $W_1, \ldots, W_h$ y además escribimos $\mathbf{T}_i = (0, \ldots, 0, T_{ii}, \ldots, T_{ih})$.

(2) Se definen recursivamente colecciones de polinomios $\mathbf{k}_1, \ldots, \mathbf{k}_h$ del siguiente modo

- $\mathbf{k}_1 = \mathbf{Z}$.
- $\mathbf{k}_i = \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{g}^i(\mathbf{T}_{i-1}, W_{i-1}), -1), \mathbf{k}_{i-1}^i)$ para $1 < i \leq h$.

Notar que $\mathbf{k}_i$ es de la forma $(0, \ldots, 0, k_{ii}, \ldots, k_{ih})$ donde para $1 < i \leq j$, k_{ij} es un polinomio en las variables T_{rs} $(r < i, r \leq s)$, $Z_1, \ldots, Z_h$ y $W_1, \ldots, W_{i-1}$. Para simplificar escribiremos $k_{ij} = k_{ij}(\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{i-1}, \mathbf{Z}, W_1, \ldots, W_{i-1})$.

(3) Se definen recursivamente funciones racionales $v_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \ldots, v_h(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ del siguiente modo

- $v_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = k_{11}(\mathbf{Z})/T_{11}$
- $v_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = k_{ii}(\mathbf{T}_1, \ldots, \mathbf{T}_{i-1}, \mathbf{Z}, v_1(\mathbf{T}, \mathbf{Z}), \ldots, v_{i-1}(\mathbf{T}, \mathbf{Z}))/T_{ii}$ for $1 < i \leq h$.

(4) Para $i = 1, \ldots, h$, se escribe finalmente $v_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = p_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z})/q_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ donde $p_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ y $q_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ son polinomios sin factores en común. Notar que $q_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z})$ es un monomio en $T_{11}, \ldots, T_{ii}$ por lo cual directamente escribiremos $q_i(\mathbf{T}, \mathbf{Z}) = T_{11}^{\epsilon_{i1}} \ldots T_{ii}^{\epsilon_{ii}}$ para ciertos enteros no negativos $\epsilon_{i1}, \ldots, \epsilon_{ii}$.

3.3.5. Para $i = 1, \ldots, h$, a partir de $(\mathbf{f}^{(i)}, \mathbf{g}^{(i)})$ y de las colecciones de variables $\mathbf{T}^{(i)} = (T_{rs})_{i \leq r \leq s \leq h}$ y $Z^{(i)} = (Z_i, \ldots, Z_h)$, podemos aplicar el método anterior donde en (1) usaremos variables auxiliares $W_i, \ldots, W_h$, mientras que en (2) la definición arranca con $\mathbf{k}_i = Z^{(i)}$. Como resultado se obtienen polinomios $p_i^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)}), \ldots, p_h^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)})$ y $q_i^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)}), \ldots, q_h^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)})$, de modo que para $i \leq j \leq h$, $q_j^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, \mathbf{Z}^{(i)}) = T_{ii}^{\epsilon_{ji}^{(i)}} \ldots T_{jj}^{\epsilon_{jj}^{(i)}}$ para ciertos enteros no negativos $\epsilon_{ji}^{(i)}, \ldots, \epsilon_{jj}^{(i)}$.

3.3.6. Asociamos a $(N, \mathbf{f}, \mathbf{g})$ las siguientes colecciones de polinomios sobre K.

$$\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\leq} = \left(\prod_{i=1}^{h} T_{ii}, \prod_{i=1}^{h} T_{ii}^{h-i}, (T_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}}, p_k^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, c_i(\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_{i-1}), \ldots, c_h(\mathbf{T}_j, \mathbf{T}_{i-1})))_{1 \leq j < i-1 < k \leq h} \right),$$

$$\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\triangleleft} = \left(\prod_{i=1}^{h} T_{ii}, \prod_{i=1}^{h} T_{ii}^{h-i}, (T_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}}, p_k^{(i)}(\mathbf{T}^{(i)}, c_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{T}_{i-1}), \ldots, c_h(\mathbf{e}_j, \mathbf{T}_{i-1})))_{\substack{1 < i \leq k \leq h \\ 1 \leq j < h}} \right),$$

donde $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_h$ son los vectores de la base canónica de K^h. Sean $Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\leq}}(s)$ y $Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\triangleleft}}(s)$ las integrales cónicas globales sobre K asociadas a estos datos de integrales cónicas (2.1.10). Entonces *la función zeta de subgrupos* y *la función zeta de subgrupos normales de* N con respecto a la K-base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$ son respectivamente las series

$$\zeta_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\leq}(s) = Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\leq}}(s-h) \quad \text{y} \quad \zeta_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\triangleleft}(s) = Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\triangleleft}}(s-h).$$

3.3.7. Si $K \hookrightarrow K'$ es una extensión finita de cuerpos entonces $(x_1, \ldots, x_h)$ puede considerarse una K'-base de Mal'cev de $N \otimes_K K'$, la K'-completación de Mal'cev de N y los polinomios que expresan la multiplicación y la exponenciación en $N \otimes_K K'$ son precisamente $f_1, \ldots, f_h$ y $g_1, \ldots, g_h$ (1.3.5). Como todo el trabajo con polinomios que hemos hecho anteriormente no depende del cuerpo en donde viven los coeficientes, concluímos que $\mathcal{D}^*_{N\otimes_K K',\mathbf{f},\mathbf{g}} = \mathcal{D}^*_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}$ $(* \in \{\leq, \lhd\})$, lo cual por (2.2.1) se expresa como $\mathcal{D}^*_{N\otimes_K K',\mathbf{f},\mathbf{g}} = \mathcal{D}^*_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}} \otimes_K K'$. Del Teorema 2.2.6 concluímos el siguiente corolario.

Corolario 3.3.8. *Sea $* \in \{\leq, \lhd\}$. Si $K \hookrightarrow K'$ es una extensión finita de cuerpos entonces $\zeta^*_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}(s)$ y $\zeta^*_{N\otimes_K K',\mathbf{f},\mathbf{g}}(s)$ tienen la misma abscisa de convergencia.*

3.3.9. Sea O el anillo de enteros de K y sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O tal que para todo $r_1, \ldots, r_h, s_1, \ldots, s_h, z \in O_\mathfrak{p}$ se tiene $f_i(r_1, \ldots, r_h, s_1, \ldots, s_h) \in R$ y $g_i(r_1, \ldots, r_h, z) \in O_\mathfrak{p}$ y tal que $O_\mathfrak{p}$ es c-binomial, donde c es la clase de N. Definimos $N_\mathfrak{p} = \{x_1^{r_1} \ldots x_h^{r_h} : r_1, \ldots, r_h \in O_\mathfrak{p}\}$. Notar que N es un grupo nilpotente $O_\mathfrak{p}$-potenciado sin elementos de $O_\mathfrak{p}$-torsión y, por la elección de $\mathfrak{p}$, se obtiene que $N_\mathfrak{p}$ es un $O_\mathfrak{p}$-subgrupo de N. Luego $N_\mathfrak{p}$ es también un grupo nilpotente $O_\mathfrak{p}$-potenciado sin elementos de $O_\mathfrak{p}$-torsión, y como es finitamente generado por definición, $N_\mathfrak{p}$ es un $\tau_{O_\mathfrak{p}}$-grupo. Es claro que $(x_1, \ldots, x_h)$ es una $O_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev para $N_\mathfrak{p}$ y además N es la K-completación de Mal'cev de $N_\mathfrak{p}$ (1.3.5).

Finalmente sea $\hat{O}_\mathfrak{p}$ la completación $\mathfrak{p}$-ádica de O y escribamos $r|s$ si $v_\mathfrak{p}(r) \leq v_\mathfrak{p}(s)$, donde $v_\mathfrak{p}$ es la valuación $\mathfrak{p}$-ádica. Denotando por $\hat{N}_\mathfrak{p}$ a la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-completación de Mal'cev de $N_\mathfrak{p}$ resulta que $(x_1, \ldots, x_h)$ también es $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev de $\hat{N}_\mathfrak{p}$ y cuyos polinomios asociados a la multiplicacíin y a la exponenciación son precisamente $f_1, \ldots, f_h$ y $g_1, \ldots, g_h$ (1.3.5).

Proposición 3.3.10. *Supongamos que $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{Tr}(h, \hat{O}_\mathfrak{p})$ representa una base buena para algún $\hat{O}_\mathfrak{p}$-subgrupo abierto de $\hat{N}_\mathfrak{p}$ y sea $(z_1, \ldots, z_h) \in \hat{O}_\mathfrak{p}^h$. Entonces $x_1^{z_1} \ldots x_h^{z_h} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$ si y sólo si $t_{11}^{\epsilon_{i1}} \ldots t_{ii}^{\epsilon_{ii}} | p_i(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ para $i = 1, \ldots, h$ (3.3.4).*

Demostración. Sea $B_\mathbf{t} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Como $\mathbf{t}$ representa una base buena para $B_\mathbf{t}$, todo elemento de $B_\mathbf{t}$ puede escribirse de manera única en la forma $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1})^{a_1} \ldots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})^{a_h}$ para ciertos $a_i \in \hat{O}_\mathfrak{p}$. El elemento $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i})^{a_i} \ldots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})^{a_h}$ escrito en la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$ tiene la forma $x_i^{t_{ii}a_i} x_{i+1}^{b_{i+1}} \ldots x_h^{b_h}$ para ciertos $b_{i+1}, \ldots, b_h \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ (3.3.2). Haremos uso de estos hechos sin mención explícita.

Sea $w_i = v_i(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ (3.3.4). Se tiene que $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $\mathbf{x}^\mathbf{z} = (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1})^{a_1} \ldots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})^{a_h}$ para ciertos $a_1, \ldots, a_h \in \hat{O}_\mathfrak{p}$. Como $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1})^{a_1} \ldots (\mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})^{a_h}$ tiene la forma $x_1^{t_{11}a_1} x_2^{b_2} \ldots x_h^{b_h}$, la condición $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ implica $t_{11}|z_1$, o equivalentemente $w_1 \in \hat{O}_\mathfrak{p}$, y por lo tanto, el elemento $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1})^{z_1/t_{11}} = \mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{t}_1, w_1)}$ debe estar en $B_\mathbf{t}$. Entonces $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $w_1 \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^\mathbf{z} = \mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{t}_1, w_1)} n$ para algún $n \in B_\mathbf{t}$. Como $g_1(\mathbf{t}_1, w_1) = t_{11} w_1 = z_1$, la última condición equivale a $w_1 \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{z}^2} = \mathbf{x}^{\mathbf{g}^2(\mathbf{t}_1, w_1)} n$, para algún $n \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Se tiene que $(\mathbf{x}^{\mathbf{g}^2(\mathbf{t}_1, w_1)})^{-1} \mathbf{x}^{\mathbf{z}^2} = \mathbf{x}^{\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{g}^2(\mathbf{t}_1, w_1), -1), \mathbf{z}^2)} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_2(\mathbf{t}_1, \mathbf{z}, w_1)}$; por lo tanto, $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $w_1 \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_2(\mathbf{t}_1, \mathbf{z}, w_1)} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$.

Sea $i > 1$ y asumamos que $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $w_1, \ldots, w_{i-1} \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_i(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_{i-1})} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Trabajando como en el párrafo anterior y asumiendo que $w_1, \ldots, w_{i-1} \in \hat{O}_\mathfrak{p}$, vemos que la última condición es equivalente a $t_{ii} | k_{ii}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_{i-1})$ (o equivalentemente a $w_i \in \hat{O}_\mathfrak{p}$) y $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_i(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_{i-1})} = \mathbf{x}^{\mathbf{g}(\mathbf{t}_i, w_i)} n$ para algún $n \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Nuevamente esto equivale a $w_i \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_i^{i+1}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_{i-1})} = \mathbf{x}^{\mathbf{g}^{i+1}(\mathbf{t}_i, w_i)} n$ para algún $n \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Notemos que $(\mathbf{x}^{\mathbf{g}^{i+1}(\mathbf{t}_i, w_i)})^{-1} \mathbf{x}^{\mathbf{k}_i^{i+1}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_i)} = \mathbf{x}^{\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{g}^{i+1}(\mathbf{t}_i, w_i), -1), \mathbf{k}_i^{i+1}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_{i-1}, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_i))} = \mathbf{x}^{\mathbf{k}_{i+1}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_i, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_i)}$. Obtenemos que $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $w_1, \ldots, w_i \in \hat{O}_\mathfrak{p}$ y $\mathbf{x}^{\mathbf{k}_{i+1}(\mathbf{t}_1, \ldots, \mathbf{t}_i, \mathbf{z}, w_1, \ldots, w_i)} \in$

$\langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_{i+1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Por inducción concluímos que $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $w_1, \ldots, w_h \in \hat{O}_\mathfrak{p}$, y como $w_i = p_i(\mathbf{t}, \mathbf{z})/t_{11}^{\epsilon_{i1}} \ldots t_{ii}^{\epsilon_{ii}}$, tenemos entonces que $\mathbf{x}^\mathbf{z} \in B_\mathbf{t}$ si y sólo si $t_{11}^{\epsilon_{i1}} \ldots t_{ii}^{\epsilon_{ii}} | p_i(\mathbf{t}, \mathbf{z})$ para $i = 1, \ldots, h$. □

Con la notación de (3.3.5) obtenemos

Proposición 3.3.11. *Una matriz $\mathbf{t} \in \mathrm{Tr}(h, \hat{O}_\mathfrak{p})$ representa una base buena para algún $\hat{O}_\mathfrak{p}$-subgrupo abierto de $\hat{N}_\mathfrak{p}$ si y sólo si $t_{11} \ldots t_{hh} \neq 0$ y*

$$t_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}} | p_k^{(i)}(\mathbf{t}^{(i)}, c_i(\mathbf{t}_j, \mathbf{t}_{i-1}), \ldots, c_h(\mathbf{t}_j, \mathbf{t}_{i-1})) \quad \textit{para} \quad 1 \leq j < i - 1 < k \leq h.$$

Una matriz $\mathbf{t} \in \mathrm{Tr}(h, \hat{O}_\mathfrak{p})$ representa una base buena para algún $\hat{O}_\mathfrak{p}$-subgrupo normal abierto de $\hat{N}_\mathfrak{p}$ si y sólo si $t_{11} \ldots t_{hh} \neq 0$ y

$$t_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}} | p_k^{(i)}(\mathbf{t}^{(i)}, c_i(\mathbf{e}_j, \mathbf{t}_{i-1}), \ldots, c_h(\mathbf{e}_j, \mathbf{t}_{i-1})) \quad \textit{para} \quad 1 < i \leq k \leq h, 1 \leq j < h.$$

Demostración. La necesidad de las condiciones en ambos casos es una aplicación inmediata de la Proposición 3.2.8 y la Proposición 3.3.10. Para ver la recíproca, escribamos $B_i = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Por la Proposición 3.3.10 bastará ver que $\mathbf{x}^{\mathbf{c}(\mathbf{t}_j, \mathbf{t}_{i-1})} \in B_i$ para $1 \leq j < i \leq h$ (resp. $\mathbf{x}^{\mathbf{c}(\mathbf{e}_j, \mathbf{t}_{i-1})} \in B_i$ para $1 < i \leq h$ y $1 \leq j < h$). Es claro que $\mathbf{x}^{\mathbf{t}_h}$ es una base buena para B_h con respecto a la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev (x_h) de $\langle x_h \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. Asumamos que $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})$ es una base buena para B_i con respecto a la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev $(x_i, \ldots, x_h)$ para $\langle x_i, \ldots, x_h \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. La hipótesis y la Proposición 3.3.10 implican que $\mathbf{x}^{\mathbf{c}(\mathbf{t}_j, \mathbf{t}_{i-1})} \in B_i$ para $1 \leq j < i$ (resp. $\mathbf{x}^{\mathbf{c}(\mathbf{e}_j, \mathbf{t}_{i-1})} \in B_i$ para $1 \leq j < h$) y por la Proposición 3.2.8 se concluye también que $(\mathbf{x}^{\mathbf{t}_{i-1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h})$ es una base buena para B_{i-1} con respecto a la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev $(x_{i-1}, \ldots, x_h)$ para $\langle x_{i-1}, \ldots, x_h \rangle_{\hat{O}_\mathfrak{p}}$. El resultado se sigue ahora por inducción. □

Corolario 3.3.12. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O que satisface las hipótesis de (3.3.9). Entonces*

$$\zeta_{\hat{N}_\mathfrak{p}}^{\leq_{\hat{O}_\mathfrak{p}}}(s) = (1 - |O/\mathfrak{p}|^{-1})^{-h} Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\leq}}(s - h, \mathfrak{p}) \quad y \quad \zeta_{\hat{N}_\mathfrak{p}}^{\lhd_{\hat{O}_\mathfrak{p}}}(s) = (1 - |O/\mathfrak{p}|^{-1})^{-h} Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^{\lhd}}(s - h, \mathfrak{p}).$$

Demostración. Esto resulta inmediatamente de la proposición anterior junto con la Proposición 3.2.7 y la observación de que la condición $t_{11} \ldots t_{hh} \neq 0$ puede ser eleminada del conjunto de condiciones que define el dominio de integración porque el conjunto de matrices que la verifican tiene medida cero. □

3.3.13. Sea $(x'_1, \ldots, x'_h)$ otra K-base de Mal'cev para N cuyas colecciones de polinomios asociados a la multiplicación y a la exponenciación denotamos por $\mathbf{f}' = (f'_1, \ldots, f'_h)$ y $\mathbf{g}' = (g'_1, \ldots, g'_h)$. Se definen datos de integrales cónicas $\mathcal{D}_{N,\mathbf{f}',\mathbf{g}'}^{\leq}$ y $\mathcal{D}_{N,\mathbf{f}',\mathbf{g}'}^{\lhd}$ como en (3.3.6).

Corolario 3.3.14. *Sea $* \in \{\leq, \lhd\}$. Para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O tenemos $Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^*}(s - h, \mathfrak{p}) = Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f}',\mathbf{g}'}^*}(s - h, \mathfrak{p})$. Por lo tanto la abscisa de convergencia de $\zeta_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^*(s)$ (3.3.6) no depende de la K-base de Mal'cev elegida para N.*

Demostración. Por la proposición 3.3.12, para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O se tiene $Z_{\mathcal{D}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}^*}(s - h, \mathfrak{p}) = (1 - |O/\mathfrak{p}|^{-1})^h \zeta_{\hat{N}_\mathfrak{p}}^{*_{\hat{O}_\mathfrak{p}}}(s) = Z_{\mathcal{D}'^*_{N,\mathbf{f}',\mathbf{g}'}}(s - h, \mathfrak{p})$. La última afirmación se sigue de esto pues por el Teorema 2.1.12 los factores locales excepcionales no influyen en la determinación de la abscisa de convergencia. □

3.3.15. Sea K un cuerpo de números y N un τ_K-grupo. Para $* \in \{\leq, \lhd\}$ definimos $\alpha^*(N)$ como la abscisa de convergencia de cualquier serie $\zeta^*_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}(s)$ (3.3.6), donde $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ son las colecciones de polinomios asociados a la multiplicación y a la exponenciación en N con respecto a alguna K-base de Mal'cev para N (1.2.10). El corolario anterior nos dice que esta definición es buena, es decir que no depende de la base elegida. El siguiente teorema nos dice que $\alpha^*(N)$ es un invariante geométrico de N.

Teorema 3.3.16. *Sea K un cuerpo de números y sean N y M dos τ_K-grupos. Sea $* \in \{\leq, \lhd\}$.*

(i) Si K' es una extensión finita de K entonces $\alpha^*(N) = \alpha^*(N \otimes_K K')$.

(ii) Si existe una extensión K' de K tal que $N \otimes_K K'$ y $M \otimes_K K'$ son K'-isomorfos, entonces $\alpha^*(M) = \alpha^*(N)$.

Demostración. (i) se sigue del Corolario 3.3.8. Para (ii), por (1.5.13) existe una extensión finita K' de K tal que $N \otimes_K K'$ y $M \otimes_K K'$ son K' isomorfos y por lo tanto de (i) se sigue que $\alpha^*(M) = \alpha^*(M \otimes_K K') = \alpha^*(N \otimes_K K') = \alpha^*(N)$. □

Teorema 3.3.17. *Sea N un τ-grupo de longitud de Hirsch h y sea $* \in \{\leq, \lhd\}$. Entonces existe un dato de integral cónica $\mathcal{D}^*$ tal que $\zeta^*_N(s) = Z_{\mathcal{D}^*}(s-h)$.*

Demostración. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ las colecciones de polinomios asociados a la multiplicación y a la exponenciación de N con respecto a una base de Mal'cev para N; por lo tanto, ellos también expresan las operaciones en el $\tau_{\mathbb{Q}}$-grupo $N \otimes \mathbb{Q}$ con respecto a la misma base. Entonces la condición (3.3.9) la satisfacen *todos* los primo p y, por lo tanto, el Corolario 3.3.12 es aplicable para todo primo p. Entonces basta tomar $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*_{N\otimes\mathbb{Q},\mathbf{f},\mathbf{g}}$ y usar el hecho de que $\zeta^*_N(s) = \prod_p \zeta^{*\mathbb{Z}_p}_{\hat{N}_p}(s)$ (3.1.4). □

3.3.18. Sea K un cuerpo de números. Vimos en (1.6.17) que la aplicación $\mathfrak{N} \mapsto \mathfrak{N}(K)$ da una equivalencia de categorías entre la categoría de grupos algebraicos unipotentes sobre K y la categoría de τ_K-grupos. Para un grupo algebraico unipotente $\mathfrak{N}$ sobre K y para $* \in \{\leq, \lhd\}$ definimos entonces $\alpha^*(\mathfrak{N}) := \alpha^*(\mathfrak{N}(K))$.

Teorema 3.3.19. *Sean $\mathfrak{N}$ y $\mathfrak{M}$ dos un grupos algebraicos unipotentes sobre un cuerpo de números K y sea $* \in \{\leq, \lhd\}$.*

(i) Para cualquier extensión finita K' de K tenemos que $\alpha^*(\mathfrak{N} \otimes_K K') = \alpha^*(\mathfrak{N})$.

(ii) Si existe una extensión K' de K tal que $\mathfrak{N} \otimes_K K'$ y $\mathfrak{M} \otimes_K K'$ son isomorfos como grupos algebraicos sobre K', entonces $\alpha^*(\mathfrak{N}) = \alpha^*(\mathfrak{M})$

Demostración. Esto es consecuencia inmediata de (1.6.17) y (3.3.16). □

3.3.20. Sean K un cuerpo de números, N un τ_K-grupo de longitud de Hirsch h y $(x_1, \dots, x_h)$ una K-base de Mal'cev para N. Sean $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ las colecciones de polinomios asociados a la multiplicación y a la exponenciación en N con respecto a la base dada (1.2.10). Sea F un grupo finito y G una extensión de F por N tal que $\mathfrak{S} : 1 \to N \hookrightarrow G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo virtualmente τ_K-grupo (1.5.1), es decir, la acción por conjugación de G en N se realiza por K-automorfismos. Fijemos una sección normalizada $\sigma : F \to G$ con cociclo asociado (ϕ, ψ) (1.4.4) y que además satisface $\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1}$. Se tienen h-uplas $\mathbf{n}_{(f,f')} \in K^h$ $(f, f' \in F)$ definidas de modo que $\psi(f, f') = \mathbf{x}^{\mathbf{n}_{(f,f')}}$. Además, por (1.2.10) se tienen h-uplas de polinomios $\mathbf{p}^f = (p^f_1(\mathbf{X}), \dots, p^f_h(\mathbf{X}))$ $(f \in F)$ tales que $\phi(f)(\mathbf{x}^{\mathbf{r}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{p}^f(\mathbf{r})}$ para todo $\mathbf{r} \in K^h$.

3.3.21. Sea H un subgrupo de F. Para una matriz de variables $\mathbf{V} = (V_{fi})_{f \in H \setminus \{1\}, 1 \leq i \leq h}$ denotamos por $\mathbf{V}_f$ a la colección $(V_{f1}, \ldots, V_{fh})$. Sea $\mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}$ la colección $\mathcal{D}^{\leq}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}$ a la cual le agregamos los siguientes nuevos pares:

$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{T}, \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{T}_i)), \mathbf{g}(\mathbf{V}_f, -1)))_{1 \leq k \leq h, f \in F \setminus \{1\}, 1 \leq i \leq h}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{V}_{f'}), \mathbf{n}_{(f,f')}), \mathbf{g}(\mathbf{V}_{ff'}, -1)))_{1 \leq k \leq h, f,f' \in H \setminus \{1\}, ff' \neq 1, 1 \leq i \leq h}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{T}, \mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{V}_{f^{-1}}))))_{1 \leq k \leq h, f \in H \setminus \{1\}}$$

La *función zeta de subextensiones de $\mathfrak{G}$ relativas a H y con respecto a* $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \sigma)$ es la serie

$$\zeta^{\leq}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s) = Z_{\mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}}(s - h - |H| + 1)$$

La *función zeta de subextensiones de $\mathfrak{G}$ con respecto a* $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \sigma)$ es la serie $\zeta^{\leq}_{\mathfrak{G},\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s) = \zeta^{\leq}_{\mathfrak{G},F,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s)$.

3.3.22. Sea H un subgrupo normal de F. Sea $\mathcal{D}^{\lhd}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}$ la colección $\mathcal{D}^{\lhd}_{N,\mathbf{f},\mathbf{g}}$ a la cual le agregamos los siguientes pares

$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{T}, \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{T}_i)), \mathbf{g}(\mathbf{V}_f, -1)))_{1 \leq k \leq h, f \in F \setminus \{1\}, 1 \leq i \leq h}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{V}_{f'}), \mathbf{n}_{(f,f')}), \mathbf{g}(\mathbf{V}_{ff'}, -1)))_{1 \leq k \leq h, f,f' \in H \setminus \{1\}, ff' \neq 1, 1 \leq i \leq h}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{T}, \mathbf{f}(\mathbf{V}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{V}_{f^{-1}}))))_{1 \leq k \leq h, f \in H \setminus \{1\}}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{p}^f(\mathbf{T}_i)))_{1 \leq k \leq h, f \in F \setminus \{1\}}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{e}_i, \mathbf{V}_f), \mathbf{p}^f(-\mathbf{e}_i)), \mathbf{V}_f)))_{1 \leq k \leq h, f \in F \setminus \{1\}, 1 \leq i \leq h}$$
$$(T_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots T_{kk}^{\epsilon_{kk}}, p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{p}^f(\mathbf{V}_{f'}), \mathbf{n}_{(f,f')}), \mathbf{n}_{(ff',f^{-1})}), \mathbf{g}(\mathbf{V}_{ff'f^{-1}}, -1))))_{1 \leq k \leq h, f \in F \setminus H, f' \in F \setminus \{1\}}$$

La *función zeta de subextensiones normales de $\mathfrak{G}$ relativa a H con respecto a* $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \sigma)$ se define como

$$\zeta^{\lhd}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s) = Z_{\mathcal{D}^{\lhd}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}}(s - h - |H| + 1).$$

La *función zeta de subextensiones normales de $\mathfrak{G}$ con respecto a* $(\mathbf{f}, \mathbf{g}, \sigma)$ es la serie $\zeta^{\leq}_{\mathfrak{G},\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s) = \zeta^{\lhd}_{\mathfrak{G},F,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s)$.

3.3.23. Sea $K \hookrightarrow K'$ una extensión finita de cuerpos. Consideremos la K'-completación de Mal'cev $N \otimes_K K'$ de N la cual por (1.3.5) tiene base de Mal'cev $(x_1, \ldots, x_h)$ y colecciones de polinomios asociados $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Sean $\phi' : F \to \mathrm{Aut}_{K'}(N \otimes_K K')$ el mapa $\phi'(f) = \phi(f) \otimes_K K'$ y ψ' el mapa ψ considerados como mapa de $F \times F$ en $N \otimes_K K'$. En la demostración de la Proposición 1.5.3 se obtiene que una K'-completación de Mal'cev de $\mathfrak{G}$ es $\mathfrak{G}_{\phi',\psi'}$ (1.4.5), cuyo cociclo asociado a la sección normalizada $\sigma'(f) = (1, f)$ es (ϕ', ψ'). Es fácil ver entonces que para un subgrupo H de F se tiene $\mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G} \otimes_K K',H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma'} = \mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}$, situación que se escribe $\mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G} \otimes_K K',H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma} = \mathcal{D}^{\leq}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma} \otimes_K K'$. De manera análoga, para un subgrupo normal H de F se tiene $\mathcal{D}^{\lhd}_{\mathfrak{G} \otimes_K K',H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma'} = \mathcal{D}^{\lhd}_{\mathfrak{G},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma} \otimes_K K'$. Como consecuencia del Teorema 2.2.6 obtenemos

Corolario 3.3.24. *Sea $* \in \{\leq, \lhd\}$. Con la notación de (3.3.23), $\zeta^{*}_{\mathfrak{G},\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s)$ y $\zeta^{*}_{\mathfrak{G} \otimes_K K',\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma'}(s)$ tienen la misma abscisa de convergencia.*

3.3.25. Sea O el anillo de enteros algebraicos de K y sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O tal que $\mathbf{f}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'), \mathbf{g}(\mathbf{r}, r) \in O_{\mathfrak{p}}^h$ para todo $\mathbf{r}, \mathbf{r}' \in O_{\mathfrak{p}}^h$ y $r \in O_{\mathfrak{p}}$, $\mathbf{p}^f(\mathbf{r}) \in O_{\mathfrak{p}}^h$ para todo $\mathbf{r} \in O_{\mathfrak{p}}^h$ y $f \in F$, $\mathbf{n}_{(f,f')} \in O_{\mathfrak{p}}^h$ para todo $f, f' \in F$, y $O_{\mathfrak{p}}$ es c-binomial, donde c es la clase de N. Notar que todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O satisfacen estas condiciones.

En (3.3.9) obtuvimos un $\tau_{O_\mathfrak{p}}$-grupo $N_\mathfrak{p}$ con $O_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev $(x_1,\ldots,x_h)$ y polinomios asociados $(\mathbf{f},\mathbf{g})$ de modo que N es la K-completación de Mal'cev de $N_\mathfrak{p}$. La hipótesis de que $\mathbf{p}^f(\mathbf{r}) \in O_\mathfrak{p}$ para todo $\mathbf{r} \in O_\mathfrak{p}^h$ y $f \in F$ implica que $\sigma(f)N_\mathfrak{p}\sigma(f)^{-1} \subseteq N_\mathfrak{p}$, y la hipótesis de que $\sigma(f)^{-1} = \sigma(f^{-1})$ implica que $\sigma(f)N_\mathfrak{p}\sigma(f)^{-1} = N_\mathfrak{p}$, es decir $\phi(f)(N_\mathfrak{p}) = N_\mathfrak{p}$ para todo $f \in F$. Es claro que $\phi(f): N_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$ es un $O_\mathfrak{p}$-morfismo pues él es un K-morfismo de N en N. Denotamos por $\phi_\mathfrak{p}$ al mapa ϕ visto como mapa de F en $\mathrm{Aut}_{O_\mathfrak{p}}(N_\mathfrak{p})$. Por otro lado, la hipótesis de que $\mathbf{n}_{(f,f')} \in O_\mathfrak{p}^h$ para todo $f, f' \in F$ implica que ψ puede verse como un mapa de $F \times F \to N_\mathfrak{p}$. Denotemos por $\psi_\mathfrak{p} : F \times F \to N_\mathfrak{p}$ a esta corestricción. Obtenemos así un grupo virtualmente $\tau_{O_\mathfrak{p}}$-grupo $\mathfrak{S}_{\phi_\mathfrak{p},\psi_\mathfrak{p}}$ con cociclo asociado $(\phi_\mathfrak{p},\psi_\mathfrak{p})$ (1.4.5) cuya K-completación de Mal'cev no es otra que $\mathfrak{S}$ (ver demostración de 1.5.3). Denotamos $\mathfrak{S}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}_{\phi_\mathfrak{p},\psi_\mathfrak{p}}$.

Finalmente consideremos la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-completación de Mal'cev de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$, denotada por $\hat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{p}$, la cual se describe como $\mathfrak{S}_{\hat{\phi}_\mathfrak{p},\hat{\psi}_\mathfrak{p}}$ (1.4.5), donde $\hat{\phi}_\mathfrak{p}$ y $\hat{\psi}_\mathfrak{p}$ son los mapas $\phi_\mathfrak{p}$ y $\psi_\mathfrak{p}$ considerados como mapas de F en $\mathrm{Aut}_{\hat{O}_\mathfrak{p}}(\hat{N}_\mathfrak{p})$ y de $F \times F$ en $\hat{N}_\mathfrak{p}$ respectivamente. Para cada $f \in F$ la colección de polinomios asociada a $\hat{\phi}_\mathfrak{p}(f)$ con respecto a la $\hat{O}_\mathfrak{p}$-base de Mal'cev $(x_1,\ldots,x_h)$ de $\hat{N}_\mathfrak{p}$ (1.2.10) no es otra que $\mathbf{p}^f(U)$ mientras que $\hat{\psi}_\mathfrak{p}(f,f') = \mathbf{x}^{\mathbf{n}_{(f,f')}}$.

Proposición 3.3.26. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O que satisface las hipótesis de (3.3.25).*

(i) Sea $H \leq F$. Un par $(\mathbf{t},\mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h,\hat{O}_\mathfrak{p}) \times \prod_{f\in F\setminus\{1\}} \hat{O}_\mathfrak{p}^h$ vive en $\mathcal{T}_H^{\leq \hat{O}_\mathfrak{p}}$ (3.2.11) si y sólo si $t_{11}\ldots t_{hh} \neq 0$ y

$$
\begin{aligned}
&t_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}} | p_k^{(i)}(\mathbf{t}^{(i)}, c_i(\mathbf{t}_j,\mathbf{t}_{i-1}),\ldots,c_h(\mathbf{t}_j,\mathbf{t}_{i-1})) \quad \textit{para} \quad 1 \leq j < i-1 < k \leq h.\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{t}_i)), \mathbf{g}(\mathbf{v}_f,-1)),\ 1 \leq k \leq h, f \in F\setminus\{1\}, 1 \leq i \leq h\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_f,\mathbf{v}_{f'}),\mathbf{n}_{(f,f')}),\mathbf{g}(\mathbf{v}_{ff'},-1)),\ 1 \leq k \leq h, f,f' \in H\setminus\{1\}, 1 \leq i \leq h\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{v}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{v}_{f^{-1}}))),\ 1 \leq k \leq h, f \in H\setminus\{1\}
\end{aligned}
$$

(ii) Sea $H \lhd F$. Un par $(\mathbf{t},\mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h,\hat{O}_\mathfrak{p}) \times \prod_{f\in F\setminus\{1\}} \hat{O}_\mathfrak{p}^h$ vive en $\mathcal{T}_H^{\lhd \hat{O}_\mathfrak{p}}$ (3.2.11) si y sólo si $t_{11}\ldots t_{hh} \neq 0$ y

$$
\begin{aligned}
&t_{ii}^{\epsilon_{ki}^{(i)}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}^{(i)}} | p_k^{(i)}(\mathbf{t}^{(i)}, c_i(\mathbf{e}_j,\mathbf{t}_{i-1}),\ldots,c_h(\mathbf{e}_j,\mathbf{t}_{i-1})) \quad \textit{para} \quad 1 < i \leq k \leq h, 1 \leq j < h.\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{t}_i)), \mathbf{g}(\mathbf{v}_f,-1)),\ 1 \leq k \leq h, f \in F\setminus\{1\}, 1 \leq i \leq h\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{v}_f,\mathbf{v}_{f'}),\mathbf{n}_{(f,f')}),\mathbf{g}(\mathbf{v}_{ff'},-1)),\ 1 \leq k \leq h, f,f' \in H\setminus\{1\}, 1 \leq i \leq h\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{t}, \mathbf{f}(\mathbf{v}_f, \mathbf{p}^f(\mathbf{v}_{f^{-1}}))),\ 1 \leq k \leq h, f \in H\setminus\{1\}\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{p}^f(\mathbf{t}_i)),\ 1 \leq k \leq h, f \in F\setminus\{1\}\\
&t_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{e}_i,\mathbf{v}_f),\mathbf{p}^f(-\mathbf{e}_i)),\mathbf{v}_f)),\ 1 \leq k \leq h, f \in F\setminus\{1\}, 1 \leq i \leq h\\
&v_{11}^{\epsilon_{k1}} \ldots t_{kk}^{\epsilon_{kk}} | p_k(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{p}^f(\mathbf{v}_{f'}),\mathbf{n}_{(f,f')}),\mathbf{n}_{(ff',f^{-1})}),\mathbf{g}(\mathbf{v}_{ff'f^{-1}},-1))),\ 1 \leq k \leq h, f \in F\setminus H, f' \in F\setminus\{1\}
\end{aligned}
$$

Demostración. Esto no es más que una aplicación de la Proposición 3.2.13, junto con la Proposición 3.3.11 y la Proposición 3.3.10. □

Corolario 3.3.27. *Sea $\mathfrak{p}$ un ideal maximal de O que satisface las hipótesis de (3.3.25). Para $* \in \{\leq,\lhd\}$ y $H * F$ se tiene*

$$\zeta^{*\hat{O}_\mathfrak{p}}_{\hat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{p},H}(s) = (1-|O/\mathfrak{p}|^{-1})^{-h} Z_{\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}}(s-h-|H|+1)$$

Demostración. Esto es la Proposición 3.2.12 junto con la descripción de $\mathcal{T}_H^{*\hat{O}_\mathfrak{p}}$ en la proposición anterior, la definición de los conjuntos $\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}$ en (3.3.21) y la observación de que el conjunto de pares $(\mathbf{t},\mathbf{v})$ con $t_{11}\dots t_{hh}\neq 0$ tiene medida cero y por lo tanto esta condición puede sacarse del conjunto de condiciones que definen el dominio de integración. □

3.3.28. Otra K-base de Mal'cev para N daría nuevas colecciones de polinomios $\mathbf{f}'$ y $\mathbf{g}'$ y otra sección normalizada $\sigma' : F \to G$ darían nuevas colecciones de polinomios $\mathbf{p}'^{f}$ y elementos $\mathbf{n}'_{(f,f')}\in K^h$ con respecto a esta nueva base (3.3.20). Se obtendrían así nuevas colecciones de polinomios $\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f}',\mathbf{g}',\sigma'}$

Corolario 3.3.29. *Sea* $*\in\{\leq,\lhd\}$ *y* $H * F$. *Para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales* $\mathfrak{p}$ *de* O *se tiene* $Z_{\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}}(s-h-|H|+1,\mathfrak{p}) = Z_{\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f}',\mathbf{g}',\sigma'}}(s-h-|H|+1,\mathfrak{p})$. *En particular la abscisa de convergencia de* $\zeta^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}(s)$ *depende sólo de* $(\mathfrak{S},H)$.

Demostración. Por (3.3.27), para todos salvo una cantidad finita de ideales maximales $\mathfrak{p}$ de O tenemos $Z_{\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}}(s-h-|H|+1,\mathfrak{p}) = (1-|O/\mathfrak{p}|^{-1})^h\zeta^{*\hat{O}_\mathfrak{p}}_{\hat{\mathfrak{S}}_\mathfrak{p},H}(s) = Z_{\mathcal{D}^*_{\mathfrak{S},H,\mathbf{f}',\mathbf{g}',\sigma'}}(s-h-|H|+1,\mathfrak{p})$. La última afirmación se sigue de pues los factores locales excepcionales no influyen en la determinación de la abscisa de convergencia de una integral cónica global (2.1.12). □

3.3.30. Sea $\mathfrak{S} : 1\to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo virtualmente τ_K-grupo. Definimos $\alpha^{\leq}(\mathfrak{S})$ (resp. $\alpha^{\lhd}(\mathfrak{S})$) como la abscisa de convergencia de cualquier función zeta de subextensiones de $\mathfrak{S}$ (resp. función zeta de subextensiones normales de $\mathfrak{S}$) con respecto a una K-base de Mal'cev para N y una sección normalizada $\sigma\to G$ (3.3.21). El corolario anterior nos dice que esta definición es buena. El siguiente teorema nos dice que estos son invariantes de naturaleza geométrica.

Teorema 3.3.31. *Sea* K *un cuerpo de números y sean* $\mathfrak{S}$ *y* $\mathfrak{T}$ *dos grupos virtualmente* τ_K*-grupos. Sea* $*\in\{\leq,\lhd\}$.

(i) Si K' *es una extensión finita de* K *entonces* $\alpha^*(\mathfrak{S}) = \alpha^*(\mathfrak{S}\otimes_K K')$.

(ii) Si existe una extensión K' *de* K *tal que* $\mathfrak{S}\otimes_K K'$ *y* $\mathfrak{T}\otimes_K K'$ *son* K'*-isomorfos, entonces* $\alpha^*(\mathfrak{S}) = \alpha^*(\mathfrak{T})$.

Demostración. (i) es consecuencia inmediata de la definición y de (3.3.24). Para (ii), se sigue del Teorema 1.5.12 que existe una extensión finita K' de K tal que $\mathfrak{S}\otimes_K K'$ y $\mathfrak{S}\otimes_K K'$ son K'-isomorfos, y el resultado se sigue entonces de (i). □

Teorema 3.3.32. *Sea* $\mathfrak{S} : 1\to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ *un grupo virtualmente* τ*-grupo tal que* N *es de longitud de Hirsch* h. *Sea* $*\in\{\leq,\lhd\}$ *y* $H * F$. *Entonces existe un dato de integral cónica* $\mathcal{D}^*_H$ *tal que* $\zeta^*_{\mathfrak{S},H}(s) = Z_{\mathcal{D}^*_H}(s-h-|H|+1)$. *Más aún* $\alpha^*(\mathfrak{S}) = \alpha^*(\mathfrak{S}\otimes\mathbb{Q})$ *(3.1.3).*

Demostración. Sea $(x_1,\dots,x_h)$ una base de Mal'cev para N y sean $\mathbf{f},\mathbf{g}$ los polinomios asociados a la multiplicación y a la exponenciación en N con respecto a esta base. Sea $\sigma : F\to G$ una sección normalizada de $\mathfrak{S}$ tal que $\sigma(f^{-1}) = \sigma(f)^{-1}$. Se sigue de (3.1.4) que $\zeta^*_{\mathfrak{S},H} = \prod_p \zeta^{*\mathbb{Z}_p}_{\hat{\mathfrak{S}}_p,H}(s)$ y por lo tanto el resultado se sigue tomando $\mathcal{D}^*_H = \mathfrak{D}^*_{\mathfrak{S}\otimes\mathbb{Q},H,\mathbf{f},\mathbf{g},\sigma}$ pues la condición (3.3.25) se satisface para todo primo p. La última afirmación es inmediata. □

Capítulo 4

Funciones zeta de grupos almost-Bieberbach

En este capítulo se calculan las funciones zeta de subgrupos de todos los grupos almost-Bieberbach de dimensión 3. Esto dependerá de la clasificación que existe de los mismos, su descripción por generadores y relaciones, y el método descripto en el capítulo anterior para expresar la función zeta de un grupo virtualmente τ-grupo como una integral cónica global.

4.1 Grupos almost-Bieberbach

4.1.1. Consideremos el grupo de Lie abeliano simplemente conexo $\mathbb{R}^n$. Su grupo de automorfismos es $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ y el grupo afín asociado es $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Este grupo actúa en $\mathbb{R}^n$ mediante $(t, \alpha) : x \mapsto t + \alpha(x)$. El grupo ortogonal $O(n)$ es un subgrupo compacto maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Un grupo de Bieberbach (de dimensión n) es un subgrupo discreto uniforme Γ de $\mathbb{R}^n \rtimes O(n)$ que es libre de torsión. Se sigue que la acción de un tal Γ en $\mathbb{R}^n$ (inducida por la acción de $\mathrm{Aff}_n(\mathbb{R})$) es libre, propia y discontinua, y además ella se realiza por isometrías de $\mathbb{R}^n$ (como espacio euclídeo); luego, el cociente $\mathbb{R}^n/\Gamma$ es una variedad riemanniana compacta y plana. De hecho toda variedad riemanniana compacta y plana de dimensión n se obtiene de esta forma y Γ es el grupo fundamental de $\mathbb{R}^n/\Gamma$. Más aún, $\mathbb{R}^n/\Gamma_1 \cong \mathbb{R}^n/\Gamma_2$ como variedades riemannianas si y sólo si $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$ como grupos abstractos.

Existe una caracterización abstracta de los grupos de Bieberbach. Un grupo Γ es isomorfo a un grupo de Bieberbach de dimensión n si y sólo si Γ es un grupo finitamente generado, libre de torsión y contiene un subgrupo normal abeliano de índice finito que es libre de rango n.

4.1.2. Sea G un grupo de Lie nilpotente simplemente conexo. Su grupo de automorfismos de Lie se denota por $\mathrm{Aut}(G)$ y su grupo afín asociado es $\mathrm{Aff}(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$, el cual actúa en G mediante $(t, \alpha) : x \mapsto t\alpha(x)$. Un grupo almost-Bieberbach es un subgrupo discreto uniforme y libre de torsión de $G \rtimes C$, donde C es un subgrupo compacto maximal de $\mathrm{Aut}(G)$, y su dimensión es la dimensión de G. La acción de un tal grupo Γ en G (inducida por la acción de $\mathrm{Aff}(G)$) es libre, propia y discontinua, y al espacio cociente G/Γ se lo llama una infra-nilvariedad, la cual tiene como grupo fundamental a Γ. Notar que cuando $G = \mathbb{R}^n$, esta definición se reduce a la definición de grupo de Bieberbach pues cualquier subgrupo compacto maximal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ es conjugado a $O(n)$.

Existe una caracterización puramente algebraica de los grupos almost-Bieberbach [Dek96]. Un grupo Γ es isomorfo a un grupo almost-Bieberbach de dimensión n si y sólo si Γ es finitamente generado, libre de torsión y contiene un subgrupo de índice finito que es un τ-grupo de longitud de Hirsch n.

4.1.3. Sea G un grupo almost-Bieberbach. Existe un único subgrupo nilpotente maximal de G, el cual se denomina el subgrupo de Fitting de G y se denota por $\operatorname{Fitt}(G)$. Este es un subgrupo normal de G y el cociente $G/\operatorname{Fitt}(G)$ se denomina el grupo de holonomía de G. De este modo, G determina una sucesión exacta $\mathfrak{S} : 1 \to \operatorname{Fitt}(G) \to G \to G/\operatorname{Fitt}(G) \to 1$. A esta suceción exacta, la cual es un grupo virtualmente τ-grupo pues $\operatorname{Fitt}(G)$ es finitamente generado y libre de torsión (1.5.1), también la llamaremos un grupo almost-Bieberbach. Por lo tanto cuando digamos que una sucesión exacta $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo almost-Bieberbach estamos diciendo que G es un grupo almost-Bieberbach, N su subgrupo de Fitting y F su grupo de holonomía.

Notar que la caracterización algebraica de los grupos almost-Bieberbach implica que cualquier subgrupo de un grupo almost-Bieberbach también es almost-Bieberbach. En particular, si $\mathfrak{S} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ es un grupo almost-Bieberbach y H es un subgrupo de F entonces la sucesión exacta inducida $\mathfrak{S}_H : 1 \to N \to \pi^{-1}(H) \to H \to 1$ también es un grupo almost-Bieberbach.

4.1.4. *Grupos de Bieberbach de dimensión 3.*

Salvo isomorfismo, existen exactamente 10 grupos de Bieberbach de dimensión 3. Vamos a presentar a cada uno de ellos por generadores y relaciones. Salvo pequeñas modificaciones, los mismos aparecerán como en [HJKL02]. Los primeros seis son los grupos fundamentales de las 3-variedades Riemannianas compactas planas orientadas mientras que los últimos cuatro corresponden al caso no orientado. En todos los casos $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ es el subgrupo de Fitting.

$$\mathfrak{G}_1 = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1, 1 \le i < j \le 3\rangle$$

$$\mathfrak{G}_2 = \langle \gamma, x_1, x_3, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_2^{-1}, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_3^{-1}\rangle$$

$$\mathfrak{G}_3 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^3 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_2^{-1}x_3^{-1}\rangle$$

$$\mathfrak{G}_4 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^4 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_2^{-1}\rangle$$

$$\mathfrak{G}_5 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^6 = 1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_2^{-1}x_3\rangle$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_6 = \langle \alpha, \beta, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \alpha^2 = x_1, \alpha x_2\alpha^{-1} = x_2^{-1}, \alpha x_3\alpha^{-1} = x_3^{-1}\\ \beta^2 = x_2, \beta x_1\beta^{-1} = x_1^{-1}, \beta x_3\beta^{-1} = x_3^{-1}, (\alpha\beta)^2 = x_3^{-1}\rangle\end{aligned}$$

$$\mathfrak{B}_1 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_2, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_3^{-1}\rangle$$

$$\mathfrak{B}_2 = \langle \gamma, x_1, x_3, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_2, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_2x_3^{-1}\rangle$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_3 = \langle \alpha, \beta, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \alpha^2 = x_1, \alpha x_2\alpha^{-1} = x_2^{-1}, \alpha x_3\alpha^{-1} = x_3^{-1}\\ \beta^2 = x_2, \beta x_1\beta^{-1} = x_1, \beta x_3\beta^{-1} = x_3^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = x_2\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_4 = \langle \alpha, \beta, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1(1 \le i < j \le 3), \alpha^2 = x_1, \alpha x_2\alpha^{-1} = x_2^{-1}, \alpha x_3\alpha^{-1} = x_3^{-1}\\ \beta^2 = x_2, \beta x_1\beta^{-1} = x_1, \beta x_3\beta^{-1} = x_3^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = x_2x_3\rangle\end{aligned}$$

4.1.5. *Almost-Bieberbach groups of dimension 3.*
Los grupos almost-Bieberbach de dimensión 3 también están clasificados [DIKL95]. Aquellos que no son grupos de Bieberbach están distribuídos en varias familias infinitas: $p1$, $p2$, pg, $p2gg$, $p4$, $p3$ y $p6$. Vamos a presentar estos grupos en cada familia por generadores y relaciones tales como se encuentran en [Dek96, Chap. 7]. En todos los casos $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ será el subgrupo de Fitting, el cual tiene a (x_1, x_2, x_3) como base de Mal'cev.

(i) $Q = p1$

$$\mathfrak{E}_q = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_2, x_1] = x_3^q, [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 1\rangle, \quad q \in \mathbb{N}$$

.

(ii) $Q = p2$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = [x_3, \gamma] = 1,\\ \gamma x_1 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_2 = x_2^{-1}\gamma, \gamma^2 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(iii) $Q = pg$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = [\gamma, x_1] = 1,\\ \gamma x_3 = x_3^{-1}\gamma, \gamma x_2 = x_2^{-1}\gamma x_3^{-q}, \gamma^2 = x_1\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(iv) $Q = p2gg$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma_1, \gamma_2 : [x_2, x_1] = x_3^{4q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1,\\ \gamma_1 x_1 = x_1^{-1}\gamma_1 x_3^{2q}, \gamma_1 x_2 = x_2^{-1}\gamma_1 x_3^{-2q}, \gamma_1 x_3 = x_3\gamma_1,\\ \gamma_2 x_1 = x_1\gamma_2, \gamma_2 x_2 = x_2^{-1}\gamma_2 x_3^{-2q}, \gamma_2 x_3 = x_3^{-1}\gamma_2,\\ \gamma_1^2 = x_3, \gamma_2^2 = x_1, \gamma_1\gamma_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma_2\gamma_1 x_3^{-(2q+1)}\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(v) $Q = p4$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma[x_2, x_1] = x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma^4 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma[x_2, x_1] = x_3^{4q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma^4 = x_3^3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

(vi) $Q = p3$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{3q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{3q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{3q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{3q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3^2\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_r = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^r, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 = x_2\gamma x_3, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3\rangle, \quad r \in \mathbb{N}, r \notin 3\mathbb{N}.\end{aligned}$$

(vii) $Q = p6$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{6q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{6q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_1 x_2 \gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{6q+4} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{6q+4}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_1 x_2 \gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{6q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{6q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_1 x_2 \gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3^5\rangle, \quad q \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{6q+2} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{6q+2}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_1 x_2 \gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3^5\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

4.2 Funciones zeta de grupos almost-Bieberbach y método de cálculo

4.2.1. Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo almost-Bieberbach de dimensión $h \geq 1$. A la función zeta de subextensiones de $\mathfrak{G}$ (3.1.3) la llamaremos directamente *función zeta de* $\mathfrak{G}$ y será denotada por $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$. Notar que en general $\zeta_{\mathfrak{G}}(s) \neq \zeta_G^{\leq}(s)$. En efecto $\zeta_G^{\leq}(s) = \sum_{H \leq F} [F : H]^{-s} \zeta_{\mathfrak{G}_H}(s)$ (3.1.4). La función zeta de $\mathfrak{G}$ admite una factorización como un producto de Euler $\zeta_{\mathfrak{G}}(s) = \prod_p \zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s)$ (3.1.4), donde $\hat{\mathfrak{G}}_p$ es la completación pro-p de $\mathfrak{G}$ (1.5.7) y $\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = \zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}^{\leq}(s)$; además

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1 - p^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}_p} |t_{11}|^{s-|F|} \ldots |t_{hh}|^{s-|F|-h+1} d\mu,$$

donde $\mathcal{T}_p$ es cierto subconjunto abierto de $\mathrm{Tr}(h, \mathbb{Z}_p) \times \prod_{f \in F \setminus \{1\}} \mathbb{Z}_p^h$ (3.2.12). (Aquí y en toda la sección donde se presente esta situación $|\cdot|$ denota la norma p-ádica y μ la medida Haar normalizada en $\mathrm{Tr}(h, \mathbb{Z}_p) \times \prod_{f \in F \setminus \{1\}} \mathbb{Z}_p^h$.)

A continuación, una expresión para estas funciones zeta que aprovecha la presentación del grupo de holonomía.

Proposición 4.2.2. *Sea* $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ *un grupo almost-Bieberbach,* $(x_1, \ldots, x_h)$ *una base de Mal'cev para* N *y* $\{1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r\}$ *una transversal de las clases laterales a derecha de* N *en* G. *Supongamos que* G/N *está definido por* t *generadores* $N\gamma_{i_1}, \ldots, N\gamma_{i_t}$ *y un conjunto finito de relaciones* $R_j(N\gamma_{i_1}, \ldots, N\gamma_{i_t}) = 1$ *(*$j \in J$*). Entonces para cada primo* p

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1 - p^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}'_p} |t_{11}|^{s-1-t} |t_{22}|^{s-2-t} \ldots |t_{hh}|^{s-h-t} d\mu$$

donde $\mathcal{T}'_p$ *es el conjunto de pares* $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, \mathbb{Z}) \times \prod_{i=2}^r \mathbb{Z}_p^h$ *que satisfacen las siguientes condiciones*

(1) $\mathbf{t}$ *representa una base buena para algún subgrupo abierto* $B_{\mathbf{t}}$ *de* $\hat{N}_p$*;*

(2) $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{\gamma_{i_j}}}\gamma_{i_j}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{\gamma_{i_j}}}\gamma_{i_j})^{-1} \in B_{\mathbf{t}}$, *$i = 1, \ldots, h$ y $j = 1, \ldots, t$;*

(3) $R_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{\gamma_{i_1}}}\gamma_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{\gamma_{i_t}}}\gamma_{i_t}) \in B_{\mathbf{t}}$, *$j \in J$.*

Demostración. Pongamos $\hat{\mathfrak{G}}_p : 1 \to \hat{N}_p \to G_p \to F \to 1$. Para $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, \mathbb{Z}) \times \prod_{i=2}^r \mathbb{Z}_p^h$ ponemos $B_{\mathbf{t}} = \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_h} \rangle_{\mathbb{Z}_p}$ y $A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})} = B_{\mathbf{t}} \cup B_{\mathbf{t}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\gamma_2 \cup \ldots \cup B_{\mathbf{t}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\gamma_r$. Vimos en (3.2.12) que

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1 - p^{-1})^{-h} \int_{\mathcal{T}_p} |t_{11}|^{s-|F|} \ldots |t_{hh}|^{s-|F|-h+1} d\mu$$

donde $\mathcal{T}_p$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in \mathrm{Tr}(h, \mathbb{Z}) \times \prod_{i=2}^r \mathbb{Z}_p^h$ tales que $\mathbf{t}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{t}}$ y $A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}$ es un subgrupo de G_p. Existen palabras $w_j(X_1, \ldots, X_t)$ tales que $N\gamma_j = w_j(N\gamma_{i_1}, \ldots, N\gamma_{i_t})$ para $j = 2, \ldots, r$. Veamos que $\mathcal{T}_p$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v})$ tales que

(1) $\mathbf{t}$ representa una base buena para $B_{\mathbf{t}}$,

(2) $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j)^{-1} \in B_{\mathbf{t}}$, $i = 2, \ldots, r$;

(3) $R_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}\gamma_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}}\gamma_{i_t}) \in B_{\mathbf{t}}$, $j \in J$,

(4) $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j \in B_{\mathbf{t}}w_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}})$ para $j \notin \{i_1, \ldots, i_t\}$.

En efecto, si $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in \mathcal{T}_p$ entonces se satisface (1) por definición, se satisface (2) pues $B_{\mathbf{t}} = \hat{N}_p \cap A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}$ es normal en $A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}$, también se cumple (3) pues $R_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}\gamma_{i_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}}\gamma_{i_t}) \in A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})} \cap N = B_{\mathbf{t}}$ y se satisface (4) pues $w_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}})(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j)^{-1} \in A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})} \cap \hat{N}_p = B_{\mathbf{t}}$. Recíprocamente, las condiciones (2) y (4) implican que cada $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j$, con $j = 2, \ldots, r$, está en el normalizador de $B_{\mathbf{t}}$. Sea $A/B_{\mathbf{t}}$ el subgrupo de $N_{G_p}(B_{\mathbf{t}})/B_{\mathbf{t}}$ generado por $B_{\mathbf{t}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}, \ldots, B_{\mathbf{t}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}}\gamma_{i_t}$. La condición (4) implica que $B_{\mathbf{t}}\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j \in A/B_{\mathbf{t}}$ para $j = 2, \ldots, r$; en consecuencia $A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}/B_{\mathbf{t}}$ está contenido en $A/B_{\mathbf{t}}$, lo cual implica que $r = |A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}| \leq |A/B_{\mathbf{t}}|$. Finalmente, la condición (3) implica que los generadores de $A/B_{\mathbf{t}}$ satisfacen las relaciones $R_j = 1$ ($j \in J$); por lo tanto, $|A/B_{\mathbf{t}}| \leq |G/N| = r$. Entonces $A/B_{\mathbf{t}} = A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}/B_{\mathbf{t}}$ y, en consecuencia, $A_{(\mathbf{t},\mathbf{v})}$ es un subgrupo de G_p.

Fijado $j \in \{2, \ldots, r\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$, el conjunto de los vectores $\mathbf{v}_j \in \mathbb{Z}_p^h$ tales que $\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j}\gamma_j \in B_{\mathbf{t}}w_j(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_1}}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_{i_t}})$ tiene medida $[\hat{N} : B_{\mathbf{t}}]^{-1} = t_{11} \ldots t_{hh}$ (3.2.4). Si empezamos integrando con respecto a las entradas de los vectores $\mathbf{v}_j$ con $j \in \{2, \ldots, r\} \setminus \{i_1, \ldots, i_t\}$, al terminar nuestro integrando se multiplica por $|t_{11}|^{r-t-1} \ldots |t_{hh}|^{r-t-1}$ y el conjunto $\mathcal{T}_p$ se reduce a $\mathcal{T}'_p$. Esto completa la demostración. ☐

4.2.3. *Método de cálculo de las funciones zeta*

Sea $\mathfrak{G} : 1 \to N \xrightarrow{\iota} G \xrightarrow{\pi} F \to 1$ un grupo almost-Bieberbach de dimensión 3. Este vendrá dado por una presentación del grupo G que tiene la forma $\langle x_1, x_2, x_3, \alpha, \beta, \ldots | \ldots \rangle$ donde $\langle x_1, x_2, x_3 \rangle = N$. Los pasos a seguir para calcular $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$ son los siguientes.

(i) Lo primero que tenemos que identificar es el tipo del subgrupo de Fitting N. De acuerdo a la clasificación descripta en la sección anterior se obtiene que N es de la forma $N_q = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_2, x_1] = x_3^q, [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 1 \rangle$ para algún entero $q \geq 0$. Notar que el caso $q = 0$ corresponde al caso en que N es abeliano, es decir, cuando $\mathfrak{G}$ es un grupo de Bieberbach.

(ii) Con la información anterior, para un primo p ya podemos describir cuando una matriz $\mathbf{t}$ representa una base buena para algún subgrupo de $\hat{N}_p$. Cuando N es abeliano no hay restricciones sobre $\mathbf{t}$, salvo la condición $t_{11}t_{22}t_{33} \neq 0$ a la cual ignoraremos pues el conjunto de matrices $\mathbf{t} \in \mathrm{Tr}(3, \mathbb{Z}_p)$ con determinante cero tiene medida nula. Cuando N no es abeliano, es decir, cuando $[x_2, x_1] = x_3^q$ para algún $q > 0$, siguiendo (3.2.8) obtenemos que $\mathbf{t}$ representa una base buena si y sólo si $[\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}] \in x_3^{t_{33}\mathbb{Z}_p}$ y $t_{11}t_{22}t_{33} \neq 0$. Un cálculo rápido muestra que $[\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}] = x_3^{qt_{11}t_{22}}$. Luego la condición para $\mathbf{t}$ es $t_{11}t_{22}t_{33} \neq 0$ y $t_{33}|qt_{11}t_{22}$. Nuevamente, nos quedamos sólo con $t_{33}|qt_{11}t_{22}$.

(iii) El siguiente paso es reconocer de la presentación de G la presentación del grupo de holonomía. Este siempre va a ser cíclico de orden 2, 3, 4 ó 6, o bien el grupo no cíclico de orden 4 $C_2 \times C_2$. Si t es el número de generadores en la presentación de G/N entonces obtenemos según (4.2.2)

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1 - p^{-1})^{-3} \int_{\mathcal{T}_p'} |t_{11}|^{s-1-t} |t_{22}|^{s-2-t} |t_{33}|^{s-3-t} d\mu$$

donde $\mathcal{T}_p'$ se describe como en (4.2.2) usando la presentación ya identificada de G/N.

(iv) Usando la presentación de G podemos escribir $\mathcal{T}_p'$ como una conjunción de condiciones de la forma $\mathbf{x}^{\mathbf{h}(\mathbf{t},\mathbf{v})} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}$.

(v) El siguiente paso es hacer uso de (3.3.10) para transformar las condiciones anteriores en varias condiciones de la forma $t_{11}^{e_1} t_{22}^{e_2} t_{33}^{e_3} | Q(\mathbf{t}, \mathbf{v})$, donde e_1, e_2, e_3 son enteros no negativos y Q es un polinomios en las entradas de $\mathbf{t}$ y de $\mathbf{v}$. Si $N = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_2, x_1] = x_3^q, [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 1 \rangle$ entonces aplicando (3.3.10) obtenemos que $x_1^{a_1} x_2^{a_2} x_3^{a_3} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}$ si y sólo si

(a) $t_{11}|a_1$

(b) $t_{22}| - \frac{a_1}{t_{11}} t_{12} + a_2$

(c) $t_{33}| - \frac{-\frac{a_1}{t_{11}} + a_2}{t_{22}} t_{23} - \frac{a_1}{t_{11}} t_{13} + q\frac{a_1}{t_{11}}(\frac{a_1}{t_{11}} + 1) t_{11} t_{12} - q a_1 a_2 + a_3$.

(vi) Se comienza con el proceso de simplificación del dominio de integración. Este proceso puede depender del primo p que hayamos elegido. Primero eliminamos aquellas condiciones que pueden ser implicadas por otras o por lo menos simplificaremos condiciones a partir de otras. Por ejemplo las condiciones $a|b + c$ y $a|b$ se cambian por $a|b$ y $a|c$. Aveces también se nos van a presentar, por ejemplo, condiciones de la forma $a|3b$. En este caso si $p \neq 3$ entonces 3 es una unidad en $\mathbb{Z}_p$ y, por lo tanto, esta condición se transforma en $a|b$. Si $p = 3$ y tenemos , por ejemplo, la condición $a|3b + 1$ entonces podemos reemplazarla por $a \in \mathbb{Z}_3^*$. Muchas veces será necesario partir el dominio de integración con respecto a la relación de divisibilidad entre dos variables. Por ejemplo, dadas dos variables a y b, podemos partir el dominio de integración de acuerdo a si $a|b$ ó $a \nmid b$. A continuación un método de simplificación muy útil.

Proposición 4.2.4. *Sean $f_0, g_0, g_1, \ldots, g_n \in \mathbb{Q}_p[T_1, \ldots, T_m]$ polinomios no nulos y sea D_0 un subconjunto medible de $\mathbb{Z}_p^m$ tal que $g_i(D_0) \subseteq \mathbb{Z}_p$ para $i = 0, \ldots, n$. Supongamos que se pueden construir subconjuntos $D_i \subseteq \mathbb{Z}_p^m \times \mathbb{Z}_p^i$ para cada $i = 1, \ldots, n$ tales que existen funciones racionales $k_i \in \mathbb{Q}_p(X_1, \ldots, x_m, V_1, \ldots, V_{i-1})$ y $\lambda_i \in \mathbb{Z}_p^*$ para $i = 1, \ldots, n$ tales que $k_i(D_{i-1}) \subseteq \mathbb{Z}_p$ y $D_i = D_{i-1} \times E_i$, donde E_i es un subconjunto de $\mathbb{Z}_p$ de uno de los siguientes dos tipos:*

Tipo I: $E_i = \{v_i \in \mathbb{Z}_p : g_i(t_1, \ldots, t_m) | k_i(t_1, \ldots, t_n, v_1, \ldots, v_{i-1}) + \lambda_i v_i\}$

Tipo II: $E_i = \{v_i \in \mathbb{Z}_p : |g_i(t_1, \ldots, t_m)| = |k_i(t_1, \ldots, t_n, v_1, \ldots, v_{i-1}) + \lambda_i v_i|\}$

Entonces

$$\int_{D_n} |f_0(t_1,\ldots,t_m)|^s |g_0(t_1,\ldots,t_m)| d\mu = (1-p^{-1})^r \int_{D_0} |f_0(t_1,\ldots,t_m)|^s \prod_{i=0}^{n} |g_i(t_1,\ldots,t_m)| d\mu$$

donde r es el número de E_i's del tipo II.

Demostración. Esto no es más que una aplicación del teorema de Fubbini. Empezamos integrando con respecto a la variable v_n. Notar que $g_n(t_1,\ldots,t_m)|k_n(t_1,\ldots,t_m,v_1,\ldots,v_{n-1}) + \lambda_n v_n$ si y sólo si $v_n \in g_n(t_1,\ldots,t_m)\mathbb{Z}_p - \lambda_n^{-1}k_n(t_1,\ldots,t_m,v_1,\ldots,v_{n-1})$ y la medida de este conjunto es simplemente $|g_n(t_1,\ldots,t_m)|$. De manera análoga $|g_i(t_1,\ldots,t_m)| = |k_n(t_1,\ldots,t_m,v_1,\ldots,v_{n-1}) + \lambda_n v_n|$ si y sólo si $v_n \in g_n(t_1,\ldots,t_m)\mathbb{Z}_p^* - \lambda_n^{-1}k_n(t_1,\ldots,t_m,v_1,\ldots,v_{n-1})$ y la medida de este último conjunto es $(1-p^{-1})|g_n(t_1,\ldots,t_m)|$. Concluímos que, despues de haber integrado respecto de v_n, el integrando se mulitplicará por $|g_n(t_1,\ldots,t_m)|$ o por $(1-p^{-1})|g_n(t_1,\ldots,t_m)|$ de acuerdo a si E_n se elige del tipo I o del tipo II. Luego continuamos integrando respecto de v_{n-1} y así sucesivamente. □

(vii) Una vez simplificada la integral, generalmente expresada como una suma de varias integrales sobre dominios de integración sencillos, procedemos a realizar la integración. A continuación coleccionamos algunas integrales que se nos van a presentar muy seguido. Recordemos que $\mu(a\mathbb{Z}_p + b) = \mu(a\mathbb{Z}_p) = |a|$ y $\mu(a\mathbb{Z}_p^* + b) = \mu(a\mathbb{Z}_p^*) = (1-p^{-1})|a|$ para todos $a, b \in \mathbb{Z}_p$. La integrales son

(a) $I_p(s) = \int_{\mathbb{Z}_p} |x|^s d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{v_p(x)=k} |x|^s d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} p^{ks}\mu(p^k\mathbb{Z}_p^*) = \sum_{k=0}^{\infty}(1-p^{-1})p^{-k(s+1)} = \frac{1-p^{-1}}{1-p^{-(s+1)}}$.

(b) $I_p^o(s) = \int_{p\mathbb{Z}_p} |x|^s d\mu = I_p(s) - \int_{\mathbb{Z}_p^*} |x|^s d\mu = I_p(s) - \mu(\mathbb{Z}_p^*) = \frac{(1-p^{-1})p^{-(s+1)}}{1-p^{-(s+1)}}$.

(c) $J_p(s,t) = \int_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}_p \\ v(x)=v(y)}} |x|^s|y|^t d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{v(x)=v(y)=k} p^{-k(s+t)}\mu(p^k\mathbb{Z}_p^*)\mu(p^k\mathbb{Z}_p^*)$
$= (1-p^{-1})^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s+t+2)} = \frac{(1-p^{-1})^2}{1-p^{-(s+t+2)}}$.

(d) $J_p^+(s,t) = \int_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}_p \\ v(x)=v(y)+1}} |x|^s|y|^t d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\substack{v(x)=k+1 \\ v(y)=k}} p^{-s(k+1)}p^{-tk}\mu(p^{k+1}\mathbb{Z}_p^*)\mu(p^k\mathbb{Z}_p^*) = (1-p^{-1})^2p^{-1}p^{-s}\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s+t+2)} = \frac{(1-p^{-s})^2p^{-(s+1)}}{1-p^{-(s+t+2)}}$

(e) $J_p^n(s,t) = \int_{\substack{x,y\in\mathbb{Z}_p \\ v(x)\le v(y)+n}} |x|^s|y|^t d\mu$. Para $n \geq 0$ esta integral se calcula

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+n} \int_{v(x)=j, v(y)=k} p^{-js}p^{-kt} d\mu = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k+n} p^{-js}p^{-kt}\mu(p^j\mathbb{Z}_p^*)\mu(p^k\mathbb{Z}_p^*)$$

$$= (1-p^{-1})^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(t+1)} \sum_{j=0}^{k+n} p^{-j(s+1)} = (1-p^{-1})^2 \sum_{k=0}^{\infty} p^{-kt} \frac{1-p^{-(k+n+1)(s+1)}}{1-p^{-(s+1)}}$$

$$= \frac{(1-p^{-1})^2}{(1-p^{-(s+1)})(1-p^{-(t+1)})} - \frac{(1-p^{-1})^2p^{-(n+1)(s+1)}}{(1-p^{-(s+t+2)})(1-p^{s+1})}.$$

Para $n < 0$ esta integral se calcula

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k-n}^{\infty}\int_{v(x)=k,v(y)=j} p^{-ks}p^{-jt}d\mu = (1-p^{-1})^2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k-n}^{\infty} p^{-k(s+1)}p^{-j(t+1)}$$
$$= (1-p^{-1})^2\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s+1)}\frac{p^{-(t+1)(k-n)}}{1-p^{-(t+1)}}(1-p^{-1})^2\frac{p^{n(t+1)}}{1-p^{-(t+1)}}\sum_{k=0}^{\infty} p^{-k(s+t+2)}$$
$$= \frac{(1-p^{-1})^2p^{n(t+1)}}{(1-p^{-(t+1)})(1-p^{s+t+2})}.$$

(f) Como últimos ejemplos tenemos

Para $n \geq 0$

$$K_p^n(s,t,u) = \int_{\substack{x,y,z\in\mathbb{Z}_p\\ v(z)\leq v(x)+v(y)+n}} |x|^s|y|^t|z|^u d\mu = \sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i+j+n}\int_{v(x)=i,v(y)=j,v(z)=k} p^{-is}p^{-jt}p^{-ku}d\mu$$
$$= \sum_{i,j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{i+j+n}(1-p^{-1})^3p^{-i(s+1)}p^{-j(s+1)}p^{-k(u+1)}$$
$$= (1-p^{-1})^3\sum_{i,j=0}^{\infty} p^{-i(s+1)}p^{-j(t+1)}\frac{1-p^{-(i+j+n+1)(u+1)}}{1-p^{-(u+s)}}$$
$$= \frac{(1-p^{-1})^3}{(1-p^{-(s+1)})(1-p^{-(t+1)})(1-p^{-(u+1)}} - \frac{(1-p^{-1})^3p^{-(n+1)(u+1)}}{(1-p^{-(s+u+2)})(1-p^{-(t+u+2)})(1-p^{-(u+1)})}.$$

Para $n \geq 0$

$$L_p^n(s,t,u) = \int_{\substack{x,y,z\in\mathbb{Z}_p\\ v(z)\leq v(x)+v(y)+n, v(x)=v(y)}} |x|^s|y|^t|z|^u d\mu = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2i+n}\int_{v(x)=v(y)=i,v(z)=j} p^{-is}p^{-it}p^{-ju}d\mu$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{2i+n}(1-p^{-1})^3p^{-i(s+t+2)}p^{-ju} = (1-p^{-1})^3\sum_{i=0}^{\infty} p^{-i(s+t+2)}\frac{1-p^{-(2i+n+1)(u+1)}}{1-p^{-(u+1)}}$$
$$= \frac{(1-p^{-1})^3}{(1-p^{-(s+t+2)})(1-p^{(u+1)})} - \frac{(1-p^{-1})^3p^{-(u+1)(n+1)}}{(1-p^{-(s+t+2u+4)})(1-p^{-(u+1)})}$$

Para $n \geq 0$

$$M_p^n(s,t,u) = \int_{\substack{x,y,z\in\mathbb{Z}_p\\ v(z)\leq v(x)+v(y)+n, v(x)>v(y)}} |x|^s|y|^t|z|^u d\mu$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i+j+n}\int_{v(x)=j,v(y)=i,v(z)=k} p^{-js}p^{-it}p^{-ku}d\mu$$
$$= \sum_{i=0}\sum_{j=i+1}^{\infty}\sum_{k=0}^{i+j+n}(1-p^{-1})^3p^{-j(s+1)}p^{-i(t+1)}p^{-k(u+1)}$$
$$= (1-p^{-1})^3\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty} p^{-j(s+1)}p^{-i(t+1)}\frac{1-p^{-(i+j+n+1)(u+1)}}{1-p^{-(u+1)}}$$
$$= \frac{(1-p^{-1})^3p^{-(s+2)}}{(1-p^{-(s+t+2)})(1-p^{-(s+1)})(1-p^{-(u+1)})} - \frac{(1-p^{-1})p^{-(n+1)(u+1)}p^{-(s+u+2)}}{(1-p^{-(u+1)})(1-p^{-(s+u+2)})(1-p^{-(s+t+2u+4)})}.$$

(viii) Una vez calculada la integral, habremos concluído con el cálculo de $\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s)$ para cada primo p. Se notará que para todos salvo una cantidad de primos p las funciones zeta locales $\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s)$ satisfacen una ecuación funcional similar a las que satisfacen los τ-grupos [Vol10],aunque aquí la ecuación funcional va a depender de cómo se factoriza el primo p en alguna extensión finita de $\mathbb{Q}$ asociada a $\mathfrak{G}$. A modo de ejemplo, mostramos la ecuación funcional que satisfacen los factores locales de la función zeta de un grupo de Bieberbach de dimensión 3, el grupo $\mathfrak{G}_3$. Obtendremos que para todo primo $p \neq 3$ se tiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3}}_p}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})}\frac{1}{1-\chi_3(p)p^{-(s-1)}},$$

donde χ_3 es un caracter de Dirichlet.Denotamos por $\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}}$ a la función que se obtiene después de reemplazar p en el lado derecho de la igualdad anterior por p^{-1}. Entonces se verifica fácilmente la siguiente igualdad

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3\chi_3(p)p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3}}_p}(s),$$

la cual será referida como la ecuación funcional que satisface $\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3}}_p}(s)$.

(ix) Finalmente se procede a hacer el producto de Euler de todas estas funciones zeta locales. El resultado es $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$ (3.1.4). Será muy fácil leer la absicsa de convergencia de esta serie a partir de la expresión a la que lleguemos usando el hecho de que un número finito de factores locales no afecta la abscisa de convergencia de la función zeta global (2.1.12).

Nota: Todos los cálculos de $\zeta_{\mathfrak{G},p}(s) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{p^k}(\mathfrak{G})}{p^{ks}}$ fueron corroborados calculando los coeficientes $a_{p^k}(\mathfrak{G})$ para los primos p desde 2 hasta 31 y para $k \leq 10$, usando el paquete Polycyclic [EHN13] del sistema GAP 4 (Groups, Algorithms and Programming)[GAP15].

4.3 Cálculo de las funciones zeta de los grupos de Bieberbach de dimensión 3

A continuación presentamos el cálculo de las funciones zeta de los 10 grupos de Bieberbach de dimensión 3.

4.3.1. La función zeta de $\mathfrak{G}_1$

$$\mathfrak{G}_1 = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1, 1 \leq i < j \leq 3\rangle$$

En este caso tenemos simplemente

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{1}}_p}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathrm{Tr}(3,\mathbb{Z}_p)}|t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-3}d\mu = (1-p^{-1})^{-3}I_p(s-1)I_p(s-2)I_p(s-3)\\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(s-2)})}\end{aligned}$$

que satisface la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\mathfrak{G}_1,p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3p^{-3s+3}\zeta_{\mathfrak{G}_1,p}(s).$$

Haciendo el producto de Euler de estos factores locales obtenemos

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{G}}(s) &= \prod_p \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1))})(1-p^{-(s-2)})}\\ &= \zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)\end{aligned}$$

cuya abscissa de convergencia es 3.

4.3.2. La función zeta de $\mathfrak{G}_2$

$$\mathfrak{G}_2 = \langle \gamma, x_1, x_3, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \leq i < j \leq 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2 \gamma^{-1} = x_2^{-1}, \gamma x_3 \gamma^{-1} = x_3^{-1} \rangle$$

El grupo de holonomía es cíclico de orden 2 generado por $N\gamma$ y, por lo tanto, por (4.2.2) obtenemos que para cada primo p

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3} \int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2} |t_{22}|^{s-3} |t_{33}|^{s-4} d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ para los cuales

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } (\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma)^2 \in B_{\mathbf{t}}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se traducen a

$$x_2^{2t_{12}} x_3^{2t_{13}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}, \text{ and } x_1^{2v_1+1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)) transformamos estas condiciones en

(1) $t_{22} | 2t_{12}$,

(2) $t_{33} | -\frac{2t_{12}}{t_{22}} t_{23} + 2t_{13}$,

(3) $t_{11} | 2v_1 + 1$,

(4) $t_{22} | -\frac{2v_{11}+1}{t_{11}} t_{12}$

(5) $t_{33} | \frac{2v_1+1}{t_{11}} \frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - \frac{2v_1+1}{t_{11}} t_{13}$.

Cuando $p = 2$, (3) puede reemplazarse por $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$, (4) por $t_{22} | t_{12}$ y (5) por $t_{33} | \frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} - t_{13}$. Entonces (1) y (2) pueden elminarse y el nuevo conjunto de condiciones resulta

$$t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*, \quad t_{22} | t_{12}, \quad \text{y} \quad t_{33} | \frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} - t_{13}.$$

Usamos (4.2.4) con $D_0 = \mathbb{Z}_2^* \times \mathbb{Z}_2^2$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22} | t_{12}$, E_2 es $1 | t_{23}$ y E_3 es $t_{33} | \frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} - t_{13}$. De este modo, la integral sobre $D_3 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{2}}_2}(s) &= (1-2^{-1})^{-3} \int_{\substack{t_{11} \in \mathbb{Z}_2^* \\ t_{22}, t_{33} \in \mathbb{Z}_2^2}} |t_{22}|^{s-2} |t_{33}|^{s-3} d\mu = (1-2^{-1})^{-3} \mu(\mathbb{Z}_2^*) I_2(s-2) I_2(s-3)\\ &= \frac{1}{(1-2^{-(s-1))})(1-2^{-(s-2)})}.\end{aligned}$$

Cuando $p \neq 2$, (1) implica (4) y (2) implica (5) y, por lo tanto, las condiciones se reducen a

$$t_{22}|t_{12}, \quad t_{33}| - \frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} + t_{13} \quad \text{and} \quad t_{11}|1+2v_1.$$

Usamos (4.2.4) con $D_0 = \mathbb{Z}_p^3$ y las variables $t_{11}.t_{22}.t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{13}.v_1$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $1|t_{23}$, E_3 es $t_{33}| - \frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} + t_{13}$ y E_4 es $t_{11}|1+2v_1$. De este modo la integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_4$ se reduce a

$$\begin{aligned}\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_{2p}}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathrm{Tr}(3,\mathbb{Z}_p)} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-3} = (1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1)I_p(s-2)I_2(s-3)\\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(s-2)})}.\end{aligned}$$

Estas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\mathfrak{G}_1,p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3}\zeta_{\mathfrak{G}_1,p}(s).$$

El producto de Euler de todas estas funciones zeta locales es

$$\zeta_{\mathfrak{G}_2}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)(1-2^{-s}),$$

cuya abscisa de convergencia es 3.

4.3.3. La función zeta de $\mathfrak{G}_3$

$$\mathfrak{G}_3 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \leq i < j \leq 3), \gamma^3 = x_1, \gamma x_2 \gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3 \gamma^{-1} = x_2^{-1}x_3^{-1}\rangle$$

El grupo de holonomía es cíclico de orden 3 generado por $N\gamma$ y, por lo tanto, por (4.2.2) obtenemos para cada primo p

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_{3p}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4} d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3,\mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1,2,3, \quad \text{y} \quad (\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^3 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se traducen a

$$x_2^{t_{13}+t_{12}}x_3^{2t_{13}-t_{12}}, x_2^{t_{23}}x_3^{t_{23}-t_{22}}, x_2^{t_{33}}, x_1^{3v_1+1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Por (4.2.3, (v)), estas condiciones se transforman en

(1) $t_{22}|t_{13}+t_{12}$;

(2) $t_{33}| - \frac{t_{13}+t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13} - t_{12}$;

(3) $t_{22}|t_{23}$;

(4) $t_{33}| - \frac{t_{23}}{t_{22}}t_{23} + t_{23} - t_{22}$;

(5) $t_{22}|t_{33}$;

(6) $t_{33}| - \frac{t_{33}}{t_{22}} t_{23}$;

(7) $t_{11}|3v_1 + 1$;

(8) $t_{22}| - \frac{3v_1+1}{t_{11}} t_{12}$;

(9) $t_{33}|\frac{3v_1+1}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13})$;

Veamos que (1) y (8) pueden reemplazarse por $t_{22}|t_{12}$ y $t_{22}|t_{13}$. En efecto, es claro que estas nuevas condiciones implican (1) y (8). Recíprocamente, si $p = 3$ entonces (8) implica $t_{22}|t_{12}$ y esto junto con (1) implican $t_{22}|t_{13}$; si $p \neq 3$, entonces (3) y (2) implican $t_{22}|2t_{13} - t_{12}$ que junto con (1) implican $t_{22}|3t_{13}$, lo cual equivale a $t_{22}|t_{13}$, y esto junto con (1) implican $t_{22}|t_{12}$.

Una vez hecho este reemplazo, veamos que las condiciones $t_{22}|t_{13}$, (2) y (9) pueden reemplazarse por la condición (*) $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13}$. Es claro que (*) y (7) implican (9). Multiplicando el lado derecho de (*) por $\frac{t_{23}}{t_{22}}$, el cual es entero p-ádico por (3), obtenemos $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}\frac{t_{23}^2}{t_{22}} - \frac{t_{13}t_{23}}{t_{22}}$, la cual junto con (4) y el hecho de que $t_{22}|t_{12}$ implican $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}(t_{23} - t_{22}) - \frac{t_{13}t_{23}}{t_{22}}$; por lo tanto, $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}(t_{23} - t_{22}) - \frac{t_{13}t_{23}}{t_{22}} - 2(\frac{t_{12}t_{23}}{t_{22}} - t_{13}) = -\frac{t_{13}+t_{12}}{t_{22}} t_{23} + 2t_{13} - t_{12}$, lo cual es exactamente (2). Finalmente, es claro que (*) y (5) implican $t_{22}|\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13}$ y esto junto con (3) implican $t_{22}|t_{13}$. Recíprocamente, si $p = 3$ entonces (*) se sigue de (9); si $p \neq 3$ entonces multiplicando el lado derecho de (2) por $\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1$, el cual por (3) es un entero p-ádico, obtenemos $t_{33}|(-\frac{t_{13}+t_{12}}{t_{22}} t_{23} + 2t_{13} - t_{12})(\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1) = -t_{12}((\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + 2\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1) + t_{13}(-(\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + \frac{t_{23}}{t_{22}} + 2)$, y usando (4) esta puede reducirse a la condición $t_{33}| - 3\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} + 3t_{13}$, la cual implica (*).

La condición (3) implica (6), las condiciones (4) y (5) implican $t_{22}| - \frac{t_{23}}{t_{22}} t_{23} + t_{23} - t_{22}$ y, por lo tanto, $(\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 - \frac{t_{23}}{t_{22}} \in \mathbb{Z}_p$, lo puede suceder si y sólo si $t_{22}|t_{23}$. Luego (4) y (5) implican (3).

Nuestro nuevo conjunto de condiciones es el siguiente

(1') $t_{22}|t_{12}$;

(2') $t_{22}|t_{33}$

(3') $t_{22}t_{33}| - t_{23}^2 + t_{23}t_{22} - t_{22}^2$;

(4') $t_{11}|3v_1 + 1$;

(5') $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13}$.

Supongamos $p = 3$. La condición (4') se transforma en $t_{11} \in \mathbb{Z}_p^*$. Afirmamos que (3') se verifica si y sólo si (a) $|t_{22}| = |t_{33}|$ y $t_{22}|t_{23}$ ó (b) $|t_{22}| = 3|t_{33}|$ y $3t_{22}|t_{23} - 3t_{22}$. En efecto, si $|t_{22}| = |t_{33}|$ entonces (3') se reduce a $t_{22}^2|t_{23}(t_{23} - t_{22})$, lo cual (por (3) de las condiciones viejas) equivale a $t_{22}|t_{23}$. Si $|t_{22}| = 3|t_{33}|$ entonces (3') equivale a $3| - (\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + \frac{t_{23}}{t_{22}} - 1$, lo cual sucede si y sólo si $\frac{t_{23}}{t_{22}} \equiv 2 \mod 3$, es decir, $3t_{22}|t_{23} - 2t_{22}$. Finalmente, si $3^2 t_{22}|t_{33}$ entonces (3') implicaría que $9| - (\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + \frac{t_{23}}{t_{22}} - 1$, pero no existe solución de $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod 9$. Habiendo reemplazado (3') por (a) o (b), podemos eliminar la condición (2'). Aplicamos ahora (4.2.4) en ambos casos. En el caso (a), usamos $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_3^3 : t_{11} \in \mathbb{Z}_3^*, |t_{22}| = |t_{33}|\}$ con las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{23}$ de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $t_{22}|t_{23}$ y E_3 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_3 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ se reduce entonces a

$$(1 - 3^{-1})^{-3} \int_{t_{11} \in \mathbb{Z}_3^*, |t_{22}| = |t_{33}|} |t_{22}|^{s-1} |t_{33}|^{s-3} d\mu = (1 - 3^{-1})^{-3} \mu(\mathbb{Z}_3^*) J_3(s - 1, s - 3) = \frac{1}{1 - 3^{2s-2}}.$$

En el caso (b), usamos $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_3^3 : t_{11} \in \mathbb{Z}_3^*, v(t_{33}) = v(t_{22}) + 1\}$ con las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $3t_{22}| - 3t_{22} + t_{23}$ y E_3 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_3 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ se reduce entonces a

$$(1-3^{-1})^{-3} \int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_3^* \\ v(t_{22})=v(t_{33})+1}} 3^{-1}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3} d\mu = (1-3^{-1})^{-3}3^{-1}\mu(\mathbb{Z}_3^*)J_3^+(s-3, s-1) = \frac{3^{-(s-1)}}{1-3^{-(2s-2)}}.$$

Sumando los dos resultados obtenemos

$$\zeta_{\hat{\mathfrak{G}}_{3_3}}(s) = \frac{1}{1-3^{-(s-1)}}.$$

Supongamos que $p \neq 3$. Cuando $|t_{22}| = |t_{33}|$, al igual que antes (3') equivale a $t_{22}|t_{23}$. Usamos (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) = v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $t_{22}|t_{23}$, E_3 es la condición $t_{11}|3v_1 + 1$ y E_4 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_i \times E_2 \times E_3 \times E_4$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}(1-p^{-1})^{-3} &\int_{v(t_{22})=v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3} d\mu = (1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1) J_p(s-1, s-3) \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})}.\end{aligned}$$

Si $|t_{22}| > |t_{33}|$, entonces (3') implica que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es una solución de $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod p$, lo cual sólo puede suceder cuando $p \equiv 1 \mod 3$; por lo tanto, vamos a asumir que este es el caso. El lema de Hensel implica que existen $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z}_p$ tales $x^2 - x + 1 = (x - \eta_1)(x - \eta_2)$, ellas no son congruentes $\mod p$ y además son las únicas soluciones $\mod p^n$ para todo $n \geq 1$. La condición (3') equivale a que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2 + -x + 1 \equiv 0 \mod \frac{t_{33}}{t_{22}}$ y, por lo tanto, una y sólo una de las soluciones η_1, η_2 es congruente a $\frac{t_{23}}{t_{22}} \mod \frac{t_{33}}{t_{22}}$. Luego (3') es equivalente a $t_{33}|t_{23} - \eta_1 t_{22}$ ó $t_{33}|t_{23} - \eta_2 t_{22}$, y estas condiciones no pueden darse simultáneamente. Sea $i \in \{1, 2\}$ y reemplacemos (3') por $t_{33}|t_{23} - \eta_i t_{22}$. Apliquemos (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) < v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{11}, t_{33}, t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $t_{33}| - \eta_i t_{22} + t_{23}$, E_3 es la condición $t_{11}|3v_1 + 1$ y E_4 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_i \times E_2 \times E_3 \times E_4$ multiplicada por 2 (pues lo hacemos para $i = 1, 2$) se reduce a

$$\begin{aligned}2(1-p^{-1})^{-3} &\int_{v(t_{22})<v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2} d\mu = 2(1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1) J_p^{-1}(s-2, s-2) \\ &= 2p^{-(s-1)} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})}.\end{aligned}$$

Para escribir el resultado final usamos el caracter de Dirichlet $\chi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definido como $\chi_3(n) = 1$ si $n \equiv 1 \mod 3$, $\chi_3(n) = -1$ si $n \equiv 2 \mod 3$ y $\chi_3(n) = 0$ en los demás valores de n. Se obtiene para $p \neq 3$

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_{3_p}}(s) &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \left(1 + (\chi_3(p) + 1)\frac{p^{1-s}}{1-p^{1-s}}\right) \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1 + \chi_3(p)p^{1-s}}{1-p^{1-s}} \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1-p^{2-2s}}{1-p^{1-s}} \frac{1}{1-\chi_3(p)p^{1-s}} \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})} \frac{1}{1-\chi_3(p)p^{-(s-1)}}.\end{aligned}$$

Estos factores locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3_p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3\chi_3(p)p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{3_p}}}(s).$$

El producto de Euler de todas estas funciones zeta locales es

$$\zeta_{\mathfrak{G}_3}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)L(s-1,\chi_3)(1-3^{-s})$$

donde $L(s,\chi_3)$ es la función L asociada al caracter χ_3 que tiene abscisa de convergencia 1. Concluímos que la abscisa de esta serie es 2.

4.3.4. La función zeta de $\mathfrak{G}_4$

$$\mathfrak{G}_4 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1\le i<j\le 3), \gamma^4 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3\gamma^{-1} = x_2^{-1}\rangle$$

El grupo de holonomía es cíclico de orden 4 y generado por $N\gamma$, donde $N = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Por (4.2.2), para cada primo p tenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{4_p}}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu$$

, donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t},\mathbf{v})\in Tr(3,\mathbb{Z}_p)\times\mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^{-1}\in\langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } (\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^4\in\langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se convierten en

$$x_2^{t_{12}+t_{13}}x_3^{-t_{12}+t_{13}},\ x_2^{-t_{23}}x_3^{t_{22}},\ \ x_2^{t_{33}},\ x_1^{4v_1+1}\in\langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)), estas condiciones se transforman en

(1) $t_{22}|t_{12}+t_{13}$;

(2) $t_{33}|-\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23}-t_{12}+t_{13}$;

(3) $t_{22}|t_{23}$;

(4) $t_{33}|\frac{t_{23}}{t_{22}}t_{23}+t_{22}$;

(5) $t_{22}|t_{33}$;

(6) $t_{11}|4v_1+1$;

(7) $t_{22}|-\frac{4v_1+1}{t_{11}}t_{12}$;

(8) $t_{33}|\frac{4v_1+1}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13})$.

Las condiciones (1) y (7) pueden reemplazarse por $t_{22}|t_{12}$ y $t_{22}|t_{13}$. En efecto, estas nuevas condiciones implican (1) y junto con (6) implican (7). Recíprocamente, si $p=2$ (7) implica que $t_{22}|t_{12}$ y esta junto con (1) implican $t_{22}|t_{13}$; si $p\neq 2$, de (2) y (5) se deduce $t_{22}|-\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23}-t_{12}+t_{13}$, que junto con (1) y (3) implican $t_{22}|-t_{12}+t_{13}$, la cual con (1) implican $t_{22}|2t_{12}$ y, por lo tanto, $t_{22}|t_{12}$.

Una vez hecho este reemplazo, veamos que las condiciones $t_{22}|t_{13}$, (2) y (8) pueden ser reemplazadas por la condición (*) $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13}$. Es claro que (*) y (6) implican (8). Si multiplicamos el lado derecho de (*) por $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ (que es entero p-ádico por (3)) obtenemos $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}\frac{t_{23}^2}{t_{22}} - t_{13}\frac{t_{23}}{t_{22}}$, la cual combinada con (4) y $t_{22}|t_{12}$ producen $t_{33}|t_{12} - t_{13}\frac{t_{23}}{t_{22}}$. Esta condición junto con (*) producen $t_{33}|t_{12} - t_{13}\frac{t_{23}}{t_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$, la cual es exactamente (2). Finalmente (*) junto con (5) implican $t_{22}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$, y esto junto con (3) implican $t_{22}|t_{13}$. Recíprocamente, de (2) y (3) obtenemos $t_{33}|(-\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23} - t_{12} + t_{13})(\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1) = -\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}\frac{t_{23}^2}{t_{22}} - t_{12}\frac{t_{23}}{t_{22}} + t_{13}\frac{t_{23}}{t_{22}} - \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23} - t_{12} + t_{23}$. Usando (4), podemos reemplazar $\frac{t_{23}^2}{t_{22}}$ por $-t_{22}$ en esta última expresión para luego así, después de simplificar términos, obtener $t_{33}| - 2\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13}$. Si $p \neq 2$ esto implica (*), y si $p = 2$ entonces (*) se sigue de (8).

Finalmente (4) y (5) implican $t_{22}^2|t_{23}^2 + t_{22}^2$ y esta condición implica (3).

El nuevo conjunto de condiciones de integración es

(1') $t_{22}|t_{33}$;

(2') $t_{22}|t_{12}$;

(3') $t_{22}t_{33}|t_{23}^2 + t_{22}^2$;

(4') $t_{11}|4v_1 + 1$;

(5') $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$.

Supongamos que $p = 2$. La condición (4') se reemplaza por $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$. Veamos que (3') vale si y sólo si (a) $|t_{22}| = |t_{33}|$ y $t_{22}|t_{23}$ ó (b) $|t_{22}| = 2|t_{33}|$ y $|t_{22}| = |t_{23}|$. En efecto, si $|t_{22}| = |t_{33}|$ la condición (3') se transforma en $t_{22}^2|t_{23}^2 + t_{22}^2$, la cual equivale a $t_{22}|t_{23}$. Si $|t_{22}| = 2|t_{33}|$ entonces (3') se transforma en $2t_{22}^2|t_{23}^2 + t_{22}^2$, lo cual vale si y sólo si $|t_{22}| = |t_{23}|$. Si $2^3 t_{22}|t_{33}$ entonces (3') implica que $4|(\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + 1$, pero no existe solución de $x^2 + 1 \equiv 0 \mod 4$, por lo que este caso no es posible. Calculamos la integral usando (4.2.4) en ambos casos. Para el caso (a) usamos $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_2^3 : t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*, v(t_{22}) = v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{22}|t_{23}$ y E_3 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_3 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ se reduce entonces a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{22})=v(t_{33})}} |t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu = (1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_2^*)J_2(s-1, s-3) = \frac{1}{1-2^{-(2s-2)}}.$$

En el caso (b), usamos $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_2^3 : t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*, v(t_{33}) = v(t_{22}) + 1\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $|t_{22}| = |t_{23}|$, E_3 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_3 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3$ se reduce entonces a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{33})=v(t_{22})+1}} (1-2^{-1})|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu = (1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_2^*)2^{-1}J_2^+(s-3, s-1)$$
$$= \frac{2^{-(s-1)}}{1-2^{-(2s-2)}}.$$

Sumando ambas integrales obtenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{42}}}(s) = \frac{1}{1-2^{-(s-1)}}.$$

Supongamos que $p \neq 2$. Como antes, si $|t_{22}| = |t_{33}|$ entonces (3') es equivalente a $t_{22}|t_{23}$ y, por lo tanto, podemos usar (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) = v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{22}|t_{23}$, E_3 es $t_{11}|4v_1 + 1$ y E_4 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_4$ se reduce entonces a

$$(1-p^{-1})^{-3} \int_{v(t_{22})=v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu = (1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1)J_p(s-1, s-3)$$
$$= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})}.$$

Si $|t_{22}| > |t_{33}|$, escribiendo (3') como $\frac{t_{33}}{t_{22}}|(\frac{t_{23}}{t_{22}})^2 + 1$ se obtiene que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2 + 1 \equiv 0 \mod p$, lo cual sólo puede pasar cuando $p \equiv 1 \mod 4$; por lo tanto, asumiremos que este es el caso. El lema de Hensel implica que existe $i \in \mathbb{Z}_p$ such that $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$, que i y $-i$ no son congurentes $\mod p$ y además que i y $-i$ son las únicas soluciones de $x^2 + 1 \equiv 0 \mod p^n$ para todo $n \geq 1$. La condición (3') equivale a que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2 + 1 \mod \frac{t_{33}}{t_{22})}$ y por lo tanto una y sólo una de las soluciones $i, -i$ es congruente a $\frac{t_{23}}{t_{22}} \mod \frac{t_{33}}{t_{22}}$. Concluímos que (3') equivale a (a) $t_{33}|t_{23} - it_{22}$ ó (b) $t_{33}|t_{23} + it_{22}$ y que estos dos casos no pueden darse simultáneamente. En el caso (a) calculamos la integral usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) < v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$ de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{22}$, E_2 es la condición $t_{33}| - t_{22} + t_{23}$, E_3 es la condición $t_{11}|4v_1 + 1$ y E_4 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ multiplicada por 2 (pues la integral en el caso (b) da lo mismo) se reduce entonces a

$$2(1-p^{-1})^{-3} \int_{v(t_{22})>v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu = 2(1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1)J_p^{-1}(s-2, s-2) =$$
$$= 2p^{-(s-1)} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})}.$$

Para escribir el resultado final usamos el caracter de Dirichlet $\chi_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definido como $\chi_4(n) = 1$ si $n \equiv 1 \mod 4$, $\chi_4(n) = -1$ si $n \equiv 3 \mod 4$ y $\chi_4(n) = 0$ en los demás valores de n. Se obtiene para $p \neq 2$

$$\begin{aligned}
\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{4}}_p}(s) &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \left(1 + (\chi_4(p)+1)\frac{p^{1-s}}{1-p^{1-s}}\right) \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1+\chi_4(p)p^{1-s}}{1-p^{1-s}} \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1-p^{2-2s}}{1-p^{1-s}} \frac{1}{1-\chi_4(p)p^{1-s}} \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})} \frac{1}{1-\chi_4(p)p^{-(s-1)}}.
\end{aligned}$$

Estas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{4}}_p}(s)|_{p \to p^{-1}} = (-1)^3 \chi_4(p) p^{-3s+2} \zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{4}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todas estas funciones zeta locales es

$$\zeta_{\mathfrak{G}_4}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)L(s-1, \chi_4)(1-2^{-s})$$

donde $L(s, \chi_4)$ es la serie L asociada al caracter χ_4, la cual tiene abscisa de convergencia 1. Luego la abscisa de convergencia es 2.

4.3.5. La función zeta de $\mathfrak{G}_5$

$$\mathfrak{G}_5 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \leq i < j \leq 3), \gamma^6 = 1, \gamma x_2 \gamma^{-1} = x_3, \gamma x_3 \gamma^{-1} = x_2^{-1} x_3 \rangle$$

El grupo de holonomía es cíciclo de orden 6 generado por $N\gamma$. De (4.2.2), resulta que para todo primo p se tiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_5}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3} \int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2} |t_{22}|^{s-3} |t_{33}|^{s-4} d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para} i = 1, 2, 3 \text{ y } (\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \gamma)^6 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reducen a

$$x_2^{-t_{12}-t_{13}} x_3^{t_{12}}, \; x_2^{-t_{23}} x_3^{t_{22}+t_{23}}, \; x_2^{t_{33}}, \; x_1^{6v_1+1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)) podemos transformar estas condiciones en

(1) $t_{22} | t_{12} + t_{13}$;

(2) $t_{33} | \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}} t_{23} + t_{12}$;

(3) $t_{22} | t_{23}$;

(4) $t_{33} | \frac{t_{23}}{t_{22}} t_{23} + t_{22} + t_{23}$;

(5) $t_{22} | t_{33}$;

(6) $t_{33} | \frac{t_{33}}{t_{22}} t_{23}$;

(7) $t_{11} | 6v_1 + 1$;

(8) $t_{22} | - \frac{6v_1+1}{t_{11}} t_{12}$;

(9) $t_{33} | \frac{6v_1+1}{t_{11}} (\frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13})$.

La condición (6) puede eliminarse pues ella es implicada por (3). Veamos que (1) y (8) pueden ser reemplazadas por $t_{22}|t_{12}$ y $t_{22}|t_{13}$. En efecto, de (2) y (5) se sigue $t_{22}|\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23} + t_{12}$, y esta condición con (1) y (3) implican $t_{22}|t_{12}$, la cual junto con (1) implican $t_{22}|t_{13}$. Recíprocamente, la condición $t_{22}|t_{12}$ junta con (7) implican (8) y junta con $t_{22}|t_{13}$ implican (1).

Una vez hecho este reemplazo, veamos que las condiciones $t_{22}|t_{13}$, (2) y (9) pueden ser reemplazadas por (*) $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. En efecto por (2) y (3) se tiene $t_{33}|(\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23} + t_{12})(\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1) = \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}} \frac{t_{23}^2}{t_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} + \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}} t_{23} + t_{12}$. Por (4), podemos reemplazar $\frac{t_{23}^2}{t_{22}}$ por $-t_{22} - t_{23}$ en el lado derecho de la condición anterior y, por lo tanto, obtenemos $t_{33}|(\frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}}t_{23} + t_{12})(\frac{t_{23}}{t_{22}} + 1) = \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}} \frac{t_{23}^2}{t_{22}} + \frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} + \frac{t_{12}+t_{13}}{t_{22}} t_{23} + t_{12} = \frac{t_{12}}{t_{22}} t_{23} - t_{13}$. Recíprocamente, (*) y (7) implican (9), y por (3) se tiene $t_{33}|(\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13})\frac{t_{23}}{t_{22}} = \frac{t_{12}}{t_{22}} \frac{t_{23}^2}{t_{22}} - \frac{t_{13}}{t_{22}} t_{23}$. Usando (4) podemos reemplazar $\frac{t_{23}^2}{t_{22}}$ en esta última expresión por $-t_{22} - t_{13}$ y el resultado es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}(-t_{22} - t_{23}) - \frac{t_{13}}{t_{22}} t_{23} = -fract_{12} + t_{13} t_{22} t_{23} - t_{12}$ que es exactamente (2). Finalmente, usando (*) y (5) se obtiene $t_{22}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$ que junta con (3) implican $t_{22}|t_{13}$.

El nuevo conjunto de condiciones resulta

(1') $t_{22}|t_{33}$;

(2') $t_{22}|t_{12}$;

(3') $t_{33}|\frac{t_{23}}{t_{22}}t_{23}+t_{22}+t_{23}$;

(4') $t_{11}|6v_1+1$;

(5') $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13}$.

Supongamos $p=2$. La condición (4') se transforma en $t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*$. Veamos que (3') puede reemplazarse por las dos condiciones $|t_{22}|=|t_{33}|$ y $t_{22}|t_{23}$. En efecto, si $|t_{22}|=|t_{33}|$ entonces (3') implica $t_{22}^2|t_{23}^2+t_{23}t_{22}+t_{22}^2$, la cual equivale a $t_{22}|t_{23}$. Si $|t_{22}|>|t_{33}|$ entonces (3') implica $2t_{22}^2|t_{23}^2+t_{23}t_{22}+t_{22}^2$; por lo tanto, $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2+x+1\equiv 0 \mod 2$, pero no existe una tal solución. Calculamos la integral usando (4.2.4) con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*, v(t_{22})=v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12},t_{23},t_{13}$ de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es la condición $t_{22}|t_{23}$ y E_3 es la condición $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13}$. La integral sobre D_4 se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{5_2}}}(s)&=(1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{22})=v(t_{33})}}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu=(1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_2^*)J_2(s-1,s-3)\\&=\frac{1}{1-2^{-(2s-2)}}.\end{aligned}$$

Supongamos $p=3$. La condición (4') se transforma en $t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*$. Si $|t_{22}|=|t_{33}|$, vemos como en el caso $p=2$ que (3') equivale a $t_{22}|t_{23}$. Si $|t_{22}|=3|t_{33}|$ entonces (3') se transforma en $3|(\frac{t_{23}}{t_{22}})^2+\frac{t_{23}}{t_{22}}+1$ lo cual sucede si y sólo si $\frac{t_{23}}{t_{22}}\equiv 1 \mod 3$, es decir $3t_{22}|t_{23}-t_{22}$. Si $3^2t_{22}|t_{33}$ entonces (3') implica que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2+x+1\equiv 0 \mod 9$, pero no existe una solución a tal ecuación; por lo tanto, tal caso no puede ocurrir. Calculamos la integral en los primeros dos casos usando (4.2.4). En el primer caso usamos $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_3^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_3^*, v(t_{22})=v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12},t_{23},t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{22}|t_{23}$ y E_3 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13}$. La integral sobre D_4 se reduce entonces

$$(1-3^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_3^*\\ v(t_{22})=v(t_{33})}}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu=(1-3^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_3^*)J_3(s-1,s-3)=\frac{1}{1-3^{-(2s-2)}}.$$

En el segundo caso usamos $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_3^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_3^*, v(t_{33})=v(t_{22})+1\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12},t_{23},t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $3t_{22}|t_{23}-t_{22}$ y E_3 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13}$. La integral sobre D_4 se reduce entonces a

$$\begin{aligned}&(1-3^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_3^*\\ v(t_{33})=v(t_{22})+1}}3^{-1}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3}d\mu=(1-3^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_3^*)3^{-1}J_3^+(s-3,s-1)\\&=\frac{3^{-(s-1)}}{1-3^{-(2s-2)}}.\end{aligned}$$

Sumando ambos resultados obtenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{5_3}}}(s)=\frac{1}{1-3^{-(s-1)}}.$$

Supongamos que $p \neq 2, 3$. Como antes, cuando $|t_{22}| = |t_{33}|$ la condición (3') puede reemplazarse por $t_{22}|t_{23}$. Usamos (4.2.4) para calcular la integral en este caso usando $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) = v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{22}|t_{23}$, E_3 es $t_{11}| + 6v_1 + 1$ y E_4 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre D_4 se reduce entonces a

$$(1-p^{-1})^{-3} \int_{v(t_{22})=v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-1}|t_{33}|^{s-3} d\mu = (1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1) J_p(s-1, s-3)$$
$$= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})}.$$

Si $|t_{22}| > |t_{33}|$ entonces (3') implica que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2 + x + 1 \equiv 0 \mod p$ la cual tiene solución si y sólo si $p \equiv 1 \mod 3$ y por lo tanto asumiremos que este es el caso. Por el lema de Hensel, existen $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{Z}_p$ tales que $x^2 + x + 1 = (x - \eta_1)(x - \eta_2)$. Además η_1 y η_2 no son congruentes $\mod p$ y ellas son las únicas soluciones $\mod p^n$ para todo $n \geq 1$. La condición (3') equivale a que $\frac{t_{23}}{t_{22}}$ es solución de $x^2 + x + 1 \equiv 0 \mod \frac{t_{33}}{t_{22}}$ y por lo tanto $\frac{t_{23}}{t_{22}} \equiv \eta_i \mod \frac{t_{33}}{t_{22}}$ para un único $i \in \{1, 2\}$. Luego (3') equivale a $t_{33}|t_{23} - \eta_1 t_{22}$ ó $t_{33}|t_{23} - \eta_2 t_{22}$ y estas dos condiciones no pueden verificarse simultáneamente. Sea $i \in \{1, 2\}$ y reemplacemos (3') por $t_{22}|t_{23} - \eta_i t_{22}$. Usamos (4.2.4) para calcular la integral con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{22}) < v(t_{33})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_1, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{22}$, E_2 es $t_{33}| - \eta_i t_{22} + t_{23}$, E_3 es $t_{11}|6v_1 + 1$ y E_4 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times E_2 \times E_3 \times E_4$ multiplicada por 2 (pues la integral en ambos casos $i = 1, 2$ da lo mismo) se reduce entonces a

$$2(1-p^{-1})^{-3} \int_{v(t_{22})<v(t_{33})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2} d\mu = 2(1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1) J_p^{-1}(s-2, s-2)$$
$$= 2p^{-(s-1)} \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})}.$$

Para escribir el resultado final, usamos el caracter de Dirichlet $\chi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, definido como $\chi_3(n) = 1$ si $n \equiv 1 \mod 3$, $\chi_3(n) = -1$ si $n \equiv 2 \mod 3$ y $\chi_3(n) = 0$ en los demás valores de n. Se obtiene para $p \neq 2, 3$

$$\begin{aligned}
\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{5p}}}(s) &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \left(1 + (\chi_3(p) + 1)\frac{p^{1-s}}{1-p^{1-s}}\right) \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1 + \chi_3(p)p^{1-s}}{1-p^{1-s}} \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(2s-2)})} \frac{1-p^{2-2s}}{1-p^{1-s}} \frac{1}{1-\chi_3(p)p^{1-s}} \\
&= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})} \frac{1}{1-\chi_3(p)p^{-(s-1)}}.
\end{aligned}$$

Estos factores locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{5p}}}(s)|_{p \to p^{-1}} = (-1)^3 \chi_3(p) p^{-3s+2} \zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{5p}}}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta entonces

$$\zeta_{\mathfrak{G}_5}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)L(s-1, \chi_3)(1-2^{-s})(1-3^{-s})$$

donde $L(s, \chi_3)$ es la serie L asociada a χ_3. La abscisa de convergencia resulta igual a 2.

4.3.6. La función zeta de $\mathfrak{G}_6$

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_6 = \langle \alpha, \beta, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \le i < j \le 3), \alpha^2 = x_1, \alpha x_2 \alpha^{-1} = x_2^{-1}, \alpha x_3 \alpha^{-1} = x_3^{-1}\\ \beta^2 = x_2, \beta x_1 \beta^{-1} = x_1^{-1}, \beta x_3 \beta^{-1} = x_3^{-1}, (\alpha\beta)^2 = x_3^{-1}\rangle\end{aligned}$$

Resulta que el grupo de holonomía es de orden 4, isomorfo a $C_2 \times C_2$ y con generadores $N\alpha$ y $N\beta$. Por (4.2.2), se obtiene para cada primo p

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_6}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3} \int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-3} |t_{22}|^{s-4} |t_{33}|^{s-5} d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p^3$ tales que

$\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1} \alpha \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$ $\quad \mathbf{x}^{\mathbf{v}_2} \beta \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i} (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$ para $i = 1, 2, 3$ y $(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^2, (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^2, (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^2 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}$.

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se traducen en

$$x_2^{2t_{12}} x_3^{2t_{13}},\ x_3^{2t_{13}},\ x_3^{2t_{23}},\ x_1^{2v_{11}+1},\ x_2^{2v_{12}},\ x_3^{-1-2v_{13}+2v_{23}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (3.3.10), las condiciones anteriores se traducen en

(1) $t_{22}|2t_{12}$;

(2) $t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}$;

(3) $t_{33}|2t_{13}$;

(4) $t_{33}|2t_{23}$;

(5) $t_{11}|2v_{11}+1$;

(6) $t_{22}|\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}t_{12}$;

(7) $t_{33}|\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13})$;

(8) $t_{22}|2v_{22}+1$;

(9) $t_{33}|\frac{2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23}$;

(10) $t_{33}|-1-2v_{13}+2v_{23}$.

Cuando $p = 2$, las condiciones (5), (8) y (10) implican que t_{11}, t_{22} y t_{33} están en $\mathbb{Z}_2^*$, y recíprocamente, estas tres condiciones trivializan todas las demás. Luego la integral resulta

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_2}_2}(s) = (1-2^{-1})^{-3} \int_{t_{11}, t_{22}, t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*} d\mu = 1.$$

Cuando $p \neq 2$, (1) equivale a $t_{22}|t_{12}$, (2) es consecuencia de (1) y (4), (3) equivale a $t_{33}|t_{22}$, (6) es consecuencia de (1) y (5), (7) es consecuencia de (1), (3), (4) y (5), y finalmente (9) es consecuencia de (4) y (8). Luego las condiciones se reducen a

$$t_{22}|t_{12},\ t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23},\ t_{11}|2v_{11}+1,\ t_{22}|2v_{22}+1,\ t_{33}|-1-2v_{13}+2v_{23}.$$

Calculamos la integral usando (4.2.4) con $D_0 = \mathbb{Z}_p^3$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}, t_{12}, t_{13}, t_{23}, v_{11}, v_{22}, v_{13}, v_{23}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{33}|t_{13}$, E_3 es $t_{33}|t_{23}$, E_4 es $t_{11}|2v_{11}{+}1$, E_5 es $t_{22}|2v_{22}{+}1$, E_6 es $1|v_{13}$ y E_7 es $t_{33}|-1-2v_{13}+2v_{23}$. La integral sobre $D_7 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_7$ se reducen entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{6p}}}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu = (1-p^{-1})^{-3}I_p(s-2)I_p(s-2)I_p(s-2)\\ &= \frac{1}{(1-p^{-(s-1)})^3}.\end{aligned}$$

Estas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{6p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}_{6p}}}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales es

$$\zeta_{\mathfrak{G}_6}(s) = \zeta(s-1)^3(1-2^{-(s-1)})^3,$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.3.7. La función zeta de $\mathfrak{B}_1$

$$\mathfrak{B}_1 = \langle \gamma, x_1, x_2, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \le i < j \le 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2 \gamma^{-1} = x_2, \gamma x_3 \gamma^{-1} = x_3^{-1}\rangle$$

El grupo de holonomía es cíclico de orden 2 y generado por $N\gamma$. Por (4.2.2) resulta que para cada primo p

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen las siguientes condiciones

$$(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1,2,3 \text{ y } (\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma)^2 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se traducen en

$$x_3^{2t_{13}},\ x_3^{2t_{23}},\ x_1^{2v_1+1}x_2^{2v_2} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)) podemos transformar estas condiciones en

(1) $t_{33}|2t_{13}$;

(2) $t_{33}|2t_{23}$;

(3) $t_{11}|2v_1+1$;

(4) $t_{22}|-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2$;

(5) $t_{33}|-\frac{-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2}{t_{22}}t_{23}-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{13}$.

Cuando $p=2$, la condición (3) dice que t_{11} es una unidad. Por (1) y (2) el dominio de integración se divide en 4 subconjuntos disjuntos de acuerdo a los siguientes casos: (a) $t_{33}|t_{13}$ y $t_{33}|t_{23}$, (b) $t_{33}|t_{13}$ y $|t_{33}|=|2t_{23}|$, (c) $|t_{33}|=|2t_{13}|$ y $t_{33}|t_{23}$, y (d) $|t_{33}|=|2t_{13}|=|2t_{23}|$.

Caso (a): $t_{33}|t_{13}$ y $t_{33}|t_{23}$. La condición (5) es implicada por estas condiciones y por lo tanto las condicones resultan

$$t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*,\ t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23} \text{ y } t_{22}|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}.$$

Usamos (4.2.4) con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{13},t_{23},v_1,v_2,t_{12}$, de modo que E_1 es la condición $t_{33}|t_{13}$, E_2 es $t_{33}|t_{23}$, E_3 es $1|v_1$, E_4 es $1|v_2$ y E_5 es $t_{22}|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}$. La integral sobre $D_5=D_0\times E_1\times\ldots\times E_5$ se reduce entonces a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu=(1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_{\not 2}{}^3)I_p(s-2)I_p(s-2)=\frac{1}{(1-2^{-(s-1)})^2}.$$

Case (b): $t_{33}|t_{13}$ y $|t_{33}|=|2t_{23}|$. Necesariamente $t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2$. La condición $t_{33}|t_{13}$ muesta que (5) equivale a $t_{33}|-\frac{-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2}{t_{22}}t_{23}$, la condición $|t_{33}|=|2t_{23}|$ muestra que la anterior equivale a $2t_{22}|-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2$, y finalmente esta implica (4). Luego el nuevo conjunto de condiciones es

$$t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*,\ t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2,\ t_{33}|t_{13},\ |2^{-1}t_{33}|=|t_{23}|, 2t_{22}|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}.$$

Calculamos la integral sobre estas condiciones usando (4.2.4) con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*, t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{13},t_{23},v_1,v_2,t_{12}$, de modo que E_1 es la condición $t_{33}|t_{13}$, E_2 es $|2^{-1}t_{33}|=|t_{23}|$, E_3 es $1|v_1$, E_4 es $1|v_2$ y E_5 es $2t_{22}|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}$. La integral sobre $D_5=D_0\times E_1\times\ldots\times E_5$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}(1-2^{-1})^{-3}&\int_{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*,t_{33}\in2\mathbb{Z}_2}(1-2^{-1})2^{-1}|t_{22}|^{s-2}2|t_{33}|^{s-2}d\mu=(1-2^{-1})^{-2}\mu(\mathbb{Z}_2^*)I_p(s-2)I_p^o(s-2)\\&=\frac{2^{-s}}{(1-2^{-(s-1)})^2}.\end{aligned}$$

Caso (c): $|t_{33}|=|2t_{13}|$ y $t_{33}|t_{23}$. La condición $t_{33}|t_{23}$ junto con (5) implican que $t_{33}|t_{13}$, lo cual contradice la condición $|t_{33}|=|2t_{13}|$. Entonces no puede darse este caso.

Caso (d): $|t_{33}|=|2t_{13}|=|2t_{23}|$. Con estas condiciones, la condición (5) equivale a $2|-\frac{-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2}{t_{22}}-\frac{2v_1+1}{t_{11}}\frac{t_{13}}{t_{23}}$, la cual a su vez equivale a $\frac{-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2}{t_{22}}\in\mathbb{Z}_2^*$, y esta implica (4). Las condiciones se reducen entonces a

$$t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*,\ t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2,\ |2^{-1}t_{33}|=|t_{13}|,\ |2^{-1}t_{33}|=|t_{23}| \text{ y } |t_{22}|=|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}|.$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*, t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{13},t_{23},v_1,v_2,t_{12}$, de modo que E_1 es la condición $|2^{-1}t_{33}|=|t_{13}|$, E_2 es $|2^{-1}t_{33}|=|t_{23}|$, E_3 es $1|v_1$, E_4 es $1|v_2$ y E_5 es $|t_{22}|=|t_{12}-\frac{2v_2t_{11}}{2v_1+1}|$. La integral sobre $D_5=D_0\times E_1\times\ldots\times E_5$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}(1-2^{-1})^{-3}&\int_{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*,t_{33}\in2\mathbb{Z}_2}(1-2^{-1})^{-3}2^2|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu\\&=2^2\mu(\mathbb{Z}_2^*)I_2(s-2)I_2^o(s-s)=\frac{2^{-s}}{(1-2^{-(s-1)})^2}.\end{aligned}$$

Sumando los resultados de estos 4 casos obtenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{12}}}(s) = (1+2^{1-s})\frac{1}{(1-2^{-(s-1)})^2}.$$

Cuando $p \neq 2$, las condiciones (1) y (2) son simplemente $t_{33}|t_{13}$ y $t_{33}|t_{23}$, y estas con (3) y (4) implican (5). Luego las condiciones son

$$t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23},\ t_{11}|2v_1+1 \text{ and } t_{22}|-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2.$$

Usando (4.2.4) con $D_0 = \mathbb{Z}_p^3$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{13}, t_{23}, v_1, t_{12}, v_2$, de modo que E_1 es la condición $t_{33}|t_{13}$, E_2 es $t_{33}|t_{23}$, E_3 es $t_{11}|2v_1+1$, E_4 es $1|t_{12}$ y E_5 es $t_{22}|-\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}+2v_2$. La integral sobre $D_5 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_5$ se reduce entonces a

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathbb{Z}^3}|t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu = (1-p^{-1})^{-3}I_p(s-1)I_p(s-2)I_p(s-)$$
$$\frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})^2}.$$

Estas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\zeta_{\mathfrak{B}_1}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)^2(1-2^{-s})(1+2^{1-s}),$$

cuya abscisa de convergencia es 3.

4.3.8. La función zeta de $\mathfrak{B}_2$.

$$\mathfrak{B}_2 = \langle \gamma, x_1, x_3, x_3 : [x_i, x_j] = 1 (1 \le i < j \le 3), \gamma^2 = x_1, \gamma x_2\gamma^{-1} = x_2, \gamma x_3 \gamma^{-1} = x_2 x_3^{-1}\rangle$$

Veamos que para $p \neq 2$ se tiene que $\widehat{\mathfrak{B}_{2p}} \cong \widehat{\mathfrak{B}_{1p}}$ como grupos virtualmente $\tau_{\mathbb{Z}_p}$-grupos. En efecto, $2^{-1} \in \mathbb{Z}_p$ y, por lo tanto, podemos hacer el siguiente cambio de variables $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ e $y_3 = x_2^{-1/2}x_3$. Resulta que $\gamma^2 = y_1$, $\gamma y_2 \gamma^{-1} = y_2$ y $\gamma y_3 \gamma^{-1} = \gamma x_2^{-1/2}\gamma^{-1}\gamma x_3 \gamma^{-1} = x_2^{-1/2}x_2 x_3^{-1} = y_3^{-1}$ y, por lo tanto, la presentación de $\widehat{\mathfrak{B}_{2p}}$ coincide con la de $\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}$. Resulta entonces

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s) = \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})^2}.$$

la cual satisface la ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{1p}}}(s).$$

Para $p = 2$, vamos a hacer un cambio de variables poniendo $y_1 = x_3, y_2 = x_1, y_3 = x_2$ de modo que $\gamma y_1 \gamma^{-1} = y_1^{-1}y_3$, $\gamma y_3 \gamma^{-1} = y_3$ y $\gamma^2 = y_2$. El grupo de holonomía es cíclico de orden 2 generado por $N\gamma$. Usando (4.2.2) con esta nueva presentación, tenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{32}}}(s) = (1-2^{-1})^{-1}\int_{\mathcal{T}'}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t},\mathbf{v}) \in Tr(3,\mathbb{Z}_2)\times\mathbb{Z}_2^3$ tales que

$$\mathbf{y}^{\mathbf{v}}\gamma\mathbf{y}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{y}^{\mathbf{v}}\gamma)^{-1} \in \langle \mathbf{y}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_2} \text{ para } i=1,2,3 \text{ y } (\mathbf{y}^{\mathbf{v}}\gamma)^2 \in \langle \mathbf{y}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$y_2^{2t_{12}}y_3^{2t_{13}+t_{11}},\ y_2^{2v_2+1}y_3^{2v_3+v_1} \in \langle \mathbf{y}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{y}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_2}.$$

Usando (3.3.10), podemos transformar estas condiciones en

(1) $t_{22}|2t_{12}$;

(2) $t_{33}|-\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}+2t_{13}+t_{11}$;

(3) $t_{22}|2v_2+1$;

(4) $t_{33}|-\frac{2v_2+1}{t_{22}}t_{23}+2v_3+v_1$.

La condición (3) se traduce a $t_{22}\in\mathbb{Z}_2^*$ y entonces podemos eliminar (1). Dividimos ahora en dos casos: (a) t_{33} es unidad, y (b) $2|t_{33}$. En el caso (a), las condiciones (2) y (4) se trivializan y la integral en este caso resulta

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{22},t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*}|t_{11}|^{s-2}d\mu = \frac{1}{1-2^{-(s-1)}}.$$

En el caso (b), la condición (2) se transforma en $2|t_{11}$ y $\frac{t_{33}}{2}|-\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}+t_{13}+\frac{t_{11}}{2}$. Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{11},t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2, t_{22}\in\mathbb{Z}_2^*\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12},t_{23},t_{13},v_2,v_3,v_1$, de modo que E_1 es la condición $1|t_{12}$, E_2 es $1|t_{23}$, E_3 es $\frac{t_{33}}{2}|-\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}+t_{13}+\frac{t_{11}}{2}$, E_4 es $1|v_2$, E_5 es $1|v_3$ y E_6 es $t_{33}|-\frac{2v_2+1}{t_{22}}t_{23}+2v_3+v_1$. La integral sobre $D_6=D_0\times E_1\times\ldots\times E_6$ se reduce entonces a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{11},t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2,t_{22}\in\mathbb{Z}_2^*}|t_{11}|^{s-2}2|t_{33}|^{s-2}d\mu = 2(1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_2^*)(I_2^o(s-2))^2 = \frac{2^{-(2s-3)}}{(1-2^{-(s-1)})^2}.$$

La suma de los resultados obtenidos en estos dos casos resulta

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_2}_2}(s) = \frac{1-2^{-(s-1)}+2^{-(2s-3)}}{(1-2^{-(s-1)})^2}.$$

El producto de Euler de todas estas funciones zeta locales resulta

$$\zeta_{\mathfrak{B}_2}(s)=\zeta(s)(\zeta(s-1))^2(1-2^{-1})(1-2^{-(s-1)}+2^{-(2s-3)})$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.3.9. La función zeta de $\mathfrak{B}_3$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_3=\langle\alpha,\beta,x_1,x_2,x_3 :&[x_i,x_j]=1 (1\le i<j\le 3), \alpha^2=x_1, \alpha x_2\alpha^{-1}=x_2^{-1}, \alpha x_3\alpha^{-1}=x_3^{-1}\\ &\beta^2=x_2, \beta x_1\beta^{-1}=x_1, \beta x_3\beta^{-1}=x_3^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}=x_2\rangle\end{aligned}$$

El grupo de holonomía es de orden 4, isomorfo a $C_2 \times C_2$ y generado por las clases de α y β. Por (4.2.2), tenemos que para todo primo p

$$\zeta^{\leq}_{\mathfrak{B}_3,N_0,p}(s) = (1-p^{-1})^{-1} \int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-3}|t_{22}|^{s-4}|t_{33}|^{s-5} d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de ternas $(\mathbf{t}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p^3$ tales que

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^{-1}, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_3}\beta)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1, 2, 3$$
$$(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^2, (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^2, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^{-1}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$x_2^{t_{12}}, x_2^{t_{22}}, x_3^{t_{13}}, x_3^{t_{23}}, x_1^{2v_{11}+1}, x_1^{2v_{21}}x_2^{2v_{22}+1}, x_2^{2v_{22}+1}x_3^{2v_{13}-2v_{23}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)), podemos trasnformar estas condiciones en

(1) $t_{22}|2t_{12}$;

(2) $t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}$;

(3) $t_{33}|2t_{13}$;

(4) $t_{33}|2t_{23}$;

(5) $t_{11}|2v_{11}+1$;

(6) $t_{22}|-\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}t_{12}$;

(7) $t_{33}|\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}-t_{13})$;

(8) $t_{11}|2v_{21}$;

(9) $t_{22}|-\frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{12}+2v_{22}+1$;

(10) $t_{33}|-\frac{-\frac{-2v_{21}}{t_{11}}t_{12}+2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23}-\frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{13}$;

(11) $t_{22}|2v_{22}+1$;

(12) $t_{33}|-\frac{2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23}+2v_{13}-2v_{23}$.

Supongamos que $p=2$. Las condiciones (5) y (11) equivalen a $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$ y $t_{22} \in \mathbb{Z}_2^*$ y, por lo tanto, podemos eliminar las condiciones (1), (6), (8) y (9). Se sigue también que el coeficiente de t_{23} en el lado derecho de la condición (10) es una unidad; por lo tanto, usando (3) vemos que (10) puede reemplazarse por $t_{33}|t_{23}$. Podemos eliminar entonces (4) y reemplazar (12) por $t_{33}|2v_{13}-2v_{23}$. Las condiciones resultan entonces

$$t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*,\ t_{22} \in \mathbb{Z}_2^*,\ t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23} \text{ y } t_{33}|2v_{13}-2v_{23}.$$

Consideremos dos casos: (a) $t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*$ y (b) $t_{33} \in 2\mathbb{Z}_2$. En el primero, las condiciones se reducen a $t_{11}, t_{22}, t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*$ y la integral resulta entonces

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{11},t_{22},t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*} d\mu = 1.$$

En el caso (b), la condición $t_{33}|2v_{13}-2v_{23}$ equivale a $\frac{t_{33}}{2}|v_{13}-v_{23}$. Usamos (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11},t_{22},t_{33}) \in \mathbb{Z}_2^3 : t_{11},t_{22},t_{33} \in 2\mathbb{Z}_2\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{13},t_{23},v_{13},v_{23}$, de modo que E_1 es la condición $t_{33}|t_{13}$, E_2 es $t_{33}|t_{23}$, E_3 es $1|v_{13}$ y E_4 es $\frac{t_{33}}{2}|v_{13}-v_{23}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_4$ es

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{11},t_{22}\in\mathbb{Z}_2^*,t_{33}\in 2\mathbb{Z}_2} 2|t_{33}|^{s-2}d\mu = 2(1-2^{-1})^{-3}(\mu(\mathbb{Z}_2^*))^2 I_2(s-2) = \frac{2^{-(s-2)}}{1-2^{-(s-1)}}.$$

Sumando ambos resultados obtenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{3_2}}}(s) = \frac{1+2^{1-s}}{1-2^{-(s-1)}}.$$

Supongamos que $p \neq 2$. Las condiciones (1) y (4) implican (2), las condiciones (1) y (5) implican (6), las condiciones (1), (3), (4) y (5) implican (7), las condiciones (3), (4), (8) y (9) implican (10), las condiciones (1), (8) y (11) implican (9), y finalmente (4) transforma (12) en $t_{33}|v_{13}-v_{23}$. El conjunto reducido de condiciones resulta

$$t_{22}|t_{12},\ t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23},\ t_{11}|2v_{11}+1,\ t_{11}|v_{21},\ t_{22}|2v_{22}+1 \text{ y } t_{33}|v_{13}-v_{23}.$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo este conjunto de condiciones con $D_0 = \mathbb{Z}_p^3$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12},t_{13},t_{23},v_{11},v_{21},v_{22},v_{13},v_{23}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{33}|t_{13}$, E_3 es $t_{33}|t_{23}$, E_4 es $t_{11}|2v_{11}+1$, E_5 es $t_{11}|v_{21}$, E_6 es $t_{22}|2v_{22}+1$ y E_7 es $t_{33}|v_{13}-v_{23}$. La integral sobre $D_7 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_7$ resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{3_p}}}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathbb{Z}_p^3} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu = (1-p^{-1})^{-3} I_p(s-1)I_p(s-2)I_p(s-2)\\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})^2}.\end{aligned}$$

Estas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{3_p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{3_p}}}(s).$$

El producto de todos los factores locales es

$$\zeta_{\mathfrak{B}_3}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)^2(1-2^{-(2s-2)})(1-2^{-s}),$$

la cual tiene abscisa de convergencia 2.

4.3.10. La función zeta de $\mathfrak{B}_4$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_4 = \langle \alpha,\beta,x_1,x_2,x_3 : [x_i,x_j] = 1 (1 \le i < j \le 3), \alpha^2 = x_1, \alpha x_2 \alpha^{-1} = x_2^{-1}, \alpha x_3 \alpha^{-1} = x_3^{-1}\\ \beta^2 = x_2, \beta x_1 \beta^{-1} = x_1, \beta x_3 \beta^{-1} = x_3^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1} = x_2x_3\rangle\end{aligned}$$

El grupo de holonomía es de orden 4 isomorfo a $C_2 \times C_2$ generado por las clases de α y β. Por (4.2.2), para todo primo p tenemos que

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{4_p}}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-3}|t_{22}|^{s-4}|t_{33}|^{s-5}d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de ternas $(\mathbf{t}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^{-1}, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1, 2, 3$$
$$(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^2, (\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^2, \mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2}\beta)^{-1}(\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\alpha)^{-1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$x_2^{2t_{12}},\ x_3^{2t_{13}},\ x_3^{2t_{23}},\ x_1^{2v_{11}+1},\ x_1^{2v_{21}}x_2^{2v_{22}+1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)), las condiciones anteriores se transforman en

(1) $t_{22}|2t_{12}$;

(2) $t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}$;

(3) $t_{33}|2t_{23}$;

(4) $t_{33}|2t_{13}$;

(5) $t_{11}|2v_{11}+1$;

(6) $t_{22}|\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}t_{12}$;

(7) $t_{33}|\frac{2v_{11}+1}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13})$;

(8) $t_{11}|2v_{21}$;

(9) $t_{22}| - \frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{12} + 2v_{22} + 1$;

(10) $t_{33}| - \frac{-\frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{12}+2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23} - \frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{13}$;

(11) $t_{22}|2v_{22}+1$

(12) $t_{33}| - \frac{2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23} + 2v_{13} - 2v_{23} + 1$.

Supongamos $p = 2$. La condición (5) equivale a $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$, la condición (11) equivale a $t_{22} \in \mathbb{Z}_2^*$. La condición (4) y el hecho de que $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$ reducen (10) a $t_{33}| - \frac{-\frac{2v_{21}}{t_{11}}t_{12}+2v_{22}+1}{t_{22}}t_{23}$, y como el coeficiente que acompaña a t_{23} en esta última condición es claramente una unidad entonces (10) se reemplaza por $t_{33}|t_{23}$. Finalmente, esto combinado con (12) muestran que $t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*$. Luego

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}}_{4_2}}(s) = (1 - 2^{-1})^{-3} \int_{t_{11}, t_{22}, t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*} d\mu = 1.$$

Supongamos $p \neq 2$. Las condiciones (1) y (3) implican (2), las condiciones (1) y (5) implican (6), las condiciones (1), (3), (4) y (5) implican (7), y finalmente las condiciones (3), (4) y (9) implican (10). Gracias a (1) y a (4), las condiciones (9) y (12) se reducen a $t_{22}|2v_{22}+1$ y $t_{33}|2v_{13} - 2v_{23} + 1$. El nuevo conjunto de condiciones resulta

$$t_{22}|t_{12},\ t_{33}|t_{13},\ t_{33}|t_{23},\ t_{11}|2v_{11}+1,\ t_{11}|v_{21},\ t_{33}|2v_{13} - 2v_{23} + 1.$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral sobre estas condiciones usando $D_0 = \mathbb{Z}_p^3$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{13}, t_{23}, v_{11}, v_{21}, v_{13}, v_{23}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $t_{33}|t_{13}$, E_3 es

$t_{33}|t_{23}$, E_4 es $t_{11}|2v_{11}+1$, E_5 es $t_{11}|v_{21}$, E_6 es $1|v_{13}$ y E_7 es $t_{33}|2v_{13}-2v_{23}+1$. La integral sobre $D_7 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_7$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{4}}_p}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathbb{Z}_p^3} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu = (1-p^{-1})^{-3}I_p(s-1)(I_p(s-2))^2 \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-2)})^2}.\end{aligned}$$

La ecuación funcional que satisfacen estos factores locales es

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{4}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{4}}_p}(s)$$

El producto de Euler de todos los factores locales es

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{B}_{4}}_p}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)^2(1-2^{-s})(1-2^{-(s-1)})^2,$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.4 Cálculo de las funciones zeta de los grupos almost-Bieberbach de dimensión 3

Denotemos por $N_q = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_2, x_1] = x_3, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\rangle$. Este es un τ-grupo de longitud de Hirsch 3 con base de Mal'cev (x_1, x_2, x_3). La multiplicación y la exponenciación expresadas en esta base resultan

$$\begin{aligned}x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3}x_1^{b_1}x_2^{b_2}x_3^{b_3} &= x_1^{a_1+b_1}x_2^{a_2+b_2}x_3^{a_3+b_3+qb_1a_2} \\ (x_1^{a_1}x_2^{a_2}x_3^{a_3})^r &= x_1^{ra_1}x_2^{ra_2}x_3^{ra_3+\binom{r}{2}qa_1a_2}\end{aligned}$$

Vimos en (4.2.3, (ii)) que la condición para que una matriz $\mathbf{t} \in \mathrm{Tr}(3, \mathbb{Z}_p)$ represente una base buena para algún subgrupo abierto de $\widehat{N_q}_p$ es que $t_{33}|qt_{11}t_{22}$ (más la condición $t_{11}t_{22}t_{33} \neq 0$, la cual será ignorada). Usaremos la notación $\zeta_p(s) = \frac{1}{1-p^{-s}}$. De este modo $\zeta(s) = \prod_p \zeta_p(s)$.

4.4.1. Funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p_1$

$$\mathfrak{E}_q = \langle x_1, x_2, x_3 : [x_2, x_1] = x_3^q, [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 1\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Resulta por (3.2.7) que para todo primo p se tiene

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{q}}_p}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{t_{33})|qt_{11}t_{22}} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-3}d\mu \\ &= (1-p^{-1})^{-3}K_p^{v_p(q)}(s-1, s-2, s-3) \\ &= \frac{1}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(s-2)}} - \frac{p^{-(v_p(q)+1)(s-2)}}{(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})(1-p^{-(s-2)})}\end{aligned}$$

Cuando $v_p(q) = 0$, es decir cuando $p \nmid q$, la expresión anterior resulta

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{q}}_p}(s) = \frac{1-p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})}.$$

Estas últimas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{E}_{\mathfrak{q}}}(s) = \prod_{p|q} & \frac{\zeta_p(s)\zeta_p(s-1) - p^{(2-s)(v_p(q)+1)}\zeta_p(2s-2)\zeta_p(2s-3)}{\zeta_p(s)\zeta_p(s-1) - p^{(2-s)}\zeta_p(2s-2)\zeta_p(2s-3)} \\ & \cdot \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}\end{aligned}$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.4.2. Funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p2$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = [x_3, \gamma] = 1, \\ \gamma x_1 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_2 = x_2^{-1}\gamma, \gamma^2 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

El subgrupo de Fitting de $\mathfrak{E}_{2q}$ es N_{2q} y su grupo de holonomía es cíclico de orden 2 generado por la clase de γ. Resulta de (4.2.2) que para todo primo p

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q}}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$t_{33}|2qt_{11}t_{22},\ (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p},\ \text{para } i = 1, 2, 3,\ \text{y } \gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$t_{33}|2qt_{11}t_{22},\ x_3^{2t_{13}+2q(t_{11}v_2-v_1t_{12})-2qt_{11}t_{12}},\ x_3^{2t_{23}+2q(-v_1t_{22})},\ x_3^{2v_3-2qv_1v_2+1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)), podemos transformar estas condiciones en

(1) $t_{33}|2qt_{11}t_{22}$

(2) $t_{33}|2t_{13} + 2q(t_{11}v_2 - v_1t_{12}) - 2qt_{11}t_{12}$

(3) $t_{33}|2t_{23} - 2qv_1t_{22}$

(4) $t_{33}|2v_3 - 2qv_1v_2 + 1$

Cuando $p = 2$, la condición (4) equivale a $t_{33} \in \mathbb{Z}_2^*$ y, por lo tanto, las otras condiciones se satisfacen trivialmente. La integral resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q}}_p}(s) &= (1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{33}\in\mathbb{Z}_p^*} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}d\mu = (1-2^{-1})^{-3}\mu(\mathbb{Z}_2^*)I_2(s-2)I_2(s-3) \\ &= \frac{1}{(1-2^{-(s-1)})(1-2^{-(s-2)})}.\end{aligned}$$

Cuando $p \neq 2$, calculamos la integral usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : t_{33}|2qt_{11}t_{22}\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; v_1, v_2, t_{12}, t_{13}, t_{23}, v_3$ de modo que E_1 es la condición $1|v_1$, E_2 es $1|v_2$, E_3 es $1|t_{12}$, E_4 es (2), E_5 es (3) y E_6 es (4). La integral sobre $D_6 = D_0 \times E_1 \times \ldots E_6$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{t_{33}|2qt_{11}t_{22}} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-1}d\mu = (1-2^{-1})^{-3}K_p^{v(2q)}(s-2, s-3, s-1)\\ &= \zeta_p(s)\left(\zeta_p(s-1)\zeta_p(s-2) - p^{-s(v_p(2q)+1)}\zeta_p(2s-1)\zeta_p(2s-2)\right).\end{aligned}$$

Cuando $p \nmid 2q$, se obtiene la siguiente expresión más simple

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s) = \frac{1-p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(s-2)})(1-p^{-(2s-1)})(1-p^{-(2s-2)})}.$$

Estas últimas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{E}_{2q}}(s) = &\frac{\zeta_2(3s-3)}{\zeta_2(2s-1)\zeta_2(2s-2)}\cdot\\ &\cdot\prod_{p\neq 2, p|q}\frac{\zeta_p(s-1)\zeta_p(s-2) - p^{-s(v_p(2q)+1)}\zeta_p(2s-1)\zeta_p(2s-2)}{\zeta_p(s-1)\zeta_p(s-2) - p^{-s}\zeta_p(2s-1)\zeta_p(2s-2)}\\ &\cdot\frac{\zeta(s-1)\zeta(s-2)\zeta(2s-1)\zeta(2s-2)}{\zeta(3s-3)},\end{aligned}$$

cuya abscisa de convergencia es 3.

4.4.3. Funciones zeta de los grupos del tipo $Q = pg$

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = [\gamma, x_1] = 1,\\ \gamma x_3 = x_3^{-1}\gamma, \gamma x_2 = x_2^{-1}\gamma x_3^{-q}, \gamma^2 = x_1\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Para $q \in \mathbb{N}$, el subgrupo de Fitting de $\mathfrak{E}_{2q}$ es N_{2q} y el grupo de holonomía es cíclico de orden 2 generado por la clase de γ. Resulta por (4.2.2) que para todo primo p

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$t_{33}|2qt_{11}t_{22}, \quad (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1, 2, 3 \text{ y } (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^2 \in \langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se traducen en

$$t_{33}|2qt_{11}t_{22}, \quad x_2^{2t_{12}}x_3^{2t_{13}+qt_{12}+2q(t_{11}v_2+v_1t_{12})}, \; x_3^{qt_{22}+2qv_1t_{22}}, \; x_1^{2v_1+1}x_3^{-qv_2-2qv_1v_2} \in \langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \in \langle\mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Usando (4.2.3, (v)), estas condiciones se transforman en

(1) $t_{33}|2qt_{11}t_{22}$

(2) $t_{22}|2t_{12}$

(3) $t_{33}| -\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13} + qt_{12} + 2q(t_{11}v_2 + v_1t_{12})$

(4) $t_{33}|qt_{22} + 2qv_1t_{22}$

(5) $t_{11}|2v_1 + 1$

(6) $t_{22}| -\frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{12}$

(7) $t_{33}|\frac{(2v_1+1)t_{12}}{t_{11}t_{22}}t_{23} - \frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{13} + q\frac{2v_1+1}{t_{11}}(\frac{2v_1+1}{t_{11}} + 1)t_{11}t_{12} - qv_2 - 2qv_1v_2.$

Supongamos que $p = 2$. Podemos reemplazar (5) por $t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*$ y (6) por $t_{22}|t_{12}$; por lo tanto, (2) se elimina y (1) se reemplaza por $t_{33}|2qt_{22}$. Esta última junto con (4) pueden reemplazarse por la sóla condición $t_{33}|qt_{22}$. Esta última condición junto con $t_{22}|t_{12}$ reducen (3) y (6) respectivamente en las siguientes condiciones más sencillas (3') $t_{33}| -\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13} + 2qt_{11}v_2$ y (6') $t_{33}|\frac{(2v_1+1)t_{12}}{t_{11}t_{22}}t_{23} - \frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{13} - qv_2 - 2qv_1v_2$. Como $\frac{2v_1+1}{t_{11}} \in \mathbb{Z}_2^*$, (6') equivale a $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - t_{13} - qt_{11}v_2$. El nuevo conjunto de condiciones resulta

$$t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*,\ t_{33}|qt_{22},\ t_{22}|t_{12},\ t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - qt_{11}v_2 - t_{13}.$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones usando $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_2^3 : t_{11} \in \mathbb{Z}_2^*, v(t_{33}) \leq v(q) + v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_2, t_{13}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $1|t_{23}$, E_3 es $1|v_2$ y E_4 es $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23} - qt_{11}v_2 - t_{13}$. La integral sobre $D_4 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_4$ se reduce a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_2}}}(s) &= (1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{11}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{33})\leq v(q)+v(t_{22})}} |t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-3}d\mu = (1-2^{-1})^{-2}J_2^{v_2(q)}(s-3, s-2)\\ &= \zeta_2(s-2)(\zeta_2(s-1) - 2^{-(s-2)(v_2(q)+1)}\zeta_2(2s-3))\end{aligned}$$

Supongamos que $p \neq 2$. De (5) se sigue $qt_{11}t_{22}|2qv_1t_{22} + qt_{22}$ y esta con (1) implican (4). Claramente (2) implica (6), y de la condiciones (1), (2) y (5) se obtiene $t_{33}|qt_{11}t_{22}|qt_{12}(2v_1 + 1)$. Con esto la condición (3) se reduce a (3') $t_{33}| -\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{23} + 2qt_{11}v_2$. De manera similar (1) y (2) implican $t_{33}|qt_{11}t_{12}$, y esto reduce (7) a (7') $t_{33}| -\frac{(2v_1+1)t_{12}}{t_{11}t_{22}}t_{23} + qv_2 + 2qv_1v_2 + \frac{2v_1+1}{t_{11}}t_{13}$. Multiplicando el segundo término de (3') por $\frac{2v_1+1}{t_{11}}$ obtenemos (7'). El nuevo conjunto de condiciones resulta

$$t_{33}|qt_{11}t_{22},\quad t_{22}|t_{12},\quad t_{33}| -\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13} + 2qt_{11}v_2 \text{ y } t_{11}|2v_1 + 1.$$

Calculamos la integral bajo este conjunto de condiciones usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(t_{33}) \leq v(q) + v(t_{11}) + v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, t_{23}, v_2, t_{13}, v_1$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $1|t_{23}$, E_3 es $1|v_2$, E_4 es $t_{33}| -\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23} + 2t_{13} + 2qt_{11}v_2$ y E_5 es $t_{11}|2v_1 + 1$. La integral sobre $D_5 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_5$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q_p}}}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{v(t_{33})\leq v_p(q)+v(t_{11})+v(t_{22})} |t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-3}d\mu\\ &= (1-p^{-1})^{-3}K_p^{v_p(q)}(s-1, s-2, s-3)\\ &= \zeta_p(s-2)(\zeta_p(s)\zeta_p(s-1) - p^{(2-s)(v_p(q)+1)}\zeta_p(2s-2)\zeta_p(2s-3)).\end{aligned}$$

Cuando $p \nmid q$, se tiene la siguiente expresión más sencilla

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q}}_p}(s) = \frac{1 - p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-s})(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-2)})(1-p^{-(2s-3)})}$$

la cual satisface la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3} \zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{2q}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{E}_{2q}}(s) = \zeta_2(s-2)\Big(\zeta_2(s-1) - 2^{-(s-2)(v_2(q)+1)}\zeta_2(2s-3)\Big)\cdot \\ \cdot \prod_{p\neq 2, p|q} \frac{\zeta_p(s)\zeta_p(s-1) - p^{(2-s)(v_p(q)+1)}\zeta_p(2s-2)\zeta_p(2s-3)}{\zeta_p(s)\zeta_p(s-1) - p^{2-s}\zeta_p(2s-2)\zeta_p(2s-3)} \\ \cdot \frac{\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(2s-2)\zeta(2s-3)}{\zeta(3s-3)}\end{aligned}$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.4.4. Funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p2gg$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma_1, \gamma_2 : [x_2, x_1] = x_3^{4q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1, \\ \gamma_1 x_1 = x_1^{-1}\gamma_1 x_3^{2q}, \gamma_1 x_2 = x_2^{-1}\gamma_1 x_3^{-2q}, \gamma_1 x_3 = x_3\gamma_1, \\ \gamma_2 x_1 = x_1\gamma_2, \gamma_2 x_2 = x_2^{-1}\gamma_2 x_3^{-2q}, \gamma_2 x_3 = x_3^{-1}\gamma_2, \\ \gamma_1^2 = x_3, \gamma_2^2 = x_1, \gamma_1\gamma_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma_2\gamma_1 x_3^{-(2q+1)}\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Para $q \in \mathbb{N}$, el subgrupo de Fitting de $\mathfrak{E}_{4q}$ es $N_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ y el grupo de holonomía es de orden 4 isomorfo a $C_2 \times C_2$ generado por las clases de γ_1 y γ_2. Resulta de (4.2.2) que para todo primo p se tiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4q}}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-3}|t_{22}|^{s-4}|t_{33}|^{s-5}d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de ternas $(\mathbf{t}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3 \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$\begin{aligned}t_{33}|4qt_{11}t_{22}, \quad (\gamma_j \mathbf{x}^{\mathbf{v}_i})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}\gamma_j\mathbf{x}^{\mathbf{v}_j} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}, \text{ para } i = 1,2,3, j = 1,2 \\ (\gamma_1\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1})^2, (\gamma_2\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2})^2, (\gamma_1\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1}\gamma_2\mathbf{x}^{\mathbf{v}_2})^2 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.\end{aligned}$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como $t_{33}|4qt_{11}t_{22}$ y

$$\begin{aligned}x_3^{2t_{13}+2q(t_{11}-t_{12})+4q(t_{11}v_{12}-v_{11}t_{12})},\ x_3^{2t_{23}+2q(-t_{22})-v_{11}t_{22})},\ x_2^{-2t_{12}}x_3^{-2t_{13}-2qt_{12}-4q(t_{11}v_{22}+v_{21}t_{12})}, \\ x_3^{-2qt_{22}-4q(v_{21}t_{22})},\ x_3^{2v_{13}+2q(v_{11}-v_{12})+1-4qv_{11}v_{12}}x_1^{2v_{21}+1}x_3^{-2qv_{22}-4qv_{21}v_{22}}, \\ x_2^{-2v_{12}+2v_{22}-1}x_3^{-2q(v_{11}+v_{21})+4q(-v_{12}+v_{22})-2q+4q(v_{11}+v_{21})(-v_{12}+v_{22})} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.\end{aligned}$$

Usando (4.2.3, (v)) podemos traducir estas condiciones en

(1) $t_{33}|4qt_{11}t_{22}$

(2) $t_{33}|2t_{13}+2q(t_{11}-t_{12})+4q(t_{11}v_{12}-v_{11}t_{12}-t_{11}t_{12})$

(3) $t_{33}|2t_{23}-2q(1+v_{11})t_{22}$

(4) $t_{22}|2t_{12}$

(5) $t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}-2t_{13}-2qt_{12}-4q(t_{11}v_{22}+v_{21}t_{12})$

(6) $t_{33}|-2qt_{22}-4qv_{21}t_{22}$

(7) $t_{33}|2v_{13}+2q(v_{11}-v_{12})+1-4qv_{11}v_{12}$

(8) $t_{11}|2v_{21}+1$

(9) $t_{22}|\frac{2v_{21}+1}{t_{11}}t_{12}$

(10) $t_{33}|-\frac{(2v_{21}+1)t_{12}}{t_{11}t_{22}}t_{23}+\frac{2v_{21}+1}{t_{11}}t_{13}+2q(\frac{2v_{12}+1}{t_{11}})(\frac{2v_{12}+1}{t_{11}}+1)t_{11}t_{12}+2qv_{22}+4qv_{21}v_{22}$

(11) $t_{22}|-2v_{12}+2v_{22}-1$

(12) $t_{33}|-\frac{-2v_{12}+2v_{22}-1}{t_{22}}t_{23}+q(v_{11}+1+2v_{21}+1)(-2v_{12}+2v_{22}-1)$

Cuando $p=2$, las condiciones (7), (8) y (11) implican que $t_{11},t_{22},t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*$ y luego todas las condiciones se satisfacen trivialmente. La integral resulta

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4q_2}}}(s)=(1-2^{-1})^{-3}\int_{t_{11},t_{22},t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*}d\mu=1$$

Supongamos $p\neq 2$. De (1) y (4) se sigue $t_{33}|qt_{11}t_{12}$ y esta reduce (2) a (2') $t_{33}|2t_{13}+2q(t_{11}-t_{12})+4q(t_{11}v_{12}-v_{11}t_{12})$. Por (4) y (8) se tiene $t_{11}t_{22}|qt_{12}(v_{21}+1)$, y luego de (1) se sigue $t_{33}|qt_{12}(v_{21}+1)$. Así, la condición (5) puede reducirse a (5') $t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}-2t_{13}-4qt_{11}v_{22}$. De (2'), (3) y (4) se obtiene $t_{33}|\frac{t_{12}}{t_{22}}(2t_{23}-2q(1+v_{11})t_{22})-2t_{13}+2q(t_{11}-t_{12})+4q(t_{11}v_{12}-v_{11}t_{12})=t_{33}|\frac{2t_{12}}{t_{22}}t_{23}-2t_{13}-2qt_{12}-2qt_{11}(1+2v_{12})$. Esto reduce (5') a $t_{33}|2qt_{11}(-1+2v_{12}+2v_{22})$, la cual puede deducirse de (1) y (11) y, por lo tanto, puede ser eliminada. La condición (6) es consecuencia de (8) y (1), mientras que (9) se sigue de (4) y (8). Las condiciones (4) y (1) reducen (10) a $t_{33}|-\frac{(2v_{21}+1)t_{12}}{t_{11}t_{22}}t_{23}+\frac{2v_{21}+1}{t_{11}}t_{13}+2qv_{22}+4qv_{21}v_{22}$, y esta condición es implicada por (8) y $t_{33}|-\frac{t_{12}}{t_{22}}t_{23}+t_{13}+2qt_{11}v_{22}$, pero vimos que esta última es (5') la cual es implicada por las otras condiciones. Luego podemos eliminar (10). Finalmente de (3) obtenemos $t_{33}|\frac{-2v_{12}+2v_{22}-1}{t_{22}}(2t_{23}-2q(1+v_{11})t_{22})$ mientras que de (8) y (11) obtenemos $t_{33}|(2v_{21}+1)(-2v_{12}+2v_{22}+1)$. Sumando los miembros derechos de estas dos condiciones obtenemos (12). Luego el nuevo conjunto de condiciones es

(1') $t_{33}|qt_{11}t_{22}$;

(2') $t_{22}|2t_{12}$;

(3') $t_{33}|2t_{13}+2q(t_{11}-t_{12})+4q(t_{11}v_{12}-v_{11}t_{12})$;

(4') $t_{33}|2t_{23}-2q(1+v_{11})t_{22}$;

(5') $t_{11}|2v_{21}+1$;

(6') $t_{33}|2v_{13}+2q(v_{11}-v_{12})+1-4qv_{11}v_{12}$;

(7') $t_{22}| - v_{12} + 2v_{22} - 1$.

Calculamos la integral bajo estas condiciones usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(q) + v(t_{11}) + v_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, v_{11}, v_{12}, t_{13}, t_{23}, v_{21}, v_{13}, v_{22}$, de modo que E_1 es (2'), E_2 es $1|v_{11}$, E_3 es $1|v_{12}$, E_4 es (3'), E_5 es (4'), E_6 es (5'), E_7 es (6') y E_8 es (7'). La integral sobre $D_8 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_8$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4\mathfrak{q}}}_p}(s) &= (1-p^{-1})^{-3}\int_{v_p(t_{33})\leq v_p(q)+v_p(t_{11})+v_p(t_{22})}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-2}d\mu \\ &= (1-p^{-1})^{-3}K_p^{v_p(q)}(s-2,s-2,s-2) \\ &= \zeta_p(s-1)(\zeta_p(s-1)^2 - p^{-(s-1)(v_p(q)+1)}\zeta_p(2s-2)^2).\end{aligned}$$

Cuando $p \nmid 2q$ se obtiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4\mathfrak{q}}}_p}(s) = \frac{1-p^{-(3s-3)}}{(1-p^{-(s-1)})^2(1-p^{-(2s-2)})}$$

la cual satisface la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4\mathfrak{q}}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+3}\zeta_{\widehat{\mathfrak{E}_{4\mathfrak{q}}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todas las funciones zeta locales es

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{E}_{4\mathfrak{q}}}(s) = \prod_{p\neq 2, p|q} &\frac{\zeta_p(s-1)^2 - p^{-(s-1)(v_p(q)+1)}\zeta_p(2s-2)^2}{\zeta_p(s-1)^2 - p^{-(s-1)}\zeta_p(2s-2)^2} \\ &\cdot \frac{\zeta(s-1)^2\zeta(2s-2)^2}{\zeta(3s-3)}\end{aligned}$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

4.4.5. Las funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p4$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma [x_2, x_1] &= x_3^{2q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ &\gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma^4 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N},\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma [x_2, x_1] &= x_3^{4q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ &\gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma^4 = x_3^3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Sea $q \in \mathbb{N}$. El subgrupo de Fitting de $\mathfrak{E}_{2q}$ es $N_{2q} = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$ y el de $\mathfrak{F}_{4q}$ es $N_{4q} = \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Denotemos por $\mathfrak{G}$ a $\mathfrak{E}_{2\mathfrak{q}}$ o a $\mathfrak{F}_{4\mathfrak{q}}$ y sea $\epsilon = 2$ ó 4 de acuerdo a si $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}_{2\mathfrak{q}}$ o $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{4\mathfrak{q}}$. El grupo de holonomía de $\mathfrak{G}$ es cíclico de orden 4 generado por la clase de γ. Por (4.2.2) se tiene para todo primo p

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) = \int_{\mathcal{T}'}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t},\mathbf{v}) \in Tr(3,\mathbb{Z}_p)\times\mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$t_{33}|\epsilon q t_{11}t_{22},\quad (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle,\ \text{para } i=1,2,3,\ \text{y } (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}})^4 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$\begin{aligned}&t_{33}|\epsilon q t_{11}t_{22},\\ &x_1^{t_{12}}x_2^{-t_{11}}x_3^{t_{13}-\epsilon q t_{12}v_2-\epsilon q t_{12}t_{11}-\epsilon q v_1 v_2-\epsilon q v_1 t_{11}},\ x_1^{t_{22}}x_3^{t_{23}-\epsilon q t_{22}v_2-\epsilon q v_1 v_2}.\ x_3^{\epsilon-1+4v_3-2\epsilon q v_1 v_2-\epsilon q v_1^2-\epsilon q v_2^2}\\ &\in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_2},\mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.\end{aligned}$$

Usando (4.2.3, (v)) podemos transformar estas condiciones en

(1) $t_{33}|\epsilon q t_{11}t_{22}$;

(2) $t_{11}|t_{12}$;

(3) $t_{22}|-\frac{t_{12}}{t_{11}}t_{12}-t_{11}$;

(4) $t_{33}|\frac{t_{11}^2+t_{12}^2}{t_{11}t_{22}}t_{23}+(1-\frac{t_{12}}{t_{11}})t_{13}+\epsilon q\frac{1}{2}\frac{t_{12}}{t_{11}}(\frac{t_{12}}{t_{11}}+1)t_{11}t_{12}-\epsilon q t_{12}v_2-\epsilon q v_1 v_2-\epsilon q v_1 t_{11}$;

(5) $t_{11}|t_{22}$;

(6) $t_{22}|-\frac{t_{22}}{t_{11}}t_{12}$;

(7) $t_{33}|(1+\frac{t_{12}}{t_{11}})t_{23}-\frac{t_{22}}{t_{11}}t_{13}+\epsilon q\frac{1}{2}\frac{t_{22}}{t_{11}}(\frac{t_{22}}{t_{11}}+1)t_{11}t_{12}-\epsilon q v_2 t_{22}-\epsilon q v_1 v_2$;

(8) $t_{33}|\epsilon-1+4v_3-2\epsilon q v_1 v_2-\epsilon q v_1^2-\epsilon q v_2^2$.

Supongamos que $p=2$. La condición (8) se reemplaza por $t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*$ y luego (1), (4), (7) y (8) pueden eliminarse. Vamos a condiderar dos casos: (a) $t_{22}|t_{12}$ y (b) $t_{22}\nmid t_{12}$. En el caso (a), las condiciones (2), (3), (5) y (6) pueden reemplazarse por $|t_{11}|=|t_{22}|\geq|t_{12}|$ y por lo tanto la integral en este caso se calcula usando (4.2.4) con $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*, v(t_{11})=v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33},t_{12}$ de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$. La integral sobre $D_1=D_0\times E_1$ se reduce a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{11})=v(t_{22})}}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}d\mu == (1-2^{-1})^{-2}J_2(s-2,s-2)=\zeta_2(2s-2).$$

En el caso (b), como $t_{12}|t_{22}$ se sigue de (2) y (3) que $t_{12}|t_{11}|t_{12}$, es decir $|t_{11}|=|t_{12}|>|t_{22}|$. Poniendo $t_{12}=(1+2t)t_{11}$ la condición (2) se escribe $t_{22}|(2+4t+4t^2)t_{11}$ lo cual junto con $t_{11}|t_{22}$ implican $|t_{22}|=2^{-1}|t_{11}|$. Luego (2), (3), (5) y (6) se reemplazan por $|t_{11}|=|t_{12}|=2|t_{22}|$. Usamos (4.2.4) para calcular la integral sobre este conjunto de condiciones usando $D_0=\{(t_{11},t_{22},t_{33})\in\mathbb{Z}_2^3 : t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*, v(t_{22})=v(t_{11})+1\}$ y las variables $t_{11},t_{22},t_{33};t_{12}$ de modo que E_1 es $|t_{11}|=|t_{12}|$. La integral sobre $D_1=D_0\times E_1$ se reduce a

$$(1-2^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{33}\in\mathbb{Z}_2^*\\ v(t_{22})=v(t_{11})+1}}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}d\mu=(1-2^{-1})^{-2}J_2^{+}(s-2,s-2)==2^{-(s-1)}\zeta_2(2s-2).$$

La suma de los resultados obtenidos en los dos casos es

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_2}(s)=\zeta_2(s-1).$$

Supongamos que $p \neq 2$. Vamos a considerar dos casos.

Caso 1: $t_{22}|t_{12}$. Es claro que (2), (3), (5) y (6) pueden reemplazarse por la condición $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$. Multiplicando el lado derecho de (7) por $\frac{t_{11}-t_{12}}{t_{22}}$ y sumando el lado derecho de esta nueva condición al lado derecho de (4) obtenemos una nueva condición (4') de la forma $t_{33}|2\frac{t_{11}}{t_{22}}t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, donde u es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ si se cumplen las demás condiciones. Podemos reemplazar (4) por (4'). Más aún, como el coeficiente de t_{23} en el lado derecho de (4') es una unidad cuando se verifica $|t_{11}| = |t_{22}|$ entonces podemos reemplazar (4') por $t_{33}|t_{23} + \frac{t_{22}}{2t_{11}}u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$. Por la misma razon podemos reemplazar (7) por una condición de la forma $t_{33}|t_{13} - \frac{t_{11}}{t_{22}}u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$ donde u' es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ cuando se verifican las demás condiciones. Luego el nuevo conjunto de condiciones es

$$t_{33}|qt_{11}t_{22},\ |t_{11}| = |t_{22}|,\ t_{22}|t_{12}, t_{33}|t_{23} + \frac{t_{22}}{2t_{11}}u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2),$$
$$t_{33}|t_{13} - \frac{t_{11}}{t_{22}}u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2),\ t_{33}|\epsilon - 1 + 4v_3 - 2\epsilon qv_1v_2 - \epsilon qv_1^2 - \epsilon qv_2^2$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones usando $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(q) + v(t_{11}) + v(t_{22}), v(t_{11}) = v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, v_1, v_2, t_{23}, t_{13}, v_3$, de modo que E_1 es $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $1|v_1$, E_3 es $1|v_2$, E_4 es $t_{33}|t_{23} + \frac{t_{22}}{2t_{11}}u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, E_5 es $t_{33}|t_{13} - \frac{t_{11}}{t_{22}}u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$, y E_6 es $t_{33}|\epsilon - 1 + 4v_3 - 2\epsilon qv_1v_2 - \epsilon qv_1^2 - \epsilon qv_2^2$. La integral sobre $D_6 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_6$ se reduce entonces a

$$(1-p^{-1})^{-3} \int_{\substack{v_p(t_{33}) \leq v_p(q) + v_p(t_{11}) + v_p(t_{22}) \\ v_p(t_{11}) = v_p(t_{22})}} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1} d\mu = (1-p^{-1})^{-3} L_p^{v_p(q)}(s-2, s-2, s-1)$$
$$\zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+1)}\zeta_p(4s-2)).$$

Caso 2: $t_{22} \nmid t_{12}$. En este caso es fácil ver que (2), (3), (5) y (6) pueden reemplazarse por (3) y $|t_{11}| = |t_{12}| > |t_{22}|$. Escribiendo $t_{12} = (k + pt)t_{11}$ for $k \in \{1, \ldots, p-1\}$, entonces la condición (3) implica $t_{22}|((k + pt)^2 + 1)t_{11}$, y como $|t_{22}| < |t_{11}|$ entonces obtenemos $k^2 + 1 \equiv 0 \mod p$. Por otro lado, la ecuación $x^2 + 1 \equiv 0 \mod p$ tiene solución $\mod p$ si y sólo si $p \equiv 1 \mod 4$; por lo tanto, vamos a suponer que este es el caso. Por el lema de Hensel, existe $i \in \mathbb{Z}_p$ tal que $i^2 + 1 = 0$, y más aún, i y $-i$ son las únicas soluciones de $x^2 + 1 \equiv 0 \mod p^n$ para todo $n \geq 1$. La condición (3) es equivalente a que $\frac{t_{12}}{t_{11}}$ es solución de $x^2 + 1 \equiv 0 \mod \frac{t_{22}}{t_{11}}$ y, por lo tanto, esto equivale a decir que $\frac{t_{22}}{t_{11}}|\frac{t_{12}}{t_{11}} - i$ ó $\frac{t_{22}}{t_{11}}|\frac{t_{12}}{t_{11}} + i$, además estos casos no pueden darse simultáneamente. Luego, (3) divide nuestro conjunto de condiciones en dos casos: (a) $t_{22}|t_{12} - it_{11}$ y (b) $t_{22}|t_{12} + it_{11}$. Notar que como $i \not\equiv 1, -1 \mod p$ entonces cualesquiera de estas dos ultimas condiciones implica que $|t_{11}| = |t_{11} - t_{12}| = |t_{11} + t_{12}| = |t_{12}|$ y esto combinado con $|t_{11}| > |t_{22}|$ implican que $\frac{t_{11}+t_{12}}{t_{11}}$ y $\frac{t_{12}-t_{11}}{t_{11}}$ son unidades y además $\frac{t_{22}}{t_{12}-t_{11}} \in \mathbb{Z}_p$. Podemos multiplicar entonces el lado derecho de (4) por $\frac{t_{22}}{t_{11}-t_{12}}$ y sumar este resultado al lado derecho de (7) para reducirla a una nueva condición (7') que no involucre la variable t_{13}. El coeficiente de t_{23} en el lado derecho de (7') resultará entonces $1 + \frac{t_{12}}{t_{11}} + \frac{1}{t_{11}-t_{12}}\frac{t_{11}^2+t_{12}^2}{t_{11}} = 1 + \frac{t_{12}+t_{11}}{t_{11}-t_{12}} = 2\frac{t_{11}}{t_{11}-t_{12}}$, el cual es una unidad. Como el coeficiente de t_{13} en el lado derecho de (4) también es una unidad, podemos concluir finalmente que asumiendo (a) o (b) y $|t_{11}| > |t_{22}|$ se tiene que (7) equivale a una condición de la forma (7") $t_{33}|t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, donde u es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ (bajo las condiciones asumidas) y que (4) puede reemplazarse por una condición de la forma (4') $t_{33}|t_{13} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$ donde u' es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ (bajo las condiciones asumidas) si se satisface (7").

Más aún, se tiene $|t_{11}| = |t_{12}|$. Luego las condiciones, por ejemplo en el caso (a), son

$$t_{33}|qt_{11}t_{22},\ |t_{11}| > |t_{22}|,\ t_{22}|t_{12} - it_{11},\ t_{33}|t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2),$$
$$t_{33}|t_{13} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2),\ t_{33}|\epsilon - 1 + 4v_3 - 2\epsilon qv_1v_2 - \epsilon qv_1^2 - \epsilon qv_2^2.$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(q) + v(t_{11}) + v(t_{22}), v(t_{11}) < v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, v_1, v_2, t_{23}, t_{13}, v_3$, de modo que E_1 es $t_{22}|t_{12} - it_{11}$, E_2 es $1|v_1$, E_3 es $1|v_2$, E_4 es $t_{33}|t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, E_5 es $t_{33}|t_{13} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$ y E_6 es $t_{33}|\epsilon - 1 + 4v_3 - 2\epsilon qv_1v_2 - \epsilon qv_1^2 - \epsilon qv_2^2$. La integral sobre $D_6 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_6$ multiplicada por 2 (pues en el caso (b) obtendríamos lo mismo) se reduce entonces a

$$\begin{aligned}
&2 \cdot (1 - p^{-1})^{-3} \int_{\substack{v_p(t_{33}) \leq v_p(q) + v_p(t_{11}) + v_p(t_{22}) \\ v(t_{11}) < v(t_{22})}} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1} d\mu \\
&= (1 - p^{-1})^{-3} M_p^{v_p(q)}(s-2, s-2, s-1) \\
&= \zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1))
\end{aligned}$$

Para calcuar la suma de los dos casos usamos el caracter de Dirichlet $\chi_4 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definido por $\chi_4(n) = 1$ si $n \equiv 1 \mod 4$, $\chi_4(n) = -1$ si $n \equiv 3 \mod 4$ y $\chi_4(n) = 0$ en los otros casos. El resultado es

$$\begin{aligned}
\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) &= \zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+1)}\zeta_p(4s-2)) \\
&+ (\chi_4(p) + 1)\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1)).
\end{aligned}$$

Cuando $p \neq 2q$ la expresión anterior toma la siguiente forma más simple

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) = \frac{1 - \chi_4(p)p^{-(3s-2)}}{(1 - p^{-(s-1)})(1 - p^{-(2s-1)})(1 - \chi_4(p)p^{-(s-1)})(1 - p^{-(2s-1)})},$$

la cual satisface la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s)|_{p \to p^{-1}} = (-1)^3\chi_4(p)p^{-3s+2}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\begin{aligned}
\zeta_{\mathfrak{G}}(s) = \zeta_2(s-1) \prod_{p \neq 2} \Big[&\zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+1)}\zeta_p(4s-2)) \\
&+ (\chi_4(p) + 1)\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1))\Big] \\
&\cdot \prod_{p|2q} \frac{L(3s-2, \chi_4, p)}{\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-1)L(s-1, \chi_4, p)L(2s-1, \chi_4, p)} \\
&\cdot \frac{\zeta(s-1)\zeta(2s-1)L(s-1, \chi_4)L(2s-1, \chi_4)}{L(3s-2, \chi_4)},
\end{aligned}$$

donde $L(s, \chi_4)$ es la serie L asociada al caracter χ_4 y $L(s, \chi_4, p)$ es su factor local en p. Resulta entonces que la abscisa de convergencia de $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$ es 2.

4.4.6. Las funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p3$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{3q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{3q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{3q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{3q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3^2\rangle, \quad q \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{r} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] = x_3^{r}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1 \\ \gamma x_1 = x_2\gamma x_3, \gamma x_2 = x_1^{-1}x_2^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^3 = x_3\rangle, \quad r \in \mathbb{N}, r \notin 3\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Para tales q y r, los subgrupos de Fitting de $\mathfrak{E}_{3\mathfrak{q}}$, $\mathfrak{F}_{3\mathfrak{q}}$ y $\mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}$ son respectivamente N_{3q}, N_{3q} y N_r. Fijemos $q \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ con $3 \nmid r$. Sea $\mathfrak{G} \in\in \{\mathfrak{E}_{3\mathfrak{q}}, \mathfrak{F}_{3\mathfrak{q}}, \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}\}$ y denotamos por k a cualquiera de los números $3q$ ó r de acuerdo al caso . Sea $\epsilon = 1$ si $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}_{3\mathfrak{q}}$ o $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}$ y $\epsilon = 2$ si $\mathfrak{G} = \mathfrak{F}_{3\mathfrak{q}}$. Finalmente, sea $\delta = 1$ si $\mathfrak{G} = \mathfrak{K}_{\mathfrak{r}}$ y $\delta = 0$ en los otros casos. El grupo de holonomía de $\mathfrak{G}$ es cíclico de orden 3 generado por la clase de γ. Por (4.2.2), para todo primo p se tiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3}\int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-3}|t_{33}|^{s-4}d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ que satisfacen

$$t_{33}|kt_{11}t_{22},\ (\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1})^{-1}\mathbf{x}^{\mathbf{t}_i}\gamma\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1,2,3, \text{ y } (\gamma^3\mathbf{x}^{\mathbf{v}_1})^3 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reducen a

$$\begin{aligned}&t_{33}|kt_{11}t_{22},\\ &x_1^{-t_{11}+t_{12}}x_2^{-t_{11}}x_3^{t_{13}+kt_{11}\frac{t_{11}-1}{2}-kt_{11}t_{12}+kv_2t_{11}-kv_2t_{12}-kt_{11}v_1+\delta(t_{11}-t_{12})} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}\\ &x_1^{t_{22}}x_3^{t_{23}-kv_2t_{22}-\delta t_{22}},\ x_3^{3v_3-kv_1v_2-kv_2\frac{v_2+1}{2}-kv_1\frac{v_1+1}{2}+\epsilon+\delta(2v_1-v_2)} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3}\rangle_{\mathbb{Z}_p}.\end{aligned}$$

Usando (4.2.3, (v)), estas condiciones se transforman en

(1) $t_{33}|kt_{11}t_{22}$

(2) $t_{11}|-t_{11}+t_{12}$

(3) $t_{22}|\frac{t_{11}^2-t_{11}t_{12}+t_{12}^2}{t_{11}}$

(4) $t_{33}|\frac{t_{11}^2-t_{11}t_{12}+t_{12}^2}{t_{11}t_{22}}t_{23} + \frac{2t_{11}-t_{12}}{t_{11}}t_{13} + \frac{k}{2}\frac{-t_{11}+t_{12}}{t_{11}}(\frac{-t_{11}+t_{12}}{t_{11}}+1)t_{11}t_{12} + k(-t_{11}+t_{12})t_{11} + kt_{11}\frac{t_{11}-1}{2} - kt_{11}t_{12} + kv_2t_{11} - kv_2t_{12} - kt_{11}v_1 + \delta(t_{11}-t_{12})$.

(5) $t_{11}|t_{22}$

(6) $t_{22}|-\frac{t_{22}}{t_{11}}t_{12}$

(7) $t_{33}|\frac{t_{11}+t_{12}}{t_{11}}t_{23} - \frac{t_{22}}{t_{11}}t_{13} + \frac{k}{2}\frac{t_{22}}{t_{11}}(\frac{t_{22}}{t_{11}}+1)t_{11}t_{12} - kv_2t_{22} - \delta t_{22}$

(8) $t_{33}|3v_3 - kv_1v_2 - kv_{12}\frac{v_2+1}{2} - kv_1\frac{v_1+1}{2} - kv_1v_2 + \epsilon + \delta(2v_1 - v_2)$

Supongamos que $p = 3$. Si $k = 3q$ entonces (8) dice que $t_{33} \in \mathbb{Z}_3^*$, y si $k = r$ (en cuyo caso $\delta = 1$) entonces, analizando los residuos $\mod 3$ de r, v_1 y v_2, obtenemos que $3v_3 - rv_1v_2 - rv_2\frac{v_2+1}{2} - rv_1\frac{v_1+1}{2} + 1 + 2v_1 - v_2$ no es divisible por 3; por lo tanto, (8) se transforma en $t_{33} \in \mathbb{Z}_p^*$. Luego, en cualquier caso podemos asumir que $t_{33} \in \mathbb{Z}_3^*$ y eleminiar entonces (4), (7) y (8). Consideremos ahora dos casos

Caso 1: $t_{22}|t_{12}$. Es fácil ver que (2), (3), (5) y (6) pueden reemplazarse por $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$. Calculamos la integral usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_3^3 : v(t_{11}) = v(t_{22}), t_{33} \in \mathbb{Z}_3^*\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}$, de modo que E_1 es la condición $t_{22}|t_{12}$. La integral sobre $D_1 = D_0 \times E_1$ se reduce entonces a

$$(1-3^{-1})^{-3} \int_{\substack{t_{33}\in\mathbb{Z}_3^*,\\ v(t_{11})=v(t_{22})}} |t_{11}|^{s-2}|t_{s-2}|^{s-2}d\mu = (1-3^{-1})^{-2}J_3(s-2, s-2)$$
$$= \zeta_3(2s-2)$$

Caso 2: $t_{22} \nmid t_{12}$. Se sigue fácilmente de (2) y (3) que $|t_{11}| = |t_{12}| > |t_{22}|$ y recíprocamente esta condición implica (2), (5) y (6). Luego podemos reemplazar (2), (5) y (6) por $|t_{11}| = |t_{12}| > |t_{22}|$. De esto y de la condición (3) se sigue que $\frac{t_{12}}{t_{11}}$ es solución de $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod 3$. Como la única solución de tal ecuación es 2 entonces se tiene que $t_{12} = (2+3t)t_{11}$ para algún $t \in \mathbb{Z}_3$, es decir, $3t_{11}|t_{12} - 2t_{11}$. La condición (3) se reescribe como $t_{22}|(3 + 9t + 9t^2)t_{11}$, la cual junta con $|t_{11}| > |t_{22}|$ implican $|t_{22}| = |3t_{11}|$. Recíprocamente, esto junto con $3t_{11}|t_{12} - 2t_{11}$ implica (3). Es fácil ver que $3t_{11}|t_{12} - 2t_{11}$ también implica $|t_{11}| = |t_{12}|$. Las condiciones nuevas son entonces $|3t_{11}| = |t_{22}|$ y $3t_{11}|t_{12} - 2t_{11}$. Calculamos la integral sobre este nuevo conjunto de condiciones usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_3^3 : t_{33} \in \mathbb{Z}_3^*, v(t_{22}) = v(t_{11}) + 1\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}$, de modo que E_1 es la condición $3t_{11}|t_{12} - 2t_{11}$. La integral sobre $D_1 = D_0 \times E_1$ se reduce entonces a

$$(1-3^{-1})^{-3} \int_{\substack{v(t_{22})=v(t_{11})+1\\ t_{33}\in\mathbb{Z}_3^*}} (1-3^{-1})3^{-1}|t_{11}|^{s-1}|t_{22}|^{s-3}d\mu = (1-3^{-1})^{-2}J_3^+(s-3, s-1)$$
$$= 3^{-(s-1)}\zeta_3(2s-2)$$

Sumando los resultados obtenidos en ambos casos obtenemos

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}}(s) = (1 + 3^{-(s-1)})\zeta_3(2s-2) = \zeta_3(s-1).$$

Supongamos que $p \neq 3$. Consideremos dos casos

Caso 1: $t_{22}|t_{12}$. Es fácil ver que (2), (3), (5) y (6) se vuelven equivalentes a $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$. Como bajo estas condiciones $\frac{2t_{11}-t_{12}}{t_{22}}$ es un entero p-ádico, multiplicando el lado derecho de (7) por $\frac{2t_{11}-t_{12}}{t_{22}}$ y sumándolo al lado derecho de (4), podemos convertir (4) en una nueva condición de la forma $t_{33}|3\frac{t_{11}}{t_{22}} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, donde u es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ si se verifica $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$, y como además en tal caso $3\frac{t_{11}}{t_{22}}$ también es una unidad entonces (4) se transforma en una condición de la forma (4') $t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$. Como el coeficiente de t_{13} en el lado derecho de (7) también va a resultar ser una unidad si asumimos $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$, entonces (7) equivale a una condición de la forma (7') $t_{33}|t_{13} + u_1'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$. Las condiciones resultan entonces

$$t_{33}|kt_{11}t_{22},\ |t_{11}| = |t_{22}|,\ t_{22}|t_{12},\ t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2),\ t_{33}|t_{13} + u_1'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2),$$
$$t_{33}|3v_3 - kv_1v_2 - kv_{12}\frac{v_2+1}{2} - kv_1\frac{v_1+1}{2} - kv_1v_2 + \epsilon + \delta(2v_1 - v_2)$$

Calculamos la integral bajo estas condiciones usando (4.2.4) con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(k) + v(t_{11}) + v(t_{22}), v(t_{11}) = v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, v_1, v_2, t_{23}, t_{13}, v_3$, de modo que E_1 es $t_{22}|t_{12}$, E_2 es $1|v_1$, E_3 es $1|v_2$, E_4 es $t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, E_5 es $t_{33}|t_{13} + u_1'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, t_{23}, v_1, v_2)$ y E_6 es $t_{33}|3v_3 - kv_1v_2 - kv_{12}\frac{v_2+1}{2} - kv_1\frac{v_1+1}{2} - kv_1v_2 + \epsilon + \delta(2v_1 - v_2)$. La integral sobre $D_6 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_6$ se reduce entonces a

$$\begin{aligned}
&(1-p^{-1})^{-3}\int_{\substack{v_p(t_{33})\leq v_p(k)+v_p(t_{11})+v_p(t_{22})\\ v_p(t_{11})=v_p(t_{22})}} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1}d\mu\\
&= (1-p^{-1})^{-3}L_p^{v_p(k)}(s-2, s-2, s-1)\\
&= \zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(k)+1)}\zeta_p(4s-2))
\end{aligned}$$

Caso 2: $t_{22} \nmid t_{12}$. Es fácil ver que (2), (3), (5) y (6) son equivalentes a la condición (3) junta con $|t_{11}| = |t_{12}| > |t_{22}|$. Ahora la condición (3) equivale a que $\frac{t_{12}}{t_{11}}$ es solución de $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod \frac{t_{22}}{t_{11}}$. Como la ecuación $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod p$ tiene solución si y sólo si $p \equiv 1 \mod 3$ entonces vamos a asumir que este es el caso. Por el lema de Hensel, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_p$ tales que $x^2 - x + 1 = (x-\alpha)(x-\beta)$ y además α y β son las únicas soluciones de $x^2 - x + 1 \equiv 0 \mod p^n$ para todo $n \geq 1$. Luego (3) parte el dominio de integración en dos casos: (a) $\frac{t_{22}}{t_{11}}|\frac{t_{12}}{t_{11}} - \alpha$ y (b) $\frac{t_{22}}{t_{11}}|\frac{t_{12}}{t_{11}} - \beta$ y estas condiciones no pueden satisfacerse simultáneamente. Es fácil ver que cualquiera de estas condiciones implican $|t_{11}| = |t_{12}| = |2t_{11} - t_{12}| = |t_{11} + t_{12}|$. Supongamos ahora que se satisface (a) o (b) y la condición $|t_{11}| > |t_{22}|$. Multiplicando el lado derecho de (4) por $\frac{t_{22}}{2t_{11}-t_{12}}$, el cual es un entero p-ádico por las hipótesis asumidas, y sumando esto al lado derecho de (7), obtenemos una nueva condición (7') que no involucra a t_{13}. Más aún, el coeficiente de t_{23} en el lado derecho de (7') resulta $\frac{t_{11}^2 - t_{11}t_{12} + t_{12}^2}{t_{11}t_{22}}\frac{t_{22}}{2t_{11}-t_{12}} + \frac{t_{11}+t_{12}}{t_{11}} = \frac{3t_{11}}{2t_{11}-t_{12}}$ y así (7') tiene la forma $t_{33}|\frac{3t_{11}}{2t_{11}-t_{12}}t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$ donde u es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ bajo las condiciones asumidas. Como $\frac{3t_{11}}{2t_{11}-t_{12}}$ resulta una unidad, (7') se transforma en una condición de la forma $t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$. De manera análoga, (4) se transforma en una condición de la forma $t_{33}|t_{13} + u_1(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2, t_{23})$. Luego el nuevo conjunto de condiciones, por ejemplo en el caso (a), resulta

$$\begin{aligned}
&t_{33}|qt_{11}t_{22},\ |t_{11}| > |t_{22}|,\ t_{22}|t_{12} - \alpha t_{11},\ t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2),\ t_{33}|t_{13} + u_1(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2, t_{23})\\
&t_{33}|3v_3 - kv_1v_2 - kv_{12}\frac{v_2+1}{2} - kv_1\frac{v_1+1}{2} - kv_1v_2 + \epsilon + \delta(2v_1 - v_2)
\end{aligned}$$

Usamos (4.2.4) para calcular la integral bajo estas condiciones con $D_0 = \{(t_{11}, t_{22}, t_{33}) \in \mathbb{Z}_p^3 : v(t_{33}) \leq v(k) + v(t_{11}) + v(t_{22}), v(t_{11}) = v(t_{22})\}$ y las variables $t_{11}, t_{22}, t_{33}; t_{12}, v_1, v_2, t_{23}, t_{13}, v_3$, de modo que E_1 es $t_{22}|t_{12} - \alpha t_{11}$, E_2 es $1|v_1$, E_3 es $1|v_2$, E_4 es $t_{33}|t_{23} + u'(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$, E_5 es $t_{33}|t_{13} + u_1(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2, t_{23})$ y E_6 es $t_{33}|3v_3 - kv_1v_2 - kv_{12}\frac{v_2+1}{2} - kv_1\frac{v_1+1}{2} - kv_1v_2 + \epsilon + \delta(2v_1 - v_2)$. La integral sobre $D_6 = D_0 \times E_1 \times \ldots \times E_6$ multiplicada por 2 (pues en el caso (b) daría lo mismo) se reduce entonces a

$$\begin{aligned}
&2(1-p^{-1})^{-3}\int_{\substack{v_p(t_{33})\leq v_p(k)+v_p(t_{11})+v_p(t_{22})\\ v(t_{11})<v(t_{22})}} |t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1}d\mu\\
&= (1-p^{-1})^{-3}L_p^{v_p(k)}(s-2, s-2, s-1)\\
&= 2\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1))
\end{aligned}$$

Para expresar la suma de ambos casos usamos el caracter de Dirichlet $\chi_3 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definido por $\chi_3(n) = 1$ si $n \equiv 1 \mod 3$, $\chi_3(n) = -1$ si $n \equiv 2 \mod 3$ y $\chi_3(n)$ en los otros casos. El resultado es

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) &= \zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+1)}\zeta_p(4s-2))+\\ &\quad (1+\chi_3(p))\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1)).\end{aligned}$$

Cuando $p \nmid 3k$, la expresión anterior se escribe de la siguiente forma más simple

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s) = \frac{1-\chi_3(p)p^{-(3s-2)}}{(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-1)})(1-\chi_3(p)p^{-(s-1)})(1-\chi_3(p)p^{-(2s-1)})}.$$

Estas últimas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}} = (-1)^3 p^{-3s+2}\chi_4(p)\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales es

$$\begin{aligned}\zeta_{\mathfrak{G}}(s) &= \zeta_3(s-1)\prod_{p\neq 3, p|k}\zeta_p(s)\Big[(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(k)+1)}\zeta_p(4s-2))+\\ &\quad (1+\chi_3(p))\, p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(k)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1))\Big]\\ &\quad \cdot\prod_{p|k}\frac{L(3s-2,\chi_4,p)}{\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-1)L(s-1,\chi_3,p)L(2s-1,\chi_3,p)}\\ &\quad \cdot\frac{\zeta(s-1)\zeta(2s-1)L(s-1,\chi_3)L(2s-1,\chi_3)}{L(3s-2,\chi_3)},\end{aligned}$$

donde $L(s,\chi_3)$ es la serie L asociada a χ_3 y $L(s,\chi_3,p)$ su factor local en el primo p. La abscisa de convergencia de $\zeta_{\mathfrak{G}}(s)$ resulta igual a 2.

4.4.7. Las funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p6$.

$$\begin{aligned}\mathfrak{E}_{6q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] &= x_3^{6q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 &= x_1x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3\rangle, \quad q\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}_{6q+4} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] &= x_3^{6q+4}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 &= x_1x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3\rangle, \quad q\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{K}_{6q} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] &= x_3^{6q}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 &= x_1x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3^5\rangle, \quad q\in\mathbb{N},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{H}_{6q+2} = \langle x_1, x_2, x_3, \gamma : [x_2, x_1] &= x_3^{6q+2}, [x_3, x_1] = [x_3, x_2] = 1\\ \gamma x_1 &= x_1x_2\gamma, \gamma x_2 = x_1^{-1}\gamma, \gamma x_3 = x_3\gamma, \gamma^6 = x_3^5\rangle, \quad q\in\mathbb{N}.\end{aligned}$$

Sea $q \in \mathbb{N}$. Sea $\mathfrak{G} \in \{\mathfrak{E}_{6q}, \mathfrak{F}_{6q+4}, \mathfrak{K}_{6q+4}, \mathfrak{H}_{6q+2}\}$ y para tal $\mathfrak{G}$ sea $k = 6q, 6q+2$ ó $6q+4$ de acuero al caso. El subgrupo de Fitting de $\mathfrak{G}$ es entonces $N_k = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ y el grupo de holonomía es cíclico de orden 6 generado por la clase de γ. Por (4.2.4), para cada primo p se tiene

$$\zeta_{\mathfrak{G}_p}(s) = (1-p^{-1})^{-3} \int_{\mathcal{T}'} |t_{11}|^{s-2} |t_{22}|^{s-3} |t_{33}|^{s-3} d\mu,$$

donde $\mathcal{T}'$ es el conjunto de pares $(\mathbf{t}, \mathbf{v}) \in Tr(3, \mathbb{Z}_p) \times \mathbb{Z}_p^3$ tales que

$$t_{33} | kt_{11}t_{22},\ (\gamma \mathbf{x}^{\mathbf{v}_1})^{-1} \mathbf{x}^{\mathbf{t}_i} \gamma \mathbf{x}^{\mathbf{v}_1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p} \text{ para } i = 1,2,3. (\gamma \mathbf{x}^{\mathbf{v}_1})^6 \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}.$$

Luego de algunas simplificaciones, estas condiciones se reescriben como

$$\begin{aligned}
&t_{33} | kt_{11}t_{22} \\
&x_1^{t_{12}} x_2^{-t_{11}+t_{12}} x_3^{t_{13}+kt_{12}(t_{12}+1)-kt_{11}t_{12}-kv_2t_{12}-kt_{11}v_1+kt_{12}v_1} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}, \\
&x_1^{t_{22}} x_2^{t_{22}} x_3^{t_{23}+6qt_{22}(t_{22}+1)-6qv_2t_{22}+6qt_{22}v_1},\ x_3^{1+6v_3-kv_1(3v_1+3)-kv_2(3v_2-3)} \in \langle \mathbf{x}^{\mathbf{t}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_2}, \mathbf{x}^{\mathbf{t}_3} \rangle_{\mathbb{Z}_p}.
\end{aligned}$$

Usando (4.2.3), estas condiciones se transforman en

(1) $t_{33} | kt_{11}t_{22}$

(2) $t_{11} | t_{12}$

(3) $t_{22} | -\frac{t_{12}^2 + t_{11}^2 - t_{11}t_{12}}{t_{11}}$

(4) $t_{33} | \frac{t_{12}^2 + t_{11}^2 - t_{11}t_{12}}{t_{11}t_{22}} t_{23} + (1 - \frac{t_{12}}{t_{11}}) t_{13} + \frac{k}{2} \frac{t_{12}}{t_{11}} (\frac{t_{12}}{t_{11}} + 1) t_{11}t_{12} - kt_{12}(-t_{11} + t_{12}) + kt_{12}(t_{12}+1) - kt_{11}t_{12} - kv_2t_{12} - kt_{11}v_1 + kt_{12}v_1$

(5) $t_{11} | t_{22}$

(6) $t_{22} | -\frac{t_{22}}{t_{11}} t_{12} + t_{22}$

(7) $t_{33} | \frac{t_{12}}{t_{11}} t_{23} - \frac{t_{22}}{t_{11}} t_{13} + \frac{k}{2} \frac{t_{22}}{t_{11}} (\frac{t_{22}}{t_{11}} + 1) - kt_{22}^2 + kt_{22}(t_{22}+1) - kv_2t_{22} + kt_{22}v_1$

(8) $t_{33} | \epsilon + 6v_3 - kv_1(3v_1+3) - kv_2(3v_2-3)$.

Si $p = 2$ ó $p = 3$ entonces la condición (8) implica que t_{33} debe ser una unidad y las condiciones (2), (3), (5) y (6) son equivalentes a las correspondientes en el cálculo de las funciones zeta de los grupos del tipo $Q = p4$ y $Q = p3$ en (4.4.5) y (4.4.6). Los resultados son entonces los mismos, es decir

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_2}(s) = \zeta_2(2s-2) \text{ y } \zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_3}(s) = \zeta_2(s-1).$$

Supongamos ahora que $p \neq 2, 3$. Consideremos dos casos *Caso 1:* $t_{22} | t_{12}$. En este caso, es fácil ver que las condiciones (2), (3), (5) y (6) son equivalentes a $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$. Podemos multiplicar el lado derecho de (7) por $\frac{t_{11}-t_{12}}{t_{22}}$ y sumarlo al lado derecho de (4) para así reemplazar (4) por una condición que no involucra a la variable t_{13}. El coeficiente de t_{23} en esta nueva condición será $\frac{t_{12}^2+t_{11}^2-t_{11}t_{12}}{t_{11}t_{22}} + \frac{t_{11}-t_{12}}{t_{22}} \frac{t_{12}}{t_{11}} = \frac{t_{11}}{t_{22}}$ y por lo tanto esta condición será de la forma (4') $t_{33} | \frac{t_{11}}{t_{22}} t_{23} + u(t_{11}, t_{22}, t_{12}, v_1, v_2)$ donde u será una función racional con valores en $\mathbb{Z}_p$ si se satisface $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$. Más aún, si se satisface $|t_{11}| = |t_{22}| \geq |t_{12}|$ entonces (4') equivale a

$t_{33}|t_{23}+\frac{t_{22}}{t_{11}}u(t_{11},t_{22},t_{12},v_1,v_2)$. De manera análoga, podemos reemplazar a (7) por la condición que se obtiene multiplicando el lado derecho por $-\frac{t_{22}}{t_{11}}$ y, por lo tanto, (7) es equivalente a una condición de la forma $t_{33}|t_{13}+\frac{t_{22}}{t_{11}}u'(t_{11},t_{22},t_{33},t_{12},v_1,v_2,t_{23})$ donde u' es una función racional que toma valores en $\mathbb{Z}_p$ si se satsiface $|t_{11}|=|t_{22}|\geq|t_{12}|$. Las nuevas condiciones resultan entonces

$$t_{33}|kt_{11}t_{22}, |t_{11}|=|t_{22}|,\ t_{22}|t_{12},\ t_{33}|t_{23}+\frac{t_{22}}{t_{11}}u(t_{11},t_{22},t_{12},v_1,v_2),$$
$$t_{33}|t_{13}+\frac{t_{22}}{t_{11}}u'(t_{11},t_{22},t_{33},t_{12},v_1,v_2,t_{23}),\ t_{33}|\epsilon+6v_3-kv_1(3v_1+3)-kv_2(3v_2-3).$$

La integral se calcula como en el caso 1 cuando $p\neq 2$ en (4.4.5). El resultado es

$$(1-p^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{33}|kt_{11}t_{22}\\ |t_{11}|=|t_{22}|}}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1}d\mu=\zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2)-p^{-s(v_p(k)+1)}\zeta_p(4s-2))$$

Caso 2: $t_{22}\nmid t_{12}$. En este caso (2),(3),(5) y (6) son equivalentes a la condición (3) junta con $|t_{11}|=|t_{12}|>|t_{22}|$. Vimos en el caso 2 cuando $p\neq 3$ en (4.4.6) que esto puede satisfacerse sólo cuando $p\equiv 1 \mod 3$. Además, en tal caso la condición (3) se divide en dos casos: (a) $t_{22}|t_{12}-\alpha t_{22}$ y (b) $t_{22}|t_{12}-\beta t_{22}$, donde α y β son las raíces de x^2-x+1, y que estas dos posibilidades no pueden darse simultáneamente. Más aún, si se verifican algunas de estas dos condiciones entonces se satsiface $|t_{11}|=|t_{12}|$. Finalmente, al igual que en el caso 2 cuando $p\neq 3$ en (4.4.6), se obtiene que, por ejemplo en el caso (a), las condiciones se vuelven equivalentes a

$$t_{33}|qt_{11}t_{22},\ |t_{11}|>|t_{22}|,\ t_{22}|t_{12}-\alpha t_{11},\ t_{33}|t_{23}+u(t_{11},t_{22},t_{12},v_1,v_2),\ t_{33}|t_{13}+u'(t_{11},t_{22},t_{12},v_1,v_2,t_{23})$$
$$t_{33}|\epsilon+6v_3-kv_1(3v_1+3)-kv_2(3v_2-3),$$

donde u y u' son funciones racionales que toman valores en $\mathbb{Z}_p$ cuando se satisface $|t_{11}|>|t_{22}|$ y $t_{22}|t_{12}-\alpha t_{11},\ t_{33}|$. Luego la integral bajo estas condiciones multiplicada por 2 (pues en el caso (b) obtendríamos lo mismo) resulta, al igual que en (4.4.6),

$$2(1-p^{-1})^{-3}\int_{\substack{t_{33}|qt_{11}t_{22}\\ |t_{11}|>|t_{22}|}}|t_{11}|^{s-2}|t_{22}|^{s-2}|t_{33}|^{s-1}d\mu=$$
$$2\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2)-p^{-s(v_p(k)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1))$$

Usamos el caracter de Dirichlet χ_3 para expresar el resultado final para $p\neq 2,3$:

$$\begin{aligned}\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s)&=\zeta_p(s)(\zeta_p(2s-2)-p^{-s(v_p(k)+1)}\zeta_p(4s-2))+\\&+(1+\chi_3(p))\zeta_p(s)p^{-(s-1)}(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2)-p^{-s(v_p(k)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1)).\end{aligned}$$

Cuando $p\nmid 6k$ se obtiene

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s)=\frac{1-\chi_3(p)p^{-(3s-2)}}{(1-p^{-(s-1)})(1-p^{-(2s-1)})(1-\chi_3(p)p^{-(s-1)})(1-\chi_3(p)p^{-(2s-1)})}.$$

Estas últimas funciones zeta locales satisfacen la siguiente ecuación funcional

$$\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s)|_{p\to p^{-1}}=(-1)^3p^{-3s+2}\chi_4(p)\zeta_{\widehat{\mathfrak{G}}_p}(s).$$

El producto de Euler de todos los factores locales resulta

$$\zeta_{\mathfrak{G}}(s) = \zeta_2(2s-2)\zeta_3(s-1) \prod_{p\neq 2,3} \zeta_p(s) \Big[(\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+1)}\zeta_p(4s-2)) + \\ (1+\chi_3(p))p^{-(s-1)} \left(\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-2) - p^{-s(v_p(q)+2)}\zeta_p(4s-2)\zeta_p(2s-1)\right) \Big] \\ \prod_{p\neq 2,3; p|k} \frac{L(3s-2,\chi_4,p)}{\zeta_p(s-1)\zeta_p(2s-1)L(s-1,\chi_3,p)L(2s-1,\chi_3,p)} \\ \cdot \frac{\zeta(s-1)\zeta(2s-1)L(s-1,\chi_3)L(2s-1,\chi_3)}{L(3s-2,\chi_3)}$$

cuya abscisa de convergencia es 2.

Bibliografía

[Ba72] H. Bass, *The degree of polynomial growth of finitely generated nilpotent groups*, Proc. London Math. Soc. **25** (1972), 603-614.

[dSW08] M. du Sautoy, L. Woodward, *Zeta functions of groups and rings*, Lectures notes in math. **1925**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2008.

[Dan78] V. Danilov, *The geometry of toric varieties*, Russian Math. Surveys **33** (1978), 97–154.

[Dek96] K. Dekimpe *Almost-Bieberbach groups*, Lecture Notes in Math. **1639**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1996.

[DIKL95] K. Dekimpe, P. Igodt, S. Kim, K. Lee, *Affine structures for closed 3-dimensional manifolds with nil-geometry*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **46**(2) (1995), pp. 77-97.

[DG70] M. Demazure, P. Gabriel, *Groupes Algébriques. Tome I: Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Mason & Cie, Éditeur, Paris, 1970.

[Den84] J. Denef, *The rationality of the Poincaré series associated to the p-adic points on a variety*, Invent. Math. **77** (1984), 1-23.

[Den87] J. Denef, *On the degree of Igusa's local zeta function*, Amer. J. Math. **109** (1987), 991–1008.

[DdSMS99] J. Dixon, M. du Sautoy, A. Mann, D. Segal, *Analytic Pro-p-groups*, 2nd Ed., Cambridge, C.U.P: 1999.

[dSG00] M. du Sautoy, F. Grunewald, *Analytic properties of zeta functions and subgroup growth*, Ann. of Math. **152** (2000), 793-833.

[dSG06] M. du Sautoy, F. Grunewald, *Zeta functions of groups and rings*, Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Madrid, August 22-30, 2006), vol. II, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, pp. 131-149.

[dSMS99] M. du Sautoy, J. McDermott, G. Smith, *Zeta functions of crystallographic groups and meromorphic continuation*, Proc. London. Math. Soc. **79** (1999), 511-534.

[EGA I] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique I*, Publ. Math. I.H.É.S **4** (1960)

[EGA IV] A. Grothendieck, J. Dieudonné, *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, Publ. Math. I.H.É.S. **24** (1965).

[EHN13] B. Eick, W. Nickel, M. Horn, *Polyciclic – a GAP package*, Version 2.11; 2013. (http://www.icm.tu-bs.de/ag_algebra/software/polycyclic/).

[GAP15] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming*, Version 4.7.7; 2015. (http://www.gap-system.org)

[Gro81] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps(with an appendix by Jacques Tits)*, Publ. Math. I.H.É.S. **53**, 1981, 53-78 .

[GSS88] F. Grunewald, D. Segal, G. Smith, *Subgroups of finite index in nilpotent groups*, Invent. Math. **93** (1988), 185-223.

[Hal69] P. Hall, *Nilpotent groups*, Queen Mary College Math. Notes, 1969.

[HJKL02] K. Ha, J. Jo, S. Kim, J. Lee, *Classification of free actions of finite groups on the 3-torus*, Topology and its Applications **121** (2002) 469-507.

[Hir64] H. Hironaka, *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero*, Ann. of Math., **79** (1964), 109–326.

[LW54] S. Lang, A. Weil, *Numbers of points of varieties in finite fields*, Amer. J. Math. **76** (1954), 819–827.

[Lub93] A. Lubotzky, *Counting finite index subgroups*, Groups '93 Galway/St. Andrews, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser. 212, Cambridge University Press, Cambridge 1995.

[LMS93] A. Lubotzky, A. Mann, D. Segal, *Finitely generated groups of polynomial subgroup growth*, Israel J. Math. **82** (1993), 363-371.

[LS03] A. Lubotzky, D. Segal, *Subgroup growth*, Progr. Math. **212**, Birkhäuser, Basel, 2003.

[Mal49] A. Mal'cev, *Nilpotent torsion free groups*, Isvestia Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. **13** (1949), 201-212 (Russian).

[Mar79] J. Martinet, *Character theory and Artin L-functions*, in Algebraic Number Fields 1-87 (A. Fröhlich, ed.), Academic Press, London (1979).

[McL75] S. Mac Lane, *Homology*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelber-New York, 1975.

[McD97] J. McDermott, *Subgroup growth and the plane crystallographic groups*, PhD thesis, University of Bath, 1997.

[NS07] N. Nikolov, D. Segal, *On finitely generated profinite groups*, Ann. of Math. **165** (2007), no. 1, 171–238

[Se83] D. Segal, *Polycyclic groups*, Cambridge: C.U.P. 1983.

[Vol10] C. Voll, *Functional equations for zeta functions of groups and rings*, Ann. of Math. **172** (2010), 1181–1218.

[War76] R. Warfield, Jr., *Nilpotent groups*, Lecture Notes in Math. **513**, Springer-Verlag, Berling-Heidelberg-New York, 1976.