

EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XX JORNADAS

VOLUMEN 16 (2010)

Pío García
Alba Massolo

Editores



ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons atribución NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina



Deducción del principio de complementariedad en la teoría cuántica

Leonardo Vanni* • Roberto Laura**

Introducción

Este trabajo es una aplicación del formalismo que denominamos de contextos generalizados, y que fue presentado en trabajos anteriores [1],[2],[3],[4]. Para que el trabajo pueda ser leído en forma independiente, presentamos en primer lugar algunas definiciones y conceptos básicos.

En la mecánica clásica, una propiedad tal como “la partícula tiene una velocidad entre 2 y 3 metros sobre segundos” se representa con un subconjunto del espacio de los estados, que en este caso es el espacio de las fases, y cuyas coordenadas son las componentes de las posiciones y velocidades de las partículas que componen el sistema.

En general, cada propiedad p de un sistema físico clásico se representan con un subconjunto C_p del espacio de los estados S ($C_p \subset S$). Además, en la mecánica clásica es posible organizar descripciones y razonamientos acerca de propiedades del sistema, con expresiones tales como “si ..., entonces...”, “...y...”, “... ó ...”, y “no ...”. Todas estas expresiones se corresponden con relaciones y operaciones que involucran subconjuntos del espacio de las fases.

La relación “si p_1 , entonces p_2 ” se corresponde con la inclusión $C_{p_1} \subset C_{p_2}$. Las operaciones “ p y p ”, “ p ó p ” y “no p ” se corresponden con la intersección $C_p \cap C_p$, la unión $C_p \cup C_p$, y el complemento $S - C_p$, respectivamente.

Las uniones e intersecciones de conjuntos cumplen con las propiedades distributivas $C_1 \cap (C_2 \cup C_3) = (C_1 \cap C_2) \cup (C_1 \cap C_3)$ y $C_1 \cup (C_2 \cap C_3) = (C_1 \cup C_2) \cap (C_1 \cup C_3)$

De esta manera, el universo del discurso acerca de las propiedades del sistema se estructura con las reglas de la lógica convencional, es decir las que usamos en nuestro lenguaje de la vida cotidiana.

La situación es diferente en la mecánica cuántica, donde los estados de un sistema físico se representan matemáticamente con elementos de un espacio vectorial (más precisamente un espacio de Hilbert H), y cada magnitud de interés físico A recibe el nombre de observable y es representada con un operador autoadjunto \hat{A} . Los operadores autoadjuntos de interés físico admiten una representación espectral de la forma $\hat{A} = \sum_j a_j \hat{\Pi}_j$, donde los a_j son los autovalores del operador \hat{A} . Cada operador de proyección $\hat{\Pi}_j$, genera el subespacio del espacio de Hilbert de

*Instituto de Astronomía y Física del Espacio (UBA – CONICET)

**Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (Universidad Nacional de Rosario)
Instituto de Física Rosario (CONICET – UNR)

los autovectores correspondientes al autovalor a_j del operador \hat{A} . Los operadores de proyección verifican $\hat{\Pi}_j^2 = \hat{\Pi}_j$ y $\sum_j \hat{\Pi}_j = \hat{I}$, y además son mutuamente ortogonales ($\hat{\Pi}_i \hat{\Pi}_j = 0$ si $i \neq j$).

La propiedad "el observable \mathcal{A} tiene su valor en el intervalo Δ " se corresponde entonces con el proyector $\hat{\Pi}_{\mathcal{A} \in \Delta} \equiv \sum_{a_i \in \Delta} \hat{\Pi}_i$, o en forma equivalente con el subespacio $H_{\mathcal{A} \in \Delta}$ del espacio de Hilbert H ($H_{\mathcal{A} \in \Delta} \equiv \hat{\Pi}_{\mathcal{A} \in \Delta} H$).

La mecánica cuántica permite descripciones y razonamientos sobre propiedades del sistema, por lo que deben encontrar su lugar en ella expresiones tales como "si..., entonces...", "... y ...", "... ó ...", y "no ...". Todas estas expresiones se corresponden con relaciones y operaciones del conjunto de subespacios del espacio de Hilbert H . La relación "si p_1 , entonces p_2 " se corresponde con la inclusión $H_{p_1} \subset H_{p_2}$. Las operaciones " p y p' ", " p ó p' " y "no p " se corresponden con la intersección $H_p \cap H_{p'}$, con el espacio que expande la combinación lineal de un vector de H_p y uno de $H_{p'}$, y con el complemento ortogonal $H_p^\perp \equiv H - H_p$, respectivamente.

Notemos que la disyunción " p ó p' " entre dos propiedades cuánticas no se puede representar con la unión de los correspondientes subespacios (la unión de subespacios no es un subespacio vectorial). Esto determina que, a diferencia de lo que sucedía con las propiedades clásicas, el conjunto de todas las propiedades posibles de un sistema cuántico no forma un reticulado distributivo, y en consecuencia la estructura lógica de las propiedades cuánticas no es la del lenguaje de nuestra vida cotidiana. Es por eso que la lógica cuántica es diferente de la lógica clásica [7].

Comenzando con los trabajos de Birkhoff y Von Neumann [6], se han venido desarrollando investigaciones para dar un significado a esta lógica no convencional. Pero hay otra forma de abordar este tema, y es eliminando el problema antes de que aparezca. Parece haber consenso entre los físicos en que la teoría cuántica no predica acerca de la conjunción de propiedades que corresponden a operadores que no conmutan entre sí [7]. Esta hipótesis aparece (explícita o implícitamente) en las aplicaciones prácticas de la teoría, y también en los libros de texto de mecánica cuántica [8].

Se trata entonces de obtener del conjunto de todas las propiedades posibles ciertos subconjuntos que formen reticulados distributivos. En el interior de cada uno de estos subconjuntos, las descripciones y razonamientos siguen las reglas de la lógica convencional, y además la regla de Born asigna probabilidades bien definidas a las propiedades involucradas. Cada uno de estos subconjuntos de propiedades forma un posible universo del discurso acerca del sistema, que en mecánica cuántica se denomina *contexto*, y que corresponde a las propiedades generadas a partir de un conjunto completo de observables que conmutan entre sí.

Todas las descripciones posibles de un sistema cuántico deben hacerse para un contexto de propiedades, y no es posible hacer descripciones que involucren propiedades de contextos diferentes.

Es común decir que el contexto que se debe usar para la descripción está determinado por la situación experimental, es decir por las variables indicadoras de los aparatos de medición macroscópicos. Sin embargo, nos parece que no hay una prescripción clara de la teoría cuántica sobre como elegir el “universo de discurso” de entre todas las propiedades posibles, y en la mayoría de los casos la elección del contexto “correcto” es el resultado de la intuición del físico.

Cuando el sistema tiene un número muy grande de grados de libertad, como es el caso en que hay un aparato de medición macroscópico, el fenómeno de decoherencia parece privilegiar el contexto en el que las variables indicadoras de los aparatos admiten una descripción clásica, donde los valores distintos de la variable indicadora no presentan interferencias [9].

Pero subsiste la pregunta de que sucede si pretendemos describir un sistema cuántico sobre el que no se realiza una medición, o un sistema donde no hay decoherencia. Será motivo de nuestros próximos trabajos ensayar una respuesta a esta pregunta. En este trabajo nos ocuparemos en particular de analizar las vinculaciones entre la noción de contexto y la de dualidad onda-partícula.

El enunciado de Bohr de la *dualidad onda-partícula* ó *principio de complementariedad*, establece que, dependiendo del arreglo experimental, un sistema cuántico exhibe aspectos corpusculares (siguiendo trayectorias definidas), o aspectos ondulatorios (tales como la formación de un patrón de interferencia), pero nunca ambos aspectos al mismo tiempo. Según Bohr, onda y partícula son aspectos mutuamente excluyentes pero complementarios de la naturaleza [10] [11].

Los aspectos corpusculares de un sistema cuántico involucran la posibilidad de que el sistema posea una trayectoria, y para ello se deben poder considerar, aunque sea en forma probabilística, las posiciones que ocupa el sistema a distintos tiempos.

En trabajos anteriores hemos desarrollado el formalismo de *contextos generalizados*, que permite extender la noción usual de contexto para definir la compatibilidad entre propiedades a distintos tiempos [12]. Mostraremos aquí como es posible deducir de nuestro formalismo las características ondulatorias o corpusculares de los procesos que ocurren en el interferómetro de Mach-Zehnder.

El interferómetro de Mach-Zehnder

El interferómetro de Mach-Zehnder responde esquemáticamente al dispositivo experimental indicado en la Figura 1. Está compuesto esencialmente de dos divisores de ondas dados por los semiespejos S_1 y S_2 , y de dos espejos indicados con R_1 y R_2 .

Al tiempo t_0 , un fotón (o un neutrón, o cualquier otra partícula) se lanza contra el semiespejo S_1 , de modo que el estado de la partícula se representa con una función de onda $\psi(t_0)$, localizada en una región del espacio que está afuera del interferómetro. Supondremos que en cada reflexión, ya sea en un espejo o semiespejo, se produce en la función reflejada un desfase de un cuarto de longitud de onda en cada componente de su desarrollo de Fourier en ondas planas. Así, luego de atravesar el primer semiespejo, al tiempo t_1 , el paquete de onda incidente evoluciona a una superposición de los paquetes de ondas reflejado y transmitidos indicada por la siguiente transformación

$$\psi(t_0) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi(t_1) + \psi_{\lambda/4}(t_1)),$$

donde $\psi(t_1)$ representa el paquete de onda transmitido a la región entre S_1 y R_1 y $\psi_{\lambda/4}(t_1)$ el paquete de onda reflejado hacia la región entre S_1 y R_2 , con su correspondiente desfase de $\lambda/4$ en cada componente de Fourier.

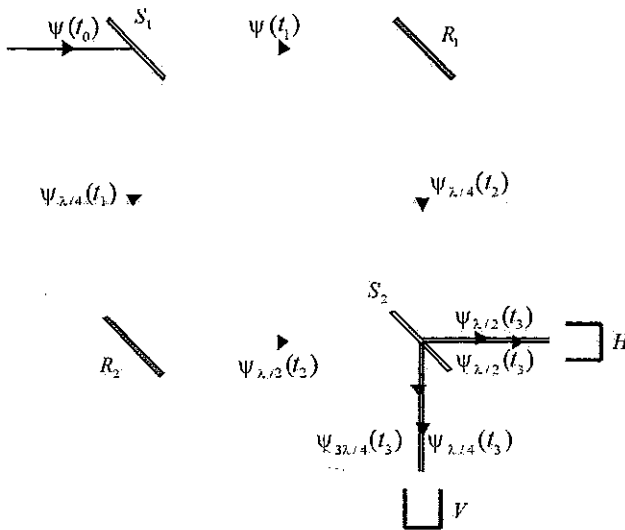


Figura 1

Estos dos paquetes experimentan una reflexión total en los espejos R_1 y R_2 , que con un adicional desfase de $\lambda/4$ resultan de una evolución del tiempo t_1 al tiempo t_2 dada por las transformaciones

$$\Psi(t_1) \rightarrow \Psi_{\lambda/4}(t_2) \quad \Psi_{\lambda/4}(t_1) \rightarrow \Psi_{\lambda/2}(t_2)$$

Finalmente, luego de atravesar el segundo semiespejo S_2 , estos paquetes son parcialmente reflejados y parcialmente transmitidos de modo que al tiempo t_3 cada uno de ellos evoluciona a los estados

$$\Psi_{\lambda/4}(t_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{\lambda/2}(t_3) + \Psi_{\lambda/4}(t_3)) \quad \Psi_{\lambda/2}(t_2) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{3\lambda/4}(t_3) + \Psi_{\lambda/2}(t_3))$$

Como consecuencia de las reflexiones, la función de onda $\Psi_{3\lambda/4}(t_3)$ está desfasada en media onda respecto a $\Psi_{\lambda/4}(t_3)$ por lo que resulta $\Psi_{3\lambda/4}(t_3) = -\Psi_{\lambda/4}(t_3)$.

A la salida del interferómetro dos detectores H y V se ubican como indica la figura 1, de modo que puedan absorber las partículas que llegan hasta ellos. Si ψ_h (ψ_v) designa el estado de una partícula propagándose horizontalmente (verticalmente) hacia el detector H (V), y las funciones h_0 (v_0) representa el estado inicial del detector horizontal (vertical), y h^* (v^*) describe el estado de los detectores después de absorber la partícula incidente, podemos representar la evolución del sistema compuesto partícula-aparato en el proceso de detección con transformaciones unitarias que verifican

$$\Psi_h \times h_0 \rightarrow h^*, \quad \Psi_v \times v_0 \rightarrow v^*$$

Con todo esto, teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores, es posible obtener la evolución temporal del estado que representa al sistema compuesto de la partícula y los dos detectores en cada tiempo. Si t_0 representa el tiempo inicial en el que la partícula aún no ha ingresado al interferómetro, el estado inicial del sistema compuesto es

$$\Psi(t_0) = \Psi(t_0) \times h_0 \times v_0$$

Si consideramos a t_4 el tiempo final después del cual se ha producido el registro de los detectores, entonces cada etapa de la evolución, desde t_0 a t_4 puede ser representada por las transformaciones

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= \Psi(t_0) \times h_0 \times v_0 \\ \rightarrow \Psi(t_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi(t_1) + \Psi_{\lambda/4}(t_1)) \times h_0 \times v_0 \\ &\rightarrow \Psi(t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi_{\lambda/4}(t_2) + \Psi_{\lambda/2}(t_2)) \times h_0 \times v_0 \\ &\rightarrow \Psi(t_3) = \Psi_{\lambda/2}(t_3) \times h_0 \times v_0 \\ &\rightarrow \Psi(t_4) = h^* \times v_0, \end{aligned}$$

donde hemos considerado que al tiempo t_3 resulta $\psi_{3\lambda/4}(t_3) = -\psi_{\lambda/4}(t_3)$.

La interferencia destructiva anula la componente vertical de la función de onda de la partícula que sale de del interferómetro, y por lo tanto se obtiene un registro en el detector horizontal H , y ningún registro en el detector I' .

Este fenómeno de interferencia sugiere que en este experimento la partícula que atraviesa el interferómetro pone de manifiesto sus propiedades ondulatorias, pero ¿que sucede con sus propiedades corpusculares?. Según el enunciado de Bohr del principio de complementariedad, un sistema que presenta propiedades ondulatorias no puede presentar también propiedades corpusculares. Esta dualidad onda-partícula puede usarse como argumento para decir que al manifestarse interferencias destructivas entre las componentes del vector de estado, que son propias de un comportamiento ondulatorio, no tiene sentido preguntarse en cual de las dos ramas del interferómetro estuvo la partícula.

Podemos demostrar que la imposibilidad de afirmar en cual de las dos ramas del interferómetro estuvo la partícula antes de ser detectada se puede deducir de nuestro formalismo de contextos generalizados, y sin apelar al el postulado de Bohr acerca de la dualidad onda-partícula.

En general, para un sistema cuántico aislado, hemos postulado en nuestro formalismo de contextos generalizados que una propiedad p_1 al tiempo t_1 es compatible con otra propiedad p_2 a otro tiempo t_2 , cuando los correspondientes proyectores conmutan al ser trasladados a un tiempo común (ver una presentación más detallada de este postulado en nuestro trabajo de referencia [7]). En lenguaje matemático, esto significa que si $\hat{\Pi}_1$ y $\hat{\Pi}_2$ son los proyectores que representan a p_1 y p_2 , y t_0 es un tiempo cualquiera, resulta:

$$\hat{\Pi}_{1,1} \hat{\Pi}_{2,2} - \hat{\Pi}_{2,2} \hat{\Pi}_{1,1} = 0, \quad \hat{\Pi}_{1,1} \equiv \hat{U}(t_0, t_1) \hat{\Pi}_1 \hat{U}^{-1}(t_0, t_1), \quad \hat{\Pi}_{2,2} \equiv \hat{U}(t_0, t_2) \hat{\Pi}_2 \hat{U}^{-1}(t_0, t_2)$$

En las expresiones anteriores $\hat{U}(t_0, t_j) = \exp[-\frac{i}{\hbar} \hat{H}(t_0 - t_j)]$ ($j=1,2$) es el operador unitario de evolución desde el tiempo t_j al tiempo t_0 para los vectores de estado de un sistema físico con Hamiltoniano \hat{H} .

Para un contexto de propiedades al tiempo t_1 , que es compatible con otro contexto de propiedades al tiempo t_2 , es posible organizar las propiedades de ambos contextos en un contexto generalizado, en el que se pueden combinar propiedades a tiempos diferentes en un único universo de discurso (ver referencia [7] para más detalles) En este universo de discurso, cobran sentido expresiones tales como "la propiedad p_1 al tiempo t_1 y la propiedad p_2 al tiempo t_2 ", donde p_1 es una propiedad del contexto ordinario al tiempo t_1 y p_2 pertenece al contexto al tiempo t_2 .

Para el caso del proceso en el interferómetro, construimos un contexto generalizado que involucre al tiempo t_1 en el que la partícula tiene su paquete de onda localizado entre la barrera

semitransparente S_1 y los espejos R_1 y R_2 , y también al tiempo final t_4 en el que ya se produjo la interacción entre la partícula y los detectores.

Para el tiempo t_1 , nos interesa considerar la propiedad que corresponde a la partícula localizada entre S_1 y R_1 , representada por el proyector $\hat{\Pi}_{S_1R_1}$, y la que corresponde a la partícula localizada entre S_1 y R_2 , que está representada por el proyector $\hat{\Pi}_{S_1R_2}$.

Para el tiempo t_4 nos interesa ocuparnos de los posibles registros de los aparatos, que están representados por los proyectores $\hat{\Pi}_{h_0v_0}$, $\hat{\Pi}_{h_0v^*}$, $\hat{\Pi}_{h^*v_0}$ y $\hat{\Pi}_{h^*v^*}$.

Trasladando los proyectores a un tiempo común, hemos verificado que no conmutan, y en consecuencia las propiedades elegidas al tiempo t_1 no son compatibles con las elegidas al tiempo t_4 .

Por lo tanto, nuestro formalismo de contextos generalizados nos permite deducir que no es posible hablar acerca de en cuál de las dos ramas del interferómetro estuvo la partícula que es finalmente detectada. Por cual rama pasó la partícula no puede ser parte del universo de discurso que también considera los posibles registros de los aparatos de medición a la salida del interferómetro.

El interferómetro de Mach-Zehnder modificado

Ahora vamos a considerar una modificación del dispositivo descrito en la sección anterior, que consiste en eliminar la segunda barrera semitransparente. El dispositivo modificado se representa esquemáticamente en la figura 2.

Para los tiempos t_0 , t_1 , t_2 y t_4 , la evolución de las funciones de ondas que representan el estado del sistema compuesto por la partícula y los dos aparatos de medición resulta ahora

$$\begin{aligned} \Psi(t_0) &= \psi(t_0) \times h_0 \times v_0 \\ \rightarrow \Psi(t_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi(t_1) + \psi_{\lambda/4}(t_1)) \times h_0 \times v_0 \\ &\rightarrow \Psi(t_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{\lambda/4}(t_2) + \psi_{\lambda/2}(t_2)) \times h_0 \times v_0 \\ &\rightarrow \Psi(t_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{\lambda/4}(t_2) \times h^* + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{\lambda/2}(t_2) \times v^* \end{aligned}$$

Vemos claramente que al haber eliminado la segunda barrera semitransparente del interferómetro, ha desaparecido el efecto de interferencia que encontramos en la sección anterior. Al tiempo t_2 , resulta igualmente probable el registro en el aparato V ó en el aparato H

Como en este caso no hay interferencias destructivas, esperamos que se manifiesten aspectos corpusculares de la partícula

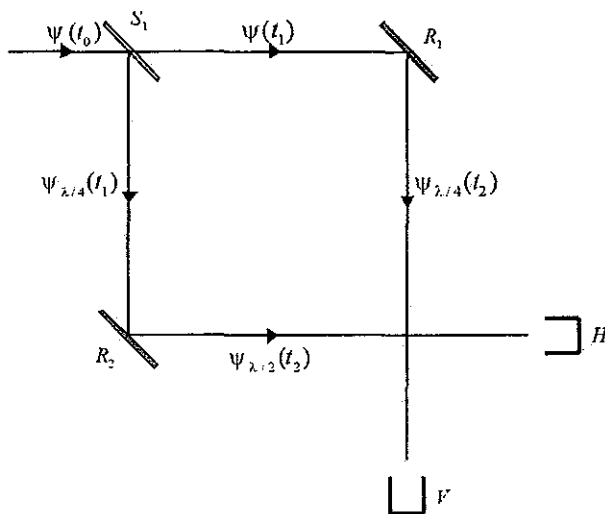


Figura 2

A diferencia de lo que encontramos en la sección anterior, las propiedades de la partícula localizada en alguna de las dos ramas (S_1R_1 ó S_1R_2) al tiempo t_1 , resultan compatibles con las propiedades de los distintos registros de los aparatos de medición al tiempo t_4 . Esto resulta así porque hemos demostrado que los correspondientes proyectores conmutan entre sí al ser trasladados a un tiempo común.

En este caso es posible entonces involucrar estas propiedades a tiempos diferentes en un mismo universo de discurso.

El cálculo de probabilidades pone de manifiesto las propiedades corpusculares. Dentro del universo de discurso permitido por nuestro formalismo, podemos en este caso calcular la probabilidad de que la partícula esté en la región S_1R_1 al tiempo t_1 , condicional a que sea registrada por el aparato V al tiempo posterior t_4 .

Hemos hecho el cálculo trasladando las propiedades involucradas al tiempo común t_4 , y obtuvimos:

$$\frac{\langle \Psi(t_4) | \hat{U}(t_4, t_1) \hat{\Pi}_{S_1R_1} \hat{U}^{-1}(t_4, t_1) \hat{\Pi}_{H_0V} | \Psi(t_4) \rangle}{\langle \Psi(t_4) | \hat{\Pi}_{H_0V} | \Psi(t_4) \rangle} = 1$$

Nuestra interpretación de este resultado es la siguiente: si al tiempo t_4 se activa el detector V , entonces en el tiempo anterior t_1 la partícula estaba en la región S_1R_1 . En otras palabras se pone de manifiesto una propiedad corpuscular: la partícula estuvo en la rama S_1R_1V del dispositivo experimental si es detectada por el aparato V .

También podemos calcular la probabilidad de que la partícula haya estado en la región S_1R_2 al tiempo t_1 , condicional a que el aparato H registre la partícula al tiempo t_4 . Obtenemos en este caso

$$\frac{\langle \Psi(t_4) | \hat{U}(t_4, t_1) \hat{\Pi}_{S_1R_2} \hat{U}^{-1}(t_4, t_1) \hat{\Pi}_{H^*V_0} | \Psi(t_4) \rangle}{\langle \Psi(t_4) | \hat{\Pi}_{H^*V_0} | \Psi(t_4) \rangle} = 1$$

Esta probabilidad condicional igual a uno significa que si la partícula es detectada por el aparato H , entonces estuvo en la rama S_1R_2H .

Como además hay un 50% de probabilidades de detectar la partícula en cada uno de los dos aparatos, concluimos que hay un 50% de probabilidades para cada una de las dos trayectorias S_1R_2H ó S_1R_1V .

Conclusiones

La dualidad onda-partícula, tal como es enunciada por Bohr, pone de manifiesto que los conceptos de onda y corpúsculo que vienen de la física clásica, no alcanzan por separado para dar cuenta de las características de una partícula microscópica. Es un enunciado que defiende a la teoría cuántica de las comparaciones con el comportamiento de objetos ya conocidos del mundo clásico, pero que no provee ningún método, o algoritmo, para seleccionar cuando se verifican los aspectos corpusculares y cuando los ondulatorios.

Nuestro formalismo de contextos generalizados no provee un método que permita elegir cual es el contexto de propiedades privilegiado que debe usarse para la descripción de un proceso físico, pero sí permite verificar en que casos las propiedades elegidas pueden ó no ser parte de un universo de discurso válido sobre el sistema.

Para el interferómetro de Max-Zehnder, el formalismo de contextos generalizados permite demostrar que la elección de los registros de los aparatos como propiedades relevantes en la descripción del proceso, es incompatible con la propiedad de una determinada trayectoria dentro del interferómetro. Es importante destacar que la deducción se apoya en que hay un dispositivo experimental, que es el de la figura 1, y en que se debe considerar que inicialmente la partícula y los dos detectores están no correlacionados.

Para el interferómetro de Max-Zehnder modificado, representado en la figura 2, también con un estado inicial en que partícula y los dos detectores están no correlacionados, el formalismo de contextos generalizados permite demostrar que es legítimo incluir en un mismo universo de discurso los posibles registros de los aparatos de medición, junto con las dos posibles trayectorias que siguen las partículas dentro del dispositivo. Además hemos podido demostrar que ambas trayectorias son igualmente probables.

Notas

- 1 Roberto Laura y Leonardo Vanni, *Relaciones entre la lógica cuántica y la lógica clásica*. Epistemología e Historia de la Ciencia, Selección de Trabajos de las XVII Jornadas, Volumen 13, 265-271 (2007)
- 2 Leonardo Vanni y Roberto Laura, *Contexto de Historias en la Teoría Cuántica*. Epistemología e Historia de la Ciencia, Selección de Trabajos de las XVIII Jornadas, Volumen 14, 519-528 (2008)
- 3 Roberto Laura y Leonardo Vanni, *Time translation of quantum properties*. Foundations of Physics, 39, 160-173 (2009)
- 4 Leonardo Vanni y Roberto Laura, *La mecánica clásica como aproximación de la mecánica cuántica*. Epistemología e Historia de la Ciencia. Selección de Trabajos de las XIX Jornadas. Volumen 15, pags. 489-495 (2009)
- 5 C. J. Isham, *Lectures on Quantum Theory. Mathematical and Structural Foundations*. Imperial College Press (1995)
- 6 G. Birkhoff and J. Von Neumann, *Ann. Math.* 37, 823 (1936)
- 7 L. Ballentine, *Am. J. Phys.* 54, 883-889 (1986)
- 8 L. Ballentine, *Quantum Mechanics, A Modern Development*. World Scientific (1988)
- 9 W. H. Zurek, *Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?* Physical Review D, 24, 1516-1525 (1981)
- 10 N. Bohr, *Essays 1958-1962 on Atomic Physics and Human Knowledge*. Interscience Publishers (1963)
- 11 O. Pessoa Jr., *Conceptos de Física Cuántica*. Editora Livraria da Física (2005)
- 12 L. Vanni, *Historias Contextuales*. Tesis de Doctorado en Física, Universidad de Buenos Aires (2010)