EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIX JORNADAS
VOLUMEN 15 (2009)

Diego Letzen
Penélope Lodeyro

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La interpretación modal-hamiltoniana de la mecánica cuántica en relación con las transformaciones de Galileo

*Juan Sebastián Ardenghi** y *Mario Castagnino*†

1. Introducción

Durante las últimas décadas, las interpretaciones instrumentalistas tradicionales de la mecánica cuántica perdieron terreno frente a las interpretaciones realistas. Entre estas últimas, han cobrado relevancia las interpretaciones modales que, inspiradas en los trabajos de van Fraassen de los años '70 (1972, 1973, 19749, pueden considerarse una familia de interpretaciones, pues todas ellas comparten las siguientes características (*cfr.* Dieks 2007):

- Se basan en el formalismo standard de la mecánica cuántica.
- Son realistas: su propósito es describir cómo sería la realidad si la teoría fuese verdadera.
- La mecánica cuántica debe poder describir no sólo las partículas microscópicas sino también los objetos macroscópicos.
- La mecánica cuántica describe sistemas individuales y no *ensembles* de sistemas.
- El estado cuántico del sistema describe las propiedades que el sistema puede poseer y sus correspondientes probabilidades, y no las propiedades que actualmente posee.
- Una medición cuántica es una interacción física ordinaria. No hay colapso.
- La ecuación de Schrödinger describe la evolución temporal de las probabilidades, no de las propiedades actuales.

Estas interpretaciones difieren entre sí respecto de la regla de asignación de propiedades actuales al sistema (*cfr.* Dieks y Vermaas 1998).

Recientemente, nuestro grupo de investigación ha presentado un nuevo miembro de la familia modal, la interpretación modal-hamiltoniana (IMH), que se propone resolver las dificultades de las versiones anteriores y permitir la comprensión conceptual de fenómenos bien conocidos en la práctica de la física. En la formulación original de la IMH, las transformaciones de Galileo funcionan como una poderosa motivación para la elección de la regla de actualización propia de esta interpretación. En el presente trabajo nuestro propósito consiste en volver a analizar el vínculo entre la IMH y las transformaciones de Galileo, a fin de poner de manifiesto que el grupo de tales transformaciones permite redefinir la regla de actualización de un modo más general y, por tanto, más básico desde un punto de vista teórico. Además, argumentaremos que tal redefinición podría conducir, de un modo conceptualmente directo, a la extrapolación de la IMH a la teoría cuántica de campos.

2. Los dos postulados interpretativos básicos de la IMH

La formulación detallada de la IMH ha sido presentada en trabajos previos (Lombardi y Castagnino 2008; Castagnino y Lombardi 2008). Aquí sólo recordaremos, prescindiendo de

* CONICET – IAFE – UBA
† CONICET – IAFE – IFIR – UBA

tecnicismos, cómo la idea básica de la interpretación se plasma en dos postulados interpretativos básicos.

El nombre de la interpretación se debe al papel central que cumple el hamiltoniano del sistema cuántico en los postulados interpretativos. En particular, el hamiltoniano será decisivo en la definición de sistema cuántico y subsistema cuántico, y en la Regla de Actualización que selecciona las propiedades que adquieren valores actuales.

2.a) Sistemas y subsistemas

En la IMH, un sistema cuántico queda definido por su conjunto de observables (que representan propiedades posibles) y su hamiltoniano (que representa una de tales propiedades); el hamiltoniano cumple un papel protagónico en la ley dinámica de la teoría: la ecuación de Schrödinger, $|\varphi(t)\rangle = e^{-i(H/\hbar)t}|\varphi(0)\rangle$. Un sistema cuántico puede descomponerse en partes de muchas formas, pero no siempre las partes son, a su vez, sistemas cuánticos que cumplen con la ley dinámica de la teoría. Esto último sólo sucede cuando no existe interacción entre los subsistemas y, por lo tanto, el hamiltoniano H_T del sistema total puede expresarse como suma de los hamiltonianos H_1 y H_2 de los subsistemas componentes, $H_T = H_1 + H_2$. En este caso diremos que el sistema total es un sistema *compuesto*.

No obstante, la descomposición de un sistema cuántico no siempre es posible: puede suceder que el hamiltoniano H_T no pueda expresarse como una suma no trivial de hamiltonianos componentes. En este caso diremos que el sistema cuántico es *elemental*.

En definitiva, la IMH proporciona un criterio preciso para distinguir entre sistemas elementales y compuestos, y tal criterio se basa en el hamiltoniano del sistema.

2.b) Regla de actualización

Desde hace ya varias décadas es bien sabido que la contextualidad, expresada por el teorema de Kochen-Specker (1967), impide asignar de un modo consistente valores precisos a todos los observables de un sistema cuántico en un instante dado. Por lo tanto, toda interpretación realista está comprometida a seleccionar el contexto privilegiado, esto es, el conjunto de observables que adquieren valores definidos o, en otras palabras, el conjunto de propiedades posibles cuyos valores se actualizan.

La regla de actualización de la IMH se basa en el papel central que cumple el hamiltoniano en la ley dinámica de la mecánica cuántica. La idea básica puede expresarse en la máxima "*Ubi lex non distinguit, nec nos distinguere debemus*": donde la ley no distingue, tampoco debemos distinguir nosotros. Puesto que en este caso la "ley" es la ecuación de Schrödinger, que sólo contiene el hamiltoniano, es el hamiltoniano el que gobierna la actualización. Por lo tanto, la regla de actualización de la IMH establece que el contexto privilegiado de un sistema cuántico elemental está constituido por el hamiltoniano H y todos los observables que conmutan con H y no introducen entre las propiedades del sistema una discriminación más "fina" que la que introduce H (ver detalles técnicos en Lombardi y Castagnino 2008).

Sin duda, la IHM, como cualquier otra interpretación, no está determinada por la estructura formal de la teoría. La adopción de estos postulados interpretativos se basa en su fecundidad para brindar una respuesta adecuada al problema de la medición, tanto en su versión ideal como no-ideal, y para dar cuenta de situaciones físicas bien conocidas, como el átomo de Hidrógeno, los átomos multielectrónicos, el efecto Zeeman, la estructura fina, etc.

3. El papel de las transformaciones de Galileo

En la formulación original de la IMH, las transformaciones de Galileo cumplen un doble papel: (i) identificar los observables con significado físico (como posición, momento, momento angular total, spin, etc.), y (ii) para explicar el papel privilegiado del hamiltoniano en la teoría. Aquí nos concentraremos en el segundo aspecto.

Como es bien sabido, a cada teoría física corresponde un grupo de transformaciones de simetría, de modo tal que la ley dinámica resulta covariante –mantiene su forma– ante las transformaciones del grupo. En particular, a la mecánica cuántica corresponde el grupo de las transformaciones espaciotemporales de Galileo. A su vez, la invariancia del sistema ante tales transformaciones se sigue de las propiedades del espacio y del tiempo:

- La invariancia ante desplazamientos temporales expresa la homogeneidad del tiempo.
- La invariancia ante desplazamientos espaciales expresa la homogeneidad del espacio.
- La invariancia ante rotaciones espaciales expresa la isotropía del espacio.

La invariancia de la ecuación de Schrödinger ante desplazamientos temporales queda garantizada por la independencia del hamiltoniano respecto del tiempo. Sin embargo, en mecánica cuántica (no relativista) los campos no están "cuantizados", sino que se los trata como campos clásicos que actúan sobre el sistema "rompiendo" la homogeneidad y/o la isotropía del espacio. No obstante, a pesar de ello, la ley dinámica de la teoría, $|\varphi(t)\rangle = e^{-i(H/\hbar)t}|\varphi(0)\rangle$, debe permanecer covariante ante desplazamientos y rotaciones espaciales. En consecuencia, la ruptura de la homogeneidad y/o la isotropía del espacio debida a la acción de campos debe encontrarse "contenida" en la forma del hamiltoniano H: la no-homogeneidad del espacio implica la no-invariancia de H ante desplazamientos espaciales, la no-isotropía del espacio implica la no-invariancia de H ante rotaciones espaciales.

En resumen, el privilegio del hamiltoniano resulta de su papel en la ley dinámica de la teoría: H debe incorporar en su forma las asimetrías espaciales de cada situación particular a fin de preservar la covariancia de la ecuación de Schrödinger ante las transformaciones de Galileo.

4. La regla de actualización en términos del grupo de Galileo

En el apartado anterior hemos apelado al grupo de Galileo para dar cuenta de la posición privilegiada del hamiltoniano en la mecánica cuántica- No obstante, este argumento no vincula aún estrechamente el grupo de Galileo con la regla de actualización de la IMH. En este apartado abordaremos esta cuestión.

Comencemos por recordar que el grupo de Galileo es un grupo de Lie, y un operador que conmuta con todos los elementos de un grupo de Lie es un operador de Casimir del grupo[1]. Esto significa que los operadores de Casimir son invariantes ante todas las transformaciones del grupo de Lie. Además, también puede demostrarse que los autovalores de los operadores de Casimir etiquetan las representaciones del grupo.

Por otra parte, sabemos que la ecuación de Schrödinger es covariante ante el grupo de Galileo. Ahora bien, es claro que la regla de actualización debería manifestar la misma covariancia: si así no fuera, el mero desplazamiento o rotación espacial del sistema, o su movimiento a velocidad constante –situaciones indistinguibles de la situación original según la mecánica cuántica– modificarían el contexto privilegiado y, con ello, los observables cuyos valores se actualizan- Por lo tanto, parece razonable exigir que la regla de actualización sea tal que los operadores de Casimir del grupo de Galileo siempre pertenecieran al contexto privilegiado.

En el grupo de Galileo, los operadores de Casimir son[2]:

- El operador de masa $M = mI$, donde m es la masa e I es el operador de identidad.
- El operador S^2, con autovalores $s(s+1)$, donde s es el valor del spin.
- La energía interna $W = H - P^2/2m$, donde P es el momento.

Si la regla de actualización es invariante ante el grupo de Galileo, entonces M, S^2 y W deben pertenecer siempre al contexto privilegiado. El hecho de que las propiedades de masa y spin siempre adquieran valores definidos resulta totalmente razonable desde un punto de vista físico, puesto que son propiedades que pueden ser medidas en cualquier situación y que, se supone, los sistemas cuánticos siempre poseen. Además, la actualización de M y S^2 es compatible con la regla de actualización, ya que ambos operadores conmutan con el hamiltoniano H pero no rompen sus simetrías. El problema se presenta con la energía interna W, que no es el hamiltoniano H e incluso puede no conmutar con H. Esto parece entrar en conflicto con la IMH, ya que si W se actualiza por pertenecer al contexto privilegiado, H podría no actualizarse, en contradicción con la regla de actualización.

Sin embargo, el conflicto se resuelve cuando se toman en consideración ambos postulados básicos de la IMH. Distingamos dos situaciones:

(a) Cuando el sistema se define en el sistema de referencia de su centro de masa, el momento total P_c es igual a cero ($P_c = 0$) y, por tanto, la energía interna $W_c = H_c - P_c^2/2m$ se iguala al hamiltoniano ($W_c = H_c$); en esta situación, H_c resulta ser un operador de Casimir del grupo de Galileo y no existe conflicto alguno.

(b) Si ahora el sistema es puesto en movimiento a velocidad constante, adquiere un momento total P distinto de cero ($P \neq 0$), y el nuevo hamiltoniano H se "incrementa" en un valor $P^2/2m$ respecto del hamiltoniano H_c relativo al centro de masa ($H = H_c + P_c^2/2m$). En esta situación, la energía interna resulta:

$$W = H - P^2/2m = \left(H_c + P^2/2m\right) - P^2/2m = H_c$$

y, como no puede ser de otra manera, es igual a la energía interna W_c de la situación anterior, $W = W_c$. El problema parece surgir porque W en general no conmuta con el nuevo hamiltoniano H.

No obstante, cuando la supuestamente conflictiva situación (b) se analiza desde la perspectiva de las definiciones de sistema elemental y de sistema compuesto, la dificultad desaparece. En efecto, en dicha situación el hamiltoniano H del sistema es siempre la suma de un hamiltoniano

H_c relativo al centro de masa y un hamiltoniano $H_p = P^2/2m$ que representa la energía cinética total de traslación. Por lo tanto, de acuerdo con la IMH, el sistema cuántico completo S ya no es elemental sino compuesto por dos subsistemas:

- un sistema S_c, definido por el hamiltoniano H_c relativo al centro de masa, que representa la energía potencial.
- un sistema S_p, definido por el hamiltoniano $H_p = P^2/2m$, que representa la energía cinética de traslación.

  Ahora bien, dado que la regla de actualización se aplica a sistemas cuánticos elementales, según la IMH ambos subsistemas "actualizan" independientemente:

- en S_c, el hamiltoniano H_c adquiere un valor actual definido, al igual que en la situación (a).
- en S_p, el hamiltoniano H_p adquiere un valor actual definido y, con él, el operador P^2, proporcional a la energía cinética de traslación.

Esto significa que el sistema S_c es el mismo en las situaciones (a) y (b) y, por tanto, el contexto privilegiado no se modifica. Lo único que cambia al pasar de la situación (a) a la (b) es que aparece un nuevo sistema S_p que no interactúa con S_c, en el cual la energía cinética es el observable que adquiere valor definido. Este argumento es totalmente general: mediante un adecuado cambio de coordenadas, el hamiltoniano de cualquier sistema puede escribirse como:

$$H = V(Q) + P^2/2m = H_c + H_p$$

donde $H_c = V(Q)$ es la energía potencial total del sistema, que sólo depende de las posiciones relativas, y $H_p = P^2/2m$ es la energía cinética total del sistema, que sólo depende del momento total P.

Este resultado es el esperable en una teoría covariante ante el grupo de Galileo, en particular, ante la transformación de "*boost*" cuyo contenido puede expresarse de dos modos equivalentes. En efecto, la situación física de un sistema no varía:

- al pasar de un estado de reposo a un estado a velocidad constante (interpretación activa de la transformación).
- al ser descrito en cualquier sistema de referencia inercial (interpretación pasiva de la transformación).

donde, en ambos casos, reposo y velocidad constante se refieren al centro de masa del sistema. El punto que deseamos enfatizar aquí es que el hecho de que la estructura formal de la mecánica cuántica cumpla con el requisito de covariancia no asegura aún que también la interpretación lo hará, puesto que la interpretación agrega postulados –interpretativos– a la teoría original. Con el argumento del párrafo anterior hemos demostrado que *la IMH, con sus dos postulados básicos, también resulta covariante ante el grupo de Galileo*. Por lo tanto, el contexto privilegiado es invariante ante las transformaciones del grupo. En particular, el conjunto de los observables que adquieren valores definidos no se modifica con el cambio de sistema de referencia inercial.

El argumento desarrollado en este apartado sirve, además, a un propósito ulterior. Como hemos visto, la invariancia ante el grupo de Galileo implica que el paso de un sistema de referencia inercial a otro sólo modifica el hamiltoniano en un término aditivo que representa la energía cinética de traslación, de modo tal que la energía interna siempre se mantiene invariante, tal como corresponde a un operador de Casimir del grupo. Según la IMH, esta situación corresponde a dos sistemas no interactuantes entre sí, los cuales, por tanto, "actualizan" independientemente. Por lo tanto, la regla de actualización, originalmente formulada en términos del hamiltoniano, puede también formularse de un modo equivalente en términos de los operadores de Casimir del grupo de Galileo: el contexto privilegiado de un sistema cuántico elemental está constituido por los operadores de Casimir del grupo de Galileo y todos los observables que conmutan con ellos y no introducen entre las propiedades del sistema una discriminación más "fina" que la que ellos introducen. Respecto de la anterior, esta formulación resulta más básica desde un punto de vista teórico, puesto que no alude a un observable particular del sistema (el hamiltoniano) sino que apela a los operadores que definen el grupo de invariancia de la teoría.

5. Conclusiones y perspectivas

En el presente trabajo hemos demostrado que la IMH se vincula con el grupo de Galileo de un modo más estrecho que lo que permitía suponer su presentación original: no sólo la IMH resulta covariante ante las transformaciones del grupo, sino que su regla de actualización puede formularse en términos de los operadores de Casimir del grupo.

Esta reformulación de la regla de actualización abre, a su vez, nuevas perspectivas. Puesto que se trata de una formulación muy general, podría suponerse que la regla conserva su validez en otras teorías cuánticas cuyos grupos correspondientes ya no son el grupo de Galileo. En particular, en la teoría cuántica de campos el grupo de transformaciones es el de Poincaré, cuyos dos únicos operadores de Casimir son la masa $\mathcal{M}$, con autovalores m, y el cuadrado del spin $\mathcal{S}^2$, con autovalores $s(s+1)$. La regla de actualización aplicada a este caso establecería que las propiedades masa y spin siempre adquieren valores actuales definidos m y s respectivamente. Este resultado se encuentra en completa consonancia con los supuestos de la teoría cuántica de campos, donde: (i) la teoría de grupos juega un papel protagónico en la formulación teórica, y (ii) el supuesto del carácter actual de los valores de masa y spin está a la base de la clasificación de las partículas elementales en función de dichos valores. Ciertamente, estas consideraciones distan de una completa interpretación de la teoría cuántica de campos; no obstante, estas conclusiones preliminares indican que la extrapolación de la IMH a la teoría cuántica de campos es un tema que merece ser estudiado.

Notas

[1] En un grupo de Lie, los elementos del grupo están etiquetados por un número finito de parámetros continuos que, en el caso del grupo de Galileo, son diez. Cada grupo de Lie tiene asociada un álgebra de Lie, formada por los generadores de los elementos del grupo, cada uno de los cuales puede ser exponenciado con su respectivo parámetro dando lugar a un elemento del grupo. A su vez, se pueden construir todos los polinomios entre estos generadores, formando el algebra envolvente universal del algebra de Lie. Justamente aquellos polinomios que conmutan con los generadores son los operadores de Casimir, que tienen la propiedad de caracterizar al grupo en cuestión.

[2] En realidad, deberíamos referirnos a los operadores de Casimir de la extensión central del álgebra de Lie del grupo de Galileo. Para hacer una extensión central de un álgebra de Lie debe agregarse un generador de otra álgebra, tal que la extensión central se conforme de un producto directo o semi-directo de las respectivas álgebras. En el caso de la extensión central del álgebra de Lie del grupo de Galileo, el generador que se agrega es un múltiplo de la identidad, al que se da el sentido físico de masa, y se definen los conmutadores entre este generador y los restantes.

Bibliografía

Castagnino, M. & Lombardi, O. (2008), "The role of the Hamiltonian in the interpretation of quantum mechanics", *Journal of Physics. Conferences Series*, en prensa.

Dieks, D. (2007), "Probability in modal interpretations of quantum mechanics", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 38: 292-310.

Dieks, D. & Vermaas, P. E. (1998), *The Modal Interpretation of Quantum Mechanics*, Dordrecht: Kluwer Academis Publishers.

Kochen, S. & Specker, E. (1967), "The problem of hidden variables in quantum mechanics", *Journal of Mathematics and Mechanics*, 17: 59-87.

Lombardi, O & Castagnino, M. (2008), "A modal-Hamiltonian interpretation of quantum mechanics", *Studies in History and Philosophy of Modern Physics*, 39: 380-443.

van Fraassen, B. C. (1972), "A formal approach to the philosophy of science", en R. Colodny (ed.), *Paradigms and Paradoxes: The Philosophical Challenge of the Quantum Domain*, Pittsburgh: University of Pittsburgh Press, 303-366.

van Fraassen, B. C. (1973), "Semantic analysis of quantum logic", en C. A. Hooker (ed.), *Contemporary Research in the Foundations and Philosophy of Quantum Theory*, Dordrecht: Reidel, 80-113.

van Fraassen, B. C. (1974), "The Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Synthese*, 29: 291-309.