El Método de Equivalencia de Cartan

Autor: Franco Rossi
Director: Aroldo Kaplan
Julio 2010

Resumen:

En este trabajo expondremos el método de equivalencia de Cartan, el cual es un procedimiento para distinguir cuando dos estructuras geométricas son localmente equivalentes. Aplicaremos el método a distintos ejemplos enfocándonos en las variedades subriemannianas de tipo (2,3).

Clasificación:

22E05 Local Lie Groups
53B99 Local Differential Geometry

Palabras Claves: Equivalencia, Reduccin, Prolongacin, G-estructuras

Índice

Introducción

El Método de Equivalencia es un procedimiento para determinar cuando dos estructuras geométricas son equivalentes bajo difeomorfismos de la variedad subyacente. Este fue introducido por E. Cartan en 1909, y luego desarrollado y aplicado por matemáticos como Chern, Sternberg, Guillemin, Kodaira, Spencer, Griffiths, Bryant, Gardner y otros.

Regresaremos al significado de estructuras geométricas más tarde pero tengamos en cuenta que estas incluyen a las variedades riemannianas, distribuciones, fibrados, subclases de estas y más generalmente sistemas diferenciales exteriores. De hecho Gardner describe al método como "un procedimiento para encontrar los invariantes de objetos geométricos bajo pseudogrupos definidos por EDP de primer orden".

Por difeomorfismos, queremos decir difeomorfismos locales: más precisamente, la equivalencia es considerada entre gérmenes de estructuras geométricas.

El problema de equivalencia de sistemas de EDP fue la preocupación principal de Lie, por la cual desarrolló su teoría de grupos de Lie, la cual es la herramienta fundamental en el Método de Cartan. Especificamente, para la geometría diferencial, el método se convierte en una continuación de las ideas de Klein sobre geometría como el estudio de propiedades invariantes por ciertos grupos. Como dice Dieudonne:

"Finalmente, es apropiado mencionar la más inesperada extensión de las ideas de Klein en geometría diferencial. Él ha visto a los grupos de isometrías de espacios Riemannianos como posibles campos de estudio de su programa, pero en general un espacio Riemanniano no admite ninguna isometría excepto por la identidad. A través de una extremadamente original generalización, É. Cartan fue capaz de mostrar que también aquí la idea de 'operacción' juega un rol fundamental; pero es necesario reemplazar el grupo por un objeto más complejo, llamado 'fibrado principal'; uno puede brevemente representarlo como una familia de grupos isomórficos, parametrizados por los diferentes puntos en consideración; la acción de cada uno de estos grupos le asocia objetos de una naturaleza infinitesimal' (vectores tangentes, tensores, formas diferenciales) a un mismo punto; y es en subir a la fibra' que É. Cartan fue capaz de inagurar una nueva era en el estudio (local y global) de los espacios Riemannianos y sus generalizaciones".

El propósito de este trabajo es explicar el método, ilustrándolo con varios ejemplos, uno de ellos relativamente reciente [Hughens 1995], en el cual daremos los invariantes de esta estructura geométrica. En el proceso completamos y a veces corregimos enunciados de la literatura.

Brevemente el método comienza encodificando la estructura geométrica en término de "comarcos adaptados" los cuales forman una G-estructura $B(E) \to M$. Luego aplicamos los procesos de reducción y prolongación, los cuales producen nuevos fibrados que preservan la equivalencia. Al final, se espera llegar a una e-estructura, es decir, una variedad con un comarco distinguido salvo por la acción de un grupo discreto. Finalmente de este comarco se extraen los invariantes de la estructura geométrica original y condiciones necesarias y suficientes para que un modelo sea maximalmente simétrico.

Capítulo I: El problema de equivalencias de Elie Cartan

Tal como dijimos en la introducción, el problema de equivalencia que estudia Cartan es local, es decir, sobre gérmenes de estructuras geométricas (riemannianas, distribuciones, etc.). Más específicamente, dadas dos tales estructuras E_1, E_2 del mismo tipo, definidas en entornos de puntos p_1, p_2 se trata de determinar cuando existe un difeomorfismo de un entorno de p_1 a un entorno de p_2 que intercambie E_1 y E_2. Su método comienza por expresar el problema en término de formas diferenciales y grupos de Lie.

Por ejemplo, en el caso de estructuras riemannianas g, h una equivalencia es una isometría entre g sobre un abierto U, y h sobre un abierto V. Escribiendo localmente $g = \sum \phi_i^2$, $h = \sum \psi_i^2$ en comarcos adecuados ϕ y ψ, un difeomorfismo f entre (U, g) y (V, h) es una isometría si existe una función suave $\gamma : U \to O(n)$ tal que $f^*\psi = \gamma\phi$.

Más generalmente, sea G un subgrupo de Lie conexo de $GL(n, R)$ y sean ω_U y Ω_V dos vectores columnas de 1-formas independientes $(\omega_U^1 ... \omega_U^n)$ y $(\Omega_V^1 ... \Omega_V^n)$ en U y V respectivamente, para ciertos abiertos $U \subset M$ y $V \subset N$. El problema de equivalencia consiste en encontrar condiciones necesarias y suficientes para que exista un difeomorfismo $\phi : U \to V$ tal que

$$\phi^*\Omega_V = \gamma_{VU} \cdot \omega_U$$

donde $\gamma_{VU} : U \to G$ y "$\cdot$" denota multiplicación matricial.

El primer paso es levantar el problema a $U \times G$ y $V \times G$, donde tenemos definida una acción a derecha natural:

$$(u, S) \cdot C := (u, SC)$$

Para esto consideraremos las proyecciones naturales $\pi_U : U \times G \to U$ y $\pi_V : V \times G \to V$, con ellas podemos asociarles a los comarcos ω_U y Ω_V nuevas 1-formas valuadas en R^n:

$$\Omega\mid_{(v,T)} = T^{-1}\pi_V^*\Omega_V \qquad\qquad \omega\mid_{(u,S)} = S^{-1}\pi_U^*\omega_U$$

1.1 Proposición: *Existe un difeomorfismo $\Phi : U \to V$ que satisface*

$$\Phi^*\Omega_V = \gamma_{VU}\omega_U$$

para alguna función suave $\gamma_{VU} : U \to G$ si y solo si existe un difeomorfismo $\Phi^1 : U \times G \to V \times G$ tal que $\Phi^{1*}\Omega = \omega$ Además, el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \Phi^1 & \\ U \times G & \longrightarrow & V \times G \\ \pi_U \downarrow & & \pi_V \downarrow \\ U & \longrightarrow & V \\ & \Phi & \end{array}$$

Más aún, Φ^1 es única y satisface $\Phi^1(u, SC) = \Phi^1(u, S) \cdot C$

Demostración:

$\Leftarrow$) $\Phi^1 : U \times G \to V \times G$ esta dada por

$$\Phi^1(u, S) = (\tilde{\Phi}(u, S), T(u, S))$$

con $\tilde{\Phi}(u, S) \in V$ y $T(u, S) \in G$. La condición $\Phi^{1*}\Omega = \omega$ dice que:

$$\Phi^{1*}T^{-1}\pi_V^*\Omega_V = S^{-1}\pi_U^*\omega_U$$

o sea

$$(\pi_V \circ \Phi^1)^*\Omega_V = (T \circ \Phi^1)^{-1}S\pi_U^*\omega_U$$

o sea

$$\tilde{\Phi}^*\Omega_V = T(u, S)S^{-1}\pi_U^*\omega_U \tag{1}$$

Como Ω_V contiene una base para las 1-formas en V se tiene que $\Omega_V(x) = 0 \implies x = 0$
para todo $x \in T(V)$.

Por otra parte, $\pi_U^*\omega_U(y) = \omega_U \circ d\pi_U(y) = \omega_U(0) = 0$ para todo $y \in T(G)$. Todo esto junto con (1) implican que $d\Phi(y) = 0$ para todo $y \in T(G)$. Lo que significa que las derivadas de $\Phi(u, S)$ con respecto a las variables en S son cero. Como G es conexo, se tiene que $\Phi(u, S) = \Phi(u)$. Luego tomando:

$$\gamma_{VU} = T(u, S)S^{-1}$$

se tiene la equivalencia buscada.

$\Rightarrow$) Dada $\Phi : U \to V$ definimos:

$$\Phi^1(u, S) = (\Phi(u), \gamma_{VU}(u)S)$$

se tiene que:

$$\Phi^{1*}\Omega \mid_{(\Phi(u), \gamma_{VU}S)} = S^{-1}\gamma_{VU}^{-1}\Phi^*\Omega_V = S^{-1}\gamma_{VU}^{-1}\gamma_{VU}\omega_U = S^{-1}\omega_U = \omega.$$

Finalmente se ve, usando la expresión explícita para Φ^1, que:

$$\pi_V \circ \Phi^1 = \Phi \circ \pi_U \qquad\qquad \Phi^1(u, SC) = \Phi^1(u, S) \cdot C$$

QED

Capítulo II: G-estructuras:

2.1 Fibrados:

2.1.1 Definición: Sean B,M y E tres variedades diferenciables, y sea $\pi : B \to M$ un mapa C^∞ suryectivo. Decimos que (B, M, π, E) es un *fibrado* si para cada $x \in M$ existe un abierto $U \subset M$ y un difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ que satisface $\pi = proj_1 \circ \phi$, donde $proj_1 : U \times E \to U$ es la proyección usual.
En tal caso, B se denomina el *espacio total*, M la *base* y E la *fibra*. Se dice que el par (U, ϕ) es una *trivializacion local* de nuestro fibrado.

2.1.2 Definición: Se dice que (B', M, π', E) es un *subfibrado* de (B, M, π, E) si es un fibrado y existe $\phi : B' \to B$ tal que:
i) (B', ϕ) es una subvariedad de B
ii) $\pi' = \pi \circ \phi$.

2.1.3 Definición: Un *fibrado vectorial* es un fibrado cuyas fibras son espacios vectoriales y la aplicación $\phi : \pi^{-1}(x) \to E$, inducida por una trivialización local, es un isomorfismo. Si $E = R^k$ entonces se dice que (B, M, π, E) es un *fibrado real de rango k.*

2.1.4 Definición: Sea B una variedad diferenciable y G un grupo de Lie. Una función $\varphi : B \times G \to B$ C^∞ es una *acción a derecha* si:
$i)\varphi(\varphi(m, a), b) = \varphi(m, ab)$
$ii)\varphi(m, e) = m \qquad \forall\ a, b \in G$ y $\forall\ m \in M.$

Escribiremos $\phi(m, a)$ como ma o $a \cdot m$ según convenga.

2.1.5 Definición: Sean B y M variedades diferenciables, $\pi : B \to M$ C^∞ y sobre. Sea G un grupo de Lie actuando a derecha sobre B. Entonces (B, M, π, G) es un *G- fibrado principal* (también se dice que B *es un fibrado principal sobre* M *con grupo estructural* G) si (B, M, π, G) es un fibrado y para cada trivialización local $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tomando $b \in \pi^{-1}(U)$, $a \in G$ y escribiendo $\psi(b) = (\pi(b), \eta(b))$ se satisface:

$$\psi(a \cdot b) = (\pi(b); a \cdot \eta(b))$$

con $a \cdot \eta(b) = \eta(b)a$ donde el último producto es el del grupo.

2.1.6 Definición: Sean B_1 un G_1-fibrado principal y B_2 un G_2-fibrado principal, ambos sobre M. Decimos que una $f : B_1 \to B_2$ C^∞ es un *ρ-homomorfismo* si $f(a \cdot p_1) = \rho(a) \cdot f(p_1)$. Donde $\rho : G_1 \to G_2$ es un homomorfismo de grupos de Lie.

2.1.7 Definición: Un *isomorfismo de fibrados* es un difeomorfismo que es un homomorfismo.

2.1.8 Definición: Sea M una variedad diferenciable de dimension n. Un *comarco* en el punto x $\in$ M es un isomorfismo lineal $\theta_x : T_xM \to R^n$.

Esto es equivalente a la elección de una base del espacio cotangente, por lo que pensaremos a los comarcos como vectores columnas de funcionales lineales en T_xM.

A lo largo de este trabajo, dado $g \in GL(n, R)$, denotaremos por $\theta_x \cdot g$ a $g^{-1}\theta_x$ donde en el último término estamos considerando la multiplicación usual de matrices.

2.1.9 Proposición: *El conjunto F^*M de todos los comarcos en M tiene una estructura de fibrado principal, tomando la proyección natural $\pi : F^*M \to M$ y como grupo estructural a $GL(n, R)$, actuando a derecha de la siguiente forma: $\theta_x \cdot g = g^{-1}\theta_x$.*

Demostración:

Sea $TM \to M$ el fibrado tangente sobre M. El espacio de todos los comarcos en x, denotado por E_x, tiene una acción natural a derecha del grupo $GL(k)$:

$$g^{-1} \circ \rho : T_xM \to R^k$$

con $g \in GL(k)$ y $\rho \in E_x$. Claramente esta acción es libre y transitiva en E_x.

El fibrado de comarcos en TM denotado por $F^*(TM)$ es la unión disjunta

$$\coprod_{x \in M} E_x$$

cada punto en este nuevo fibrado es un par (x, ρ) con $x \in M$ y ρ un comarco en x, lo que define una proyección $\pi : F^*(TM) \to M$ la cual manda (x, ρ) a x.

$F^*(TM)$ puede ser dotado de una topología y una estructura de fibrado a partir de la de TM. Sea (U_i, ϕ_i) una trivialización local de TM. Entonces para cada $x \in U_i$ tenemos un isomorfismo lineal $\phi_{i,x} : T_xM \to R^k$. Esto nos da una biyección:

$$\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times GL(k)$$

dada por $\psi_i(x, \rho) = (x, \phi_{i,x} \circ (\rho)^{-1})$. Con esta biyección $\pi^{-1}(U_i)$ hereda la topología de $U_i \times GL(k)$. La topología y la estructura C^∞ en $F^*(TM)$ son las finales inducidas por los mapas de inclusión $\pi^{-1}(U_i) \to F^*(TM)$. Por simplicidad, denotaremos a $F^*(TM)$ por $F^*(M)$.

Notación: La acción a derecha por un elemento g es muchas veces denotada por $R_g\theta_x$ en vez de $\theta_x \cdot g$.

2.1.10 Definición: Sea G un subgrupo de Lie de $GL(n, R)$ y M una variedad diferenciable. Una
G-estructura en M es un subfribado $B \subset F^*M$ con grupo estructural G. Un campo comarco *adaptado* o *geométricamente admisible* es una sección local de B.

2.1.11 Ejemplo: Métricas Riemannianas

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con una métrica Riemanniana $<\cdot,\cdot>$. Esta métrica induce una transformación lineal:

$$\mu : T_mM \to T_m^*M$$

$$x \to \mu_x$$

donde $\mu_x(y) :=< x, y >$. Como la métrica es no-degenerada entonces μ resulta inyectiva y por dimensiones un isomorfismo de espacios vectoriales. De esta forma podemos inducir una métrica $B(\cdot, \cdot)$ en T^*M

$$B(\mu_x, \mu_y) :=< x, y >$$

Denotaremos por B_q al conjunto de todos los comarcos $\theta = (\theta^1, ..., \theta^n)$ en q que son ortonormales con respecto a este producto interno. Estos son precisamente los comarcos tales que $< \cdot, \cdot >= \sum(\theta^i)^2$. Esto es equivalente a decir que los $\theta \in B_q$ son isometrías entre $(T_qM, < \cdot, \cdot >)$ y $(R^n, < \cdot, \cdot >_{can})$. Ahora tomando $B = \bigcup B_q$, B resulta una $O(n)$-estructura sobre M.

Recíprocamente, toda $O(n)$-estructura sobre M, define una única métrica en m que hace ortonormales a los comarcos en B, como veremos a continuación.

Dado $m \in M$, sea (θ, U) un campo comarco tal que $m \in U$. Definimos una métrica en U por
$< \cdot, \cdot >_U := \sum(\theta_i)^2$. Veamos que esta definición no depende del comarco elegido. Sea $(\tilde{\theta}, V)$ un campo comarco con $m \in V$. Podemos suponer $U = V$ restringiendo ambos comarcos a $U \cap V$. Ambas secciones estan relacionadas por una función C^∞, $A : U \to O(n)$ de manera que: $\tilde{\theta} = A \cdot \theta$.

Definimos $< \cdot, \cdot >_U^{'} := \sum(\tilde{\theta}_i)^2$. Entonces,

$$< \cdot, \cdot >_U = \sum(\theta_i)^2 =$$

$$< (\theta_1, ..., \theta_n), \theta_1, ..., \theta_n) >_{can} =< A \cdot (\theta_1, ..., \theta_n), A \cdot (\theta_1, ..., \theta_n) >_{can} =$$

$$< (\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_n), (\tilde{\theta}_1, ..., \tilde{\theta}_n) >_{can} = \sum(\tilde{\theta}_i)^2$$

Hemos visto que dos secciones de B definen una misma métrica en un entorno de común definición. Y por lo tanto en todo M tomando un cubrimiento por estos entornos.

Observemos que una orientación en M reduciría $O(n)$ a $SO(n)$.

2.1.12 Ejemplo: Distribuciones

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n con una distribución D de dimensión k. Sabemos que $D_p \subset T_pM$ y $D_p^\perp \subset T_p^*M$ siendo $D_p^\perp = \{\omega \in T_p^*M : \omega \mid_D \equiv 0\}$ con $dim(D_p^\perp) = n-k$. La dualidad entre D_p y $D_p^\perp$ nos motiva a definir los siguientes comarcos:

$$B_q = \{(\eta^1, ...\eta^k, \theta^1, ..., \theta^{n-k}) : \theta^1, ..., \theta^{n-k}|_D \equiv 0 \quad y \quad (\eta^1, ...\eta^k, \theta^1, ..., \theta^{n-k}) \quad es \quad base \quad de \quad T_p^*M\}$$

El grupo estructural G está formado por las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a \in GL(k)$ $c \in GL(n-k)$ y $b \in M(k \times (n-k))$. Finalmente, nuestra G-estructura es $B = \bigcup_{q \in M} B_q$

2.1.13 Ejemplo: Distribuciones con Métricas y Estructuras Sub-riemannianas

Este ejemplo es una combinación de los dos ejemplos anteriores. A las hipótesis del ejemplo anterior debemos agregar una métrica $< \cdot, \cdot >$ en D. Las η_i forman una base de D_p^* por lo que podemos restringirnos a aquellas tales que

$$< \cdot, \cdot >= \sum (\eta_i)^2$$

Esto modifica el grupo del ejemplo anterior por el subgrupo $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $a \in O(k)$ $c \in GL(n-k)$ y $b \in M(k \times (n-k))$

Si la distribución es de Carnot-Caratheodory, se obtiene una estructura *sub-riemanniana*. $\blacksquare$

2.2 La 1-forma tautológica

En una G-estructura $B(M)$, una trivialización local induce un campo comarco $\omega_U(u)$ en U por
$(u, \omega_U(u)) := \Gamma^{-1}(u, e)$.

Recíprocamente, si tenemos un campo comarco ω_U en U entonces esto nos induce una trivialización local de $B(M)$. Tomemos una trivialización $U \times G$ que mande $b = (m, f)$ a $\tilde{\Gamma}(b) = (m, \tilde{g})$. Sea $\tilde{\omega}_U(u)$ el comarco inducido por $\tilde{\Gamma}^{-1}(u, e)$, notemos que $b = \tilde{\Gamma}^{-1}(m, \tilde{g}) = \tilde{\Gamma}^{-1}((m, e) \cdot \tilde{g}) = \tilde{\Gamma}^{-1}(m, e) \cdot \tilde{g} = (m, \tilde{g}^{-1}\tilde{\omega}_U)$ es decir que $f = \tilde{g}^{-1}(b)\tilde{\omega}_U(m)$. Como ambos $\tilde{\omega}_U$ y ω_U son comarcos adaptados existe una función C^∞ $g' : U \to G$

tal que $\tilde{\omega}_U(u) = g'(u)\omega_U$. Definimos ahora una $\Gamma : B(U) \to U \times G$ dada por $\Gamma(b) = \Gamma(m, f) = \Gamma(m, g^{-1} \cdot \omega_U(m)) = m \times g$. Para ver que es C^∞ basta ver que $g : B(U) \to G$. Recordemos que $f = (\tilde{g}(b))^{-1}\tilde{\omega}_U(m)$, y por otra parte $f = (g(b))^{-1} \cdot \omega_U(m)$. Como $f = (\tilde{g}(b))^{-1}\tilde{\omega}_U(m) = (\tilde{g}(b))^{-1}(g'(m))^{-1}\omega_U = (g'(m)\tilde{g}(b))^{-1}\omega_U$ tenemos $g(b) = g'(m)\tilde{g}(b)$, es decir que g es composición de funciones C^∞.

Dado que estamos estudiando equivalencias locales podemos tomar una trivialización local de $B(M)$. Por los comentarios anteriores pensaremos a esta trivialización como un par (U, ω_U). Como ya notamos al comienzo de este trabajo el campo comarco induce una 1-forma en $U \times G$ haciendo $\omega_{|(u,S)} = S^{-1}\pi_U^*\omega_U$. En apariencia esta forma depende del comarco, pero en realidad es una forma definida canónicamente en el fibrado que ha sido expresada en términos de una trivialización en particular.

2.2.1 Definición: Sea B una subvariedad de F^*M definimos la *1-forma tautológica* Θ:

$$\Theta_b(V) := b(d\pi_b(V)) \qquad \forall\; b \in B \text{ y } V \in T_bB$$

2.2.2 Definición: Sean B y M dos variedades diferenciables, y $\pi : B \to M$ una submersión. Consideremos la fibra $B_m := \pi^{-1}(m)$. El teorema de la función implícita nos asegura que la fibra es un variedad. Su espacio tangente V_q, es lo que se conoce como *espacio vertical* en q.

Es claro que $V_q := T_q(B_m) = ker(d\pi_q)$

2.2.3 Definición: Una forma α en un fibrado $B \to M$ se dice *semi-básica* si $i_X\alpha = 0$ siempre que X sea vertical.

2.2.4 Proposición: *La 1-forma tautológica satisface las siguientes propiedades:*

1)$(R_g)^*\Theta = g^{-1} \circ \Theta$ *(Equivariancia)*

2)$\Theta(X) = 0$ para todo X vertical (Semi-básica)

3) $f^*\Theta = f$*, para cualquier sección local* $f : U \subset M \to B$ *(Propiedad de Reproducción).*

Demostración:

1) $(R_g^*\Theta)_b(V) = \Theta_{R_gb}((dR_g)_bV) = g^{-1}b(d\pi_b \circ (dR_g)_bV) = g^{-1}b(d(\pi_b \circ R_g)_bV)$
$= g^{-1}b(d\pi_bV) = g^{-1} \circ \Theta_b(V)$

2) $\Theta_b(V) = b(d\pi(V)) = b(0) = 0$

3) $(f^*\Theta)_m(V) = \Theta_{f(m)}(dfV) = f(m)((d\pi)_{f(m)} \circ (df)_m V) = f(m)((d(\pi \circ f))_m V) = f(m)((d(id))_m V) = f(m)(V)$

QED

Las formas semibasicas en B forman un módulo tomando como anillo a $C^\infty(B)$. La propiedad 2) de la proposición anterior implica que toda k-forma semi-básica se escribe

$$\alpha = \sum a_{i_1 \dots i_k} \Theta_{i_1} \wedge \dots \wedge \Theta_{i_k}$$

Sean M y N dos variedades diferenciables, y sea $\phi : M \to N$ un difeomorfismo. ϕ induce un isomormismo de fibrados $\phi^{'} : F^*(M) \to F^*(N)$ de la siguiente forma, si $b = (m, f)$ con f un comarco en m, entonces:

$$\phi^{'}(b) = f \circ (d\phi_m)^{-1}$$

2.2.5 Definición: Sean M y N variedades diferenciables, y sean $B(M)$ y $B(N)$ G-estructuras sobre M y N respectivamente. Entonces decimos que $B(M)$ y $B(N)$ son *equivalentes* si $\exists$ un difeomorfismo $\phi : M \to N$ tal que el isomorfismo de fibrados inducido $\phi^{'}$ satisface:

$$\phi^{'}(B(M)) = B(N)$$

2.2.6 Dos definiciones:

Hasta ahora tenemos dos nociones de equivalencia, por un lado la equivalencia de G-estructuras y por otro la equivalencia planteada por Cartan para pares entorno-comarco de la forma (U, ω_U). En una G-estructura ambas definiciones cobran sentido si para la última consideramos una trivialización local. Es natural preguntarse entonces si las definiciones coinciden y como veremos a continuación en efecto así sucede.

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $B(U) \simeq U \times G$ y $B(V) \simeq V \times G$

Observemos el mapa Φ^1 dado por:

$$\Phi^1 := \Gamma_2 \circ \phi' \circ \Gamma_1^{-1} : U \times G \to B(U) \to B(V) \to V \times G$$

$$(u, g) \to (u, g^{-1} \cdot \omega_U(u)) \to (\phi(u), (g^{-1} \cdot \omega_U(u)) \circ (d\phi_u)^{-1}) = (\phi(u), (g')^{-1} \Omega_V(\phi(u))) \to (\phi(u), g')$$

Calculamos:

$\Phi^{1*}\Omega = \omega$
$\Phi^{1*}(g' \pi_V^* \Omega_V) = g\omega_U$

$(\pi_V \circ \Phi^1)^*\Omega_V = (g')^{-1}g\omega_U$
$\phi^*\Omega_V = (g')^{-1}g\omega_U$

Por lo tanto, si tenemos una equivalencia local de fibrados, vemos que definiendo: $\gamma_{VU} = (g')^{-1}g$ se tiene que el mapa ϕ es una equivalencia en el sentido de Cartan.

Por otra parte, si tenemos una equivalencia en el sentido de Cartan, vemos que: $g' = g\gamma_{VU}^{-1}$
con lo que el mapa Φ^1 definido anteriormente coincide con el de la demostración de teorema 1.2 (levantamiento). Por lo tanto, $\Phi^1 : U \times G \to V \times G$ es un difeomorfismo y consecuentemente también lo es $\phi' = \Gamma_2^{-1} \circ \Phi^1 \circ \Gamma_1 : B(U) \to B(V)$ por lo que se satisface la definición para fibrados $\phi'(B(U)) = B(V)$.

Una equivalencia $\phi^{'} : B(M) \to B(N)$ necesariamente preserva las 1-formas tautológicas correspondientes: $(\phi^{'})^*(\Theta_N) = \Theta_M$ Un resultado esencial para el método de equivalencias es una versión (semi) global de 1.2, la cual enunciamos a continuación.

2.2.7 Proposición: *Sean $B(M) \to M$ y $B(N) \to N$ dos G-estructuras con G conexo, y sea*
$\Phi : B(M) \to B(N)$ una función C^∞. Entonces Φ preserva la 1-forma tautológica ($\Phi^*(\Theta_N) = \Theta_M$) si y solo si existen difeomorfismos locales ϕ de M en N tal que $\Phi = \phi^{'}$.

Más precisamente, esto significa que para todo $b \in B(M)$ existen entornos U de $\pi(b)$ y V de $\pi(\Phi(b))$ y un difeomorfismo $\phi : U \to V$ tal que $\phi^{'} = \Phi_{\pi^{-1}(U)}$.

Esto se puede tomar como definición de "equivalencia local de G-estructuras" aplicable a gérmenes de las mismas: los gérmenes de las G -estructuras en $\pi(b)$ y $\pi(\Phi(b))$ son equivalentes. Esto codifica la noción de "equivalencia local de estructuras geométricas" de la que hablamos anteriormente en término de G-estructuras.

Demostración: Basta tomar una trivialización local y aplicar Prop. 1.2.

2.3 La Ecuación Estructural:

2.3.1 Definición: Sea G un grupo de Lie con $Lie(G) = \mathrm{g}$. Definimos la siguiente g-valuada 1-forma ω haciendo: $\omega(v) := d(L_{g^{-1}})v$ donde $g \in G$ y $v \in T_gG$. ω es llamada la *forma de Maurer-Cartan.*

Observemos que la acción de G permite identificar el espacio vertical con el álgebra de Lie de G. Esta identificación manda $\xi \in \mathrm{g}$ a

$$\xi_B(b) = d/dt|_{t=0} b \cdot exp(t\xi)$$

con $b \in B$. Si pensamos al comarco b como una matriz, la ecuación anterior es de la forma $-\xi \circ b$. Diremos que una g-valuada 1-forma A *coincide con la forma de Maurer-Cartan al restringirla a la fibra* si $A(\xi_B) = \xi$.

2.3.2 Definición: Sea B una G-estructura sobre alguna variedad, sea $\mathrm{g} = \mathrm{Lie(G)}$, $dim(G) = r$. Una 1-forma con valores en g es una *pseudo-conección* si su restricción a la fibra $B_q \cong G$ coincide con la forma de Maurer-Cartan.

2.3.3 Lema: *Sea Θ la 1-forma tautológica en $B \to M$ y sea A una pseudo-conección para $B \to M$. Entonces:*

$$d\Theta = -A \wedge \Theta + T$$

donde T es una 2-forma semi-básica.

Demostración:
Sea $g = exp(t\xi)$. Derivando la propiedad de equivariancia $R_g^*\Theta = g^{-1} \circ \Theta$ obtenemos $L_{\xi_B}\Theta = -\xi \circ \Theta$. Como $\Theta(\xi_B) = 0$ entonces:

$$d\Theta(\xi_B, w) = (d \circ i_{\xi_B}\Theta + i_{\xi_B} \circ d\Theta)(w) = L_{\xi_B}\Theta(w) = -\xi(\Theta(w)) = -(A \wedge \Theta)(\xi_B, w)$$

Como cualquier vector vertical se puede expresar de la forma ξ_B, vemos que $d\Theta = -A \wedge \Theta + T$.

2.3.4 Definición: La 2-forma semi-básica del lema anterior T, se denomina *la torsión asociada a la pseudo-conección A.*

Ahora estudiaremos como cambia la torsión al variar la pseudo-conección. En lo que sigue denotaremos a R^n por V solo para simplificar la notación. Dadas dos pseudo-conecciones diferentes A y A', como ambas coinciden con la forma de Maurer-Cartan al ser restringidas a la fibra, tenemos que $\alpha = A' - A$ es semibásica. Es decir, $\alpha = \sum \alpha_i \Theta_i$ donde las α_i son funciones valuadas en g, y en consecuencia $\alpha_q \in \mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^*$, con $q \in B$. Supongamos que tenemos

$$T = d\Theta + A \wedge \Theta$$

$$T' = d\Theta + A' \wedge \Theta$$

Luego,

$$T' - T = \alpha \wedge \Theta$$

Lo que significa que el cambio $A \to A'$ induce un cambio $T \to T' = T + \alpha \wedge \Theta := T + \delta(\alpha)$

Para simplificar la notación, en lo que sigue denotaremos por V a R^n. Como en toda G-estructura, G es un subgrupo de Lie de $GL(V)$. Luego, $\mathrm{g} \subset \mathrm{gl(V)} = \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^*$

2.3.5 Lema *La forma $\alpha \wedge \Theta$ es la imagen de $\alpha \in \mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^*$ bajo la siguiente composición*

$$\delta : \mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^* \subset \mathrm{V} \otimes \mathrm{V}^* \otimes \mathrm{V}^* \to \mathrm{V} \otimes \Lambda^2\mathrm{V}^*$$

donde el último mapa es la proyección al cociente.
Demostración: δ es composción de mapas naturales que conmutan con las acciones naturales en cada factor.

2.3.6 Definición: El mapa $\delta : \mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^* \to \mathrm{V} \otimes \Lambda^2 \mathrm{V}^*$ es llamado *mapa torsión.* El *espacio de torsión* se define como el cociente:

$$H(\mathrm{g}) = (\mathrm{V} \otimes \Lambda^2 \mathrm{V}^*)/\mathrm{im}\ \delta(\mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^*)$$

Notación: Denotamos por $[T]$, a la imagen de T bajo la proyección $V \otimes \Lambda^2 V^* \to H(\mathrm{g})$. Si $T(b) = d\Theta(b) - A(b) \wedge \Theta(b)$ es la torsión asociada a A en un punto $b \in B$, entonces $[T(b)]$ es independiente de la elección de la pseudo-conección.

2.3.7 Definición: Denominamos a la proyección $[T(b)]$, *torsión intrínseca en* $b \in B$.

G actua en g por la representación adjunta. También actua en V pues $G \subset GL(V)$, en consequencia, actua en $\mathrm{g} \otimes \mathrm{V}^*$ y en $V \otimes \bigwedge^2 V^*$.

2.3.8 Lema: *La torsión es equivariante:* $[T(b \cdot g)] = [T(b)] \cdot g$

Demostración: Basta ver que $V \otimes V^* \to Hom(V, V)$ es equivariante. Este mapa está definido por $v \otimes \phi \to T_{v,\phi}$ donde $T_{v,\phi}(u) := \phi(u)v$. Se ve entonces que: $T_{g \cdot v, g^* \cdot \phi} = gT_{v,\phi}g^{-1} = Ad(g)T_{v,\phi}$

QED

Sea G grupo de Lie actuando en variedad F simple y transivamente, digamos a derecha. Para cada $b \in F$ hay un isomorfismo lineal $\mathrm{g} \to \mathrm{T_b(F)}$ que manda $X \in \mathrm{g} := \mathrm{Lie(G)}$ al vector $\tilde{X}_b$,

$$\tilde{X}_b f = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0} f(b \exp(tX)).$$

La inversa de ese isomorfismo es una 1-forma sobre F con valores en g, la forma de MC sobre F.

Sea G y F, F' como arriba y $\phi : F \to F'$ un difeo que conmuta con las acciones de G. Veamos que $\phi^*(MC') = MC$. Evaluamos el miembro izquierdo en un vector $\tilde{X}_b \in T_b(F)$:

$$(*) \qquad \phi^*(MC')(\tilde{X}_b) = MC'(\phi_*(\tilde{X}_b)).$$

Para $f \in C^\infty(\phi(b))$,
$\phi_*(\tilde{X}_b)f = \tilde{X}_b(f \circ \phi) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}(f \circ \phi)(b \exp(tX)) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}(f(\phi(b) \exp(tX))) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{t=0}(f(\phi(b) \exp(tX))$
$= \tilde{X}'_{\phi(b)} f,$

o sea que $\phi_*(\tilde{X}_b) = \tilde{X}'_{\phi(b)}$. Sustituyendo en (*),

$$\phi^*(MC')(\tilde{X}_b) = MC'(\tilde{X}'_{\phi(b)}) = X$$

Esto muestra que $\phi^*(MC')$ es la inversa de $X \mapsto \tilde{X}$, que es MC.

2.3.9 Lema: *La torsión intrínseca es preservada por equivalencias.*

Demostración: Sea $\Phi : B \to B'$ una equivalencia. Escribiendo las ecuaciones estructurales en B y B',

$$d\Theta = -A \wedge \Theta + T$$
$$d\Theta' = -A' \wedge \Theta' + T'$$

y usando que $\Phi^*\Theta' = \Theta$, se tiene:

$$0 = -(A - \Phi^* A') \wedge \Theta + (T - \Phi^* T')$$

Como Φ preserva la forma tautológica y la de Maurer-Cartan, $\Phi^* A'$ resulta una pseudo-conección. De esta manera, escribimos la ecuación anterior como:

$$\Phi^* T' = T + \delta(\Phi^* A' - A)$$

lo que concluye la demostracin del lema.

QED

Capítulo III: Reducción

A lo largo de este capítulo denotaremos por τ_U a la composición:

$$U \times G \to B \to H(g)$$

donde el primer mapa es una trivialización local y el último es la torsión intrínseca.

3.1 Definición: Un problema de equivalencia se dice de *tipo constante de primer orden* si $\tau_U(U \times G)$ es una única órbita de G en Π_g.

A partir de ahora solo consideraremos problemas de tipo constante de primer orden.

Bajo esta hipótesis $\tau_U(U \times G)$ se identifica con el espacio homogéneo $G_{\tau_0}\backslash G$, donde $\tau_0 = \tau_U(u_0, S_0)$. Como la torsión es equivariante el mapa:

$$\tau_U : U \times G \to G_{\tau_0}\backslash G$$

es C^∞ y de rango constante. El teorema de la función implícita nos dice que $\tau_U^{-1}(\tau_0)$ es una subvariedad de $U \times G$. La hipótesis de rango constante nos dice que si fijamos $\tau_0 \in H(\mathrm{g})$, entonces $\tau_U(u, e)$ esta en la órbita de G y para cada $u \in U$ existe un $C(u) \in G$ tal que

$$\tau_U(u, e) \cdot C(u) = \tau_0$$

Luego

$$\tau_U^{-1}(\tau_0) = \{(u, C(u)G_{\tau_0})|u \in U\}$$

y es una submersión en U.

Un τ_0-comarco modificado es una sección de $\tau_U^{-1}(\tau_0)$. El teorema de la función implícita también nos asegura la existencia de una sección local $\Gamma(u) = (u, \beta_U(u))$ con

$$\beta_U : U \to G$$

Recordemos que nuestra trivialización $U \times G$ provenía de elegir un campo comarco ω_U como identidad en G. De esta forma, la sección $(u, \beta_U(u))$ de $U \times G$ se corresponde con la sección local $\beta_U^{-1}\omega_U$ de $B(M)$.

Notemos que dada una equivalencia Φ^1 con $\Phi^1(u_0, S_0) = (v_0, T_0)$ entonces por lema 2.3.9:

$$\tau_0 = \tau_U(u_0, S_0) = \tau_V \circ \Phi^1(u_0, S_0) = \tau_V(v_0, T_0)$$

Este hecho será útil en la demostración de uno de los teoremas claves para el funcionamiento del método, el cual enunciaremos a continuación.

3.2 Teorema de Reducción: *Un mapa $\phi : U \to V$ induce una G-equivalencia si y solo si induce una G_{τ_0}-equivalencia entre τ_0-comarcos modificados dados por:*

$$\beta_U\omega_U \qquad\qquad \beta_V\Omega_V$$

Demostración: Sea Φ una equivalencia del problema original, tenemos que:

$$\Phi^*(\beta_V^{-1}\Omega_V) = (\beta_V \circ \Phi)^{-1}\gamma_{VU}\omega_U = (\beta_V \circ \Phi)^{-1}\gamma_{VU}\beta_U\beta_U^{-1}\omega_U$$

Definimos $\alpha_{VU} := (\beta_V \circ \Phi)^{-1}\gamma_{VU}\beta_U$, debemos ver que $\alpha_{VU} \in G_{\tau_0}$.
Sea Φ^1 la equivalencia "levantada" de Φ, se tiene que:
$\tau_0 = \tau_U(u, \beta_U(u)) = \tau_V \circ \Phi^1(u, \beta_U(u)) = \tau_V(\Phi(u), \gamma_{VU}(u)\beta_U) =$
$\tau_V(\Phi(u), (\beta_V \circ \Phi(u))(\beta_V \circ \Phi(u))^{-1}\gamma_{VU}(u)\beta_U) = \tau_0 \cdot ((\beta_V \circ \Phi(u))^{-1}\gamma_{VU}(u)\beta_U)$
Luego $(\beta_V \circ \Phi(u))^{-1}\gamma_{VU}(u)\beta_U$ pertenece a G_{τ_0}.

Recíprocamente dada una equivalencia: $\Phi^*(\beta_V^{-1}\Omega_V) = \alpha_{VU}(\beta_U^{-1}\omega_U)$ con $\alpha_{VU} \in G_{\tau_0}$.
Vemos que, $\Phi^*\Omega_V = (\beta_V \circ \Phi)\alpha_{VU}\beta_U^{-1}\omega_U$
Con $\beta_V \circ \Phi$ y β_U en G, y $\alpha_{VU} \in G_{\tau_0}$ que es un subgrupo de G. Luego $(\beta_V \circ \Phi)\alpha_{VU}\beta_U^{-1} \in G$.

QED

Sea $B \to M$ una G-estructura. Sea $b_0 \in B$ un comarco adaptado y sea $[T_0] = [d\Theta(b_0)] \in H(g)$ la torsión intrínseca de la G-estructura en b_0. Sea $G_1 \subset G$ el subgrupo de isotropía de $[T_0]$, es decir:

$$G_1 = \{g \in G : [T_0] \cdot g = [T_0]\}$$

Sea

$$B_1 = \{b \in B : [d\Theta(b)] \quad tiene \quad subgrupo \quad de \quad isotropia \quad G_1\}$$

Es claro que bajo la hipótesis de tipo constante de primer orden, B_1 resulta una G_1-estructura.

3.4 Definición: La G_1-estructura del lema anterior se denomina *reducción de B por el subgrupo $G_1 \subset G$*

Podemos ahora reenunciar el teorema de reducción en términos de fibrados.

3.5 Teorema de Reducción: *Sean B y B' G-estructuras, y sean B_1 y B'_1 reducciones de B y B' respectivamente, con grupo estructural G_1. Entonces B y B' son localmente equivalentes si y solo si B_1 y B'_1 son localmente equivalentes.*

3.6 Comentarios sobre la acción de G

Cartan observó que es más eficiente considerar acciones de álgebras de Lie en vez de grupos. Estas últimas pueden calcularse utilizando las llamadas identidades de Bianchi, que escensialmente son identidades que provienen de aplicar d^2.

Si miramos expresiones de la forma

$$d\Theta_i \qquad mod(base)$$

y si es necesario combinaciones de las mismas, obtendremos relaciones lineales para los coeficientes de torsión $\{T^k_{ij}\}$ y expresiones para los

$$dT^k_{ij} \qquad mod(base)$$

Estas últimas nos dicen como evolucionan los coeficientes de torsión a lo largo de la fibra. Con todo esto en consideración podemos ahora calcular la acción de g en el espacio de torsión. En el caso de las variedades subriemannianas de contacto de dimensión 3 daremos la acción de G en Π_g de manera explícita.

Capítulo IV: Prolongación

Sea $T_0 \in V \otimes \bigwedge^2 V^*$ un representante de la clase de equivalencia $[T_0] = [d\Theta(b_0)]$. La ecuación estructural toma la forma $d\Theta = -A \wedge \Theta + T_0$ para alguna pseudoconección A. Si A' es otra pseudoconección que satisface la ecuación anterior, entonces $\alpha = A' - A$ es semibásica y satisface $(A' - A) \wedge \Theta = 0$, es decir $\alpha \in ker(\delta)$. La pseudoconección A tiene $A_1, A_2, ...A_r$ entradas independientes, con $r = dim(g)$. Los pares $(\Theta, A_1, A_2, ...A_r)$ forman un comarco en B, es decir pertenecen a $F^*(B)$. Para construirnos un fibrado lo haremos diciendo cuales son sus fibras:

$$B^1(b) = \{(\Theta, A_1, A_2, ...A_r) : d\Theta = -A \wedge \Theta + T_0 \quad en \quad b\}$$

De esta forma definimos $B^1 = \bigcup_{b \in B} B^1(b)$

Tenemos que $A^{'} = A + \alpha$, luego $A_i^{'} = A_i + \sum a_{ij}\Theta^j$ para ciertos coeficientes a_{ij}. Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \Theta \\ A_1^{'} \\ : \\ A_r^{'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ a & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ A_1 \\ : \\ A_r \end{pmatrix}$$

El grupo estructural $G^{(1)}$ será el grupo aditivo $ker(\delta)$ pensado como matrices de la forma anterior (ver ecuación de arriba) que forman un subgrupo de $GL(n + r, R)$.

Sean B y $\tilde{B}$ G-estructuras, y sean T y $\tilde{T}$ representantes de la torsión en B y $\tilde{B}$ respectivamente. Tomando dos pseudo-conecciones A y $\tilde{A}$, con torsiones T y $\tilde{T}$, estamos fijando dos comarcos en B y $\tilde{B}$, y por ende, dos trivializaciones locales de sus prolongaciones. Lo que haremos a continución es buscar condiciones necesarias y suficientes para que el problema de equivalencia entre B y $\tilde{B}$ sea equivalente al problema de equivalencia en sus prolongaciones, (es decir, buscamos un "teorema de prolongación" que sea un análogo al teorema de reducción).

En términos de esta trivialización, una equivalencia local entre $B^{(1)}$ y $\tilde{B}^{(1)}$ es un mapa $\Phi : U \subset B \to V \subset \tilde{B}$ tal que:

$$\begin{pmatrix} \Phi^*\tilde{\Theta} \\ \Phi^*\tilde{A}_1 \\ : \\ \Phi^*\tilde{A}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ a & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ A_1 \\ : \\ A_r \end{pmatrix}$$

Dada una equivalencia entre $B^{(1)}$ y $\tilde{B}^{(1)}$, se tiene en particular que $\Phi^*\tilde{\Theta} = \Theta$ y por la proposición (2.2.7) B y $\tilde{B}$ resultan localmente equivalentes.

Recíprocamente, dada una equivalencia entre B y $\tilde{B}$, es decir un mapa $\Phi : B \to \tilde{B}$ tal que $\Phi^*\tilde{\Theta} = \Theta$, podemos obtener condiciones necesarias y suficientes para que

$\Phi^* \tilde{A} = A + ker(\delta)$ a partir de las ecuaciones estructurales:

$$d\Theta = -A \wedge \Theta + T \qquad\qquad y \qquad\qquad d\tilde{\Theta} = -\tilde{A} \wedge \tilde{\Theta} + \tilde{T}$$

simplemente restamos a la primera la traída para atrás de la segunda,

$$0 = d\Theta - \Phi^* d\tilde{\Theta} = -(A - \Phi^* \tilde{A}) \wedge \Theta + (T - \Phi^* \tilde{T})$$

Así obtenemos, $\Phi^* \tilde{A} = A + ker(\delta) \Leftrightarrow T - \Phi^* \tilde{T} = 0$
Hemos probado lo siguiente.

Teorema de Prolongación *Sean B y $\tilde{B}$ G-estructuras, y sean $B_T^{(1)}$ y $\tilde{B}_{\tilde{T}}^{(1)}$ las prolongaciones asociadas a T y $\tilde{T}$. Entonces, sus prolongaciones son equivalentes si y solo si B y $\tilde{B}$ lo son, bajo alguna equivalencia Φ tal que $\Phi^* \tilde{T} = T$.*

Capítulo V: e-estructuras

5.1 Definición: Una *e-estructura* es un G-fibrado principal con G un grupo discreto.

Luego de aplicar sucecivas reducciones y prolongaciones es probable que hayamos arribado a una e-estructura. Como el problema de equivalencia es local, trabajaremos sobre entornos U y V donde tendremos definido comarcos ω y Ω respectivamente.

Si tenemos una equivalencia:

$$\Phi^*\Omega = \omega$$

entonces, dado que $g^{(1)} = 0$, la ecuación estructural es:

$$d\omega^i = \sum \gamma^i_{jk}\omega^j \wedge \omega^k = \Phi^* d\Omega^i = \sum \Phi^*\Gamma^i_{jk}\Phi^*\Omega^j \wedge \Phi^*\Omega^k$$

de lo que se deduce que $\gamma^i_{jk} = \Phi^*\Gamma^i_{jk}$.

Sea ω un campo comarco en U y sea $f : U \to R$ una función de clase C^∞, definimos las siguientes "derivadas covariantes" de f:

$$df = \sum f_{|i}\omega^i$$

Análogamente, si tenemos $g : V \to R$ definimos:

$$dg = \sum g_{|i}\Omega^i$$

Así tenemos:

$\sum \gamma^i_{jk|i}\omega^i = d\gamma^i_{jk} = d(\Gamma^i_{jk} \circ \Phi) = \Phi^* d\Gamma^i_{jk} = \Phi^*(\sum \Gamma^i_{jk|i}\Omega^i) = \sum(\Gamma^i_{jk|i} \circ \Phi)\Phi^*\Omega^i = \sum(\Gamma^i_{jk|i} \circ \Phi)\omega^i$

Por lo tanto,

$$\gamma^i_{jk|i} = \Gamma^i_{jk|i} \circ \Phi$$

claramente el argumento anterior es válido para derivadas covariantes de orden mayor.

5.2 Definición: Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ dos conjuntos parcialmente ordenados por las relaciones $\leq_A$ y $\leq_B$, respectivamente, entonces un *orden lexicográfico* es una relación de orden parcial $\leq_{A,B}$ definida como sigue: $\forall (a, b), (a', b') \in A \times B : (a, b) \leq_{A,B} (a', b') \Leftrightarrow a < a' \vee (a = a' \wedge b \leq b')$ Si $\leq_A$ y $\leq_B$ son ordenes totales, $\leq_{A,B}$ también es un orden total.

Consideremos el siguiente conjunto:

$$F_s(\omega) = \{\gamma^i_{jk}, \gamma^i_{jk|i_1}, ..., \gamma^i_{jk|i_1...|i_{s-1}}; 1 \leq i, j, k, i_1, ..., i_s \leq n\}$$

al cual pensaremos como conjunto con un orden lexicográfico en el conjunto de índices. Dos invariantes de este conjunto pueden ser definidos de manera natural.
Sea

$$k_s = dim\{dF_s(\omega)(p)\}$$

donde el término de la derecha se entiende como la dimensión del espacio generado por los diferenciales de las funciones listadas en $F_s(\omega)$ en el punto p, k_s es una función sobre U con valores enteros.

5.3 Definición: Se define el *orden de una e-estructura en p*, como el menor entero j con la propiedad:

$$j < s \Rightarrow k_j(p) = k_s(p)$$

5.4 Definición: El *rango* de una e-estructura en p que denotaremos por $\rho(p)$ se define como $\rho(p) := k_j(p)$ donde j es el orden de la e-estructura en p.

5.5 Definición: Una e-estructura de dice *regular de rango* ρ *en* p si existe un entorno de p donde ρ es constante.

Si este es el caso, entonces existen $f_1, ..., f_\rho \in F_s(\omega)$ tales que $df_1 \wedge ... \wedge df_\rho \neq 0$ y $dg \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_\rho = 0$ para toda $g \in F_s(\omega)$.

Notemos que es posible extender $f_1, ..., f_\rho$ a un sistema de coordenadas en p. Denotaremos a esta extensión por h_U.

5.6 Teorema: La Técnica del Gráfico:

Sean N y M dos variedades diferenciables con $dim(N) = c$ y $dim(M) = d$, sean π_1 y π_2 las proyecciones de $N \times M$ sobre N y M respectivamente. Supongamos que existe una base $\{\omega_i : i = 1, ..., d\}$ de 1-formas en M.

(a) Si $f : N \to M$ es C^∞ entonces el gráfico de f es una variedad integral del ideal de formas en $N \times M$ generado por

$$\{\pi_1^* f^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i) : i = 1, ..., d\}.$$

(b) Si $\{\alpha_i : i = 1, ..., d\}$ son 1-formas en N, y si el ideal de formas generado por

$$\{\pi_1^*(\alpha_i) - \pi_2^*(\omega_i) : i = 1, ..., d\}$$

es un ideal diferencial, entonces dado $n_0 \in N$ y $m_0 \in M$ entonces existe un entorno U de n_0 y un función C^∞ $f : U \to M$ tal que $f(n_0) = m_0$ y tal que

$$f^*(\omega_i) = \alpha_i|_U : i = 1, ..., d$$

Más aun, si U es conexo entonces f es única.

Demostración:
(a) Definamos $\mu_i := \pi_1^* f^*(\omega_i) - \pi_2^*(\omega_i)$, y sea J el ideal en $E^*(N \times M)$ generado por las formas μ_i. El gráfico de f es una subvariedad (N, g) de $N \times M$ donde $g(n) := (n, f(n))$. Para ver que en efecto es una subvariedad integral debemos ver que $g^*(\mu_i) = 0$. Notemos que $\pi_1 \circ g = id$ y que $\pi_2 \circ g = f$, luego se tiene que:

$$g^*(\mu_i) = (\pi_1 \circ g)^* f^*(\omega_i) - (\pi_2 \circ g)^*(\omega_i) = f^*(\omega_i) - f^*(\omega_i) = 0$$

(b) En este caso definimos $\mu_i := \pi_1^*(\alpha_i) - \pi_2^*(\omega_i)$. Dado que el ideal J generado por las μ_i es diferencial, el teorema de Frobenius asegura la existencia de una subvariedad I maximal, conexa e integral por (n_0, m_0) de dimensión c. Sea $q \in I$ veamos que $d\pi_1|_{I_q}$ es $1-1$. Supongamos que tenemos $v \in T_q I$ tal que $d\pi_1(v) = 0$. Como $\mu_i(v) = 0$ se tiene que $\omega_i(d\pi_2(v)) =$ y dado que las ω_i son una base se tiene que $d\pi_2(v) = 0$. Pero $d\pi_1(v) = 0$ junto con $d\pi_2(v) = 0$ implican que $v = 0$, y $d\pi_1|_{I_q}$ resulta $1-1$. Por lo tanto $\pi_1 : I \to N$ es un difeomorfismo local. Es decir, existen entornos V de (n_0, m_0) en I y U de n_0 en U, tales que $\pi_{1|V} V :\to U$ es un difeomorfismo, lo que permite definir:

$$f := \pi_2 \circ (\pi_{1|V})^{-1}$$

Luego $f(n_0) = m_0$, el gráfico de f es una subvariedad de I, más aun $f^*(\omega_i) = \alpha_i|_U$ pues si tomamos $T_n U$ se tiene:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_i(d(\pi_1|V)^{-1}v) \\ &= \alpha_i(v) - \omega_i(d\pi_2 \circ d(\pi_1|V)^{-1}v) \\ &= \alpha_i(v) - f^*(\omega_i)(v) \end{aligned}$$

Veamos que si U es conexo f es única. Sea $\tilde{f}$ otro mapa cumpliendo las hipótesis de (b), y sean $(U, \tilde{g})$ y (U, g) los gráficos de $\tilde{f}$ y f respectivamente. Ambos gráficos son variedades integrales de J por (n_0, m_0). El subconjunto de U donde $\tilde{g}$ y g coinciden es no vacío pues contiene a (n_0, m_0), además por continuidad es cerrado, y como veremos a continuación también es abierto. Por el teorema de unicidad de variedades integrales existen entornos de n, W y $\tilde{W}$ tales que

$$g(W) = \tilde{g}(\tilde{W})$$

de lo que se deduce que $W = \tilde{W}$, $g|W = \tilde{g}|W$. Es decir que el subconjunto de U donde $g = \tilde{g}$ es cerrado y abierto en un conexo. Por lo tanto $g = \tilde{g}$ en U lo cual implica que $f = \tilde{f}$.

QED

5.7 Teorema de Equivalencias para e-Estructuras: *Sean* (U, ω) *y* (V, Ω) *dos e-estructuras regulares del mismo orden* j *y el mismo rango* ρ. *Sean*

$$h_U : U \to R^m \qquad y \qquad h_V : V \to R^m$$

extensiones de subconjuntos de elementos independientes en $F_s(\omega)$ *y* $F_s(\Omega)$ *respectivamente (pensados con un mismo orden lexicográfico) a sistemas coordenados.*
Definimos

$$\sigma = h_V^{-1} \circ h_U : U \to V$$

Entonces son equivalentes:

i) existe un difeomorfismo

$$\Phi : U \to V$$

tal que $\Phi^* \Omega = \omega$

ii) $F_{j+1}(\Omega) \circ \sigma = F_{j+1}(\omega)$ *como conjuntos lexicográficos.*

Demostración:
$\Rightarrow$) Se demostró al comienzo de esta sección.

$\Leftarrow$) Sea

$$h_U(p) = (y^1, ..., y^\rho, y^{\rho+1}, ..., y^n)$$

Notación: utilizaremos el siguiente rango de índices,

$$1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq \rho; \qquad \rho + 1 \leq a, b, c \leq n; \qquad 1 \leq i, j, k \leq n$$

La hipótesis de regularidad implica,

$$dy^\alpha = \sum y^\alpha_{|j}(y^1, ..., y^\rho)\omega^j$$

lo que define una matriz $\rho \times n$ $(y^\alpha_{|j})$ de rango ρ. Cambiando el orden de los índices podemos lograr que el primer bloque $\rho \times \rho$ sea no singular. (Observemos que al hacer esto estamos cambiando nuestro orden lexicográfico tanto en $F_j(\omega_U)$ como en $F_j(\Omega_U)$)

Sea $a_{\alpha\beta} = (y^\alpha_\beta)^{-1}$ entonces,

$$\sum a_{\alpha\beta} dy^\alpha_\beta = \omega^\alpha + \sum_{a=\rho+1}^{n} b_{\alpha a}\omega^a$$

o

$$\omega^\alpha = \sum a_{\alpha\beta} dy^\alpha_\beta - \sum_{a=\rho+1}^{n} b_{\alpha a}\omega^a$$

Análogamente,

$$\Omega^\alpha = \sum A_{\alpha\beta} dY^\alpha_\beta - \sum_{a=\rho+1}^{n} B_{\alpha a}\Omega^a$$

y tenemos que,

$$A_{\alpha\beta} \circ \sigma = a_{\alpha\beta} \qquad\qquad B_{\alpha a} \circ \sigma = b_{\alpha a}$$

Como,

$$dy^\alpha = \sum y^\alpha_{|\beta}(y^1, ..., y^\rho)\omega^\beta + \sum y^\alpha_{|a}(y^1, ..., y^\rho)\omega^a$$

vemos que

$$dy^\alpha \wedge \omega^{\rho+1} \wedge ... \wedge \omega^n = \sum y^\alpha_{|\beta}(y^1, ..., y^\rho)\omega^\beta \wedge \omega^{\rho+1} \wedge ... \wedge \omega^n$$

y

$$dy^1 \wedge ... \wedge dy^\rho \wedge \omega^{\rho+1} \wedge ... \wedge \omega^n = det(y^\alpha_{|\beta})\omega^1 \wedge ... \wedge \omega^\rho \wedge \omega^{\rho+1} \wedge ... \wedge \omega^n \neq 0$$

Por lo tanto tenemos nuevos comarcos,

$$(dy^1, ..., dy^\rho, \omega^{\rho+1}, ..., \omega^n) \qquad\qquad en \quad U$$

y

$$(dY^1, ..., dY^\rho, \Omega^{\rho+1}, ..., \Omega^n) \qquad\qquad en \quad V$$

No podemos utilizar la técnica del gráfico de manera usual, porque aun cuando el sistema diferencial definido en $U \times V$ esté en involución el teorema produciría un mapa $\Phi : U \to V$ tal que $\Phi^* dY^i = dy^i$. Con lo que tendríamos $Y^i \circ \Phi = y^i + constante$ y necesitamos $Y^i \circ \Phi = y^i$.

Para garantizar esto debemos restringirnos a $\Sigma_{2n-\rho}$, la subvariedad de $U \times V$ definida por:

$$y^1 \circ \pi_U = Y^1 \circ \pi_V, ..., y^\rho \circ \pi_U = Y^\rho \circ \pi_V$$

y consideramos el sistema diferencial en $\Sigma_{2n-\rho}$

$$\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a$$

En $U \times V$,

$$d(\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a) = \sum \gamma^a_{jk} \circ \pi_U \pi_U^* \omega^j \wedge \pi_U^* \omega^k - \sum \Gamma^a_{jk} \circ \pi_U \pi_U^* \Omega^j \wedge \pi_U^* \Omega^k$$

La hipótesis $F_{j+1}(\Omega)\circ\sigma = F_{j+1}(\omega)$ nos dice que

$$\Gamma^a_{jk}\circ\sigma = \gamma^a_{jk} \quad o \quad \Gamma^a_{jk}\circ h_V^{-1}\circ h_U = \gamma^a_{jk} \quad o \quad \Gamma^a_{jk}\circ h_V^{-1} = \gamma^a_{jk}\circ h_U^{-1}$$

Si $p\in U$ y $q\in V$ tenemos,

$$\Gamma^a_{jk}(q) = \Gamma^a_{jk}\circ h_V^{-1}\circ h_V(q) = \Gamma^a_{jk}\circ h_V^{-1}(Y^1,...,Y^n)$$

y

$$\gamma^a_{jk}(p) = \gamma^a_{jk}\circ h_U^{-1}\circ h_U(p) = \gamma^a_{jk}\circ h_U^{-1}(y^1,...,y^n)$$

Por lo tanto en $\Sigma_{2n-\rho}$ tenemos,

$$\gamma^a_{jk}\circ\pi_U = \Gamma^a_{jk}\circ\pi_V$$

Un argumento similar mustra que

$$A_{\alpha\beta}\circ\pi_V = a_{\alpha\beta}\circ\pi_U \qquad\qquad B_{\alpha a}\circ\pi_V = b_{\alpha a}\circ\pi_U$$

Veamos que el sistema diferencial $\pi_U^*\omega^a - \pi_V^*\Omega^a$ en $\Sigma_{2n-\rho}$ es integrable,

$$d(\pi_U^*\omega^a - \pi_V^*\Omega^a) = \sum\gamma^a_{jk}\circ\pi_U\pi_U^*\omega^j\wedge\pi_U^*\omega^k - \sum\Gamma^a_{jk}\circ\pi_V\pi_V^*\Omega^j\wedge\pi_V^*\Omega^k$$

$$= \sum\gamma^a_{jk}\circ\pi_U\{\pi_U^*\omega^j\wedge(\pi_U^*\omega^k - \pi_V^*\Omega^k) - \pi_V^*\Omega^k\wedge(\pi_U^*\omega^j - \pi_V^*\Omega^j)\}$$

$$= \sum\gamma^a_{j\alpha}\circ\pi_U\pi_U^*\omega^j\wedge(\pi_U^*\omega^\alpha - \pi_V^*\Omega^\alpha) + \sum\gamma^a_{jc}\circ\pi_U\pi_U^*\omega^j\wedge(\pi_U^*\omega^c - \pi_V^*\Omega^c)$$

$$-\sum\gamma^a_{\alpha k}\circ\pi_U\pi_V^*\Omega^k\wedge(\pi_U^*\omega^\alpha - \pi_V^*\Omega^\alpha) - \sum\gamma^a_{ck}\circ\pi_U\pi_V^*\Omega^k\wedge(\pi_U^*\omega^c - \pi_V^*\Omega^c)$$

$$\equiv \sum(\gamma^a_{j\alpha}\circ\pi_U\pi_U^*\omega^j - \gamma^a_{\alpha k}\circ\pi_U\pi_V^*\Omega^k)\wedge(\pi_U^*\omega^\alpha - \pi_V^*\Omega^\alpha) \qquad mod(\pi_U^*\omega^a - \pi_V^*\Omega^a)$$

Por otra parte,

$$\pi_U^*\omega^\alpha - \pi_V^*\Omega^\alpha = \sum a_{\alpha\beta}\circ\pi_U\pi_U^*dy^\beta - \sum b_{\alpha a}\circ\pi_U\pi_U^*\omega^a$$

$$-\sum A_{\alpha\beta}\circ\pi_V\pi_V^*dY^\beta - \sum B_{\alpha a}\circ\pi_V\pi_V^*\Omega^a$$

$$= \sum a_{\alpha\beta} \circ \pi_U (\pi_U^* dy^\beta - \pi_V^* dY^\beta) - \sum b_{\alpha a} \circ \pi_U (\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a)$$

Además en $\Sigma_{2n-\rho}$ tenemos que $\pi_U^* dy^\beta = \pi_V^* dY^\beta$, con lo que

$$\pi_U^* \omega^\alpha - \pi_V^* \Omega^\alpha \equiv 0 \quad mod(\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a)$$

Este hecho, junto con el cálculo anterior, muestra que:

$$d(\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a) \equiv 0 \quad mod(\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a)$$

con lo que la integrabilidad del sistema queda demostrada.

Una única hoja de $\pi_U^* \omega^a - \pi_V^* \Omega^a$ a través del punto

$$(y^1, ..., y^\rho, y^{\rho+1}, ..., y^n, Y^1, ..., Y^\rho, Y^{\rho+1}, ..., Y^n)$$

en $\Sigma_{2n-\rho}$ nos da una subvariedad L de dimensión $2n - \rho - (n - \rho) = n$. Esta hoja es una variedad integral del sistema diferencial

$$\{\pi_U^* dy^1 - \pi_V^* dY^1, ..., \pi_U^* dy^\rho - \pi_V^* dY^\rho, \pi_U^* \omega^{\rho+1} - \pi_V^* \Omega^{\rho+1}, ..., \pi_U^* \omega^n - \pi_V^* \Omega^n\}$$

la técnica del gráfico nos da un mapa $\Phi : U \to V$ tal que:

$$Y^\alpha \circ \Phi = y^\alpha \qquad \Phi^* \Omega^a = \omega^a$$

Repitiendo los argumentos dados anteriormente obtenemos:

$$A_{\alpha\beta} \circ \Phi = a_{\alpha\beta} \qquad B_{\alpha a} \circ \Phi = b_{\alpha a}$$

Como resultado,

$$\begin{aligned} \Phi^* \Omega^\alpha &= \sum A_{\alpha\beta} \circ \Phi \Phi^* dY^\beta - B_{\alpha a} \circ \Phi \Phi^* \Omega^a \\ &= \sum a_{\alpha\beta} dy^\beta - b_{\alpha a} \omega^a \\ &= \omega^\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\Phi^* \Omega = \omega$.

QED

5.8 Definición: Sea M una variedad diferenciable. Una colección de difeomorfismos locales Γ se dice un *pseudo-grupo* si satisface los siguientes axiomas:

1) Si $\phi \in \Gamma$ y $\psi \in \Gamma$, y el dominio de ϕ es igual al rango de ψ, entonces $\phi \circ \phi \in \Gamma$.
2) Si $\phi \in \Gamma$, entonces $\phi^{-1} \in \Gamma$.
3) Si $\phi \in \Gamma$ y U es un abierto contenido en el dominio de ϕ, entonces $\phi|_U \in \Gamma$.
4) Si ϕ es un difeomorfismo local de M y cada punto en su dominio admite un entorno U tal que $\phi|_U \in \Gamma$, entonces $\phi \in \Gamma$.
5) El difeomorfismo identidad está en Γ.

5.9 Corolario: *Sea (B, ω) una e-estructura de rango ρ en p, entonces el pseudogrupo de automorfismos de (B, ω) define localmente una foliación de dimensión $n - \rho$ en un entorno de p.*

Demostración: La foliación esta definida por el sistema diferenciable $\{dy_1, ..., dy_\rho\}$ y la prueba del teorema de e-estructuras muestra que cada rebanada $y_1 = c_1, ...y_\rho = c_\rho$ con $c_1, ..., c_\rho$ constantes, es una órbita del pseudogrupo de equivalencia locales.

Es necesario notar que el método no solo consta de pasos a seguir, reducción, prolongación, etc... Sino también de un orden en que deben realizarse. Primero construimos el espacio de torsión y estudiamos la acción de G. Si esta resulta no trivial entonces hay dos posibilidades una es que nuestro problema de equivalencia sea de tipo constante de orden finito, en cuyo caso procedemos a reducir el grupo estructural. La otra es que el problema sea tipo infinito, en cuyo caso debemos remitirnos a la teoría de Cartan-Khäler la cual no será discutida en este trabajo. Por otra parte, si la acción de G es trivial, puede que hayamos arribado a una e-estructura. Si este no es el caso, debemos ver si el sistema está en involución o no. Si no lo está, prolongamos y todo el proceso comienza de nuevo. Si el sistema está en involución el método se bifurca nuevamente: torsión constante o no constante...

Suponiendo que al final del proceso obtenemos un comarco, entonces estamos en condiciones de estudiar los difeomorfismos locales de la estructura geométrica en cuestión y sus invariantes locales. Pero para ello necesitamos el siguiente resultado, que se deduce del teorema de equivalencia de e-estructuras y sus corolarios.

5.10 Lema del Campo Comarco (Framing lemma):
Sea B una variedad diferenciable de dimensión N con un campo comarco asociado $\theta = (\theta^1, ..., \theta^N)$. Entonces, el pseudogrupo de difeomorfismos G, que preserva este campo comarco, es un grupo de Lie de dimensión a lo sumo N, el cual actúa libremente en B. La cota N se alcanza si y solamente si

$$d\theta^i = \sum c^i_{jk} \theta^j \wedge \theta^k$$

con todas las c^i_{jk} constantes. Si este es el caso las c^i_{jk} son las constantes estructurales de G, G actúa transitivamente en B y el campo comarco puede identificarse con una base para las 1-formas invariantes a izquierda en G.

De la teoría para e-estructuras sabemos que las funciones c^i_{jk}, cuando son constantes, forman un conjunto completo de invariantes.

<u>**Demostración:**</u> Sea $Y = \{Y_1, Y_2, ..., Y_N\}$ un marco dual a θ. Un difeomorfismo g preserva θ si y solo si preserva Y. En tal caso también preserva los grupos monoparamétricos $exp(t_i Y_i)$. Usando estos, podemos definir un sistema de coordenadas de primer tipo $\Phi : U \times B \subset R^N \times B \to B$ dado por:

$$\Phi(t_1, ..., t_N; p) = exp(t_1 Y_1) \circ ... \circ exp(t_N Y_N)(p)$$

Para un $p \in B$ fijo, la ecuación anterior define un sistema de coordenadas centrado en p.

Dado que cualquier difeomorfismo que preserve el marco también preserva los $exp(t_i Y_i)$, se tiene:

$$g(\Phi(t_1, ..., t_N; p)) = exp(t_1 Y_1) \circ ... \circ exp(t_N Y_N)(g(p))$$

Esta ecuación muestra que si conocemos el valor de g en un punto p_0 entonces también lo conocemos en un entorno de $g(p_0)$. Tomando un cubrimiento de B por estos sistemas de coordenadas y aplicando la ecuación anterior, podemos extender cualquier difeomorfismo local a un difeomorfismo global. De esta forma, G resulta un grupo de Lie.

Además, G actúa libremente, pues si $g(p_0) = p_0$ entonces g coincide con la identidad en todo $\Phi(U; p)$, y por ende en todo B, ya que está cubierto por entornos de este tipo. El corolario 5.8 muestra que las órbitas de G tienen dimensión $N - \rho$, siendo ρ el rango de B. Como G actúa libremente, su dimensión coincide con la de sus órbitas, de lo que se deduce que $dim(G) \leq N$. Este corolario también muestra que la dimensión máxima es alcanzada cuando $\rho = 0$, es decir, cuando los coeficientes de torsión son constantes.

Si este es el caso, notemos que por definición, G preserva el comarco θ. Así, θ se identifica con una base para las formas invariantes a izquierda de G y los c^i_{jk} resultan ser las contantes de estructura de G asociadas a este comarco.

Capítulo VI: Ejemplos

6.1 Superficies Riemanianas Orientadas:

Sea M una superficie riemanniana orientada. Su $SO(2)$-estructura asociada es el fibrado B_0 de comarcos (θ^1, θ^2) tales que $< \cdot, \cdot >= (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2$ y $\theta^1 \wedge \theta^2$ nos da la forma de área definida por la métrica y la orientación.
La ecuación estructural es:

$$d\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1_{12}\Theta_1 \wedge \Theta_2 \\ T^2_{12}\Theta_1 \wedge \Theta_2 \end{pmatrix}$$

Cambiando α por $\alpha + T^1_{12}\Theta_1 + T^2_{12}\Theta_2$ la ecuación se convierte en:

$$d\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

Tomemos α' tal que la ecuación de arriba se cumpla si reemplazamos α por α'. Entonces se tiene que:

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha - \alpha' \\ -\alpha + \alpha' & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}$$

Como ya se observó anteriormente $\alpha - \alpha'$ debe ser semibásica, es decir, $\alpha - \alpha' = c_1\Theta_1 + c_2\Theta_2$. Pero entonces, la ecuación anterior nos dice que $c_1 = c_2 = 0$. Es decir que existe una única pseudoconección con torsión cero. Lo que implica que al prolongar obtendremos una e-estructura con comarco

$$\{\Theta_1, \Theta_2, \alpha\}$$

Usando identidades de Bianchi tenemos que:

$$0 = d^2\Theta_1 = -d\alpha \wedge \Theta_2 + \alpha \wedge d\Theta_2 = -d\alpha \wedge \Theta_2 + \alpha \wedge \alpha \wedge \Theta_1 = -d\alpha \wedge \Theta_2$$

y por otra parte,

$$0 = d^2\Theta_2 = d\alpha \wedge \Theta_1 - \alpha \wedge d\Theta_1 = d\alpha \wedge \Theta_1 + \alpha \wedge \alpha \wedge \Theta_2 = d\alpha \wedge \Theta_1$$

por lo tanto, $d\alpha = K\Theta_1 \wedge \Theta_2$

Además, $0 = d^2\alpha = dK \wedge \Theta_1 \wedge \Theta_2$ lo que nos dice que K es constante en la fibra y por lo tanto una función en M.

Tomemos una sección local $f : U \to B_0$, la cual pensaremos como un par de comarcos adaptados (θ_1, θ_2). Usando f podemos traer para atrás la ecuación estructural, obteniendo:

$$d\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \omega\\ -\omega & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

donde $\omega = f^*\alpha$.

Si $d\theta_1 = c_1\theta_1 \wedge \theta_2$ y $d\theta_2 = c_2\theta_1 \wedge \theta_2$ entonces $\omega = -c_1\theta_1 - c_2\theta_2$. Sea (e_1, e_2) un marco dual a (θ_1, θ_2). Veremos que la matriz definida por ω es la conección de Levi-Civita, en términos del marco (e_1, e_2). Es decir:

$$\nabla_X\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}0 & \omega(X)\\ -\omega(X) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\ e_2\end{pmatrix}$$

Recordemos que la conección de Levi-Civita satisface:

$$\begin{aligned}2 < \nabla_X Y; Z >= {} & X(< Y; Z >) + Y(< Z; X >) - Z(< X; Y >)\\ & + < [X, Y]; Z > - < [Y, Z]; X > + < [Z, X]; Y >\end{aligned}$$

Escribimos $\nabla_X e_1 =< \nabla_X e_1; e_1 > e_1 + < \nabla_X e_1; e_2 > e_2$ y calculamos:
$< \nabla_X e_1; e_1 >= 0$ por (1)

Por otra parte, observemos que por la fórmula de Cartan:
$c_i = d\theta_i(e_1, e_2) = e_1(\theta_i(e_2)) - e_2(\theta_i(e_1)) - \theta_i([e_1, e_2]) = -\theta_i([e_1, e_2])$

Usando esta observación junto con (1) y el hecho de que $< \cdot, \cdot >= \theta_1^2 + \theta_2^2$, calculamos:

$$\begin{aligned}2 < \nabla_X e_1; e_2 >= {} & X(< e_1; e_2 >) + e_1(< e_2; X >) - e_2(< X; e_1 >)\\ & + < [X, e_1]; e_2 > - < [e_1, e_2]; X > + < [e_2, X]; e_1 >\\ = {} & e_1(\theta_2(X)) - e_2(\theta_1(X)) + \theta_2([X, e_1]) - \theta_1([e_1, e_2])\theta_1(X) - \theta_2([e_1, e_2])\theta_2(X) + \theta_1([e_2, X])\\ = {} & e_1(\theta_2(X)) - e_2(\theta_1(X)) + \theta_2([X, e_1]) + \theta_1([e_2, X]) - \omega(X)\\ = {} & -d\theta_1(e_2, X) - d\theta_2(X, e_1) - \omega(X)\\ = {} & c_1\theta_1(X) + c_2\theta_2(X) - \omega(X)\\ = {} & -2\omega(X)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\nabla_X e_1 = -\omega(X)e_2$. Análogamente se ve que $\nabla_X e_2 = \omega(X)e_1$

Al escribir la ecuación estructural aparecen dos objetos distinguidos: una única pseudo-conección con torsión cero y una función K. Ya hemos interpretado geométricamente al primero (conección de L-C) ahora haremos lo mismo con el segundo, mostrando que es la curvatura Gaussiana.

Sea

$$R(X, Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \qquad \textit{(tensor de curvatura)}$$

Tenemos que:

$$- < R(e_1, e_2)e_1, e_2 >= - < \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_1, e_2 > + < \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_1, e_2 > + < \nabla_{[e_1,e_2]}e_1, e_2 >$$

$$= e_1(\omega(e_2)) - e_1(\omega(e_2)) - \omega([e_1, e_2])$$

$$= -\omega([e_1, e_2])$$

$$= d\omega(e_1, e_2)$$

$$= K$$

En conclusión, el único invariante local es la curvatura Gaussiana. Los modelos maximalmente simétricos son aquellos de curvatura constante y en este caso el pseudogrupo de equivalencias locales tiene dimensión 3.

6.2 Estructuras Riemannianas en General

En esta sección generalizaremos algunos de los resultados de la sección anterior al caso de variedades riemannianas. Recordemos que la G-estructura asociada a una variedad riemanniana ya fue definida en 2.1.11. Observemos que el tener una métrica en un espacio vectorial V permite identificarlo canónicamente con V^*, y recordemos que la suceción de torsión está definida por:

$$\delta : o(n) \otimes V^* \to V \otimes V^* \otimes V^* \to V \otimes \Lambda^2 V^*$$

Se tiene entonces el siguiente resultado:

Lema 6.2.1: *El mapa de torsión δ es un isomorfismo. Es decir que el espacio de torsión $H(o(n))$ es trivial.*

Demostración:
Un elemento $\xi \in o(n) \otimes V^*$ tiene una estructura de índices ξ^i_{jk} tal que $\xi^i_{jk} = -\xi^j_{ik}$. Un elemento $\Omega \in V \otimes \Lambda^2 V^*$ tiene una estructura de índices $\Omega^i_{jk} = -\Omega^i_{kj}$. El mapa de torsión está dado por $\Omega^i_{jk} = 1/2(\xi^i_{jk} - \xi^i_{kj})$. Basta entonces verificar que:

$$\delta^{-1}(\Omega)^i_{jk} = \xi^i_{jk} = \Omega^i_{jk} + \Omega^j_{ki} - \Omega^k_{ij}$$

QED

Este lema dice que existe una única pseudo-conección con torsión cero. Esta pseudo-conección resulta ser la conección de Levi-Civita. Como el espacio de torsión es trivial, al prolongar arribamos a una e-estructura. Y por la dimensión de la e-estructura en cuestión se deduce que el pseudo-grupo de simetrías locales tiene a lo sumo dimensión $n(n+1)/2$.

6.3 Estructuras Subriemannianas en Dimensión 3. (Hughen 1995)

6.3.1 Definición: Dada una colección de campos vectoriales $\{X_a\}$ definimos su *Lie hull* como el conjunto $\{X_a, [X_b, X_c], [X_a, [X_b, X_c]], ...\}$ de campos vectoriales generados por los corchetes de Lie de los campos $\{X_a\}$. Decimos que una colección $\{X_a\}$ es *generadora por corchetes* si su Lie hull genera todo el fibrado tangente.

6.3.2 Definición: Una distribución H se dice *generadora por corchetes* si cualquier marco $\{X_a\}$ de la distribución es generador por corchetes sobre su dominio.

Sea $\mathrm{H} = \Gamma(H)$ el haz de seciones de H: $\mathrm{H}(U) =$ campos vectoriales sobre U que yacen en H. Hay una sucesión de sub-haces

$$\mathrm{H} \subset \mathrm{H}^2 \subset ... \subset \mathrm{H}^r \subset ... \subset \Gamma(TM)$$

con

$$\mathrm{H}^{r+1} = \mathrm{H}^r + [\mathrm{H}, \mathrm{H}^r]$$

donde

$$[\mathrm{H}, \mathrm{H}^k] = span\{[X, Y] : X \in H, Y \in \mathrm{H}^k\}.$$

6.3.3 Definición: Sea $n_i(q) = dim(\mathrm{H}^i_q)$. La lista de enteros $(n_1(q), ..., n_r(q))$ es llamada *el vector crecimiento* de H en q. Una distribución es de tipo $(n_1, ..., n_r)$ si este es su vector crecimiento en todo punto. El menor entero $r = r(q)$ tal que $\mathrm{H}^r = \Gamma(TM)$ es llamado el *paso* o *grado de no-holonomía* de la distribución en q.

6.3.4 Definición: Una variedad de contacto (M, I) es una variedad diferenciable de dimensión $2n + 1$ (con $n \in N$), con un subfibrado de linea distinguido $I \subset T^*M$ que es no-degenerado en el sentido de que para cualquier sección local θ de I se tiene que

$$\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$$

La no-degeneración de I no depende de la forma θ. Si tomamos $\tilde{\theta} = f\theta$ con $f \neq 0$ vemos que

$$\tilde{\theta} \wedge (d\tilde{\theta})^n = f^{n+1}\theta \wedge (d\theta)^n$$

6.3.5 Definición: Sea M una variedad diferenciable con una distribución generadora por corchetes y una métrica $<,>$ definida sobre la distribución. Se dice entonces que $(M, D, <,>)$ es una variedad *subriemanniana.*

Consideremos una variedad subriemanniana orientada (M, D) con $dim(M) = 3$ y $dim(D) = 2$. Un campo comarco adaptado $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ debe satisfacer $\theta^3(D) = 0$ y $< \cdot, \cdot >= (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2 \mid_D$ la condición de contacto se traduce a

$$d\theta^3 = \lambda\theta^1 \wedge \theta^2 \quad mod(\theta^3) \qquad \lambda \neq 0$$

El grupo estructural está formado por matrices de la forma

$$g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

con $A \in SO(2)$, $b \in R^2$ y $c \neq 0$.

El que una distribución sea de tipo $(2, 3)$ (generadora por corchetes) es equivalente a que (M, D) es de contacto. Pues:

$$(\lambda\theta^1 \wedge \theta^2)(X, Y) = d\theta^3(X, Y) = -\theta^3([X, Y]) \qquad \forall \quad X, Y \in D \quad \lambda \neq 0$$

(por la fórmula de Cartan y el hecho de que θ^3 se anula en D)

Luego $\lambda \neq 0 \Leftrightarrow [X, Y]$ no pertenece a D.

A continuación procederemos a aplicar el Método de Equivalencia.

<u>Primera Reducción</u>

La ecuación estructural en este caso es de la forma:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & \delta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1_{23} & T^1_{31} & T^1_{12} \\ T^2_{23} & T^2_{31} & T^2_{12} \\ T^3_{23} & T^3_{31} & T^3_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \\ \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{pmatrix}$$

Comencemos con el proceso de absorción de torsión. Realicemos las siguientes substituciones en la ecuación anterior:

$$\alpha \to \alpha' = \alpha + T^1_{12}\Theta^1 + T^2_{12}\Theta^2$$

$$\beta \to \beta' = \beta - T^1_{31}\Theta^1 + T^1_{23}\Theta^2$$

$$\gamma \to \gamma' = \gamma + T^2_{23}\Theta^2 - T^2_{31}\Theta^1$$

$$\delta \to \delta' = \delta + T^3_{23}\Theta^2 - T^3_{31}\Theta^1$$

La ecuación estructural es ahora de la forma:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha' & \beta' \\ -\alpha' & 0 & \gamma' \\ 0 & 0 & \delta' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T^3_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \\ \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{pmatrix}$$

Notemos que la última pseudo-conección no es única pues podemos agregar múltiplos arbitrarios de Θ^3 a β, γ y δ.

Consideremos una sección local $f = (\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ de B. De la propiedad de reproducción $f^*\Theta = f$ $(f^*\Theta^i = \theta^i)$ vemos que:

$$d\theta^3 = d(f^*\Theta^3) = f^*(d\Theta^3) = f^*\delta' \wedge f^*\Theta^3 + f^*T^3_{12} f^*\Theta^1 \wedge f^*\Theta^2$$

$$= f^*\delta' \wedge \theta^3 + f^*T^3_{12}\theta^1 \wedge \theta^2$$

Por lo tanto,

$$d\theta^3 \mid_D = f^*T^3_{12}\theta^1 \wedge \theta^2$$

y la hipótesis de contacto nos dice que $T^3_{12} \neq 0$

La propiedad de equivariancia nos dice que $R^*_g\Theta = g^{-1}\Theta$, en particular $R^*_g\Theta^3 = c^{-1}\Theta^3$. Tomando derivada exterior a ambos miembros:

$$c^{-1}\delta \wedge \Theta^3 + c^{-1}T^3_{12}\Theta^1 \wedge \Theta^2 = c^{-1}R^*_g\delta \wedge \Theta^3 + R^*_gT^3_{12}(det(A^{-1})\Theta^1 \wedge \Theta^2 + \Phi \wedge \Theta^3)$$

donde Φ es una combinación lineal de Θ^1 y Θ^2. De aquí se deduce que:

$$R^*_gT^3_{12} = c^{-1}det(A)T^3_{12}$$

Esto implica que podemos elegir $g \in G$ de modo que $R^*_gT^3_{12} = 1$. Obtenemos así nuestra primer reducción,

$$B_1 = \{\theta \in B_1 : T^3_{12} = 1\}$$

Con grupo estructural $G_1 = \{\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in SO(2), b \in R^2\} \subset G$

Segunda Reducción

En la G_1-estructura B_1 la ecuación estructural es:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1_{23} & T^1_{31} & T^1_{12} \\ T^2_{23} & T^2_{31} & T^2_{12} \\ T^3_{23} & T^3_{31} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \\ \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{pmatrix}$$

Al igual que en la primera reducción, podemos variar la pseudo-conección para absorber tantos coeficientes como podamos. Pero en este caso, al haber reducido el grupo estructural, la pseudo-conección toma valores en un álgebra de dimensión menor lo cual nos impedirá absorber ciertos coeficientes de torsión. Concretamente, la ecuación estructural será:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T^3_{23} & T^3_{31} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \\ \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{pmatrix}$$

El espacio de torsión está parametrizado por los coeficientes (T^3_{23}, T^3_{31}). Para estudiar la acción del grupo en este espacio daremos una expresión explícita de la misma.

Afirmación:

$$R_g^* \begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} = a^{-1}(det(a^{-1}) \begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} - b)$$

Demostración:

$$g = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad g^{-1} = \begin{pmatrix} A^T & \tilde{b} \\ 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \qquad \tilde{b} = -c^{-1}A^T b$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \tilde{b_1} \\ A_{12} & A_{22} & \tilde{b_2} \\ 0 & 0 & c^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}\Theta^1 + A_{21}\Theta^2 + \tilde{b_1}\Theta^3 \\ A_{12}\Theta^1 + A_{22}\Theta^2 + \tilde{b_2}\Theta^3 \\ c^{-1}\Theta^3 \end{pmatrix}$$

Usando la propiedad de equivariancia calculamos las siguientes 3 ecuaciones:

$$R_g^*\Theta^3 \wedge R_g^*\Theta^1 = c^{-1}A_{11}\Theta^3 \wedge \Theta^1 - c^{-1}A_{21}\Theta^2 \wedge \Theta^3$$

$$R_g^*\Theta^2 \wedge R_g^*\Theta^3 = -c^{-1}A_{12}\Theta^3 \wedge \Theta^1 + c^{-1}A_{22}\Theta^2 \wedge \Theta^3$$

$R_g^*\Theta^1 \wedge R_g^*\Theta^2 = A_{11}A_{22}\Theta^1 \wedge \Theta^2 + A_{11}\tilde{b_2}\Theta^1 \wedge \Theta^3 - A_{12}A_{21}\Theta^1 \wedge \Theta^2 + A_{21}\tilde{b_2}\Theta^2 \wedge \Theta^3 - A_{12}\tilde{b_1}\Theta^1 \wedge \Theta^3 - A_{22}\tilde{b_1}\Theta^2 \wedge \Theta^3 = (A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})\Theta^1 \wedge \Theta^2 + (A_{12}\tilde{b_1} - A_{11}\tilde{b_2})\Theta^3 \wedge \Theta^1 + (A_{21}\tilde{b_2} - A_{22}\tilde{b_1})\Theta^2 \wedge \Theta^3$

Se tiene entonces que:

$R_g^*T^3 = R_g^*\Theta^1 \wedge R_g^*\Theta^2 + R_g^*T^3_{31}R_g^*\Theta^3 \wedge R_g^*\Theta^1 + R_g^*T^3_{23}R_g^*\Theta^2 \wedge R_g^*\Theta^3$
$= det(A)\Theta^1 \wedge \Theta^2 + (R_g^*T^3_{23}c^{-1}A_{22} - R_g^*T^3_{31}c^{-1}A_{21} + A_{21}\tilde{b_2} - A_{22}\tilde{b_1})\Theta^2 \wedge \Theta^3 + (R_g^*T^3_{31}c^{-1}A_{11} - R_g^*T^3_{23}c^{-1}A_{12} + A_{12}\tilde{b_1} - A_{11}\tilde{b_2})\Theta^3 \wedge \Theta^1$

Es decir:

$$c^{-1}\begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} & -A_{21} \\ -A_{12} & A_{11} \end{pmatrix} (c^{-1}\begin{pmatrix} R_g^*T^3_{23} \\ R_g^*T^3_{31} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \end{pmatrix})$$
$$= c\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} (c^{-1}\begin{pmatrix} R_g^*T^3_{23} \\ R_g^*T^3_{31} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \end{pmatrix})$$
$$= c\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} (c^{-1}\begin{pmatrix} R_g^*T^3_{23} \\ R_g^*T^3_{31} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \end{pmatrix})$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} (\begin{pmatrix} R_g^*T^3_{23} \\ R_g^*T^3_{31} \end{pmatrix} - c\begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \end{pmatrix})$$

Luego:

$$c^{-1}A^{-1}\begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} \tilde{b_1} \\ \tilde{b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^*_g T^3_{23} \\ R^*_g T^3_{31} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow c^{-1}A^{-1}\begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} - A^{-1}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^*_g T^3_{23} \\ R^*_g T^3_{31} \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow A^{-1}(det(A)^{-1}\begin{pmatrix} T^3_{23} \\ T^3_{31} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} R^*_g T^3_{23} \\ R^*_g T^3_{31} \end{pmatrix}$$

QED

Lo que deducimos de esta expresión explícita para la acción es que G_1 actúa transitivamente. Tomamos los siguientes comarcos adaptados:

$$B_2 = \{\theta \in B_1 : T^3_{23}(\theta) = T^3_{31}(\theta) = 0\}$$

En este caso el grupo estructural es:

$$G_2 = \{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in SO(2)\}$$

En B_2 la ecuación estructural es:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \\ \Theta^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} T^1_{23} & T^1_{31} & 0 \\ T^2_{23} & T^2_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \\ \Theta^1 \wedge \Theta^2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow d\Theta^3 = \Theta^1 \wedge \Theta^2$
$0 = d^2\Theta^3 = d\Theta^1 \wedge \Theta^2 - \Theta^1 \wedge d\Theta^2$
$= T^1_{31}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \wedge \Theta^3 - T^2_{23}\Theta^1 \wedge \Theta^2 \wedge \Theta^3$

Por lo tanto $T^1_{31} = T^2_{23}$. Por otra parte, si realizamos el siguiente cambio en la pseudoconección:

$$\alpha \to \alpha + (1/2)(T^2_{31} + T^1_{23})\Theta^3$$

podemos asumir que $T^1_{23} = -T^2_{31}$. Entonces, podemos escribir la ecuación estructural en una forma más simple ignorando Θ^3:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \end{pmatrix}$$

donde $a_1 = T^1_{23} = -T^2_{31}$ y $a_2 = T^1_{31} = T^2_{23}$.

Tomemos un α' tal que:

$$d\begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & \alpha' \\ -\alpha' & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 \\ a'_2 & -a'_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \end{pmatrix}$$

Definiendo $\beta := \alpha - \alpha'$ y $\tau_i : a_i - a_i'$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \Theta^1 \\ \Theta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 & \tau_2 \\ \tau_2 & -\tau_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta^2 \wedge \Theta^3 \\ \Theta^3 \wedge \Theta^1 \end{pmatrix}$$

Si $\beta = c_1\Theta^1 + c_2\Theta^2 + c_3\Theta^3$, la primer ecuación dice que: $c_1 = 0 \quad y \quad c_3 = -\tau_1$.

La segunda ecuación, muestra que $c_2 = 0 \quad y \quad c_3 = \tau_1$. Por lo tanto, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, con lo que $\beta = 0$ y $\tau_1 = \tau_2 = 0$

Esto muestra que existe una única α tal que $T^1_{23} = -T^2_{31}$ y $T^1_{31} = T^2_{23}$.

En conclusión, el fibrado B_2 tiene asociado un comarco distinguido:

$$\{\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \alpha\}$$

Sean B y $\tilde{B}$ dos G-estructuras, y sea $\Phi : B \to \tilde{B}$ una equivalencia local. Notemos que Φ siempre preserva la forma en bloque de la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & -a_1 \end{pmatrix}$. Como los coeficientes que le dan a esta matriz su forma particular son únicos se tiene: $\Phi^*\tilde{a}_i = a_i$

En este punto uno se ve tentado a prolongar, y por ende, automáticamente arribar a una e-estructura. Pero como ya indicamos antes, primero es necesario calcular la acción en el espacio de torsión. Esta vez el cálculo será un poco más complicado que en los pasos anteriores y requerirá identidades de Bianchi.

$$\begin{aligned} 0 = d^2\Theta^1 &\equiv \alpha \wedge d\Theta^2 + a_1 d\Theta^2 \wedge \Theta^3 + da_2 \wedge \Theta^3 \wedge \Theta^1 - a_2\Theta^3 \wedge d\Theta^1 && mod(\Theta^2) \\ &\equiv -a_1\alpha \wedge \Theta^3 \wedge \Theta^1 + a_1\alpha \wedge \Theta^1 \wedge \Theta^3 + da_2 \wedge \Theta^3 \wedge \Theta^1 && mod(\Theta^2) \\ &\equiv -2a_1\alpha \wedge \Theta^3 \wedge \Theta^1 + da_2 \wedge \Theta^3 \wedge \Theta^1 && mod(\Theta^2) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow da_2 \equiv 2a_1\alpha \qquad mod(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$$

Análogamente, tenemos que:

$$da_1 \equiv -2a_2\alpha \qquad mod(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3)$$

De esto de deduce que existen funciones A_i y B_i tales que:
$da_1 = 2\alpha a_2 + \sum A_i\Theta^i$
$da_2 = -2\alpha a_1 + \sum B_i\Theta^i$

Calculando explícitamente $d\alpha$ a partir de la ecuación estructural se ve que:

$d\alpha = (A_2 - B_1)\Theta^2 \wedge \Theta^3 + (A_1 + B_2)\Theta^3 \wedge \Theta^1 + K\Theta^1 \wedge \Theta^2$ para alguna función K.

La función definida en la afirmación anterior será uno de los invariantes de nuestra estructura geométrica y jugará un papel similar al de la curvatura Gaussiana.

Volviendo a las ecuaciones para los da_i. Como ya mencionamos antes es posible estudiar la acción en el espacio de torsión con ecuaciones de este tipo. Tenemos módulo base:

$$\begin{pmatrix} da_1 \\ da_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha \\ -2\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que G_2 actúa por rotaciones en el espacio de torsión. Aquí es cuando el método se bifurca en dos casos:
1) $(a_1, a_2) \neq 0$
2) $(a_1, a_2) = 0$

En el primer caso la acción de G_2 es no trivial, lo que permite realizar otra reducción. Pero en el segundo caso la acción es trivial. Dado que que $ker(\delta) = 0$ podemos prolongar y de esa manera arribar a una e-estructura donde el comarco es $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \alpha)$.

Recordemos que el lema del comarco nos dice que una condición necesaria para que un modelo sea maximalmente simétrico es que a_1, a_2 y K sean constantes. El vector $(a_1(p), a_2(p))$ rota al mover p a lo largo de la fibra. Es decir que a_1 y a_2 son constantes si y solo si $a_1 = a_2 = 0$. En tal caso, las derivadas covariantes A_i y B_i también son cero, lo que nos deja $d\alpha = K\Theta^1 \wedge \Theta^2$. En conclusión, el caso $(a_1, a_2) = 0$ es relevante pues los modelos maximalmente simétricos son de esta forma y para estos últimos la constante K es el único invariante.

Espacios Homogéneos:

Los espacios homegéneos sub-riemannianos son aquellos donde el grupo de automorfismos de $B_2(M)$ actúa transitivamente. Este grupo se identifica con el grupo de difeomorfismos de $B_2(M)$ que preserban el comarco $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \alpha)$. Como observamos anteriormente su dimensión es menor o igual a cuatro, y la igualdad se da si y solamente si actúa transitivamente en $B_2(M)$. A continuación calcularemos los modelos maximalmente simétricos explícitamente.

Sea M un modelo maximalmente simétrico y sea $B_2(M)$ como arriba. Trataremos de obtener información sobre M estudiando las secciones locales de $B_2(M)$. Recordemos que en $B_2(M)$ tenemos un único comarco $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3, \alpha)$, satisfaciendo:

$d\Theta^1 = \alpha \wedge \Theta^2$
$d\Theta^2 = -\alpha \wedge \Theta^1$
$d\Theta^3 = \Theta^1 \wedge \Theta^2$
$d\alpha = K\Theta^1 \wedge \Theta^2$

Sea $f : U \to B_2(M)$ una sección local. Si escribimos a f como una terna de uno formas (η^1, η^2, η^3), podemos traer para atrás las ecuaciones anteriores y aplicar la propiedad de reproducción de manera que tomen la forma:

$d\eta^1 = f^*\alpha \wedge \eta^2$
$d\eta^2 = -f^*\alpha \wedge \eta^1$
$d\eta^3 = \eta^1 \wedge \eta^2$
$d(f^*\alpha) = K\eta^1 \wedge \eta^2$

Calculemos α, escribiéndola como

$$\alpha = \mu + \sigma$$

para un único $\sigma \in T^*(U)$, donde μ es la forma de MC para B_2. Explícitamente,

$$MC = \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde μ es la 1-forma ordinaria sobre $F = G_2 = SO(2)$ definida como elemento de $so(2)^*$ por

$$\mu \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix} = t.$$

Notemos que al escribir $\alpha = \mu + \sigma$ estamos usando un isomorfismo

$$T^*(B_2) \cong g_2^* \oplus T^*(U),$$

aquí es el inducido por la trivialización $B_2 = G_2 \times U$ dada por el comarco (η^1, η^2, η^3).

La elección $\sigma := K\Theta^3$ satisface las ecuaciones de arriba, porque $d\alpha = d\sigma = Kd\Theta^3 = K\Theta 1 \wedge \Theta 2$. Por unicidad,

$$\alpha = \mu + K\Theta^3.$$

Esto resulta en

$$d\eta^1 = K\eta^2 \wedge \eta^3$$

$$d\eta^2 = K\eta^3 \wedge \eta^1$$

$$d\eta^3 = \eta^1 \wedge \eta^2$$

Sea (X_1, X_2, X_3) un marco dual a (η^1, η^2, η^3). Entonces este marco satisface:

$$[X_1; X_2] = -X_3 \qquad [X_2; X_3] = -KX_1 \qquad [X_3; X_1] = -KX_2$$

Pues,
$d\eta(Y, Z) = Y(\eta(Z)) - Z(\eta(Y)) - \eta([Y; Z]) = -\eta([Y; Z])$, luego:
$[X_i; X_j] = \eta^1([X_i; X_j])X_1 + \eta^2([X_i; X_j])X_2 + \eta^3([X_i; X_j])X_3$
$[X_i; X_j] = -K\eta^2 \wedge \eta^3(X_i, X_j)X_1 - K\eta^3 \wedge \eta^1(X_i, X_j)X_2 - \eta^1 \wedge \eta^2(X_i, X_j)X_3$

De lo que se deducen las relaciones de conmutación anteriores.

Las álgebras de Lie l_K generadas por los X_i pueden clasificarse en tres clases de isomorfismos, dependiendo si $K = 0$, $K > 0$ o $K < 0$:

$l_1 \cong so(3)$, porque definiendo $Y_3 = -X_3$ se obtiene la base usual: $[Y_i; Y_{i+1}] = Y_{i+2} \quad i \in Z_3$

l_0 es el álgebra de Heisenberg de dimensión 3 generada por X_1 y X_2 con centro generado por X_3.

$l_{-1} \cong sl(2)$, pues la aplicación que manda $X_1 \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $X_2 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $X_3 \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es un isomorfismo.

Sean L_0 y $L_{\pm 1}$ los grupos de Lie correspondientes a estas álgebras de Lie. Luego X_1 y X_2 generan una distribución de contacto Δ_K invariante a izquierda en L_K, con métrica subriemanniana $(\eta^1)^2 + (\eta^2)^2$.

El grupo de difeomorfismos de $L = L_K$ que preserva la estructura subriemanniana, el cual tiene dimensión cuatro, es un producto semi-directo. Para construirlo, definiremos una acción de $SO(2)$ en L. Primero, haremos actuar a $SO(2)$ en l, por rotaciones en el $span(X_1, X_2)$ y trivialmente en X_3:

$\rho \cdot (a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3) = a_1 \rho \cdot X_1 + a_2 \rho \cdot X_2 + a_3 X_3$

$\rho \cdot X_1 = cos(t) X_1 + sen(t) X_2$

$\rho \cdot X_2 = -sen(t) X_1 + cos(t) X_2$

Esta acción puede integrarse a una acción de $SO(2)$ en $SO(3)$, $SL(2,R)$ y en el grupo de Heisenberg.

Definimos entonces el producto semidirecto $SO(2) \triangleleft L$, donde la operación de multiplicación en $SO(2) \times L$ esta dada por :

$$(\rho, g) \times (\rho', g') = (\rho\rho', g\rho(g'))$$

Luego $SO(2) \triangleleft L$ actúa en L de la siguiente forma: $(\rho, g) \cdot g' = g\rho(g')$ esta acción es transitiva y la isotropía en la identidad es $SO(2)$, por lo que como espacio homogéneo

$$L = (SO(2) \triangleleft L)/SO(2)$$

en los tres casos.

Bibliografía:

[**Gardner 1989**] Robert B. Gardner, *The Method of Equivalence and Its Applications*, Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, Pennsylvania.

[**Montgomery 2002**] Richard Montgomery, *A Tour of Subriemannian Manifolds Their Geodesics and Its Applications.* American Mathematical Society.

[**BGG 2002**] Robert Bryant, Phillip Griffiths and Daniel Grossman *Exterior Differential Systems and Euler-Lagrange Partial Differential Equations, arXiv:math.DG/027039 v1 3jul 2002*

[**Olver 1995**] Peter Olver, *Equivalence, Invariance and Symmetry.* Cambridge University Press.

[**Sharpe 1991**] R.W. Sharpe, *Differential Geometry: Cartan's Generalizations of Klein's Erlangen Program.* Springer.

[**Hughen 1991**] Keener Hughen, *The Sub-Riemannian geometry of three manifolds.* Tesis. Duke University.