EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIX JORNADAS
VOLUMEN 15 (2009)

Diego Letzen
Penélope Lodeyro

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Pasch, Hilbert y la concepción deductivista de la geometría en las postrimerías del siglo XIX

*Eduardo Nicolás Giovannini** †

1. Introducción

Es un lugar común en la actualidad afirmar que con su célebre libro *Grundlagen der Geometrie* de 1899, David Hilbert terminó de consolidar una manera de comprender la geometría, principalmente desarrollada en los dos últimos decenios del siglo XIX, y particularmente influyente entre los matemáticos alemanes e italianos. Se trata de la concepción "deductivista", según la cual la geometría no es la ciencia del espacio intuitivo, como se creía desde Euclides, sino que más bien es una disciplina abstracta que, partiendo de ciertas suposiciones llamadas axiomas, es capaz de producir conocimientos por medio de herramientas exclusivamente lógicas. Ésta es precisamente la imagen más difundida del significado y aporte de la obra fundamental de Hilbert, tal como Paul Bernays, discípulo y colaborador suyo, lo señala:

> Una característica principal de la axiomatización de la geometría llevada a cabo por Hilbert es que el método axiomático es presentado y practicado dentro del espíritu de la concepción abstracta de la axiomática que surgió al final del siglo diecinueve y que ha sido generalmente adoptada en la matemática moderna. Consiste en abstraer el significado intuitivo de los términos para los tipos de términos primitivos (individuos) y para las relaciones fundamentales, y en entender las afirmaciones (teoremas) de la teoría axiomatizada en un sentido hipotético, esto es, como siendo verdaderas para cualquier interpretación o determinación de los tipos de individuos y de relaciones fundamentales para las que los axiomas son satisfechos. (Bernays 1967, p. 358)

El objetivo de este artículo será mostrar que si bien esta es una imagen correcta de la obra de Hilbert, ella desconoce sin embargo otros aspectos fundamentales que son imprescindibles para brindar una idea completa y equilibrada de su concepción de la geometría. En particular, me concentraré en la siguiente cuestión: como el mismo Hilbert lo reconoce, el trabajo pionero de Moritz Pasch en geometría proyectiva tuvo una influencia decisiva en su acercamiento a los problemas de los fundamentos de la geometría. Ahora bien, la concepción de Pasch de la geometría pivoteaba sobre dos ejes: en primer lugar, su creencia de que la geometría debía ser tratada como una rama más de las matemáticas puras, haciendo de ella una ciencia puramente demostrativa, es decir, rechazando de lleno el valor de la apelación a la intuición espacial o al uso de diagramas en las deducciones, y por consiguiente, en la demostración de teoremas; y en segundo lugar, su creencia de que la geometría era una ciencia natural, es decir, que la verdad de los axiomas se debía a nuestras intuiciones sensibles del espacio. Luego, mi objetivo aquí será mostrar cómo ambos rasgos de la obra de Pasch influyeron en la concepción de la geometría desarrollada posteriormente por Hilbert, principalmente entre los años 1891 y 1905. Para ello,

---

* CONICET

† Agradezco a un evaluador anónimo los valiosos comentarios y sugerencias realizados a la versión preliminar de este trabajo.

describiré en primer lugar estos dos aspectos que acabo de señalar en los trabajos de Pasch. En segundo lugar, presentaré algunos breves pasajes de cursos universitarios sobre geometría dictados por Hilbert en esta época, en donde se encuentra sugestivas ideas que, como se verá, parecen apoyar la tesis propuesta.

2. Moritz Pasch y la concepción deductivista de la geometría proyectiva

Como se ha señalado, un antecedente importante del libro de Hilbert se encuentra en el trabajo de Moritz Pasch de 1882: *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Allí este geómetra alemán se vio llevado, debido a las inquietantes discusiones existentes acerca del rol del axioma de continuidad en la geometría proyectiva, a reexaminar cuidadosamente las estructuras deductivas del cuerpo de conocimiento existente en geometría. Pasch se encargó de revisar algunas suposiciones básicas que se hallaban implícitas en la geometría de Euclides, explicitando sus reglas de inferencia y principalmente completando algunas lagunas lógicas fundamentales que le afectaban. El resultado fue una presentación completamente nueva e innovadora de la geometría proyectiva en la cual, una vez determinados los axiomas, todos los resultados o teoremas de la geometría podían ser alcanzados por medio de deducciones estrictamente lógicas, y sin ninguna apelación a diagramas o a propiedades de las figuras implicadas. Ahora bien, para Pasch, al igual que para muchos geómetras alemanes desde Gauss, la geometría es una ciencia natural, cuyo objeto de estudio son las formas externas de las cosas, y cuyas verdades pueden ser obtenidas a partir de un manojo de conceptos y leyes – los axiomas de la geometría – que son derivadas directamente de la experiencia. De este modo, el significado de los axiomas es en sí mismo puramente geométrico y no puede ser concebido sin apelar a los diagramas desde los que son derivados. Las deducciones o demostraciones, en cambio, no pueden ni deben apelar a estos diagramas, sino que deben ser llevadas a cabo exclusivamente por medio de inferencias lógicas. Pasch articuló de esta manera su mirada sobre la geometría en función de dos puntos o temas principales: primero, una concepción estrictamente deductivista de la geometría, y segundo, una perspectiva más bien empirista en lo se refiere a los fundamentos gnoseológicos últimos de esta rama de las matemáticas. Veamos sucintamente estos dos temas.

En lo que se refiere al punto de vista deductivista, la posición de Pasch es clara:

> Es un hecho que, si la geometría ha de ser realmente deductiva, la deducción debe ser en todas partes independiente del significado de los conceptos geométricos, al igual que debe ser independiente de los diagramas [Figuren]; sólo las relaciones en las proporciones y definiciones empleadas pueden ser legítimamente tomadas en consideración. Durante la deducción es útil y legítimo, pero de ningún modo necesario, pensar en el significado de los términos, de hecho, cuando se vuelve realmente necesario hacerlo, ello demuestra que hay una falla [Lückenhaftigkeit] en la prueba, y que (si esta falla no puede ser eliminada modificando el razonamiento [Raisonnement]), las premisas son demasiado débiles para apoyarlo. (Pasch 1882: p. 98)

Por otro lado, el punto de vista empirista de Pasch respecto de la geometría se hace patente desde las primeras páginas del libro:

> Los conceptos geométricos son ese grupo especial de conceptos que sirven para describir el mundo externo [*Aussenwelt*], y se refieren a la forma, magnitud y posición mutua de los

> cuerpos. Introduciendo conceptos numéricos, las relaciones entre los conceptos geométricos se vuelven manifiestas, de un modo tal que pueden ser reconocidas por medio de la observación (...) El punto de vista así indicado, y que será asumido en lo que sigue, es que la geometría es una parte de la ciencia natural. (Pasch 1882: p. 3)

En resumen, el interés de Pasch en la filosofía de la geometría se encontraba dividido en dos problemas principales: el carácter de la geometría como una ciencia demostrativa y su status como una ciencia natural.[1] En lo que respecta al primero de estos problemas, puede decirse que Pasch fue un formalista, en el sentido en que mantuvo que es posible desarrollar esta disciplina y evaluar sus conclusiones únicamente a través de reglas de la lógica formal y sin considerar el significado "geométrico" de los términos y conceptos utilizados. Por otro lado, en lo que toca al segundo problema, este notable matemático alemán defendió una posición empirista, en tanto que proporcionó una explicación genética para los axiomas de la geometría, basada estrictamente en el material proporcionado por la intuición sensible.[2]

Ahora bien, la influencia que tuvo esta nueva manera de presentar la geometría en los trabajos subsiguientes, es algo a menudo resaltado y reconocido. Como lo ha señalado Nagel, desde que hiciera su aparición el libro de Pasch, "ningún trabajo retuvo la atención de los estudiantes en la materia, a no ser que comenzara con una cuidadosa enumeración de los términos primitivos no definidos, y de las afirmaciones primitivas no demostradas; y que no satisficiese la condición de que todo término posterior sea definido, y toda afirmación ulterior sea demostrada, solamente por medio de esta base primitiva".[3] Sin embargo, el segundo aspecto de sus preocupaciones filosóficas sobre la geometría no suele ser tan enfatizado, y lo que quisiera sugerir en lo que sigue es que, no sólo esta concepción deductivista tuvo una gran influencia en Hilbert, sino además su posición empirista.

3. La concepción temprana de la geometría de David Hilbert: 1891-1905

El primer reconocimiento explícito de Hilbert al trabajo de Pasch se encuentra en un curso sobre fundamentos de la geometría que dictó en 1894. Allí Hilbert reconoce haber utilizado como una fuente directa a las *Lecciones sobre la nueva geometría* de Pasch, a la vez que menciona a los *Principios de la mecánica* de Hertz como otra referencia importante. Luego, Hilbert afirma que la geometría es la ciencia del espacio, entendido como la forma externa de las cosas. Para él, al menos como lo declara explícitamente en este texto, el nuevo dispositivo metodológico con el que se propone abordar ahora a la geometría – el método axiomático – no tiene por finalidad, como se suele afirmar, efectuar una desconexión de la geometría con la realidad o experiencia. Es claro que, al menos en esta etapa, la geometría sigue teniendo su *subject-matter* habitual, a saber: el espacio de la intuición sensible – aunque el carácter de esta *Anschauung* es una cuestión que decide allí eludir. Veamos algunos pasajes.

En relación a la definición de la geometría como la ciencia del "espacio", Hilbert sostiene lo siguiente en la introducción de un curso sobre geometría proyectiva dictado en Königsberg en 1891:

> La geometría es la ciencia que se ocupa de las propiedades del espacio. Difiere esencialmente de los campos matemáticos puros, tales como la teoría de los números, el álgebra, o la teoría de funciones. Los resultados de estos últimos pueden ser obtenidos a través del pensamiento puro (...) La situación es completamente diferente en el caso de la

geometría. No puedo nunca penetrar las propiedades del espacio por pura reflexión, del mismo modo que nunca podré reconocer las leyes básicas de la mecánica, la ley de la gravitación o cualquier otra ley física en este modo. El espacio no es un producto de mis reflexiones. Más bien, me es dado a mí a través de los sentidos. (Hilbert 2004: p. 22)

Al igual que toda una tradición antes que él, y en particular entre los matemáticos alemanes, Hilbert distingue en esta etapa inicial de sus investigaciones, dos dominios diferentes en el campo de las matemáticas. Uno, con su origen en la experiencia, y otro, en el pensamiento puro. La geometría pertenece por lo tanto al dominio de las ciencias físicas, o más precisamente, es una ciencia natural, la más perfecta de todas: "Debemos reconocer que la geometría es una *ciencia natural*, pero una cuya teoría puede ser *descrita como perfecta*, y que también provee un ejemplo a ser seguido en el tratamiento teórico de las otras ciencias naturales".[4] (Hilbert 2004: p. 221)

Ahora bien, es precisamente en este punto en donde aparece la concepción deductivista de la geometría sostenida por Hilbert. El novedoso acercamiento a la geometría, el método axiomático, adoptado antes por Pasch, y desarrollado y perfeccionado ahora por Hilbert, es lo que permitirá convertirla en una ciencia matemática pura. Esta es sin duda la finalidad de este nuevo método que se deja traslucir en estos primeros escritos sobre el tema. La idea es, muy esquemáticamente, la siguiente: Para Hilbert, la geometría, al igual que por ejemplo la mecánica, emerge de la observación de la naturaleza, de la experiencia; y en este punto es una ciencia experimental. Sin embargo, sus fundamentos experimentales son tan irrefutables y tan generalmente reconocidos, y han sido confirmados en un grado tan elevado, que ninguna prueba ulterior se considera necesaria para su aceptación. Pero entonces, prosigue Hilbert, "todo lo que se requiere es derivar aquellos fundamentos de un conjunto mínimo de axiomas independientes y así construir todo el edificio de la geometría por medios puramente lógicos. De esta manera, i.e. *por medio del tratamiento axiomático la geometría se convierte en una ciencia matemática pura*". (Citado por Corry 2006: p. 140. El énfasis es mío)

Esta es, quizás, la idea central de la concepción deductivista defendida por Pasch y Hilbert en los dos últimos decenios del siglo XIX y en los comienzos del XX. El origen de los axiomas se halla en la intuición sensible, en la experiencia; más aún, como expresa éste último en los *Grundlagen*, los cinco grupos en los que son agrupados los distintos axiomas de la geometría "expresan cada uno ciertos hechos fundamentales relacionados con nuestra intuición espacial" (Hilbert 1899: p. 2). Sin embargo, hasta allí parece ser requerida la apelación a algún tipo de intuición. Es decir, una vez establecidos los axiomas, la geometría puede y debe ser desarrollada por medios estrictamente lógicos. Es, por decirlo de otro modo, una disciplina autónoma.

La tarea a llevar a cabo, según lo declara Hilbert, corresponde por lo tanto al *análisis lógico de nuestra intuición del espacio*. En sus propias palabras: "establecer los axiomas de la geometría e investigar sus interconexiones es una tarea que hace sido discutida en numerosos excelentes tratados en la literatura matemática desde Euclides. Esta tarea equivale al análisis lógico de nuestra intuición espacial" (Hilbert 1899: p. 1). Luego, en función de lo que venimos señalando, podemos afirmar que el análisis lógico de nuestra intuición del espacio es lo que corresponde específicamente al método axiomático, lo que ha motivado principalmente el trabajo de Hilbert y finalmente la tarea que principalmente se realiza en los *Grundlagen*. El método axiomático es entonces una herramienta para investigar las relaciones lógicas entre los axiomas –

o grupo de axiomas – de un sistema axiomático. El clásico ejemplo es el novedoso procedimiento ideado por Hilbert para demostrar la independencia de un axioma o un grupo de axiomas; verbigracia, el axioma de las paralelas. En este caso, el axioma de las paralelas es reemplazado por una de sus dos negaciones, y si el sistema axiomático resultante llega a tener un "modelo", entonces el nuevo sistema es consistente. Luego, la conclusión que se sigue de allí es que el axioma de las paralelas es independiente al resto de los axiomas del sistema de Euclides.

Ahora bien, lo que quisiera sugerir es que es precisamente en este contexto en el que debe ser entendida la elección arbitraria de los axiomas, dentro de la propuesta axiomática para la geometría presentada por Hilbert en esta etapa inicial de sus investigaciones. Es decir, en virtud de las numerosas referencias dadas en sus cursos universitarios – de las que aquí por cuestiones de extensión sólo damos una exigua referencia – se hace evidente que para Hilbert los axiomas, o más bien, el establecimiento de los axiomas en geometría tiene una vinculación directa con la "intuición espacial", término que sin embargo merece ser indagado en profundidad. De esta manera, la elección deliberada de axiomas que realiza Hilbert debe verse como un procedimiento propio del método axiomático que permite precisamente el análisis lógico de nuestra intuición del espacio, es decir, que permite probar la independencia de un axioma o grupo de axiomas, y no en cambio como un rasgo esencial del conocimiento geométrico. Es cierto que los *Fundamentos de la geometría* se dedican exclusivamente a esta tarea de análisis lógico. Pero sin embargo, la posición de Hilbert respecto del origen intuitivo de los axiomas es indudable, aunque en ocasiones eluda la espinosa cuestión de pronunciarse acerca del carácter de esta intuición:

> Finalmente, podemos describir nuestra tarea como el análisis lógico de nuestra facultad de intuición (*Anschauungvermögen*). Pero la cuestión de si nuestra intuición del espacio tiene un origen a priori o uno empírico permanece sin embargo más allá de nuestra discusión. (Citado por Corry 2006: p. 141)

Por último, esta última afirmación de la aparente naturaleza intuitiva de los axiomas se vincula con la idea de Hilbert de que una versión completamente axiomatizada de la geometría incorporará un sistema de conceptos (*Fachwerk von Begriffen*) que preserva las conexiones llenas de significado con la intuición y la experiencia. Acerca, de esta noción, sostiene Hilbert en las notas para un curso en 1905:

> El propósito de cada ciencia es, en primer lugar, establecer un sistema de conceptos basados en axiomas a cuya misma concepción somos naturalmente guiados por la intuición y la experiencia. Idealmente, todos los fenómenos de un campo dado aparecerán de hecho como una parte de la red conceptual y todos los teoremas que pueden ser derivados de los axiomas encontrarán una expresión allí. (Hilbert 1905: p. 34)

Lo que esto significa para la axiomatización de la geometría es que su punto de partida debe ser dado por los hechos intuitivos de esta disciplina, y que ésta debe estar de acuerdo con el sistema de conceptos creados por medio del sistema axiomático. Empero, los conceptos implicados en la red en sí misma, remarca Hilbert, están totalmente separados de la experiencia y la intuición.

4. Consideraciones finales

El breve examen realizado aquí me lleva, en primer lugar, a la siguiente consideración: si bien es lícito atribuir a Hilbert una posición deductivista en su concepción de la geometría, esta imagen merece ser mejor precisada, incorporando otros elementos que aparecen claramente en sus escritos. En mi opinión, la posición deductivista sostenida por Hilbert no implica un abandono total a la intuición del espacio en geometría. Ello debe sin embargo entenderse correctamente. La intuición del espacio sigue siendo importante en la explicación que da Hilbert de cómo se produce nuestro conocimiento en geometría. O sea, no ya para la deducción de los teoremas, las cuales pueden ser llevadas a cabo por medios estrictamente lógicos, sino para el correcto establecimiento de los axiomas. Éstos, como hemos visto, expresan para Hilbert hechos evidentes – o más bien características esenciales – de nuestra intuición del espacio.

Por otro lado, es preciso remarcar la existencia de importantes limitaciones a la hora de dar cuenta de la concepción temprana de la geometría de Hilbert, por parte de ciertas interpretaciones muy difundidas de su 'formalismo', las cuales se circunscriben casi exclusivamente a los dispositivos metodológicos adoptados por el llamado "programa de Hilbert", llevado a cabo principalmente en los primeros años de la década de 1920. Puntualmente, una consecuencia fundamental que estas interpretaciones le han atribuido al empleo de Hilbert del método axiomático en geometría consiste en destacar la arbitrariedad con la que en principio pueden ser establecidos los axiomas. Este hecho los separa estrictamente de cualquier tipo de intuición del espacio. Sin embargo, en base a los textos aquí presentados, Hilbert no parece pensar que los axiomas de la geometría sean arbitrarios, en el sentido en que el único requisito que debemos exigirles es que sean consistentes. Por el contrario, los axiomas deben reflejar relaciones fundamentales de nuestra intuición del espacio, y eso hace que el tipo de arbitrariedad que tiene Hilbert en mente, sea totalmente distinto respecto del de una posición ciegamente formalista. Como lo señala ya tardíamente, al referirse a la metáfora propia de la posición formalista que identifica a las matemáticas con un juego de ajedrez, "la matemática no tiene nada que ver con la arbitrariedad. La matemática no es de ningún modo un juego, en el que ciertas tareas son determinadas por reglas arbitrariamente establecidas. Más bien, es un sistema conceptual guiado por una necesidad interna, que sólo puede ser así y nunca de otro modo".[5] Un sistema o red de conceptos que en el caso de la geometría tiene su punto de partida, como se ha intentado mostrar, en la intuición del espacio.

Notas

[1] Véase Nagel 1939

[2] Para Pasch la geometría debía ser construida a partir de un núcleo de proposiciones (*Kernsätze*) y conceptos (*Kernbegriffe*) que respondían directamente hechos observables sobre el comportamiento de objetos físicos. Por ejemplo, el término nuclear "punto" refería a aquellos objetos físicos cuya división en partes es incompatible con los límites establecidos por la percepción. Asimismo, estos conceptos nucleares (punto, rectas, planos) no pueden ser definidos, y deben servir de base para la construcción de nuevos conceptos. Ahora bien, una vez establecida la estructura nuclear, todo el material empírico de la geometría estaba ya dado, de modo que no era necesario volver a la experiencia y a la observación. La geometría se vuelve a partir de allí una ciencia abstracta.

[3] Nagel 1939: p. 199

[4] Véase el sexto problema de los *Problemas matemáticos* presentados por Hilbert en 1900, en la ocasión del Congreso Internacional de Matemática en París.

[5] Cfr Corry 1997: p. 115-116.

Bibliografía

Bernays, P. 1967: "David Hilbert", en *The Encyclopedia of Philosophy*, Vol. 4, 2° edición, D. Borchert (ed.), New York, Macmillan Publishing Co., 2006, pp. 357-366.

Corry, L. 1997: "Hilbert and the Axiomatization of Physics", *Archive for History of the Exact Sciences*, vol. 51, pp. 83-198.

——— 2006: "Axiomatics, Empirism, and Anschauung in Hilber's Conception of Geometry", en J. Ferreirós and J. Gray (eds.): *The Architecture of Modern Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, pp. 133-156.

Hilbert, D. 1899: Grundlagen der Geometrie, Festschrift zur Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmales, Leipzig, Teubner.

——— 1905: *Logische Principien des mathematischen Denkens*, Ms. Vorlesung SS 1905. Manuscrito anotado por E. Hellinger, Bibliothek des Mathematischen Seminars, Universität Göttingen.

——— 2004: *David Hilbert's Lectures on the Foundation of Geometry, 1891-1902*. Editado por M. Hallet y U Majer, New York, Springer.

Nagel, E. 1939: "The Formation of Modern Conceptions of Formal Logic in the Development of Geometry", *Osiris*, vol. 7, pp. 142-223.

Pasch, M. 1882: *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, Teubner.

Torretti, R. 1978: Philosophy of geometry From Riemann to Poincaré, Dordrecht, Reidel.