EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XIX JORNADAS
VOLUMEN 15 (2009)

Diego Letzen
Penélope Lodeyro

Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Principios de la relatividad especial

*Osvaldo M. Moreschi**

1. Introducción

1.1. Antecedentes históricos

El desarrollo de la física nos ha mostrado en varias oportunidades la aparición de nuevos marcos teóricos. Luego de la formulación del marco teórico de la física newtoniana con la estructura de las transformaciones de Galileo, probablemente el que mayor impacto causó, fue el de la física relativista con la aparición de la relatividad especial.

Desde un punto de vista histórico la relatividad especial aparece como un desarrollo natural de la física que describe las interacciones electromagnéticas. Dado que a fines del siglo XIX se conocían las llamadas ecuaciones de Maxwell, que describen los campos electromagnéticos, que incluyen una constante con unidades de velocidad, que llamaremos c.

Lo destacable de la física de las interacciones electromagnéticas, es que se observó que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante un grupo de transformaciones distintas a las transformaciones de Galileo, las llamadas transformaciones de Lorentz.

Esta situación tomó un tiempo para que se entendiera. Conocidos son los trabajos de Lorentz[Lor52] en los que postulaba contracciones físicas para entender las transformaciones inherentes en los fenómenos electromagnéticos.

La clarificación de la problemática surge con el trabajo de Albert Einstein con la publicación de su célebre artículo de 1905 [Ein52]. En este artículo Einstein señala que las transformaciones de Lorentz deben ser consideradas como análogas a las de Galileo; esto es, las transformaciones entre sistemas inerciales.

Para fundamentar este punto de vista, Einstein parte de dos postulados: el *Principio de la Relatividad* y el *Principio de unicidad de la velocidad de la luz*. Este principio se puede expresar de la siguiente manera:

P 1.1 (Principio de unicidad de la velocidad de la luz) *La luz se propaga en el vacío con una velocidad determinada c que es independiente del estado de movimiento del cuerpo emisor.*

Einstein logró una síntesis en estos dos principios, dado que por medio de ellos dedujo las transformaciones de Lorentz. Más aún, afirmó:

> "Estos dos postulados son suficientes para obtener una teoría simple y consistente de la electrodinámica de los cuerpos en movimiento basada en la teoría de Maxwell para cuerpos estacionarios. La introducción de un éter lumínico se encontrará que es superflua en la medida en que la visión que se desarrollará aquí no requerirá un espacio absoluto estacionario con propiedades especiales ... "[Ein52]†

* Investigador del CONICET. FaMAF, Universidad Nacional de Córdoba. Email: moreschi@fis.uncor.edu

† Traducción libre del autor.

1.2. Temas relacionados

1.2.1. Taquiones; problema directo con causalidad

En la literatura se ha usado la palabra *taquión* para designar a una partícula hipotética que viajase con velocidad mayor que la velocidad de la luz. La idea de que sea concebible la existencia de partículas con tales velocidades es sólo posible si uno entiende que c es una característica de las interacciones electromagnéticas, y por lo tanto de la luz, pero no del espaciotiempo. Pero esto es posible sólo si uno acepta la validez del principio 1.1, pero no del Principio de la Relatividad.

Es necesario detenernos un momento en esta afirmación, pues implica un entendimiento tácito del Principio de la Relatividad. Más adelante haremos una presentación precisa del Principio de la Relatividad, en este momento basta que lo tomemos con el significado de que todas las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema inercial. En particular la ley de causalidad se debe aplicar de la misma forma en dos o más sistemas inerciales.

Pero esto está en contradicción con la existencia de los taquiones. Supongamos que un observador O_- en el sistema inercial K_- afirma que un taquión parte del evento A y llega al evento B un poco más tarde; por lo cuál, haciendo uso del principio de causalidad, diría que A puede afectar a B. Por ejemplo, podemos pensar que un niño compra un revolver que puede disparar balas taquiónicas, disparando en el evento A y rompiendo un vaso en el evento B.

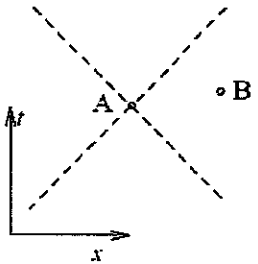

Figura 1. Situación vista por el observador O₋ en el sistema inercial K₋. Las líneas inclinadas indican posible trayectoria de la luz desde el evento A.

Sin embargo, si usamos las transformaciones de Lorentz, vemos que existe un observador O_+ en un sistema inercial K_+ que afirma que B ocurre antes que A; por lo que el vaso se rompe antes de que el niño tire el taquión.

Más aún, existe otro observador O_0, en un sistema inercial K_0, para el cuál los dos eventos A y B ocurren al mismo tiempo.

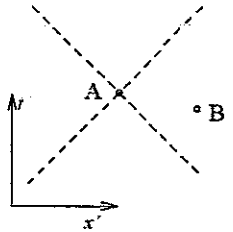

Figura 2. Situación vista por el observador O_+ en el sistema inercial K_+. Las líneas inclinadas indican posible trayectoria de la luz desde el evento A.

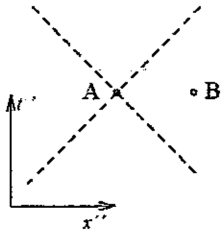

Figura 3. Situación vista por el observador O_0 en el sistema inercial K_0. Las líneas inclinadas indican posible trayectoria de la luz desde el evento A.

Esto demuestra que la existencia de los taquiones es inconsistente con la interpretación del Principio de la Relatividad por medio de las transformaciones de Lorentz como las transformaciones entre sistemas inerciales.

La alternativa a la interpretación normal de la relatividad especial; es suponer que la velocidad de la luz en el vacío c no es una velocidad máxima; lo que implicaría que las transformaciones de Lorentz entonces no son las transformaciones entre sistemas inerciales. Si este fuera el caso, entonces no habría inconvenientes con la existencia de partículas que viajasen más rápido que la velocidad de la luz. En particular, se observan partículas que viajen más rápido que la luz; por ejemplo en medios con índice de refracción apropiados. En estos casos se observa el llamado efecto Cherenkov. Pero estas partículas no viajan a mayor velocidad que c.

Si la velocidad de la luz no fuese una velocidad máxima, existiría la posibilidad de que existiese otra interacción con una velocidad característica c' que proveyese de una velocidad máxima. Las otras interacciones conocidas son las interacciones: gravitatoria, débil y fuerte. Sin embargo estas tres interacciones también comparten la misma velocidad característica c.

Es así que llegamos a la conclusión de que el hecho de que la velocidad c se haya dilucidado históricamente en primer lugar por medio del estudio de la interacciones electromagnéticas; no significa que esta velocidad fuese una propiedad exclusiva de dichas interacciones, sino del espaciotiempo.

Como curiosidad mencionamos que c tiene el valor exacto $c = 299{,}792{,}458$ metros por segundo; por lo que si tenemos una determinación independiente de un segundo, esta relación definirá el valor del metro. Esto es precisamente lo que se hace en el Sistema Internacional de Unidades.

En lo que sigue, presentaremos un principio alternativo al 1.1 enfatizando la interpretación de la relatividad especial.

2. Cinemática galileana

Con el objeto de facilitar el estudio de similitudes y diferencias de la relatividad especial con la mecánica clásica no-relativista repetimos aquí los principios básicos de la mecánica clásica[Mor00].

2.1. Recapitulación de los Principios de la mecánica clásica

Hemos usado ya la noción de sistemas inerciales. Debido a que juegan un rol fundamental en toda esta discusión, es conveniente presentarlos formalmente. Lo haremos a través de un principio.

P 2.1 Principio de existencia de los sistemas inerciales:

Dado un sistema mecánico, que consta sólo de un conjunto de partículas de prueba, existe una familia de sistemas de coordenadas para los cuales las trayectorias de las partículas son líneas rectas. A estos sistemas se los denomina sistemas inerciales.

Debido a que se asume que las características del espacio no son influenciadas por la presencia o no de la materia, el principio implica la existencia de los sistemas inerciales incluso para el caso de una distribución arbitraria de masas. Se deduce que el espacio M^3 es en realidad el espacio Euclídeo de tres dimensiones, denotado por E^3. Además, la variedad T correspondiente al tiempo también posee una estructura métrica, que se identifica con la recta real R . De aquí se deducen las simetrías del espaciotiempo, que definen al llamado grupo de Galileo.

Conviene remarcar que estas simetrías nos dan las posibles transformaciones entre los sistemas inerciales; cuya importancia queda de manifiesto en el siguiente principio.

P 2.2 Principio de la relatividad

Todo sistema cartesiano en movimiento uniforme rectilíneo respecto de un sistema inercial es también un sistema inercial.

Las leyes de la física son las mismas en cualquier sistema inercial de referencia.

Además en la mecánica clásica también es válido el siguiente principio:

Principio de determinación de la mecánica no-relativista:

El estado mecánico de un sistema queda determinado por el valor de las posiciones y velocidades de sus partículas a un determinado tiempo. O sea, es posible predecir su ulterior movimiento.

En el planteamiento de los fundamentos de la física galileana existe la tácita suposición de que las interacciones entre partículas poseen una velocidad instantánea de propagación. Esto tiene como consecuencia que las transformaciones de Galileo dejan invariante la estructura $R \times E^3$ del espaciotiempo; o sea las transformaciones conservan distancias temporales y distancias Euclidianas del espacio.

En particular, un análisis de las implicaciones del principio de determinación de la mecánica clásica permite ver que en realidad contiene tácitamente la suposición de una velocidad instantánea en la propagación de las interacciones.

3. Principio de la relatividad especial

En la relatividad especial tomaremos como válido nuevamente los principios 2.1 y 2.2; con la única diferencia de que ahora no asumiremos que las interacciones poseen una velocidad instantánea de propagación.

En el siguiente principio se establece que las interacciones no son de acción instantánea; sino que respetan la existencia de un límite a la velocidad de propagación de las mismas:

P 3.1 *Existe una velocidad finita máxima para la velocidad de propagación de las interacciones.*

Este principio tiene importante implicaciones; en particular probaremos en lo que sigue que este principio es suficiente para deducir la forma de las transformaciones entre sistemas inerciales. Una manera acostumbrada de darle realidad física a un punto del espaciotiempo es por medio del concepto de evento; por el cual se pude entender un suceso puntual pensado. De esta manera es usual referirse al evento tal o cual, en vez del punto del espaciotiempo tal o cual.

4. Deducción de las transformaciones de Lorentz

Para simplificar la discusión nos restringiremos por el momento a una sola dimensión espacial. Supongamos que estamos en un sistema inercial; luego, existirá una velocidad máxima de propagación de las interacciones v_0, medida respecto de ese sistema inercial, y por lo tanto, para una perturbación que se propaga del evento 1 al evento 2, valdrá:

$$(x_2 - x_1) = v_0(t_2 - t_1); \tag{1}$$

donde para fijar ideas estamos asumiendo $v_0 > 0$. Si usásemos otro sistema inercial que se mueve respecto del primero con velocidad V, deberá valer una ecuación análoga (debido al principio 2.2), o sea:

$$(x'_2 - x'_1) = v'_0(v_0, V)(t'_2 - t'_1); \tag{2}$$

donde, por generalidad asumimos que la velocidad máxima en el nuevo sistema primado puede ser distinta, por lo que denotamos con v'_0 la velocidad máxima de propagación de interacciones en el sistema primado, que obviamente debe tener una relación funcional con v_0 y V. Uno espera que esta relación funcional en particular satisfaga:

$$v'_0(v_0, 0) = v_0 \tag{3}$$

y

$$v'_0(\infty, V) = \infty. \tag{4}$$

Similarmente a lo que ocurre en el caso no relativista, se deduce que la relación entre dos sistemas inerciales debe ser una transformación lineal (para que las rectas sigan siendo rectas).

Veamos si podemos deducir la forma de estas transformaciones.

Debido a la condición de linealidad, debe ser que

$$x' = \alpha\, x + \beta\, t, \tag{5}$$

$$t' = \sigma\, x + \delta\, t; \tag{6}$$

donde α, β, σ y δ son funciones sólo de v_0 y V. Tomando $x' = 0$ se obtiene

$$\frac{x}{t} = -\frac{\beta}{\alpha} = V; \tag{7}$$

y tomando $x = 0$ se obtiene

$$\frac{x'}{t'} = \frac{\beta}{\delta} = -V; \tag{8}$$

de donde se deduce que

$$\alpha = \delta. \tag{9}$$

Por lo tanto las transformaciones originales se pueden expresar por

$$x' = \alpha\,(x - V\,t) \tag{10}$$

$$t' = \sigma\,x + \alpha\,t. \tag{11}$$

Esta última ecuación sugiere la definición de la cantidad S por medio de $\alpha = \sigma S$; de tal forma que se puede expresar

$$t' = \alpha(S\,x + \,t). \tag{12}$$

Luego se tiene

$$\begin{aligned}(x'_2 - x'_1) &= \alpha\,(x_2 - x_1 - V(t_2 - t_1)) \\ &= v'_0\alpha\,(S(x_2 - x_1) + (t_2 - t_1))\,;\end{aligned} \tag{13}$$

donde, reemplazando la relación

$$(x_2 - x_1) = v_0(t_2 - t_1); \tag{14}$$

se obtiene

$$v_0 - V = v'_0\,(Sv_0 + 1)\,; \tag{15}$$

de donde se deduce que

$$S = \frac{v_0 - V}{v_0 v'_0} - \frac{1}{v_0} = \frac{v_0 - v'_0 - V}{v_0 v'_0}. \tag{16}$$

Por último, se desea excluir las transformaciones que incluyan dilataciones, pues esto sería como cambiar el sistema de unidades por medio de la transformación; por este motivo se pide que el determinante de la transformación sea 1. El determinante de la transformación es el determinante de la matriz

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & -V \\ S & 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

de donde se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + SV}} \tag{18}$$

Aquí es natural hacerse la siguiente pregunta: si en el sistema original se observa una partícula moviéndose con velocidad vx que satisface $-v_0 < v_x < v_0$; y tomando en cuenta que la velocidad del segundo sistema inercial es tal que $-v_0 < V < v_0$, ¿se deduce entonces que $-v'_0 < v'_x < v'_0$.

Si esto no fuese cierto, entonces v'_0 no sería la velocidad máxima en el segundo sistema. De las transformaciones entre los sistemas de coordenadas se deduce que

$$v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - V\,dt}{S dx + dt} = \frac{v_x - V}{1 + S v_x}. \tag{19}$$

Consideremos la desigualdad $v'_x < v'_0$; de donde se obtiene

$$v_x - V < v'_0 + S v_x v'_0 = v'_0 + v_x \left(\frac{v_0 - v'_0 - V}{v_0} \right); \tag{20}$$

que es equivalente a

$$V(v_x - v_0) < v'_0(v_0 - v_x); \tag{21}$$

que debe valer para todo signo de V, de donde se deduce que se debe satisfacer

$$|V| < v'_0. \tag{22}$$

Pero como se supone originariamente que

$$|V| < v_0; \tag{23}$$

se deduce que para garantizar (22) debe valer

$$v_0 \le v'_0. \tag{24}$$

Repitiendo el mismo análisis pero intercambiando los sistemas inerciales se obtiene

$$v'_0 \le v_0. \tag{25}$$

De donde se deduce que para que todas estas afirmaciones sean consistentes, debe valer que

$$\boxed{v'_0 = v_0}. \tag{26}$$

O sea que se deduce, del principios de la relatividad 2.2 y del principio de la existencia de una velocidad máxima de las interacciones 3.1, que la velocidad máxima de las interacciones es la misma para todos los sistemas inerciales. Esto que hemos deducido fue propuesto originariamente por Einstein[Ein52] como un postulado independiente para la formulación de la teoría de la relatividad especial, aplicable a la velocidad de la luz.

Como la velocidad máxima de las interacciones es la misma en todos los sistemas de referencia, se constituye en una nueva constante universal de la física. Es costumbre denotar a la velocidad máxima de las interacciones por c.

De esta forma se obtiene

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \tag{27}$$

$$S = \frac{-V}{c^2} \tag{28}$$

En definitiva, se concluye que las transformaciones finales son:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}\, x}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad , \quad x' = \frac{x - V\, t}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}. \tag{29}$$

Las transformaciones completas para las cuatro coordenadas, para el caso de un sistema que se mueve respecto del otro con velocidad V en la dirección del eje de las x son:

$$t' = \frac{t - \frac{V}{c^2}x}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad x' = \frac{x - V\,t}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z; \tag{30}$$

que reconocemos como las llamadas *transformaciones de Lorentz.*

Es interesante notar que el límite newtoniano de las *transformaciones de Lorentz*, esto es cuando $c \to \infty$, o equivalentemente cuando las velocidades relativas de los sistemas involucrados son muy pequeñas comparadas con c, son casualmente las transformaciones propias de Galileo.

De esta manera la cinemática de la relatividad especial se presenta como una extensión natural de la mecánica clásica no relativista.

5. Invariancia de la distancia minkowskiana: La métrica de Minkowski

Dados dos eventos, 1 y 2, definamos la cantidad

$$\delta_{12} \equiv c^2(t_2-t_1)^2 - \left((x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2\right). \tag{31}$$

Siempre podemos elegir un sistema cartesiano, tal que los dos eventos están sobre el eje x. De esta forma se obtiene

$$\delta_{12} = c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2. \tag{32}$$

En un sistema que se mueve con velocidad V , a lo largo del eje x, respecto del primero, se tendrá

$$\delta'_{12} = c^2(t'_2-t'_1)^2 - (x'_2-x'_1)^2; \tag{33}$$

donde se puede hacer uso de las ecuaciones (30), obteniéndose

$$\begin{aligned} \delta'_{12} &= c^2\left(\frac{t_2-t_1-\frac{V}{c^2}(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)^2 - \left(\frac{x_2-x_1-V\,(t_2-t_1)}{\sqrt{1-\left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)^2 \\ &= c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 = \delta_{12}. \end{aligned} \tag{34}$$

Es decir, para cualquier par de eventos existe una cantidad, δ_{12}, que es un invariante ante transformaciones de Lorentz. Al ser una expresión cuadrática de la diferencia de las coordenadas cartesianas, se ve que estas transformaciones dejan invariante una forma cuadrática, la cual normalmente se denomina métrica del espaciotiempo.

Si los eventos están separados por diferencias de coordenadas: Δt, Δx, Δy, Δz; el invariante δ estará dado por

$$\delta \equiv c^2\Delta t^2 - \left(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right) \tag{35}$$

Vemos entonces que respecto de un sistema cartesiano, la métrica se puede expresar por la matriz η dada por

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{36}$$

de tal manera que si definimos las coordenadas $x^0 = ct$, $x^1 = x$, $x^2 = y$ y $x^3 = z$, se puede expresar al invariante δ en término de la notación de índices, por

$$\delta = \eta_{ab}\,\Delta x^a\,\Delta x^b; \tag{37}$$

donde a, b = 0, 1, 2, 3 y estamos usando la notación de que índices repetidos se suman.

La métrica ηse la denomina métrica minkowskiana, o de Minkowski.

Se observa que dados dos eventos en el espaciotiempo, el valor de δ será positivo, cero o negativo. De esta manera vemos que dado un evento de referencia, digamos o, podemos dividir al resto del espaciotiempo en varias regiones dependiendo de si δ es positivo, cero o negativo, como muestra la figura 4.

La aplicación del principio de causalidad a esta situación, establece que los eventos que pueden influenciar al punto de referencia o deben estar sobre su cono pasado o en el pasado temporal de o.

Conviene remarcar que en la situación newtoniana, el pasado temporal de o está constituido por todos lo puntos tales que su coordenada temporal sea menor que la de o. Sin embargo en la presente situación relativista, el pasado temporal de o está dado por el conjunto de puntos encerrado por el cono pasado de o.

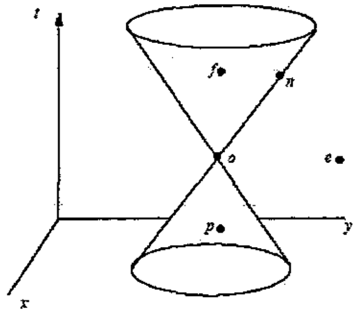

Figura 4: Diagrama espacio-temporal en las cercanías del punto de observación. El eje temporal es vertical y se han graficado sólo dos direcciones espaciales horizontalmente. El punto o es el punto de referencia; el punto f está en el futuro del punto de observación; el punto e está a una distancia espacial de o; mientras que el punto n está a una distancia nula. Existe un cono nulo futuro, que encierra al futuro temporal de o, y un cono nulo pasado, que encierra al pasado temporal del punto de observación. El resto de los puntos, exteriores a los conos, están a distancias espaciales de o.

6. Comentarios finales

Las implicaciones del principio de la unicidad de la velocidad de la luz en distintos sistemas inerciales, postulado por Einstein en 1905, a sido tema de estudio desde artículos que se remontan a la década de 1910 de Ignatowsky hasta recientes trabajos de la década del 2000. Entre otras cosas Ignatowsky[vI10] estudió la relación entre cuerpos rígidos y relatividad especial y sugirió la posibilidad de señales que viajasen a velocidades mayores que la velocidad de la luz, en contradicción con nuestra presentación. Diversos autores han producido derivaciones[FR11, Pal03, Gan07] de las transformaciones de Lorentz con suposiciones distintas al postulado de Einstein de la unicidad de la velocidad de la luz, pero no tenemos conocimiento de otra presentación como la nuestra en que se enfatiza la diferencia de la estructura causal de los espaciotiempos galileano y minkowskiano.

Vemos entonces que la relatividad especial se la puede entender como consecuencia del principio 3.1, que establece la existencia de una velocidad máxima para las interacciones y por lo tanto para la materia, de donde se deducen las transformaciones de Lorentz, la invariancia de la métrica minkowskiana y por ende su estructura causal.

El principio 3.1 es una ley universal de la naturaleza, como se explicó en [Mor07].

Al ser un principio menos exigente que el empleado por Einstein y tener las mismas implicaciones, es preferible su uso. Además tiene la ventaja de ahorrar los esfuerzos del estudio de partículas hipotéticas que pudiesen viajar a mayor velocidad que *c*.

Bibliografía

[Ein52] A. Einstein. On the electrodynamics of moving bodies. In The Principle of Relativity. Dover pub. Inc., New York, 1952. Translated from: Z¨ur Elektrodynamik bewegter K¨orper, Annalen der Physik, 17, 1905.

[FR11] P. Frank and H. Rothe. ¨Uber die Transformation der Raum-Zeitkoordinaten von ruhenden auf bewegte Systeme. Annalen der Physik, 339 (5):825–855, 1911.

[Gan07] Joel W. Gannett. Nothing but relativity, redux. Eur.J.Phys., 28:1145–1150, 2007.

[Lor52] H. A. Lorentz. Michelson's interference experiment. In The Principle of Relativity. Dover pub. Inc., New York, 1952. Translated from: Versuch einer Theorie der electrischen und optischen Erscheinungen in bewegen K¨orpern, Leiden, 1895, 89-92.

[Mor00] O.M. Moreschi. Fundamentos de la Mecánica de Sistemas de Partículas. Editorial Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, 2000.

[Mor07] Osvaldo M. Moreschi. Leyes universales en ciencias. Epistemología e Historia de la Ciencia, 13:389–396, 2007.

[Pal03] Palash B. Pal. Nothing but relativity. Eur.J.Phys., 24:315–319, 2003. [vI10] W. v. Ignatowsky. Der starre K¨orper und das Relativit¨atsprinzip. Annalen der Physik, 338 (13):607–630, 1910.