EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Cuando Newton se encontró con Riemann y Abel

*Victor Rodriguez**

Introducción

Este es un trabajo sobre historia de la ciencia, con algunas reflexiones meta-históricas conectadas parcialmente con la filosofía de la ciencia. La trama del trabajo está elaborada desde la perspectiva del contexto de descubrimiento en filosofía de la ciencia y el foco conceptual es la división un tanto vaga entre historia interna e historia externa, tomadas como estrategias metodológicas en historia de la ciencia. Se intenta dar un marco, a través de un caso histórico bastante conspicuo, para una reelaboración del concepto de "historia interna" y se extraen algunas implicancias metodológicas de la misma.

La tesis que se intenta defender, o dicho de otro modo, el punto de vista que se adopta aquí, puede ser expresado en los siguientes términos: es posible y conveniente caracterizar el concepto de historia interna a través de una estratificación jerárquica de niveles, asociados con el grado conocimiento que los actores, tanto historiadores, filósofos, o científicos en actividad, tengan acerca del capítulo de la historia en cuestión. El alcance o la generalización de este punto de vista es materia de discusión, pero considero que es adecuado para el caso particular que analizaremos, relacionado con la producción matemática de Newton.

Al respecto, parece conveniente comenzar con una pregunta que suena razonable cuando uno se enfrenta con personajes históricos, con sus productos y contextos tan trabajados por la historiografía, como es el caso de Newton. Si bien no creo que Newton llegue a la altura de Galileo en la preferencia de los historiadores y comentaristas de variada índole, fundamentalmente porque su obra es mucha más técnica y requiere un *background* mucho más elaborado, sin duda se trata de un capítulo de la historia de la ciencia sobre el que se ha trabajado extensamente. La pregunta es la siguiente: ¿Qué se puede decir hoy sobre Newton que suene relativamente original?

Si nos situamos en 1987, a 300 años de los "Principia", el paisaje es realmente exuberante. Pocos fueron los historiadores y filósofos de la ciencia que no dijeron nada por ese entonces. Uno podría a partir de ese contexto tener la impresión de que se trata de un campo relativamente agotado, salvo tecnicismos de segundo rango o cuestiones ambientales bastante indirectas al contexto de la historia interna. Los temas predilectos fueron las concepciones corpuscular y ondulatoria de la luz, el método de Newton, el origen del cálculo, sus excursiones por disciplinas periféricas, el lugar de los Principia hoy, y el contraste entre la física clásica de neto corte newtoniano con los grandes cambios en las concepciones del siglo XX.

Los historiadores de la matemática también participaron activamente en estos homenajes, pero su labor ha escapado en buena medida a la consideración de los filósofos. Es difícil opinar con responsabilidad sobre obras eruditas en torno de Newton, como la de Whiteside, si uno no decide invertir un tiempo considerablemente largo en su estudio detallado. No obstante, a los fines de una cultura general, uno puede quedarse con la ortodoxia de los

* Facultad de Filosofía y Humanidades, Universidad Nacional de Córdoba.

historiadores generales de la matemática, y extraer de allí un paisaje matemático newtoniano aceptable para los cánones de la comunidad de historiadores y filósofos de la ciencia.

Newton fue considerado como un gran matemático para matemáticos de la estatura de Gauss, Abel, Riemann, entre otros. Es por ello que las fuentes para un abordaje histórico de sus ideas son realmente numerosas. Su obra es muy compleja y muy variada. En consecuencia, a los efectos de dar un contexto para el ejemplo principal de este trabajo, esbozaré un panorama de los principales aportes en matemáticas realizados por Newton. Se ha tomado para ello como bibliografía principal la que se cita al final y un conjunto de fuentes monográficas secundarias. Se intenta dar una imagen razonablemente ortodoxa, dejando de lado discusiones contemporáneas de considerable tecnicismo que en muchos casos están más allá de mi nivel de especialización en el tema.

De acuerdo con el conjunto de historiadores de la matemática tenidos en cuenta para este trabajo (ver bibliografía), un breve compendio de la producción matemática de Newton podría ser el siguiente:

Newton matemático:

Es sabido que hizo aportes en numerosos campos de la matemática. En el campo de las series y en particular de las series de potencias; daba gran importancia a los desarrollos en serie de potencias porque suministraban un método para reducir los modos analíticos de expresar las curvas a una forma canónica en la que los términos eran coeficientes constantes para una potencia variable. Es bien conocido su teorema de la serie binómica. Aunque la convergencia de las series estuvo fuera de su alcance, mostró una perspicacia notable en el tratamiento de las mismas. Tiene trabajos sobre interpolación, sobre el cálculo de diferencias. Elaboró una clasificación de una vasta categoría de curvas algebraicas y trascendentes. Introdujo el método de los coeficientes indeterminados. En los Principia se puede apreciar una concepción acerca del límite y de la continuidad que anticipa ideas desarrolladas posteriormente. Hizo uso de coordenadas con valores negativos. Trabajó curvaturas, áreas, longitudes de curvas y aportó a la teoría algebraica de superficies. Brindó elementos para trabajos posteriores sobre cuadraturas de curvas. Aplicó el cálculo diferencial a problemas de tangentes con uso de diferenciación parcial. Mantuvo un gran interés por las secciones cónicas y también clasificó curvas cúbicas. Es de destacar su método de estudio de un fragmento de curva en la vecindad de un punto dado por medio de series de potencia, en esencia, captó la relación inversa entre diferenciación e integración y contribuyó al tratamiento de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Su tabla de integrales es significativa al respecto.

Es necesario recordar que si bien sus métodos fueron realmente efectivos, la justificación de los mismos en muchos casos estaba lejos de ser suficientemente clara. Tenía el hábito de enunciar sus problemas de modo geométrico y luego introducía fórmulas y manipulaciones algebraicas donde aparecían útiles. En ocasiones su optimismo en relación con sus métodos lo llevó demasiado lejos, como cuando le informa a Leibniz que sabe resolver todas las ecuaciones diferenciales. Leibniz le contesta que de lo que se trata es por el contrario de obtener siempre que se pueda la solución en términos finitos suponiendo cuadraturas, y también de saber si toda cuadratura puede reducirse a las del círculo y la hipérbola, dudando sobre el método de las series para responder a estas cuestiones.

Sin duda que el sector más conocido y trabajado por los historiadores ha sido el relacionado con el método de las fluxiones. Hay cierto consenso en que el lenguaje de las fluxiones representa una avance significativo sobre los métodos cinemáticos vinculados a consideraciones geométricas para el período que nos ocupa y el inmediato posterior a Newton, fundamentalmente por su influencia en los matemáticos ingleses.

Muchos de sus métodos permiten ya resolver un gran número de problemas que se reducen a cuadraturas elementales. Las cuadraturas jugaron un rol verdaderamente importante, como así también las funciones circulares. Las cuadraturas son objeto de numerosos trabajos de Huygens, Wallis, Gregorio de Saint Vincent, y Gregory. Quienes en buena medida anticipan los de Newton, Leibniz y Mercator sobre métodos generales de desarrollos en serie. Lentamente emerge la impresión de la imposibilidad de las cuadraturas en cuestión. Esto significa que se comenzaba a captar el carácter no algebraico de las funciones definidas por ellas. Adicionalmente, la resolución de problemas adquiere una nueva fase. Se considera que un problema está resuelto cuando se reduce a una serie de estas cuadraturas imposibles.

Es necesario un comentario, aunque sea breve sobre los problemas de rectificación de curvas. En la antigüedad clásica se habían tratado los casos del círculo y de la esfera. El siglo XVII muestra las dificultades que aparecen en el tratamiento de la rectificación de la elipse. Finalmente, para adecuar nuestro contexto al ejemplo que queremos tratar, es conveniente mencionar también la variación de la ponderación por parte de Newton del libro Décimo de *Los Elementos* de Euclides, en especial lo de las magnitudes inconmensurables. En materia de lenguaje matemático, la notación de Leibniz fue considerada como superadora de la newtoniana. Este es un punto importante para el argumento principal de este trabajo, ya que si ciertas ideas de Newton, como la que se tratará en adelante, pasaron desapercibidas por las generaciones posteriores, en gran parte se ha debido a que el estilo lingüístico de Leibniz no permitió captar adecuadamente las sutilezas de la argumentación newtoniana. Debo esta reflexión, como buena parte del enfoque en torno del ejemplo, a V. Arnold (ver bibliografía).

Concluyo el pequeño paisaje matemático newtoniano con un comentario de corte epistemológico. Observando con cierto detenimiento *los Principia,* Newton exhibe una suerte de empirismo moderno. La matemática es un método más que una forma de explicación. De este modo evitó dar ciertas respuestas a preguntas que iban más allá de las potencialidades de sus cálculos. De cualquier manera, por tratarse de un personaje que ha exhibido muchos rostros a los historiadores de la ciencia, también debe decirse que algunos especialistas opinan que el hecho de que newton tardara tanto en publicar sus métodos se debía a que no estaba convencido de sus fundamentos lógicos. Es probable que algo así haya sucedido, pero lo que en mi opinión no es posible negar es la versatilidad newtoniana, que en ciertos casos recuerda a pensadores afines al pragmatismo metodológico contemporáneo. Por ejemplo, en los Principia se insinúan los tres modos de interpretación del nuevo análisis: en términos de infinitesimales, en términos de razones primeras y últimas o límites, y en términos de fluxiones. Lo notable es que los haya presentado como esencialmente equivalentes.

Dado este marco general, vayamos ahora al caso específico bajo consideración en este trabajo. Se trata de un aporte notable expuesto en el Lema XXVIII de *Los Principia*:

EL LEMA XXVIII:

Nulla extat figura ovalis cujus area, rectis pro lubitu abscissa, possit per aequationes numero terminorum ac dimensionum finitas generaliter inveniri

Veamos una traducción al castellano del lema XXVIII de *Los Principia*:

"No hay curva con figura oval cuya área, cortada por líneas rectas a placer, pueda hallarse en general por medio de ecuaciones de cualquier número de términos y dimensiones finitos.

Supóngase que dentro del óvalo es dado cualquier punto, alrededor del cual gira como polo continuamente con movimiento uniforme una línea recta, mientras en esa recta un punto móvil saliendo desde el polo se mueve siempre hacia delante con una velocidad proporcional al cuadrado de esa recta dentro del óvalo. Mediante tal movimiento ese punto describirá una espiral con giros infinitos. Si una porción del área de la figura oval desgajada por esa línea recta pudiera hallarse mediante una ecuación finita, la distancia del punto con respecto al polo, que es proporcional a esa área, podría hallarse mediante la misma ecuación y, en consecuencia, podrían descubrirse también todos los puntos de la espiral mediante una ecuación finita, así como la intersección de una recta dada en posición. Pero cada recta prolongada infinitamente corta a una espiral en un número infinito de puntos; y la ecuación en cuya virtud se descubre cualquier intersección singular de dos líneas exhibe al mismo tiempo todas sus intersecciones por otras tantas raíces, y se eleva a tantas dimensiones como intersecciones hay. Como dos círculos se cortan el uno al otro en dos puntos, una de esas intersecciones sólo se hallará mediante una ecuación de dos dimensiones, mediante la cual puede hallarse también la otra. Como en dos secciones cónicas puede haber cuatro intersecciones, cualquiera de ellas sólo puede hallarse mediante una ecuación de cuatro dimensiones, con la cual pueden averiguarse todas ellas. Pues si esas intersecciones se buscan separadamente, dado que la ley y condición de todas es idéntica, el cálculo será el mismo en todos los casos y por lo mismo, la conclusión, que en consecuencia debe comprender todas esas intersecciones simultáneamente dentro de sí, y mostrarlas todas indistintamente. De ello se sigue que las intersecciones de las secciones cónicas con las curvas del tercer grado, donde pueden elevarse a seis, se resuelven juntas por ecuaciones de seis dimensiones; y las intersecciones de dos curvas del tercer grado, como pueden elevarse a nueve, se resuelven conjuntamente mediante ecuaciones de nueve dimensiones. Si esto no sucediese necesariamente, podríamos reducir todos los problemas de sólidos a problemas de planos, y aquellos de orden superior a los sólidos a problemas de sólidos. Pero hablo aquí de curvas de potencia irreducible. Pues si la ecuación mediante la cual se define la curva puede reducirse a una potencia inferior, la curva no sería singular, sino compuesta por dos o más, cuyas intersecciones pueden hallarse separadamente por diferentes cálculos. Del mismo modo las dos intersecciones de líneas rectas con las secciones cónicas se resuelven siempre por ecuaciones de dos dimensiones; las tres intersecciones de líneas rectas con las curvas irreducibles del tercer orden por ecuaciones de tres dimensiones; las cuatro intersecciones de rectas con las curvas irreducibles de cuarto orden por ecuaciones de cuatro dimensiones, y así sucesivamente hasta lo infinito. Por lo cual las innumerables intersecciones de una recta con una espiral, dado que se trata de una curva simple y no reducible a más curvas, requieren ecuaciones infinitas en número de dimensiones y raíces. Porque la ley y el cálculo de todas es el mismo. Pues si se abate una perpendicular desde el polo sobre esa recta intersectante, y esa perpendicular junto con la línea intersectante gira en torno al polo, las intersecciones de la espiral pasarán mutuamente la una a la otra; y la que era primera o más próxima será segunda tras una revolución, tercera tras dos y así sucesivamente. Mientras tanto, la ecuación no se modificará sino en la medida en que se cambien las cantidades mediante las cuales se determina la posición de la línea intersectante. En consecuencia, la ecuación retornará a su forma primera debido a que esas cantidades retornan a sus magnitudes iniciales después de cada revolución; por lo cual una y la misma ecuación mostrará todas las intersecciones, teniendo por lo mismo un número infinito de raíces. Así pues, la intersección de una recta con una espiral no puede hallarse en general por ninguna ecuación finita; y, en consecuencia, no hay figura oval cuya área, desgajada a placer por rectas, pueda mostrarse en general mediante ninguna ecuación semejante.

Por el mismo argumento, si el intervalo del polo y el punto mediante el cual se describe la espiral se toma proporcional a aquella parte del perímetro de la figura ovalada que se desgaja, puede probarse que la longitud del perímetro no puede mostrarse por ninguna ecuación finita. Pero hablo aquí de óvalos que no son tocados por figuras conjugadas que se alejan hasta lo infinito."

Corolario:

"En consecuencia, el área de una elipse, descrita por un radio trazado desde el foco hasta el cuerpo en movimiento, no podrá hallarse partiendo del tiempo dado mediante una ecuación finita; y, por lo mismo, no podrá ser determinada por la descripción de curvas geométricamente racionales. Llamo geométricamente racionales a aquellas curvas donde todos los puntos pueden ser determinados por longitudes definibles mediante ecuaciones, esto es, por razones complejas de longitudes. Llamo irracionales a otras curvas (como espirales, cuadratrices y cicloides o trocoides). Pues las longitudes que son o no son como número a número (según el Libro X de *Los Elementos* de Euclides) son aritméticamente racionales o irracionales."

Comentarios de Arnold:

El matemático ruso contemporáneo V. Arnold expone los argumentos de Newton con todo detalle y además describe el trasfondo matemático desde una perspectiva contemporánea digna de los mayores elogios. El párrafo que sigue exhibe la razón del título de este trabajo:

> "En los Principia hay dos páginas puramente matemáticas que contienen una sorprendente demostración topológica moderna de un teorema notable sobre la trascendencia de las integrales Abelianas. Escondida en la investigación sobre mecánica celeste, este teorema ha llamado escasamente la atención de los matemáticos. Esto es posible debido a que los argumentos topológicos de Newton sobrepasaron en dos siglos el nivel de la ciencia de su tiempo. La demostración de Newton está esencialmente basada en la investigación de un cierto equivalente de las superficies de Riemann de curvas algebraicas, de tal modo que es incomprensible tanto para el punto de vista de sus contemporáneos como también para aquellos matemáticos del siglo XX educados en la teoría de conjuntos y la teoría de funciones de una variable real quienes son recelosos de las funciones multivaluadas. Además, Newton fue muy breve y no explicó muchos hechos que eran obvios para él pero que sólo entraron posteriormente en la práctica matemática general."....

"Hoy las ideas sobre las cuales se basa la demostración de Newton son llamadas las ideas de la continuación analítica y la monodromía. Ellas se encuentran en el fundamento de la teoría de las superficies de Riemann y un número de ramas de la topología moderna, la geometría algebraica y la teoría de las ecuaciones diferenciales, conectadas sobre todo con el nombre de Poincaré, aquellas ramas donde el análisis se fusiona con la geometría más que con el álgebra."

"La demostración olvidada de Newton de la no-integrabilidad algebraica de los óvalos fue la primera "demostración de imposibilidad" en las matemáticas de la nueva era. El prototipo de futuras demostraciones de insolubilidad de ecuaciones algebraicas en radicales (Abel) y la insolubilidad de las ecuaciones diferenciales en funciones elementales o en cuadraturas (Liouville), y no sin razón Newton la comparó con la demostración de la irracionalidad de las raíces cuadradas de números enteros en *los Elementos* de Euclides.

Comparando hoy los textos de Newton con los comentarios de sus sucesores, es sorprendente como la presentación original de Newton es más moderna, más entendible y rica en ideas que la traducción debida a comentaristas de sus ideas geométricas dentro del lenguaje formal del cálculo de Leibniz."

En mi opinión estos argumentos, sumados al cuidadoso y brillante desarrollo que hace Arnold de los argumentos newtonianos y las demostraciones de los teoremas asociados, brindan un fuerte apoyo a través del ejemplo al punto de vista adoptado en este trabajo acerca de las estratificaciones de la historia interna. Al menos para el caso de las matemáticas.

Esta línea argumentativa se puede reforzar de varios modos, pero por razones de extensión sólo consideraré un aspecto final.

Los aportes de Leibniz y Huygens:

Tanto Leibniz como Huygens poseían suficiente talento matemático como para captar muchas de las sutilezas matemáticas de Newton. La correspondencia es en este punto realmente elocuente. Se han tomado aquí las cartas correspondientes al ejemplo que nos ocupa, de *las Obras Completas* de Huygens.

Leibniz y Huygens habían criticado el texto de 1687, aunque Newton no parece haber conocido algunas de esas críticas, a juzgar por ciertos cambios en *los Principia* introducidos en la segunda edición de 1713.

"No pienso que sea posible adscribir esta proposición a Newton, puesto que el nunca usa alguna otra propiedad de lo que él llama un óvalo, sino una curva que se cierra luego de una rotación, lo cual no excluye ni aún los casos de un cuadrado o un triángulo", escribió Huygens a Leibniz en 1691.

Veamos otro párrafo de una carta de Leibniz a Huygens (10/20 abril 1691):

"Newton, al defender la imposibilidad de la cuadratura de un óvalo, debería haber replicado que tal óvalo (formado por arcos de dos parábolas) no es genuino y que no consiste en una curva que lo describe, como su argumento aparentemente requiere, porque una de las parábolas no va dentro de la otra cuando es extendida. Pero su curva en la forma de una figura ocho es realmente describible, y su argumento puede ser aplicado a ella aunque no es en absoluto un óvalo, así, en base a su argumento no puede ser integrable de modo general (tener áreas algebraicas de segmentos). Sería útil considerar su argumento para entender lo que es deficiente en él. En cuanto a un círculo o una elipse, la imposibilidad de su integrabilidad general ha sido demostrada suficientemente, pero no veo ninguna demostración de la no-integrabilidad del círculo completo o de alguna parte determinada de él."

La curva en forma de ocho es la lemniscata que había sido ya analizada por Huygens.

Esta diferencia de enfoques entre ellos refleja en a mi modo de ver otra faceta de la estratificación de la historia interna. Arnold también ha observado que la relación entre la trascendencia de las funciones expuesta y la trascendencia de los números mencionada por Leibniz en una carta a Huygens, es más profunda de lo que aparece a primera vista. Sin proponérmelo, me resultó interesante complementar las fuentes aquí, ya que al no hacer uso de cierta carta de Huygens, es claro que Arnold usó como base de análisis la publicación de la correspondencia de Leibniz, mientras que en mi caso, por razones circunstanciales, usé las Obras de Huygens. En cualquier caso queda según mi apreciación del problema, como una hipótesis de trabajo historiográfico el contenido del siguiente párrafo de Arnold en la referencia citada, que estimo ilustra la profundidad de la estratificación de la historia interna.

"En los tiempos modernos la conjetura de Leibniz se lee: una integral Abeliana a lo largo de una curva algebraica con coeficientes racionales (algebraicos) tomada entre límites que son números racionales (algebraicos) es generalmente un número trascendente. A diferencia de la conjetura de Hilbert sobre los números trascendentes, que ha sido demostrado por Gelfond, esta conjetura de Leibniz parece todavía sin resolver".

Aún cuando creo que el ejemplo es suficientemente elocuente como para ilustrar el punto de vista adoptado en este trabajo, también podría explorarse esta perspectiva con el mismo ejemplo, pero a lo largo de la historia de la interpretación de este lema. Por razones de brevedad no incursionaré aquí en tratamientos anteriores, pero deseo citar el significativo análisis realizado por Cajori en las notas de su traducción de *Los Principia*, y en particular, el enfoque adoptado por Brougham y Routh, citado en la Bibliografía.

Acorto esta pequeña introducción histórica al ejemplo que ilustra este trabajo con una mención al bellísimo libro reciente de Chandrasekhar sobre Newton, que ubica al Lema XXVIII en un contexto epistemológico adecuado. Por otra parte, da una demostración simple y elegante que hace honor al título del libro: *The Principia for the Common Reader.*

"Una curva plana se dice algebraica (o, como Newton la llama "geométricamente racional") si satisface una ecuación de la forma P(x, y) = 0 donde P es algún polinomio distinto de cero.

"El teorema principal que establece el lema es:

"Todo óvalo integrable algebraicamente tiene puntos singulares: todos los óvalos suaves son algebraicamente no-integrables.

"*Demostración:*

"Sea el radio vector SP, uniendo un punto fijo S dentro del óvalo, a un punto P sobre el perímetro, que rote (por decir, en el sentido positivo). Si el óvalo es algebraicamente integrable, entonces el área barrida por SP debe ser una función algebraica de la tangente, t, del ángulo de inclinación de SP y del eje x. Si al SP se le permite rotar alrededor de S indefinidamente muchas revoluciones, el área barrida por SP se incrementa por el área del óvalo una vez cada revolución. Consecuentemente, el área barrida, vista como una función multi-valuada de t tiene infinitamente muchos valores diferentes para la misma posición de P. Pero una función algebraica no puede ser multi-valuada puesto que el número de raíces de un polinomio distinto de cero no puede exceder su grado. En consecuencia, el área barrida no es una función algebraica y el óvalo no es algebraicamente integrable. QED."

La demostración de Newton, aunque expresada en otros términos, es esencialmente equivalente.

A modo de conclusión. Como son conocidos los riesgos de extraer generalizaciones a partir del estudio de un caso, parece razonable testear este enfoque metodológico y epistemológico para la historia de la ciencia con otros ejemplos significativos. Esto es tarea por realizar.

Bibliografía

Arnold V.: *Huygens & Barrow*, Newton & Hooke, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1990.

Bell E.: *Historia de las matemáticas*, Fondo de Cultura, 1949.

Bourbaki N.: *Elementos de historia de las matemáticas*, Alianza Univ. Madrid, 1976 (2da ed.)

Boyer C.: *The history of the calculus and its conceptual developments*, Dover 1959.

Cajori F.: *Principia*, trad. De Motte al ingles 1729, Univ. of California Press, Berkeley, 1962.

Brougham H., Routh E.: *Analitical View of Sir Isaac Newton's Principia*, London, 1855.

Coolidge J.: *A History of Geometrical Methods*, Oxford UP 1940.

Coolidge, J.: *A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces*, Oxford UP, 1945.

Chandrasekhar S.: *Newton's Principia for the Common Reader*, Clarendon Press, Oxford, 1995.

Grattan-Guinnes (Comp.): *Del calculo a la teoria de conjuntos 1630-1910. Una introduccion historica*, Alianza U., 1984.

Herivel J.: *The background to Newton's Principia*, Oxford, Clarendon Press, 1965.

Huygens C.: *Oeuvres Completes*. Tome Dixieme - Correspondence 1691-1695. La Haye, Martinus Nijhoff, 1905. Cartas N. 2664 (2 Mars 1691), 2667 (26 Mars 1691), 2676 (20 Avril 1691).

Whiteside D.T. (Ed.): *Newton I:* On analysis by equations unlimited in the number of their terms. En *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol. II, Cambridge U.P., 1968.