EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS IX JORNADAS

VOLUMEN 5 (1999), Nº 5

Eduardo Sota
Luis Urtubey
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Incertidumbre y lógica en el razonamiento con opiniones parcialmente inconsistentes

*Luis Urtubey / Diego Letzen**

–Pero, tal vez la opinión te parezca más oscura que la ciencia y más clara que la ignorancia. (...) –Luego, la opinión será intermedia entre estos dos... (Platón, *Rep.*, V, 21, 471)

Introducción

En este trabajo consideramos dos actitudes posibles para tratar la inferencia con afirmaciones parcialmente inconsistentes. Por una parte, nos ocupamos de la lógica paraconsistente de Jaskowski, según la presentación de Da Costa y Doria, como marco para este tipo de inferencias. Por la otra, planteamos el problema en el contexto de la lógica posibilista, desarrollada fundamentalmente por Dubois y Prade, a partir de la teoría de conjuntos difusos de Zadeh.

Tratamos de mostrar finalmente, que para el manejo de opiniones parcialmente inconsistentes, una lógica tiene que dejar lugar para la existencia de "grados de certeza", a fin de dar sentido a la presencia de "opiniones" parcialmente inconsistentes, diferenciando la opinión de la ignorancia total.

Veamos un ejemplo introductorio que nos servirá, a su vez, de guía en la exposición de este trabajo. Supongamos que de diversas fuentes hemos logrado recopilar las siguientes opiniones:

1: Si Eduardo fue absuelto porque era amigo de los jueces (p), Carlos, (que también es amigo de los jueces), será procesado (r).

2: Si Eduardo fue absuelto porque era imposible demostrarle algo (q), Carlos no será procesado (¬r).

3: Eduardo fue absuelto porque era amigo de los jueces (p).

4: Eduardo fue absuelto porque era imposible demostrarle nada (q).

En este ejemplo podemos observar un conjunto de opiniones, que si las expresamos como proposiciones, obtenemos un conjunto inconsistente de enunciados como el siguiente:

$$K = \{(\neg p \vee r), (\neg q \vee \neg r), (p), (q)\}$$

De este conjunto es posible inferir tanto r como $\neg r$, y en realidad, dada cualquier fórmula que pertenezca al lenguaje, en el contexto de la lógica proposicional clásica, es posible deducirla en forma válida, puesto que la afirmación de un enunciado y su negación es trivializante en ella.

Dado un lenguaje de base $\mathcal{L}$ y una lógica L, designamos con F al conjunto de fórmulas de L, y con **T** a una teoría en L. Decimos que **T** es trivial si $\mathbf{T} = F$. Caso contrario **T** no es trivial. Si existe al menos una fórmula α tal que tanto α como su negación ($\neg\alpha$) pertenecen a **T**, entonces se dice que **T** es inconsistente. Caso contrario es consistente. Si bien existe

* Facultad de Filosofía y Humanidades U.N.C.

una estrecha conexión entre las dos nociones recién presentadas, la inconsistencia no necesariamente equivale a la trivialidad de una lógica. Aquellas lógicas capaces de representar teorías inconsistentes no triviales son llamadas en forma genérica paraconsistentes.

El sistema J

El principal objetivo con que fue propuesta la lógica discursiva de S. Jaskowski era posibilitar la representación en un sistema deductivo de tesis cuyo significado sea vago, o pertenezcan a diversos participantes de una discusión; para deducir de ellas, aún cuando sean contradictorias, consecuencias aceptables.

De este modo, la afirmación de expresiones contradictorias por parte de distintos participantes en una discusión no la hace trivial. Sobre esta intuición se supone que, una afirmación o tesis α, incluida en un discurso, debe estar acompañada por cierto tipo de restricción o consideración que impida su absoluta incompatibilidad con la afirmación de $\neg\alpha$ en el mismo discurso por otro participante. Esta restricción se expresa en el sistema **J** mediante un operador modal análogo al de posibilidad. La afirmación de una tesis en el discurso, precedida por este operador, debe entenderse como "*es posible que α*", lo que no excluye $\neg\alpha$ ("*es posible no α*").

El sistema **J** de lógica discursiva proposicional está construido apoyándose sobre el sistema modal S_5. El lenguaje de **J** es el mismo que el de S_5. Tomaremos para esta exposición la presentación axiomática designada como sistema A por da Costa y Doria (1995):

1. si α es un axioma de S_5, entonces $\Box\alpha$.
2. $\Box\alpha, \Box(\alpha \rightarrow \beta) / \Box\beta$.
3. $\Box\alpha / \alpha$.
4. $\Diamond\alpha / \alpha$.
5. $\Box\alpha / \Box\Box\alpha$.

Se puede probar además las siguientes proposiciones (da Costa-Doria (1995)):

a. - Si $\vdash_A \alpha$ entonces $\models_{S5} \Diamond\alpha$.

b. - Si $\models_{S5} \alpha$, entonces $\vdash_A \Box\alpha$.

c. - $\vdash_A \alpha \Leftrightarrow \models_J \alpha$.

d. - α se infiere en **J** de un conjunto Γ $(\Gamma \vdash_J \alpha)$ si y sólo si,

$\vdash_J \Diamond\gamma_1 \wedge \Diamond\gamma_2 \wedge \ldots \wedge \Diamond\gamma_n \rightarrow \Diamond\alpha$, y $\{\Diamond\gamma_1 \wedge \Diamond\gamma_2 \wedge \ldots \wedge \Diamond\gamma_n\} \subset \Gamma$

e. - $\Gamma \models_J \Diamond\alpha$ si y sólo si existen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ en Γ tal que

$\models_{S5} \Diamond\gamma_1 \wedge \Diamond\gamma_2 \wedge \ldots \wedge \Diamond\gamma_n \rightarrow \Diamond\alpha$.

Como se puede observar de esto, el sistema **J** esta íntimamente ligado al sistema modal S_5, cuya relación de accesibilidad característica es la de equivalencia. Una axiomatización para S_5 puede ser la siguiente:

1. *Si α es una instancia de tautología clásica, entonces α es un axioma.*
2. $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box\alpha \rightarrow \Box\beta)$.
3. $\Box\alpha \rightarrow \alpha$.
4. $\Diamond\alpha \rightarrow \Box\Diamond\alpha$.

Reglas:

1. *Modus ponens*: $\alpha, \alpha \rightarrow \beta / \beta$.
2. *Regla de Gödel*: $\alpha / \Box\alpha$.

Inferir en J

El punto (e) se puede interpretar de la siguiente manera: si desde alguna posición se sostiene γ_1, γ_2, etc., entonces desde alguna posición se sostiene α; entendiendo el *discurso* como la suma de las posiciones de los participantes (el total de los mundos), luego, esto quiere decir que *en el discurso* se sostiene también α.

Regresemos al ejemplo inicial y observemos como puede representarse la situación en el sistema **J**:

Supongamos que el conjunto de afirmaciones del ejemplo corresponde a las posturas en una discusión de dos personas. La persona (a) afirma las tesis 1, 3 mientras que la persona (b) afirma las tesis 2 y 4.

Podríamos representar la situación con el siguiente conjunto de fórmulas válidas en este caso particular: 1) $\models_J (p \rightarrow r)$, 2) $\models_J (q \rightarrow \neg r)$, 3) $\models_J p$, 4) $\models_J q$

Además, la siguiente fórmula es válida en **J**: $\models_J \Box(\Diamond(p \rightarrow r) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r))$, ya que

$\models_{S5} \Diamond(p \rightarrow r) \rightarrow (\Box p \rightarrow \Diamond r)$.

Por lo que podemos inferir que

$\models_J \Box(\Box p \rightarrow \Diamond r)$

De aquí, $\models_J \Box(\Diamond r)$ y $\models_J \Diamond r$.. Por lo tanto, $\models_J r$.

De la misma manera se puede inferir $\models_J \Diamond\neg r$, y luego $\models_J \neg r$.

En este caso, se puede concluir que alguno de mis "informantes" opina que r, así como alguno de ellos opina que $\neg r$, sin que esto permita sostener –por ejemplo- que el poder judicial no es independiente del ejecutivo.

Este resultado muestra que, a pesar de tratarse de un conjunto de enunciados que desde la perspectiva de la lógica clásica es inconsistente y trivial, es posible obtener una representación más realista de esta situación y tratar a ese conjunto de forma tal que puedan obtenerse de él algunas consecuencias interesantes sin inferir de en forma trivial.

Inferir en Lógica Posibilista

El segundo modelo que consideraremos aquí para la representación de inconsistencias en el discurso es el *posibilista*. La lógica posibilista es una lógica de la incerteza, para la inferencia con información incompleta o inconsistente. El procedimiento para representar una situación como la del ejemplo es asignar a cada formula proposicional un valor (o peso) que servirá para representar una situación dada con mayor precisión, dando cuenta del grado en que la información disponible implica la verdad de una fórmula.

En el caso que nos ocupa, bastará considerar un fragmento de la lógica posibilista general, en el que las bases de conocimiento constan de afirmaciones calificadas sólo por valores de necesidad. Este fragmento es llamado *lógica (posibilista) con valores de necesidad.*

Una fórmula *con valor de necesidad* es un par (φ, α) en el que φ es una fórmula clásica de primer orden y $\alpha \in (0, 1]$ es un número positivo.

(φ, α) expresa que φ es cierta al menos en grado α ($N(\varphi) \geq \alpha$).

Una *base de conocimiento con valores de necesidad* es un conjunto finito de fórmulas con valor de necesidad. Una distribución de posibilidad π sobre un conjunto de interpretaciones Ω, satisface una fórmula con valor de necesidad (φ, α) si y sólo si $N(\varphi) \geq \alpha$, siendo N la *medida de necesidad* inducida por π.[1]

Una formula posibilista ϕ se infiere (es una consecuencia lógica) del conjunto de fórmulas posibilistas $\mathcal{F}$ ($\mathcal{F} \models \phi$) si y sólo si cualquier distribución de posibilidad que satisface $\mathcal{F}$ también satisface ϕ ($\forall\pi$, $(\pi \models \mathcal{F}) \Rightarrow (\pi \models \phi)$).

Dado entonces un conjunto de fórmulas posibilistas $\mathcal{F}$ y una fórmula clásica φ, deducir φ de $\mathcal{F}$ es computar la mejor valuación α tal que (φ, α) sea una consecuencia de $\mathcal{F}$.

Podemos definir además:

$\mathrm{Val}(\varphi, \mathcal{F}) = \sup\{\alpha \in (0,1], \mathcal{F} \models (\varphi, \alpha)\}$.

Veamos el caso concreto del ejemplo que nos ocupa desde un comienzo. Lo primero que debe verse es el peso de las fórmulas que componen la base. El mismo debe corresponder con una apreciación del grado de verdad de cada fórmula.

Supongamos que las asignaciones fueran las siguientes:

$\mathcal{F} = \{(\neg p \vee r\ \ 0.6), (\neg q \vee \neg r\ \ 0.9), (p\ \ 0.8), (q\ \ 0.3)\}$

Esta asignación podría corresponder al grado de confiabilidad de las fuentes de información (mas o menos confiable), o directamente a la apreciación que se hace del grado de certeza de cada fórmula.

> *Sería moderadamente cierto que:* si Eduardo fue absuelto porque era amigo de los jueces, Carlos, (que también es amigo de los jueces), será procesado.
>
> Prácticamente cierto que: *si Eduardo fue absuelto porque era imposible demostrarle algo, Carlos no será procesado.*
>
> Y apenas cierto que: *Eduardo fue absuelto porque era imposible demostrarle nada.*

¿Hay alguna distribución de posibilidad, que satisfaga en conjunto estas restricciones? ¿Qué conclusión podría o debería sacarse de aquí?

Una distribución de posibilidad se dice normalizada si $\sup\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\} = 1$. Nótese que mientras una distribución de posibilidad normalizada que satisfaga (φ, α) existe siempre, una que satisfaga un conjunto $\mathcal{F}$ de fórmulas puede no existir.

Una distribución de posibilidad normalizada que satisfaga por ejemplo $(q\ \ 0.3)$, $(\pi \models (q\ \ 0.3))$ será aquella que genere una medida de necesidad N tal que $N(q) \geq 0.3$, y $\sup\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\} = 1$.

En nuestro ejemplo:

$\mathcal{F} = \{(\neg p \vee r\ \ 0.6), (\neg q \vee \neg r\ \ 0.9), (p\ \ 0.8), (q\ \ 0.3)\}$

$$\begin{aligned}
\pi \models \mathcal{F} \Leftrightarrow\ & N(\neg p \vee r) \geq 0.6, N(\neg q \vee \neg r) \geq 0.9, N(p) \geq 0.8, N(q) \geq 0.3 \\
\Leftrightarrow\ & \inf\{1-\pi(\omega), \omega \models p \wedge \neg r\} \geq 0.6; \\
& \text{y } \inf\{1-\pi(\omega), \omega \models q \wedge r\} \geq 0.9, \\
& \text{y } \inf\{1-\pi(\omega), \omega \models \neg p\} \geq 0.8, \\
& \text{y } \inf\{1-\pi(\omega), \omega \models \neg q\} \geq 0.3.
\end{aligned}$$

El conjunto de interpretaciones para el lenguaje proposicional generado por {p, q, r} es [p, q, r], [¬p, q, r], [p, ¬q, r], [¬p, ¬q, r], [p, q, ¬r], [¬p, q, ¬r], [p, ¬q, ¬r], [¬p, ¬q, ¬r]. Una distribución de posibilidad $\pi \models \mathcal{F}$ será normalizada si y sólo si $\sup\{\pi(\omega), \omega \in \Omega\} = 1$ y, dado que, por ejemplo (p 0.8) induce la restricción[2]

$\pi(\omega) \leq \mu_{M(p,\,0.8)}(\omega) \quad \Leftrightarrow \forall\omega \models \neg p, \pi(\omega) \leq 0.2,$

y $(\neg q \vee \neg r\ \ 0.9)$

$\pi(\omega) \leq \mu_{M(\neg q \vee \neg r,\,0.9)}(\omega) \Leftrightarrow \forall\omega \models q \wedge r, \pi(\omega) \leq 0.1$

En particular, para nuestro ejemplo debe darse:

1. $\pi([p, q, r]) \leq 0.1$;
2. $\pi([\neg p, q, r]) \leq 0.1$;
3. $\pi([p, \neg q, r]) \leq 0.7$;
4. $\pi([\neg p, \neg q, r]) \leq 0.2$;
5. $\pi([p, q, \neg r]) \leq 0.4$;
6. $\pi([\neg p, q, \neg r]) \leq 0.2$;
7. $\pi([p, \neg q, \neg r]) \leq 0.4$;
8. $\pi([\neg p, \neg q, \neg r]) \leq 0.2$;

Es por esto que, para todas las interpretaciones □ que satisfacen por ejemplo $q \wedge r$, □ (□) ≤ 0.1 como es el caso de la primera y la segunda de la lista anterior.

Como no es posible satisfacer este conjunto de restricciones, podemos afirmar que no hay una distribución de posibilidad normalizada sobre □ que satisfaga $\mathcal{F}$. Esto equivale a afirmar que $\mathcal{F}$ es parcialmente inconsistente.[3] Específicamente, vemos que $\pi_{\mathcal{F}}$, obtenida transformando las desigualdades en igualdades, es tal que sup. $\pi_{\mathcal{F}} = 0{,}7$.

La inconsistencia se produce por las apreciaciones de quienes dan la información almacenada en la base de conocimiento. No obstante, se puede observar que la opinión de quien sostiene la última fórmula de $\mathcal{F}$ es solamente "apenas cierta". Ya que las tres primeras fórmulas de $\mathcal{F}$ son estrictamente más ciertas que la última, la lógica podría comportarse como si el conjunto de fórmulas fuese sólo parcialmente inconsistente, siendo el grado de inconsistencia igual a la valuación de la fórmula más débil que interviene en la contradicción. En el ejemplo, podríamos entonces deducir aún (r 0,6) de modo no trivial.

Conclusiones

En la lógica posibilista inferir en un contexto como el que hemos considerado, es decir que en el discurso (una base $\mathcal{F}$) se sostiene φ con grado de consistencia α, i.e., $(\varphi\ \alpha)$. Cuando $\alpha = 1$, se excluyen todos los mundos $\neg\varphi$. Cuanto menor es α, el discurso permite más mundos $\neg\varphi$. El grado de inconsistencia para φ será mayor cuanto más $\neg\varphi$-mundos permita; y la certeza sobre φ debe ser menor. Inferir es entonces decir que, si se sostiene φ_1 con grado α_1, $(\varphi_2\ \alpha_2)$, etc. entonces se sostiene ϕ con grado α_i. Pero cuando el conjunto de premisas es inconsistente, i.e., si φ_i excluye mundos $\neg\varphi$ que φ_j permite, hay que tener en cuenta cuál es más segura o cierta. La menos cierta indica el índice de inconsistencia con que se infiere ϕ.

φ es más posible que ϕ $(\varphi \geq_\pi \phi)$ si φ excluye $\neg\phi$ mundos en mayor medida que ϕ excluye $\neg\varphi$-mundos.

En **J** se infiere clásicamente (es una inferencia S_5). Se supera el efecto trivializante de las contradicciones clásicas al anteponer el operador modal ◊ a las fórmulas. Si $\Gamma = \{p, \neg p\}$, Γ es inconsistente en **J** pero no trivial (el discurso Γ es inconsistente pero no trivial). Ahora bien, de asignarle un grado de inconsistencia, ¿cuál sería? El grado con que se infiere p, $\alpha = \alpha'$ (con que se infiere $\neg$p) = 1. Luego (p $\wedge \neg$p) se infiere con grado 1. Esto es, cuando p excluye tantos $\neg$p mundos como $\neg$p excluye p mundos.

Por lo tanto, la posibilidad cualitativa es aquí la posibilidad modal, que hace también desaparecer todo grado de verdad (certeza). Pareciera que para que haya contradicción o inconsistencia en realidad se precisa algún grado de certeza (o de verdad). Hay que reparar en $\vdash \varphi$ y $\vdash \neg \Diamond \varphi$ como esquema *trivializante* en **J**. Por un lado tendríamos que:

$\Pi(p) = \Pi(\neg p) = 1$, entonces $N(p) = N(\neg p) = 0$, en ese discurso.

Esta situación indica ***total ignorancia*** sobre la verdad o falsedad de p.

Por otro lado, al desaparecer la ignorancia súbitamente aparece la certeza y desaparece la inconsistencia.

En fin, en un sentido platónico en el cual ausencia de conocimiento es igual a opinión, expresaría una lógica de meras opiniones. La ***lógica posibilista*** en cambio parece más una lógica de "conocimiento parcialmente inconsistente".

El grado de inconsistencia de $\mathcal{F}$ consiste en evaluar en que grado hay al menos una interpretación completamente posible para $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F} = \{p, \neg p\}$, esto es igual a 0, ya que:

$Incons(\mathcal{F}) = 1 — Cons(\mathcal{F}) = 1 — \sup_{\omega \in \Omega} \pi_{\mathcal{F}}(\omega)$

Según esto $Incons(\Gamma) = 1$

Si Γ es inconsistente, $\Gamma \models (\bot \;\; Incons(\Gamma))$, con $Incons(\Gamma) > 0$. Como para toda φ tenemos que $N(\varphi) \geq N(\bot)$, cualquier fórmula φ es deducible de $\mathcal{F}$ con una valuación mayor o igual que $Incons(\mathcal{F})$. Cualquier deducción tal que $\mathcal{F} \models (\varphi \;\; f)$ con $f = Incons(\mathcal{F})$ se puede deber sólo a la inconsistencia parcial de $\mathcal{F}$ y quizás nada tiene que ver con φ. Estas deducciones se dicen *triviales*. Por el contrario, las deducciones de fórmulas $\mathcal{F} \models (\varphi \; f)$ con $f > Incons(\mathcal{F})$ no son causadas por la inconsistencia parcial y se dicen *no-triviales*.

Retomando la idea del epígrafe, **J** expresaría el lado "más oscuro" de la opinión solamente (por el que no es ciencia), sin abarcar el lado "más claro", por el que no es lo mismo que laN ignorancia. Parece que la expresión lógica del esquema platónico precisa también graduar el espacio entre la certeza y la ignorancia. La idea es que la opinión traduce una ausencia **parcial** de conocimiento (certeza) y no **total.**[4]

Notas

[1]La medida de necesidad dual N inducida por π se define: $\forall \phi \in \mathcal{L}'$, $N(\phi) = 1 - \pi(\neg\phi) = \text{inf.}\{1 - \pi(\omega),\ \omega \models \neg\phi\}$ Siendo $\mathcal{L}'$ el conjunto de fórmulas cerradas de $\mathcal{L}$, un lenguaje clásico asociado con el conjunto de fórmulas clásicas $\mathcal{F}^*$, obtenidas de un conjunto de fórmulas posibilistas $\mathcal{F}$ (con valores de necesidad).

[2] Siendo M(p α) el conjunto difuso de modelos definido por: $\mu_{M(p\,\alpha)}\,\omega = 1$ si $\omega \in M(p)$ y
$\mu_{M(p\,\alpha)}\,\omega = 1 - \alpha$ si $\omega \notin M(p)$;
Siendo M(p), el conjunto de modelos de p. Toda distribución de posibilidad π que satisface la restricción $N(p) \geq \alpha$, es tal que $\forall\omega$, $\pi(\omega) \leq \mu_{M(p\,\alpha)}\,\omega$.

[3] Existe una correspondencia entre la consistencia de la proyección clásica de un conjunto de fórmulas posibilistas $\mathcal{F}$ y la existencia de una distribución de posibilidad normalizada π que satisfaga $\mathcal{F}$, representada con $\pi_{\mathcal{F}}$ la que se define por: $\pi_{\mathcal{F}} = \min\{1-\alpha_i \mid \omega \models \neg\varphi_i, i = 1, \ldots, n\}$ y $\pi_{\mathcal{F}} = 1$ si $\omega \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$

Si $\pi_{\mathcal{F}}$ esta normalizada, $\exists\omega \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$, y por lo tanto la extensión proposicional de $\mathcal{F}$ es consistente.

[4] Agradecemos las observaciones y sugerencias de un evaluador anónimo de esta publicación de las IX Jornadas, que nos permitieron introducir algunas modificaciones a la primera versión de este trabajo.

Bibliografía

A. I. Arruda (1989) "Aspects of the Historical Development of Paraconsistent Logic", en G. Priest, R. Sylvan y J. Norman editores, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Munich. Philosophia Verlag.

N.C.A. da Costa y F. Doria (1995) "On Jaskowski's Discussive Logics", *Studia Logica*, 54: pp. 33-60.

D. Dubois, J. Lang, H. Prade (1994) "Possibilistic logic", en *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, Vol. 3 (D.M. Gabbay et al., eds.), Oxford University Press, pp. 439-513.

D. Dubois, Prade, H. (1995) "Combining hypothetical reasoning and plausible inference in possibilistic logic", Informe de investigación, IRIT, Universite Paul Sabatier, Toulouse, France.

G. Priest R. Routley (1989) "Systems of Paraconsistent Logic", en G. Priest, R. Sylvan y J. Norman editores, *Paraconsistent Logic: Essays on the Inconsistent*, Munich. Philosophia Verlag.