

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

**Perturbación Escalar en Reissner-Nordström:
Formulación Covariante**

Marcos Exequiel Atala
Director: Gustavo Dotti

Junio de 2010

A mi familia.

Agradecimientos

A mi familia por el apoyo durante todos estos años, a todos mis amigos de la OMA que me dieron un empujón hacia el lado de las matemáticas, a mis amigos de la facu que me apoyaron y acompañaron a lo largo de toda la carrera, a los docentes de la facu que siempre fueron muy atentos y se preocuparon porque uno entendiera las cosas, a la gente que trabaja en la facu, y a Gustavo, mi director, por su paciencia y motivación hacia la física y las matemáticas.

A todos ellos, gracias.

Resumen

Este trabajo trata sobre perturbaciones alrededor de Reissner-Nordström. La perturbación genérica de este sistema, admite un desacoplamiento en armónicos esféricos, y a su vez, en dos modos: escalar y vectorial. El modo vectorial ha sido ya estudiado en forma covariante, pero no así el escalar. En este trabajo se realiza la formulación covariante del modo escalar, llegando a obtener un conjunto de dos ecuaciones a partir de las cuales se pueden reconstruir las componentes de la métrica y del campo electromagnético perturbado.

Palabras clave

Solución de Reissner-Nordström. Perturbación alrededor de una métrica esféricamente simétrica. Perturbación del modo par (escalar) alrededor de Reissner-Nordström.

Clasificación

04.40.-b
04.40.Nr
04.70.-s

Índice general

Contenidos	v
Prefacio	vii
1. Solución de Reissner-Nordström	1
1.1. Métrica esféricamente simétrica	1
1.2. Solución de Reissner-Nordström	2
2. Perturbación Lineal Alrededor de Reissner-Nordström	9
2.1. Perturbación General de la Métrica	9
2.2. Perturbaciones Escalares	11
2.2.1. Linealización de los Tensores Asociados a la Métrica:	11
2.2.2. Linealización del Tensor Energía-Momento	17
3. Reducción de las Ecuaciones Perturbativas	23
3.1. Ecuaciones para RN:	23
3.2. Reducción	25
Conclusiones y Objetivos a Futuro	29
Bibliografía	31

Prefacio

Es bien conocida la solución de las ecuaciones de Einstein de agujero negro cargado esféricamente simétrico, comúnmente llamada solución de Reissner Nordström (RN). Dicha solución presenta una singularidad y (de acuerdo a la relación carga masa) uno o dos horizontes, uno interno y otro externo. Esto permite la separación del espacio-tiempo en tres sectores, el interno (I), el intermedio (II) y el externo (III), siendo las regiones internas y externas estacionarias. Una característica peculiar de esta solución es que posee una estructura que produce la pérdida del determinismo, lo que entra en contradicción con nuestras creencias sobre los resultados físicos.

La solución de RN se basa en la suposición de que el espacio tiempo es esféricamente simétrico. Este es un planteamiento demasiado extremo y muy difícil de lograr en la naturaleza. Se cree que bajo suposiciones más realistas la estructura que surge de la solución no posee esta pérdida del determinismo, solucionando así el problema. Sin embargo una solución sin esa simetría presenta un problema matemático muy difícil de resolver, por lo que el problema debe ser encarado de otro modo. Una posibilidad es ver el comportamiento de la solución de RN bajo una perturbación que haga perder esa simetría, permitiendo esto saber si esta solución es un punto aislado en el espacio de soluciones (es decir una solución inestable y no física), o no.

Al perturbar linealmente las ecuaciones de Einstein alrededor de RN se observa que las perturbaciones se desacoplan en dos modos, uno escalar y otro vectorial. La formulación covariante de las perturbaciones vectoriales ha sido obtenida por Gerlach y Sengupta [16] en 1979. Tratamientos sobre el modo escalar han sido realizados [19] [3], pero en todos ellos el análisis se ha limitado a un sistema de coordenadas particular.

El objetivo de este trabajo ha sido la formulación covariante del modo escalar alrededor de RN. Dicha formulación ha dado como resultado un conjunto de ecuaciones en términos de variables maestras a través de las cuales es posible reconstruir la métrica perturbada.

Para llevar a cabo este proyecto se han utilizado esencialmente dos referencias, la primera perteneciente a Kodama-Ishibashi [12], y la segunda a la tesis de doctorado

de Olivier Sarbach [14]. De la primera se ha tomado la formulación del problema perturbativo para el caso de RN, pudiendo por intermedio de ésta escribir las perturbaciones del tensor energía-momento de forma conveniente. Por otro lado el segundo trabajo, trata sobre el sistema Einstein-Yang-Mills con grupo de gauge $SU(2)$, ha sido de mucha utilidad, pues a través de este se ha podido inferir el proceso de “diagonalización” de las ecuaciones perturbativas del modo escalar de la solución de RN, a partir del estudio del caso $SU(2)$ Yang Mills.

Capítulo 1

Solución de Reissner-Nordström

1.1. Métrica esféricamente simétrica

Se parte de la suposición de un espacio-tiempo con estructura $\mathcal{M} = \mathcal{N}^2 \times_{r^2} \mathcal{S}^2$, donde \mathcal{S}^2 corresponde a la esfera unitaria. Localmente la métrica es dada por:

$$(1.1) \quad ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b + r^2(x) d\sigma^2$$

donde r es una función de las coordenadas x sobre \mathcal{N}^2 , mientras que $d\sigma^2$ corresponde a la métrica de la esfera unitaria.

Aquí caben algunos comentarios respecto a la notación en todo este trabajo. Se va a utilizar el símbolo g para referirse a la métrica en \mathcal{N}^2 , el símbolo \tilde{g} para la métrica total, y el símbolo \hat{g} para la métrica de la esfera unitaria (la cual no posee el factor r^2). A su vez, se utilizarán las letras a, b, c, \dots, h para denotar componentes de tensores correspondientes a la métrica g , las letras i, j, k, l, \dots, z para componentes correspondientes a la métrica \hat{g} , e índices griegos cuando sean componentes de la métrica total.

En función de esta métrica los símbolos de Christoffel se calculan por intermedio de la expresión

$$(1.2) \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\nu} = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\nu\gamma} (\tilde{g}_{\alpha\gamma, \beta} + \tilde{g}_{\beta\gamma, \alpha} - \tilde{g}_{\alpha\beta, \gamma})$$

de donde se obtiene:

$$(1.3) \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^c = \Gamma_{ab}^c, \quad \tilde{\Gamma}_{ib}^c = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{ij}^c = -r \nabla^c r \hat{g}_{ij}$$

$$(1.4) \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^i = 0, \quad \tilde{\Gamma}_{jb}^i = \delta_j^i \frac{\nabla_b r}{r}, \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i = \hat{\Gamma}_{jk}^i$$

Nótese que aquí $\tilde{\Gamma}$, Γ y $\hat{\Gamma}$ corresponden a los símbolos de Christoffel asociados con las métricas \tilde{g} , g y \hat{g} respectivamente.

Las componentes del tensor de Riemann se calculan por la expresión

$$\tilde{R}_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = -\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma,\alpha}^{\delta} + \tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma,\beta}^{\delta} - \tilde{\Gamma}_{\alpha\sigma}^{\delta}\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^{\sigma} + \tilde{\Gamma}_{\beta\sigma}^{\delta}\tilde{\Gamma}_{\alpha\gamma}^{\sigma}$$

de donde se obtiene:

$$(1.5) \quad \tilde{R}_{abc}{}^d = R_{acb}{}^d$$

$$(1.6) \quad \tilde{R}_{ibj}{}^a = -\frac{\nabla_b \nabla^a r}{r} r^2 \hat{g}_{ij}$$

$$(1.7) \quad \tilde{R}_{jkl}{}^i = \hat{R}_{jkl}{}^i - \nabla_a \nabla^a r (\delta_k^i \hat{g}_{jl} - \delta_j^i \hat{g}_{kl})$$

donde ∇_a es la derivada covariante en \mathcal{N}^2 . De aquí se obtienen el tensor de Ricci y el escalar de curvatura

$$(1.8) \quad \tilde{R}_{ab} = \frac{1}{2} R g_{ab} - \frac{2}{r} \nabla_a \nabla_b r,$$

$$(1.9) \quad \tilde{R}_{aj} = 0,$$

$$(1.10) \quad \tilde{R}_{ij} = \left(-\frac{\square r}{r} + \frac{1 - (\nabla_a r)(\nabla^a r)}{r^2} \right) \hat{g}_{ij},$$

$$(1.11) \quad \tilde{R} = R + \frac{2}{r^2} (1 - N - 2r\square r),$$

donde R y \square son el escalar de curvatura y el D'Alambertiano para la métrica g , mientras que $N = g(dr, dr)$.

Finalmente el tensor de Einstein es

$$(1.12) \quad G_{ab} = -\frac{2}{r} \nabla_a \nabla_b r + \frac{1}{r^2} (2r\square r + N - 1) g_{ab},$$

$$(1.13) \quad G_{ij} = \left(r\square r - \frac{Rr^2}{2} \right) \hat{g}_{ij},$$

$$(1.14) \quad G_{ai} = 0.$$

Es importante notar que estos son los tensores asociados a una métrica esféricamente simétrica, y aún no se ha particularizado al caso de RN. A su vez, nótese que se ha utilizado la notación $G_{\alpha\beta}$ para el tensor de Einstein asociado a la métrica en \mathcal{M} , y no a la métrica en \mathcal{N}^2 .

1.2. Solución de Reissner-Nordström

En esta sección se van a resolver las ecuaciones de Einstein $G_{\alpha\beta} = \kappa^2 T_{\alpha\beta}$ en el caso en que no hay materia, y $T_{\alpha\beta}$ es generado por un campo electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$

que satisface las ecuaciones de Maxwell ($\tilde{d}\mathcal{F} = 0$ y $*\tilde{d}\mathcal{F} = 0$ ¹) y que posee simetría esférica ($\mathcal{L}_K\mathcal{F}_{\alpha\beta} = 0$ donde K es un campo vectorial de Killing sobre \mathcal{S}^2).

El campo $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ en el caso de RN está dado por

$$(1.15) \quad \mathcal{F}_{ab} = \frac{q}{r^2}\epsilon_{ab}$$

donde ϵ_{ab} es la forma de volumen compatible con la métrica sobre \mathcal{N}^2 , q es una constante de integración, y las demás componentes de \mathcal{F} son nulas. El tensor energía momento es

$$(1.16) \quad T_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\gamma}\mathcal{F}_{\nu}{}^{\gamma} - \frac{1}{4}\tilde{g}_{\mu\nu}\mathcal{F}_{\alpha\beta}\mathcal{F}^{\alpha\beta}$$

$$T_{ab} = -Pg_{ab}; \quad T_{ij} = Pr^2\hat{g}_{ij}; \quad P = \frac{1}{2}E_0^2 = \frac{q^2}{2r^4}$$

Este $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ da lugar a un tensor de Einstein dado por

$$(1.17) \quad G_{ab} = -\kappa^2Pg_{ab}, \quad G_{ij} = \frac{\kappa^2q^2}{2r^2}\hat{g}_{ij}, \quad G_{ia} = 0.$$

La solución de estas ecuaciones produce la siguiente 4-métrica²

$$(1.18) \quad d\tilde{s}^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)} + r^2d\sigma^2$$

donde m es una constante de integración. Lo relevante es la 2-métrica sobre \mathcal{N}^2

$$(1.19) \quad ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{r^2}\right)}.$$

Un análisis del comportamiento asintótico de una partícula sin carga revela que la trayectoria descrita por ésta, corresponde a la de una partícula en un campo gravitatorio Newtoniano generado por una masa m en el punto “ $r = 0$ ”, motivo por

¹aquí \tilde{d} y $*\tilde{d}$ son la derivada exterior y el operador dualizador en \mathcal{M} respectivamente. La definición adoptada para $*\tilde{d}$ es la misma que la utilizada en [1]

²ver por ejemplo [2]

el cual a m se le da el significado de “masa del agujero negro”, y motiva la elección $m > 0$.

Al reescribir la métrica definiendo $\Delta = r^2 - 2mr + q^2 = (r - r_+)(r - r_-)$, donde $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - q^2}$ (cantidades posiblemente complejas), se obtiene

$$(1.20) \quad ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2$$

Esta es una generalización de la solución de Schwarzschild, donde la singularidad en $r = 0$ es geométrica. El rango de las coordenadas es $0 < r < \infty$ y $-\infty < t < \infty$, sin embargo esta solución es extendible, como se verá mas adelante.

Debido al factor Δ dividiendo pueden aparecer hasta dos singularidades dependiendo de los valores de $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - q^2}$. Estas singularidades no son geométricas, sino asociadas al sistema de coordenadas, y permiten la clasificación de las soluciones en tres clases, de acuerdo al número de ceros de Δ :

Caso I: $0 < m < |q|$

En este caso Δ no posee ceros y la métrica es regular en todo el dominio $r > 0$. El punto $r = 0$ corresponde a una singularidad de curvatura.

Este no es el caso de interés de este trabajo.

Caso II: $m > |q|$

Es este caso Δ posee dos ceros r_- y r_+ , por lo que aparecen dos singularidades, las cuales no son geométricas, como se ve haciendo el siguiente cambio de coordenadas:

Se define la coordenada “tortuga” r^* por medio de la ecuación $dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr$, cuya solución es

$$(1.21) \quad r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left(\frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left(\frac{|r - r_-|}{r_-} \right),$$

donde $\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}$.

Se definen las coordenadas radiales nulas u, v

$$(1.22) \quad v = t + r^*, \quad u = t - r^*,$$

y las coordenadas avanzadas de Eddington-Finkelstein (v, r) , las cuales expresan la métrica en forma explícitamente no singular en r_{\pm}

$$(1.23) \quad ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr$$

Es importante hacer un breve análisis de la estructura del espacio-tiempo, para lo cual es más apropiado utilizar coordenadas U^\pm y V^\pm definidas por

$$(1.24) \quad U^\pm = -e^{-\kappa_\pm u}, \quad V^\pm = e^{\kappa_\pm v}.$$

Para el signo + la métrica queda escrita

$$(1.25) \quad ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{-2\kappa_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-} \right)^{\left(\frac{\kappa_+}{\kappa_-} - 1 \right)} dU^+ dV^+$$

donde $r(U^+, V^+)$ esta determinada implícitamente por la ecuación

$$(1.26) \quad U^+ V^+ = -e^{2\kappa_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}$$

Debido a que el dominio de u y v es $-\infty < u, v < \infty$, el dominio de U^+ y V^+ es $-\infty < U^+ < 0$ y $0 < V^+ < \infty$. Sin embargo nada impide extender este dominio a $-\infty < U^+, V^+ < \infty$, pues las expresiones (1.25 - 1.26) siguen siendo compatibles. Al comparar con las coordenadas (r, t) se observa que la región $r < r_-$ no es cubierta por las coordenadas $U^+ V^+$, pues en ese rango la ecuación (1.25) se vuelve compleja. Por otro lado se observa que esta extensión da lugar a dos pares de regiones isométricas entre sí, como muestra la figura (1.1).

Si utilizamos las coordenadas $U^- V^-$ entonces la métrica toma la forma

$$(1.27) \quad ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_-^2} \frac{e^{-2\kappa_- r}}{r^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r} \right)^{\left(\frac{\kappa_-}{\kappa_+} - 1 \right)} dU^- dV^-.$$

Nuevamente la función r se define implícitamente, pero esta vez por la ecuación

$$(1.28) \quad U^- V^- = -e^{2\kappa_- r} \left(\frac{r_- - r}{r_-} \right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}}$$

En este caso las coordenadas $U^- V^-$ cubren el espacio $0 < r < r_+$, pues para $r > r_+$ la expresión para r se vuelve compleja. También se observa que una extensión al rango $-\infty < U^-, V^- < \infty$ es posible, dando lugar a dos pares de regiones isométricas entre sí. La figura 1.2 muestra un diagrama de la porción del espacio-tiempo cubierto por estas coordenadas

Estos dos pares de coordenadas no cubren todo el espacio-tiempo, pues la métrica admite una extensión analítica. Nótese que las regiones II de ambos parches son isométricas entre sí, sugiriendo esto la unión de los mismos a través de esta región. Se puede demostrar que dicha unión es analítica, y que el proceso de unir alternadamente los dos tipos de parches infinitas veces produce la máxima extensión analítica del espacio-tiempo (figura 1.3).

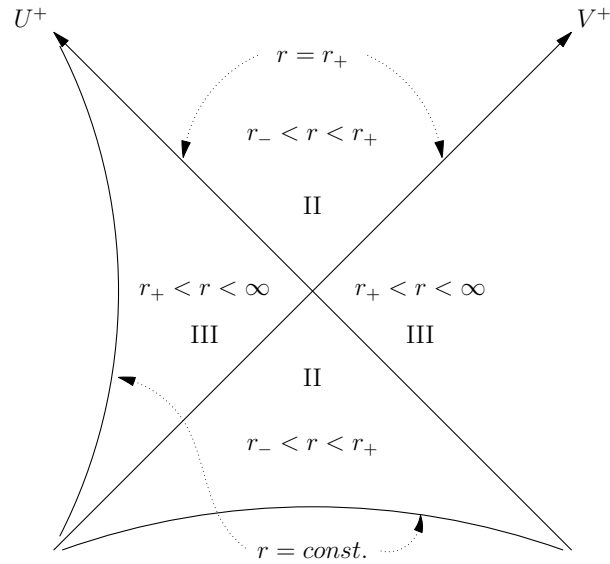


Figura 1.1: Las regiones I son isométricas entre sí, lo mismo que las regiones II. La función r está definida en todo punto, siendo $r > r_+$ en I y $r_- < r < r_+$ en II. La frontera $r = r_-$ en II se encuentra en $U^+, V^+ \rightarrow \infty$

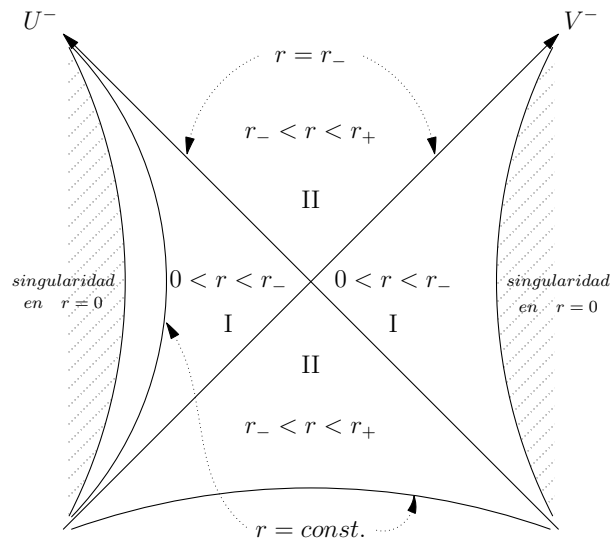


Figura 1.2: Las regiones II son isométricas entre sí, e isométricas a las regiones II de las coordenadas \$(U^+, V^+)\$, mientras que las regiones III son isométricas entre sí y corresponden a $0 < r < r_-$. En $r = 0$ se observa la singularidad temporal.

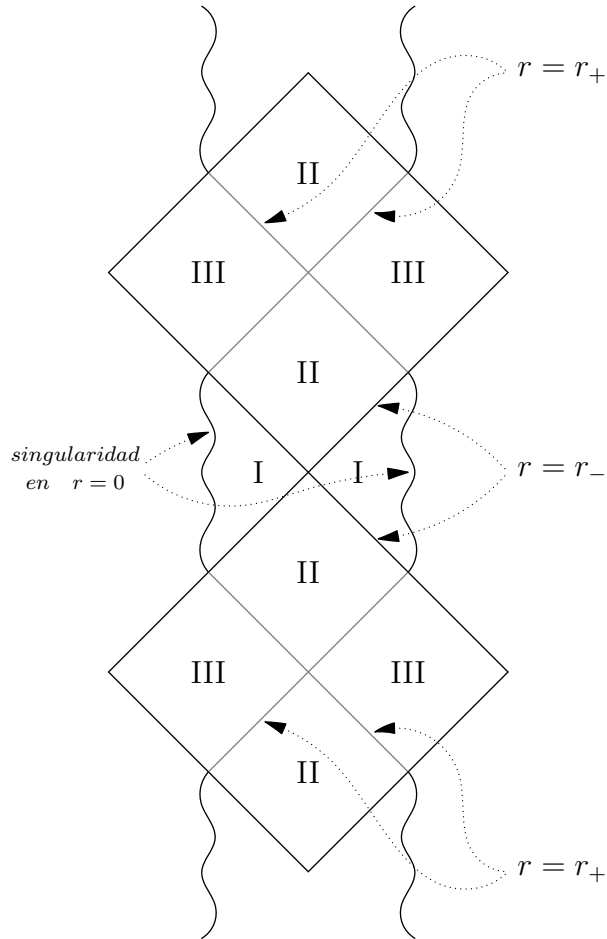


Figura 1.3: Diagrama de la extensión analítica maximal del espacio-tiempo de RN. Nótese la repetición periódica de las regiones isométricas I, II y III. Las coordenadas (U^+, V^+) cubren los pares de regiones adjuntas del tipo II y III, mientras que las coordenadas (U^-, V^-) cubren los pares de regiones adjuntas del tipo I y II.

Lo extraño de esta solución es que si se plantea el problema de valores iniciales partiendo de una superficie espacial completa, junto con la métrica inducida en ella y su curvatura extrínseca, la máxima extensión de Cauchy que se obtiene no abarca todo el espacio-tiempo, sino solo una porción de este, lo que refleja una pérdida del determinismo.

Caso III: $|q| = m$:

En este caso Δ se anula en un solo punto r_0 , produciendo esto una singularidad de coordenadas. La expresión de la métrica es

$$(1.29) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{m}{r}\right)^2}$$

y en términos de las coordenadas Eddington-Finkelstein toma la forma

$$(1.30) \quad ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r}\right)^2 dv^2 + 2dvdr$$

Se ve aquí que $r = m$ no es un punto singular.

Capítulo 2

Perturbación Lineal Alrededor de Reissner-Nordström

2.1. Perturbación General de la Métrica

En el capítulo 1 se ha visto la solución de RN, junto con su máxima extensión analítica, y se han analizado algunas características de su estructura. En este capítulo y en el siguiente se pretende formular el problema de perturbar linealmente la solución de RN, simplificar las ecuaciones y finalmente reescribirlas en términos de dos funciones escalares, por medio de las cuales es posible obtener la métrica perturbada.

En las secciones 2.1 y 2.2.1 se estudiarán las perturbaciones de una métrica genérica con simetría esférica

$$(2.1) \quad ds^2 = g_{ab}dx^a dx^b + r^2(x)d\sigma^2,$$

y sus tensores asociados. Estos resultados son aplicables a cualquier métrica de la forma (2.1), no solo al caso de RN. Luego, en la sección 2.2.2 se particularizará al caso de RN, y se analizará la perturbación del tensor energía-momento debido a una perturbación del campo electromagnético

$$(2.2) \quad \mathcal{F}_{ab} = \frac{q}{r^2}\epsilon_{ab}$$

Los resultados de la sección 2.2.2 son entonces solo aplicables a la solución de RN.

La perturbación más general de la métrica puede ser escrita como una expansión

en armónicos esféricos sobre \mathcal{S}^2 :

$$(2.3) \quad \delta\tilde{g}_{ab} = H_{ab}^{(\ell m)} Y^{(\ell m)},$$

$$(2.4) \quad \delta\tilde{g}_{ib} = Q_b^{\ell m} \hat{\nabla}_i Y^{(\ell m)} + h_b S_i^{(\ell m)},$$

$$(2.5) \quad \delta\tilde{g}_{ij} = K^{(\ell m)} r^2 \hat{g}_{ij} Y^{(\ell m)} + G^{(\ell m)} r^2 \left(\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y^{(\ell m)} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{ij} Y^{(\ell m)} \right) \\ + 2k^{(\ell m)} \hat{\nabla}_{(i} S_{j)}^{(\ell m)},$$

aquí una suma sobre (ℓ, m) es asumida, mientras que $Y^{(\ell m)}$ son los armónicos esféricos escalares sobre \mathcal{S}^2 que satisfacen la ecuación $\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}^i Y^{(\ell m)} = -\ell(\ell+1)Y^{(\ell m)}$, mientras que S_i se define por $S_i^{(\ell m)} = (\hat{*}dY^{(\ell m)})_i$ ¹. Las cantidades restantes son escalares y tensores sobre \mathcal{N}^2 .

Los modos correspondientes a distintos armónicos desacoplan a primer orden, permitiendo esto el tratamiento de cada componente por separado. Por lo tanto de ahora en más se omitirán los índices (ℓm) .

Es posible desacoplar aun más las perturbaciones, debido a que una métrica esféricamente simétrica es invariante ante el mapa antipodal sobre \mathcal{S}^2 . Para poder sacar provecho de esta propiedad, primero se debe analizar el comportamiento de algunos tensores ante estas transformaciones. Se definen el campo covectorial armónico $Y_i^{(\ell m)} := \hat{\nabla}_i Y^{(\ell m)}$ y el campo tensorial sin traza armónico $Y_{ij}^{(\ell m)} := \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y^{(\ell m)} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{ij} Y^{(\ell m)}$, los cuales satisfacen las ecuaciones armónicas

$$(2.6) \quad \hat{\nabla}^j \hat{\nabla}_j Y_i^{(\ell m)} = [1 - \ell(\ell+1)] Y_i^{(\ell m)}$$

$$(2.7) \quad \hat{\nabla}^k \hat{\nabla}_k Y_{ij}^{(\ell m)} = [4 - \ell(\ell+1)] Y_{ij}^{(\ell m)}.$$

Estos dos tensores, junto con el armónico esférico $Y^{(\ell m)}$, transforman con paridad $(-1)^\ell$ ante el mapa antipodal, y se los llama pares. Por otro lado hay otro conjunto de tensores armónicos que transforman con paridad $(-1)^{\ell+1}$, y son llamados impares. Estos son

$$(2.8) \quad S_i^{(\ell m)} := (\hat{*}dY^{(\ell m)})_i = \hat{\epsilon}_{ij} \hat{g}^{jk} \hat{\nabla}_k Y^{(\ell m)},$$

$$(2.9) \quad S_{ij}^{(\ell m)} := \hat{\nabla}_{(i} S_{j)}^{(\ell m)}$$

y satisfacen las ecuaciones

$$(2.10) \quad \hat{\nabla}^j \hat{\nabla}_j S_i^{(\ell m)} = [1 - \ell(\ell+1)] S_i^{(\ell m)}$$

$$(2.11) \quad \hat{\nabla}^k \hat{\nabla}_k S_{ij}^{(\ell m)} = [4 - \ell(\ell+1)] S_{ij}^{(\ell m)}$$

$$(2.12) \quad \hat{g}^{ij} S_{ij}^{(\ell m)} = 0$$

¹aquí $\hat{*}$ y \hat{d} son la derivada exterior y el operador dualizador sobre la esfera unitaria \mathcal{S}^2

De aquí se deduce que la perturbación de la métrica posee términos que transforman como $(-1)^\ell$ y otros como $(-1)^{\ell+1}$. Es posible ver que estos términos se desacoplan a primer orden, lo que permite tratarlos por separado.

El objeto de este trabajo es estudiar el sector par (también llamado escalar), para el cual las perturbaciones tienen la forma:

$$(2.13) \quad \delta\tilde{g}_{ab} = H_{ab}^{(\ell m)} Y^{(\ell m)},$$

$$(2.14) \quad \delta\tilde{g}_{ib} = Q_b^{(\ell m)} \hat{\nabla}_i Y^{(\ell m)},$$

$$(2.15) \quad \delta\tilde{g}_{ij} = K^{(\ell m)} r^2 \hat{g}_{ij} Y^{(\ell m)} + G^{(\ell m)} r^2 \left(\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y^{(\ell m)} + \frac{\ell(\ell+1)}{2} \hat{g}_{ij} Y^{(\ell m)} \right)$$

A menudo se denotará a $\delta\tilde{g}_{ab}$ por δg_{ab} . Hasta ahora solo se ha escrito la perturbación de la métrica del modo par, pero nada se ha dicho sobre las ecuaciones que deben satisfacer las diferentes componentes de la perturbación. Estas ecuaciones son obtenidas por medio de las ecuaciones de Einstein perturbadas:

$$(2.16) \quad G_{\alpha\beta} + \delta G_{\alpha\beta} = \kappa^2 (T_{\alpha\beta} + \delta T_{\alpha\beta}) \Rightarrow \delta G_{\alpha\beta} = \kappa^2 \delta T_{\alpha\beta}$$

La estructura de $\delta G_{\alpha\beta}$ se construye a partir de $\tilde{g}_{\alpha\beta}$, mientras que la de $T_{\alpha\beta}$ se debe obtener a partir de la perturbación de su fuente, la cual depende del problema particular del que se trate.

2.2. Perturbaciones Escalares

2.2.1. Linealización de los Tensores Asociados a la Métrica:

En esta sección se obtendrán las componentes linealizadas de los símbolos de Christoffel y los tensores de Riemann, Ricci y Einstein². Estas componentes serán calculadas en forma genérica para una métrica esféricamente simétrica.

Libertad de Gauge

Es bien sabido que para un campo vectorial arbitrario X , $g + \delta g$ y $g + \delta g + \mathcal{L}_X g$ son perturbaciones equivalentes de la métrica, pues están relacionados por un simple cambio infinitesimal de coordenadas. Esto produce que ambas soluciones sean físicamente equivalentes, dando lugar a una libertad de gauge. Esta libertad se la puede utilizar para simplificar las ecuaciones de Einstein linealizadas.

²Esta sección está basada en el capítulo 5 y en el apéndice A de [14]

Dado que se quiere conservar el carácter escalar (par) de la perturbación, los campos vectoriales X admitidos deben poseer la estructura

$$(2.17) \quad X^a = \xi^a Y, \quad X^i = f \hat{g}^{ij} \hat{\nabla}_j Y,$$

donde ξ^a y f son un campo vectorial y una función sobre \mathcal{N}^2 .

La derivada de Lie de g a lo largo de este X es

$$(2.18) \quad (\mathcal{L}_X \tilde{g})_{ab} = (\nabla_a \xi_b + \nabla_b \xi_a) Y,$$

$$(2.19) \quad (\mathcal{L}_X \tilde{g})_{ib} = (\xi_b + r^2 \nabla_b f) \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.20) \quad (\mathcal{L}_X \tilde{g})_{ij} = 2r^2 f \left(\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y + \frac{1}{2} \ell(\ell+1) \hat{g}_{ij} Y \right) \\ - r^2 f \ell(\ell+1) \hat{g}_{ij} Y + r^2 v^a \xi_a \hat{\nabla}_{ij} Y,$$

Esto produce una transformación en las perturbaciones (2.13 - 2.15) dada por

$$(2.21) \quad H_{ab} \mapsto H_{ab} + \xi_{a|b} + \xi_{b|a},$$

$$(2.22) \quad Q_b \mapsto Q_b + \xi_b + r^2 f_{|b},$$

$$(2.23) \quad K \mapsto K + 2v^a \xi_a - \ell(\ell+1)f,$$

$$(2.24) \quad G \mapsto G + 2f,$$

De las 7 componentes de estos campos (H_{ab} tiene 3 componentes, Q_b 2 componentes, K una componente y G una componente), sólo 4 son independientes del gauge, pues f y ξ^a tienen tres grados de libertad. En base a esto se construyen los siguientes tensores independientes del gauge para $\ell > 1$ (los casos $\ell = 0$ y $\ell = 1$ son particulares y deben ser tratados independientemente³):

$$(2.25) \quad H_{ab}^{(inv)} = H_{ab} - (p_{a|b} + p_{b|a}),$$

$$(2.26) \quad K^{(inv)} = K - 2v^a p_a + \frac{1}{2} \ell(\ell+1)G,$$

donde $p_a = Q_a - \frac{1}{2} r^2 G_{|a}$, y se denota por $|a$ a la derivada covariante asociada con la métrica del espacio orbital g_{ab} , es decir $H_{ad|b} = \nabla_b H_{ad}$, mientras que $v_a := \frac{r|_a}{r}$.

Si bien se puede proseguir con la formulación en términos de estos invariantes, nada se pierde al particularizar a un gauge que permita simplificar las cuentas. Por tal motivo a lo largo de todo el trabajo se elige un gauge en el cual $f = -\frac{G}{2}$ y $\xi_b = -Q_b - r^2 \nabla_b f$, lo que produce $G = 0$ y $Q_b = 0$. En este gauge las perturbaciones de la métrica son:

$$(2.27) \quad \delta g_{ab} = H_{ab} Y, \quad \delta \tilde{g}_{ib} = 0, \quad \delta \tilde{g}_{ij} = K r^2 \hat{g}_{ij} Y.$$

³ver por ejemplo [14] [12]

Símbolos de Christoffel Linealizados

Partiendo de las expresiones

$$(2.28) \quad \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}(\tilde{g} + \delta\tilde{g})^{\mu\gamma} ((\tilde{g} + \delta\tilde{g})_{\alpha\gamma,\beta} + (\tilde{g} + \delta\tilde{g})_{\beta\gamma,\alpha} - (\tilde{g} + \delta\tilde{g})_{\alpha\beta,\gamma})$$

$$(2.29) \quad \delta\tilde{g}^{\alpha\beta} = -\delta\tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\alpha}\tilde{g}^{\nu\beta}$$

se obtiene a primer orden

$$(2.30) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\mu} = \frac{1}{2}\tilde{g}^{\mu\nu} \left(\tilde{\nabla}_{\beta}\delta\tilde{g}_{\alpha\nu} + \tilde{\nabla}_{\alpha}\delta\tilde{g}_{\beta\nu} - \tilde{\nabla}_{\nu}\delta\tilde{g}_{\alpha\beta} \right).$$

Se debe recordar que las cantidades con tilde son las asociadas a la 4-métrica $\tilde{g}_{\alpha\beta}$. Usando esta última expresión se obtienen las perturbaciones de los símbolos de Christoffel:

$$(2.31) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ab}^c = \frac{1}{2}g^{cd} [H_{ad|b} + H_{bd|a} - H_{ab|d}] Y,$$

$$(2.32) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ib}^c = \frac{1}{2}H^c_b \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.33) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ij}^c = r^2 \left[(H^{cd} - \tilde{g}^{cd}K)v_d - \frac{1}{2}K^{|c} \right] \hat{g}_{ij} Y,$$

$$(2.34) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ab}^j = -\frac{1}{2r^2}H_{ab}\hat{g}^{ji}\hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.35) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ib}^j = \frac{1}{2}\delta_i^j K_{|b} Y,$$

$$(2.36) \quad \delta\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} [\delta_i^k \delta_j^l + \delta_j^k \delta_i^l - \hat{g}^{kl} \hat{g}_{ij}] K \hat{\nabla}_l Y,$$

Tensores de Riemann y Ricci Linealizados

Partiendo de la identidad

$$\begin{aligned} (\tilde{R} + \delta\tilde{R})_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta} = & -(\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\beta\gamma,\alpha}^{\delta} + (\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\alpha\gamma,\alpha}^{\delta} \\ & -(\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\alpha\nu}^{\delta}(\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\beta\gamma}^{\nu} + (\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\beta\nu}^{\delta}(\tilde{\Gamma} + \delta\tilde{\Gamma})_{\alpha\gamma}^{\nu} \end{aligned}$$

eventualmente se arriba a las siguientes perturbaciones del tensor de Riemann:

$$(2.37) \quad \delta \tilde{R}_{abc}{}^d = \nabla_b(\delta \tilde{\Gamma}_{ac}^d) - \nabla_a(\delta \tilde{\Gamma}_{bc}^d),$$

$$(2.38) \quad \delta \tilde{R}_{aic}{}^j = \hat{\nabla}_i(\delta \tilde{\Gamma}_{ac}^j) - \nabla_a(\delta \tilde{\Gamma}_{ic}^j) + \tilde{\Gamma}_{ib}^j \delta \tilde{\Gamma}_{ac}^b - \tilde{\Gamma}_{ic}^k \delta \tilde{\Gamma}_{ak}^j - \tilde{\Gamma}_{ak}^j \delta \tilde{\Gamma}_{ic}^k,$$

$$(2.39) \quad \delta \tilde{R}_{ijk}{}^l = \hat{\nabla}_j(\delta \tilde{\Gamma}_{ik}^l) - \hat{\nabla}_i(\delta \tilde{\Gamma}_{jk}^l) + \tilde{\Gamma}_{jb}^l \delta \tilde{\Gamma}_{ik}^b - \tilde{\Gamma}_{jk}^b \delta \tilde{\Gamma}_{ib}^l + \tilde{\Gamma}_{ik}^b \delta \tilde{\Gamma}_{jb}^l - \tilde{\Gamma}_{ib}^l \delta \tilde{\Gamma}_{jk}^b,$$

$$(2.40) \quad \delta \tilde{R}_{ibk}{}^d = \nabla_b(\delta \tilde{\Gamma}_{ik}^d) - \hat{\nabla}_i(\delta \tilde{\Gamma}_{bk}^d) - \tilde{\Gamma}_{bj}^d \delta \tilde{\Gamma}_{ij}^j - \tilde{\Gamma}_{ij}^d \delta \tilde{\Gamma}_{bk}^j + \tilde{\Gamma}_{ik}^e \delta \tilde{\Gamma}_{be}^d,$$

$$(2.41) \quad \delta \tilde{R}_{ibc}{}^d = \nabla_b(\delta \tilde{\Gamma}_{ic}^d) - \hat{\nabla}_i(\delta \tilde{\Gamma}_{bc}^d) - \tilde{\Gamma}_{ij}^d \delta \tilde{\Gamma}_{bc}^j + \tilde{\Gamma}_{ic}^j \delta \tilde{\Gamma}_{bj}^d,$$

$$(2.42) \quad \delta \tilde{R}_{ija}{}^k = \hat{\nabla}_j(\delta \tilde{\Gamma}_{ia}^k) - \hat{\nabla}_i(\delta \tilde{\Gamma}_{ja}^k) + \tilde{\Gamma}_{jb}^k \delta \tilde{\Gamma}_{ia}^b - \tilde{\Gamma}_{ja}^l \delta \tilde{\Gamma}_{il}^k - \tilde{\Gamma}_{ib}^k \delta \tilde{\Gamma}_{ja}^b + \tilde{\Gamma}_{ia}^l \delta \tilde{\Gamma}_{jl}^k.$$

Reemplazando las ecuaciones (2.31-2.36) en estas últimas se obtiene:

$$(2.43) \quad \delta \tilde{R}_{abc}{}^d = \frac{1}{2} g^{de} [H_{ae|c|b} + H_{ce|a|b} - H_{ac|e|b} - H_{be|c|a} - H_{ce|b|a} + H_{bc|e|a}] Y,$$

$$(2.44) \quad \delta \tilde{R}_{ibc}{}^j = \frac{1}{2r^2} H_{bc} \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}^j Y + \frac{1}{2} \delta_i^j \{ K_{|c|b} + v_c K_{|b} \\ + v_b K_{|c} - H_{bd|c} v^d - H_{cd|b} v^d + H_{bc|d} v^d \} Y,$$

$$(2.45) \quad \delta \tilde{R}_{ijk}{}^l = \frac{1}{2} K \left\{ \delta_i^l \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}_k Y - \hat{g}_{ik} \hat{\nabla}_j \hat{\nabla}^l Y - \delta_j^l \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_k Y + \hat{g}_{jk} \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}^l Y \right\} \\ + \hat{g}_{ik} \delta_j^l r^2 v_b [H^{ba} v_a - K v^b - K^{|b}] Y \\ - \hat{g}_{ik} \delta_i^l r^2 v_b [H^{ba} v_a - K v^b - K^{|b}] Y,$$

$$(2.46) \quad \delta \tilde{R}_{ibk}{}^d = -\frac{1}{2} H_b^d \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_k Y + r^2 \hat{g}_{ik} \left\{ v_a v_b H^{da} + \frac{1}{2} H^{da}{}_{|b} v_a + H^{da} v_{a|b} - \frac{v^a}{2} H_b{}^d{}_{|a} \\ + \frac{v^a}{2} H_{ba}{}^{|d} - v_b v^d K - K v^d{}_{|b} - \frac{1}{2} v_b K^{|d} - \frac{1}{2} K_{|b} v^d - \frac{1}{2} K^{|d}{}_{|b} \right\} Y,$$

$$(2.47) \quad \delta \tilde{R}_{iba}{}^d = \frac{1}{2} \left[2H_{bc}{}^{|d} - H_b{}^d{}_{|c} - H_c{}^d{}_{|b} - v^d H_{bc} + v_c H_b{}^d \right] \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.48) \quad \delta \tilde{R}_{ija}{}^l = \frac{1}{2} (K_{|a} - v_b H^b{}_a) \left(\delta_i^l \hat{\nabla}_j Y - \delta_j^l \hat{\nabla}_i Y \right).$$

Las componentes linealizadas del tensor de Ricci se obtienen por medio de la identidad $\delta \tilde{R}_{\alpha\beta} = \delta \tilde{R}_{\alpha\gamma\beta}{}^\gamma$, y utilizando que para un espacio tiempo de dos dimensiones $R_{ab} = \frac{1}{2} R g_{ab}$. El resultado final es:

$$(2.49) \quad \delta\tilde{R}_{ab} = \left(\frac{1}{2} \left[R \left\{ H_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} H \right\} + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} H_{ab} + g_{ab} \left\{ H_{cd|c|d} - \square H \right\} \right] \right. \\ \left. + v^d [H_{ad|b} + H_{bd|a} - H_{ab|d}] - [v_a K_{|b} + v_b K_{|a} + K_{|a|b}] \right) Y,$$

$$(2.50) \quad \delta\tilde{R}_{ib} = \frac{1}{2} [H^a{}_{b|a} - H_{|b} + v_b H - K_{|b}] \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.51) \quad \delta\tilde{R}_{ij} = -\frac{1}{2} H \hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y + \frac{1}{2} \hat{g}_{ij} \left[2 (r^2 v_d H^{cd})_{|c} - r^2 v^d H_{|d} \right. \\ \left. + \ell(\ell+1) K - \square(r^2) K - r^2 \square K - 4r^2 v^d K_{|d} \right] Y,$$

donde $H = H^a{}_a$.

Tensor de Einstein Linealizado

Los términos perturbativos del tensor de Einstein se obtienen por medio de (2.16). Sin embargo, siguiendo [14], es conveniente realizar una separación de todos los tensores sobre \mathcal{S}^2 y \mathcal{N}^2 en sus partes con y sin traza, es decir:

$$(2.52) \quad H_{ab} = \check{H}_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} H, \quad \delta G_{ab} = \delta\check{G}_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} (g^{cd} \delta G_{cd}), \\ \delta G_{ij} = \delta\check{G}_{ij} + \frac{1}{2} \hat{g}_{ij} (\hat{g}^{kl} \delta G_{kl}), \quad etc...$$

con el acento \check{A} denotando la parte sin traza del tensor A .

Por medio de esta separación, y en conjunto con la ecuación (2.16), se obtiene

$$(2.53) \quad \delta\check{G}_{ab} = \delta\tilde{R}_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} (g^{cd} \delta\tilde{R}_{cd}) + \frac{\tilde{R}}{4} g_{ab} g^{cd} \delta g_{cd} - \frac{\tilde{R}}{2} \delta g_{ab},$$

$$(2.54) \quad \delta\check{G}_{ij} = \delta\tilde{R}_{ij} - \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} (\tilde{g}^{kl} \delta\tilde{R}_{kl}) + \frac{\tilde{R}}{4} \tilde{g}_{ij} \tilde{g}^{kl} \delta\tilde{g}_{kl} - \frac{\tilde{R}}{2} \delta\tilde{g}_{ij},$$

$$(2.55) \quad g^{ab} \delta G_{ab} = -\tilde{g}^{ij} \delta\tilde{R}_{ij} + G^{ab} \delta g_{ab} + \tilde{R}^{ij} \delta\tilde{g}_{ij},$$

$$(2.56) \quad \tilde{g}^{ij} \delta G_{ij} = -g^{ab} \delta\tilde{R}_{ab} + G^{ij} \delta\tilde{g}_{ij} + \tilde{R}^{ab} \delta g_{ab},$$

$$(2.57) \quad \delta G_{ib} = \delta\tilde{R}_{ib},$$

debe recordarse que $\tilde{g}_{ij} = r^2 \hat{g}_{ij}$.

Reemplazando las ecuaciones ((2.49)-(2.51)) en las últimas se arriba a

$$(2.58) \quad \delta\check{G}_{ij} = -\frac{1}{2}H \left(\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y + \frac{1}{2}\ell(\ell+1)\hat{g}_{ij}Y \right),$$

$$(2.59) \quad \delta G_{ib} = \frac{1}{2} \left[\check{H}^c{}_{b|c} - \frac{1}{2}H_{|b} + v_b H - K_{|b} \right] \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.60) \quad \frac{1}{Y}\delta\check{G}_{ab} = \frac{1}{2} \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \tilde{R} + R \right] \check{H}_{ab} + v^d \left[\check{H}_{ad|b} + \check{H}_{bd|a} - \check{H}_{ab|d} - g_{ab}\check{H}^c{}_{c|d} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[v_a H_{|b} + v_b H_{|a} - g_{ab}v^d H_{|d} \right] - \left[v_a K_{|b} + v_b K_{|a} - g_{ab}v^d K_{|d} \right] \\ - \left[K_{|a|b} - \frac{1}{2}g_{ab}\square K \right],$$

$$(2.61) \quad \frac{1}{Y}g^{ab}\delta G_{ab} = \square K + 4v^a K_{|a} - \frac{\Lambda}{r^2}K + G^{ab}\check{H}_{ab} - \frac{2}{r^2} \left(r^2 v_a \check{H}^{ab} \right)_{|b} \\ - \frac{\ell(\ell+1)+2}{2r^2}H,$$

$$(2.62) \quad \frac{1}{Yr^2}\hat{g}^{ij}\delta G_{ij} = \square K + 2v^a K_{|a} + \frac{1}{2}\tilde{R}K - \check{H}_{ab}{}^{|a|b} - \frac{2}{r}r_{|a|b}\check{H}^{ab} \\ + \frac{1}{2} \left[\square - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - G^i{}_i \right] H - 2v^a \check{H}^b{}_{a|b},$$

donde $\Lambda = (\ell-1)(\ell+2)$.

Para poder simplificar las expresiones más adelante, es útil introducir el covector

$$(2.63) \quad C_b = \check{H}_{ab}r^{|a},$$

expresión que puede ser invertida:

$$(2.64) \quad \check{H}_{ab} = \frac{1}{N} \left[r_{|a}C_b + r_{|b}C_a - g_{ab}r^{|d}C_d \right].$$

Finalmente se definen los escalares S y T y los covectores U_a y V_a por medio de las componentes linealizadas del tensor de Einstein:

$$(2.65) \quad \delta\check{G}_{ij} = S \left(\hat{\nabla}_i \hat{\nabla}_j Y + \frac{1}{2}\ell(\ell+1)\hat{g}_{ij}Y \right),$$

$$(2.66) \quad g^{ab}\delta G_{ab} = \left(T + G^{ab}\check{H}_{ab} \right) Y,$$

$$(2.67) \quad \delta G_{ib} = \left(U_b + U_b^{(aux)} \right) \frac{1}{2}\hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.68) \quad \delta\check{G}_{ab}r^{|a} = \left(V_b - \frac{1}{2}G^{ac}\check{H}_{ac}\nabla_b r + G_{ab}(C^a - \frac{r}{2}K^{|a}) \right) Y,$$

donde

$$U_b^{(aux)} = \frac{r}{2N} \left(G^{ac} \nabla_b r + (\epsilon^{da} G^c_d (*dr)_b) \right) \check{H}_{ac}.$$

Comparando estas ecuaciones con las (2.58 - 2.62) y con las expresiones para una métrica base esféricamente simétrica, se obtienen las siguientes expresiones para las cantidades S , T , U_a y V_a :

$$(2.69) \quad S = -\frac{1}{2}H,$$

$$(2.70) \quad T = \frac{2}{r} d^\dagger C - \frac{2}{r^2} g(C, dr) + \square K + \frac{4}{r} g(dK, dr) - \frac{\Lambda}{r^2} K \\ - \frac{\ell(\ell+1)+2}{2r^2} H,$$

$$(2.71) \quad U = -\frac{1}{N} [(d^\dagger C) dr + (*dC) * dr] - d \left(K + \frac{1}{2} H \right) + H \frac{dr}{r},$$

$$(2.72) \quad V = (d^\dagger C) \frac{dr}{r} + \frac{1}{r} dg(C, dr) + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} C$$

$$(2.73) \quad + \frac{1}{2} \square K dr - dg(dK, dr) + \left(\square r - \frac{N+1}{2r} \right) dK + \frac{N}{2r} dH,$$

donde d es la derivada exterior y $d^\dagger = *d*$, ambos operadores actuando sobre el espacio orbital \mathcal{N}^2 .

Recordar que estas expresiones son generales, donde se ha tomado una métrica base esféricamente simétrica, y por lo tanto son válidas no solo para RN.

2.2.2. Linealización del Tensor Energía-Momento

⁴Hasta el momento sólo se ha realizado la linealización de las cantidades asociadas directamente a la métrica, pero aún falta linealizar el tensor energía momento $T_{\alpha\beta}$. Dicha linealización está asociada no sólo a la perturbación de la métrica, sino también a la perturbación de la fuente, la cual en el caso de electrovacío está dada por la perturbación del campo electromagnético $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$. Este campo, junto con su perturbación, debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell $\tilde{d}(\mathcal{F} + \delta\mathcal{F}_{\alpha\beta}) = 0$ y $\tilde{\nabla}(\tilde{g} + \delta\tilde{g})_\nu (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})^{\mu\nu} = (J + \delta J)^\mu$. Para el caso de RN, con $J_\alpha = 0$ y pidiendo que $\delta J_\alpha = 0$, el conjunto total de ecuaciones que se deben satisfacer es

$$(2.74) \quad \delta G_{\alpha\beta} = \kappa^2 \delta T_{\alpha\beta},$$

$$(2.75) \quad 0 = \tilde{d}\delta\mathcal{F}_{\alpha\beta},$$

$$(2.76) \quad 0 = \tilde{\nabla}(\tilde{g} + \delta\tilde{g})_\nu (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})^{\mu\nu},$$

⁴esta sección esta basada en [12], particularizando para un espacio orbital de dimensión 2

donde $\tilde{\nabla}(\tilde{g} + \delta\tilde{g})$ es la derivada covariante calculada con la métrica perturbada.

La primera de estas ecuaciones simplemente indica que $\delta\mathcal{F}$ se puede expresar en términos de un covector potencial $\delta\mathcal{A}$: $\delta\mathcal{F} = d\delta\mathcal{A}$. La segunda da lugar a las siguientes dos ecuaciones:

$$(2.77) \quad \frac{1}{r^2} \nabla_b (r^2 \delta\mathcal{F}^{ab}) + \hat{\nabla}_i \delta\mathcal{F}^{ai} + E_0 \epsilon^{ab} \left(\frac{1}{2} \nabla_b (\delta\tilde{g}_j^j - \delta\tilde{g}_c^c) - \hat{\nabla}_i \delta\tilde{g}_b^i \right) = 0,$$

$$(2.78) \quad \nabla_a [\delta\mathcal{F}_i^a + E_0 \epsilon^{ab} \delta\tilde{g}_{ib}] + \hat{\nabla}_j \delta\mathcal{F}_i^j = 0,$$

donde $E_0 = \frac{q}{r^2}$.

La condición $\delta\mathcal{F}_{\alpha\beta} = (d\delta\mathcal{A})_{\alpha\beta}$ implica que $\delta\mathcal{F}_{ij} = \hat{\nabla}_i \delta\mathcal{A}_j - \hat{\nabla}_j \delta\mathcal{A}_i$. En el caso de perturbaciones escalares $\delta\mathcal{A}_i$ es el gradiente de la perturbación escalar, lo que produce $\delta\mathcal{F}_{ij} = 0$. Usando esto y expandiendo a primer orden la identidad

$$(2.79) \quad (T + \delta T)_{\alpha\beta} = (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})_{\alpha\mu} (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})_{\beta\nu} (\tilde{g} + \delta\tilde{g})^{\mu\nu} - \frac{1}{4} (\tilde{g} + \delta\tilde{g})_{\alpha\beta} (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})_{\mu\nu} (\mathcal{F} + \delta\mathcal{F})^{\mu\nu},$$

se arriba a la linealización del tensor energía-momento:

$$(2.80) \quad \delta T_{ab} = \frac{E_0}{4} (\epsilon^{cd} \delta\mathcal{F}_{cd} + E_0 \delta g_{cd} g^{cd}) g_{ab} - \frac{1}{2} E_0^2 \delta g_{ab},$$

$$(2.81) \quad \delta T_i^a = E_0 \epsilon^{ab} \delta\mathcal{F}_{ib},$$

$$(2.82) \quad \delta T_{ij} = -\frac{E_0}{2} r^2 \hat{g}_{ij} (\epsilon^{cd} \delta\mathcal{F}_{cd} + E_0 \delta g_{ab} g^{ab}) + \frac{1}{2} \delta\tilde{g}_{ij} E_0^2.$$

Nótese que (2.82) corrige un error en la ecuación (2.33c) de [12], error que más adelante se propaga a la expresión final (5.22c).

La perturbación del tensor energía momento también admite una descomposición en modos par e impar, junto con una expansión en armónicos esféricos. Los términos linealizados en el modo par se pueden escribir genéricamente como sigue

$$(2.83) \quad \delta T_{ab} = \tau_{ab} Y,$$

$$(2.84) \quad \delta T_{ia} = -\frac{r}{k} \tau_a \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.85) \quad \delta T_{ij} = \delta P \hat{g}_{ij} Y + \tau_T \frac{1}{k^2} Y_{ij}.$$

donde $k^2 = \ell(\ell + 1)$ e Y_{ij} se definió en (2.7). Aquí se están omitiendo los índices (ℓ, m) correspondientes a los armónicos esféricos.

Elección del Gauge

Anteriormente ya se ha realizado la elección del gauge con el que se va a trabajar (2.27), y en esta sección se pretende ver sus implicaciones sobre las cantidades asociadas a $\delta\mathcal{F}$. El campo electromagnético transforma ante transformaciones infinitesimales de acuerdo a $\mathcal{F}_{\alpha\beta} \mapsto \mathcal{F}_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_X \mathcal{F}_{\alpha\beta}$. Tomando X como en (2.17), se obtiene

$$(2.86) \quad \delta\mathcal{F}_{ab} \mapsto \delta\mathcal{F}_{ab} - \nabla_c (E_0 \xi^c) Y \epsilon_{ab},$$

$$(2.87) \quad \delta\mathcal{F}_{ai} \mapsto \delta\mathcal{F}_{ai} - E_0 \epsilon_{ab} \xi^b \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.88) \quad \delta\mathcal{F}_{ij} \mapsto \delta\mathcal{F}_{ij}.$$

Nótese que estas cantidades transforman independientemente de f .

Para definir cantidades invariantes de gauge es necesario utilizar las ecuaciones (2.18-2.20). En función de éstas se pueden definir el escalar \mathcal{E} y el tensor \mathcal{E}_a , ambos invariantes:

$$(2.89) \quad \delta\mathcal{F}_{ab} + \nabla_c (E_0 X^c) \epsilon_{ab} Y = \mathcal{E} \epsilon_{ab} Y,$$

$$(2.90) \quad \delta\mathcal{F}_{ai} + E_0 \epsilon_{ab} X^b \hat{\nabla}_i Y = -\frac{r}{k} \epsilon_{ab} \mathcal{E}^b \hat{\nabla}_i Y,$$

donde $X_a = -Q_a + \frac{r^2}{2} \nabla_a G$. Retomando la elección de gauge que se hizo en (2.27), estas expresiones se simplifican a la forma

$$(2.91) \quad \delta\mathcal{F}_{ab} = \mathcal{E} \epsilon_{ab} Y,$$

$$(2.92) \quad \delta\mathcal{F}_{ai} = -\frac{r}{k} \epsilon_{ab} \mathcal{E}^b \hat{\nabla}_i Y.$$

Linealización del Tensor Energía-Momento

Para poder calcular las componentes linealizadas de $T_{\alpha\beta}$ se debe partir de las ecuaciones de Maxwell (2.75, 2.77 y 2.78). La condición (2.75) implica que

$$(2.93) \quad \mathcal{E} = -\frac{1}{k} \nabla_c (r \mathcal{E}^c),$$

mientras que (2.77) y (2.78) implican

$$(2.94) \quad \frac{1}{r^2} \nabla_a (r^2 \mathcal{E}) + \frac{k}{r} \mathcal{E}_a - \frac{E_0}{2} \nabla_a (H - 2K) = 0,$$

$$(2.95) \quad \epsilon^{ab} \nabla_a (r \mathcal{E}_b) = 0.$$

A partir de (2.93 - 2.95) puede obtenerse una ecuación maestra que depende de una sola variable, tal como se muestra a continuación:

La integración de la ecuación (2.95) produce

$$(2.96) \quad \mathcal{E}_b = \frac{k}{r} \nabla_a \mathcal{A},$$

de modo que \mathcal{E}_a puede ser expresado en términos de la nueva función \mathcal{A} , la cual está definida sobre el espacio orbital. Insertando esta expresión en (2.94) se arriba a

$$(2.97) \quad k^2 \nabla_a \mathcal{A} = -\nabla_a (r^2 \mathcal{E}) + \frac{q}{2} \nabla_a (H - 2K)$$

cuya integración (eligiendo apropiadamente la constante de integración) produce

$$(2.98) \quad \nabla_a \nabla^a \mathcal{A} - \frac{k^2}{r^2} \mathcal{A} = -\frac{q}{2r^2} (H - 2K).$$

A continuación se toman las ecuaciones de linealización genéricas de $T_{\alpha\beta}$, ecuaciones (2.80 - 2.82), y se las escribe en términos de \mathcal{E} y \mathcal{E}_a , particularizando para el modo par y en la expansión en armónicos esféricos, de donde se obtiene:

$$(2.99) \quad \tau_{ab} = E_0 \left(-\mathcal{E} + \frac{1}{2} E_0 H \right) g_{ab} - \frac{1}{2} E_0^2 H_{ab},$$

$$(2.100) \quad \tau^a = -E_0 \mathcal{E}^a,$$

$$(2.101) \quad \delta P = E_0 \left(\mathcal{E} - \frac{1}{2} E_0 H \right) + \frac{1}{2} K E_0^2,$$

$$(2.102) \quad \tau_T = 0.$$

Finalmente al reemplazar las expresiones de \mathcal{E} y \mathcal{E}_a en función de \mathcal{A} se obtienen las expresiones finales del tensor energía momento linealizado:

$$(2.103) \quad \delta T_{ab} = \left(\frac{qk^2}{r^4} \mathcal{A} + \frac{q^2}{r^4} K \right) g_{ab} Y - \frac{q^2}{2r^4} H_{ab} Y,$$

$$(2.104) \quad \delta T_{ia} = \frac{q}{r^2} \nabla_a \mathcal{A} \hat{\nabla}_i Y,$$

$$(2.105) \quad \delta T_{ij} = - \left(\frac{qk^2}{r^2} \mathcal{A} + \frac{q^2}{2r^2} K \right) \hat{g}_{ij} Y.$$

Hasta ahora lo que se tienen son las componentes de los tensores energía momento (2.103 - 2.105) y Einstein (2.65 - 2.68) linealizadas escritas en forma covariante para una perturbación escalar. Lo que queda por resolver son las ecuaciones de Einstein linealizadas, problema a ser abordado en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Reducción de las Ecuaciones Perturbativas

3.1. Ecuaciones para RN:

Habiendo obtenido ya las componentes linealizadas del tensor energía momento y Einstein, solo queda por resolver el conjunto de ecuaciones

$$(3.1) \quad \delta G_{\alpha\beta} = \kappa^2 \delta T_{\alpha\beta},$$

$$(3.2) \quad \nabla_a \nabla^a \mathcal{A} - \frac{k^2}{r^2} \mathcal{A} = - \frac{q}{2r^2} (H - 2K).$$

donde la segunda ecuación es consecuencia de las ecuaciones de Maxwell. El paso siguiente en la reducción es escribir en la forma (2.65 - 2.68) las componentes linealizadas del tensor energía momento, para lo cual es necesario separar δT_{ab} y δT_{ij} en sus partes con y sin traza

$$(3.3) \quad \delta T_{ab} = \delta \check{T}_{ab} + \frac{1}{2} g_{ab} (g^{cd} \delta T_{cd}) \Rightarrow \delta \check{T}_{ab} = \frac{q^2}{4r^4} (H g_{ab} - 2H_{ab}) Y,$$

$$(3.4) \quad \delta T_{ij} = \delta \check{T}_{ij} + \frac{1}{2} \tilde{g}_{ij} (\tilde{g}^{kl} \delta T_{kl}) \Rightarrow \delta \check{T}_{ij} = 0.$$

La ecuación (2.65) produce

$$(3.5) \quad \delta \check{G}_{ij} = \kappa^2 \delta \check{T}_{ij} = 0 \Rightarrow -2S = H = 0,$$

Del mismo modo las ecuaciones (2.66 - 2.68) llevan a

$$(3.6) \quad T = \frac{\alpha k^2}{r^4} \mathcal{A} + \frac{q\alpha}{r^4} K,$$

$$(3.7) \quad U_b = \frac{\alpha}{r^2} \nabla_b \mathcal{A},$$

$$(3.8) \quad V_b = -\frac{q\alpha}{8r^3} \nabla_b K,$$

donde $\alpha = 2q\kappa^2$, y se ha particularizado para el caso de RN, en donde se cumple (1.17).

Comparando (3.6 - 3.8) con (2.69 - 2.73 y 2.98) se obtiene

$$(3.9) \quad T = \frac{\alpha k^2}{r^4} \mathcal{A} + \frac{q\alpha}{r^4} K = \frac{2}{r} d^\dagger C - \frac{2}{r^2} g(C, dr) + \square K + \frac{4}{r} g(dK, dr) - \frac{(\ell-1)(\ell+2)}{r^2} K,$$

$$(3.10) \quad U = \frac{\alpha}{r^2} d\mathcal{A} = -\frac{1}{N} [(d^\dagger C)dr + (*dC) * dr] - dK,$$

$$(3.11) \quad V = -\frac{q\alpha}{8r^3} dK = (d^\dagger C) \frac{dr}{r} + \frac{1}{r} dg(C, dr) + \frac{\ell(\ell+1)}{2r^2} C + \frac{1}{2} \square K dr - dg(dK, dr) + \left(\square r - \frac{N+1}{2r} \right) dK,$$

$$(3.12) \quad \square \mathcal{A} = \frac{k^2}{r^2} \mathcal{A} + \frac{q}{r^2} K.$$

Partiendo de las ecuaciones de Einstein para el sistema RN (1.17), se ha planteado la perturbación lineal del mismo. Dicha perturbación ha sido descompuesta en dos modos, uno par (o escalar) y uno impar (o vectorial) para cada armónico (ℓ, m) . Por otro lado, la modificación del tensor energía-momento ha sido originada estrictamente a través de una variación del campo electromagnético, codificada en \mathcal{A} por medio de (2.91 - 2.96). Como resultado de las ecuaciones de Einstein linealizadas para el modo escalar, se ha arribado al conjunto de ecuaciones (3.9 - 3.12). Nótese que dicho sistema es sobre \mathcal{N}^2 , y tiene implícito los índices (ℓ, m) . Al resolver este sistema las condiciones iniciales deben ser elegidas en base a motivaciones físicas y de modo que la aproximación lineal siga siendo válida. Una vez resuelto el mismo, se puede proceder a reconstruir la métrica perturbada a partir de estas funciones, simplemente invirtiendo el proceso a partir del cual se definieron estas cantidades.

El método de resolución de (3.9 - 3.12) es el objeto de la próxima sección. Para llevar a cabo esta tarea ha sido de utilidad el proceso de diagonalización de las ecuaciones perturbativas del sistema Einstein-Yang-Mills planteado en [14], puesto que dicho sistema y el aquí tratado poseen algunas similitudes.

3.2. Reducción

A partir de (3.10) se puede calcular $g(U, *dr)$ resultando

$$(3.13) \quad \frac{\alpha}{r^2} \nabla_b \mathcal{A} \nabla_a r \epsilon^{ab} = (*dC) - \nabla_b K \nabla_a r \epsilon^{ab}$$

$$(3.14) \quad \Rightarrow *d \left[C_b - r \nabla_b K + \frac{\alpha}{r^2} \mathcal{A} \nabla_b r \right] = 0.$$

Esto da lugar a un potencial escalar ξ , definido como

$$(3.15) \quad Z_b := C_b - r \nabla_b K + \frac{\alpha}{r^2} \mathcal{A} \nabla_b r =: \nabla_b \xi.$$

Por otro lado, usando (3.9 y 3.11) para calcular $2V_b - T \nabla_b r$ se obtiene

$$(3.16) \quad d \left[2rg \left(Z - \frac{\alpha}{r^2} \mathcal{A} dr, dr \right) \right] + k^2 Z + r(a + \Lambda) dK + \left(\Lambda + \frac{q\alpha}{r^2} \right) K dr = 0,$$

donde $a = 2r\Box r - N + 1 + \frac{q\alpha}{4r^2} = \frac{6m}{r} - \frac{4q^2}{r^2}$.

Notando que

$$(3.17) \quad d[r(a + \Lambda)] = \left(\Lambda + \frac{q\alpha}{r^2} \right) dr$$

(3.16) puede ser reescrita como

$$(3.18) \quad d \left[2rg \left(Z - \frac{\alpha}{r^2} \mathcal{A} dr, dr \right) \right] + k^2 d\xi + d[r(a + \Lambda)K] = 0.$$

Al integrar (3.18) finalmente se obtiene una ecuación que involucra las cantidades ξ , \mathcal{A} y K :

$$(3.19) \quad 2rg(d\xi, dr) + k^2 \xi - \frac{2\alpha N}{r} \mathcal{A} + r(a + \Lambda)K = 0.$$

Esta ecuación todavía está escrita en función de K , por lo que sería conveniente poder expresarla en función de \mathcal{A} y ξ . Esto es posible utilizando (3.10) para calcular $g(U, dr)$:

$$(3.20) \quad d^\dagger C + g(dK, dr) = -\frac{\alpha}{r^2} \nabla_b \mathcal{A} \nabla^b r$$

$$(3.21) \quad \Rightarrow d^\dagger Z + \frac{2\alpha}{r^2} \nabla_b \mathcal{A} \nabla^b r + \frac{\alpha}{r^2} \mathcal{A} \Box r - \frac{2N\alpha}{r^3} \mathcal{A} - r\Box K = 0.$$

Al reemplazar esto en la ecuación (3.9) se arriba a la expresión deseada:

$$(3.22) \quad d^\dagger Z - \frac{2}{r}g(Z, dr) - \frac{\alpha}{r^3} \left(k^2 - \frac{2M}{r} + \frac{q\alpha}{2r^2} \right) \mathcal{A} = \left(\frac{\Lambda}{r} + \frac{q\alpha}{r^3} \right) K$$

A partir de esta última, K puede ser reescrito como función únicamente de ξ y \mathcal{A} . Reemplazando (3.12) en (3.12) y (3.19) se obtienen las ecuaciones covariantes que contienen toda la información de la perturbación. El resultado es:

$$(3.23) \quad \square \mathcal{A} = \frac{k^2}{r^2} \mathcal{A} - \frac{2q}{r^2} \frac{g(d\xi, dr)}{a + \Lambda} + \frac{2q\alpha N}{r^4} \frac{\mathcal{A}}{a + \Lambda} - \frac{qk^2}{r^3(a + \Lambda)} \xi,$$

$$(3.24) \quad \square \xi = -\frac{2}{r}g(d\xi, dr) - \frac{\alpha}{r^3} \left(k^2 - \frac{2m}{r} + \frac{q\alpha}{2r^2} \right) \mathcal{A} + \frac{k^2}{r(a + \Lambda)} \left(\frac{\Lambda}{r} + \frac{q\alpha}{r^3} \right) \xi \\ + \frac{2}{(a + \Lambda)} \left(\frac{\Lambda}{r} + \frac{q\alpha}{r^3} \right) g(d\xi, dr) - \frac{2\alpha N}{r^2(a + \Lambda)} \left(\frac{\Lambda}{r} + \frac{q\alpha}{r^3} \right) \mathcal{A}$$

Definiendo las variables maestras ϕ y φ por medio de

$$(3.25) \quad \varphi = \frac{\sqrt{\Lambda}}{(a + \Lambda)} \xi, \quad \phi = -2 \left(\mathcal{A} - \frac{q}{r(a + \Lambda)} \xi \right)$$

es posible reescribir (3.23) y (3.24) como sigue:

$$(3.26) \quad \begin{pmatrix} -\square + U(r) - 3mW(r) & 2q\sqrt{\Lambda}W(r) \\ 2q\sqrt{\Lambda}W(r) & -\square + U(r) + 3mW(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \end{pmatrix} = 0,$$

donde los potenciales $U(r)$ y $W(r)$ están definidos por

$$(3.27) \quad U(r) = \frac{1}{r^2(a + \Lambda)^2} \left\{ \Lambda^3 + \left(2 + \frac{9m}{r} - \frac{4q^2}{r^2} \right) \Lambda^2 \right. \\ \left. + \left(\frac{3m}{r} + \frac{9m^2 + 2q^2}{r^2} - \frac{16q^2m}{r^3} + \frac{6q^4}{r^4} \right) 4\Lambda \right. \\ \left. + 4 \left(\frac{9m^2}{r^2} + \frac{9m^3}{r^3} - \frac{39q^2m^2}{r^4} + \frac{32q^4m}{r^5} - \frac{8q^6}{r^6} \right) \right\}$$

$$(3.28) \quad W(r) = \frac{1}{r^3(a + \Lambda)^2} \left\{ \Lambda^2 + 4\Lambda + \frac{4m}{r} \left(3 - \frac{3m}{r} + \frac{q^2}{r^2} \right) \right\}$$

Para establecer la equivalencia con la formulación usual de Zerilli y Moncrief, llamemos \mathcal{O} al operador en (3.26) y

$$(3.29) \quad \beta_\alpha = 3m + (-1)^\alpha \sqrt{9m^2 + 4q^2\Lambda}, \quad \alpha = 1, 2.$$

La matriz

$$(3.30) \quad P = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \beta_2 \\ 2q\sqrt{\Lambda} & -2q\sqrt{\Lambda} \end{pmatrix}$$

satisface

$$(3.31) \quad P^{-1}\mathcal{M}P = \begin{pmatrix} -\square + U_1 & 0 \\ 0 & -\square + U_2 \end{pmatrix}$$

donde $U_\alpha = U + (-1)^{\alpha+1}(\beta_2 - \beta_1)/2$. Los potenciales de Zerilli del modo escalar son $V_\alpha^+ = NU_\alpha$. Si llamamos V_α^- a los potenciales de las variables maestras del modo vectorial, tendremos

$$(3.32) \quad V_\alpha^\pm = \pm\beta_\alpha \frac{df_\alpha}{dx} + \beta_\alpha^2 f_\alpha^2 + \gamma f_\alpha$$

siendo $\gamma = (\ell - 1)\ell(\ell + 1)(\ell + 2)$, y $f_\alpha = N/(r\beta_\alpha + (\ell - 1)(\ell + 2)r^2)$. Se deduce inmediatamente de (3.26) y (3.31) que los campos

$$(3.33) \quad \begin{pmatrix} \Phi_1^+ \\ \Phi_2^+ \end{pmatrix} := P^{-1} \begin{pmatrix} \varphi \\ \phi \end{pmatrix}$$

satisfacen las ecuaciones de Zerilli para el modo escalar:

$$(3.34) \quad [-N\square + V_\alpha^+]\Phi_\alpha^+ = 0$$

(notar que, en coordenadas usuales (t, r, θ, ϕ) , $-N\square = \partial^2/\partial t^2 - \partial^2/\partial r^2$.) Ciertamente es posible intuir de (3.34) que las ecuaciones del modo escalar, obtenidas originariamente por Zerilli trabajando en coordenadas (t, r, θ, ϕ) , resultarán de la forma (3.34) (con \square apropiadamente re-escrito) en cualquier otro sistema de coordenadas alternativo, pero es claro que no es posible intuir del trabajo de Zerilli las relaciones entre los campos Φ_α^+ y las perturbaciones métricas en un sistema de coordenadas alternativo. La formulación covariante que aquí desarrollada permite reconstruir la perturbación métrica a partir de las variables maestras en cualquier sistema de coordenadas.

Como fuera notado por Moncrief [3] (ver también Chandrasekhar [5]), V_α^\pm son definidos positivos para $r > r_+$, por lo que la ecuación de Zerilli no admite soluciones exponencialmente crecientes en t . Esto provee un criterio de estabilidad para la región estática externa (región III). La región estática interna, no obstante, es inestable, según se probó recientemente [4].

Para solucionar estas ecuaciones deberían darse condiciones iniciales sobre las funciones ϕ y φ , las cuales deberán estar motivadas físicamente, y de modo que la

aproximación a primer orden siga siendo válida. Resuelto el sistema, el paso siguiente es obtener las correcciones de la métrica, para lo cual se deben invertir los pasos a través de los cuales se obtuvieron las funciones. La inversión debe llevarse a cabo despejando los escalares \mathcal{A} y ξ de (3.25), luego obteniendo K a partir de (3.22), y finalmente C_b a partir de (3.15), a partir del cual se puede obtener H_{ab} . Debe notarse que la definición de las funciones escalares ϕ y φ (3.25) tienen dividiendo al factor $a + \Lambda$, el cual se anula en un punto dependiente de ℓ , por lo que esta definición no es regular. Esta singularidad solo puede aparecer en las regiones I o II, pero no en la III, lo que trae complicaciones al resolver las ecuaciones en las primeras dos, tal como se ha hecho recientemente en [4].

Conclusiones y Objetivos a Futuro

En el presente trabajo se trató la perturbación lineal de las ecuaciones de Einstein alrededor de Reissner-Nordström. Las diferentes componentes de la perturbación desacoplan en dos modos, uno escalar (par) y otro vectorial (impar). El tratamiento general del modo vectorial era ya conocido [16], sin embargo el análisis del modo escalar solo se conocía en sistemas de coordenadas particulares.

El estudio de la formulación covariante del modo par fue el objetivo de este trabajo. Como resultado se ha logrado reducir el sistema de ecuaciones que involucra a las diferentes componentes de la métrica y del campo de Maxwell, a un sistema de dos variables maestras ϕ y φ . A partir de éstas, la métrica puede ser reconstruida en forma directa simplemente invirtiendo las expresiones algebraicas que las definen.

Las ecuaciones obtenidas se reducen a las obtenidas por Zerilli [19] para el caso de coordenadas usuales (t, r) , lo cual apoya la correctitud de las mismas.

Como objetivo inicial de este proyecto se planteo realizar un análisis general del modo par, a través del cual fuera posible reducir las ecuaciones perturbativas covariantes a dos ecuaciones maestras, para luego ser resueltas. Parte de este objetivo se ha logrado, sin embargo queda aún bastante trabajo por hacer, pues la resolución del sistema al cual se ha arribado no es fácil (aún en un sistema de coordenadas particular), y a su vez trae consigo problemas de singularidades en las definiciones de ϕ y φ para el problema interior ($r < r_-$).

Bibliografía

- [1] R. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [2] P.K. Townsend, arXiv:9707012v1 [gr-qc].
- [3] V. Moncrief, *Phys. Rev. D* **10**, 1057 (1974).
- [4] G. Dotti and R. J. Gleiser, *Gravitational instability of the inner static region of a Reissner-Nordstrom black hole*, *Class. Quant. Grav.*, en prensa.
arXiv:1001.0152 [gr-qc].
- [5] S. Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, Oxford University Press, 1992.
- [6] T. Regge, J. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [7] F. J. Zerilli, *Phys. Rev. Lett.* **24** 737 (1970), *Phys. Rev. D* **2**, 2141 (1970), *Phys. Rev. D* **9**, 2141 (1974).
- [8] U. H. Gerlach and U. K. Sengupta, *Phys. Rev. D* **19**, 2268 (1979); **22**, 1300 (1980).
- [9] H. Kodama and A. Ishibashi, arXiv:gr-qc/0312012.
- [10] H. Kodama and A. Ishibashi, *Prog. Theor. Phys.* **111**, 29 (2004) [arXiv:hep-th/0308128].
- [11] A. Ishibashi and H. Kodama, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 901 (2003) [arXiv:hep-th/0305185].
- [12] H. Kodama and A. Ishibashi, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 701 (2003) [arXiv:hep-th/0305147].
- [13] H. Kodama, A. Ishibashi and O. Seto, *Phys. Rev. D* **62**, 064022 (2000) [arXiv:hep-th/0004160].

- [14] O. Sarbach, Ph.D. thesis, 2000. Institute for Theoretical Physics, preprint 2001031, University of Zurich <http://www.ifm.umich.mx/sarbach/publications/total.pdf>
- [15] O. Sarbach and M. Tiglio, Phys. Rev. D **64**, 084016 (2001) [arXiv:gr-qc/0104061].
- [16] U. Gerlach and U. Sengupta, Phys. Rev. D **19**, 2268 (1979)
- [17] U. Gerlach and U. Sengupta, Phys. Rev. D **22**, 1300 (1980)
- [18] O. Sarbach, M. Heusler and O. Brodbeck, Phys. Rev. D **62**, 084001 (2000) [arXiv:gr-qc/9910059].
- [19] F. Zerilli, Phys. Rev. D **9**, 860 (1974)