EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VIII JORNADAS

VOLUMEN 4 (1998), Nº 4

Horacio Faas
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Descubrimiento y justificación en matemática

*Rodolfo Gaeta**

*Nélida Gentile**

Desde hace ya algunos años se ha producido una revitalización del debate acerca de la distinción entre el contexto de descubrimiento y el contexto de justificación. Las discusiones sobre el tema se han centrado, sobre todo, en la validez de tal distinción para el caso de las ciencias fácticas. El propósito del presente trabajo es examinar la cuestión en el ámbito de la matemática. Nuestros argumentos intentarán mostrar que la metodología de la investigación en el campo de la matemática presenta significativas coincidencias con las que corresponden a las ciencias fácticas. En particular, sostendremos que en el contexto de descubrimiento matemático se vuelve a presentar la misma situación que caracteriza las ciencias fácticas: en la medida en que pueda identificarse la operación de ciertas reglas, parece tratarse de reglas deductivas o inductivas. Esta circunstancia no implica, sin embargo, que el descubrimiento pueda reducirse íntegramente a tales reglas. Subsisten --creemos-- algunos aspectos del descubrimiento que escapan al análisis lógico; pero una vez más, esta característica se presenta en las ciencias fácticas.

Varios de los autores que en la actualidad reivindican la posibilidad de una lógica del descubrimiento proponen ampliar el concepto de lógica de tal manera que exceda el ámbito de la lógica estándar, ya sea deductiva o inductiva. Esta propuesta constituye una réplica a la idea de que como el descubrimiento no puede reconstruirse en términos puramente inductivos o deductivos incluye la participación de factores irracionales o no racionales. Se sostiene que el descubrimiento pone de manifiesto un sentido más amplio de la noción de racionalidad. Así, por ejemplo, se ha rescatado como procedimiento típico del surgimiento de hipótesis científicas la inferencia inductiva estudiada por Peirce y recogida posteriormente por Hanson.

Otros autores optan por rechazar la validez de la distinción entre un contexto de descubrimiento y un contexto de justificación. Sugieren, pues, que la investigación científica se desenvuelve en un único proceso en el cual el descubrimiento consiste en el desarrollo de hipótesis justificadas, o quizá, de hipótesis que están al mismo tiempo en proceso de justificación. Así, Gutting sostiene que la lógica de la ciencia es esencialmente una lógica para el desarrollo

* FFyL.-Universidad de Buenos Aires

de hipótesis y no para la contrastación de hipótesis desarrolladas a partir de medios no lógicos:

> Todos los métodos de la ciencia apuntan, siempre, al desarrollo de hipótesis justificadas; son simultáneamente métodos de descubrimiento (desarrollo) y justificación (Gutting 1980, p. 221).

Junto al cuestionamiento de la distinción también se ha propuesto reemplazar la clásica dicotomía por una clasificación más sutil que incorpora nuevas distinciones. Nickles, por ejemplo, concibe la actividad científica como un proceso de descubrimiento que incluye tres etapas: generación, prosecución (pursuit) y aceptación. En la primera de estas etapas el descubrimiento está ligado a la producción de una idea digna de ser desarrollada. El descubrimiento, en este sentido, está ligado a un proceso individual. Un segundo sentido de "descubrimiento" se perfila en la etapa de prosecución en la cual la idea se extiende a la comunidad científica. Su consideración por parte de la comunidad no implica aun la aceptación. Por último, en la tercera etapa la idea es aceptada y legitimada por la comunidad científica. De acuerdo con Nickles, en el sentido más fuerte de la expresión, el descubrimiento incluye la justificación final, puesto que sería impropio considerar que se ha logrado un descubrimiento antes que la hipótesis correspondiente esté debidamente establecida. Pero también señala que en cada una de las etapas pueden reconocerse aspectos de carácter justificatorio:

> Así, el descubrimiento incluye la justificación; pero igualmente, la justificación incluye el descubrimiento, especialmente si la justificación se extiende para incluir la evaluación de bajo nivel y la estimación de la plausibilidad, por una parte, y la interpretación y comprensión de resultados justificados" por otra parte (tópicos negados por los positivistas). (Nickles 1980, p. 10).

Martin Curd también propone una modificación a la dicotomía clásica. Sostiene que el descubrimiento no indica un momento. Curd sugiere, además, una distinción entre una *lógica de la generación* de teorías y una *lógica de la evaluación preliminar*. Mientras que la primera alude a las inferencias que hacen los científicos para arribar a sus hipótesis y a la justificación de su razonabilidad, la lógica de la evaluación preliminar opera después que las hipótesis han sido generadas y antes de que sean contrastadas experimentalmente, de manera que se la puede caracterizar como una *lógica de la prosecución* (Curd 1980, p. 203 y nuestros comentarios en "Amigos y enemigos de la lógica del descubrimiento", Cuadernos de Filosofía nº 42 -en prensa-)

Debemos preguntarnos, pues, en qué medida esta situación puede reflejarse en el caso de la matemática. Los historiadores de la ciencia señalan que los orígenes de las matemáticas fueron empíricos: la observación y la necesidad de resolver ciertos problemas prácticos condujeron, por un proceso de naturaleza inductiva, a la formulación original de ciertas proposiciones que luego llegarían a articularse como teoremas dentro de un sistema deductivo. Se suele creer, sin embargo, que en sus etapas maduras la matemática se identifica con el uso de procedimientos puramente deductivos. Llegados a este punto es conveniente interrogarse sobre el alcance de lo que pueda llamarse, respectivamente, descubrimiento y justificación en el campo de las matemáticas.

Con respecto al descubrimiento podemos formular, a su vez, dos nuevas cuestiones: i) qué significa descubrir en matemática y ii) qué clase de cosas se descubren. A fin de responder la primera pregunta se hace necesario elucidar, en primer lugar, el significado de "descubrir". Por un lado --tal como señala Nickles--, la palabra "descubrir" está asociada con un verbo de logro, es decir, refiere a un resultado científico reconocido; por otro, denota un proceso, esto es, incluye todas las fases iniciales del desarrollo de una idea ya sea que finalmente resulte o no reconocida. En su primera acepción, en el caso de la matemática sólo correspondería hablar de descubrimiento de un teorema, pongamos por caso, cuando efectivamente se cuenta con la demostración correspondiente. Pero como es fácil de advertir, si se adopta este sentido estricto a propósito de las ciencias fácticas, no podríamos hablar de descubrimiento de una teoría a menos de que no subsista ninguna posibilidad de que finalmente resulte falsa, lo cual choca con la actitud falibilista característica de la epistemología actual.

Podría parecer, entonces, que hay una posible diferencia entre las ciencias formales y las ciencias fácticas en este punto, por cuanto mientras las hipótesis fácticas siempre mantienen su carácter contingente, cabe pensar que en la matemática es posible establecer verdades apodícticas. Sin embargo, también esta condición puede ponerse en duda. Las paradojas del cálculo infinitesimal y más tarde las antinomias de la teoría de conjuntos son algunos de los hitos que, tal como señala Kalmár, han quebrado la imagen de la matemática como una ciencia deductiva infalible (Kalmár 1967). Por ese motivo, parece conveniente utilizar el término de un modo más liberal, en el segundo de los sentidos indicados por Nickles, y referirnos al descubrimiento como el proceso a través del cual surge una hipótesis o una idea aun cuando no se tenga absoluta certeza de que tal hipótesis es verdadera o de que la idea corresponde a una entidad efectivamente existente.

Respecto de la segunda cuestión, esto es, qué cosas se descubren en matemáticas, surgen en principio cinco alternativas. En primer lugar, principios o axiomas tales como los postulados de Euclides. En segundo lugar, teoremas --o mejor dicho candidatos a teoremas--, es decir, proposiciones que han de constituirse en teoremas cuando se produzca su prueba. En tercer término demostraciones y, en cuarto lugar, entidades tales como cierta clase de números o estructuras matemáticas. Por último, hemos de tener en cuenta, también, el descubrimiento de contraejemplos que obligan a revisar creencias previas.

Si se entiende el descubrimiento en su sentido más amplio, parece allanarse el camino para establecer qué significa descubrir un axioma, un teorema o una demostración. Pero resulta más problemático establecer qué significa descubrir una entidad matemática, a menos que se esté dispuesto a suscribir un riguroso platonismo. Una alternativa menos comprometida consiste en identificar el descubrimiento de entidades matemáticas con la formulación de las teorías que las postulan. Es interesante acotar, al respecto, que algunos matemáticos marcan una diferencia entre el descubrimiento de una entidad y la demostración de su existencia. Así, Franklin señala --siguiendo a Aschbacher-- que se llega a descubrir un grupo cuando se dispone de una cantidad suficiente de información autoconsistente sobre sus propiedades; mientras que sólo se muestra su existencia cuando se prueba que hay algún grupo simple finito que las satisface.

Este tipo de observaciones sugieren, por una parte, que podría reconstruirse la dicotomía tradicional en el campo de las matemáticas reservando el nombre de justificación para las demostraciones en sentido estricto, esto es, a la manera axiomática --identificando la justificación con la prueba formal de un teorema--, mientras que el contexto de descubrimiento incorporaría todos los aspectos y procesos previos que condujeron a la prueba. Pero la referencia a la necesidad de disponer de una cantidad suficiente de información consistente para que pueda decirse que se ha descubierto un grupo sugiere, también, que en la propia etapa de descubrimiento ya deben estar presentes algunos elementos que, en cierto sentido, poseen un valor justificatorio.

Franklin considera, al respecto, que en los primeros estadios de su trabajo, el matemático hace uso de procedimientos no deductivos, pues "la matemática no puede consistir de conjeturas, pruebas y refutaciones" (Franklin 1987, p. 2). Cualquier matemático puede generar conjeturas pero, obviamente, antes de encontrar la prueba buscada algunas de estas conjeturas serán consideradas como mejores candidatas para la solución del problema. Pero, admitir que algunas respuestas son mejores que otras, equivale a admitir que algunas son, sobre la evidencia disponible, más razonables que otras. Esta evaluación preliminar de una conjetura, previa a la justificación dada por la prueba final que el matemático espera publicar, parece tener bastante analogía con la etapa de prosecución descrita por Nickles para el caso de las ciencias empíricas o el período de evaluación preliminar señalado por Curd.

El punto crucial respecto de la racionalidad o no racionalidad del descubrimiento y, eventualmente, de la existencia de una lógica correspondiente radica, precisamente, en la naturaleza de esta evaluación preliminar. Así, por ejemplo, una porción significativa de la tarea de los matemáticos consiste en encontrar demostraciones de proposiciones que se presumen verdaderas. En esos casos, y mientras no se hallen las correspondientes demostraciones, tales proposiciones se mantienen en el plano de las conjeturas. Pero es evidente que un matemático sólo estará dispuesto a invertir tiempo y esfuerzo en el intento de demostrar una proposición si la considera relevante y plausible. Y es precisamente en el terreno de la plausibilidad de una hipótesis matemática donde han de encontrar utilidad los procedimientos no deductivos.

Los estudios llevados a cabo por Polya indican, en efecto, que el uso de procedimientos inductivos lejos de ser privativo de las primeras etapas de la matemática forman parte de la práctica permanente de quienes trabajan en esta disciplina. Es así como la aplicación de este tipo de procedimientos condujo a Euler a conjeturar que:

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \ldots = \pi^2/6$$

La plausibilidad de esta conjetura surge a partir de dos observaciones. En primer lugar, puede verificarse que la ecuación se muestra correcta a medida que se van extrayendo decimales. Por otra parte, guarda cierta analogía con un procedimiento que condujo a un resultado ya probado:

$$1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - 1/11 + \ldots = \pi/4$$

En conformidad con lo que previamente habían sostenido tanto Euler como Laplace, Polya explicita un conjunto de reglas o patrones de inferencia que subrayan el papel de los procedimientos no deductivos en el descubrimiento matemático. Entre estas reglas se encuentran las siguientes:

a) La verificación de una consecuencia hace más digna la conjetura.
b) Tal verificación cuenta más si difiere de las consecuencias verificadas previamente.
c) La verificación de una consecuencia cuenta más o menos según resulte más o menos probable o sorprendente.

Obsérvese que las dos primeras reglas mencionadas corresponden respectivamente a los criterios de cantidad y variedad corrientes en la metodología inductiva de las ciencias fácticas; mientras que la última regla evoca algunos aspectos de la formulación brindada por Peirce para los razonamientos abductivos.

Las consideraciones precedentes sugieren, en primer lugar, que los procedimientos no deductivos cumplen una importante función como método de descubrimiento matemático, es decir, como una forma de generar ideas que requerirán, a su vez, de la correspondiente justificación. Si esa fuera exactamente la situación se podría concluir, entonces, que por lo menos en algunos casos el descubrimiento matemático responde a patrones lógicos, a saber, las inferencias inductivas, mientras que, por otra parte, la justificación debe ajustarse a patrones deductivos. Polya considera, en efecto, que sólo las demostraciones rigurosas pueden proporcionar pruebas legítimas y de ese modo constituirse en auténticas justificaciones de las conjeturas. Pero, si se tiene en cuenta que no siempre se alcanza a probar una conjetura matemática deduciéndola de otras proposiciones bien establecidas, entonces pareciera viable pensar que a falta de una demostración en sentido estricto resultan relevantes los argumentos no deductivos que la apoyan para otorgarle, al menos, una justificación incompleta.

De este modo --si admitimos extender el concepto de justificación en matemáticas de manera que incluya argumentos no deductivos--, la situación en el campo de esta disciplina reproduce la que se observa en las ciencias fácticas en cuanto a la relación entre descubrimiento y justificación: los aspectos lógicos que puedan reconocerse en el descubrimiento no son esencialmente diferentes de los que caracterizan la justificación.

El paralelismo entre las ciencias formales y las ciencias fácticas resulta muy notorio en la concepción de la matemática propuesta por Lakatos. Cuando se refirió a esta ciencia, Lakatos no vaciló en aplicarle, de manera ortodoxa, la doctrina que Popper había formulado a propósito de las ciencias fácticas. Lakatos extendió, en efecto, el falibilismo más allá de las ciencias empíricas y reaccionó en contra de la epistemología "euclídea" que confería el carácter de verdad indubitable a los axiomas y consecuentemente a los teoremas que de ellos se deducen. La certificación de los ensayos y de los errores que de hecho precedieron a los logros matemáticos, así como las dificultades surgidas en el proceso de fundamentación de la matemática, tales como el descubrimiento de paradojas, convencieron a Lakatos de que las proposiciones matemáticas resultan en última instancia provisorias. A su juicio las teorías matemáticas revisten un carácter conjetural: a lo sumo pueden llegar a considerarse bien corroboradas. Para Lakatos, las teorías matemáticas poseen un carácter cuasiempírico. Esto es, se contrastan a través de su acuerdo o desacuerdo con un tipo peculiar de base empírica. Los falsadores potenciales de las teorías matemáticas no son, como en el caso de las teorías empíricas, enunciados singulares espacio-temporales; pero en lugar de ellos, hay enunciados matemáticos que cumplen la misma función. Lakatos distingue los falsadores potenciales lógicos, es decir, las contradicciones, de los falsadores heurísticos que surgen de la teoría informal de la que se intenta dar cuenta. Así, una teoría formal se considerará refutada si uno de sus teoremas está negado por la teoría informal que el matemático pretende reconstruir. De este modo, frente a la imposibilidad de exigir que las teorías matemáticas cuenten con axiomas infalibles cuya verdad transmiten a los teoremas, Lakatos propone una metodología falsacionista, conforme a la cual la aceptación de un enunciado básico falsador obliga a revisar las premisas.

La intención explícita de Lakatos es mostrar que quienes pretenden que la deducción es la lógica del descubrimiento matemático cometen un error comparable al que había denunciado Popper a propósito de los que sostenían que la inducción es la lógica del descubrimiento en el ámbito de las ciencias fácticas (Lakatos 1976, p. 160). A decir verdad, Lakatos parece desconfiar en la propia distinción entre contexto de descubrimiento y contexto de justificación que tanto los empiristas lógicos como Popper aceptaban. En su opinión, las ideas de Popper no excluían completamente la posibilidad de una lógica del descubrimiento. Sostiene que el título del libro de Popper encierra una paradoja que podría resolverse si se interpreta que Popper --aunque no fuera totalmente conciente de ello-- sólo pretendía negar la existencia de una lógica del infalible del descubrimiento. Así, Popper, al proponer el método de conjeturas y refutaciones no se dio cuenta de que constituye una lógica del descubrimiento que no es "ni la psicología ni la lógica sino una disciplina independiente, la lógica del descubrimiento, la heurística" (Ibid., p. 167n).

Las palabras de Lakatos que acabamos de transcribir muestran una vez más que buena parte del debate en torno del descubrimiento y la justificación se origina en la falta de precisión de los términos que se utilizan. Lo que Lakatos parece querer decir es que la heurística puede ser llamada lógica pero sin que esta última expresión se identifique con la lógica deductiva o la lógica inductiva. Ahora bien, aun cuando, en beneficio de la discusión, aceptemos denominar lógica al "método" de las conjeturas y las refutaciones y aun cuando también estemos dispuestos a admitir que la refutación de una conjetura promueve la propuesta de otra que la reemplace, cabe preguntarse si ello es suficiente o si, por el contrario, existen otros factores que intervienen en la producción de tales conjeturas. Es la incidencia de factores no identificables, seguramente, la que determinó que Popper y Reichenbach desplazaran finalmente la explicación del descubrimiento al campo de la psicología. Y son precisamente estos factores los que, creemos, no quedan comprendidos en ninguna lógica del descubrimiento por más que relajemos el sentido de esta expresión. En esta misma dirección se orienta una observación de Franklin:

> Para lograr fama en matemática sólo es necesario encadenar suficientes pasos deductivos para probar una proposición interesante y someter el resultado a *Inventiones Mathematicae*. El truco es encontrar los pasos. Análogamente, en la lógica no deductiva el problema no es conocer los principios sino Bringing to Bear la evidencia relevante.
>
> Los principios, sin embargo, proporcionan *alguna ayuda* para decidir qué evidencia será de utilidad para confirmar la verdad de una hipótesis (Franklin 1987, p. 14. Subrayado en el original).

Y de la misma manera, Polya reconoce que hay que intuir un problema matemático antes de probarlo y hay que intuir la idea de la prueba antes de llevar a cabo sus detalles. Así, el resultado de la labor demostrativa del matemático es la prueba, pero esta, a su vez se descubre mediante el razonamiento plausible, la intuición; pero el uso eficiente del razonamiento plausible es una habilidad práctica que se aprende mediante la imitación y el uso: no hay un método para aprender a intuir (Polya 1953, pp. 14-15).

En síntesis, las alternativas propuestas al uso del método deductivo en matemática, tales como las inferencias inductivas defendidas por Polya y Franklin, o el método de las conjeturas y refutaciones que sostiene Lakatos, no parecen eliminar completamente la intervención de un elemento creativo irreductible. Podría pensarse, que la concreción de programas computacionales capaces de generar automáticamente demostraciones de teoremas debilita esta creencia. Pero aun cuando dichos programas sean capaces de contener restricciones que descarten la producción de teoremas triviales no resulta fácil admitir que resuelvan el problema del descubrimiento en matemática. Queda por explicar en qué medida la ocurrencia de un teorema, la "intuición" de un axioma o la articulación de los pasos de una demostración en la mente de un matemático responden a los patrones operativos de los mecanismos computacionales; así como queda por determinar si los programas que intentan reconstruir el descubrimiento de ciertas leyes de las ciencias fácticas resuelven el problema en ese ámbito. Esta circunstancia refuerza la idea de que la problemática del descubrimiento científico presenta condiciones similares tanto en las ciencias fácticas como en las formales.

Bibliografía

CURD, M. (1980), "The Logic of Discovery: An Analysis of Three Approaches", en Nickles, Th. (1980).

FRANKLIN, J. (1987), "Non-deductive Logic in Mathematics", *British Journal for the Philosophy of Science*, 38.

GUTTING, G. (1980), "The Logic of Invention", en Nickles, Th. (1980).

HANSON, N.R. (1958), *Patterns of Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge. Trad. cast.: *Patrones de descubrimiento.* Madrid, Alianza Universidad, 1985.

HANSON, N.R. (1960), "Is There a Logic of Scientific Discovery?", in H. Feigl and G. Maxwell (eds), *Current Issues in the Philosophy of Science*, Holt, Rinehart, Winston, New York, 1960.

KALMAR, L. (1967), "Foundations of Mathematics-Whither now?", en Lakatos, I. (ed.) (1967), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam, North Holland.

LAKATOS, I.(1976), *Proof and Refutations. The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge, University Press. Trad. Cast.: *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Alianza, Madrid, 1982.

LAKATOS, I. (1978), *Mathematics, Science and Epistemology. Philosophical Papers*. Volume 2, Cambridge, University Press. Trad. cast.: *Matemática, ciencia y epistemología*, Alianza, Madrid, 1981.

NICKLES, Th. [ed.](1980), *Scientific Discovery, Logic, and Rationality*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1980.

PEIRCE, (1960), *Collected Papers*, Cambridge, Massachussetts.

POLYA, G. (1945), *How to Solve It?*, Princeton University Press, Princeton.

POLYA, G. (1953), *Mathematics and Plausible Reasoning*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey. Trad. cast.: *Matemáticas y razonamiento plausible*, Tecnos, Madrid, 1966.

POPPER, K. (1935), *Logik der Forschung*. Wien: J. Springer. Versión inglesa: *The Logic of Scientific Discovery*, Hurchinson & Co. Ltd., Londres, 1958. Trad. cast.: *La lógica de la investigación científica*, Rei, Bs. As., 1989.

REICHENBACH, H. (1938), *Experience and Prediction*, The University of Chicago Press, Chicago, 1938.