EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVII JORNADAS

VOLUMEN 13 (2007)

Pío García
Luis Salvatico
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

La paradoja de Béziau y la lógica positiva

Carlos A. Oller[*]

1. Introducción: La paradoja de Béziau

En su artículo "Clasical Negation can be Expressed by One of its Halves" [1] Jean-Yves Béziau presenta una paradoja que consiste en que la lógica proposicional clásica K puede reconstruirse en el interior de una lógica proposicional $K/2$ estrictamente más débil que la clásica. Este sistema tiene un condicional caracterizado por las cláusulas semánticas clásicas y una negación que se caracteriza semánticamente por sólo una de las dos cláusulas condicionales que definen a la negación clásica —la que establece que, si $V(A)=1$, entonces $V(\neg A)=0$.

La paradoja de Béziau puede presentarse como una paradoja relacionada con la cuestión de la traducción entre lógicas. En efecto, Béziau enuncia la paradoja del siguiente modo:

$$\Delta \models_K A \text{ si y sólo si } \tau(\Delta) \models_{K/2} \tau(A)$$

donde τ es una función de traducción entre las fórmulas de la lógica proposicional clásica y las de $K/2$. Esta presentación de la paradoja plantea la cuestión de los diferentes tipos de traducción entre lógicas, y también la de las condiciones que debe cumplir una traducción de este tipo para ser una traducción fiel.

Es posible, además, presentar la paradoja de Béziau en términos sintácticos, tal como lo hace Lloyd Humberstone en [3] y [4]. En estos términos, lo paradójico consiste en que la negación de la lógica proposicional clásica puede definirse en un sistema axiomático cuyo conjunto de axiomas y reglas de inferencia para la implicación material y la negación es un subconjunto propio del respectivo conjunto de axiomas y reglas de inferencia de la lógica proposicional clásica para esas conectivas. En efecto, esto resulta sorprendente si se sostiene la concepción de las definiciones como meras abreviaturas que no agregan nada sustancial al sistema en el que se formulan. La presentación sintáctica de la paradoja de Béziau plantea, pues, la cuestión del rol de las definiciones en un sistema lógico.

En este artículo presentaremos una nueva paradoja del tipo de la de Béziau. Para ello, consideraremos un sistema de lógica proposicional positiva —i.e. libre de negación— más débil que el de la lógica positiva clásica. El condicional de este sistema está caracterizado por las cláusulas semánticas habituales para el condicional material, salvo la que establece que, si $V(A)=0$ y $V(B)=1$, entonces $V(A \rightarrow B)=1$. La conjunción y la disyunción de este sistema están caracterizadas por las cláusulas clásicas para estas conectivas. La ley de refuerzo del antecedente no es válida para el condicional de este sistema, por lo que puede considerarse que incluye una lógica para los condicionales derrotables (*defeasible conditionals*). Sin embargo, mostraremos que en este sistema de lógica positiva es posible definir el condicional material clásico y, de esta manera, reconstruir la lógica positiva clásica en el interior de una lógica positiva más débil.

[*] UBA/UNLP

2. Traducciones entre lógicas, definiciones y la paradoja de Béziau

Las cláusulas semánticas clásicas para el condicional material y la negación pueden formularse del siguiente modo:

$$V(A \rightarrow B) = 0 \text{ si y sólo si } V(A)=1 \text{ y } V(B)=0$$

$$V(A)=1 \text{ si y sólo si } V(\neg A)=0$$

Dado que las demás conectivas veritativo-funcionales de la lógica proposicional clásica K pueden definirse en términos del condicional material y la negación, estas cláusulas caracterizan a K. Béziau propone en [1] que consideremos la lógica $K/2$ caracterizada por la cláusula para el condicional material y sólo una de las dos cláusulas condicionales que definen a la negación clásica:

$$V(A)=1, \textit{ entonces } V(\neg A)=0$$

Esta lógica es más débil que la clásica, ya que el conjunto de sus verdades lógicas está propiamente incluido en el conjunto de las verdades lógicas de K. Sin embargo, K es traducible en $K/2$. En esto consiste lo que Humberstone ha llamado en [3] *la paradoja de la traducción de Béziau.*

Consideremos las dos lógicas K y $K/2$ caracterizadas por las siguientes estructuras:

$$K = < \mathcal{K}; \rightarrow ; \neg ; \models_K >$$

$$K/2 = < \mathcal{K}_2; \Rightarrow ; \sim ; \models_{K/2} >$$

$\mathcal{K}$ y $\mathcal{K}_2$ son los conjuntos de fórmulas bien formadas de K y $K/2$, respectivamente. Las conectivas $\rightarrow$ y $\Rightarrow$ son los condicionales de K y $K/2$, respectivamente. Las conectivas $\neg$ y $\sim$ son sus respectivas negaciones. Las relaciones $\models_K$ y $\models_{K/2}$ son las relaciones de consecuencia semántica —definidas de la manera habitual— de K y $K/2$, respectivamente. La traducción de K en $K/2$ puede hacerse usando una función de traducción τ caracterizada por las siguientes cláusulas:

$$\tau(\mathrm{A}) = \mathrm{A}, \text{ si A es atómica}$$

$$\tau(A \rightarrow B) = \tau(\mathrm{A}) \Rightarrow \tau(\mathrm{B})$$

$$\tau(\neg \mathrm{A}) = \tau(\mathrm{A}) \Rightarrow \sim\tau(\mathrm{A})$$

Es posible demostrar ahora que:

$$\Delta \models_K A \text{ si y sólo si } \tau(\Delta) \models_{K/2} \tau(A)$$

donde $\tau(\Delta)$ denota la traducción, de acuerdo a estas cláusulas, de las fórmulas que componen el conjunto Δ de premisas. Esto puede interpretarse como la afirmación de que es K traducible en $K/2$.

En este artículo no entraremos en la discusión detallada de la noción de traducción entre lógicas y de las propiedades que debe tener una buena traducción de este tipo. Para ello, referimos a los/las lectores/as a las discusiones contenidas en los trabajos de Béziau [1] y Coniglio [2] citados en la bibliografía. Además, en los próximos párrafos veremos que esta paradoja puede formularse en términos que evitan estas cuestiones, aunque nos obligan a replantearnos otros problemas relativos a la filosofía de los sistemas formales.

La paradoja de Béziau puede también presentarse en términos puramente sintácticos. Lloyd Humberstone propone en [3] que consideremos la siguiente axiomatización para la lógica proposicional clásica K, con el *Modus Ponens* como regla de inferencia:

(A1) $(A \rightarrow (B \rightarrow A))$

$(A2)\ ((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)))$
$(A3)\ (((A \to B) \to A) \to A)$
$(A4)\ (A \to (\neg A \to C))$
$(A5)\ ((A \to C) \to ((\neg A \to C) \to C))$

Llamemos *K/2* a la lógica axiomatizada por (A1)-(A4), con el *Modus Ponens* como regla de inferencia. El conjunto de axiomas de *K/2* está propiamente incluido en el conjunto de axiomas de *K*, y se puede probar que el conjunto de teoremas de *K/2* también está propiamente incluido en el conjunto de teoremas de *K*. En este sentido, se puede afirmar que *K/2* es inferencialmente más débil que *K*. Sin embargo, Humberstone nos propone que introduzcamos en el lenguaje de *K/2* la conectiva de negación clásica $\neg$ mediante la siguiente definición:

(Def.1) $\neg A =_{df} (A \to \sim A)$

Es posible, entonces, reconstruir la lógica proposicional clásica *K* en el interior de *K/2*, ya que valen para las conectivas $\to$ y $\sim$ los axiomas (A1)-(A5).

La negación de la lógica proposicional clásica *K* puede, pues, definirse en el sistema axiomático *K/2,* cuyo conjunto de axiomas para la implicación material y la negación es un subconjunto propio del respectivo conjunto de axiomas y reglas de inferencia de *K* para esas conectivas. Esto resulta paradójico si se consideran a las definiciones como meras abreviaturas metalingüísticas que no agregan nada sustancial al sistema lógico en el que se formulan. La presentación sintáctica de la paradoja de Béziau que ofrece Humberstone motiva, por lo tanto, una discusión filosófica acerca del rol de las definiciones en los sistemas formales.

3. La paradoja de la traducción y la lógica positiva clásica

En esta sección presentaremos una nueva paradoja de la traducción del tipo de la formulada por Béziau. Para ello, consideraremos un sistema de lógica proposicional positiva —i.e. libre de negación— más débil que la lógica positiva clásica P_K. Las cláusulas semánticas para la conjunción y la disyunción de este sistema, al que denominaremos P_D, son las clásicas:

$V(A \,\&\, B) = 1$ si y sólo si $V(A) = 1$ y $V(B) = 1$
$V(A \vee' B) = 1$ si y sólo si $V(A) = 1$ ó $V(B) = 1$

El condicional > del sistema P_D, sin embargo, está caracterizado por las siguientes dos cláusulas semánticas:

Si $V(A) = 1$ y $V(B) = 0$, entonces $V(A > B) = 0$
Si $V(A) = V(B)$, entonces $V(A > B) = 1$

Es decir, las cláusulas habituales para el condicional material $\to$, con la excepción de la que establece que, si $V(A)=0$ y $V(B)=1$, entonces $V(A \to B)=1$.

No resulta válida para el condicional de este sistema, como es fácil comprobar, la siguiente ley de refuerzo del antecedente:

$((A > B) \to ((A \,\&\, C) > B))$

por lo que puede considerársele un condicional derrotable (*defeasible conditional*). Puede comprobarse que este condicional tampoco cumple con varias otras leyes, como por ejemplo la de transitividad del condicional.

Por lo tanto, la lógica positiva P_D es más débil que la lógica positiva clásica P_K pero, sin embargo, P_K es traducible en P_D. De esta manera, y como se verá a continuación, estamos en presencia de otra paradoja de la traducción del tipo de la presentada por Béziau.

Consideremos las dos lógicas P_K y P_D caracterizadas por las siguientes estructuras:

$$P_K = < \mathcal{F}_K ; \rightarrow ; \wedge ; \vee ; \models_{PK} >$$

$$P_D = < \mathcal{F}_D ; > ; \& ; \vee' ; \models_{PD} >$$

$\mathcal{F}_K$ y $\mathcal{F}_D$ son los conjuntos de fórmulas bien formadas de P_K y P_D, respectivamente. Las conectivas $\rightarrow$ y $>$ son los condicionales de P_K y P_D, respectivamente. Las conectivas $\wedge$ y $\&$, y por otra parte, $\vee$ y $\vee'$ son sus respectivas conjunciones y disyunciones. Las relaciones $\models_{PK}$ y $\models_{PD}$ son las relaciones de consecuencia semántica —definidas de la manera habitual— de P_K y P_D, respectivamente. La traducción de P_K en P_D puede hacerse usando una función de traducción τ caracterizada por las siguientes cláusulas:

$$\tau(A) = A, \text{ si } A \text{ es atómica}$$

$$\tau(A \wedge B) = \tau(A) \;\&\; \tau(B)$$

$$\tau(A \vee B) = \tau(A) \vee' \tau(B)$$

$$\tau(A \rightarrow B) = \tau(\mathrm{A}) > \tau(A \wedge B)$$

Es posible demostrar ahora, como el/la lector/a puede comprobar fácilmente, que:

$$\Delta \models_{PK} A \quad \text{si y sólo si} \quad \tau(\Delta) \models_{PD} \tau(A)$$

lo que puede interpretarse como la afirmación de que P_K es traducible en P_D.

Esta nueva paradoja de la traducción puede también presentarse en términos puramente sintácticos. Para ello, es necesario considerar una axiomatización para la lógica proposicional positiva P_D que resulte completa respecto de la semántica presentada más arriba para este sistema. El condicional de la lógica proposicional positiva clásica P_K podrá introducirse en este sistema axiomático para P_D mediante la siguiente definición:

$$\text{(Def.2) } (A \rightarrow B) =_{\text{df}} (A > (A \;\&\; B))$$

Las siguientes tablas de verdad muestran como esta definición permite completar la tabla de la conectiva >, que está sólo parcialmente determinada por las cláusulas semánticas ofrecidas más arriba, de manera tal que la conectiva $\rightarrow$ así definida se identifica con el condicional material:

A	B	$(A > B)$
1	1	1
0	1	-
1	0	0
0	0	1

A	B	$(A \& B)$	$(A > (A \& B)$
1	1	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
0	0	0	1

Las tablas anteriores justifican intuitivamente tanto la elección de las reglas de traducción propuestas más arriba, como la de la Definición 2.

4. Conclusión

En este trabajo se ha presentado una paradoja de la traducción que consiste en que la lógica proposicional positiva clásica puede traducirse en una lógica positiva más débil que la clásica. Lo notable de este tipo de traducciones entre lógicas, cuyo antecedente más temprano parece ser la traducción de Kolmogorov de la lógica clásica en la lógica intuicionista, es que son traducciones de un sistema lógico en otro que es, desde un punto de vista inferencial, estrictamente más débil que él. La noción del poder inferencial de un sistema lógico parece quedar cuestionada o, al menos, relativizada.

Como hemos señalado, y aunque no se les reconozca un carácter paradójico, este tipo de traducciones plantea varios problemas para la filosofía de los sistemas formales. Además, como sugiere Béziau, estas traducciones parecen desafiar algunas clasificaciones comúnmente aceptadas en filosofía de la lógica, tales como la distinción entre extensiones y desviaciones de un sistema lógico. Por lo tanto, las consecuencias teóricas de estas paradojas parecen constituir un tema de interés para la investigación en filosofía de la lógica.

Referencias

[1] Béziau, J.-Y, "Clasical Negation can be Expressed by One of its Halves", *Logic Journal of the IGPL*, 7 (1999), 145-151.

[2] Coniglio, M. E., "Towards a Stronger Notion of Translation Between Logics", *Manuscrito*, 28 (2005), 231-262.

[3] Humberstone, L., "Béziau's Translation Paradox", *Theoria*, 71 (2005), 138-181.

[4] Humberstone, L., "Contrariety and Subcontrariety: The Anatomy of Negation (with Special Reference to an Example of J.-Y. Béziau)", Theoria, 71 (2005), 241-262.