EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVI JORNADAS

VOLUMEN 12 (2006)

José Ahumada
Marzio Pantalone
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Lógicas multivaluadas y la axiomatización de la lógica computacional cuántica

G. Domenech[*] y H. Freytes[†]

Características de la lógica asociada a la computación cuántica

El significado de una sentencia elemental en la lógica asociada a la computación cuántica está representado por la cantidad de información cuántica codificada en una colección de qbits, el equivalente cuántico de los bits clásicos (0, 1 o F, V), o de qmixes. La conjunción y la disyunción de la información contenida en los q-registros tienen características diferentes de sus homónimas no sólo en la lógica clásica sino también en la lógica cuántica estándar. Por otra parte, la articulación de esas sentencias admite otros conectivos que reflejan un comportamiento cuántico genuino asociado al procesamientode la información en una computadora cuántica –en particular la aparición de estados tipo *gato de Schrödinger* de los qbits- que no admiten un paralelo ni en la lógica clásica ni en la cuántica.

Nuestro planteo para la axiomatización de esta lógica está basado en el *razonamiento aproximado* en el sentido de la lógica difusa. Establecemos una axiomatización que permite obtener un teorema de completitud tipo Pavelka [Ha 1998, Pav 1979] en un cálculo infinito-valuado de Łukasiewicz enriquecido. Dicho cálculo refleja el conjunto mínimo de propiedades básicas asociadas a los esquemas computacionales cuánticos. Más concretamente, los modelos naturales resultan ser las PMV-estructuras desarrolladas en [MONT 2000, MR 2004].

La semántica natural para el cálculo de la lógica asociada a la computación cuántica está basada en una asignación de probabilidad sobre el intervalo real [0, 1] con las operaciones de suma truncada, negación de Łukasiewicz y el producto habitual. La idea de consecuencia lógica $\phi \models \varphi$ está dada a partir de una desigualdad de probabilidades $p(\phi) \leq p(\varphi)$, siendo p la probabilidad asignada a una proposición acerca del sistema vía la regla de Born de la mecánica cuántica. Desde el punto de vista sintáctico, dicha consecuencia es tomada como que la fórmula $\phi \rightarrow \varphi$ es una tautología en [0, 1], donde la $\rightarrow$ es la implicación de Łukasiewicz de dicho intervalo [CMD 2000].

Como hemos mencionado anteriormente, se agregan aquí dos nuevos conectivos. Ellos son $\sqrt{\neg}$, un conectivo unario cuya interpretación natural está relacionada con la aparición de estados *gato de Schrödinger* de los qbits, y un conectivo constante ½, que representa un estado privilegiado del sistema.

La raíz del problema de la axiomatización es que $\sqrt{\neg}$ no resulta ser un conectivo funcional a nivel de las fórmulas atómicas. Más precisamente, dada una valuación v, la igualdad $v(\sqrt{\neg}\ \varphi) = \sqrt{\neg}\ v(\varphi)$ no se satisface en general.

[*] IAFE – CONICET

[†] Facultad de Humanidades y Arte - Escuela de Filosofía - UNR

El cálculo proposicional asociado a la computación cuántica

El lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ asociado a la computación cuántica- vale decir, la noción de fórmula- se construye de manera usual a partir del siguiente alfabeto:

$$\langle P, \oplus, \odot, \bullet, \rightarrow, \vee, \wedge, \neg, \sqrt{\neg}, S, (,) \rangle$$

donde P es el conjunto de letras proposicionales, $\oplus$, $\odot$, $\bullet$, $\rightarrow$, $\vee$, $\wedge$, $\neg$ son los conectivos del cálculo infinito valuado de Łukasiewicz enriquecido con el producto, $\sqrt{\neg}$ es el conectivo ya mencionado y S es un conjunto de conectivos constantes dado por el álgebra densa generada por ½ en el intervalo real [0, 1]. Esta álgebra densa dará los *axiomas de contabilidad* en las extensiones de Pavelka.

Se considera además un conectivo de equivalencia "≡", dado como abreviación, de la siguiente manera:

$$\varphi \equiv \phi \text{ si y sólo si } (\varphi \rightarrow \phi) \odot (\phi \rightarrow \varphi)$$

El sistema que axiomatiza la lógica de la computación cuántica que hemos desarrollado [DF 2005] está dado por el siguiente conjunto de axiomas:

Axiomas de Łukasiewicz

W1 $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

W2 $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

W3 $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

W4 $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\beta \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha)$

Axiomas de equivalencia

E1 $\alpha \odot \beta \equiv \neg(\neg\alpha \oplus \neg\beta)$

E2 $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg(\alpha \odot \neg\beta)$

E3 $\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \perp$ ($\perp$ representa el 0 en S)

E4 $\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \odot (\alpha \rightarrow \beta)$

E5 $\alpha \vee \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \beta$

E6 $\neg\perp \equiv \top$ ($\top$ representa el 1 en S)

Axiomas de producto

P1 $\alpha \bullet \beta \rightarrow \beta \bullet \alpha$

P2 $\top \bullet \alpha \equiv \alpha$

P3 $(\alpha \bullet \beta) \rightarrow \beta$

P4 $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \equiv \alpha \bullet (\beta \bullet \gamma)$

P5 $\alpha \bullet (\beta \odot \neg\gamma) \equiv (\alpha \bullet \beta) \odot \neg(\alpha \bullet \gamma)$

Axiomas para S (de contabilidad)

para cada $\bar{r}, \bar{s} \in S$

S1 $\bar{r} \odot \bar{s} \equiv \overline{r \odot s}$

S2 $\bar{r} \rightarrow \bar{s} \equiv \overline{r \rightarrow s}$

S3 $\bar{r} \bullet \bar{s} \equiv \overline{r \bullet s}$

Axiomas de $\sqrt{\neg}$

Q1 $\sqrt{\neg}\,\sqrt{\neg}\;\alpha \equiv \neg\,\alpha$

Q2 $\sqrt{\neg}\,(\neg\,\alpha) \equiv \neg\,\sqrt{\neg}\;\alpha$

Q3 si $*$ es un conectivo binario, $\sqrt{\neg}\;(\alpha * \beta) \equiv \frac{1}{2}$

Q4 $\sqrt{\neg}\;\bar{s} \equiv \frac{1}{2}$

Q5 $\{((\frac{1}{4} \bullet \alpha) \oplus (\frac{1}{4} \bullet \sqrt{\neg}\;\alpha)) \rightarrow \bar{s} \geq (1+\sqrt{2})/4\sqrt{2}\}$

La única regla de deducción es el *modus ponens* MP.
La noción de sistema deductivo y teoría se define de la manera usual.
Dada $\mathcal{T}$ una teoría y α una fórmula, $\mathcal{T} \vdash \alpha$ indica que α es deducible a partir de $\mathcal{T}$ o, equivalentemente, que α es un teorema de la teoría.

Semántica para la lógica computacional cuántica

Como hemos mencionado, el modelo natural del cálculo asociado a $\mathcal{L}$ está dado a partir de valuaciones en el intervalo [0, 1]. Por razones inherentes a la teoría cuántica no es posible considerar el conjunto completo de todas las posibles valuaciones de $\mathcal{L}$ al [0, 1]. Las valuaciones admisibles se construyen de la siguiente forma: sea el círculo unitario

$$C = \{(r_1, r_2) : r_1^2 + r_2^2 \leq 1\}$$

se define una noción de modelo como una función $e : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que a cada fórmula α le asigna un par $e(\alpha) = (r_1, r_2) \in \mathcal{C}$ y la valuación al [0, 1] se define como

$$e_p(\alpha) = (1 - r_2)/2$$

$$e_p(\sqrt{\neg}\;\alpha) = (1 - r_1)/2$$

Vale la pena notar que, en este tipo de valuaciones, $\sqrt{\neg}$ resulta ser no funcional. Esta no funcionalidad se traduce en que la información presente en α no es recuperable luego de la aplicación de $\sqrt{\neg}$.

Una fórmula α es una tautología si y sólo si para todo modelo e, $e_p(\alpha) = 1$. Esto se notará como $\models \alpha$. Por otro lado, decimos que α es consecuencia de la teoría $\mathcal{T}$ (y lo indicamos como $\mathcal{T} \models \alpha$) si y sólo si para todo modelo e y para toda fórmula $\beta \in \mathcal{T}$ resulta que si $e_p(\beta) = 1$ entonces $e_p(\alpha) = 1$.

Completitud en el sentido de Pavelka

En el estudio de las lógicas tipo Pavelka, se introducen constantes de verdad en el lenguaje con el objeto de definir un *grado de prueba o demostrabilidad* de una fórmula α respecto de una teoría $\mathcal{T}$ en el sentido de la lógica difusa. En nuestro caso, dicho grado de prueba viene dado a partir del siguiente supremo:

$$|\alpha|_{\mathcal{T}} = \bigvee \{ r \in S : \mathcal{T} \vdash \bar{r} \rightarrow \alpha \}$$

Por otro lado, también se define un grado *semántico* de una teoría $\mathcal{T}$ respecto de una fórmula α, lo que representa la relevancia de la teoría respecto de la fórmula. Esto es el ínfimo de las valuaciones que α puede tomar cuando esas valuaciones asignan el valor 1 a las fórmulas de $\mathcal{T}$

$$\|\alpha\|_{\mathcal{T}} = \bigwedge \{ e_p(\alpha) : e_p(\beta) = 1 \text{ para todo } \beta \in \mathcal{T}i \}$$

Un teorema de completitud de Pavelka se da cuando los grados de prueba y semántico coinciden. En el caso de la lógica asociada a la computación cuántica hemos establecido dicho resultado, es decir

$$|\alpha|_{\mathcal{T}} = \|\alpha\|_{\mathcal{T}}$$

Conclusiones

El soporte lógico asociado con el tratamiento cuántico de la información resulta ser un caso particular de la lógica difusa, más precisamente, un tipo de lógica infinito valuada.
Este marco lógico permite usar el razonamiento aproximado como herramienta para la caracterización de la información cuántica y su flujo.

Referencias

[CDCGL 2004] G. Cattaneo, M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini, R Leporini (2004): *An unsharp logic from quantum computation*, International Journal of Theoretical Physcis 43, 1803-1817

[CDM 2000] R. Cignoli, M. I. D'Ottaviano and D. Mundici (2000): *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*, Kluwer, Dordrecht.

[CDF 2004] A. Costa, G. Domenech, H. Freytes (2004): *Perspectivas en la axiomatización de la lógica computacional cuántica*, enviado para el tomo 11 de Epistemología e Historia de la Ciencia.

[DCGG 2004] M. L. Dalla Chiara, R. Giuntini, R. Greechie (2004): *Reasoning in quantum theory*, Kluwer, Dordrecht.

[DF 2005] G. Domenech, H. Freytes (2005): *Fuzzy propositional logic associated with quantum computational gates*, International Journal of Theoretical Physics 45, 228-261

[Ha 1998] P. Hájek (1998): *Metamathematics of fuzzy logic*, Kluwer, Dordrecht-Boston-London.

[MONT] F. Montagna (2000): *An algebraic approach to propositional fuzzy logic*, Journal of Logic, Language and Information 9, 91-124

[MR 2004] D. Mundici, B. Riecăn (2004): *Probability on MV-algebras*, en Handbook of Measure Theory, E. Pap (editor) North Holland, Amsterdam

[Pav 1979] J. Pavelka (1979): *On fuzzy logic I, II, III*, Zeitschr. f. Math. Logik und Grundl. der Math 25, 45-52, 119-134, 447-464