EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS XVI JORNADAS

VOLUMEN 12 (2006)

José Ahumada
Marzio Pantalone
Víctor Rodríguez
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

El realismo conjuntista de Penelope Maddy

*Andrés Fernando Stisman**

1. Introducción

Uno de los problemas fundamentales de la filosofía de la matemática es el que atañe a la índole de las entidades y expresiones matemáticas.

El realismo, en su versión ontológica, considera que existen objetos matemáticos y, en su versión semántica, expresa que los enunciados matemáticos son verdaderos independientemente de nuestras mentes, convenciones y lenguajes.

Esta posición ha resultado atrayente y problemática. Es atractiva porque explica la objetividad de los enunciados matemáticos y preserva la práctica matemática intacta. Sin embargo, el problema del realismo reside en los problemas ontológicos y epistemológicos que genera.

Penelope Maddy presentó en su libro *Realism in Mathematics* una peculiar versión de realismo; lo llamativo de su propuesta reside en dos aspectos: 1°) No adhiere al platonismo tradicional según el cual los objetos matemáticos son ideales, 2°) Dedica su libro principalmente al estudio de los conjuntos.

El propósito de este trabajo es analizar la naturaleza de la propuesta de Maddy, así como sus alcances y límites.

2. Acerca de la naturaleza de la matemática

Comencemos viendo cuál es para Maddy la índole de la matemática. Sobre este punto señala: "Muchos de nosotros tendemos a pensar en la matemática, no como un accesorio altamente teórico de la ciencia física sino como una ciencia por derecho propio... Desde esta perspectiva, la matemática es paralela, no subordinada, a la ciencia natural[1]... y a partir de esto se sigue que algunas creencias matemáticas debiesen ser básicas y no inferenciales, del mismo modo que algunas creencias científicas lo son. Es más, como el mecanismo más fundamental de formación de creencias es la percepción, se espera que la correspondiente facultad en matemáticas sea 'como la percepción'"[2]. La fuerte analogía que vislumbra entre la matemática y las ciencias empíricas tiene otro matiz; el matemático estudia objetos localizables en el espacio y el tiempo. "Pretendo rechazar la caracterización platónica tradicional de los objetos matemáticos, los haré entrar en el mundo que conocemos y en contacto con nuestro aparato cognitivo"[3]

3. Matemáticas, percepción y neurofisiología

La afirmación según la cual los objetos matemáticos están en el mundo físico es una hipótesis arriesgada y difícil de justificar; Maddy lo hace centrándose en los conjuntos.

---

* Universidad Nacional de Tucumán

Para la autora, se perciben conjuntos; así, expresa que del mismo modo que una persona puede encontrarse con una colección de objetos y decir "éstas y cosas como éstas constituyen el oro", se puede afirmar sentado frente a un escritorio "estas tres cosas- el pisapapeles, el globo y el tintero- tomados conjuntamente sin reparar en el orden, forman un conjunto".

Maddy adhiere a lo que se conoce como realismo directo según el cual percibimos objetos físicos y no meras representaciones y trabaja con un sentido fuerte de percepción de tal modo que:

1°) Lo que se percibe realmente existe.

2°) El perceptor adquiere creencias perceptivas adecuadas.

3°) Lo percibido debe desempeñar un papel causal tanto en la percepción como en las creencias perceptivas que emanen de ella.

La autora expresa que el fenómeno que se conoce como identidad en la percepción es el que permite reconocer que ciertas figuras son similares a algunas y no a otras, es el que posibilita subsumir ciertos objetos en ciertas categorías y es el que, en definitiva, hace posible que podamos recordar, reconocer o nombrar un objeto.

Para explicar el hecho de que podamos percibir con identidad y tener el concepto de objeto físico, Maddy apela a la teoría neurofisiológica que Donald Hebb desarrolla en *The Organization of Behaviour* (1949) y *Essay of Mind* (1980).

En resumidas cuentas, la posición de Hebb es la siguiente: la parte del cerebro involucrada en la percepción, la corteza visual, se puede dividir en cuatro capas. La estimulación de la retina se corresponde con la primera capa. La excitación de una pequeña parte de la primera capa puede estimular partes ampliamente separadas de las otras tres capas. Así, cualquier estímulo visual crea un verdadero bullicio de actividad en la corteza cerebral. Hebb elabora la hipótesis según la cual si una célula excita repetidamente a una segunda, se produce un cambio, la primera aumenta su eficacia de excitar a la segunda. A modo de ejemplo, imagínese que alguien que no conoce los triángulos fija su mirada en un vértice de una figura triangular, esto genera un conjunto de estímulos que acontecerán cada vez que mire el vértice. Como resultado de esta exposición repetida, grupos de células de varios niveles de la corteza cerebral serán cada vez más eficaces a la hora de excitarse entre ellas, hacerse más interdependientes y, eventualmente, formar lo que Hebb denomina "ensamblaje celular". Éste responderá al vértice de orientación y magnitud similar de cualquier triángulo y actuará como "un detector de vértices". Un proceso análogo se da para los ángulos de la base de un triángulo. Cuando se realizan movimientos repetidos de un ángulo a otro, las neuronas se vuelven cada vez más eficaces en tales conexiones y los ensamblajes celulares para las tres esquinas se integran en un ensamblaje de segundo orden. Para Hebb, el ensamblaje celular es el que permite ver el triángulo con identidad; en este caso el ensamblaje celular pertinente es el que actúa como "detector de triángulos". La habilidad para percibir objetos físicos, aunque más compleja, es similar a la capacidad para percibir un triángulo. Lo que está implicado en el caso de la percepción de objetos físicos es el desarrollo de ensamblajes celulares de orden superior.

Los ensamblajes celulares de primer orden responden a contornos particulares del campo visual, a gustos simples, a presiones táctiles localizadas y cosas por el estilo. Los ensamblajes celulares de segundo orden se producen por la visión repetida de un objeto físico desde una perspectiva; estos ensamblajes celulares integran, por ejemplo, ensamblajes que se corresponden a los contornos de las partes de un objeto. Los ensamblajes celulares de tercer orden se desarrollan a partir de la manipulación de un objeto o de verlo en movimiento; este tipo de ensamblaje integra los ensamblajes que se corresponden con las diversas perspectivas del objeto y permite que el sujeto sea capaz de percibir un objeto físico, independiente y continuo. Hebb señala que hay ensamblajes celulares de nivel superior. Así, tenemos ensamblajes celulares de cuarto nivel, éstos se corresponderían al concepto general de objeto físico y son estimulados durante la fase asociada a la percepción de un objeto físico particular cuando se presta atención a sus rasgos más generales. Un sujeto con tal ensamblaje celular tiene automáticamente varias creencias generales sobre la naturaleza de los objetos que lo estimulan. Por ejemplo, creemos que todos los objetos físicos ocupan un lugar en el espacio y tienen la capacidad de producir estímulos sensoriales. A estas creencias Maddy las llama "creencias intuitivas". Cuando un objeto activa tales ensamblajes, participa en la generación de los estados de creencias de un sujeto del modo causal apropiado.

Todas estas consideraciones que parecen ajenas al ámbito de la filosofía de la matemática se realizan a fin de reafirmar en el contexto de la teoría de la percepción que:

1°) Percibimos conjuntos así como percibimos objetos físicos.

2°) Así como existen "detectores de triángulos", existen "detectores de conjuntos".

3°) Al percibir un conjunto y considerar sus rasgos más generales podemos adquirir creencias generales intuitivas sobre los conjuntos.

4. Acerca de las fuentes del conocimiento matemático

Maddy sostiene que hay dos fuentes del conocimiento matemático:

1ª) La intuición.

2ª) Las consideraciones teóricas.

La primera constituye un fundamento intrínseco de la matemática, las segundas constituyen los fundamentos extrínsecos.

La autora afirma que tenemos creencias generales primitivas (intuitivas) sobre los objetos en general y, por lo tanto, sobre los conjuntos en particular. Ésta es la postura de Gödel. La diferencia con el autor del teorema de Incompletad reside en que Maddy cree haber explicado la fuente de las creencias intuitivas apelando a los ensamblajes celulares de orden superior que serían activados ante la presencia de las entidades pertinentes.

En *Realism in Mathematics*, no da una lista exhaustiva y completa de las creencias primitivas que tenemos sobre los conjuntos ni trata el tema sistemáticamente ("mi propósito es ilustrativo más bien que exhaustivo"[4]), sin embargo, da algunas ideas sobre la cuestión. Expresa que así como existen ensamblajes celulares sensibles a determinados conjuntos, existe un ensamblaje celular de orden superior que se corresponde con el concepto general de conjunto. La estructura de este ensamblaje celular "es responsable de varias creencias intuitivas sobre los conjuntos, por ejemplo, que tienen propiedades numéricas, que aquellas propiedades numéricas no cambian cuando los elementos se mueven, que tienen varios subconjuntos, que pueden combinarse, etc. Y estas intuiciones subyacen a los axiomas más básicos de nuestra teoría científica de conjuntos"[5].

También considera que los axiomas del par y de la unión se basan en la intuición, es más, son "ejemplos de intuiciones casi sin adornos"[6].

Ahora bien, con la intuición no basta, una creencia intuitiva puede ser errónea. Por ello, es importante que:

1°) La intuición sea compartida por otros.

2°) El enunciado que exprese las creencias intuitivas tenga apoyo teórico (extrínseco).

Maddy señala que las siete condiciones que debe reunir una proposición para que se pueda sostener que tiene soporte extrínseco son:

a) Que tenga "consecuencias verificables", es decir, que se puedan inferir de ella de una manera más simple otros enunciados que igualmente pueden ser deducidos sin su ayuda.
b) Que permita resolver problemas abiertos pre-existentes.
c) Que simplifique y sistematice la teoría.
d) Que implique conjeturas previas.
e) Que implique resultados "naturales".
f) Que posea fuertes conexiones inter-teóricas con otros resultados.
g) Que proporcione nuevos ámbitos de aplicación a viejos teoremas.

Maddy realiza una consideración especial sobre el Axioma de Elección en tanto que ve en él un buen ejemplo de un enunciado conjuntista fundamentado tanto en la intuición como en consideraciones teóricas.

Recordemos que ante la demanda de que dicho principio sea probado, el propio Zermelo expresó que aún cuando no pueda ser derivado de otros enunciados, el mismo es intuitivo[7]. El carácter intuitivo del principio de elección se aprecia, según el propio Zermelo, en el hecho de que gran cantidad de matemáticos hicieron inconscientemente uso de él, aún muchos de aquellos que lo negaron.

A su vez, el principio de elección tiene, según Maddy, apoyo teórico o extrínseco. Veamos porqué. La teoría de conjuntos provee los fundamentos de la aritmética; por ello, es indispensable para ella. Si a esto le añadimos el argumento de indispensabilidad de Quine y Putnam –al que Maddy adhiere- en el sentido de que la matemática es indispensable para proveer nuestra mejor teoría del mundo, resulta que la teoría de conjuntos es indispensable para los mismos fines. La cuestión es qué teoría de conjuntos es esencial a la matemática y, por lo tanto, a nuestra mejor teoría del mundo, ¿la que incluye el principio de elección o la que lo excluye? Maddy sostiene que la que lo incluye puesto sin el mismo la matemática sería una suerte de ciencia mutilada. Ahora bien, se puede encontrar apoyo teórico al principio de elección en los siguientes hechos:

1°) Permite deducir de forma más simple otros enunciados derivados sin su auxilio.

2°) Permitió resolver problemas abiertos como el del buen orden.

3°) Simplifica y unifica la teoría de conjuntos al ordenar la aritmética transfinita.

No todos los axiomas tienen que ser evidentes, algunos sólo se justifican a partir de consideraciones teóricas como el Axioma de Infinitud sobre el cual expresa: "No hay nada obvio sobre él, pero funda las matemáticas modernas, y el éxito y la naturaleza fructífera de aquel intento provee su justificación puramente teórica"[8].

5. ¿Percibimos realmente conjuntos?

Imaginemos que un sujeto *A* abre la heladera y ve tres huevos. Maddy dice que es perfectamente posible que perciba un conjunto de tres huevos y tenga una creencia numérica (la relativa al número de huevos). Para la autora, los números son propiedades de los conjuntos, el número 3, por ejemplo, es la propiedad común a todas las colecciones con tres elementos. Así pues, la creencia numérica es sobre los conjuntos. No lo es sobre los huevos mismos puesto que los conjuntos poseen propiedades numéricas, en cambio, la sustancia material que compone los huevos no tienen una propiedad numérica determinada: hay tres huevos, muchas más moléculas y muchos más átomos. Dada una sustancia física, no hay un modo predeterminado en el que pueda dividirse y sin esto no hay propiedad numérica. Ahora bien, dado este planteo, cabe preguntarse: el hecho de que percibamos algo que tiene una determinada propiedad numérica, ¿implica necesariamente que lo que genera la percepción sea un conjunto? La respuesta es negativa. La propia Maddy señala que hay otros candidatos a poseer propiedades numéricas a saber, los agregados o las clases, por ejemplo.

Entonces, ¿por qué decimos que un sujeto percibe un conjunto de tres huevos y no una clase de tres huevos o un agregado de tres huevos? Al fin y al cabo, ¿las propiedades perceptivas de los conjuntos, clases o agregados no son las mismas? Al respecto, la autora expresa: "Las propiedades que los separan son propiedades teóricas (no perceptivas) como la extensionalidad. Preguntarle a Steve..... si está percibiendo un conjunto o un agregado es como preguntarle...si el huevo es sólido o simplemente un espacio vacío rodeado de átomos.... La cantidad de lo que conocemos sobre las cosas por medio de la percepción es muy limitada.... La mayor parte de nuestro conocimiento sobre ellas es teórico... Lo mismo ocurre con los conjuntos. Lo que percibimos es simplemente algo que tiene una propiedad numérica, algo que puede combinarse con otros de su clase, etc.... Así, para decidir ... entre conjuntos, agregados, conceptos, clases... necesitamos mirar, no nuestra experiencia perceptiva, sino nuestra teoría completa del mundo y debemos preguntarnos cuál de éstos está mejor posicionado para desempeñar el papel de la entidad matemática más fundamental.... En este sentido, los conjuntos ganan...; ellos son entidades extremadamente simples y manejables que forman la base para una teoría matemática sorprendentemente efectiva y eficiente..."[9].

6. Conjuntos y ontología

Una pregunta que suscita la propuesta de Maddy es qué diferencia hay entre: 1°) Un objeto (x) y el conjunto unitario que lo posee ($\{x\}$), 2°) Un conjunto unitario ($\{x\}$) y el conjunto formado por este conjunto unitario y su miembro ($\{x, \{x\}\}$)

La autora recuerda que la diferencia que hay entre una manzana considerada como una masa física y el conjunto unitario que posee una manzana es que un conjunto unitario tiene una propiedad numérica (el uno), en cambio, la masa física de la que la manzana está hecha es una manzana, muchas células, más moléculas, más átomos. En suma, la materia no tiene una propiedad numérica que se pueda especificar sin ambigüedad.

Ahora bien, la cuestión, reconoce la autora, es que normalmente no percibimos la masa física amorfa, percibimos *un* objeto, una manzana que tiene una propiedad numérica: el uno.

Entonces, ¿qué diferencia hay entonces entre *una* manzana y el conjunto unitario que la posee? La autora señala que para un realista hay dos respuestas posibles:

1°) La diferencia entre *una* manzana y el conjunto unitario que la posee no se puede percibir, de la misma forma que no es distinguible a simple vista la diferencia entre el oro verdadero y el falso. De existir una diferencia entre *una* manzana y el conjunto unitario pertinente debe ser solamente teórica.

2ª) No hay diferencias entre los individuos y los conjuntos unitarios que los contienen; así $x = \{x\}$.

Aunque reconoce que la primera opción es válida y consistente con el realismo, Maddy expresa adherir a la segunda. Sostener la primera posición implicaría aceptar una suerte de dualismo entre la física y la matemática, creer que existen propiedades abstractas matemáticas no físicas, cosa que la autora rechaza.

El rechazo del dualismo entre matemática y física trae la siguiente consecuencia: la no aceptación del conjunto vacío; la apelación al mismo, expresa, podría tomarse como un mero recurso notacional. El universo conjuntista se construye a partir de individuos. En los estratos superiores de la jerarquía, los conjuntos que se van formando se distinguen de los individuos-conjuntos unitarios en virtud del principio de extensionalidad.

Maddy adhiere a una suerte de fisicalismo según el cual la teoría de conjuntos debe estudiar las jerarquías impuras generadas a partir de objetos físicos por la operación conjunto potencia, omitiendo de cada uno de los estadios el conjunto vacío. Cada conjunto, esté donde esté en la jerarquía, se encuentra espacialmente localizado donde se halla su clausura transitiva. Así, "el realista en teoría de conjuntos puede localizar todos los objetos que necesita en el espacio y el tiempo"[10].

7. Algunos problemas

Como puede observarse la propuesta de Maddy es audaz y pretende salvar las dificultades que plantea el realismo tradicional. Sin embargo, encontramos en sus tesis elementos conflictivos, a saber:

1. Maddy expresa que pretende de dar cuenta de la práctica matemática usual. Sin embargo, la teoría de conjuntos estándar es una teoría de conjuntos puros en la que el primer elemento de la jerarquía acumulativa que constituye el universo conjuntista es el conjunto vacío. La autora advierte que la apelación al conjunto vacío puede tomarse como un mero recurso notacional. Creemos que esta afirmación elude el problema y que debiese explicar la índole del conjunto vacío y del universo conjuntista construido en base a él.

2. A lo largo del su libro se advierte una cierta analogía entre objetos y conjuntos. Para comenzar, la autora se vale de la teoría de Hebb para explicar porqué percibimos conjuntos. Recordemos que dicha teoría explica la percepción de objetos físicos y la formación de ensamblajes celulares que permiten el reconocimiento de los mismos. Este proceso se inicia cuando un objeto estimula la retina. Ahora bien, Maddy supone que la misma teoría que explica la percepción de los objetos es la que da cuenta de la percepción de los conjuntos. Pero, *un objeto no es un conjunto*. La autora no aclara cuales son los procesos neurofisiológicos específicos involucrados en la percepción de conjuntos. Por ello, debiese decirnos porqué

tendríamos que suponer que una teoría adecuada para la percepción de objetos es una teoría adecuada para la percepción de conjuntos.

La propia Maddy parece advertir en un momento que no se pueden equiparar objetos y conjuntos Maddy expresa que una objeción que se le podría realizar es la siguiente: el que se encuentra con un trozo de oro y lo nomina no se encuentra en la misma situación epistémica que el que nomina un conjunto; al fin y al cabo, el que nomina el oro interactúa con él, mas, el que nomina un conjunto no interactúa con él sino sólo con sus miembros. Frente a esta posible crítica, Maddy sostiene que el que nomina el oro no interactúa con todo el ejemplar sino con la superficie frontal de la pieza en un momento dado de tiempo; del mismo modo, el que nomina conjuntos tiene ante sí sólo aspectos de los conjuntos con los que actúa. Ahora bien, creemos que la respuesta de Maddy a esta posible objeción no resulta del todo convincente por la siguiente razón: la situación del nominador del oro no es equiparable a la situación del nominador de conjuntos puesto que una cosa es interactuar con una *parte* de un todo y otra muy diferente es hacerlo con *miembros* de un conjunto, no es lo mismo *ser parte de un objeto* que *ser miembro de un conjunto*. El que percibe una parte de un trozo de oro percibe el oro, así sea parcialmente; pero, percibir los miembros de un conjunto no implica percibir un conjunto.

3. Maddy sostiene que no hay diferencia entre un objeto y el conjunto unitario que lo posee. Afirmar lo contrario sería postular la existencia de propiedades matemáticas no físicas, como la que haría diferentes a x de $\{x\}$. Ahora bien, de aceptarse este criterio, ¿no debiésemos también decir que $\{x, y\}$ y $\{x, y, \{x, y\}\}$ se diferencian en virtud de una propiedad matemática no física? La autora diría que se diferencian en virtud del principio de extensionalidad. Ello es obvio; mas, ¿esto resuelve el problema? En este caso, ¿no cabría decir que el principio de extensionalidad permite distinguir entre dos conjuntos en virtud de una propiedad estrictamente matemática? Si no es así, ¿qué clase de propiedad permitiría discriminar entre ambos conjuntos? En suma, ¿no resulta un tanto forzoso negar autonomía a lo estrictamente matemático?

Notas

[1] Que la matemática sea una ciencia autónoma no implica que exista un universo matemático deslindable del físico.
[2] Maddy, Penelope: *Realism in Mathematics*, pp. 45-46
[3] Ibíd. p. 48.
[4] Ibíd. 125
[5] Ibíd. p. 70.
[6] Ibíd. p. 125
[7] Cfr Zermelo, Ernst: "A new Prof. Of the possibility of a well-ordering", p. 187
[8] Ibíd. p. 125
[9] Ibíd. pp. 61-62.
[10] Ibíd. 157

Bibliografía

Maddy, Penelope: *Realism in Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1990
Shapiro, Stewart: *Thinking about Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 2000.
Zermelo, Ernst. "A new Prof. Of the possibility of a well-ordering" en *From Frege to Gödel* editado por J van Heijenoort, Cambridge University Press, 1967