G_2-estructuras solitones en álgebras de Lie nilpotentes

Autor: **Marina Nicolini**

Director: **Jorge Lauret**

Diciembre de 2015

Palabras clave: solitones, flujo laplaciano, álgebra de Lie nilpotente.

G_2-ESTRUCTURAS SOLITONES EN ÁLGEBRAS DE LIE NILPOTENTES

MARINA NICOLINI

RESUMEN. Una forma natural de evolucionar una estructura G_2 en una variedad diferenciable de dimensión 7, con el objeto de estudiar la existencia de métricas con holonomía G_2, es el flujo laplaciano, introducido por Bryant. En este trabajo, se investiga la existencia de estructuras G_2 cerradas que son solitones para dicho flujo en grupos de Lie nilpotentes. Se obtiene que las primeras siete de las doce álgebras de Lie nilpotentes que admiten una estructura G_2 cerrada (clasificadas por Conti y Fernández), admiten un solitón de Laplace. Más aún, una de ellas admite una cantidad infinita salvo equivalencia y múltiplo, lo cual se contrapone al caso del flujo de Ricci. Por otro lado, se analiza cuáles de los solitones de Laplace encontrados satisfacen que la correspondiente métrica es también un solitón de Ricci, corroborando resultados de Fernández, Fino y Manero.

ABSTRACT. A natural way to evolve a G_2-structure on a differentiable manifold of dimension 7, with the aim to study the existence of metrics with holonomy G_2, is the Laplacian flow, introduced by Bryant. We investigate the existence of closed G_2-structures which are solitons for such flow on nilpotent Lie groups. We obtain that seven of the twelve Lie algebras admitting a closed G_2-structure (classified by Conti and Fernández) have a Laplacian soliton. Moreover, one of them admits a continuous family of Laplacian solitons which is pairwise non homothetic, which is in clear contrast with the Ricci flow case. On the other hand, we analyze which of these Laplacian solitons satisfies that the corresponding metric is a Ricci soliton, which confirms certain results by Fernández, Fino and Manero.

ÍNDICE

1. Introducción

En 1955, Berger dio en [Be] una clasificación completa de los posibles grupos de holonomía para una variedad Riemanniana simplemente conexa e irreducible. En dicha clasificación, el único grupo de Lie simple excepcional que apareció como posible fue G_2, aunque Berger no logró encontrar un ejemplo ni descartarlo. Recién en 1987, Bryant dio los primeros ejemplos locales de variedades Riemannianas con holonomía G_2 (ver [B1]). Dos años después, Bryant y Salamon lograron construir en [BS] ejemplos completos y no compactos. La existencia de ejemplos compactos con holonomía G_2 fue probada en 1996 por Joyce (ver [J]), a los cuales se agregaron otros encontrados por Kovalev (ver [K]), siempre de manera existencial, no explícita.

Una G_2-estructura en una variedad diferenciable M de dimensión 7 es una 3-forma diferencial φ en M que puede ser escrita en cada espacio tangente como

$$\varphi = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356},$$

con respecto a alguna base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de $\mathbb{R}^7 \equiv T_pM$. Este concepto aporta una herramienta para la búsqueda de holonomía G_2, ya que si φ resulta ser paralela, o armónica si M es compacta, respecto de la métrica Riemanniana g_φ que define, entonces dicha métrica tiene holonomía contenida en G_2. Con esta motivación es que el siguiente flujo geométrico para G_2-estructuras sobre una variedad M fija 7-dimensional, llamado *flujo Laplaciano*, fue introducido por Bryant en [B2]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t), \tag{1}$$

donde $\Delta_{\varphi(t)}$ es el operador Laplaciano de Hodge en 3-formas asociado a la métrica Riemanniana $g_{\varphi(t)}$ y la orientación determinadas por $\varphi(t)$, i.e.

$$\Delta_{\varphi(t)} = -d *_{\varphi(t)} d *_{\varphi(t)} + *_{\varphi(t)} d *_{\varphi(t)} d,$$

donde $*_{\varphi(t)}$ es el operador estrella de Hodge definido por la métrica $g_{\varphi(t)}$ y la orientación. Referimos al lector al reciente artículo [LoW] para más información sobre este flujo. La idea es entonces que la solución $\varphi(t)$ podría converger o acercarse a un punto fijo de la ecuación, i.e. una G_2-estructura armónica, en caso de que exista.

A la hora de entender cuáles son los posibles comportamientos de las soluciones a un flujo geométrico, el primer caso a considerar es el de las soluciones auto-similares, es decir las soluciones $\varphi(t)$ de la forma

$$\varphi(t) = c(t)f(t)^*\varphi, \quad \text{para algún } c(t) \in \mathbb{R}^* \text{ y } f(t) \in \mathrm{Diff}(M).$$

Por un argumento estándar que sirve para todo flujo geométrico, se obtiene que una G_2-estructura φ en una variedad diferenciable M fluirá de manera auto-similar respecto del flujo Laplaciano (1) si y sólo si

$$\Delta_\varphi \varphi = c\varphi + \mathcal{L}_X\varphi, \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{X}(M) \text{ (completo)}, \tag{2}$$

donde $\mathcal{L}_X$ denota la derivada de Lie respecto del campo X. En tal caso, se calcula que

$$c(t) = \left(\frac{2}{3}ct + 1\right)^{3/2}.$$

Análogo a la terminología que se utiliza en el famoso flujo de Ricci, i.e. la evolución para métricas dada por $\frac{\partial}{\partial t}g(t) = -2\,\mathrm{Rc}(g(t))$, llamaremos *solitón de Laplace* a una G_2-estructura φ que satisface (2), y diremos que es *de expansión*, *estable* o *de contracción*, si $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$, respectivamente. Muy recientemente, en [L2], se encontró el primer solitón de Laplace que no es una auto-forma, es decir que $\mathcal{L}_X\varphi$ es distinto de cero. Dicho solitón es invariante a izquierda en un grupo de Lie nilpotente.

Conti y Fernández [CF] obtuvieron la clasificación de álgebras de Lie nilpotentes de dimensión 7 que admiten una estructura G_2 cerrada. La lista consta de doce álgebras y se encuentra en Cuadro 1. En base a este trabajo, Fernández, Fino y Manero [FFM] estudiaron en dichas álgebras la existencia de una estructura G_2 cerrada tal que la correspondiente métrica fuese un solitón de Ricci, i.e. una métrica que evoluciona de forma auto-similar respecto del flujo de Ricci. Lo que se obtuvo en [FFM] es que sólo cuatro de las doce álgebras admite tal estructura G_2 especial. Es natural entonces preguntarse si no será que lo que admiten los grupos de Lie como estructuras G_2 cerradas distinguidas son solitones de Laplace.

Nuestro principal objetivo en este trabajo es estudiar la existencia de solitones de Laplace cerrados en las doce álgebras obtenidas en [CF]. Nuestro método se basa en considerar la ecuación para solitones (2) en el siguiente contexto: M es un grupo de Lie simplemente conexo G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, φ es una 3-forma invariante a izquierda en G y $X = X_D$ es el campo en G definido por el grupo monoparamétrico de automorfismos asociado a $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, una derivación de $\mathfrak{g}$. Dicho contexto nos permite, como es usual, trabajar a nivel del álgebra de Lie y con 3-formas en un espacio vectorial fijo.

Luego de algunos preliminares en Sección 2, desarrollamos el tema de G_2-estructuras en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en Sección 3, probando entre otras cosas la equivariancia de todos los conceptos involucrados respecto de la acción natural de los grupos $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, incluyendo el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_\varphi$, la forma de volumen vol_φ, el operador estrella de Hodge $*_\varphi$, la diferencial d, el Laplaciano de Hodge $\Delta_\varphi\varphi$ y la derivada de Lie $\mathcal{L}_{X_D}\varphi$.

Los principales resultados se obtienen en Sección 4:

- Encontramos un solitón de Laplace en cada una de las siete primeras álgebras $\mathfrak{n}_1,\dots,\mathfrak{n}_7$.

- Todos los solitones encontrados son de expansión y ninguno es una auto-forma (i.e. $\Delta_\varphi\varphi \neq c\varphi$).

- $\mathfrak{n}_3$ admite una familia continua de solitones de Laplace salvo equivalencia y múltiplo por escalar. Esto está en clara discrepancia con el caso de solitones de Ricci en álgebras de Lie nilpotentes, donde la unicidad se cumple (ver [L1]).

- En los casos $\mathfrak{n}_4,\dots,\mathfrak{n}_7$ la derivación D involucrada no es diagonal, además de que su transpuesta D^t no es derivación. Esto implica que la correspondiente solución al flujo Laplaciano no será diagonal (comparar con [LW] en el caso del flujo de Ricci) y tiene consecuencias en el comportamiento de la solución al llamado flujo de corchetes (comparar con [LL]). Este tipo de solitones son llamados semi-algebraicos (ver [L2, Remark 4.14]).

Finalmente, en Sección 5, se analiza cuáles de los solitones de Laplace encontrados satisfacen que la correspondiente métrica es también un solitón de Ricci. Para esto, se encuentra el solitón de Ricci entre todas las estructuras G_2 cerradas que consideramos en cada álgebra. Obtenemos que en los casos $\mathfrak{n}_1$ y $\mathfrak{n}_2$ el solitón de Laplace es también solitón de Ricci. Por el contrario, $\mathfrak{n}_4$ y $\mathfrak{n}_6$ admiten ambos tipos de solitones, pero no a la vez. Notar que estas cuatro álgebras son las encontradas en [FFM].

2. Preliminares

En esta sección vamos a introducir definiciones, ejemplos y propiedades básicas sobre álgebras de Lie, variedades Riemannianas y estructuras G_2, las cuales son imprescindibles para el desarrollo del trabajo.

2.1. Formas en un álgebra de Lie.

Definición 2.1. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con corchete $[\cdot,\cdot]$, se define:

(i) $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] := \mathrm{span}\{[X,Y] : X,Y \in \mathfrak{g}\}$, *i.e.* el subespacio generado por el conjunto $\{[X,Y] : X,Y \in \mathfrak{g}\}$.

(ii) $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) := \{X \in \mathfrak{g} : [X,Y] = 0, \quad \forall Y \in \mathfrak{g}\}$, el *centro* de $\mathfrak{g}$.

(iii) $C^0(\mathfrak{g}) := \mathfrak{g}$, $C^1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$, $C^{k+1}(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, C^k(\mathfrak{g})]$, $k \in \mathbb{N}$, la llamada *serie central descendente* de $\mathfrak{g}$.

(iv) $\mathfrak{g}$ se dice *nilpotente* si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $C^k(\mathfrak{g}) = 0$. Además, si $C^k(\mathfrak{g}) = 0$, pero $C^{k-1}(\mathfrak{g}) \neq 0$, decimos que $\mathfrak{g}$ es *k-pasos nilpotente*.

Ejemplo 2.2. Sea $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^7$ con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por $[e_1, e_2] = e_5$, $[e_1, e_3] = e_6$ (el resto de los corchetes son iguales a cero). Se tiene que

$$[\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \operatorname{span}\{e_5, e_6\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \operatorname{span}\{e_4, e_5, e_6, e_7\}.$$

La serie central descendente resulta fácil de calcular pues como $C^1(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] = \operatorname{span}\{e_5, e_6\} \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, entonces tenemos que $C^2(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g},\mathfrak{g}]] = 0$. En este caso $\mathfrak{g}$ es 2-pasos nilpotente.

Definición 2.3. Sea $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial y $\mathfrak{g}^*$ el dual de $\mathfrak{g}$. Una *k-forma* en $\mathfrak{g}$ es una función multilineal alternante $\varphi : \mathfrak{g} \times \cdots \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$. Denotaremos por $\Lambda^k \mathfrak{g}^*$ al espacio vectorial de todas las k-formas de $\mathfrak{g}$. Dadas $\varphi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ y $\psi \in \Lambda^l \mathfrak{g}^*$, el *producto exterior* entre φ y ψ, denotado por $\varphi \wedge \psi \in \Lambda^{k+l}\mathfrak{g}^*$, está definido de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}(\varphi \wedge \psi)(X_1, \dots, X_{k+l}) &= \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\pi} sgn(\pi) \varphi(X_{\pi(1)}, \dots, X_{\pi(k)}) \psi(X_{\pi(k+1)}, \dots, X_{\pi(k+l)}),\end{aligned}$$

donde la sumatoria es sobre todas las posibles permutaciones π del conjunto $\{1, \dots, (k+l)\}$.

En $\mathbb{R}^n$, con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, podemos definir para cada $j \in \{1, \dots, n\}$ la 1-forma dual e^j. Es decir, si $X \in \mathbb{R}^n$ es de la forma $X = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$, entonces

$$e^j(X) = e^j\left(\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^j(e_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{jk} = a_j.$$

Definición 2.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n y $k \leq n$. La *derivada exterior* es la función lineal

$$d_k : \Lambda^k \mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^{k+1}\mathfrak{g}^*,$$

dada por

$$\begin{aligned}(d_k\varphi)(X_1, \dots, X_{k+1}) &:= \\ &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \varphi([X_i, X_j], X_1, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_{k+1}),\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ y para todos $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{g}$. Muchas veces vamos a utilizar d en lugar de d_k para simplificar la notación.

Además, la derivada exterior es una *antiderivación*:

$$d_{k+l}(\varphi \wedge \psi) = d_k\varphi \wedge \psi + (-1)^k(\varphi \wedge d_l\psi), \quad \forall \varphi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*, \quad \forall \psi \in \Lambda^l \mathfrak{g}^*. \tag{3}$$

Ejemplo 2.5. Si $\mathfrak{g}$ es el álgebra de Lie del Ejemplo 2.2, consideramos la 3-forma

$$\varphi := e^{147} + e^{267} + e^{357} + e^{123} + e^{156} + e^{245} - e^{346},$$

donde $e^{ijk} := e^i \wedge e^j \wedge e^k$, con $\wedge$ el producto exterior definido anteriormente. Usando la propiedad anterior tenemos que,

$$\begin{aligned}
d_3\varphi =& d_3(e^{147} + e^{267} + e^{357} + e^{123} + e^{156} + e^{245} - e^{346}) \\
=& d_3e^{147} + d_3e^{267} + d_3e^{357} + d_3e^{123} + d_3e^{156} + d_3e^{245} - d_3e^{346} \\
=& d_1e^1 \wedge e^{47} - e^1 \wedge d_2e^{47} + \cdots - d_1e^3 \wedge e^{46} + e^3 \wedge d_2e^{46} \\
=& d_1e^1 \wedge e^4 \wedge e^7 - e^1 \wedge (d_1e^4 \wedge e^7 - d_1e^4 \wedge d_1e^7) + \cdots + \\
& - d_1e^3 \wedge e^4 \wedge e^6 + e^3 \wedge (d_1e^4 \wedge e^6 - e^4 \wedge d_1e^6) \\
=& d_1e^1 \wedge e^4 \wedge e^7 - e^1 \wedge d_1e^4 \wedge e^7 + e^1 \wedge e^4 \wedge d_1e^7 \\
& + d_1e^2 \wedge e^6 \wedge e^7 - e^2 \wedge d_1e^6 \wedge e^7 + e^2 \wedge e^6 \wedge d_1e^7 \\
& + d_1e^3 \wedge e^5 \wedge e^7 - e^3 \wedge d_1e^5 \wedge e^7 + e^3 \wedge e^5 \wedge d_1e^7 \\
& + d_1e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 - e^1 \wedge d_1e^2 \wedge e^3 + e^1 \wedge e^2 \wedge d_1e^3 \\
& + d_1e^1 \wedge e^5 \wedge e^6 - e^1 \wedge d_1e^5 \wedge e^6 + e^1 \wedge e^5 \wedge d_1e^6 \\
& + d_1e^2 \wedge e^4 \wedge e^5 - e^2 \wedge d_1e^4 \wedge e^5 + e^2 \wedge e^4 \wedge d_1e^5 \\
& - d_1e^3 \wedge e^4 \wedge e^6 + e^3 \wedge d_1e^4 \wedge e^6 - e^3 \wedge e^4 \wedge d_1e^6.
\end{aligned}$$

Notemos que si $r, s \in \{1, \dots, 7\}$, con $r < s$, por definición tenemos que,

$$\begin{aligned}
d_1e^k(e_r, e_s) =& \sum_{i<j \in \{r,s\}} (-1)^{i+j} e^k([e_i, e_j]), \\
=& (-1)^{1+2} e^k([e_r, e_s]), \\
=& \begin{cases} -e^k([e_1, e_2]), & r = 1, s = 2. \\ -e^k([e_1, e_3]), & r = 1, s = 3. \\ 0, & c.c. \end{cases} \\
=& \begin{cases} -e^k(e_5), & r = 1, s = 2. \\ -e^k(e_6), & r = 1, s = 3. \\ 0, & c.c. \end{cases}
\end{aligned}$$

Luego resulta $d_1e^5 = -e^{12}$, $d_1e^6 = -e^{13}$ y por último $d_1e^k = 0$ si $k \neq 5, 6$. Reemplazando en la fórmula para $d_3\varphi$ dada arriba nos queda:

$$\begin{aligned}
d_3\varphi =& - e^2 \wedge (-e^{13}) \wedge e^7 - e^3 \wedge (-e^{12}) \wedge e^7 - e^1 \wedge (-e^{12}) \wedge e^6 \\
& + e^1 \wedge e^5 \wedge (-e^{13}) + e^2 \wedge e^4 \wedge (-e^{12}) - e^3 \wedge e^4 \wedge (-e^{13}) \\
=& e^{2137} + e^{3127} + e^{1126} - e^{1513} - e^{2412} + e^{3413} \\
=& - e^{1237} + e^{1237} \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Este ejemplo motiva la siguiente definición.

Definición 2.6. Una k-forma φ en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *cerrada* si $d\varphi = 0$, donde $d\varphi = d_k\varphi$ es la derivada exterior de φ.

Definición 2.7. Si $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial de dimensión n, entonces dada una base ordenada $\{e_1, \dots, e_n\}$, queda definido un producto interno que hace de la base un conjunto ortonormal, y una orientación. Definimos entonces el *operador estrella de Hodge* como la transformación lineal

$$* : \Lambda\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda\mathfrak{g}^*,$$

tal que para todo $e^{i_1 \dots i_p} := e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_p}$ con $\{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$,

$$*e^{i_1 \dots i_p} := \epsilon e^{i_{p+1} \dots i_n},$$

con $\{i_1, \dots, i_p\} \cup \{i_{p+1}, \dots, i_n\} = \{1, \dots, n\}$ y $\epsilon \in \{-1, 1\}$ tal que:

$$e^{i_1 \dots i_p} \wedge *e^{i_1 \dots i_p} = e^{1 \dots n}.$$

Equivalentemente, si $\beta \in \Lambda^k\mathfrak{g}^*$, se puede definir $*\beta$, como la única $(n-k)$-forma tal que,

$$\alpha \wedge *\beta = \langle \alpha, \beta \rangle e^{1 \dots 7}, \quad \forall \alpha \in \Lambda^k\mathfrak{g}^*$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es el producto interno en $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$ que hace del conjunto $\{e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} : i_1 < \ldots < i_k \in \{1, \dots, n\}\}$ una base ortonormal de $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$ (ver [W]).

Ejemplo 2.8. Si $\mathfrak{g}$ es como en el Ejemplo 2.2, algunos valores del operador estrella de Hodge son:

(i) $*e^{12} = e^{34567}$, pues $e^{12} \wedge *e^{12} = e^{12} \wedge e^{34567} = e^{1234567}$.
(ii) $*e^{236} = -e^{1457}$, pues $e^{236} \wedge -e^{1457} = -e^{2361457} = e^{1234567}$.
(iii) $*e^{3457} = -e^{126}$, pues $e^{3457} \wedge -e^{126} = -e^{3457126} = e^{1234567}$.

Definición 2.9. Una k-forma φ en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *cocerrada* si $d * \varphi = 0$, donde $d\varphi = d_k\varphi$ es la derivada exterior de φ y $*$ es el operador estrella de Hodge.

Definición 2.10. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión 7, definimos el *operador de Laplace* (a veces llamado *Laplaciano*) asociado a $\mathfrak{g}$ de la siguiente manera:

$$\Delta : \Lambda^k\mathfrak{g}^* \longrightarrow \Lambda^k\mathfrak{g}^*, \text{ con } \Delta := (-1)^k(d_{k-1} * d_{n-k} * - * d_{n-k-1} * d_k).$$

Para simplificar notación escribiremos $\Delta := (-1)^k(d * d * - * d * d)$, donde d es la derivada exterior y $*$ es el operador estrella de Hodge.

Notemos que cuando una k-forma φ es cerrada se tiene que

$$\Delta\varphi = (-1)^k(d * d * \varphi - *d * d\varphi) = (-1)^k(d * d * \varphi - *d * 0) = (-1)^k d * d * \varphi,$$

y que si φ es cocerrada entonces

$$\Delta\varphi = (-1)^k(d * d * \varphi - *d * d\varphi) = (-1)^k(d * 0 - *d * d\varphi) = (-1)^{k+1} * d * d\varphi.$$

Ejemplo 2.11. Si $\mathfrak{g}$ y φ son como en el Ejemplo 2.5, calculemos el Laplaciano de φ:

$$\begin{aligned}
*\varphi &= *e^{147} + *e^{267} + *e^{357} + *e^{123} + *e^{156} + *e^{245} - *e^{346} \\
&= e^{2356} - e^{1345} - e^{1246} + e^{4567} + e^{2347} - e^{1367} + e^{1257}, \\
d*\varphi &= de^{2356} - de^{1345} - de^{1246} + de^{4567} + de^{2347} - de^{1367} + de^{1257} \\
&= e^{23} \wedge de^5 \wedge e^6 - e^{235} \wedge de^6 + e^{134} \wedge de^5 + e^{124} \wedge de^6 \\
&\quad -e^4 \wedge de^5 \wedge e^{67} + e^{45} \wedge de^6 \wedge e^7 - e^{13} \wedge de^6 \wedge e^7 + e^{12} \wedge de^5 \wedge e^7 \\
&= -e^{23} \wedge e^{12} \wedge e^6 + e^{235} \wedge e^{13} - e^{134} \wedge e^{12} - e^{124} \wedge e^{13} \\
&\quad +e^4 \wedge e^{12} \wedge e^{67} - e^{45} \wedge e^{13} \wedge e^7 + e^{13} \wedge e^{13} \wedge e^7 - e^{12} \wedge e^{12} \wedge e^7 \\
&= e^{41267} - e^{45137} \\
&= e^{12467} - e^{13457}, \\
d\varphi &= *(e^{12467} - e^{13457}) = -e^{35} + e^{26}, \\
d*d*\varphi &= d(-e^{35} + e^{26}) = -de^{35} + de^{26} = e^3 \wedge de^5 - e^2 \wedge de^6 \\
&= e^3 \wedge (-e^{12}) - e^2 \wedge (-e^{13}) = -e^{312} + e^{213} = -2e^{123}.
\end{aligned}$$

Luego, $\Delta\varphi = (-1)^3 d*d*\varphi = 2e^{123}$.

Definición 2.12. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y G el grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Si $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación de $\mathfrak{g}$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ denotamos por $f_t \in \mathrm{Aut}(G)$ al automorfismo de G con $df_t|_e = e^{tD} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$. Queda definido así el campo X_D en G cuyo flujo es f_t como:

$$X_D(a) := \frac{d}{dt}\Big|_0 f_t(a), \quad \forall a \in G.$$

Recordemos que la *derivada de Lie* de una k-forma ψ en una variedad diferenciable M respecto de un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se define por,

$$\mathcal{L}_X\psi := \lim_{t\to 0} \frac{f_t^*\psi - \psi}{t} = \frac{d}{dt}\Big|_0 f_t^*\psi, \tag{4}$$

donde f_t es el flujo del campo X. No es difícil ver que se cumple la siguiente propiedad para cualquier k-forma ψ:

$$(\mathcal{L}_X\psi)(X_1, \dots, X_k) = X(\psi(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{i=1}^{k} \psi(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k).$$

Lema 2.13. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, D una derivación de $\mathfrak{g}$ y X_D el campo en G asociado a D. La derivada de Lie de una k-forma ψ invariante a izquierda en G respecto de X_D está dada por:*

$$(\mathcal{L}_{X_D}\psi)(X_1, \dots, X_k) := \psi(DX_1, X_2, \dots, X_k) + \dots + \psi(X_1, X_2, \dots, DX_k),$$

para todo $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$.

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$ y ψ una k-forma invariante a izquierda en G, aplicando (4) tenemos,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_{X_D}\psi)(X_1, \dots, X_k) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f_t^*\psi(X_1, \dots, X_k) \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi(df_tX_1, \dots, df_tX_k) \\
=& \frac{d}{dt}\Big|_0 \psi(e^{tD}X_1, \dots, e^{tD}X_k) \\
=& \psi\left(\frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tD}X_1, \dots, X_k\right) + \dots + \psi\left(X_1, \dots, \frac{d}{dt}\Big|_0 e^{tD}X_k\right) \\
=& \psi(DX_1, \dots, X_k) + \dots + \psi(X_1, \dots, +DX_k) \\
=& \psi(DX_1, \dots, X_k) + \dots + \psi(X_1, \dots, DX_k),
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

Notemos que

$$\mathcal{L}_{X_D}e^i(e_j) = e^i(De_j) = e^i\left(\sum_{k=1}^n D_{kj}e_k\right) = \sum_{k=1}^n D_{kj}e^i(e_k) = \sum_{k=1}^n D_{kj}\delta_{ik} = D_{ij}.$$

De esto se deduce que $\mathcal{L}_{X_D}e^i = \sum_{j=1}^n D_{ij}e^j = D^te^i$, pensando a D escrita en la base $\{e^1, \dots, e^n\}$. Dado que $\mathcal{L}_{X_D}$ es derivación, se tiene

$$\mathcal{L}_{X_D}e^{ij} = \mathcal{L}_{X_D}e^i \wedge e^j + e^i \wedge \mathcal{L}_{X_D}e^j = D^te^i \wedge e^j + e^i \wedge D^te^j,$$

y generalizando obtenemos el siguiente lema.

Lema 2.14. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie con base $\{e_1, \dots, e_n\}$, D una derivación de $\mathfrak{g}$ y X_D el campo en G asociado a D, entonces*

$$\mathcal{L}_{X_D}e^{i_1\dots i_k} = D^te^{i_1} \wedge e^{i_2\dots i_k} + e^{i_1} \wedge D^te^{i_2} \wedge e^{i_3\dots i_k} + \dots + e^{i_1\dots i_{k-1}} \wedge D^te^{i_k},$$

para todo subconjunto $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Dado $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$, consideramos la k-forma $e^{i_1 i_2\dots i_k}$, luego

$$\mathcal{L}_{X_D}e^{i_1 i_2\dots i_k} = \mathcal{L}_{X_D}(e^{i_1} \wedge e^{i_2\dots i_k}) = \mathcal{L}_{X_D}e^{i_1} \wedge e^{i_2\dots i_k} + e^{i_1} \wedge \mathcal{L}_{X_D}e^{i_2\dots i_k},$$

pues $\mathcal{L}_{X_D}$ es derivación. Luego, repitiendo este paso obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}e^{i_1\dots i_k} &= \mathcal{L}_{X_D}e^{i_1} \wedge e^{i_2\dots i_k} + \dots + e^{i_1\dots i_{k-1}} \wedge \mathcal{L}_{X_D}e^{i_k} \\
&= D^te^{i_1} \wedge e^{i_2\dots i_k} + \dots + e^{i_1\dots i_{k-1}} \wedge D^te^{i_k},
\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

Ejemplo 2.15. Sean $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie y φ la 3-forma del Ejemplo 2.5, y sea $D := \mathrm{Diag}(d_1, \dots, d_7) \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ la matriz diagonal 7×7 tal que $D_{ii} = d_i$. Calculamos la derivada de Lie de la 3-forma φ respecto de X_D como sigue,

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi = \mathcal{L}_{X_D}(e^{147} + e^{267} + e^{357} + e^{123} + e^{156} + e^{245} - e^{346}).$$

Teniendo en cuenta que la derivada de Lie es lineal, podemos hacerlo término por término y luego sumarlos. Además, gracias al Lema 2.14 tenemos que,

$$\mathcal{L}_{X_D} e^{ijk} = D^t e^i \wedge e^{jk} + e^i \wedge D^t e^j \wedge e^k + e^{ij} \wedge D^t e^k = (d_i + d_j + d_k) e^{ijk},$$

y así obtenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_D}\varphi =&(d_1+d_4+d_7)e^{147} + (d_2+d_6+d_7)e^{267} + (d_1+d_2+d_7)e^{357}\\ &+ (d_1+d_2+d_3)e^{123} + (d_1+d_5+d_6)e^{156} + (d_2+d_4+d_5)e^{245}\\ &- (d_3+d_4+d_6)e^{346}.\end{aligned}$$

2.2. Solitones de Ricci. Dada $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie nilpotente, consideramos el grupo de Lie simplemente conexo G con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Sea $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g}$, el *operador de Ricci* (denotado por Ric) de la métrica invariante a izquierda en G definida por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ está dado por

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ric}]_{kl} &= \langle \mathrm{Ric}\, e_k, e_l\rangle\\ &= -\tfrac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_k,e_i],e_j\rangle\langle [e_l,e_i],e_j\rangle\\ &\quad +\tfrac{1}{4}\sum_{ij}\langle [e_i,e_j],e_k\rangle\langle [e_i,e_j],e_l\rangle,\end{aligned} \tag{5}$$

donde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ es base ortonormal de $\mathfrak{g}$.

Ejemplo 2.16. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie definida en el Ejemplo 2.2 y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno tal que el conjunto $\{e_1,\ldots,e_7\}$ es ortonormal, podemos calcular el operador de Ricci en la base $\{e_1,\ldots,e_7\}$ de la siguiente manera. Dado que los únicos corchetes que dan distintos de cero son $[e_1,e_2]=e_5$ y $[e_1,e_3]=e_6$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}[\mathrm{Ric}]_{kl} =&\langle \mathrm{Ric}\, e_k, e_l\rangle\\ =&-\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_k,e_i],e_j\rangle\langle [e_l,e_i],e_j\rangle + \frac{1}{4}\sum_{ij}\langle [e_i,e_j],e_k\rangle\langle [e_i,e_j],e_l\rangle\\ =&-\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_k,e_i],e_j\rangle\langle [e_l,e_i],e_j\rangle + \frac{1}{2}(\langle e_5,e_k\rangle\langle e_5,e_l\rangle + \langle e_6,e_k\rangle\langle e_6,e_l\rangle)\\ =&\begin{cases} -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_k,e_i],e_j\rangle^2 + \frac{1}{2}(\langle e_5,e_k\rangle^2 + \langle e_6,e_k\rangle^2), & k=l,\\ 0, & k\neq l.\end{cases}\end{aligned}$$

En particular,

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Ric}]_{11} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_1, e_i], e_j\rangle^2 = -\frac{1}{2}(\langle [e_1, e_2], e_5\rangle^2 + \langle [e_1, e_3], e_6\rangle^2) = -1,\\
[\mathrm{Ric}]_{22} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_2, e_i], e_j\rangle^2 = -\frac{1}{2}\langle [e_2, e_1], e_5\rangle^2 = -\frac{1}{2},\\
[\mathrm{Ric}]_{33} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_3, e_i], e_j\rangle^2 = -\frac{1}{2}(\langle [e_3, e_1], e_6\rangle^2 = -\frac{1}{2},\\
[\mathrm{Ric}]_{44} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_4, e_i], e_j\rangle^2 + \frac{1}{2}(\langle e_5, e_4\rangle^2 + \langle e_6, e_4\rangle^2) = 0,\\
[\mathrm{Ric}]_{55} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_5, e_i], e_j\rangle^2 + \frac{1}{2}(\langle e_5, e_5\rangle^2 + \langle e_6, e_5\rangle^2) = \frac{1}{2},\\
[\mathrm{Ric}]_{66} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_6, e_i], e_j\rangle^2 + \frac{1}{2}(\langle e_5, e_6\rangle^2 + \langle e_6, e_6\rangle^2) = \frac{1}{2},\\
[\mathrm{Ric}]_{77} &= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_7, e_i], e_j\rangle^2 + \frac{1}{2}(\langle e_5, e_7\rangle^2 + \langle e_6, e_7\rangle^2) = 0.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Diag}\,(-1, -1/2, -1/2, 0, 1/2, 1/2, 0)\,.$$

Lema 2.17. *Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie nilpotente, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno en $\mathfrak{g}$ y $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, entonces*

$$\mathrm{Ric}(h \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle) = h\,\mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)h^{-1}.$$

Demostración. Vamos a llamar $\langle\cdot,\cdot\rangle' := h \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle$, donde la acción está dada por

$$h \cdot \langle\cdot,\cdot\rangle := \langle h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot\rangle.$$

Definimos $R_1 := \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle')$ y $R_2 := \mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)$, queremos ver que $h^{-1}R_1 = R_2h^{-1}$ que es equivalente a ver que si $\{e_1, \dots, e_n\}$ es base ortonormal de $\mathfrak{g}$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, y si $i, j \in \{1, \dots, n\}$ entonces $\langle h^{-1}R_1e_i, e_j\rangle = \langle R_2h^{-1}e_i, e_j\rangle$. Notemos que $\{he_1, \dots, he_n\}$ es base ortonormal de $\langle\cdot,\cdot\rangle'$, pues

$$\langle he_i, he_j\rangle' = \langle h^{-1}he_i, h^{-1}he_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\langle h^{-1}R_1e_i, e_j\rangle =& \langle h^{-1}R_1e_i, h^{-1}he_j\rangle = \langle R_1e_i, he_j\rangle' \\
=& -\frac{1}{2}\sum_{ml}\langle [e_i, he_m], he_l\rangle' \langle [he_j, he_m], he_l\rangle' \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{ml}\langle [he_m, he_l], e_i\rangle' \langle [he_m, he_l], he_j\rangle' \\
=& -\frac{1}{2}\sum_{ml}\langle h^{-1}[e_i, he_m], h^{-1}he_l\rangle \langle h^{-1}[he_j, he_m], h^{-1}he_l\rangle \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{ml}\langle h^{-1}[he_m, he_l], h^{-1}e_i\rangle \langle h^{-1}[he_m, he_l], h^{-1}he_j\rangle \\
=& -\frac{1}{2}\sum_{ml}\langle [h^{-1}e_i, e_m], e_l\rangle \langle [e_j, e_m], e_l\rangle \\
&+ \frac{1}{4}\sum_{ml}\langle [e_m, e_l], h^{-1}e_i\rangle \langle [e_m, e_l], e_j\rangle \\
=& \langle R_2h^{-1}e_i, e_j\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo tanto queda probado el lema. □

Definición 2.18. Dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g}$, decimos que $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un *solitón de Ricci* (algebraico) si existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tales que:

$$\mathrm{Ric} = \lambda I + D, \tag{6}$$

donde Ric es el operador de Ricci definido previamente.

Notemos que (6) implica que el tensor de Ricci cumple la siguiente ecuación:

$$\mathrm{Rc} = \langle \mathrm{Ric}\,\cdot, \cdot\rangle = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle + \langle D\cdot, \cdot\rangle = \lambda\langle\cdot,\cdot\rangle + \frac{1}{2}\mathcal{L}_{X_D}\langle\cdot,\cdot\rangle, \tag{7}$$

es decir, $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es un solitón de Ricci de la manera usual.

Corolario 2.19. *Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un producto interno en $\mathfrak{g}$ y $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, entonces $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es solitón de Ricci si y sólo si $(\mathfrak{g}, h\cdot\langle\cdot,\cdot\rangle)$ lo es.*

Demostración. Supongamos que $(\mathfrak{g}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ es solitón de Ricci, entonces existen $\lambda \in \mathbb{R}$ y $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ tales que $\mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle) = \lambda I + D$. Por el lema anterior se tiene que

$$\mathrm{Ric}(h\cdot\langle\cdot,\cdot\rangle) = h\,\mathrm{Ric}(\langle\cdot,\cdot\rangle)h^{-1} = h(\lambda I + D)h^{-1} = \lambda I + hDh^{-1}.$$

Como h es automorfismo, hDh^{-1} es derivación dado que:

$$\begin{aligned} hDh^{-1}[X,Y] =& hD[h^{-1}X, h^{-1}Y] \\ =& h[Dh^{-1}X, h^{-1}Y] + h[h^{-1}X, Dh^{-1}Y] \\ =& [hDh^{-1}X, hh^{-1}Y] + [hh^{-1}X, hDh^{-1}Y] \\ =& [hDh^{-1}X, Y] + [X, hDh^{-1}Y]. \end{aligned}$$

Por lo tanto resulta que $(\mathfrak{g}, h \cdot \langle \cdot,\cdot \rangle)$ es solitón de Ricci. La vuelta sale usando lo ya probado, pues $\langle \cdot,\cdot \rangle = h^{-1} \cdot (h \cdot \langle \cdot,\cdot \rangle)$ y h^{-1} es automorfismo. □

2.3. Flujo laplaciano y sus solitones. Una G_2-estructura en una variedad diferenciable M de dimensión 7 es una 3-forma diferenciable $\varphi \in \Omega^3 M$ tal que φ_p es *positiva* para cada $p \in M$, es decir φ_p respecto de alguna base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de T_pM se escribe como

$$\varphi_p = e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}. \tag{8}$$

Se sabe que toda G_2-estructura φ define una métrica Riemanniana g_φ en M y una orientación (ver Sección 3). Denotamos entonces por $*_\varphi : \Omega M \to \Omega M$ al operador estrella de Hodge definido por φ.

En general, si (M, g) es una variedad Riemaniana orientada 7-dimensional, quedan determinados el operador estrella de Hodge $* : \Omega^k M \longrightarrow \Omega^{7-k} M$ (ver Definición 2.7) y también el operador Laplaciano de Hodge (ver Definición 2.10) como sigue,

$$\Delta : \Omega^k M \longrightarrow \Omega^k M, \qquad \Delta := d^* d + dd^*,$$

donde $d^* : \Omega^{k+1} M \longrightarrow \Omega^k M$, $d^* = (-1)^{k+1} * d *$, es la adjunta de d (ver [P, 7.2]). Dada una G_2-estructura φ en M, denotaremos por Δ_φ al operador Laplaciano de Hodge determinado por la métrica Riemanniana g_φ y la orientación definida por φ. En particular, $\Delta_\varphi : \Omega^3 M \longrightarrow \Omega^3 M$ está dado por $\Delta_\varphi = *_\varphi d *_\varphi d - d *_\varphi d *_\varphi$.

Algunas clases especiales de G_2-estructuras son:

- *cerrada* (o *calibrada*) si $d\varphi = 0$;
- *cocerrada* (o *cocalibrada*) si $d *_\varphi \varphi = 0$;
- *paralela* si $\nabla_\varphi \varphi = 0$, donde ∇_φ es la conexión de Levi-Civita de g_φ;
- *armónica* si $\Delta_\varphi \varphi = 0$, donde $\Delta_\varphi = *_\varphi d *_\varphi d - d *_\varphi d *_\varphi$ es el operador Laplaciano de Hodge en 3-formas.

En [FG] fue probado que las siguientes condiciones sobre una G_2-estructura φ son equivalentes:

- φ es cerrada y cocerrada;
- φ es paralela;

y bajo cualquiera de estas condiciones, el grupo de holonomía de (M, g_φ) está contenido en G_2 y g_φ es Ricci flat. En tal caso, (M, φ) es llamada una G_2-*variedad*. En el caso compacto, se puede agregar la condición φ armónica a la lista anterior.

R. Bryant introdujo en [B2] el siguiente flujo geométrico natural para G_2-estructuras, el cual es llamado *flujo laplaciano*:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(t) = \Delta_{\varphi(t)}\varphi(t), \tag{9}$$

donde $\varphi(t)$ es una familia monoparamétrica de G_2-estructuras en una variedad diferenciable 7-dimensional M.

Es sabido que una G_2-estructura φ en una variedad diferenciable M fluye de manera autosimilar a lo largo del flujo laplaciano dado por (9), en el sentido de que las soluciones $\varphi(t)$ tienen la forma

$$\varphi(t) = c(t)f(t)^*\varphi, \quad \text{para algún } c(t) \in \mathbb{R}^* \text{ y } f(t) \in \mathrm{Diff}(M),$$

si y sólo si

$$\Delta_\varphi\varphi = c\varphi + \mathcal{L}_X\varphi, \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}, \quad X \in \mathfrak{x}(M) \text{ (completo)},$$

donde $\mathcal{L}_X$ denota la derivada de Lie respecto del campo X (ver (4)). En tal caso, $c(t) = \left(\frac{2}{3}ct + 1\right)^{3/2}$. Análogo a la terminología que se utiliza en la teoría del flujo de Ricci, llamaremos a φ *solitón de Laplace* y diremos que es *de expansión*, *estable* o *de contracción*, si $c > 0$, $c = 0$ o $c < 0$, respectivamente.

3. G_2-estructuras en álgebras de Lie

Recordemos el álgebra de división real de dimensión 8 de los octoniones $\mathbb{O}$, la cual admite un producto interno que la hace normada. El producto de los octoniones define un mapa bilineal antisimétrico $\times : \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \times \mathrm{Im}\,\mathbb{O} \longrightarrow \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ dado por $u \times v := \mathrm{Im}\, uv$, el cual resulta ser un *producto cruz* en el siguiente sentido:

$$u \times v \perp u, v, \qquad \text{y} \qquad |u \times v|^2 = |u|^2|v|^2 - \langle u, v\rangle^2, \qquad \forall u, v \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O}.$$

Si definimos la 3-forma φ_0 por

$$\varphi_0(u, v, w) := \langle u \times v, w\rangle, \qquad \forall u, v, w \in \mathrm{Im}\,\mathbb{O},$$

entonces podemos recuperar toda la información que teníamos sobre $\mathbb{O}$. En efecto, el producto interno puede ser recuperado de φ_0 mediante la siguiente igualdad:

$$\langle u, v\rangle \,\mathrm{vol} = \frac{1}{6}\iota_u(\varphi_0) \wedge \iota_v(\varphi_0) \wedge \varphi_0, \tag{10}$$

donde $\iota_u(\varphi_0)$ es la 2-forma dada por $\iota_u(\varphi_0)(v, w) := \varphi_0(u, v, w)$ y vol es una 7-forma no nula. En particular, φ_0 también determina una orientación. Claramente, el producto cruz queda determinado por φ_0 y el producto en $\mathbb{O}$ está dado por

$$uv = -\langle u, v\rangle 1 + u \times v. \tag{11}$$

Se sabe además que respecto de una cierta base orientada y ortonormal $\{e_1, \dots, e_7\}$ de $\mathrm{Im}\,\mathbb{O}$, la 3-forma φ_0 se escribe como

$$\varphi_0 := e^{127} + e^{347} + e^{567} + e^{135} - e^{146} - e^{236} - e^{245}, \tag{12}$$

que es la 3-forma en (8) usada para definir G_2-estructuras en variedades. El estabilizador de φ_0 en $\mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ es precisamente el grupo de Lie simple excepcional G_2, el cual coincide con el grupo de automorfismos del álgebra $\mathbb{O}$ (ver (11)). En particular, $G_2 = \{h \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) : h \cdot \varphi_0 = \varphi_0\}$.

De ahora en adelante podemos identificar $\mathbb{R}^7 \equiv \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ usando la base $\{e_1, \dots, e_7\}$. Notemos además que la órbita $\mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) \cdot \varphi_0$ es abierta en $\Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*$, pues

$$\begin{aligned}\dim \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) \cdot \varphi_0 &= \dim \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) - \dim G_2 \\ &= 49 - 14 = 35 = \binom{7}{3} = \dim \Lambda^3(\mathbb{R}^7)^*.\end{aligned}$$

Esto implica que toda 3-forma suficientemente cercana a φ_0 es de la forma $h \cdot \varphi_0$ para algún $h \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$, de lo cual uno construye un álgebra isomorfa a $\mathbb{O}$ vía h.

En esta sección vamos a adaptar las definiciones de la Sección 2.3 para álgebras de Lie y daremos algunos resultados útiles para solitones de Laplace.

Definición 3.1. Dado un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ de dimensión 7, una 3-forma $\psi \in< \Lambda^3\mathfrak{g}^*$ se llama *positiva* si existe una base $\{e_1, \dots, e_7\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que ψ en dicha base coincide con φ_0 dada por la ecuación (12).

Notar que la positividad de ψ es equivalente a que ψ esté en la órbita $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \cdot \varphi_0$, donde la acción está definida por

$$(h \cdot \phi)(X, Y, Z) = \phi(h^{-1}X, h^{-1}Y, h^{-1}Z), \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{g}, \quad \phi \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*.$$

Sabemos que φ_0 define un producto interno como sigue:

$$\langle X, Y\rangle_{\varphi_0} \mathrm{vol}_0 := \tfrac{1}{6}\iota_X\varphi_0 \wedge \iota_Y\varphi_0 \wedge \varphi_0,$$

donde $\mathrm{vol}_0 := e^{1\dots7}$ y ι_X es la 2-forma definida por $(\iota_X\psi)(W, Z) := \psi(X, W, Z)$. Se puede chequear fácilmente, aunque con cuentas un tanto engorrosas, que la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ es ortonormal respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_0}$.

Lema 3.2. *Si $X \in \mathfrak{g}$ entonces $h \cdot (\iota_X\psi) = \iota_{hX}(h \cdot \psi)$*

Demostración. Sean $W, Z \in \mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}(h \cdot \iota_X\psi)(W, Z) =& (\iota_X\psi)(h^{-1}W, h^{-1}Z) = \psi(X, h^{-1}W, h^{-1}Z) \\ =& \psi(h^{-1}hX, h^{-1}W, h^{-1}Z) = (h \cdot \psi)(hX, W, Z) \\ =& \iota_{hX}(h \cdot \psi)(W, Z),\end{aligned}$$

por lo que queda probado el lema. □

Luego, si $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ y $\psi := h \cdot \varphi_0$, podemos definir un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$ en $\mathfrak{g}$ y una forma de volumen vol_ψ de la siguiente manera

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi := \langle h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot\rangle_{\varphi_0}, \quad \mathrm{vol}_\psi := h \cdot \mathrm{vol}_0\,.$$

En principio notemos que,

$$\begin{aligned} h \cdot e^{1\dots 7} =& h \cdot e^1 \wedge \cdots \wedge h \cdot e^7 = \sum_{j=1}^{7} h^{-1}_{1j} e^j \wedge \cdots \wedge \sum_{j=1}^{7} h^{-1}_{7j} e^j \\ =& \sum_{\sigma} h^{-1}_{1\sigma(1)} \dots h^{-1}_{7\sigma(7)} sign(\sigma) e^{1\dots 7} = (\det h^{-1}) e^{1\dots 7}. \end{aligned}$$

De esto se ve fácilmente que la definición de vol_ψ para ψ positiva es buena, pues si $h, h' \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ son tales que $\psi = h \cdot \varphi_0 = h' \cdot \varphi_0$, entonces $h^{-1}h' \in G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ (ver Corolario 3.6). Por consiguiente $\det h^{-1} = \det h'^{-1}$ y en particular

$$\mathrm{vol}_\psi = h \cdot \mathrm{vol}_0 = (\det h^{-1}) \,\mathrm{vol}_0 = (\det h'^{-1}) \,\mathrm{vol}_0 = h' \cdot \mathrm{vol}_0 \,.$$

Lema 3.3. *Si $\psi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$ es positiva y $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, entonces*
(i) $\langle X, Y \rangle_\psi \,\mathrm{vol}_\psi = \frac{1}{6} \iota_X \psi \wedge \iota_Y \psi \wedge \psi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}$.
(ii) $\mathrm{vol}_{h\cdot\psi} = h \cdot \mathrm{vol}_\psi$.

Demostración. Por ser ψ positiva existe $\bar{h} \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ tal que $\psi = \bar{h} \cdot \varphi_0$.
(i) Sean $X, Y \in \mathfrak{g}$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle X, Y \rangle_\psi \,\mathrm{vol}_\psi &= \langle \bar{h}^{-1}X, \bar{h}^{-1}Y \rangle_{\varphi_0} \bar{h} \cdot \mathrm{vol}_{\varphi_0} \\ &= \bar{h} \cdot (\langle \bar{h}^{-1}X, \bar{h}^{-1}Y \rangle_{\varphi_0} \,\mathrm{vol}_{\varphi_0}) \\ &= \bar{h} \cdot (\tfrac{1}{6} \iota_{\bar{h}^{-1}X} \varphi_0 \wedge \iota_{\bar{h}^{-1}Y} \varphi_0 \wedge \varphi_0) \\ &= \tfrac{1}{6} \bar{h} \cdot (\iota_{\bar{h}^{-1}X} \varphi_0) \wedge \bar{h} \cdot (\iota_{\bar{h}^{-1}Y} \varphi_0) \wedge \bar{h} \cdot \varphi_0 \\ &= \tfrac{1}{6} \iota_X \psi \wedge \iota_Y \psi \wedge \psi, \end{aligned}$$

usando Lema 3.2. Por lo que queda probado (i).
(ii) Dada $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, entonces

$$h \cdot \mathrm{vol}_\psi = h \cdot (\bar{h} \cdot \mathrm{vol}_0) = (h\bar{h}) \cdot \mathrm{vol}_0 = \mathrm{vol}_{(h\bar{h})\cdot\varphi_0} = \mathrm{vol}_{h\cdot(\bar{h}\cdot\varphi_0)} = \mathrm{vol}_{h\cdot\psi}$$

Con esto queda probado el lema. □

Dado que tenemos una métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ y una orientación dada por vol_ψ, vamos a llamar $*_\psi$ al operador estrella de Hodge, dado por la Definición 2.7, asociado a $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$ y vol_ψ.

Observación 3.4. Si $\psi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^*$ es positiva y $\{e_1, \dots, e_7\}$ es base ortonormal de $\mathfrak{g}$ respecto del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$, naturalmente se define un producto interno en $\Lambda^k \mathfrak{g}^*$, denotado también por $\langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$, de manera tal que el conjunto $\{e^{i_1 \dots i_k} : i_1 < \dots < i_k \in \{1, \dots, 7\}\}$ es ortonormal.

Lema 3.5. *Sean $\mathfrak{g}$ un espacio vectorial 7-dimensional, $\psi \in \Lambda^3 \mathfrak{g}^*$ positiva y $h \in \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$, entonces:*
(i) $\langle X, Y \rangle_{h\cdot\psi} = \langle h^{-1}X, h^{-1}Y \rangle_\psi, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}, \quad$ (*i.e.* $\langle \cdot, \cdot \rangle_{h\cdot\psi} = h \cdot \langle \cdot, \cdot \rangle_\psi$).
(ii) $\langle \alpha, \beta \rangle_{h\cdot\psi} = \langle h^{-1} \cdot \alpha, h^{-1} \cdot \beta \rangle_\psi, \quad \forall \alpha, \beta \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$.
(iii) $*_{h\cdot\psi} h \cdot \phi = h \cdot (*_\psi \phi), \quad \forall \phi \in \Lambda^s \mathfrak{g}^*$.

(iv) $*_{c\psi}\phi = c^{\frac{7-2s}{3}} *_\psi \phi, \quad \forall c \in \mathbb{R}^*,\ \phi \in \Lambda^s\mathfrak{g}^*.$
(v) $\langle\cdot,\cdot\rangle_{c\psi} = c^{\frac{2}{3}}\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi, \quad \forall c \in \mathbb{R}^*.$

Demostración.

(i) Si $\{e_1,\dots,e_7\}$ base ortonormal de $\mathfrak{g}$ respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$, entonces el conjunto $\{he_1,\dots,he_7\}$ es ortonormal respecto de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h\cdot\psi}$, pues

$$\begin{aligned}\langle he_i, he_j\rangle_{h\cdot\psi}\operatorname{vol}_{h\cdot\psi} =& \tfrac{1}{6}\iota_{he_i}(h\cdot\psi)\wedge\iota_{he_j}(h\cdot\psi)\wedge h\cdot\psi\\ =& \tfrac{1}{6}h\cdot(\iota_{e_i}\psi)\wedge h\cdot(\iota_{e_j}\psi)\wedge h\cdot\psi\\ =& h\cdot(\tfrac{1}{6}\iota_{e_i}\psi\wedge\iota_{e_j}\psi\wedge\psi)\\ =& h\cdot(\langle e_i,e_j\rangle_\psi\operatorname{vol}_\psi)\\ =& \langle e_i,e_j\rangle_\psi h\cdot\operatorname{vol}_\psi\\ =& \delta_{ij}\operatorname{vol}_{h\cdot\psi}.\end{aligned}$$

Es decir, $\langle he_i, he_j\rangle_{h\cdot\psi} = \delta_{ij}$. Además, $\{he_1,\dots,he_7\}$ es también ortonormal respecto de $h\cdot\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi$, pues $\langle h^{-1}he_i, h^{-1}he_j\rangle_\psi = \langle e_i,e_j\rangle_\psi = \delta_{ij}$. Luego $h\cdot\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi = \langle\cdot,\cdot\rangle_{h\cdot\psi}$, que es lo que queríamos probar.

(ii) Por el apartado (i) tenemos que si $\{e_1,\dots,e_7\}$ es base ortonormal de $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle_\psi)$, entonces $\{he_1,\dots,he_7\}$ es base ortonormal de $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle_{h\cdot\psi})$. Su base dual está dada por $\{h\cdot e^1,\dots,h\cdot e^7\}$, pues para todo $i,j\in\{1,\dots,7\}$ sucede que

$$(h\cdot e^i)(he_j) = e^i(h^{-1}he_j)) = e^i(e_j) = \delta_{ij}.$$

Además, por lo observado anteriormente, $(\mathfrak{g},\langle\cdot,\cdot\rangle_{h\cdot\psi})$ induce naturalmente un producto interno en $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$ que hace del conjunto $\{h\cdot e^{i_1\dots i_k} : i_1 < \ldots < i_k \in \{1,\dots,7\}\}$ una base ortonormal. Luego, bastaría ver para probar (ii), que es además ortonormal respecto de $\langle h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot\rangle_\psi$. En efecto,

$$\langle h^{-1}\cdot(h\cdot e^{i_1\dots i_k}), h^{-1}\cdot(h\cdot e^{j_1\dots j_k})\rangle_\psi = \langle e^{i_1\dots i_k}, e^{j_1\dots j_k}\rangle_\psi = \delta_{i_1j_1}\dots\delta_{i_kj_k},$$

es decir $\langle h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot\rangle_\psi$ hace del conjunto $\{h\cdot e^{i_1\dots i_k} : i_1 < \ldots < i_k \in \{1,\dots,7\}\}$, un conjunto ortonormal, por ende $\langle h^{-1}\cdot, h^{-1}\cdot\rangle_\psi = \langle\cdot,\cdot\rangle_{h\cdot\psi}$ en $\Lambda^k\mathfrak{g}^*$.

(iii) Sea $\phi\in\Lambda^s\mathfrak{g}^*$, $X,Y\in\mathfrak{g}$ y $\alpha\in\Lambda^s\mathfrak{g}^*$, usando parte (ii) y Lema 3.3 parte (ii) se tiene

$$\begin{aligned}\alpha\wedge *_{h\cdot\psi}h\cdot\phi =& \langle\alpha, h\cdot\phi\rangle_{h\cdot\psi}\operatorname{vol}_{h\cdot\psi}\\ =& \langle h^{-1}\cdot\alpha, h^{-1}\cdot(h\cdot\phi)\rangle_\psi h\cdot\operatorname{vol}_\psi\\ =& h\cdot(\langle h^{-1}\cdot\alpha,\phi\rangle_\psi\operatorname{vol}_\psi)\\ =& h\cdot(h^{-1}\cdot\alpha\wedge *_\psi\phi)\\ =& \alpha\wedge h\cdot(*_\psi\phi).\end{aligned}$$

Es decir, vale (iii).

(iv) Sea $c \in \mathbb{R}^*$, $\varphi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ sucede que

$$\begin{aligned}(c^{-\frac{1}{k}} I) \cdot \varphi(X_1, \dots, X_k) &= \varphi((c^{-\frac{1}{k}} I)^{-1} X_1, \dots, (c^{-\frac{1}{k}} I)^{-1} X_k) \\ &= \varphi(c^{\frac{1}{k}} X_1, \dots, c^{\frac{1}{k}} X_k) = c\varphi(X_1, \dots, X_k),\end{aligned}$$

es decir

$$(c^{-\frac{1}{k}} I) \cdot \varphi = c\varphi, \quad \forall c \in \mathbb{R}^*, \varphi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*. \tag{13}$$

Luego, si $\phi \in \Lambda^s \mathfrak{g}^*$, por parte (iii) se tiene que

$$\begin{aligned}c^{\frac{s}{3}} *_{c\psi} \phi &= *_{c\psi} c^{\frac{s}{3}} \phi = *_{(c^{-\frac{1}{3}} I)\cdot\psi} ((c^{\frac{s}{3}})^{-\frac{1}{s}} I) \cdot \phi = *_{(c^{-\frac{1}{3}} I)\cdot\psi} (c^{-\frac{1}{3}} I) \cdot \phi \\ &= (c^{-\frac{1}{3}} I) \cdot *_\psi \phi = c^{\frac{7-s}{3}} *_\psi \phi,\end{aligned}$$

es decir $*_{c\psi} = c^{\frac{7-2s}{3}} *_\psi$, que es lo que queríamos probar.

(v) Sea $c \in \mathbb{R}^*$, tenemos por parte (i) y por (13) que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{c\psi} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{(c^{-\frac{1}{3}} I)\cdot\psi} = \langle (c^{-\frac{1}{3}} I)^{-1} \cdot, (c^{-\frac{1}{3}} I)^{-1} \cdot \rangle_\psi = \langle c^{\frac{1}{3}} \cdot, c^{\frac{1}{3}} \cdot \rangle_\psi = c^{\frac{2}{3}} \langle \cdot, \cdot \rangle_\psi.$$

Por lo que queda demostrado (v) y así el lema. □

Corolario 3.6. $G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$.

Demostración. Sea $h \in G_2 = \{h \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R}) : h \cdot \varphi_0 = \varphi_0\}$, tenemos que

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{h^{-1}\cdot\varphi_0} = \langle h \cdot, h \cdot \rangle_{\varphi_0} = \langle (h^t h) \cdot, \rangle_{\varphi_0},$$

por lo que $h \in \mathrm{O}(7)$, donde $\mathrm{O}(7)$ son las matrices ortogonales respecto del producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_0}$. Por otro lado, también sabemos que

$$\mathrm{vol}_{\varphi_0} = \mathrm{vol}_{h^{-1}\cdot\varphi_0} = h^{-1} \cdot \mathrm{vol}_{\varphi_0} = (\det h) \, \mathrm{vol}_{\varphi_0}.$$

Luego $\det h = 1$ y de esto resulta que $h \in \mathrm{SO}(7)$. □

Veamos ahora que la derivada exterior y el Laplaciano de Hodge son $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$-equivariantes.

Lema 3.7. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 7-dimensional, $\psi \in \Lambda^k \mathfrak{g}^*$ y $h \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$, entonces:*

(i) $d(h \cdot \psi) = h \cdot d\psi$.
(ii) *Si $k = 3$ y ψ es positiva, entonces*
  (a) $\Delta_{h\cdot\psi} h \cdot \psi = h \cdot \Delta_\psi \psi$.
  (b) $\Delta_{c\psi} c\psi = c^{\frac{1}{3}} \Delta_\psi \psi, \quad \forall c \in \mathbb{R}^*$.

Demostración.

(i) Si $X_1, X_2, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{g}$, entonces usando Definición 2.4

$$\begin{aligned}
&d(h\cdot\psi)(X_1,\dots,X_{k+1}) = \\
=&\sum_{i<j}(-1)^{i+j}(h\cdot\psi)([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_{k+1}) \\
=&\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\psi(h^{-1}[X_i,X_j],h^{-1}X_1,\dots,\widehat{h^{-1}X_i},\dots,\widehat{h^{-1}X_j},\dots,h^{-1}X_{k+1}) \\
=&\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\psi([h^{-1}X_i,h^{-1}X_j],h^{-1}X_1,\dots,\widehat{h^{-1}X_i},\dots,\widehat{h^{-1}X_j},\dots,h^{-1}X_{k+1}) \\
=&d\psi(h^{-1}X_1,\dots,h^{-1}X_{k+1}) \\
=&(h\cdot d\psi)(X_1,\dots,X_{k+1}).
\end{aligned}$$

Por lo tanto, vale (i) .

(ii) (a) Usando Definición 2.10, Lema 3.5 y parte (i) obtenemos lo siguiente,

$$\begin{aligned}
(-1)^3\Delta_{h\cdot\psi}(h\cdot\psi) =& d*_{h\cdot\psi}d*_{h\cdot\psi}(h\cdot\psi) - *_{h\cdot\psi}d*_{h\cdot\psi}d(h\cdot\psi) \\
=& d*_{h\cdot\psi}d(h\cdot(*_\psi\psi)) - *_{h\cdot\psi}d*_{h\cdot\psi}(h\cdot(d\psi)) \\
=& d*_{h\cdot\psi}(h\cdot(d*_\psi\psi)) - *_{h\cdot\psi}d(h\cdot(*_\psi d\psi)) \\
=& d(h\cdot(*_\psi d*_\psi\psi)) - *_{h\cdot\psi}(h\cdot(d*_\psi d\psi)) \\
=& h\cdot(d*_\psi d*_\psi\psi) - h\cdot(*_\psi d*_\psi d\psi) \\
=& h\cdot(d*_\psi d*_\psi\psi - *_\psi d*_\psi d\psi) \\
=& (-1)^3 h\cdot\Delta_\psi\psi.
\end{aligned}$$

Luego, vale $\Delta_{h\cdot\psi}(h\cdot\psi) = h\cdot\Delta_\psi\psi$.

(b) Usando Lema 3.5 parte (iv), tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\Delta_{c\psi}c\psi &= -d*_{c\psi}d*_{c\psi}c\psi + *_{c\psi}d*_{c\psi}d\,c\psi \\
&= c(-d*_{c\psi}d*_{c\psi}\psi + *_{c\psi}d*_{c\psi}d\psi) \\
&= c(-d\,c^{\frac{7-10}{3}}*_\psi d\,c^{\frac{7-6}{3}}*_\psi\psi + c^{\frac{7-8}{3}}*_\psi d\,c^{\frac{7-8}{3}}*_\psi d\psi) \\
&= c\,c^{-\frac{2}{3}}(-d*_\psi d*_\psi\psi + *_\psi d*_\psi d\psi) \\
&= c^{\frac{1}{3}}\Delta_\psi\psi.
\end{aligned}$$

Por lo que vale (ii), y así queda probado el lema. □

De igual manera, existe una relación entre las derivadas de Lie de dos formas equivalentes, dicha relación está dada por la siguiente proposición.

Proposición 3.8. *Si* $\psi\in\Lambda^k\mathfrak{g}^*$, $h\in\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ *y* $D\in\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$, *entonces*

$$\mathcal{L}_{X_{hDh^{-1}}}(h\cdot\psi) = h\cdot\mathcal{L}_{X_D}\psi.$$

Demostración. Sean $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{g}$, entonces de acuerdo a Lema 2.13,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_{hDh^{-1}}}(h\cdot\psi)(X_1,\dots,X_k) =&(h\cdot\psi)(hDh^{-1}X_1,\dots,X_k)+\dots\\ &+(h\cdot\psi)(X_1,\dots,hDh^{-1}X_k)\\ =&\psi(Dh^{-1}X_1,\dots,h^{-1}X_k)+\dots\\ &+\psi(h^{-1}X_1,\dots,Dh^{-1}X_k)\\ =&\mathcal{L}_{X_D}\psi(h^{-1}X_1,\dots,h^{-1}X_k)\\ =&(h\cdot\mathcal{L}_{X_D}\psi)(X_1,\dots,X_k),\end{aligned}$$

lo cual concluye la prueba. □

Si G es un grupo de Lie simplemente conexo con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una G_2-estructura para G o $\mathfrak{g}$ será una 3-forma $\varphi \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*$ positiva. La siguiente definición será esencial a lo largo del trabajo.

Definición 3.9. Dadas $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 7-dimensional y ψ una 3-forma positiva en $\mathfrak{g}$, decimos que $(\mathfrak{g},\psi)$ es *solitón de Laplace* (semi-algebraico, ver [L2]) si existen $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\Delta_\psi\psi = \mathcal{L}_{X_D}\psi + \lambda\psi. \tag{14}$$

Notar que esto implica que (G,ψ) es solitón de Laplace con la definición anterior (ver Sección 2.3).

Ejemplo 3.10. Sea $\mathfrak{g}$ y φ como en el Ejemplo 2.5, veamos que $(\mathfrak{g},\varphi)$ es solitón de Laplace. Sean $d_1,d_2,d_3,d_4,d_7 \in \mathbb{R}$, definimos:

$$D := \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & d_3 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & d_4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_1+d_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1+d_3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_7\end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}).$$

Usando el Lema 2.14 y el Ejemplo 2.15 obtenemos,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_D}\varphi =&(d_1+d_4+d_7)e^{147}+(d_1+d_2+d_3+d_7)e^{267}+(d_1+d_2+d_3\\ &+d_7)e^{357}+(d_1+d_2+d_3)e^{123}+(3d_1+d_2+d_3)e^{156}+(d_1\\ &+2d_2+d_4)e^{245}-(d_1+2d_3+d_4)e^{346}.\end{aligned}$$

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, veamos qué condiciones tienen que cumplir d_1,d_2,d_3,d_4,d_7 y λ para que (14) se satisfaga:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{X_D}\varphi+\lambda\varphi =&(d_1+d_4+d_7+\lambda)e^{147}+(d_1+d_2+d_3+d_7+\lambda)e^{267}\\ &+(d_1+d_2+d_3+d_7+\lambda)e^{357}+(d_1+d_2+d_3+\lambda)e^{123}\\ &+(3d_1+d_2+d_3+\lambda)e^{156}+(d_1+2d_2+d_4+\lambda)e^{245}\\ &-(d_1+2d_3+d_4+\lambda)e^{346}.\end{aligned}$$

Mientras que $\Delta\varphi = 2e^{123}$, por Ejemplo 2.11. Luego para que se cumpla (14), los coeficientes que acompañan a e^{ijk} en cada lado de la igualdad deben coincidir. Es decir, deben cumplirse las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} d_1 + d_4 + d_7 + \lambda &= 0, \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_7 + \lambda &= 0, \\ d_1 + d_2 + d_3 + \lambda &= 2, \\ 3d_1 + d_2 + d_3 + \lambda &= 0, \\ d_1 + 2d_2 + d_4 + \lambda &= 0, \\ d_1 + 2d_3 + d_4 + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} d_1 = -1, & d_2 = 1, & d_3 = 1, \\ d_4 = 2, & d_7 = -2, & \lambda = 1. \end{array} \right.$$

Por lo tanto, $(\mathfrak{g}, \varphi)$ es solitón de Laplace, y como $\lambda > 0$ es de expansión.

Definición 3.11. Si $\mathfrak{g}_i$ es un álgebra de Lie y $\psi_i \in \Lambda^3\mathfrak{g}_i^*$ positiva, para $i = 1, 2$, decimos que $(\mathfrak{g}_1, \psi_1)$ es *equivalente* a $(\mathfrak{g}_2, \psi_2)$ (denotado por $(\mathfrak{g}_1, \psi_1) \simeq (\mathfrak{g}_2, \psi_2)$) si existe $h : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ isomorfismo de álgebras de Lie tal que $\psi_2 = h \cdot \psi_1$.

Proposición 3.12. *Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie 7-dimensional, $\psi_1, \psi_2 \in \Lambda^3\mathfrak{g}^*$ positivas tales que $(\mathfrak{g}, \psi_1) \simeq (\mathfrak{g}, \psi_2)$, entonces $(\mathfrak{g}, \psi_1)$ es solitón de Laplace si y sólo si $(\mathfrak{g}, \psi_2)$ lo es.*

Demostración. $(\mathfrak{g}, \psi)$ es solitón de Laplace si y sólo si existen $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta_\psi\psi = \mathcal{L}_{X_D}\psi + \lambda\psi$. Luego, por Lema 3.5, Lema 3.7 y Proposición 3.8 tenemos que

$$\Delta_{h\cdot\psi}(h \cdot \psi) = h \cdot \Delta_\psi\psi = h \cdot (\mathcal{L}_{X_D}\psi + \lambda\psi) = \mathcal{L}_{X_{hDh^{-1}}}(h \cdot \psi) + \lambda(h \cdot \psi).$$

Dado que $hDh^{-1} \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$, se sigue que $(\mathfrak{g}, h \cdot \psi)$ es solitón de Laplace.

Recíprocamente, si $(\mathfrak{g}, h \cdot \psi)$ es solitón de Laplace, por lo probado anteriormente $(\mathfrak{g}, h^{-1} \cdot (h \cdot \psi))$ lo es. Luego, queda probada la proposición. □

Observación 3.13. Notemos que por el Lema 3.7 y la linealidad de la derivada de Lie, tenemos que los múltiplos de solitones son también solitones. En efecto, si $(\mathfrak{g}, \psi)$ es solitón de Laplace, entonces existen $D \in \operatorname{Der}(\mathfrak{g})$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta_\psi\psi = \mathcal{L}_{X_D}\psi + \lambda\psi$. Luego, si $c \in \mathbb{R}^*$, tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \Delta_{c\psi}c\psi = c^{\frac{1}{3}}\Delta_\psi\psi = c^{\frac{1}{3}}\mathcal{L}_{X_D}\psi + c^{\frac{1}{3}}\lambda\psi &= \mathcal{L}_{c^{-\frac{2}{3}}X_D}(c\psi) + (c^{-\frac{2}{3}}\lambda)(c\psi) \\ &= \mathcal{L}_{X_{c^{-2/3}D}}(c\psi) + (c^{-\frac{2}{3}}\lambda)(c\psi), \end{aligned}$$

y como $c^{-\frac{2}{3}}D$ es derivación de $\mathfrak{g}$, tenemos que $c\psi$ es solitón de Laplace.

$\mathfrak{g}$	Corchete de Lie
$\mathfrak{n}_1$	$[\cdot,\cdot]=0$
$\mathfrak{n}_2$	$[e_1,e_2]=-e_5,[e_1,e_3]=-e_6$
$\mathfrak{n}_3$	$[e_1,e_2]=-e_4,[e_1,e_3]=-e_5,[e_2,e_3]=-e_6$
$\mathfrak{n}_4$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_6,[e_2,e_4]=-e_6,[e_1,e_5]=-e_7$
$\mathfrak{n}_5$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_6,[e_1,e_4]=-e_7,[e_2,e_5]=-e_7$
$\mathfrak{n}_6$	$[e_1,e_2]=-e_4,[e_1,e_3]=-e_5,[e_1,e_4]=-e_6,[e_1,e_5]=-e_7$
$\mathfrak{n}_7$	$[e_1,e_2]=-e_4,[e_1,e_3]=-e_5,[e_1,e_4]=-e_6,[e_2,e_3]=-e_6,[e_1,e_5]=-e_7$
$\mathfrak{n}_8$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_4,[e_2,e_3]=-e_5,[e_1,e_5]=-e_6,$ $[e_2,e_4]=-e_6,[e_1,e_6]=-e_7,[e_3,e_4]=-e_7$
$\mathfrak{n}_9$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_4,[e_2,e_3]=-e_5,[e_1,e_5]=-e_6,$ $[e_2,e_4]=-e_6,[e_1,e_6]=-e_7,[e_3,e_4]=-e_7,[e_2,e_5]=-e_7$
$\mathfrak{n}_{10}$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_5,[e_2,e_4]=-e_5,[e_1,e_4]=-e_6,$ $[e_4,e_6]=-e_7,[e_3,e_4]=-e_7,[e_1,e_5]=-e_7,[e_2,e_3]=-e_7$
$\mathfrak{n}_{11}$	$[e_1,e_2]=-e_3,[e_1,e_3]=-e_5,[e_2,e_4]=-e_6,[e_2,e_3]=-e_6,$ $[e_2,e_5]=-e_7,[e_3,e_4]=-e_7,[e_1,e_5]=-e_7,[e_1,e_6]=-e_7,[e_2,e_6]=3e_7$
$\mathfrak{n}_{12}$	$[e_1,e_2]=-e_4,[e_2,e_3]=-e_5,[e_1,e_3]=e_6,[e_2,e_6]=-2e_7,$ $[e_3,e_4]=2e_7,[e_1,e_6]=2e_7,[e_2,e_5]=-2e_7$

Cuadro 1. Álgebras de Lie nilpotentes que admiten una G_2-estructura cerrada (ver [CF]).

4. Solitones de Laplace cerrados

En el artículo [CF], Conti y Fernández estudiaron la existencia de G_2- estructuras cerradas en un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de dimensión siete. En dicho trabajo obtuvieron que hay, salvo isomorfismo, exactamente doce álgebras de Lie nilpotentes con esa propiedad, las cuales se encuentran listadas en el Cuadro 1. En este trabajo, estuvimos interesados en conocer cuáles de estas doce álgebras admiten solitones de Laplace.

Lo que hicimos en esta sección es mostrar que las primeras siete álgebras de Lie del Cuadro 1 admiten solitones de Laplace cerrados. De acuerdo con la ecuación (14), debemos encontrar para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, una 3- forma positiva y cerrada φ, una derivación D de $\mathfrak{g}$ y una constante real λ, tales que

$$\Delta_\varphi \varphi = \mathcal{L}_{X_D}\varphi + \lambda\varphi.$$

Lo primero que hacemos es dar condiciones para que φ sea cerrada, y luego de suponer que dichas condiciones se satisfacen calculamos el Laplaciano de φ. En los primeros casos obtenemos que los términos que aparecen en el Laplaciano también ocurren en φ salvo un múltiplo, luego basta con proponer D una matriz diagonal que sea derivación, plantear las ecuaciones y despejar. En el caso $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_4$ las cosas se complican dado que al calcular el Laplaciano de $\varphi = \varphi_4$ surgen términos que no aparecen en φ. En principio propusimos una matriz D arbitraria, pero esto se hizo muy tedioso dado que había demasiadas ecuaciones. Optamos entonces por sólo agregar aquellos lugares que nos agregaran los términos que estaban en $\Delta_\varphi\varphi$ pero no en φ. Es decir, supongamos que uno de los sumandos del Laplaciano es e^{ijk} y este no aparece en φ, pero si aparece el término e^{ijl}, para algún l. La idea es que en $\mathcal{L}_{X_D}e^{ijl}$ aparezca e^{ijk}. Por lo visto en Lema 2.14, tenemos que

$$\mathcal{L}_{X_D}e^{ijl} = D^te^i \wedge e^{jl} + e^i \wedge D^te^j \wedge e^l + e^{ij} \wedge D^te^l.$$

De acá podemos ver facilmente que para que aparezca e^{ijk} basta con considerar $D^t_{kl} = D_{lk} \neq 0$. Repitiendo esto en todos los términos que tienen dos elementos del conjunto $\{j, k, l\}$ en φ obtenemos una D con muchos coeficientes nulos y las cuentas se facilitan.

A continuación exhibimos con bastante detalle las cuentas mencionadas anteriormente para las primeras siete álgebras de Lie del Cuadro 1.

4.1. Caso $\mathfrak{n}_2$. Sea $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2(a, b)$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7, con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie definido por

$$[e_1, e_2] = -ae_5, \quad [e_1, e_3] = -be_6.$$

O equivalentemente

$$de^5 = ae^{12}, \quad de^6 = be^{13}, \tag{15}$$

con a, b números reales distintos de cero, donde $d = d_1$ es el operador derivada exterior (ver Definición 2.4). Notemos que todas estas álgebras de Lie son isomorfas a $\mathfrak{n}_2(1, 1)$, con isomorfismo dado por

$$f : \mathfrak{n}_2(1, 1) \longrightarrow \mathfrak{n}_2(a, b),$$

que en la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ vale:

$$\begin{aligned} f(e_i) &:= e_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 7; \\ f(e_5) &:= ae_5, \\ f(e_6) &:= be_6. \end{aligned}$$

Se ve fácilmente que f es biyectiva si y sólo si a y b son distintos de cero; y f es morfismo pues

$$\begin{aligned} [f(e_1), f(e_2)] &= [e_1, e_2] = -ae_5 = -f(e_5) = f(-e_5) = f([e_1, e_2]_1), \\ [f(e_1), f(e_3)] &= [e_1, e_3] = -be_6 = -f(e_6) = f(-e_6) = f([e_1, e_3]_1), \end{aligned}$$

donde $[\cdot,\cdot]_1$ denota el corchete de $\mathfrak{n}(1,1)$. Notar que si $[e_i,e_j]_1=0$, resulta que $[e_i,e_j]=0$. Además, como $f(e_i)=\alpha_i e_i$, $\alpha_i\in\mathbb{R}^*$, entonces $[e_i,e_j]_1=0$ implica que

$$[fe_i,fe_j]=[\alpha_i e_i,\alpha_j e_j]=\alpha_i\alpha_j[e_i,e_j]=0=f([e_i,e_j]_1).$$

Dado que ya vimos que son todas isomorfas, podemos fijar $\mathfrak{n}_2=\mathfrak{n}_2(a,b)$ y trabajar con ella. Consideramos la 3-forma

$$\varphi_2=e^{147}+e^{267}+e^{357}+e^{123}+e^{156}+e^{245}-e^{346}\in\Lambda^3\mathfrak{n}_2^*.$$

Notar que φ_2 es positiva (ver Definición 3.1) pues si definimos $h_2\in\mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ como

$$h_2:=\begin{bmatrix}-1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&-1&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

entonces

$$h_2\cdot e^{147}=h_2\cdot e^1\wedge h_2\cdot e^4\wedge h_2\cdot e^7=-e^1\wedge -e^2\wedge e^7=e^{127}.$$

Y repitiendo esta idea podemos ver fácilmente que $h_2\cdot\varphi_2=\varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12):

$$\begin{aligned}h_2\cdot\varphi_2=&h_2\cdot e^{147}+h_2\cdot e^{267}+h_2\cdot e^{357}+h_2\cdot e^{123}\\&+h_2\cdot e^{156}+h_2\cdot e^{245}-h_2\cdot e^{346}\\=&-(-e^{127})+e^{567}+e^{347}-e^{153}-e^{146}-e^{524}+e^{326}\\=&e^{127}+e^{567}+e^{347}+e^{135}-e^{146}-e^{245}-e^{236}\\=&\varphi_0\end{aligned}$$

Es decir, φ_2 es positiva.

Podemos calcular la derivada exterior de φ_2, usando que $d=d_3$ (ver Definición 2.4) es lineal y satistace (3). Por ejemplo:

$$\begin{aligned}de^{267}&=de^2\wedge e^6\wedge e^7-e^2\wedge de^6\wedge e^7+e^2\wedge e^6\wedge de^7\\&=0\wedge e^6\wedge e^7-e^2\wedge be^{13}\wedge e^7+e^2\wedge e^6\wedge 0\\&=be^{1237}.\end{aligned}$$

Haciendo esto término a término, obtenemos que $d\varphi_2=(b-a)e^{1237}$. Luego φ_2 es cerrada (*i.e.* $d\varphi_2=0$) si y sólo si $a=b$.

Por otro lado, tenemos el operador Laplaciano asociado a $\mathfrak{n}_2$ (ver Definición 2.10), $\Delta:=\Delta_{\varphi_2}=-d*d*+*d*d$, el cual procedemos a calcular en

φ_2 como sigue:

$$\begin{aligned}
*\varphi_2 &= e^{2356} - e^{1345} - e^{1246} + e^{4567} - e^{2347} - e^{1367} + e^{1257},\\
d*\varphi_2 &= -ae^{12467} + be^{13457},\\
d\varphi_2 &= ae^{35} - be^{26},\\
d*d*\varphi_2 &= -(a^2+b^2)e^{123}.
\end{aligned}$$

Observemos que φ_2 no puede ser cocerrada, pues $d*\varphi_2 = 0$ implica que $a = b = 0$, y esto es una contradicción pues a y b son no nulos. Por otro lado, si φ_2 es cerrada (*i.e.* $a = b$), se tiene que $\Delta\varphi_2 = 2a^2e^{123}$.

Nos interesa saber cuándo $(\mathfrak{n}_2, \varphi_2)$ es solitón de Laplace y de acuerdo a (14), necesitamos mostrar que $\Delta\varphi_2 = \lambda\varphi_2 + \mathcal{L}_{X_D}\varphi_2$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, y algún $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_2)$. Proponiendo una D diagonal las cuentas resultan accesibles y es fácil ver que las condiciones que deben cumplirse nos llevan a tomar D de la siguiente manera,

$$D := a^2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

y $\lambda := 5a^2$. Para corroborar que con D y λ se satisface (14) vamos a calcular $\mathcal{L}_{X_D}\varphi_2$. Por ejemplo, se calcula $\mathcal{L}_{X_D}e^{147}$ de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}e^{147}(e_i, e_j, e_k) &= e^{147}(De_i, e_j, e_k) + e^{147}(e_i, De_j, e_k) + e^{147}(e_i, e_j, De_k)\\
&= e^{147}(D_{ii}e_i, e_j, e_k) + e^{147}(e_i, D_{jj}e_j, e_k) + e^{147}(e_i, e_j, D_{kk}e_k)\\
&= D_{ii}e^{147}(e_i, e_j, e_k) + D_{jj}e^{147}(e_i, e_j, e_k) + D_{kk}e^{147}(e_i, e_j, e_k)\\
&= (D_{ii} + D_{jj} + D_{kk})e^{147}(e_i, e_j, e_k)\\
&= -5a^2e^{147}(e_i, e_j, e_k).
\end{aligned}$$

Es decir $\mathcal{L}_{X_D}e^{147} = -5a^2e^{147}$. Se ve en el ejemplo, que como la D propuesta es diagonal, es fácil calcular $\mathcal{L}_{X_D}e^{ijk}$. Repitiendo esta cuenta en los siete términos de φ obtenemos lo que sigue,

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_2 = -5a^2e^{147} - 5a^2e^{267} - 5a^2e^{357} - 3a^2e^{123} - 5a^2e^{156} - 5a^2e^{245} + 5a^2e^{346}.$$

En consecuencia, $\mathcal{L}_{X_D}\varphi_2 + \lambda\varphi_2 = 2a^2e^{123} = \Delta\varphi_2$, que es lo que queríamos ver. Ha quedado entonces demostrado el siguiente resultado.

Proposición 4.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$ (donde $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$) y $\mathfrak{n}_2(a,b)$ como arriba. Entonces,*

(i) *φ_2 es cerrada si y sólo si $a = b$.*
(ii) *$(\mathfrak{n}_2(a,a), \varphi_2)$ es solitón de Laplace.*

Observación 4.2. Para todo $a \in \mathbb{R}^*$, el solitón de Laplace $(\mathfrak{n}_2(a,a), \varphi_2)$ es de expansión dado que $\lambda > 0$, y no es una auto-forma pues $\Delta\varphi_2 \neq c\varphi_2$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

4.2. Caso $\mathfrak{n}_3$. Si consideramos ahora $\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a,b,c)$, el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7 con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie definido por

$$[e_1, e_2] = -ae_4, \quad [e_1, e_3] = -be_5, \quad [e_2, e_3] = -ce_6,$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}^*$. De manera análoga al caso anterior se tiene un isomorfismo

$$f : \mathfrak{n}_3(1,1,1) \longrightarrow \mathfrak{n}_3(a,b,c),$$

tal que en la base $\{e_1, \dots, e_7\}$ está dado por,

$$\begin{aligned} f(e_i) &:= e_i, \quad i = 1,2,3,7. \\ f(e_4) &:= ae_4, \\ f(e_5) &:= be_5, \\ f(e_6) &:= ce_6. \end{aligned}$$

Se ve fácilmente que f es biyectiva si y sólo si $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, y f resulta morfismo pues,

$$\begin{aligned} [f(e_1), f(e_2)] &= [e_1, e_2] = -ae_4 = f(-e_4) = f([e_1, e_2]_1), \\ [f(e_1), f(e_3)] &= [e_1, e_3] = -be_5 = f(-e_5) = f([e_1, e_3]_1), \\ [f(e_2), f(e_3)] &= [e_2, e_3] = -ce_6 = f(-e_6) = f([e_2, e_3]_1), \end{aligned}$$

donde $[\cdot,\cdot]_1$ es el corchete de $\mathfrak{n}_3(1,1,1)$. El resto de los corchetes se mantienen iguales a 0, debido a que $f(e_i) = \alpha_i e_i$, con $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$, para todo $i = 1, \dots, 7$. Trabajemos entonces con $\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a,b,c)$. Consideremos la 3-forma

$$\varphi_3 = e^{123} + e^{145} + e^{167} + e^{246} - e^{257} - e^{347} - e^{356} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_3^*.$$

Notemos que φ_3 es positiva (ver Definición 3.1) pues si definimos $h_3 \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ como sigue,

$$h_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_3 \cdot e^{123} = h_3 \cdot e^1 \wedge h_3 \cdot e^2 \wedge h_3 \cdot e^3 = e^1 \wedge e^6 \wedge e^4 = -e^{146}.$$

Repitiendo esta idea se puede ver fácilmente que $h_3 \cdot \varphi_3 = \varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12). Es decir, φ_3 es positiva.

Tal como lo hicimos en el caso anterior, podemos calcular la derivada exterior de φ_3 (ver Definición 2.4), y obtendremos $d\varphi_3 = (a-b-c)e^{1237}$. Recordemos que cuando $d\varphi_3 = 0$, φ_3 se dice cerrada. Luego tenemos que φ_3 es cerrada si y sólo si $a = b + c$.

Queremos calcular $\Delta\varphi_3 := \Delta_{vp_3}\varphi_3$ para φ_3 cerrada (ver Definición 2.10). Las cuentas se simplifican un poco dado que

$$\Delta\varphi_3 = (-1)^3 d*d*\varphi_3 + (-1)^4 *d*d\varphi_3 = -d*d*\varphi_3 + *d*0 = -d*d*\varphi_3.$$

Haciendo las cuentas paso a paso obtenemos lo que sigue,

$$\begin{aligned} *\varphi_3 &= -e^{1247} - e^{1256} - e^{1346} + e^{1357} + e^{2345} + e^{2367} + e^{4567}, \\ d*\varphi_3 &= ae^{12567} - be^{13467} + ce^{23457}, \\ *d*\varphi_3 &= ce^{16} - be^{25} + ae^{34}, \\ d*d*\varphi_3 &= -(a^2+b^2+c^2)e^{123}. \end{aligned}$$

Al igual que en el caso de φ_2, se puede observar que φ_3 no es cocerrada pues $d*\varphi_3 = 0$ si y sólo si $a = b = c = 0$.

Recordemos que φ_3 es cerrada si y sólo si $a = b+c$, por ende si reemplazamos obtenemos que $\Delta\varphi_3 = 2(b^2+c^2+bc)e^{123}$. Nuevamente, como queremos ver cuándo $(\mathfrak{n}_3, \varphi_3)$ es solitón de Laplace, debemos encontrar $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\Delta\varphi_3 = \lambda\varphi_3 + \mathcal{L}_{X_D}\varphi_3$. Proponemos

$$D := (b^2+c^2+bc)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},$$

y $\lambda := 5(c^2+b^2+bc)$, entonces la derivada de Lie de φ_3 respecto del campo X_D resulta,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 = &-3(c^2+b^2+bc)e^{123} - 5(c^2+b^2+bc)e^{145} - 5(c^2+b^2+bc)e^{167} \\ &- 5(c^2+b^2+bc)e^{246} + 5(c^2+b^2+bc)e^{257} + 5(c^2+b^2+bc)e^{347} \\ &+ 5(c^2+b^2+bc)e^{356}. \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{L}_{X_D}\varphi_3 + \lambda\varphi_3 = 2(c^2+b^2+bc)e^{123} = \Delta\varphi_3$, que era lo que queríamos ver.

Proposición 4.3. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{n}_3(a,b,c)$ como antes, entonces*

(i) *φ_3 es cerrada si y sólo si $a = b+c$.*
(ii) *$(\mathfrak{n}_3(b+c,b,c), \varphi_3)$ es solitón de Laplace.*

Observación 4.4. Para todo $b, c \in \mathbb{R}^*$, el solitón de Laplace $(\mathfrak{n}_3(b+c,b,c), \varphi_3)$ es de expansión, dado que $\lambda > 0$, y no es una auto-forma pues $\Delta\varphi_3 \neq c\varphi_3$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Veamos ahora que existe una familia continua de solitones de Laplace en $\mathfrak{n}_3$ con la siguiente propiedad: ningún par de elementos de la familia es equivalente salvo múltiplo. Esto se contrapone a la unicidad conocida para solitones de Ricci en álgebras de Lie nilpotentes (ver [L1]).

Consideremos $b := 1 - t$, $c := t$, con $t \in (0, \frac{1}{2})$. Supongamos que existen $t_1, t_2 \in (0, \frac{1}{2})$ tales que $(\mathfrak{n}_3(b_1 + c_1, b_1, c_1), \varphi_3)$ y $(\mathfrak{n}_3(b_2 + c_2, b_2, c_2), \varphi_3)$ son equivalentes salvo un múltiplo no nulo $k \in \mathbb{R}$. Entonces, por Definicion 3.11 existe

$$f : (\mathfrak{n}_3(b_1 + c_1, b_1, c_1), \varphi_3) \to (\mathfrak{n}_3(kb_2 + kc_2, kb_2, kc_2), \varphi_3),$$

isomorfismo de álgebras de Lie tal que $f \cdot \varphi_3 = \varphi_3$. Luego, $f \in G_2 \subset \mathrm{SO}(7)$ (respecto de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_3}$, la métrica inducida por φ_3). En particular,

$$f : (\mathfrak{n}_3(b_1 + c_1, b_1, c_1), \langle \cdot, \cdot \rangle \varphi_3) \longrightarrow (\mathfrak{n}_3(kb_2 + kc_2, kb_2, kc_2), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\varphi_3}),$$

define una isometría. Luego, por Lema 2.17, debe cumplirse que $\mathrm{Ric}_{b_1,c_1} = f \, \mathrm{Ric}_{kb_2,kc_2} \, f^{-1}$. Como se tiene que

$$\mathrm{Ric}_{b,c} = \begin{bmatrix} -\frac{2b^2+c^2+2bc}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b^2+2c^2+2bc}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b^2+c^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{b^2+c^2+2bc}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se ve fácilmente que $\mathrm{Ric}_{b,c}$ tiene 3 autovalores positivos, uno nulo y 3 negativos para cada $b, c \in \mathbb{R}^*$. Por otro lado tenemos para todo $t \in (0, \frac{1}{2})$ que los autovalores positivos están ordenados de la siguiente manera:

$$\frac{t^2}{2} < \frac{1 - 2t + t^2}{2} < \frac{1}{2}.$$

En particular sucede para t_1, t_2, entonces

$$\frac{1}{2} = k^2 \frac{1}{2}, \quad \frac{1 - 2t_1 + t_1^2}{2} = k^2 \frac{1 - 2t_2 + t_2^2}{2}, \quad \frac{t_1^2}{2} = k^2 \frac{t_2^2}{2},$$

lo que implica que $k^2 = 1$ y $t_1 = t_2$.

Hemos entonces demostrado la siguiente proposición.

Proposición 4.5. *En $\mathfrak{n}_3$, existe una familia continua de solitones de Laplace tal que ningún par de elementos de la familia es equivalente salvo múltiplo.*

4.3. Caso $\mathfrak{n}_4$. Sea $\mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_4(a, b, c, d)$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7 con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = -be_6, \quad [e_2, e_4] = -ce_6, \quad [e_1, e_5] = -de_7,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$. Notemos que todas estas álgebras de Lie son isomorfas a $\mathfrak{n}_4(1, 1, 1, 1)$ con isomorfismo dado por

$$f : \mathfrak{n}_4(1, 1, 1, 1) \longrightarrow \mathfrak{n}_4(a, b, c, d),$$

definido en la base $\{e_1,\dots,e_7\}$ como sigue,

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i, \quad i=1,2,5.\\ f(e_3) &= ae_3,\\ f(e_4) &= \frac{ab}{c}e_4,\\ f(e_6) &= abe_6,\\ f(e_7) &= de_7. \end{aligned}$$

Es claro que f es biyectiva, dado que a,b,c,d son distintos de 0 y resulta morfismo pues

$$\begin{aligned} &[f(e_1),f(e_2)] = [e_1,e_2] = -ae_3 = -f(e_3) = f(-e_3) = f([e_1,e_2]_1),\\ &[f(e_1),f(e_3)] = [e_1,ae_3] = a[e_1,e_3] = -abe_6 = f(-e_6) = f([e_1,e_3]_1),\\ &[f(e_2),f(e_4)] = [e_2,\frac{ab}{c}e_4] = \frac{ab}{c}[e_2,e_4] = -\frac{ab}{c}ce_6 = f(-e_6) = f([e_2,e_4]_1),\\ &[f(e_1),f(e_5)] = [e_1,e_5] = -de_7 = f(-e_7) = f([e_1,e_5]_1), \end{aligned}$$

donde $[\cdot,\cdot]_1$ es el corchete de Lie de $\mathfrak{n}_4(1,1,1,1)$. Por otro lado si $[e_i,e_j]_1=0$, entonces $[e_i,e_j]=0$ y esto implica que $[fe_i,fe_j]=\alpha_i\alpha_j[e_i,e_j]=0=f([e_i,e_j]_1)$. Por lo tanto, vamos a trabajar con $\mathfrak{n}_4=\mathfrak{n}_4(a,b,c,d)$. Consideramos la 3-forma

$$\varphi_4 = -e^{124} - e^{456} + e^{347} + e^{135} + e^{167} + e^{257} - e^{236} \in \Lambda^3\mathfrak{n}_4^*.$$

Notemos que φ_4 es positiva (ver Definición 3.1) pues si definimos $h_4\in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ como

$$h_4 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_4\cdot(-e^{124}) = -h_4\cdot e^1\wedge h_4\cdot e^2\wedge h_4\cdot e^4 = -e^1\wedge -e^6\wedge e^4 = -e^{146}.$$

Repitiendo esta idea se puede ver fácilmente que $h_4\cdot\varphi_4=\varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12). Es decir, φ_4 es positiva.

Usando la Definición 2.4 y la propiedad (3), es fácil ver que

$$d\varphi_4 = (a-c)e^{1247} + (d-b)e^{1345},$$

tal como lo hicimos para $\mathfrak{n}_2$ y $\mathfrak{n}_3$. Por lo tanto φ_4 es cerrada si y sólo si $a=c$ y $b=d$.

Por otro lado, tenemos el operador Laplaciano asociado a $\mathfrak{n}_4$ dado por la Definición 2.10, $\Delta := \Delta_{\varphi_4}$, el cual procedemos a calcular en φ_4 como sigue,

$$\begin{aligned} *\varphi_4 &= e^{3567} + e^{1237} + e^{1256} - e^{2467} + e^{2345} + e^{1346} + e^{1457}, \\ d * \varphi_4 &= ae^{12567} - ce^{23457} + be^{12347} + de^{12456}, \\ *d * \varphi_4 &= ae^{34} - ce^{16} + be^{56} - de^{37}, \\ d * d * \varphi_4 &= (a^2 + c^2)e^{124} - (b^2 + d^2)e^{135} - bce^{245} - ade^{127}. \end{aligned}$$

Observemos que φ_4 no puede ser cocerrada, pues si sucediera que $d *\varphi_4 = 0$, entonces resultaría $a = b = c = d = 0$, y esto es una contradicción pues a, b, c, d son no nulos. Por otro lado, si φ_4 es cerrada ($d\varphi_4 = 0, a = c$ y $b = d$), se tiene que $\Delta\varphi_4 = -2a^2e^{124} + 2b^2e^{135} + abe^{245} + abe^{127}$.

Para ver que $(\mathfrak{n}_4, \varphi_4)$ es un solitón de Laplace, de acuerdo a (14) necesitamos mostrar que $\Delta\varphi_4 = \lambda\varphi_4 + \mathcal{L}_{X_D}\varphi_4$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, y algún $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_4)$. Si definimos

$$D := \begin{bmatrix} -b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2b^2 & 0 & 0 & 0 \\ -ab & 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -ab & 0 & 0 & -4b^2 \end{bmatrix},$$

y $\lambda = 9b^2$, y si además se cumple que $a^2 = 2b^2$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{X_D}\varphi_4 =& 5b^2e^{124} + 9b^2e^{456} - abe^{146} - 9b^2e^{347} - 7b^2e^{135} - 9b^2e^{167} \\ &+ abe^{146} - 9b^2e^{257} + abe^{127} + abe^{245} + 9b^2e^{236}. \end{aligned}$$

Luego, $\mathcal{L}_{X_D}\varphi_4 + 9b^2\varphi_4 = -4b^2e^{124} + 2b^2e^{135} + abe^{127} + abe^{245} = \Delta\varphi_4$, que era lo que queríamos ver.

Proposición 4.6. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{n}_4(a, b, c, d)$ como antes, entonces*

(i) *φ_4 es cerrada si y sólo si $a = c$ y $b = d$.*
(ii) *Si $a^2 = 2b^2$, entonces $(\mathfrak{n}_4(a, b, a, b), \varphi_3)$ es solitón de Laplace.*

Observación 4.7. Para todo $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $a^2 = 2b^2$, el solitón de Laplace $(\mathfrak{n}_4(a, b, a, b), \varphi_4)$ es de expansión, dado que $\lambda > 0$, y no es una auto-forma pues $\Delta\varphi_4 \neq c\varphi_4$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

4.4. Caso $\mathfrak{n}_5$. Sea $\mathfrak{n}_5 = \mathfrak{n}_5(a, b, c, d)$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7, con base $\{e_1, \dots, e_7\}$ y con corchete de Lie dado por

$$[e_1, e_2] = -ae_3, \quad [e_1, e_3] = -be_6, \quad [e_1, e_4] = -ce_7, \quad [e_2, e_5] = -de_7,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$. Todas estas álgebras de Lie son isomorfas a $\mathfrak{n}_5(1, 1, 1, 1)$ con isomorfismo

$$f : \mathfrak{n}_5(1, 1, 1, 1) \longrightarrow \mathfrak{n}_5(a, b, c, d),$$

definido en la base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ por

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i, \quad i = 1, 2, 4. \\ f(e_3) &= ae_3, \\ f(e_5) &= \frac{c}{d} e_5, \\ f(e_6) &= abe_6, \\ f(e_7) &= ce_7. \end{aligned}$$

Si $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ se tiene que f es biyectiva, y f es morfismo pues,

$$\begin{aligned} [f(e_1), f(e_2)] &= [e_1, e_2] = -ae_3 = f(-e_3) = f([e_1, e_2]_1), \\ [f(e_1), f(e_3)] &= a[e_1, e_3] = -abe_6 = f(-e_6) = f([e_1, e_3]_1), \\ [f(e_1), f(e_4)] &= [e_1, e_4] = -ce_7 = f(-e_7) = f([e_1, e_4]_1), \\ [f(e_2), f(e_5)] &= \frac{c}{d}[e_2, e_5] = -\frac{c}{d} de_7 = f(-e_7) = f([e_2, e_5]_1), \end{aligned}$$

donde $[\cdot, \cdot]_1$ es el corchete de $\mathfrak{n}_5(1, 1, 1, 1)$. Notemos que si $[e_i, e_j]_1 = 0$, entonces $[e_i, e_j] = 0$ y esto implica que $[fe_i, fe_j] = \alpha_i \alpha_j [e_i, e_j] = 0 = f([e_i, e_j]_1)$. Ahora que sabemos que son isomorfas, vamos a hacer las cuentas para $\mathfrak{n}_5 = \mathfrak{n}_5(a, b, c, d)$. Consideramos la 3-forma

$$\varphi_5 = e^{134} + e^{457} - e^{246} - e^{125} - e^{356} + e^{167} - e^{237} \in \Lambda^3 \mathfrak{n}_5^*.$$

Notemos que φ_5 es positiva (ver Definición 3.1) pues si definimos $h_5 \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ como

$$h_5 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_5 \cdot e^{134} = h_5 \cdot e^1 \wedge h_5 \cdot e^3 \wedge h_5 \cdot e^4 = h_5 e^1 \wedge h_5 e^3 \wedge h_5 e^4 = e^1 \wedge e^3 \wedge e^5 = e^{135}.$$

Repitiendo esta idea se puede ver fácilmente que $h_5 \cdot \varphi_5 = \varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12). Es decir, φ_5 es positiva.

No es difícil calcular la derivada exterior de φ_5 (ver Definición 2.4), y resulta $d\varphi_5 = (b - c)e^{1234} + (d - a)e^{1256}$. Es decir, φ_5 es cerrada si y sólo si $a = d$ y $b = c$.

Sea $\Delta := \Delta_{\varphi_5}$ el operador de Laplace asociado a $\mathfrak{n}_5$ dado por Definición 2.10, el cual calculamos en φ_5 cerrada como sigue,

$$\begin{aligned}
*\varphi_5 &= e^{2567} + e^{1236} - e^{1357} - e^{3467} - e^{1247} + e^{2345} - e^{1456},\\
d * \varphi_5 &= -be^{12357} + ce^{12456} - ae^{12467} + de^{23456},\\
*d * \varphi_5 &= be^{46} - ce^{37} + ae^{35} - de^{17},\\
d * d * \varphi_5 &= -(b^2 + c^2)e^{134} - ace^{127} - dce^{235} + (a^2 + d^2)e^{125}.
\end{aligned}$$

Notemos que φ_5 no puede ser cocerrada, ya que si lo fuera resultarían $a = b = c = d = 0$, lo cual es contradictorio. Por otro lado, si φ_5 es cerrada, tenemos que $d\varphi_5 = 0$, $a = d$ y $b = c$, por lo que resulta $\Delta\varphi_5 = 2b^2e^{134} + abe^{127} + abe^{235} - 2a^2e^{125}$.

Nos interesa saber bajo qué condiciones en a, b, c, d resulta $(\mathfrak{n}_5, [\cdot, \cdot])$ un solitón de Laplace. Es decir, que existan $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_5)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que satisfagan (14). Para ello hemos propuesto una matriz D dada por

$$D := \begin{bmatrix} -b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ ab & 0 & -3b^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3b^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2b^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4b^2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -ab & 0 & -4b^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_5),$$

y un número real $\lambda := 9b^2$, tales que si se cumple que $a^2 = 2b^2$, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}\varphi_5 = &- 7b^2e^{134} - 9b^2e^{457} + 9b^2e^{246} + 5b^2e^{125} + 9b^2e^{356} - abe^{156}\\
&- 9b^2e^{167} - abe^{165} + 9b^2e^{237} + abe^{127} + abe^{235}.
\end{aligned}$$

Luego $\mathcal{L}_{X_D}\varphi_5 + 9b^2\varphi_5 = 2b^2e^{134} - 4b^2e^{125} + abe^{127} + abe^235 = \Delta\varphi_5$, que era lo que queríamos ver.

Proposición 4.8. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{n}_5(a, b, c, d)$ como antes, entonces*

(i) *φ_5 es cerrada si y sólo si $a = d$ y $b = c$.*
(ii) *Si $a^2 = 2b^2$, entonces $(\mathfrak{n}_5(a, b, b, a), \varphi_5)$ es solitón de Laplace.*

Observación 4.9. Para todo $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $a^2 = 2b^2$, el solitón de Laplace $(\mathfrak{n}_5(a, b, b, a), \varphi_5)$ es de expansión, dado que $\lambda > 0$, y no es una auto-forma, pues $\Delta\varphi_5 \neq c\varphi_5$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

4.5. Caso $\mathfrak{n}_6$. Sea $\mathfrak{n}_6 = \mathfrak{n}_6(a, b, c, d)$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7, con base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ y corchete de Lie dado por

$$[e_1, e_2] = -ae_4, [e_1, e_3] = -be_5, [e_1, e_4] = -ce_6, [e_1, e_5] = -de_7,$$

con $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$. Al igual que en los casos anteriores tenemos un isomorfismo

$$f : \mathfrak{n}_6(1, 1, 1, 1) \longrightarrow \mathfrak{n}_6(a, b, c, d),$$

que está definido en la base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ como sigue,

$$\begin{aligned} f(e_i) &= e_i, \quad i = 1, 2, 3. \\ f(e_4) &= ae_4, \\ f(e_5) &= be_5, \\ f(e_6) &= ace_6, \\ f(e_7) &= bde_7. \end{aligned}$$

Se ve claro que f es biyectiva, ya que a, b, c, d son distintos de 0, y f es morfismo pues,

$$\begin{aligned} [f(e_1), f(e_2)] &= [e_1, e_2] = -ae_4 = f(-e_4) = f([e_1, e_2]_1), \\ [f(e_1), f(e_3)] &= [e_1, e_3] = -be_5 = f(-e_5) = f([e_1, e_3]_1), \\ [f(e_1), f(e_4)] &= [e_1, ae_4] = -ace_6 = f(-e_6) = f([e_1, e_4]_1), \\ [f(e_1), f(e_5)] &= [e_1, be_5] = -bde_7 = f(-e_7) = f([e_1, e_5]_1), \end{aligned}$$

donde $[\cdot, \cdot]_1$ es el corchete de Lie de $\mathfrak{n}_6(1, 1, 1, 1)$. Al igual que en los caso anteriores, se tiene que como $f(e_j) = \alpha_j e_j$, con $\alpha_j \in \mathbb{R}^*$ para todo $j = 1, \ldots, 7$, entonces si $[e_i, e_k] = 0$ se tiene $[f(e_i), f(e_k)] = [\alpha_i e_i, \alpha_k e_k] = \alpha_i \alpha_k [e_i, e_k] = 0 = f([e_i, e_k]_1)$. Ahora que ya sabemos que son isomorfas vamos a seguir trabajando con $\mathfrak{n}_6 = \mathfrak{n}_6(a, b, c, d)$, y vamos a considerar la 3-forma

$$\varphi_6 = e^{123} + e^{347} + e^{356} + e^{145} - e^{246} + e^{167} + e^{257} \in \Lambda^3 \mathfrak{n}_6^*.$$

Notemos que φ_6 es positiva (ver Definición 3.1) pues si definimos $h_6 \in \mathrm{GL}_7(\mathbb{R})$ como

$$h_6 := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_6 \cdot e^{123} = h_6 \cdot e^1 \wedge h_6 \cdot e^2 \wedge h_6 \cdot e^3 = h_6 e^1 \wedge h_6 e^2 \wedge h_6 e^3 = -e^1 \wedge e^5 \wedge e^3 = e^{135}.$$

Repitiendo esta idea se puede ver fácilmente que $h_6 \cdot \varphi_6 = \varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12). Es decir, φ_6 es positiva.

Sea $d\varphi_6$ la derivada exterior de φ_6 (ver Definición 2.4), es fácil ver que $d\varphi_6 = (b - a)e^{1237} + (d - c)e^{1345}$. Luego se tiene que φ_6 es cerrada si y sólo si $a = b$ y $c = d$.

Podemos calcular $\Delta := \Delta_{\varphi_6}$ en φ_6, donde si φ_6 es cerrada está definido como $\Delta\varphi_6 = -d{*}d{*}\varphi_6$ (ver Definición 2.10). Haciendo las cuentas se obtiene lo que sigue,

$$\begin{aligned}
*\varphi_6 &= e^{4567} + e^{1256} + e^{1247} + e^{2367} - e^{1357} + e^{2345} + e^{1346},\\
d*\varphi_6 &= ae^{12567} - be^{13467} + ce^{12347} - de^{12356},\\
d\varphi_6 &= ae^{34} - be^{25} + ce^{56} - de^{47},\\
d*d*\varphi_6 &= -(a^2+b^2)e^{123} + bce^{136} - ade^{127} - (c^2+d^2)e^{145}.
\end{aligned}$$

De lo anterior se ve claro que φ_6 no puede ser cocerrada, porque esto implicaría que $a = b = c = d = 0$. Por otro lado si φ_6 es cerrada, sabíamos que $a = b$ y $c = d$, entonces $\Delta\varphi_6 = 2a^2e^{123} + 2c^2e^{145} - ace^{136} + ace^{127}$. Si definimos

$$D := \begin{bmatrix} -(1/2)a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -a^2 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -(3/2)a^2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -(3/2)a^2 & 0 & 0\\ 0 & ac & 0 & 0 & 0 & -2a^2 & 0\\ 0 & 0 & ac & 0 & 0 & 0 & -2a^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_6),$$

y $\lambda := (9/2)a^2$, y si además se cumple que $a^2 = 2c^2$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}\varphi_6 =& -(5/2)a^2e^{123} - (9/2)a^2e^{347} - (9/2)a^2e^{356} + ace^{235}\\
&- (7/2)a^2e^{145} + (9/2)a^2e^{246} - (9/2)a^2e^{167} + ace^{127}\\
&- ace^{136} - (9/2)a^2e^{257} - ace^{235}.
\end{aligned}$$

Luego se tiene que

$$\mathcal{L}_{X_D}\varphi_6 + (9/2)a^2\varphi_6 = 2a^2e^{123} + a^2e^{145} + ace^{127} - ace^{136} = \Delta\varphi_6,$$

que era lo que queríamos ver.

Proposición 4.10. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{n}_6(a, b, c, d)$ como antes, entonces*

(i) *φ_6 es cerrada si y sólo si $a = b$ y $c = d$.*
(ii) *Si $a^2 = 2c^2$, entonces $(\mathfrak{n}_6(a, a, c, c), \varphi_6)$ es solitón de Laplace.*

Observación 4.11. Para todo $a, c \in \mathbb{R}^*$ tales que $a^2 = 2c^2$, el solitón de Laplace encontrado $(\mathfrak{n}_6(a, a, c, c), \varphi_6)$ es de expansión, dado que $\lambda > 0$ y no es una auto-forma pues para todo $c \in \mathbb{R}$ sucede que $\Delta vp_6 \neq c\varphi_6$.

4.6. Caso $\mathfrak{n}_7$. Sea $\mathfrak{n}_7 = \mathfrak{n}_7(a, b, c, d, e)$ el álgebra de Lie nilpotente de dimensión 7, con base $\{e_1, \ldots, e_7\}$ y con corchete de Lie definido por

$$[e_1, e_2] = -ae_4, [e_1, e_3] = -be_5, [e_1, e_4] = -ce_6, [e_2, e_3] = -de_6, [e_1, e_5] = -ee_7,$$

con $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^*$. Para nuestra conveniencia, vamos a hacer un cambio de base de la siguiente manera

$$\{x_1 := e_2 + e_7, x_2 := e_3 + e_6, x_3 := e_7, x_4 := e_6, x_5 := e_5, x_6 := e_4, x_7 := e_1\}.$$

Luego, el corchete resultante es

$$\begin{aligned}
[x_1, x_2] &= [e_2 + e_7, e_3 + e_6] = -de_6 = -dx_4,\\
[x_1, x_7] &= [e_2 + e_7, e_1] = ae_4 = ax_6,\\
[x_2, x_7] &= [e_3 + e_6, e_1] = be_5 = bx_5,\\
[x_5, x_7] &= [e_5, e_1] = ee_7 = ex_3,\\
[x_6, x_7] &= [e_4, e_1] = ce_6 = cx_4.
\end{aligned}$$

Renombrando a a, b, c, d, e podemos poner

$$[x_1, x_2] = -ax_4, \quad [x_1, x_7] = -bx_6, \quad [x_2, x_7] = -cx_5,$$
$$[x_5, x_7] = -dx_3, \quad [x_6, x_7] = -ex_4.$$

Y para simplificar notación vamos a llamar $\mathfrak{g}_7(a, b, c, d, e)$ a esta nueva álgebra de Lie con base $\{x_1, \dots, x_7\}$. Análogamente a como lo hicimos en los casos anteriores, tenemos un isomorfismo entre $\mathfrak{g}_7(a, b, c, d, e)$ y $\mathfrak{g}_7(1, 1, 1, 1, 1)$ dado por

$$f : \mathfrak{g}_7(1, 1, 1, 1, 1) \longrightarrow \mathfrak{g}_7(a, b, c, d, e),$$

tal que en la base $\{x_1, \dots, x_7\}$ está definido como sigue,

$$\begin{aligned}
f(x_i) &= x_i, \quad i = 1, 7.\\
f(x_2) &= \frac{be}{a} x_2,\\
f(x_3) &= \frac{bcde}{a} x_3,\\
f(x_4) &= bex_4,\\
f(x_5) &= \frac{bce}{a} x_5,\\
f(x_6) &= bx_6.
\end{aligned}$$

Se ve claro que f es biyectiva si $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}^*$, y f es morfismo pues

$$\begin{aligned}
[f(x_1), f(x_2)] &= \frac{be}{a}[x_1, x_2] = -\frac{be}{a} ax_4 = f(-x_4) = f([x_1, x_2]_1),\\
[f(x_1), f(x_7)] &= [x_1, x_7] = -bx_6 = f(-x_6) = f([x_1, x_7]_1),\\
[f(x_2), f(x_7)] &= \frac{be}{a}[x_2, x_7] = -\frac{bce}{a} x_5 = f(-x_5) = f([x_2, x_7]_1),\\
[f(x_5), f(x_7)] &= \frac{bce}{a}[x_5, x_7] = -\frac{bcde}{a} x_3 = f(-x_3) = f([x_5, x_7]_1),\\
[f(x_6), f(x_7)] &= b[x_6, x_7] = -bex_4 = f(-x_4) = f([x_6, x_7]_1).
\end{aligned}$$

Por otro lado si $[e_i, e_j]_1 = 0$, entonces $[e_i, e_j] = 0$ y esto implica que $[fe_i, fe_j] = [\alpha_i e_i, \alpha_j e_j] = \alpha_i \alpha_j [e_i, e_j] = 0 = f([e_i, e_j]_1)$, donde $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{R}^*$.

$$\varphi_7 = x^{127} + x^{135} - x^{146} - x^{236} - x^{245} + x^{347} + x^{567} \in \Lambda^3 \mathfrak{g}_7^*.$$

Notemos que φ_7 es positiva (ver Definición 3.1) pues $\varphi_7 = \varphi_0$, donde φ_0 es la dada por (12).

Fácilmente podemos calcular $d\varphi_7 = (-a-b-c)e^{1237} + (-d+e)e^{2567}$, y así obtener que φ_7 es cerrada si y sólo si $a = -b-c$ y $d = e$. Por otro lado, tenemos el operador Laplaciano asociado a $[\cdot,\cdot]$, dado por 2.10, $\Delta := -d*d* + *d*d$, el cual procedemos a calcular en φ_7 como sigue,

$$\begin{aligned}
*\varphi_7 &= x^{1234} + x^{1256} + x^{1367} + x^{1457} + x^{2357} - x^{2467} + x^{3456},\\
d*\varphi_7 &= -ax^{12356} - ex^{12367} + dx^{12457} + bx^{13457} - cx^{23467},\\
d\varphi_7 &= cx^{15} - bx^{26} + dx^{36} - ex^{45} - ax^{47},\\
d*d*\varphi_7 &= -aex^{125} - (a^2+b^2+c^2)x^{127} + bdx^{137} - cex^{247} - (d^2+e^2)x^{567}.
\end{aligned}$$

Observemos que φ_7 no puede ser cocerrada, pues si sucediera que $d*\varphi_7 = 0$, entonces resultaría que $a = b = c = d = e = 0$, y esto es una contradicción pues $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}^*$. Por otro lado, si φ_7 es cerrada ($d\varphi_7 = 0, a = b+c$ y $d = e$), se tiene que

$$\Delta\varphi_7 = -(b+c)ex^{125} + (2b^2+2c^2+2bc)x^{127} - bex^{137} + cex^{247} + 2e^2x^{567}.$$

Para ver que $(\mathfrak{g}_7,\varphi_7)$ es un solitón de Laplace, de acuerdo a (14) necesitamos mostrar que $\Delta\varphi_7 = \lambda\varphi_7 + \mathcal{L}_{X_D}\varphi_7$, para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, y algún $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_7)$. Si definimos $\alpha := \frac{b^2+c^2+bc}{2}, \lambda := 9\alpha$ y

$$D := \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -be & -4\alpha & 0 & 0 & 0 & 0\\ -ce & 0 & 0 & -4\alpha & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha & 0 & -e(b+c)\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Y si además pedimos que se cumpla $e^2 = \alpha$. Entonces resulta

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}\varphi_7 = &-5\alpha x^{127} - 9\alpha x^{135} - bex^{125} - (b+c)ex^{137} + 9\alpha x^{146}\\
&+ 9\alpha x^{236} + 9\alpha x^{245} - cex^{125} + (b+c)ex^{247} - 9\alpha x^{347}\\
&- bex^{247} + cex^{137} - 7\alpha x^{567}.
\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{X_D}\varphi_7 + 9\alpha\varphi_7 &= 4\alpha x^{127} - (b+c)ex^{125} + (b+c)ex^{247} - bex^{247}\\
&\quad - bex^{137} + 2\alpha x^{567}\\
&= 2(b^2+c^2+bc)x^{127} - (b+c)ex^{125} + cex^{247}\\
&\quad - bcex^{137} + 2e^2x^{567}\\
&= \Delta\varphi_7.
\end{aligned}$$

Es decir, $(\mathfrak{g}_7,\varphi_7)$ es solitón de Laplace.

Proposición 4.12. *Sean $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}^*$ y $\mathfrak{g}_7(a,b,c,d,e)$ como antes, entonces*

(i) *φ_7 es cerrada si y sólo si $a = -b-c$ y $d = e$.*

(ii) *Si* $e^2 = \frac{b^2+c^2+bc}{2}$, *entonces* $(\mathfrak{g}_7(b+c,b,c,e,e),\varphi_7)$ *es solitón de Laplace.*

Observación 4.13. Para todos $b,c,e \in \mathbb{R}^*$ tales que $e^2 = \frac{b^2+c^2+bc}{2}$, el solitón de Laplace encontrado $(\mathfrak{g}_7(b+c,b,c,e,e),\varphi_7)$ es de expansión, dado que $\lambda > 0$, y no es una auto-forma pues $\Delta\varphi_7 \neq c\varphi_7$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

5. Solitones de Ricci en las $\mathfrak{n}_i's$

Dadas las álgebras de Lie $\mathfrak{n}_i$ y las 3-formas φ_i de la sección anterior, en esta sección estudiaremos cuándo dicha álgebra con el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_i}$ inducido por φ_i es solitón de Ricci. Una vez obtenidas las condiciones para que $(\mathfrak{n}_i,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_i})$ sea solitón de Ricci vamos a compararlas con las condiciones para que $(\mathfrak{n}_i,\varphi_i)$ sea solitón de Laplace.

Cabe aclarar que las álgebras de Lie nilpotentes que admiten solitones de Ricci ya han sido clasificadas en dimensión 6 en [W1], [W2], y en dimensión 7 en [FC1] y [FC2].

En [FFM], Fernández, Fino y Manero estudian la existencia de G_2-estructuras cerradas invariantes a izquierda que definen una métrica que es solitón de Ricci en grupos simplemente conexos, no abelianos y nilpotentes. Según estos resultados sabemos lo siguiente, dadas las álgebras del Cuadro 1:

(i) Cada álgebra de Lie $\mathfrak{n}_i$, $i = 3,5,7,8,11$, tiene un producto interno que es solitón de Ricci, pero ninguna G_2-estructura que determine el producto interno es cerrada.
(ii) $\mathfrak{n}_2,\mathfrak{n}_4,\mathfrak{n}_6,\mathfrak{n}_{12}$ son las únicas álgebras de Lie s-pasos nilpotente, $s = 2,3$, con un producto interno que es solitón de Ricci, determinado por una G_2-estructura cerrada.
(iii) El caso $\mathfrak{n}_{10}$ está abierto.

Nuestros resultados concuerdan con éstos de [FFM].

5.1. Caso $\mathfrak{n}_2$. Sean $\mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_2(a,b)$ y φ_2 como en Sección 4.1, y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ el producto interno inducido por φ_2, nos interesa saber bajo qué condiciones para a y b, $(\mathfrak{n}_2,\langle\cdot,\cdot\rangle_2)$ es solitón de Ricci. Para eso necesitamos encontrar una derivación $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_2)$ y un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\mathrm{Ric} = \lambda I + D$ (ver (6)), donde I es la matriz identidad de dimensión 7. Por un lado, usando (5), tenemos que

$$\mathrm{Ric} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(a^2+b^2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que se entienda mejor cómo calculamos Ric, vamos a hacer un ejemplo. En principio recordemos por la ecuación (5) que $[\mathrm{Ric}]_{ij} = \langle \mathrm{Ric}\, e_i, e_j\rangle$.

En particular tenemos que,

$$
\begin{aligned}
[\mathrm{Ric}]_{11} &= \langle \mathrm{Ric}\, e_1, e_1 \rangle, \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_1, e_i], e_j\rangle\langle [e_1, e_i], e_j\rangle + \frac{1}{4}\sum_{ij}\langle [e_i, e_j], e_1\rangle\langle [e_i, e_j], e_1\rangle, \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{ij}\langle [e_1, e_i], e_j\rangle^2 + \frac{1}{4}\sum_{ij}\langle [e_i, e_j], e_1\rangle^2, \\
&= -\frac{1}{2}(\langle [e_1, e_2], e_5\rangle^2 + \langle [e_1, e_3], e_6\rangle^2), \\
&= -\frac{1}{2}(a^2 + b^2), \\
&= -\frac{a^2 + b^2}{2}.
\end{aligned}
$$

Análogamente se puede calcular $[\mathrm{Ric}]_{jj}$ y se ve fácilmente que $[\mathrm{Ric}]_{ij} = 0$ para todo $i \neq j$. Ahora que tenemos Ric debemos encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $D := \mathrm{Ric} - \lambda I$ sea derivación. Es decir que para todo $i, j = 1, \dots, 7$ se cumpla

$$
\begin{aligned}
D[e_i, e_j] &= [De_i, e_j] + [e_i, De_j], \\
(\mathrm{Ric} - \lambda I)[e_i, e_j] &= [(\mathrm{Ric} - \lambda I)e_i, e_j] + [e_i, (\mathrm{Ric} - \lambda I)e_j], \\
\mathrm{Ric}[e_i, e_j] - \lambda[e_i, e_j] &= [\mathrm{Ric}\, e_i, e_j] + [e_i, \mathrm{Ric}\, e_j] - \lambda[e_i, e_j] - \lambda[e_i, e_j], \\
\lambda[e_i, e_j] &= [\mathrm{Ric}\, e_i, e_j] + [e_i, \mathrm{Ric}\, e_j] - \mathrm{Ric}[e_i, e_j].
\end{aligned}
$$

En este caso, como Ric es diagonal, la condición anterior es equivalente a que para todo $i, j = 1, \dots, 7$ se cumpla lo siguiente,

$$
\lambda[e_i, e_j] = (\mathrm{Ric}_{ii} + \mathrm{Ric}_{jj})[e_i, e_j] - \mathrm{Ric}[e_i, e_j]. \tag{16}
$$

Luego, como todos los corchetes son nulos salvo $[e_1, e_2] = -ae_5$ $[e_1, e_3] = -be_6$, entonces sólo necesitaríamos que

$$
\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = -\frac{3}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2, \\
\lambda &= -\frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}b^2 = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{3}{2}b^2.
\end{aligned}
$$

Es decir, necesitamos que $a^2 = b^2$, y bajo esta condición resulta $\lambda = -2a^2$. Si ahora reemplazamos en $D := \mathrm{Ric} - \lambda I$ tenemos

$$
D = \begin{bmatrix}
a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2
\end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_2).
$$

Proposición 5.1. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{n}_2(a, b)$ y φ_2 definidas como Sección 4.1,entonces $(\mathfrak{n}_2(a, b), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_2})$ es solitón de Ricci si y sólo si $a^2 = b^2$. Donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_2}$ es el producto interno inducido por φ_2.*

Observación 5.2. Para todo $a \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{n}_2(a,a)$ es tal que $(\mathfrak{n}_2(a,a), \varphi_2)$ es solitón de Laplace y $(\mathfrak{n}_2(a,a), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_2})$ es solitón de Ricci

5.2. Caso $\mathfrak{n}_3$. Sean $\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_3(a,b,c)$ y φ_3 como en Sección 4.2, queremos saber cuándo $\mathfrak{n}_3$ admite un solitón de Ricci con la estructura dada por el producto interno inducido por φ_3. Para ello necesitamos determinar cuándo existen $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\mathrm{Ric} = \lambda I + D$.

Usando la fórmula dada por (5) podemos calcular Ric y resulta

$$\mathrm{Ric} = \begin{bmatrix} -\frac{a^2+b^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a^2+c^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{b^2+c^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a^2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{b^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{c^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para que $D := \mathrm{Ric} - \lambda I$ sea derivación, al igual que como lo hicimos en (16) vamos a necesitar lo siguiente,

$$\lambda = (\mathrm{Ric}_{11} + \mathrm{Ric}_{22}) - \mathrm{Ric}_{44} = (-\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{a^2+c^2}{2}) - \frac{a^2}{2} = -\frac{3a^2+b^2+c^2}{2},$$
$$\lambda = (\mathrm{Ric}_{11} + \mathrm{Ric}_{33}) - \mathrm{Ric}_{55} = (-\frac{a^2+b^2}{2} - \frac{b^2+c^2}{2}) - \frac{b^2}{2} = -\frac{a^2+3b^2+c^2}{2},$$
$$\lambda = (\mathrm{Ric}_{22} + \mathrm{Ric}_{33}) - \mathrm{Ric}_{66} = (-\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2+c^2}{2}) - \frac{c^2}{2} = -\frac{a^2+b^2+3c^2}{2}.$$

Es decir, D será derivación si y sólo si $a^2 = b^2 = c^2$, por lo que resulta $\lambda = -\frac{5}{2}a^2$. Reemplazando en $D = \mathrm{Ric} - \lambda I$ nos queda

$$D = \begin{bmatrix} \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_3),$$

tal que $\mathrm{Ric} = \lambda I + D$. Por lo tanto $(\mathfrak{n}_3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_3})$ es solitón de Ricci.

Proposición 5.3. *Si $a,b,c \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{n}_3(a,b,c)$ y φ_3 son como en Sección 4.2, entonces $\mathfrak{n}_3(a,b,c)$ es solitón de Ricci si y sólo si $a^2 = b^2 = c^2$.*

Observación 5.4. No existen $a,b,c \in \mathbb{R}^*$ tales que $(\mathfrak{n}_3(a,b,c), \varphi_3)$ sea solitón de Laplace (con φ_3 cerrada) y $(\mathfrak{n}_3(a,b,c), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_3})$ sea solitón de Ricci, pues las condiciones para que ambas cosas sucedan son incompatibles.

5.3. Caso $\mathfrak{n}_4$. Sean $\mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_4(a,b,c,d)$ y φ_4 como en Sección 4.3, y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_4}$ la métrica inducida por φ_4. Queremos ver si $(\mathfrak{n}_4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_4})$ es solitón de Ricci, análogo a como lo hicimos en los casos $\mathfrak{n}_2$ y $\mathfrak{n}_3$. Tenemos que

$$\mathrm{Ric} = \mathrm{Diag}\left(-\frac{a^2+b^2+d^2}{2}, -\frac{a^2+c^2}{2}, \frac{a^2-b^2}{2}, -\frac{c^2}{2}, -\frac{d^2}{2}, \frac{b^2+c^2}{2}, \frac{d^2}{2}\right).$$

Luego, $D := \mathrm{Ric} - \lambda I \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_4)$ si y sólo si $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$ y $\lambda = -\frac{5}{2}a^2$. Y resulta

$$D = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_4).$$

Es decir, $(\mathfrak{n}_4, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_4})$ es solitón de Ricci.

Proposición 5.5. *Sean $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$, entonces $(\mathfrak{n}_4(a,b,c,d), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_4})$ es solitón de Ricci si y sólo si $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$.*

Observación 5.6. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$ tales que $(\mathfrak{n}_4(a,b,a,b), \varphi_4)$ es el solitón de Laplace dado por Proposición 4.6, , entonces $(\mathfrak{n}_4(a,b,a,b), \langle\cdot,\cdot\rangle_{vp_4})$ no es solitón de Ricci.

5.4. Caso $\mathfrak{n}_5$. Si tenemos $(\mathfrak{n}_5, \varphi_5)$ como en Sección 4.4 y si $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_5}$ denota el producto interno inducido por φ_5 que hace del conjunto $\{e_1, \dots, e_7\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^7$. Se puede calcular fácilmente

$$\mathrm{Ric} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -a^2-b^2-c^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2-d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c^2+d^2 \end{bmatrix}$$

y entonces para que $D := \mathrm{Ric} - \lambda I$ sea derivación con $\lambda \in \mathbb{R}$ necesitamos que,

$$\lambda = -\frac{13}{6}a^2, \quad b^2 = \frac{4}{3}a^2, \quad c^2 = \frac{1}{3}a^2, \quad d^2 = a^2.$$

Y en ese caso resulta que

$$D = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{6}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{3}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6}a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{17}{6}a^2 \end{bmatrix}$$

es derivación y junto con $\lambda = -\frac{13}{6}a^2$ cumplen que $\mathrm{Ric} = \lambda I + D$. Luego $(\mathfrak{n}_5, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_5})$ es solitón de Ricci.

Proposición 5.7. *Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{n}_5(a, b, c, d)$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_5}$ como arriba, entonces $(\mathfrak{n}_5(a, b, c, d), \langle\cdot,\cdot\rangle\varphi_5)$ es solitón de Ricci si y sólo si $a^2 = \frac{3}{4}b^2 = 3c^2 = d^2$.*

Observación 5.8. Sean $a, b \in \mathbb{R}^*$, tales que $(\mathfrak{n}_5(a, b, b, a), \varphi_5)$ es el solitón de Laplace dado por Proposición 4.8, entonces $(\mathfrak{n}_5(a, b, b, a), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_5})$ no es solitón de Ricci.

5.5. Caso $\mathfrak{n}_6$. Sean $\mathfrak{n}_6 = \mathfrak{n}_6(a, b, c, d)$ y φ_6 como en Sección 4.5, queremos saber cuándo $\mathfrak{n}_6$ admite un solitón de Ricci con la estructura dada por el producto interno inducido por φ_6. Para ello necesitamos determinar cuándo existen $D \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n}_6)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $\mathrm{Ric} = \lambda I + D$. Por Definición 5 tenemos que

$$\mathrm{Ric} := -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} a^2+b^2+c^2+d^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2+c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b^2+d^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -d^2 \end{bmatrix}.$$

Para que $D := \mathrm{Ric} - \lambda I$ sea derivación, necesitamos que $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$, y a partir de ello podemos definir:

$$D := \begin{bmatrix} \frac{1}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2a^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2}a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a^2 \end{bmatrix},$$

y $\lambda := -5a^2$, que satisfacen la ecuación $\mathrm{Ric} = D + \lambda I$. Luego nos queda que $(\mathfrak{n}_6, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_6})$ es solitón de Ricci, donde $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_6}$ es el producto interno que hace de $\{e_1, \ldots, e_7\}$ una base ortonormal.

Proposición 5.9. *Sean* $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$, $\mathfrak{n}_6(a,b,c,d)$ *y* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_6}$ *como arriba, entonces* $(\mathfrak{n}_6(a,b,c,d),\langle\cdot,\cdot\rangle\varphi_6)$ *es solitón de Ricci si y sólo si* $a^2=b^2=c^2=d^2$.

Observación 5.10. Dados $a,c \in \mathbb{R}^*$, tal que $(\mathfrak{n}_6(a,a,c,c),\varphi_6)$ es el solitón de Laplace dado por Proposición 4.10, entonces $(\mathfrak{n}_6(a,a,c,c),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_6})$ no es solitón de Ricci.

5.6. Caso $\mathfrak{n}_7$. Si tomamos $\mathfrak{g}_7 \simeq \mathfrak{n}_7$ y φ_7 como en Sección 4.6, y sea $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_7}$ el producto interno que hace de $\{x_1,\dots,x_7\}$ una base ortonormal para $\mathbb{R}^7$. Entonces podemos calcular

$$\mathrm{Ric} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Diag}(a^2+b^2, a^2+c^2, -d^2, -a^2-e^2, d^2-c^2, e^2-b^2, b^2+c^2+d^2+e^2).$$

Si se cumple $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2$, podemos definir,

$$D := \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2}e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4e^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_7),$$

y $\lambda := -3e^2$. Haciendo la cuenta obtenemos que $\mathrm{Ric} := \lambda I + D$, por lo que resulta $(\mathfrak{g}_7,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_7})$ solitón de Ricci.

Proposición 5.11. *Sean* $a,b,c,d,e \in \mathbb{R}^*$, *y sean* $\mathfrak{g}_7(a,b,c,d,e)$ *y* $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_7}$ *como arriba, entonces* $(\mathfrak{g}_7(a,b,c,d,e),\langle\cdot,\cdot\rangle_{\varphi_7})$ *es solitón de Ricci si y sólo si* $a^2=b^2=c^2=d^2=e^2$.

Observación 5.12. Dados $b,c,e \in \mathbb{R}^*$ tales que $(\mathfrak{g}_7(b+c,b,c,e,e),\varphi_7)$ es el solitón de Laplace dado por Proposición 4.12, resulta que $(\mathfrak{g}_7(b+c,b,c,e,e),\varphi_7)$ no es solitón de Ricci.

6. Apéndice

La siguiente tabla contiene información estructural sobre cada una de las álgebras de Lie $\mathfrak{n}_i$, para $i=2,\dots,12$.

$\mathfrak{g}$	$\dim(C^1(\mathfrak{g}))$	$\dim(C^2(\mathfrak{g}))$	$\dim(C^3(\mathfrak{g}))$	$\dim(C^4(\mathfrak{g}))$	$\dim(Z_{\mathfrak{g}})$	$\dim(Der(\mathfrak{g}))$
$\mathfrak{n}_2$	2	0	0	0	4	27
$\mathfrak{n}_3$	3	0	0	0	4	25
$\mathfrak{n}_4$	3	1	0	0	2	19
$\mathfrak{n}_5$	3	1	0	0	2	18
$\mathfrak{n}_6$	4	2	0	0	2	19
$\mathfrak{n}_7$	4	2	0	0	2	17
$\mathfrak{n}_8$	5	4	2	1	1	12
$\mathfrak{n}_9$	5	4	2	1	1	11
$\mathfrak{n}_{10}$	4	3	1	0	1	13
$\mathfrak{n}_{11}$	4	3	1	0	1	12
$\mathfrak{n}_{12}$	4	1	0	0	1	15

Referencias

[Be] M. Berger, Sur les groupes d'holonomie homogène des variétés à conexion affines et des variétés riemannienes, *Bull. Soc. Math. Fr.* **83** (1955), 279-330.

[B1] R. Bryant, Metrics with exceptional holonomy, *Ann. of Math.* **126** (1987), 525-576.

[B2] R. Bryant, Some remarks on G_2-structures, *Proc. Gökova Geometry-Topology Conference* (2005), 75-109.

[BS] R. Bryant, S. Salamon, On the construction of some complete metrics with special holonomy. *Duke Math. J.* **58** (1989), 829-850.

[CF] D. Conti, M. Fernández, Nilmanifolds with a calibrated G_2-structure, *Diff. Geom. Appl.* **29** (2011), 493-506.

[FC1] E. Fernández-Culma, Classification of 7-dimensional Einstein nilradicals, *Transform. Groups*, **17**(2012)639-656.

[FC2] E. Fernández-Culma, Classification of Nilsoliton metrics in dimension seven,*J. Geom. Phys.*, **86** (2014) 164-179.

[FG] M. Fernández, A. Gray, Riemannian manifolds with structural group G_2, *Ann. Mat. Pura Appl.* (IV) **32** (1982), 19-45.

[FFM] M. Fernández, A. Fino, V. Manero, Laplacian flow of closed G_2-structures inducing nilsolitons, *J. Geom. Anal.*, in press (arXiv).

[J] D. D. Joyce, Compact Riemannian 7-manifolds with holonomy G_2, *I and II. J. Diff. Geom.*, **43** (1996) 291-328 y 329-375.

[K] A. G. Kovalev, Twisted connected sums and special Riemannian holonomy, *J. Reine Angew. Math.*, **565** (2003), 125-160.

[LL] R. Lafuente, J. Lauret, On homogeneous Ricci solitons, *Quart. J. Math.* **65** (2014), 399-419.

[L1] J. Lauret, Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, *Math. Ann.* **319** (2001), 715-733.

[L2] J. Lauret, Geometric flows and their solitons on homogeneous spaces, preprint 2015 (arXiv).

[LW] J. Lauret, C.E. Will, On the diagonalization of the Ricci flow on Lie groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **141** (2013), 3651-3663.

[LoW] J. Lotay, Y. Wei, Laplacian flow for closed G_2 structures: Shi-type estimates, uniqueness and compactness, preprint 2015 (arXiv).

[P] P. Petersen, Riemannian geometry, *GTM 171, Springer* (1998).

[W] F. Warner Foundations of diffetentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag (1983).

[W1] C. Will, Rank-one Einstein solvmanifolds of dimension 7, *Diff. Geom. Appl.*, **19** (2003), 307-318.

[W2] C. Will, The space of solvsolitons in low dimensions, *Ann. Glob. Anal. Geom.*, **40** (2011) 291-309.