EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VI JORNADAS (1996)

Marisa Velasco
Aarón Saal
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Silvia Rivera
U.B.A. / Conicet

LUDWIG WITTGENSTEIN Y LOS FUNDAMENTOS DE LA MATEMATICA

La reflexión en torno a los principios de la matemática ocupó siempre un lugar destacado en el pensamiento y la obra de Ludwig Wittgenstein. De esto dan cuenta tanto sus escritos específicos sobre el tema[1], como los extensos comentarios que acerca de las proposiciones matemáticas se incluyen en el Tractatus, la Gramática Filosófica y las Investigaciones Filosóficas.

François Schmitz, en la introducción de su libro Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques remite a la ponencia presentada por Waismann en el Congreso de Königsberg de 1930, para mostrar la importancia de la propuesta wittgensteiniana que, a comienzos de los años treinta, se perfilaba como una cuarta posición en filosofía de la matemática, alternativa tanto al logicismo como al formalismo y al intuicionismo[2]. Sin embargo, el propio Schmitz reonoce que aunque precedida de tal reputación, la publicación de Observaciones a los fundamentos de la matemática decepcionó a los lectores, al no satisfacer sus expectativas. En primer lugar porque Wittgenstein no entra allí en las tradicionales disquisiciones técnicas que fascinan a lógicos y matemáticos. Por el contrario, en esa obra se limita a consideraciones matemáticas de carácter casi elemental. En segundo lugar, porque con la actitud crítica que lo caracteriza, y evidenciando una total irreverencia frente al espíritu respetuoso de los filósofos que siempre vieron en la exactitud matemática el ideal de perfección y rigor demostrativo, no se dedica a buscar para esta ciencia una fundamentación sólida y definitiva, sino por el contrario a mostrar que toda fundamentación carece por completo de sentido.

Lamentablemente su aguda crítica no fue descubierta, divulgándose en consecuencia la opinión de que en relación a los principios de la matemática Wittgenstein no tenía nada importante que decir. Opinión que tan sólo pudo revertirse hace algo más de una década con el inicio de un movimiento interpretativo que propuso una relectura de su filosofía libre de los prejuicios de corte positivista o russelliano que opacaron durante años la comprensión de sus obras.

---

[1] Me refiero aquí a Observaciones a los fundamentos de la matemática (en adelante O.F.M.), Madrid, Alianza, 1987

También a las conferencias que sobre fundamentos de la matemática dictó en Cambridge en 1939, publicadas luego en 1976 por sus albaceas, con el título Wittgenstein's lectures on the foundations of mathematics.

[2] SCHMITZ, FRANÇOIS Wittgenstein, la philosophie et les mathématiques, Paris, P.U.F., 1988. p. 6.

Reconociendo, pues, la importancia de sus investigaciones, es el objetivo de este trabajo presentar brevemente el pensamiento de Wittgenstein sobre la matemática confrontándolo con la posición logicista de Russell y Frege, la formalista de Hilbert y la intuicionista de Brower. Pero no por creer que se trata de una posición alternativa a esta, sino porque estos autores son los adversarios filosóficos contra los que -explícita o implícitamente- argumenta Wittgenstein. Es precisamente en esta confrontación que se va perfilando su propuesta. Por último intentaré mostrar como la especificidad de la propuesta de Wittgenstein permite redefinir temas claves de la matemática tales como el de la contradicción, el infinito y la relación entre matemática pura y aplicada, mostrando al mismo tiempo los equívocos que se esconden en los supuestos de las posiciones clásicas que acerca de los fundamentos de la matemática ocuparon la escena filosófica a comienzos de siglo.

En el Tractatus, un libro excesivamente austero en citas de autores, Wittgenstein menciona en reiteradas oporunidades a Russell y Frege. Pero lo realmente importante es que Russell y Frege no solo están presentes en los aforismos que los nombran sino que se constituyen en importantes interlocutores de Wittgenstein a lo largo de todo el libro. Concretamente, en el ámbito de la filosofía de la matemática, Wittgenstein adelanta en el Tractatus elementos para una crítica al logicismo que se desarrollorá de modo completo en años posteriores

El programa logicista, tal como es presentado por Russell y Whitehead en su libro Principia Mathematica, se propone demostrar, con la seguridad y precisión carcterística de las proposiciones matemáticas "que toda la matemática pura trata exclusivamente de conceptos definibles en términos de un número muy reducido de conceptos lógicos fundamentales, y que todas sus proposiciones son reducibles a un número muy pequeño de principios lógicos"[3].

En el Tractatus Wittgenstein establece explícitamente una muy estrecha relación entre la lógica y la matemática. Este hecho, sin embargo, no nos da derecho a aproximar a Wittgenstein al logicismo. En primer lugar porque el objetivo de Wittgenstein no es reducir la matemática a la lógica o a alguna otra cosa. En segundo lugar, porque el significado de "lógica" -como la inefable estructura del mundo y del lenguaje- que maneja Wittgenstein en el Tractatus es diferente de aquel más estricto que alude al método de las tautologías y contradicciones. Y es en función de esa acepción amplia que matemática y lógica se relacionan. Todas las nociones de la matemática y la lógica se encuentran contenidas en las características formales del lenguaje representativo que de hecho tenemos. Esto es lo que le permite a Shwayder afirmar que para Wittgenstein "la concepción general del lenguaje es el único primitivo matemático"[4]. En tanto ambas se hallan entre las estructuras formales de nuestro lenguaje están ya siempre presupuestas, necesariamente, en el uso que hacemos de los signos.

---

[3] RUSSELL, B. y WHITEHEAD, A. N Principia Mathematica. México, siglo XXI, 1962, pp. 42-43.

[4] SHWAYDER, D. S. "El pensamiento de Wittgenstein sobre la matemática" En. WINCH, PETER y colaboradores Estudios sobre la filosofía de Wittgenstein, Bs. As. Eudebaa, 1971

En el curso del siglo XIX, sobre la base de los progresos alcanzados en el terreno del álgebra, surge el formalismo en el ámbito de la filosofía de la matemática como concepción rival del logicismo. Esta corriente -que Frege no dudará en atacar duramente- concibe a la matemática como el producto de una construcción formal. Evidenciando una clara inspiración kantiana niega el carácter analítico de las proposiciones matemáticas. En este punto se opone al logicismo. Pero también se opone al concentrar su atención sobre los signos o escritura matemática, y también sobre las reglas que nos permiten operar con ellos, dejando de lado, por completo, a los objetos a los cuales se refieren. Resulta evidente que el formalismo significa un duro golpe al platonismo fregeano, en tanto desprende a la matemática de toda necesidad de garantía ontológica. Esto, unido a la afirmación acerca del carácter arbitrario de las reglas, hace que la matemática sea concebida cada vez más como un juego en el que las piezas son los signos y las reglas son los axiomas que definen los movimientos a realizar con esas piezas.

Sin duda alguna, la metáfora del juego aproxima a Wittgenstein al formalismo. A pesar de esto es importante tener en cuenta las diferencias que lo alejan de él. Para Wittgenstein el juego del matemático no puede reducirse a la manipulación reglamentada de signos. No es posible determinar de manera definitiva y precisa que es "seguir una regla". Lo que efectivamente encontramos en nuestra práctica cotidiana de la matemática son diferentes modalidades de aplicación de las reglas, que se relacionan dialécticamente con nuestras circunstancias sociohistóricas. El reconocimiento de las necesidades e intereses concretos en el análisis de la aplicación de las reglas es algo por completo ajeno al espíritu del formalismo. Por el contrario, Wittgenstein lo considera un punto central en el estudio de la matemática, en tanto nos previene contra cualquier simplificación, sea de tipo universalista, o de tipo convencionalista.

El intuicionismo, por su parte, surge como reacción contra el formalismo, en tanto este toma como objeto de investigación a la escritura matemática y pretende, a partir de ella, establecer las características de esa ciencia. En su lugar, el intuicionismo privilegia la actividad intelectual que se halla implicada en toda prueba o demostración matemática. La matemática no es concebida ya como una costrucción formal, sino como una construcción intuitiva. El énfasis, entonces, está puesto en la actividad de construcción y no en el resultado de la misma. La matemática es considerada una actividad autónoma y autosuficiente. Es por esto que el sentido de una proposición matemática no depende de las relaciones objetivas que expresa, ni de su formación o ubicación en un sistema formal. Para ser comprendida es necesario poder recorrer efectivamente las etapas que conducen a aprehender aquello de que trata.

En estricta correspondencia con el ya señalado énfasis colocado sobre la actividad matemática, el intuicionismo manifiesta una extrema prudencia metafísica, limitando la matemática a lo humanamente construíble, al plantearse, por ejemplo, el tema del infinito. La posibilidad de cantidades infinitas había sido postuladas por el logicismo, que les otorgaba la misma realidad que a las finitas. Hilbert, por su parte, reconoce la imposibilidad de construir una serie formal infinita en acto, pero acepta algunos conceptos transfinitos, en tanto los considera útiles para la simplificación y unificación de las teorías matemáticas Si bien no les reconoce condición ontológica plena, extiende la validez de los principio lógicos al ámbito del infinito. El intuicionismo, por su parte, reconce tan sólo una matemática del infinito potencial.

Wittgenstein coincide con Brower en ubicar a la matemática en el orden del hacer y no del saber. Schmitz explica la relación entre ellos recordando que Wittgenstein asistió a las conferencias de Brower en Viena en 1929[5]. Según Schmitz, este hecho ayuda a despertar nuevamente en Witgenstein el interés por la filosofía académica, luego de casi una década de silencio y aislamiento. Sin embargo, a diferencia de Brower, Wittgenstein trae a escena las situaciones concretas del ejercicio de la práctica matemática. Estas situaciones concretas, por su parte, comprometen el carácter universal y necesario de las construcciones matemáticas, pero de ningún modo desembocan en algún tipo de psicologismo o empirismo. Wittgenstein rescata la dureza e inexorabilidad de la necesidad matemática, pero sin recurrir a ninguna teología de objetos ideales, tal como lo hace el logicismo. Esto lo logra enfatizando los condicionamientos prácticos del juego o la actividad matemática, dejados de lado tanto por logicistas como intuicionistas o formalistas. Es esto lo que nos permite hablar de una tendencia progresiva a una "antropologización" de la matemática en Wittgenstein, que comienza ya en el Tractatus y se acentúa en sus últimas obras.

Junto con este movimiento en búsqueda de una mayor materialidad en el espacio de reflexión acerca de los principios de la matemática, es posible reconocer temas que permanecen constantes, y que recorre toda la obra de Wittgensein, desde el Tractatus hasta sus últimos escritos. En primer lugar, las proposiciones matemáticas no son para Wittgenstein proposiciones legítimas. Se trata de "pseudoproposiciones" carentes de sentido, en tanto no se relacionan proyectivamente con los hechos del mundo de acuerdo a la doble dirección de lo verdadero y lo falso. Esto se muestra en las tablas de verdad que las revelan como "tautologías" y "contradicciones", es decir proposiciones cuya verdad y falsedad puede determinarse con necesidad a través de métodos de cálculo[6]. No se trata de proposiciones descriptivas de hechos -ni empíricos ni lógicos- sino proposiciones normativas que establecen el entramado o marco formal necesario para efectivizar toda descripción. El énfasis en esta dimensión normativa hace que las pseudoproposiciones matemáticas sean definidas en las últimas obras como "reglas" ubicadas entre los paradigmas de nuestro lenguaje[7]. Estas reglas instauran principios de orden que posibilitan la experinecia, convirtiéndose, de este modo en los "límites del empirismo"[8]. Es por esto que en sentido estricto no puede haber un discurso sobre la lógica y la matemática, porque pertenecen al espacio de lo que no se dice sino que se muestra en el

---

[5] SCHMITZ, op. cit. p.25.

[6] Cf. WITTGENSTEIN, LUDWIG Tractatus logico-philosophicus (en adelante T.L.P), Madrid, Alianza, 1979, 4.46 y ss. pp. 107 y 108.

[7] Cf. O.F.M. parte I, parágrafo 105, p. 53.

[8] Cf. O.F.M. parte IV, parágrafo 29, p. 197

uso que hacemos del lenguaje. Matemática y lógica deben, pues, hacerse cargo de sí mismas. No resultan fundamentables teóricamente, ya que toda argumentación o fundamentación las supone necesariamente. Su estudio se justifica en función del importante rol que estas reglas cumplen en nuestra vida. En clara oposición a Russell y Frege afirma Wittgenstein que "las proposiciones matemáticas no expresan ningún pensamiento"[9], esto es, que no tienen contenido cognoscitivo. Su función no es dar cuenta de ninguna realidad ideal de relaciones necesarias, sino proporcionarnos instrumentos conceptuales para regular el uso de nuestro lenguaje cotidiano. La dimensión práctica de la matemática se pone de manifiesto al ser definida como un sistema de cálculo. No puede separarse de su aplicación porque no preexiste a ella.

Esta caracterización nos permite reelaborar temas claves de la filosofía de la matemática bajo una luz nueva. En esta reelaboración queda claro que Wittgenstein no nos acerca una posición alternativa al problema de la fundamentación de la matemática. Wittgenstein no quiere fundamentar la matemática ni reconducirla a alguna otra instancia más originaria. Por el contrario, se propone mostrar el absurdo de todo pensamiento que se dedica a la búsqueda de fundamentaciones últimas. Tampoco intenta presentar una teoría matemática sistemática y coherente, sino, pro el contrario, garantizar la irreductible complejidad de características y funciones que presenta ese conjunto de proposiciones, métodos e instrumentos conceptuales que llamamos "matemática".

Precisamente este es el aporte de Wittgenstein al problema de la contradicción, el infinito y la relación entre matemática pura y aplicada: desplazar el eje de la discusión mostrando los equívocos que sin excepción anidan en los supuestos del formalismo, logicismo e intuicionismo.

En primer lugar, el problema del infinito surge cuando atribuimos una referencia objetiva a los conceptos y proposiciones matemáticas. La confusión extensionalista se manifiesta en la identificación del infinito con un número, el más grande de todos. El que ningunaa notación escribible pueda dar cuenta de este número no modifica en nada la cuestión, ya que, para los logicistas, el objeto de la matemática se ubica en entes ideales que desbordan, inevitablemente, las formas en que los expresamos. Mientras los formalistas mantienen en relación al tema del infinito una posición paradójica, aceptando la utilización de algunos conceptos transfinitos, por considerarlos incorporables a un sistema formal completo y coherente, a pesar de la imposibilidad de escribir una serie infinita en acto, los intuicionistas rechazan tanto el transfinitismo ontológico como el metodológico de Hilbert. La cuestión, sin embargo, se complica en tanto el término "infinito" se utiliza en dos sentidos principales. Por una parte, hace referencia al infinito actual, dado de una sola vez a la manera de un todo completo en sí mismo. Por la otra, hace referencia a la posibilidad de continuar una serie indefinidamente, acercando así "infinito" a "indeterminado". Este último sentido es aceptado por los intuicionistas. De todos modos queda claro que tan sólo en relación a cantidades infinitas en acto es posible elaborar una aritmética, y esto es explícitamente rechazado por ellos.

[9] T.L.P 6.21 p. 183.

En un primer momento la posición de Wittgenstein parece cercana al intuicionismo. A pesar de esto considera que el intucionismo no logra superar los supuestos comunes a las otras posiciones. Estos supuestos se articulan en torno a la concepción del infinito como un número. Para Wittgenstein el infinito no es un objeto sino una característica de nuestro simbolismo. Es por esto que la única idea de infinito que manejamos es la que nuestro simbolismo contiene. "¿Hay que evitar la palabra 'infinito' en matemáticas? -se pregunta Wittgenstein- Sí, allí donde parece conferir un significado al cálculo en lugar de recibirlo de él primero"[10].

En segundo lugar Wittgenstein constata que la importancia que se otorga al status y función del principio de no contradicción aumenta vertginosamente a medida que el formalismo aleja el respaldo ontológico de las reglas que definen el sistema. Wittgenstein, por su parte, niega la posibilidad de justificar las reglas en función de hechos o realidades independientes que anteceden a nuestras operaciones. Al mimo tiempo denuncia "la veneración y el miedo supersticioso de los matemáticos ante la contradicción"[11] como síntoma de una mala interpretación de la relación entre la matemática y los juegos. Para Wittgenstein una contradicción no invalida necesariamente un juego, sino que llama la atención sobre algunos aspectos de este que es necesario cambiar, modificando las reglas o introduciendo otras que garanticen su continuidad. El rechazo radical a la contradicción se funda en la identificación de la matemática con un juego ideal, un "súper juego" en el cual el principio de no contradicción es elevado a la categoría de "ley fundamental", y no con alguno de los juegos que efectivamente jugamos en nuestras vidas[12]. Lo que Wittgenstein quiere es cambiar nuestra actitud ante la contradicción. La contradicción debe evitarse por motivos prácticos, no teóricos. Por ejemplo, allí donde compromete la capacidad de predicción de un cálculo. Lo importante es tener en cuenta que el carácter no contradictorio de un sistema no puede establecerse de una vez y para siempre, porque las reglas no preexisten a su aplicación. No tiene sentido pensar en la contradicción como algo oculto, desde el principio, tras las reglas. Esto es así porque nada existe con anterioridad a la aplicación de las reglas. Además las aplicaciones posibles no se hallan determinadas por la regla desde un principio. Ningún juego puede definirse en forma completa a través de la enumeración de sus reglas sin referencia alguna a las condiciones en las que ese juego se juega, se jugó o se jugará en el futuro.

Estas consideraciones nos colocan de lleno ante el problema de la relación entre la matemática pura y la aplicada. Y este es un tema importante, ya que no sólo muestra de modo eminente las insuficiencias de las posiciones anteriormente consideradas, sino que es aquí donde la originalidad del pensamiento de Wittgenstein se manifiesta en toda su intensidad. En última instancia, las observaciones en torno a la contradicción y el infinito sólo adquieren real significado a la luz de la crítica de Wittgenstein a la posilidad de

---

[10] O.F.M. parte II, parágrafo 58, p. 114.

[11] O.F.M. parte I, apéndice III, 17, p. 97

[12] Cf. O.F.M. parte III, parágrafos 87 y ss. pp. 182 y 183.

utilizar la dupla matemática pura-matemática aplicada para referirse a esa actividad humana que llamamos "matemática".

Para comenzar, es necesario aclarar que el problema de la aplicabilidad sólo se presenta si consideramos que la matemática es un saber o actividad teórica que luego se conecta con la realidad a través de mecanismos diversos. Wittgenstein cuestiona la pertinencia de este esquema de clasificación al considerar a la matemática como práctica. Pero no se trata de una práctica individual sino social. Las reflexiones en torno a la expresión "seguir una regla" nos enfrenta con el aspecto institucional de la matemática, considerada como una actividad orientada a un fin determinado. Y el fin -dice Wittgenstein- es siempre algo extramatemático[13]. Las reglas se instituyen como tales en función de cuestiones que tienen que ver con las condiciones de vida de una sociedad dada, al tiempo que revierten sobre esas condiciones sentando los parámetros formales necesarios para construir un punto de visa compartido desde donde contemplarlas y evaluarlas.

La matemática no descubre un orden preexistente en los hechos o en las ideas. La matemática crea, es decir, inventa un orden que vale por sí mismo y por su relación con las condiciones materiales de la forma de vida de la que surge. Pero esta creación no se realiza a partir de una actividad del espíritu o la mente, sino del trabajo de los hombres que construyen su mundo y su lenguaje. Estos son los límites del empirismo: la formación de conceptos sobre la base de un modo de obrar y un trabajo compartido.

La matemática no es teoría sino praxis, considerada como práctica, la matemática logra desembarazarse de las cuestiones que desvelaron a lógicos y matemáticos. En este contexto preguntarse por el fundamento carece de sentido. La matemática existe y ocupa un lugar en nuestras vidas. No es posible ir más allá en tanto las formas de vida deben ser aceptadas como lo dado[14]. Pero en modo alguno debe identificarse esta afirmación con una apología del status quo social, sino todo lo contrario. Del análisis de la relación que mantiene la práctica matemática con la sociedad que la instrumenta, surge la evidencia necesaria para reconocer que ni la matemática ni la sociedad tienen una forma única. La dificultad que tienen los hombres para concebir una matemática alternativa es solidaria de su dificultad para imaginar un mundo diferente. A su vez esta dificultad se acrecienta por los efectos que producen los discursos dedicados a presentar a la matemática como un saber constituído por proposiciones puras, fundamentables en instancias universales y necesarias.

---

[13] O.F.M. parte VII, parágrafo 10, p. 309.

[14] Cf. WITTGENSTEIN, LUDWIG Investigaciones Filosóficas, Barcelona, Crítica, 1988, parte II, p. 517.