EPISTEMOLOGÍA E HISTORIA DE LA CIENCIA

SELECCIÓN DE TRABAJOS DE LAS VI JORNADAS
(1996)

Marisa Velasco
Aarón Saal
Editores

ÁREA LOGICO-EPISTEMOLÓGICA DE LA ESCUELA DE FILOSOFÍA
CENTRO DE INVESTIGACIONES DE LA FACULTAD DE FILOSOFÍA Y HUMANIDADES
UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Luis Urtubey
U.N.C.

ALGUNAS PROPIEDADES FORMALES DE UN SISTEMA DEDUCTIVO CON INTERROGACIONES

Presupondremos a lo largo de este trabajo cierta familiaridad con el método de los tableau o block tableau , según -por ejemplo- la exposición de Smullyan (1968). Intentamos presentar aquí y comentar un sistema deductivo, expuesto en Harris (1990), cuyo núcleo lo constituye un sistema inferencial T0, que es correcto y completo para la lógica de primer orden. Este sistema es extendido mediante el agregado de dos reglas para interrogaciones. El propósito final de esta ponencia es constatar la ausencia de ciertas propiedades formales de la inferencia deductiva clásica en este sistema.

El vocabulario del lenguaje L consta de:

(i) Un conjunto infinito de constantes individuales a, b, c, ... , que se dividen en nombres propios y parámetros.

(ii) Un conjunto infinito de variables x, y, z, ..

(iii) Un conjunto (posiblemente infinito) de expresiones de predicado P,Q,R, .. con el número de argumentos indicado.

(iv) Las expresiones lógicas v, &, $\neg$, $\exists$, $\forall$.

Las expresiones de las categorías (i) y (ii) forman el conjunto de los términos de L. Definimos ahora las expresiones que son fórmulas de L.

(i) Las expresiones de la forma $\Pi(\alpha,\beta,\tau...,\delta)$, siendo α,β, etc. términos de L y Π una expresión de predicado de n argumentos (las fórmulas atómicas de L).

(ii) Las expresiones de la forma $\neg$A, siendo A atómica.

(iii) Las expresiones de la forma A v B, A & B, $\forall$xA y $\exists$xA, siendo A y B fórmulas de L y x una variable.

(iv) Ninguna otra expresión.

Sean X, Y secuencias de fórmulas (se las puede entender como conjuntos). 'A $\in$ X' indica que A ocurre en X. Entonces,

X $\Rightarrow$ Y es un 'secuente'. Las reglas del sistema T_0 operan sobre secuentes formados de esta manera con las fórmulas de L. Sean A, B, $\forall$xA[x] y $\exists$xA[x] fórmulas de L. Las reglas de T_0 son entonces las siguientes.

I&. $\dfrac{X \Rightarrow Y}{X,A,B \Rightarrow Y}$ para (A & B) $\in$ X

Iv: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X,A \Rightarrow Y \qquad X,B \Rightarrow Y}$$ para (A v B) ∈ X

I∀: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X,A[\alpha] \Rightarrow Y}$$ para ∀xA[x] ∈ X

I∃: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X,A[\alpha] \Rightarrow Y}$$ para ∃x A[x] ∈ X

D&: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y,A \qquad X \Rightarrow Y,B}$$ para (A & B) ∈ Y

Dv: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y,A,B}$$ para (A v B) ∈ Y

D∀: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y,A[\beta]}$$ para ∀xA[x] ∈ Y

D∃: $$\frac{X \Rightarrow Y}{X \Rightarrow Y,A[\beta]}$$ para ∃xA[x] ∈ Y

Siendo α un término libre para x y ß un parámetro nuevo. Un *tableau* es un conjunto parcialmente ordenado de secuentes, tal que cada secuente, o bien se sigue de sus predecesores inmediatos por medio de la aplicación de una de las reglas anteriores, o es el único secuente inicial. Como de costumbre, cuando la aplicación de las reglas lleva a la obtención de dos secuentes en la sucesión, cada uno de los secuentes resultantes con todos los que le suceden forman un *subtableau*. Diremos que un secuente está cerrado en caso de que:

(i) A, ¬A ∈ X siendo A atómica, o

(ii) A, ¬A ∈ Y siendo A atómica, o

(iii) A ∈ X y A ∈ Y, para un 'literal' A.

Un *tableau* está cerrado sii cada *subtableau* tiene un secuente terminal cerrado. Cuando obtenemos un *tableau* cerrrado para el secuente inicial X ⇒ Y, decimos que tenemos una derivación de este secuente o que es un teorema, i.e. $\vdash X \Rightarrow Y$.

Como se puede ver, el sistema anterior es una versión de los *tableau* semánticos empleando 'secuentes'. Como observa Konolige(1984) estas reglas se pueden ver como reglas de inferencia invertidas: primero va la conclusión, luego la línea horizontal y finalmente las premisas.

Diremos que un secuente X ⇒ Y es verdadero en una interpretación de las fórmulas que lo componen sii una de las fórmulas de X es falsa o una de las fórmulas de Y es verdadera. Asimismo, decimos que hay una interpretación que lo satisface, si es verdadero en alguna interpretación. De esta definición de verdad resulta que un secuente verdadero, en una interpretación dada, afirma que la conjunción de las fórmulas de X implica la disyunción de las fórmulas de Y.

Extenderemos ahora este sistema con el propósito de abarcar una forma de razonamiento en el cual se combina la inferencia deductiva con la formulación de preguntas y la obtención de respuestas. En este caso quien lleva adelante el razonamiento cuenta con los medios para acceder a cierta información específica. Esta capacidad de obtener información de manera inmediata se representa a través de la posibilidad de plantear preguntas y obtener las respuestas. En este enfoque, debido sobre todo a Hintikka, se consideran dos tipos de preguntas elementales, i.e., las preguntas "proposicionales" y las "pronominales", distinguiéndose una de otra por la forma de sus respectivas "presuposiciones". En las primeras se trata de disyunciones, mientras que en las segundas, de fórmulas existenciales. De igual modo, una respuesta a una pregunta proposicional excluirá todos los miembros de la disyunción, excepto uno. Mientras que una respuesta a una pregunta pronominal, es una instancia de la variable ligada por el cuantificador existencial.

Las reglas que se agregan al sistema anterior representan entonces el intercambio de preguntas y respuestas en el curso de una derivación. Ante una presuposición "cuestionable" entre las fórmulas de la izquierda de un secuente final, el siguiente paso de la derivación puede consistir en agregar a las fórmulas de la izquierda, una fórmula que represente una respuesta a una pregunta que tenga esta presuposición.

A cada oración σ del lenguaje le asignamos un conjunto $R(\sigma)$, el conjunto-respuesta de σ. Siempre que σ no sea cuestionable, $R(\sigma)$ será vacío. Supondremos que se ha establecido alguna delimitación de las fórmulas cuestionables. Con el fin de asegurar también la corrección de las reglas que introduciremos debemos asimismo postular que cuando σ sea verdadero en la interpretación dada M y también sea cuestionable, $R(\sigma)$ será algún subconjunto del conjunto de respuestas disponibles para la pregunta con presuposición σ, tal que cada una de ellas es verdadera en M. Cuando σ sea falso, $R(\sigma)$ será vacío.

En el sistema que consideraremos las respuestas están limitadas al que contiene la fórmula cuestionada, i.e., no se tratan como nuevas premisas disponibles en todo *sub*. Por otra parte, la respuesta proporcionada es tal que reduce al mínimo las posibilidades de cerrar el *tableau*. En Harris(1990) se llama no-cooperativo a este modo de responder, y se manifiesta en la formulación de la regla mediante la expresión "para algún elemento del conjunto-respuesta". Las reglas que se agregan son entonces las siguientes:

P-Prop.

$$\frac{X \Rightarrow Y}{X, \pi \Rightarrow Y} \qquad \text{para algún } \pi \in R((A \vee B))$$

P-Pron

$$\frac{X \Rightarrow Y}{X, A[\alpha] \Rightarrow Y} \qquad \text{para algún } A[\alpha] \in R(\exists x\, A[x])$$

En el sistema así extendido puede comprobarse que el carácter no-cooperativo de las reglas altera drásticamente las propiedades formales del sistema deductivo. Consideraremos tres situaciones en particular para terminar esta exposición. (1) En la medida que haya algún conjunto-respuesta infinito, se pierde la vinculación finitaria, en tanto que una conclusión que se sigue de un conjunto infinito de fórmulas, puede no seguirse de ningún subconjunto finito de estas mismas fórmulas.

(2) También se ve afectada la relación entre teoremas y deducciones. Es decir que, aunque sea el caso que

$\vdash X \Rightarrow \sigma$, no resulta que $X \vdash \sigma$

(3) Podemos comprobar también que en coincidencia con lo señalado en Hintikka(1987), la lógica de esta inferencia con interrogaciones no se ajusta al principio de subfórmula, como Gentzen demostrara que sucede con la inferencia en la lógica de primer orden, en donde, efectivamente, toda fórmula que ocurre en la derivación es una subfórmula de alguna fórmula de la conclusión.

Veamos más en detalle estas afirmaciones.

Para mostrar (1) adaptaremos un ejemplo de Van Frassen(1971). Sea $R(\sigma)$ la clase-respuesta infinita de σ. Supongamos que para $A_i \in R(\sigma)$, $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\} \models B$. Supongamos asimismo definida una aplicación v de las oraciones de L en $\{V, F\}$, tal que $v(B) = V$ sii $v(A_i) = V$ para $i = 1,2,3\ldots$ Por otro lado, $v(A_i) = V$ sii $i \leq n$; $v(B) = F$. Se puede ver entonces que, aunque $\{A_1, A_2, A_3, \ldots\} \models B$, para cualquier n, no es el caso que $\{A_1, \ldots, A_n\} \models B$. Por lo tanto, no se satisface el secuente $X, A \Rightarrow B, Y$.

(2) se relaciona estrechamente con lo afirmado en (1). Usaremos $X \vdash_i B$ para indicar que B es **derivable con interrogaciones** a partir de las oraciones del conjunto X. Pero como ya vimos, en este caso no hay vinculación finitaria. De modo que, aunque

$\vdash_i X \Rightarrow B$, no es el caso que $X \models B$. De donde, tampoco $X \vdash B$.

(3) exige alguna digresión. Smullyan(1968) demuestra el célebre *Hauptsatz* de Gentzen para *tableaux*.

Definición. Una fórmula C es *eliminable* si para todo conjunto finito S, si hay un *tableau* cerrado para {S,C} y un *tableau* cerrado para {S,-C}, entonces hay un *tableau* cerrado para S.

La versión del *Hauptsatz* para establece ahora que toda fórmula C es eliminable. A fin de mostrar (3) usaremos un corolario del teorema demostrado en Smullyan(1968). Simplificando la notación diremos que β, β_1 y β_2 son (A v B), A y B, respectivamente.

Corolario. Si hay un *tableau* cerrado para $\{S,\beta\}$, entonces tanto $\{S,\beta_1\}$ como $\{S,\beta_2\}$ tienen *tableaux* cerrados.

Si tomamos entonces la regla I-Prop anterior, podemos constatar que no se verifica lo enunciado por el Corolario. Dado que, cuando $A \in R(\sigma)$ y $B \notin R(\sigma)$, sólo puede cerrar el *tableau* para $X, A \Rightarrow Y$.

Puede concluirse de estas breves consideraciones que la lógica del proceso interrogativo exige algunas restricciones sobre el manejo del conjunto de respuestas. Entre otras alternativas se encuentra la planteada por Harris(1994) en la cual la derivación con interrogaciones se define en relación a un 'emparejamiento' dado de presuposiciones "cuestionables" con determinados elementos de sus respectivos conjuntos-respuesta. Harris explora las características de esta noción de consecuencia desde la perspectiva de la "Semántica de Juegos Teóricos". Cabe preguntarse acerca de las posibilidades de esta opción a partir de un enfoque que no sea dialógico.

REFERENCIAS

Harris, S.(1994) "GTS and Interrogative tableaux", *Synthese*, 99. 329-334.

Hintikka, J (1987) "Knowledge Representation and the Interrogative Model of Inquiry", *Actas del Congreso Internacional Extraordinario de Filosofía*, T.3, UNC, Córdoba, Argentina.

Konolige, K.(1984) *Belief and Incompleteness*, CSLI, Stanford, USA.

Smullyan, R.(1968) *First Order Logic*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Van Frassen, B.(1971) *Formal Semantics and Logic"*, Macmillan, New York. Trad. al español de J A.Robles, *Semántica Formal y Lógica*, UNAM, Mexico, 1987