Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Final de la Licenciatura en Ciencias de la Computación

Análisis de la definibilidad de relaciones en estructuras de primer orden

Estudiante: Guillermo Luis Incatasciato
Director: Diego Vaggione

Marzo 2019

Resumen

En el trabajo *Semantical conditions for the definability of functions and relations* [1], se presentan condiciones semánticas que caracterizan cuando una función o una relación es definible por fórmulas de distintos formatos en un lenguaje de primer orden. En este trabajo se generalizan las ideas de [1] para el caso de lenguajes de primer orden sin igualdad y se darán caracterizaciones para la definibilidad de relaciones para los formatos disyunción de fórmulas atómicas relacionales y atómica relacional, no estudiados en [1]. Para el entendimiento de los resultados, es necesaria la comprensión y el estudio de conceptos fundamentales de teoría de modelos que son presentados en este trabajo y se desarrollan nuevos conceptos relacionados con los lenguajes de primer orden sin igualdad necesarios para las nuevas caracterizaciones semánticas. Además, se estudian algunas aplicaciones de los resultados para la definibilidad de funciones por términos de primer orden.

Abstract

In the paper *Semantical conditions for the definability of functions and relations* [1], semantic conditions are presented that characterize when a function or a relation is definable by formulas of different formats in a first-order language. In this work, the ideas of [1] are generalized for the case of first-order languages without equality and characterizations will be given for the definability of relations for the new formats, disjunction of atomic equality free formulas and atomic equality free formulas, not studied in [1]. For the understanding of the results, it is necessary to understand and study the fundamental concepts of model theory that are presented in this work and new concepts related to the first-order languages without equality necessary for the new semantic characterizations are developed. In addition, some applications of the results for the definability of functions by first-order terms are studied.

Índice

1. Introducción

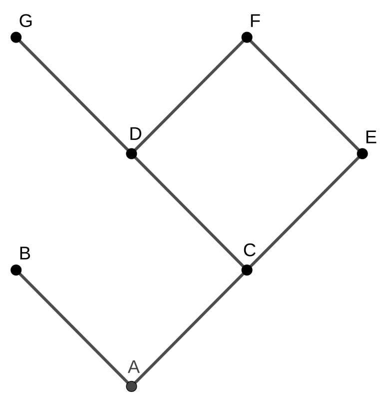
Definición 1. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, $R \subseteq A^n$ una relación y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula, diremos que φ define R en $\mathbf{A}$ si

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

cualesquiera sean $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Veremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{L} = \{\leq^2\}$ y sea $\mathbf{A}$ un poset con universo $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $\leq^{\mathbf{A}}$ definida por el siguiente diagrama de hasse



el conjunto $R = \{b, f, g\}$ es una relación 1-aria sobre A. Nótese que los elementos de R son los elementos maximales del poset y por lo tanto la siguiente $\mathcal{L}$-fórmula define a R en $\mathbf{A}$

$$\varphi(x_1) = \neg\exists x_2.\ (x_1 \leq x_2) \wedge \neg(x_1 = x_2)$$

Ejemplo 2. Sea $\mathcal{L} = \{+^2\}$ y sea $\mathbf{A}$ la estructura con universo $A = \mathbb{R}$ y cuya interpretación del símbolo $+$ es la suma tradicional de los números reales. Sea $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 3 * x\}$. La siguiente $\mathcal{L}$-fórmula define a R en $\mathbf{A}$

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_2 = ((x_1 + x_1) + x_1)$$

Una primera pregunta que uno podría hacerse es si dada una $\mathcal{L}$-estructura $\mathbf{A}$ y una relación $R \subseteq A^n$ siempre existe una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ la cual define R. La respuesta a esta pregunta es negativa y una manera de verlo es usando que las relaciones definibles con $\mathcal{L}$-fórmulas poseen una propiedad de preservación muy particular. Mas concretamente si R es definida en $\mathbf{A}$ por una $\mathcal{L}$-fórmula, entonces R cumple la siguiente propiedad:

- Para todo isomorfismo $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ se tiene que si $(a_1, \dots, a_n) \in R$, entonces $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \in R$

Sea $\mathbf{A}$ la estructura del ejemplo 2. ¿Será definible la relación $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$?

Es fácil ver que la función

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \sigma(x) &= x + x \end{aligned}$$

es un isomorfismo de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{A}$. Ademas $(3, 9) \in R$, pero claramente $(\sigma(3), \sigma(9)) = (6, 18) \notin R$. Por lo que la relación R no cumple la propiedad que acabamos de enunciar y por ende no hay una $\mathcal{L}$-fórmula de primer orden que defina R en $\mathbf{A}$.

Un hecho interesante es que para el caso en que $\mathbf{A}$ es finita la anterior propiedad es equivalente a que haya una $\mathcal{L}$-fórmula que define R en $\mathbf{A}$. Es decir, tenemos el siguiente teorema

Teorema 2. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura finita, sea una relación $R \subseteq A^n$. Son equivalentes*

(1) Hay una $\mathcal{L}$-fórmula que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Para todo isomorfismo $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$, si $(a_1, \dots, a_n) \in R$ entonces $(\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_n)) \in R$.

Es importante notar que la condición (2) no habla de fórmulas, es una condición completamente semántica que es necesaria y suficiente para asegurar la existencia de una fórmula que es un objeto puramente sintáctico.

Una pregunta interesante es si existen caracterizaciones semánticas análogas, para el caso en que la fórmula φ sea de un formato determinado. Los conjuntos

$$\begin{aligned} \mathrm{At}(\mathcal{L}) &= \{\mathcal{L}\text{-fórmulas atómicas}\} \\ \mathrm{Op}(\mathcal{L}) &= \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula donde no hay ocurrencias de cuantificadores}\} \\ \mathrm{Op}^{+}(\mathcal{L}) &= \{\varphi : \varphi \in \mathrm{Op}(\mathcal{L}) \text{ y } \varphi \text{ no tiene ocurrencias de } \neg, \to\} \\ \forall\mathrm{Op}(\mathcal{L}) &= \{\varphi : \varphi = \forall x \beta \text{ donde } \beta \in \mathrm{Op}(\mathcal{L})\} \end{aligned}$$

son ejemplos de distintos formatos.

En el trabajo *Semantical conditions for the definability of functions and relations*[1], se dan caracterizaciones análogas a la dada para varios formatos de fórmulas, entre ellos fórmulas sin cuantificadores, conjunción de atómicas, Horn-fórmulas, etc. Una de las mas importantes en su versión finitaria es la siguiente

Lema 3. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura finita, sea una relación* $R \subseteq A^n$*. Son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $\mathrm{Op}(\mathcal{L})$ *que define* R *en* $\mathbf{A}$*.*

(2) Sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$ *y sea* $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *un isomorfismo. Dados* $a_1, \ldots, a_n \in A_0$*, si* $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ *entonces* $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R$*.*

En este trabajo daremos caracterizaciones semánticas de definibilidad para varios nuevos formatos. A continuación daremos algunas definiciones necesarias para poder describir dichos formatos.

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Recordemos que las fórmulas *atómicas* del lenguaje $\mathcal{L}$ son las palabras de alguna de las siguientes dos formas

(1)

$$(s = t)$$

donde s, t son $\mathcal{L}$-términos

(2)

$$r(t_1, \ldots, t_n)$$

donde $t_1, ..., t_n$ son $\mathcal{L}$-términos y r es una relación n-aria de $\mathcal{L}$.

Una palabra será una fórmula *atómica relacional* del lenguaje $\mathcal{L}$, si es de la forma (2). Llamaremos $\mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ al conjunto de fórmulas *atómicas relacionales* del lenguaje $\mathcal{L}$.

En este trabajo nos enfocaremos principalmente en *formatos relacionales*, es decir, formatos de fórmulas construidas unicamente con atómicas relacionales y que no contienen igualdades de términos.

En la Sección 2, estudiaremos en detalle el Lema 3, debido a que la idea central de su demostración es clave, ya que con ligeros cambios permite la caracterización de muchos formatos.

En la Sección 3, veremos dichas caracterizaciones para los formatos de fórmulas : abierta relacional , conjunción de atómicas, disyunción de atómicas y una única atómica para estructuras finitas.

En la Sección 4, veremos las generalizaciones de los resultados de la Sección 2 para estructuras infinitas y clases de estructuras.

En la Sección 5, veremos que los resultados de definibilidad de relaciones para determinados formatos permiten caracterizar cuando una función es representable por un término y también caracterizar la existencia de términos que satisfacen determinadas condiciones.

En la Sección 6, veremos una caracterización para un formato con cuantificadores universales para una estructura finita.

2. Definibilidad de una relación por una abierta en una estructura finita

En esta sección estudiaremos la caracterización semántica de cuando una relación R es definible en una $\mathcal{L}$-estructura finita $\mathbf{A}$, por una fórmula del siguiente conjunto

$$\mathrm{Op}(\mathcal{L}) = \{\varphi : \varphi \text{ es una } \mathcal{L}\text{-fórmula sin ocurrencias de cuantificadores}\}$$

Llamaremos a los elementos de $\mathrm{Op}(\mathcal{L})$ *fórmulas abiertas* del lenguaje $\mathcal{L}$.

Los siguiente lemas son clásicos resultados de preservación, sus pruebas son rutina y son dejadas al lector.

Lema 4. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras tales que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula abierta. Dados $a_1, ..., a_n \in A$, se tiene que*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \textit{ sii } \mathbf{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Lema 5. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras, $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un isomorfismo y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula. Dados $a_1, \ldots, a_n \in A$, se tiene que*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \textit{ sii } \mathbf{B} \vDash \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]$$

El siguiente lema es una evidente consecuencia de que una relación sea definible por una fórmula abierta en una estructura finita.

Lema 6. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura finita, sea una relación $R \subseteq A^n$. Se tiene que (1) implica (2).*

(1) Hay una fórmula en $\mathrm{Op}(\mathcal{L})$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ un isomorfismo. Dados $a_1, \ldots, a_n \in A_0$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R$ entonces $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R$.

Demostración. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Op}(\mathcal{L})$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}$. Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$, $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ un isomorfismo y $a_1, \ldots, a_n \in A_0$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \in R$. Tenemos entonces que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y como φ es una fórmula abierta $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Luego por 6, $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]$ y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)]$ lo que nos dice que $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R$. $\square$

Lo sorprendente es que en realidad (1) y (2) son equivalentes, es decir, (2) es condición suficiente para que exista una fórmula abierta que define R en $\mathbf{A}$.

Antes de probarlo introduciremos algunas definiciones y resultados necesarios para la prueba.

Definición 7. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\vec{a} \in A^n$, definimos

$$\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}} = \{\alpha(x_1, \ldots, x_n) : \alpha \in \pm\mathrm{At}(\mathcal{L}) \text{ tal que } \mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]\}$$

Llamaremos a $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$ el *diagrama atómico* de $\vec{a}$ en $\mathbf{A}$.

Dicho informalmente el diagrama atómico de $\vec{a}$ en $\mathbf{A}$ es el conjunto de fórmulas atómicas y negaciones de atómicas que son verdaderas para $\vec{a}$ en $\mathbf{A}$. Como veremos, el diagrama atómico de $\vec{a}$ en $\mathbf{A}$ posee cierta información del rol que juegan los elementos $a_1, \ldots, a_n$, dentro de la estructura $\mathbf{A}$. Por ejemplo si en $\mathcal{L}$ hay un símbolo de función f de aridad 2, y tenemos que $f^{\mathbf{A}}(a_3, a_1) = a_6$, entonces la fórmula $(f(x_3, x_1) = x_6) \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$ codifica esta información en forma sintáctica. análogamente si $a_3 \neq a_5$, entonces la fórmula $\neg(x_3 = x_5) \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$ codifica dicha desigualdad. El lector puede notar entonces que si $b_1, \ldots, b_n \in A$ son elementos tales que $\mathbf{A} \vDash \alpha[b_1, \ldots, b_n]$, para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$, entonces, en algún sentido, los elementos $b_1, \ldots, b_n$ son una çopia"de los elementos $a_1, \ldots, a_n$ en lo que se refiere al rol descripto por $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$. En lo que sigue probaremos un resultado que pone en forma precisa la idea intuitiva recién descripta. Primero una definición básica

Definición 8. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $B \subseteq A$ definimos

$$\langle B \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_n] : \ t(x_1, \ldots, x_n) \text{ es un } \mathcal{L}\text{-término y } b_1, \ldots, b_n \in B,\ n \geq 0\}$$

Notar que $\langle B \rangle^{\mathbf{A}}$ es un subuniverso de $\mathbf{A}$, por lo cual, es el universo de una subestructura de $\mathbf{A}$. Llamaremos a dicha subestructura *la subestructura de* $\mathbf{A}$ *generada por* B.

Nótese que para cada conjunto finito $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$ se tiene que

$$\langle \{b_1, \ldots, b_k\} \rangle^{\mathbf{A}} = \{t^{\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_k] : t(x_1, \ldots, x_k) \text{ es un } \mathcal{L}\text{-término}\}$$

Es decir que si $b \in \langle \{b_1, \ldots, b_k\} \rangle^{\mathbf{A}}$ entonces $b = t^{\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_k]$ para algún $\mathcal{L}$-término $t(x_1, \ldots, x_k)$.

Lema 9. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura. Sean* $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$*. Sean*

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \text{ subestructura de } \mathbf{A} \text{ generada por } \{a_1, \ldots, a_n\} \\ \mathbf{B}_0 &= \text{ subestructura de } \mathbf{A} \text{ generada por } \{b_1, \ldots, b_n\} \end{aligned}$$

Si $\mathbf{A} \vDash \alpha[b_1, ..., b_n]$ *para cada* $\alpha \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$*, entonces hay un isomorfismo* $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *tal que* $\sigma(a_1) = b_1, \ldots, \sigma(a_n) = b_n$*.*

Demostración. Definiremos $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ de la siguiente manera

$$\sigma(t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = t^{\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_n] \text{ para cada término } t(x_1, \ldots, x_n)$$

Veamos primero que la definición de σ determina efectivamente una función.

Sean $s(x_1, \ldots, x_n), t(x_1, \ldots, x_n)$ dos términos tales que $s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$ tenemos que $\mathbf{A} \vDash (s = t)[a_1, \ldots, a_n]$ entonces por hipótesis se tiene que $\mathbf{B} \vDash (s = t)[b_1, \ldots, b_n]$ lo que nos dice $s^{\mathbf{B}}[b_1, ..., b_n] = t^{\mathbf{B}}[b_1, ..., b_n]$ por lo tanto $\sigma(s^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) = \sigma(t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$.

Veamos que σ es biyectiva.

Claramente es sobreyectiva ya que si $b \in B_0$ entonces $b = t^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_n]$ para algún $t(x_1, \ldots, x_n)$ y $b = \sigma(t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$.

Sean $t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] \neq t_2^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]$ tenemos que $\mathbf{A} \vDash \neg(t_1 = t_2)[a_1, \ldots, a_n]$ por lo que $\mathbf{B} \vDash \neg(t_1 = t_2)[b_1, \ldots, b_n]$ y entonces $t_1^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_n] \neq t_2^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_n]$ con lo que $\sigma(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n]) \neq \sigma(t_2^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n])$. Esto nos dice que σ es inyectiva.

Veamos que f es un isomorfismo.

Es obvio que para cada $c \in \mathcal{L}$, $f(c^{\mathbf{A}_0}) = c^{\mathbf{B}_0}$.

Sea $f \in \mathcal{L}$ un símbolo de función n-aria y $u_1, \ldots, u_n \in A_0$. Queremos ver que $\sigma(f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_k)) = f^{\mathbf{B}_0}(\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_k))$. Primero, note que hay $t_1, \ldots, t_n$ tal que $u_i = t_i^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k]$ para cada $i = 1, \ldots, n$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_n) &= f^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_n) \\
&= f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k]) \\
&= f^{\mathbf{A}}(t_1, \ldots, t_n)[a_1, \ldots, a_n]
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\sigma(f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_k)) &= \sigma(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k]) \\
&= f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_k] \\
&= f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_k], \ldots, t_n^{\mathbf{B}}[b_1, \ldots, b_k]) \\
&= f^{\mathbf{B}}(\sigma(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k]), \ldots, \sigma(t_n^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k])) \\
&= f^{\mathbf{B}_0}(\sigma(t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k]), \ldots, \sigma(t_n^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k])) \\
&= f^{\mathbf{B}_0}(\sigma(u_1), \ldots, \sigma(u_k))
\end{aligned}$$

Sea $R \in \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Sean $u_1 = t_1^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k], \ldots, u_n = t_n^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_k] \in A_0$ tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
(u_1,\ldots,u_n) & \in & R^{\mathbf{A}_0} \\
 & \Updownarrow & \\
(u_1,\ldots,u_n) & \in & R^{\mathbf{A}} \\
 & \Updownarrow & \\
(t_1^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_k],\ldots,t_n^{\mathbf{A}}[a_1,\ldots,a_k]) & \in & R^{\mathbf{A}} \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{A} & \models & R(t_1,\ldots,t_n)[a_1,\ldots,a_k] \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{B} & \models & R(t_1,\ldots,t_n)[b_1,\ldots,b_k] \\
 & \Updownarrow & \\
(t_1^{\mathbf{B}}[b_1,\ldots,b_k],\ldots,t_n^{\mathbf{B}}[b_1,\ldots,b_k]) & \in & R^{\mathbf{B}} \\
 & \Updownarrow & \\
(\sigma(u_1),\ldots,\sigma(u_n)) & \in & R^{\mathbf{B}_0}
\end{array}
$$

□

Un detalle importante es que aunque el lenguaje $\mathcal{L}$ sea finito y la estructura $\mathbf{A}$ sea finita, el diagrama atómico de $\vec{a}$ puede ser un conjunto infinito. Dejamos al lector la búsqueda de un ejemplo. Sin embargo, aún para el caso de que $\mathcal{L}$ sea infinito, cuando la estructura $\mathbf{A}$ es finita, hay un subconjunto finito del diagrama atómico de $\vec{a}$ el cual concentra toda la información del diagrama atómico de $\vec{a}$. A continuación explicaremos como obtener dicho subconjunto finito del diagrama atómico.

Diremos que dos fórmulas $\alpha_1(x_1,\ldots,x_n), \alpha_2(x_1,\ldots,x_n)$ son equivalentes en $\mathbf{A}$ si

$$\mathbf{A} \models \alpha_1[a_1,\ldots,a_n] \Leftrightarrow \mathbf{A} \models \alpha_2[a_1,\ldots,a_n], \text{ para cada } (a_1,\ldots,a_n) \in A^n$$

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura, tenemos que para cada $\alpha(x_1,\ldots,x_n) \in \pm\mathrm{At}(\mathcal{L})$ podemos definir la siguiente función

$$
\begin{array}{rcl}
f_\alpha & : & A^n \to \{0,1\} \\
f_\alpha(a_1,\ldots,a_n) & = & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } \mathbf{A} \models \alpha[a_1,\ldots,a_n] \\ 0 \text{ si } \mathbf{A} \not\models \alpha[a_1,\ldots,a_n] \end{array} \right.
\end{array}
$$

Nótese que dos fórmulas $\alpha_1, \alpha_2 \in \pm\mathrm{At}(\mathcal{L})$ son equivalentes en $\mathbf{A}$ si y solo si $f_{\alpha_1} = f_{\alpha_2}$. Si la estructura $\mathbf{A}$ es finita entonces hay una cantidad finita de funciones $f : A^n \to \{0,1\}$. Esto nos dice que todo conjunto de fórmulas no equivalentes entre sí es finito. Mas concretamente tenemos el siguiente resultado clave:

Lema 10. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura finita.*

1. *Existen* $\alpha_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,\alpha_l(x_1,\ldots,x_n) \in \pm\mathrm{At}(\mathcal{L})$ *tales que para cada* $\alpha(x_1,\ldots,x_n) \in \pm\mathrm{At}(\mathcal{L})$*, hay* $j \in \{1,...,l\}$ *tal que* α *es equivalente a* α_j *en* $\mathbf{A}$.

2. *Si* $\vec{a} \in A^n$ *y definimos* $\Delta_0^{\vec{a},\mathbf{A}} = \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}} \cap \{\alpha_1,\ldots,\alpha_l\}$*, entonces el conjunto* $\Delta_0^{\vec{a},\mathbf{A}}$ *tiene la siguiente propiedad:*

   a) *Para cada* $\vec{b} \in A^n$ *se tiene que* $\mathbf{A} \vDash \Delta_0^{\vec{a},\mathbf{A}}[\vec{b}]$ *si y solo si* $\mathbf{A} \vDash \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}[\vec{b}]$.

Observación: Nótese que *2.a)* del lema anterior nos dice que el Lema 9 sigue valiendo si reemplazamos en el enunciado $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$ por $\Delta_0^{\vec{a},\mathbf{A}}$.

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado

Teorema 11. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura finita, sea una relación* $R \subseteq A^n$*. Son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $\mathrm{Op}(\mathcal{L})$ *que define* R *en* $\mathbf{A}$.

(2) Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$ *y sea* $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *un isomorfismo. Dados* $a_1,\ldots,a_n \in A_0$*, si* $(a_1,\ldots,a_n) \in R$ *entonces* $(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_n)) \in R$.

Demostración. (1)⇒(2). Ya ha sido probado.

(2)⇒(1). Definimos

$$\varphi = \bigvee_{\vec{a}\in R} \left(\bigwedge \Delta_0^{\vec{a},\mathbf{A}} \right)$$

Mostraremos que φ define R en $\mathbf{A}$, es decir, sean $b_1,\ldots,b_n \in A$

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1,\ldots,b_n] \Leftrightarrow (b_1,\ldots,b_n) \in R$$

Supongamos primero que $(b_1,\ldots,b_n) \in R$. Luego trivialmente

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{A} & \vDash & \bigwedge \Delta^{\vec{b},\mathbf{A}}[b_1,\ldots,b_n] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A} & \vDash & \varphi[b_1,\ldots,b_n] \end{array}$$

Supongamos ahora que $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1,\ldots,b_n]$

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{A} & \vDash & \varphi[b_1,\ldots,b_n] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A} & \vDash & \bigwedge \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}[b_1,\ldots,b_n] \text{ para algún } \vec{a} \in R \end{array}$$

Esto nos dice que $\mathbf{A} \vDash \alpha[b_1,\ldots,b_n]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}}$. Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ las subestructuras generadas por $\{a_1,\ldots,a_n\}$ y $\{b_1,\ldots,b_n\}$ respectivamente, por el Lema anterior hay un isomorfismo $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ tal que $\sigma(a_1) = b_1,\ldots,\sigma(a_k) = b_k$. Luego por (2) como $(a_1,\ldots,a_n) \in R$ tenemos que $(\sigma(a_1),\ldots,\sigma(a_k)) = (b_1,\ldots,b_n) \in R$. □

3. Definibilidad en estructuras finitas

En esta sección estudiaremos teoremas que caracterizan semánticamente(en términos de morfismos, subestructras, productos directos, etc...) la definibilidad de una relación por una fórmula en una estructura finita, donde la fórmula en cuestión es de algún formato determinado.

Es muy importante tener en cuenta que en esta sección, con el fin de obtener resultados mas generales y por algunas ventajas técnicas, las fórmulas de las cuales hablaremos estarán construidas unicamente con fórmulas *atómicas relacionales*, es decir, fórmulas atómicas de la forma $r(t_1, \ldots, t_n)$ donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos y r es un símbolo de relación del lenguaje con el que estemos trabajando. Por lo tanto, las fórmulas referidas no contendrán igualdad de términos.

Definición 12. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Definimos

$$\mathrm{At}_r(\mathcal{L}) = \{r(t_1, \ldots, t_n) : t_1, \ldots, t_n \in T_{\mathcal{L}} \text{ y } r \in \mathcal{L} \text{ } n\text{-aria}\}$$

Llamaremos a $\mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ el conjunto de fórmulas *atómicas relacionales* del lenguaje $\mathcal{L}$.

Llamaremos *fórmulas relacionales* a las fórmulas cuyas subfórmulas atómicas sean todas atómicas relaciones. Todos los formatos estudiados en esta sección y en la próxima serán de fórmulas relacionales.

El hecho de que las fórmulas solo estén conformadas por atómicas relacionales parece un problema si se desean resultados donde las fórmulas en cuestión puedan contener igualdades de términos.

Pero este problema se soluciona de manera sencilla agregando al lenguaje $\mathcal{L}$ de la estructura un nuevo símbolo de relación binario cuya interpretación en la estructura sea la relación igualdad. De esta forma "la igualdad"pasa a ser una relación en el lenguaje, y las fórmulas podrían entonces contener igualdad de términos.

Por lo tanto los resultados son mas generales si se enuncian en términos de fórmulas relacionales, ademas de que permiten un mayor control de la estructura de las fórmulas.

Para simplificar las pruebas, la definibilidad de una relación en una estructura será presentada de forma un poco distinta a la sección anterior. Necesitaremos las siguientes definiciones

Definición 13. Sea $\mathcal{L}'$ un lenguaje de primer orden, $\mathcal{L}$ será un *sublenguaje* de $\mathcal{L}'$ si $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$.

Definición 14. Sea $\mathcal{L}$ un sublenguaje de $\mathcal{L}'$. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura. Definimos la $\mathcal{L}$-estructura $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ a la cual llamaremos el reducto de $\mathbf{A}$ al lenguaje $\mathcal{L}$, cuyas interpretaciones de los símbolos de relación, constantes y funciones serán las mismas que las de $\mathbf{A}$.

Definición 15. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden. Sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una $\mathcal{L}'$-estructura $\mathbf{A}$. Diremos que R es definible por una $\mathcal{L}$-fórmula en $\mathbf{A}$, si hay una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Serán útiles los siguientes operadores para definir los formatos con los que trabajaremos

$$\begin{aligned} [\vee S] &= \{\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S,\ n \in \mathbb{N}\} \\ [\bigvee S] &= \{\varphi_1 \vee \cdots \vee \varphi_n : \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in S, n \in \mathbb{N}\} \\ [\bigvee \bigwedge S] &= [\bigvee([\bigwedge S])] \cup [\bigwedge([\bigvee S])] \end{aligned}$$

3.1. Relaciones homomórficas

En las caracterizaciones para formatos relacionales que estudiaremos, el morfismo asociado no será el homomórfismo ni el isomorfismo clásico. Definiremos a continuación dicho morfismo y probaremos algunas propiedades importantes del mismo, cuya propiedad mas relevante es quizás que preserva fórmulas de $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$.

Definición 16. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Una relación $\sigma \subseteq A \times B$ será una relación homomórfica de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ si se cumplen:

- Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in r^{\mathbf{A}}$, entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in r^{\mathbf{B}}$ para cada símbolo de relación n-aria $r \in \mathcal{L}$.
- Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, entonces $(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \sigma$ para cada símbolo de función n-aria $f \in \mathcal{L}$.
- $(c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}}) \in \sigma$ para cada constante $c \in \mathcal{L}$.

Escribiremos $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ para denotar que σ es una *relación homomórfica* de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$.

Lema 17. *Sea $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una relación homomórfica y $t(x_1, \ldots, x_n)$ un $\mathcal{L}$-término. Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ entonces $(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$.*

Demostración. Lo probaremos por inducción.

Sea $t(x_1, \ldots, x_n) = x_i$. Sean $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, claramente como $(x_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}], x_i^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) = (a_i, b_i)$, $(x_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}], x_i^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$.

Sea $t(x_1, \ldots, x_n) = c$. Sean $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, claramente como $(c^{\mathbf{A}}[\vec{a}], c^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) = (c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}})$ y σ es una relación homomórfica, $(c^{\mathbf{A}}, c^{\mathbf{B}}) \in \sigma$.

Sea $t(x_1, \ldots, x_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Sean $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ tal que $(t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t_i^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ veamos que

$$(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$$

Ya que $(t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t_i^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$ para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y σ es una relación homomórfica se tiene que

$$(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{B}}[\vec{b}])) \in \sigma$$

y como

$$(f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]), f^{\mathbf{B}}(t_1^{\mathbf{B}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) = (f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{B}}[\vec{b}])$$

tenemos que $(f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$. □

Lema 18. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Sea $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una relación homomórfica y $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula atómica relacional ($\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$). Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $\mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$. (las relaciones homomórficas preservan las fórmulas atómicas relacionales)*

Demostración. Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n) = r(t_1, \ldots, t_k)$. Supongamos $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $\mathbf{A} \vDash r(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}]$. Entonces $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) \in r^{\mathbf{A}}$ y como σ es una relación homomórfica $(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t_1^{\mathbf{B}}[\vec{b}]), \ldots, (t_k^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t_k^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) \in \sigma$. Por lo tanto

$$\begin{array}{rcl} (t_1^{\mathbf{B}}[\vec{b}], \ldots, t_k^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) & \in & r^{\mathbf{B}} \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{B} & \vDash & r(t_1, \ldots, t_k)[\vec{b}] \end{array}$$

□

Lema 19. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ dos $\mathcal{L}$-estructuras tal que $\mathbf{A} \leq \mathbf{B}$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$. Dados $a_1, \ldots, a_n \in A$, se tiene que*

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n] \textit{ sii } \mathbf{B} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

Corolario 20. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Sea $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una relación homomórfica y $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$. Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi[\vec{b}]$.*

Definición 21. Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y $\vec{a} \in A^n$, definimos

$$\Delta_r^{\vec{a}, \mathbf{A}} = \{\alpha(\vec{x}) : \alpha \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L}) \text{ tal que } \mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]\}$$

Llamaremos a $\Delta_r^{\vec{a}, \mathbf{A}}$ el *diagrama atómico relacional* de $\vec{a}$ en $\mathbf{A}$. Cuando sea obvio por el contexto que estamos trabajando con diagramas atómicos relacionales (como es el caso en esta sección), escribiremos directamente $\Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}}$.

Lema 22. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura. Sean $\vec{a}, \vec{b} \in A^n$. Definimos*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_0 & = & \textit{subestructura de } \mathbf{A} \textit{ generada por } a_1, \ldots, a_n \\ \mathbf{B}_0 & = & \textit{subestructura de } \mathbf{B} \textit{ generada por } b_1, \ldots, b_n \end{array}$$

Si $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta_r^{\vec{a}, \mathbf{A}}$, entonces

$$\sigma = \{(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) : t(x_1, \ldots, x_n) \textit{ es un } \mathcal{L}\textit{-término}\}$$

es una relación homomórfica de $\mathbf{A}_0$ en $\mathbf{B}_0$.

Demostración. Veamos que σ es una relación homomórfica de $\mathbf{A}_0$ en $\mathbf{B}_0$.

Es obvio que $(c^{\mathbf{A}_0}, c^{\mathbf{B}_0}) \in \sigma$ para cada $c \in \mathcal{L}$.

Sean $(u_1, w_1), \ldots, (u_n, w_n) \in \sigma$, y r un símbolo de relación n-aria en $\mathcal{L}$, veremos que si $(u_1, \ldots, u_n) \in r^{\mathbf{A}_0}$ entonces $(w_1, \ldots, w_n) \in r^{\mathbf{B}_0}$. Como $(u_1, w_1), \ldots, (u_n, w_n) \in \sigma$ entonces tienen que existir $t_1, \ldots, t_n$ tal que $u_i = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ y $w_i = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Luego

$$
\begin{array}{rcl}
(u_1, \ldots, u_n) & \in & r^{\mathbf{A}_0} \\
& \Downarrow & \\
(u_1, \ldots, u_n) & \in & r^{\mathbf{A}} \\
& \Downarrow & \\
(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]) & \in & r^{\mathbf{A}} \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & r(t_1, \ldots, t_n)[\vec{a}] \\
& \Downarrow & \\
r(t_1, \ldots, t_n) & \in & \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}} \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & r(t_1, \ldots, t_n)[\vec{b}] \\
& \Downarrow & \\
(t_1^{\mathbf{B}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) & \in & r^{\mathbf{B}} \\
& \Downarrow & \\
(w_1, \ldots, w_n) & \in & r^{\mathbf{B}} \\
& \Downarrow & \\
(w_1, \ldots, w_n) & \in & r^{\mathbf{B}_0}
\end{array}
$$

Sean $(u_1, w_1), \ldots, (u_n, w_n) \in \sigma$, y f un símbolo de función n-aria en $\mathcal{L}$, veremos que $(f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_n), f^{\mathbf{B}_0}(w_1, \ldots, w_n)) \in \sigma$. Como $(u_1, w_1), \ldots, (u_n, w_n) \in \sigma$ entonces tienen que existir $t_1, \ldots, t_n$ tal que $u_i = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{a}]$ y $w_i = t_i^{\mathbf{A}}[\vec{b}]$ para cada $i \in \{1, ..., n\}$. Note que $f(t_1, \ldots, t_n)(\vec{x})$ es un $\mathcal{L}$-término, luego por como esta definida σ, $(\ f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}],\ f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) \in \sigma$, pero nótese que

$$
\begin{aligned}
(\ f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{a}], f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) &= (\ f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{a}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{a}]),\ f^{\mathbf{A}}(t_1^{\mathbf{A}}[\vec{b}], \ldots, t_n^{\mathbf{A}}[\vec{b}])) \\
&= (\ f^{\mathbf{A}}(u_1, \ldots, u_n),\ f^{\mathbf{A}}(w_1, \ldots, w_n)) \\
&= (\ f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_n),\ f^{\mathbf{B}_0}(w_1, \ldots, w_n))
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $(f^{\mathbf{A}_0}(u_1, \ldots, u_n),\ f^{\mathbf{B}_0}(w_1, \ldots, w_n)) \in \sigma$. □

3.2. Abierta positiva relacional

Teorema 23. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden y $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita. Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Sean $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$. Si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}$. Sean $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica con $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Tenemos entonces que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por ende $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Por el Corolario 20, $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ lo que nos dice que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

(2)⇒(1). Sea $\vec{a} \in R^{\mathbf{A}}$ y sea $\Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$ su *diagrama atómico relacional* en $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, como $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ es finita podemos considerar que $\Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$ es finito y por lo tanto podemos definir

$$\varphi = \bigvee_{\vec{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}} \right)$$

Mostraremos que φ define R en $\mathbf{A}$, es decir, dados $b_1, \ldots, b_n \in A$

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n] \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$$

Supongamos primero que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Como $\mathbf{A} \vDash \bigwedge \Delta^{\vec{b}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}[b_1, \ldots, b_n]$ y a su vez $\bigwedge \Delta^{\vec{b}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$ esta en φ, tenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$.

Supongamos ahora que dados $b_1, \ldots, b_n \in A^n$ tal que $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} & \vDash & \varphi[b_1, ..., b_n] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A} & \vDash & \bigwedge \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}[b_1, \ldots, b_n] \text{ para algún } \vec{a} \in R \end{array}$$

Por lo tanto $\mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$. Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ las subestructuras generadas por $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ respectivamente, por el Lema 22 tenemos que hay una relación homomórfica $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$. Luego por (2) como $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ tenemos que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$. □

3.3. Abierta relacional

Daremos una caracterización para un formato que puede contener negaciones. Definimos el siguiente conjunto de fórmulas

$$\pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L}) = \mathrm{At}_r(\mathcal{L}) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})\}$$

Lema 24. *Sea $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una relación homomórfica tal que σ^r es una relación homomórfica de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L})$. Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $\mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$.*

Corolario 25. *Sea $\sigma : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ una relación homomórfica de $\mathbf{A}$ en $\mathbf{B}$ tal que σ^r es una relación homomórfica de $\mathbf{B}$ en $\mathbf{A}$. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ en $[\bigvee \bigwedge \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$. Si $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$, entonces $\mathbf{B} \vDash \varphi[\vec{b}]$.*

Teorema 26. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden y $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita. Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $[\bigvee\bigwedge \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$. Sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que σ^r es una relación homomórfica de $\mathbf{B}_0$ en $\mathbf{A}_0$ y $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$. Si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

Demostración. Para cada $\vec{a} \in R$, definimos

$$\Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}} = \{\alpha(\vec{x}) : \alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L}) \text{ tal que } \mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]\}$$

(Nótese que el diagrama atómico relacional $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}} \subseteq \Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}}$)

(1)$\Rightarrow$(2). Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee\bigwedge \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}$. Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que σ^r es una relación homomórfica de $\mathbf{B}_0$ en $\mathbf{A}_0$, $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Luego $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por ende $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Por el Corolario 25 $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$, lo que nos dice que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$.

(2)$\Rightarrow$(1). Para cada $\vec{a} \in R$, definimos

$$\Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}} = \{\alpha(\vec{x}) : \alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \pm\mathrm{At}_r(\mathcal{L}) \text{ tal que } \mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]\}$$

(Note que $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}} \subseteq \Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$)

Como $\mathbf{A}_{\mathcal{L}}$ es finita, para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ podemos considerar que $\Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$ es finito, por lo tanto definimos

$$\varphi = \bigvee_{\vec{a} \in R^{\mathbf{A}}} \left(\bigwedge \Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}\right)$$

Mostraremos que φ define R en $\mathbf{A}$, es decir, sean $b_1, \ldots, b_n \in A$

$$\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n] \Leftrightarrow (b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$$

Supongamos primero que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$, como $\mathbf{A} \vDash \bigwedge \Delta_{\pm}^{\vec{b},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}[b_1, \ldots, b_n]$ y a su vez $\bigwedge \Delta_{\pm}^{\vec{b},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$ esta en φ tenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$. Supongamos que $\mathbf{A} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ entonces

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{A} & \vDash & \varphi[b_1, \ldots, b_n] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A} & \vDash & \bigwedge \Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}[b_1, \ldots, b_n] \text{ para algún } \vec{a} \in R \end{array}$$

Como $\Delta^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}} \subseteq \Delta_{\pm}^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$, se tiene que $\mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$. Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0$ las subestructuras generadas por $\{a_1, \ldots, a_n\}$ y $\{b_1, \ldots, b_n\}$ respectivamente, por el teorema tenemos que $\sigma = \{(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t^{\mathbf{A}}[\vec{b}]) : t(x_1, \ldots, x_n) \textit{ es un } \mathcal{L}\textit{-término}\}$ es una relación homomórfica de $\mathbf{A}_0$ a $\mathbf{B}_0$. Pero es fácil ver que también $\mathbf{A} \vDash \alpha[\vec{a}]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{b},\mathbf{A}_{\mathcal{L}}}$, luego σ^r es una relación homomórfica de $\mathbf{B}_0$ a $\mathbf{A}_0$. Por (2) como $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ tenemos que $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$. $\square$

3.4. Conjunción de atómicas relacionales

Sea I un conjunto y $\mathbf{A}_i$ una $\mathcal{L}$-estructura para cada $i \in I$. Definimos el *producto directo* $\prod \mathbf{A}_i$ de la siguiente manera

- universo de $\prod \mathbf{A}_i = \prod A_i$.
- $c^{\Pi \mathbf{A}_i}(i) = c^{\mathbf{A}_i}$ para cada constante c en $\mathcal{L}$.
- $f^{\Pi \mathbf{A}_i}(a_1, \ldots, a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i), \ldots, a_n(i))$ para cada símbolo de función n-aria f en $\mathcal{L}$.
- $R^{\Pi \mathbf{A}_i} = \{(a_1, \ldots, a_n) : (a_1(i), \ldots, a_n(i)) \in R^{\mathbf{A}_i}$ para todo $i \in I$ $\}$ para cada símbolo de relación n-aria R en $\mathcal{L}$.

En el caso de que $I = \{1, ..., k\}$ escribiremos $\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k$ en vez de $\prod \mathbf{A}_i$. Y si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \cdots = \mathbf{A}_k$ escribiremos directamente $\mathbf{A}^k$.

Lema 27. *Sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras, sea $t(x_1, \ldots, x_k) \in T_{\mathcal{L}}$ y $a_1, \ldots, a_k \in \prod A_i$ entonces*

$$t^{\Pi \mathbf{A}_i}[a_1, \ldots, a_k](j) = t^{\mathbf{A}_j}[a_1(j), \ldots, a_k(j)] \text{ para cada } j \in I$$

Lema 28. *Sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras, sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ y $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} \prod \mathbf{A}_i & \vDash & \alpha[a_1, \ldots, a_n] \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \vDash & \alpha[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para todo } i \in I \end{array}$$

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ y sea $\alpha = R(t_1, \ldots, t_k)$

$$\begin{array}{rcl} \prod \mathbf{A}_i & \vDash & \alpha[\vec{a}] \\ & \Updownarrow & \\ \prod \mathbf{A}_i & \vDash & R(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\Pi \mathbf{A}_i}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\Pi \mathbf{A}_i}[\vec{a}]) & \in & R^{\Pi \mathbf{A}_i} \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\Pi \mathbf{A}_i}[\vec{a}](i), \ldots, t_k^{\Pi \mathbf{A}_i}[\vec{a}](i)) & \in & R^{\mathbf{A}_i} \text{ para todo } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), \ldots, a_n(i)], \ldots, t_k^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), \ldots, a_n(i)]) & \in & R^{\mathbf{A}_i} \text{ para todo } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \vDash & R(t_1, \ldots, t_k)[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para todo } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \vDash & \alpha[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para todo } i \in I \end{array}$$

$\square$

Corolario 29. *Sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras, sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ y $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} \prod \mathbf{A}_i & \models & \varphi[a_1, \ldots, a_n] \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \models & \varphi[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para todo } i \in I \end{array}$$

Lema 30. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Si $\alpha \in [\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ define R en $\mathbf{A}$, entonces α define R en $\mathbf{A}^k$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea α un fórmula conjunción de atómicas relacionales que define R en $\mathbf{A}$, veremos que α define a R en $\mathbf{A}^k$. Sean $(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n) \in A^k$

$$\begin{array}{rcl} ((a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)) & \in & R^{\mathbf{A}^k} \\ & \Updownarrow & \\ (a_i^1, \ldots, a_i^n) & \in & R^{\mathbf{A}} \quad 1 \leq i \leq k \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A} & \models & \alpha[a_i^1, \ldots, a_i^k] \quad 1 \leq i \leq k \\ & \Updownarrow & \text{(por Corolario 29)} \\ \mathbf{A}^k & \models & \alpha[(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)] \end{array}$$

□

Teorema 31. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita donde $|R^{\mathbf{A}}| = k$. Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $[\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Hay una fórmula en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}^k$.

(3) Sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}^k$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}^k$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}^k}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}^k}$.

Demostración. (1)⇒(2). Es directo del Lema 30.

(2)⇒(1). Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que representa a R en $\mathbf{A}^k$, podemos asumir que φ es de la forma $\alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_l$ donde cada α_i es conjunción de atómicas relacionales. Sea $R^{\mathbf{A}} = \{(a_1^1, \ldots, a_1^n), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^n)\}$, tenemos que

$((a_1^1,\dots,a_k^1),\dots,(a_1^n,\dots,a_k^n)) \in R^{\mathbf{A}^k}$ y por lo tanto

$$\begin{array}{ccl}
\mathbf{A}^k & \vDash & \varphi[(a_1^1,\dots,a_k^1),\dots,(a_1^n,\dots,a_k^n)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_l[(a_1^1,\dots,a_k^1),\dots,(a_1^n,\dots,a_k^n)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_j[(a_1^1,\dots,a_k^1),\dots,(a_1^n,\dots,a_k^n)] \text{ para algún } j \in \{1,\dots,l\} \\
 & \Downarrow & \text{(por Lema 3)} \\
\mathbf{A} & \vDash & \alpha_j[a_i^1,\dots,a_i^n] \;\; 1 \leq i \leq k
\end{array}$$

Esto nos dice que α_j se satisface en $\mathbf{A}$ para cada $(a_1,\dots,a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Ahora veamos que si $a_1,\dots,a_n \in A$ y $\mathbf{A} \vDash \alpha_j[a_1,\dots,a_n]$ entonces $(a_1,\dots,a_n) \in R^{\mathbf{A}}$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A} & \vDash & \alpha_j[a_1,\dots,a_n] \\
 & \Downarrow & \text{(por Lema 3)} \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_j[(a_1,\dots,a_1),\dots,(a_n,\dots,a_n)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \varphi[(a_1,\dots,a_1),\dots,(a_n,\dots,a_n)] \\
 & \Downarrow & \\
((a_1,\dots,a_1),\dots,(a_n,\dots,a_n)) & \in & R^{\mathbf{A}^k} \\
 & \Downarrow & \\
(a_1,\dots,a_n) & \in & R^{\mathbf{A}}
\end{array}$$

Por lo tanto α_j define R en $\mathbf{A}$.

(2)$\Leftrightarrow$(3). Es directo del Teorema 23. $\square$

3.5. Disyunción de atómicas relacionales

Sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$, $\mathcal{L}$-estructuras. Definimos $\prod^w \mathbf{A}_i$ de la siguiente manera

- universo de $\prod^w \mathbf{A}_i = \prod A_i$.
-$c^{\Pi^w \mathbf{A}_i}(i) = c^{\mathbf{A}_i}$ para cada símbolo de constante c en $\mathcal{L}$.
- $f^{\Pi^w \mathbf{A}_i}(a_1,\dots,a_n)(i) = f^{\mathbf{A}_i}(a_1(i),\dots,a_n(i))$ para todo símbolo de función n-aria f en $\mathcal{L}$.
- $R^{\Pi^w \mathbf{A}_i} = \{(a_1,\dots,a_n) : \text{hay un } i \in I \text{ tal que } (a_1(i),\dots,a_n(i)) \in R^{\mathbf{A}_i}\}$ para cada símbolo de relación n-aria R en $\mathcal{L}$.

En el caso de que $I = \{1,...,k\}$ escribiremos $\mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_k$ en vez de $\prod \mathbf{A}_i$. Y si $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2 = \cdots = \mathbf{A}_k$ escribiremos directamente $\mathbf{A}_w^k$.

Lema 32. *Sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras, sea $t(x_1,\dots,x_k) \in T_{\mathcal{L}}$ y $a_1,\dots,a_k \in \prod A_i$ entonces*

$$t^{\Pi \mathbf{A}_i}[a_1,\dots,a_k](j) = t^{\mathbf{A}_j}[a_1(j),\dots,a_k(j)] \textit{ para cada } j \in I$$

Lema 33. *Sean* $\mathbf{A}_i$ *con* $i \in I$ $\mathcal{L}$*-estructuras, sea* $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ *se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} \prod^w \mathbf{A}_i & \models & \alpha[a_1, \ldots, a_n] \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \models & \alpha[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \textit{ para algún } i \in I \end{array}$$

Demostración. Sean $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ y sea $\alpha = R(t_1, \ldots, t_k)$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \prod^w \mathbf{A}_i & \models & R(t_1, \ldots, t_k)[\vec{a}] \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\Pi^w \mathbf{A}_i}[\vec{a}], \ldots, t_k^{\Pi^w \mathbf{A}_i}[\vec{a}]) & \in & R^{\Pi^w \mathbf{A}_i} \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\Pi^w \mathbf{A}_i}[\vec{a}](i), \ldots, t_k^{\Pi^w \mathbf{A}_i}[\vec{a}](i)) & \in & R^{\mathbf{A}_i} \text{ para algún } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ (t_1^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), \ldots, a_n(i)], \ldots, t_k^{\mathbf{A}_i}[a_1(i), \ldots, a_n(i)]) & \in & R^{\mathbf{A}_i} \text{ para algún } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \models & R(t_1, \ldots, t_k)[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para algún } i \in I \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \models & \alpha[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \text{ para algún } i \in I \end{array}$$

$\square$

Corolario 34. *Sean* $\mathbf{A}_i$ *con* $i \in I$ $\mathcal{L}$*-estructuras, sea* $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ *y* $a_1, \ldots, a_n \in \prod A_i$ *se tiene que*

$$\begin{array}{rcl} \prod^w \mathbf{A}_i & \models & \varphi[a_1, \ldots, a_n] \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_i & \models & \varphi[a_1(i), \ldots, a_n(i)] \textit{ para algún } i \in I \end{array}$$

Lema 35. *Dada* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura y* R *un símbolo de relación* n*-aria. Si* $\alpha \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ *define* R *en* $\mathbf{A}$*, entonces* α *define* R *en* $\mathbf{A}_w^k$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $\delta(x_1, \ldots, x_n)$ un fórmula disyunción de atómicas relacionales que define R en $\mathbf{A}$, veremos que δ define a R en $\mathbf{A}_w^k$. Sean $(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n) \in A^k$

$$\begin{array}{rcl} ((a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)) & \in & R^{\mathbf{A}_w^k} \\ & \Updownarrow & \\ (a_i^1, \ldots, a_i^n) & \in & R^{\mathbf{A}} \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, k\} \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A} & \models & \delta[a_i^1, \ldots, a_i^k] \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, k\} \\ & \Updownarrow & \text{(por Corolario 34)} \\ \mathbf{A}_w^k & \models & \delta[(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)] \end{array}$$

$\square$

Teorema 36. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita donde $k = A^n - |R^{\mathbf{A}}|$ (el cardinal del complemento de $R^{\mathbf{A}}$). Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $[\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Hay una fórmula en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}^k_w$.

(3) Sean $\mathbf{A}_0 \leq (\mathbf{A}^k_w)_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq (\mathbf{A}^k_w)_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}^k_w}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}^k_w}$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2). Es directo del Lema 35.

(2)$\Rightarrow$(1). Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que representa a R en $\mathbf{A}^k_w$, sin perdida de generalidad, podemos suponer que φ esta en forma normal conjuntiva (CNF). Es decir

$$\varphi = \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_l$$

donde cada δ_j es disyunción de atómicas relacionales. Sea

$$A^n - R^{\mathbf{A}} = \{(a^1_1, \ldots, a^n_1), \ldots, (a^1_k, \ldots, a^n_k)\}$$

(todos los vectores que no están en $R^{\mathbf{A}}$), tenemos que $((a^1_1, \ldots, a^1_k), \ldots, (a^n_1, \ldots, a^n_k)) \notin R^{\mathbf{A}^k_w}$ y por lo tanto

$$\begin{array}{ccl}
\mathbf{A}^k_w & \not\models & \varphi[(a^1_1, \ldots, a^1_k), \ldots, (a^n_1, \ldots, a^n_k)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k_w & \not\models & \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_l[(a^1_1, \ldots, a^1_k), \ldots, (a^n_1, \ldots, a^n_k)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k_w & \not\models & \delta_j[(a^1_1, \ldots, a^1_k), \ldots, (a^n_1, \ldots, a^n_k)] \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, k\} \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \not\models & \delta_j[a^1_i, \ldots, a^n_i] \quad 1 \leq i \leq k
\end{array}$$

Esto nos dice que δ_j no se satisface en $\mathbf{A}$ para cada $(a_1, \ldots, a_n) \notin R^{\mathbf{A}}$. Ahora, sean $a_1, \ldots, a_n \in A$ tal que $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ se tiene

$$\begin{array}{rcl}
(a_1, \ldots, a_n) & \in & R^{\mathbf{A}} \\
& \Downarrow & \\
((a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)) & \in & R^{\mathbf{A}_w^k} \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_w^k & \models & \varphi[(a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)] \\
& \Downarrow & \text{(por Lema 3)} \\
\mathbf{A}_w^k & \models & \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_l[(a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_w^k & \models & \delta_j[(a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \models & \delta_j[a_1, \ldots, a_n]
\end{array}$$

Por lo tanto δ_j define R en $\mathbf{A}$.

(2)⇔(3) Es directo del Teorema 23. □

3.6. Atómica relacional

Para la caracterización semántica para una única atómica relacional nos hará falta definir una nueva estructura.

Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-estructura y R un símbolo de relación n-aria en $\mathcal{L}$. Sea $|R^{\mathbf{A}}| = k$, nótese que entonces para la estructura $\mathbf{A}^k$ se tiene que $|R^{\mathbf{A}^k}| = k^k$ y por lo tanto el complemento de R en $\mathbf{A}^k$ tiene cardinal $(|A|^k)^n - k^k$. Definimos entonces

$$\mathbf{E}_R(\mathbf{A}) = \overbrace{\mathbf{A}^k \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}^k}^{(|A|^k)^n - k^k}$$

llamaremos a $\mathbf{E}_R(\mathbf{A})$ la *expansión de* $\mathbf{A}$ *con respecto a* R.

En el próximo teorema veremos que si R es definible por una fórmula $\varphi \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ en $\mathbf{E}_R(\mathbf{A})$ entonces R es definible por una *atómica relacional* en $\mathbf{A}$.

Teorema 37. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita. Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $\mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ que define R en $\mathbf{A}$

(2) Hay una fórmula en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{E}_R(\mathbf{A})$

(3) Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq (\mathbf{E}_R(\mathbf{A}))_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{E}_R(\mathbf{A})}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{E}_R(\mathbf{A})}$

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ que define R en $\mathbf{A}$ tenemos que α esta en $[\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ por el Lema 30, tenemos que α define R en $\mathbf{A}^k$. Nótese que α también esta en $[\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ por lo tanto por el Lema 35, α define R en $\overbrace{\mathbf{A}^k \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}^k}^{(|A|^k)^n - k^k}$.

(2)⇒(1). Sea $\varphi \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{E}_R(\mathbf{A})$. El Teorema 36, nos dice que hay una fórmula $\delta = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_l \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}^k$.

Sea $R^{\mathbf{A}} = \{(a_1^1, \ldots, a_1^n), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^n)\}$, nótese que

$$((a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)) \in R^{\mathbf{A}^k}$$

Luego

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}^k & \vDash & \delta[(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_l[(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_j[(a_1^1, \ldots, a_k^1), \ldots, (a_1^n, \ldots, a_k^n)] \text{ para algún } j \in \{1, \ldots, l\} \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \alpha_j[a_i^1, \ldots, a_i^n] \quad 1 \leq i \leq k
\end{array}$$

Esto nos dice que α_j se satisface en $\mathbf{A}$ para cada $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Ahora veamos que si $a_1, \ldots, a_n \in A$ y $\mathbf{A} \vDash \alpha_j[a_1, \ldots, a_n]$ entonces $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A} & \vDash & \alpha_j[a_1, \ldots, a_n] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \alpha_j[(a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}^k & \vDash & \delta[(a_1, \ldots, a_1), \ldots, (a_n, \ldots, a_n)] \\
& \Downarrow & \\
((a_1, \ldots, a_1), ..., (a_n, \ldots, a_n)) & \in & R^{\mathbf{A}^k} \\
& \Downarrow & \\
(a_1, \ldots, a_n) & \in & R^{\mathbf{A}}
\end{array}$$

Por lo tanto $\alpha_j \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ define a R en $\mathbf{A}$.

(2)⇔(3) Es directo del Teorema 23. □

4. Definibilidad para estructuras infinitas

En esta sección veremos algunos de los resultados de la sección anterior en su versión mas general e infinitaria. Estudiaremos caracterizaciones semánticas de cuando un relación es definible por una fórmula de determinados formatos en una clase de estructuras, donde las estructuras podrían ser infinitas.

Nótese que todas las caracterizaciones vistas hasta ahora tienen una forma similar. Veamos por ejemplo, la caracterización de la definibilidad de una relación por una fórmula de $[\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ en una estructura finita

Teorema 38. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden, $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}'$-estructura finita donde $|R^{\mathbf{A}}| = k$. Son equivalentes:*

(1) Hay una fórmula en $[\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbf{A}$.

(2) Sean $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}^k_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}^k_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}^k}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}^k}$.

Cada caracterización esta dada en términos de una condición de preservación. Se fija una conjunto de estructuras construidas a partir de la estructura original (en este caso son las subestructuras de $\mathbf{A}^k_{\mathcal{L}}$), un morfismo (en este caso es la relación homomórfica), y la condición es que la relación a definir se preserve de una estructura a la otra cuando existe entre ellas un morfismo del tipo fijado.

Veremos que en las caracterizaciones de este estilo cuando las estructuras en cuestión pueden ser infinitas, el conjunto de estructuras construidas a partir de las estructuras originales no son tan simples. Necesitaremos el uso de una construcción llamada *ultraproducto*. Haremos una pequeña presentación de estas construcciones antes de abordar los nuevos resultados.

4.1. Ultraproductos

Sea I un conjunto. Por un *ultrafiltro* sobre I entenderemos un filtro primo del álgebra de Boole $(\mathcal{P}(I), \cup, \cap, \emptyset, I)$.

Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre I y dadas $\mathbf{A}_i$ $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras definimos la relación binaria $\equiv_{\mathcal{U}}$ sobre $\prod A_i$ de la siguiente manera

$$a \equiv_{\mathcal{U}} b \text{ sii } \{i \in I : a(i) = b(i)\} \in \mathcal{U}$$

Sean $\mathbf{A}_i$ $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, $\equiv_{\mathcal{U}}$ es una congruencia sobre las operaciones fundamentales de $\prod \mathbf{A}_i$.

Ya estamos en condiciones de dar la definición de ultraproducto.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I y sean $\mathbf{A}_i$ con $i \in I$ $\mathcal{L}$-estructuras, el *ultraproducto* $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i$ será la $\mathcal{L}$-estructura definida de la siguiente manera

- Universo $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i = \prod A_i/{\equiv_{\mathcal{U}}}$.

- $c^{\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i} = c^{\prod \mathbf{A}_i}/{\equiv_{\mathcal{U}}}$ para cada constante c en $\mathcal{L}$.

- $f^{\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i}(a_1/{\equiv_{\mathcal{U}}}, \dots, a_n/{\equiv_{\mathcal{U}}}) = f^{\prod \mathbf{A}_i}(a_1, \dots, a_n)/{\equiv_{\mathcal{U}}}$ para cada símbolo de función n-aria f en $\mathcal{L}$.

- $r^{\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i} = \{(a_1/{\equiv_{\mathcal{U}}}, \dots, a_n/{\equiv_{\mathcal{U}}}) : \{i \in I : (a_1(i), \dots, a_n(i)) \in r^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U}\}$ para cada símbolo de relación n-aria r en $\mathcal{L}$.

Teorema 39. *(Los). Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I, y $\mathbf{A}_i$ una $\mathcal{L}$-estructura para cada $i \in I$. Para cada $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n)$ y para cada $a_1, \dots, a_n \in \prod A_i$ se tiene que*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i \models \varphi[a_1/{\equiv_{\mathcal{U}}}, \dots, a_n/{\equiv_{\mathcal{U}}}] \text{ sii } \{i \in I : \mathbf{A}_i \models \varphi[a_1(i), \dots, a_n(i)]\} \in \mathcal{U}$$

Corolario 40. *Para cada $\mathcal{L}$-sentencia φ tenemos que*

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i \models \varphi \text{ sii } \{i \in I : \mathbf{A}_i \models \varphi\} \in \mathcal{U}$$

Definición 41. Diremos que una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-estructuras es compacta si se cumple el siguiente enunciado:

Sea $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula y Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas de la forma $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ tales que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$ se cumple que si $\mathbf{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ para cada $\alpha \in \Sigma$, entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Existe entonces $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$, si $\mathbf{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ para cada $\alpha \in \Sigma_0$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Definición 42. Diremos que una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-estructuras es cerrada por ultraproductos si para todo $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i$ donde $\mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$ para cada $i \in I$, $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$.

Teorema 43. *Si una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-estructuras es cerrada por ultraproductos entonces es compacta.*

Demostración. Lo probaremos por el absurdo.

Sea una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-estructuras cerrada por ultraproductos. Supongamos que hay $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ y Σ un conjunto de $\mathcal{L}$-fórmulas de la forma $\alpha(x_1, \dots, x_n)$ tales que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, .., a_n \in A$, si $\mathbf{A} \models \alpha[a_1, ..., a_n]$ para cada $\alpha \in \Sigma$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. Pero no existe $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$ finito tal que para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, \dots, a_n \in A$, si $\mathbf{A} \models \alpha[a_1, \dots, a_n]$ para cada $\alpha \in \Sigma_0$ entonces $\mathbf{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Por lo tanto para cada conjunto finito $\Gamma \subseteq \Sigma$, existe $\mathbf{A}_\Gamma \in \mathcal{K}$ y $a_1^\Gamma, \dots, a_n^\Gamma \in A_\Gamma$ tales que $\mathbf{A}_\Gamma \models \alpha[a_1^\Gamma, \dots, a_n^\Gamma]$ para cada $\alpha \in \Gamma$ pero $\mathbf{A}_\Gamma \not\models \varphi[a^\Gamma, \dots, a_n^\Gamma]$.

Utilizaremos estas $\mathcal{L}$-estructuras para construir un ultraproducto, donde $I = \{\Gamma \subseteq \Sigma : \Gamma \text{ es finito}\}$.

Sean $f_1, \dots, f_n \in \prod A_i$ tal que $f_1(i) = a_1^i$, $\dots, f_n(i) = a_n^i$ para cada $i \in I$.

(nótese que i representa un subconjunto finito de fórmulas de Σ), definimos

$$S = \{\{i \in I : \mathbf{A}_i \vDash \alpha[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} : \alpha \in \Sigma\}$$

Sea $[S) = \{s_1 \cap \cdots \cap s_n : s_1, \ldots, s_n \in S\}$, es fácil ver que $\emptyset \notin [S)$ luego existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $[S) \subseteq \mathcal{U}$.

Pero nótese entonces que para cada $\alpha \in \Sigma$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \{i & \in & I : \mathbf{A}_i \vDash \alpha[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \in \mathcal{U} \\ & \Downarrow & (Los) \\ \prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i & \vDash & \alpha[f_1, \ldots, f_n] \end{array}$$

Por lo tanto para cada $\alpha \in \Sigma$ tenemos que $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i \vDash \alpha[f_1, \ldots, f_n]$. Pero ademas note que $\mathbf{A}_i \nvDash \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]$ para cada $i \in I$. Luego

$$\begin{array}{rcl} \{i & \in & I : \mathbf{A}_i \vDash \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} = \emptyset \\ & \Downarrow & \\ \{i & \in & I : \mathbf{A}_i \vDash \varphi[f_1(i), \ldots, f_n(i)]\} \notin \mathcal{U} \\ & \Downarrow & \\ \prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i & \nvDash & \varphi[f_1, \ldots, f_n] \end{array}$$

Lo cual es absurdo, ya que como $\mathcal{K}$ es cerrada por ultraproductos $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$. □

4.2. Caracterizaciones para clases de estructuras

Como trabajaremos con clases de estructuras usaremos la siguiente definición de definibilidad:

Definición 44. Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$. Sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada $\mathcal{K}$ una clase de $\mathcal{L}'$-estructuras . Diremos que R es definible por una $\mathcal{L}$-fórmula en $\mathcal{K}$, si hay una $\mathcal{L}$-fórmula φ tal que

$$(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$$

para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Serán útiles los siguientes operadores

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{I}(\mathcal{K}) & = & \{\mathbf{A} : \mathbf{A} \text{ es isomorfa a alguna estructura } \mathbf{B} \in \mathcal{K}\} \\ \mathbb{P}_u(\mathcal{K}) & = & \mathbb{I}(\{\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i : \ \mathbf{A}_i \in \mathcal{K} \text{ para cada } i \in I\}) \\ \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K}) & = & \{\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k : \ \mathbf{A}_i \in \mathcal{K} \text{ para cada } i \in \{1, ..., k\}\} \\ \mathbb{P}^w_{fin}(\mathcal{K}) & = & \{\mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_k : \ \mathbf{A}_i \in \mathcal{K} \text{ para cada } i \in \{1, ..., k\}\} \end{array}$$

Los siguientes Lemas son clave para las demostraciones de los resultados siguientes

Lema 45. *$\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ es cerrada por ultraproductos.*

Corolario 46. *$\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ es compacta.*

Lema 47. *Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ $\mathcal{L}$-estructuras. Sean $\vec{a} \in A^n$ y $\vec{b} \in B^n$. Definimos*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_0 & = & \textit{subestructura de } \mathbf{A} \textit{ generada por } a_1, \ldots, a_n \\ \mathbf{B}_0 & = & \textit{subestructura de } \mathbf{B} \textit{ generada por } b_1, \ldots, b_n \end{array}$$

Si $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta_r^{\vec{a}, \mathbf{A}}$, entonces

$$\sigma = \{(t^{\mathbf{A}}[\vec{a}], t^{\mathbf{B}}[\vec{b}]) : t(x_1, \ldots, x_n) \textit{ es un } \mathcal{L}\textit{-término}\}$$

es una relación antropomórfica de $\mathbf{A}_0$ a $\mathbf{B}_0$.

Demostración. La prueba es muy similar a la prueba de 22, es dejada al lector. □

4.2.1. Positiva relacional para una clase de estructuras

Lema 48. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si una $\mathcal{L}$-fórmula φ define a R en $\mathcal{K}$ entonces φ define R en $\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$.*

Demostración. Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una $\mathcal{L}$-fórmula que define R en $\mathcal{K}$. Sea $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i$ un ultraproducto donde cada $\mathbf{A}_i \in \mathcal{K}$ para cada $i \in I$.

Sean $f_1, \ldots, f_n \in \prod A_i$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} (f_1, \ldots, f_n) & \in & R^{\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i} \\ & \Updownarrow & \\ \{i & \in & I : (f_1(i), \ldots, f_n(i)) \in R^{\mathbf{A}_i}\} \in \mathcal{U} \\ & \Updownarrow & \\ \{i & \in & I : \mathbf{A}_i \vDash \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i))\} \in \mathcal{U} \\ & \Updownarrow & \\ \prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i & \vDash & \varphi[f_1, \ldots, f_n] \end{array}$$

Por lo tanto φ define R en $\prod_{\mathcal{U}} \mathbf{A}_i$. Con lo cual hemos probado que φ define R en $\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$. □

Teorema 49. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden. Sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Para una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathcal{K}$.

(2) *Sean* $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_\mathcal{L}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_\mathcal{L}$ *y sea* $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *una relación homomórfica tal que* $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n) \in \sigma$, *si* $(a_1, ..., a_n) \in R^\mathbf{A}$ *entonces* $(b_1, ..., b_n) \in R^\mathbf{B}$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\varphi \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ una fórmula que define R en $\mathcal{K}$, nótese que φ define R en $\mathbb{P}_u(\mathcal{K})$. Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_\mathcal{L}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_\mathcal{L}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica con $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y tal que $(a_1, \ldots, a_n) \in R^\mathbf{A}$. Tenemos que $\mathbf{A}_\mathcal{L} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ con lo que también $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Como las relaciones homomórficas preservan las fórmulas en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ tenemos que $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y luego $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$, por lo tanto $(b_1, \ldots, b_n) \in R^\mathbf{B}$.

(2)⇒(1). Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ y $\vec{a} \in R^\mathbf{A}$. Supongamos que para alguna estructura $\mathbf{B} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ y $\vec{b} \in B^n$ se tiene que $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}$. Definimos

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0 &= \text{ subestructura de } \mathbf{A}_\mathcal{L} \text{ generada por } a_1, \ldots, a_n \\ \mathbf{B}_0 &= \text{ subestructura de } \mathbf{B}_\mathcal{L} \text{ generada por } b_1, \ldots, b_n \end{aligned}$$

Por el lema 47 tenemos que $\sigma = \{(t^\mathbf{A}[\vec{a}], t^\mathbf{B}[\vec{b}]) : t(x_1, \ldots, x_n) \text{ es un } \mathcal{L}\text{-término}\}$ es una relación homomórfica de $\mathbf{A}_0$ en $\mathbf{B}_0$, por lo tanto $\vec{b} \in R^\mathbf{B}$, y por ende $\mathbf{B} \vDash R(x_1, \ldots, x_n)[\vec{b}]$.

Hemos mostrado que si para una estructura $\mathbf{B} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ y $\vec{b} \in B^n$ tenemos que $\mathbf{B} \vDash \alpha[\vec{b}]$ para cada $\alpha \in \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}$ donde $\mathbf{A} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ y $\vec{a} \in R^\mathbf{A}$, entonces $\mathbf{B} \vDash R(x_1, \ldots, x_n)[\vec{b}]$. Por lo tanto para cada $\mathbf{A} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K})$ y $\vec{a} \in R^\mathbf{A}$ tenemos que

$$\mathbb{P}_u(\mathcal{K}) \vDash \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}} \alpha(\vec{x}) \right) \to R(\vec{x})$$

Por compacidad, hay un conjunto finito $\Delta_0^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}} \subseteq \Delta^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}$ tal que

$$\mathbb{P}_u(\mathcal{K}) \vDash \left(\bigwedge_{\alpha \in \Delta_0^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}} \alpha(\vec{x}) \right) \to R(\vec{x})$$

Nótese que esto implica que

$$\mathbb{P}_u(\mathcal{K}) \vDash \left(\bigwedge_{\mathbf{A} \in \mathbb{P}_u(\mathcal{K}),\ \vec{a} \in R^\mathbf{A}} \neg \bigwedge_{\alpha \in \Delta_0^{\vec{a}, \mathbf{A}_\mathcal{L}}} \alpha(\vec{x}) \right) \leftrightarrow \neg R(\vec{x})$$

aplicando compacidad nuevamente

$$\mathbb{P}_u(\mathcal{K}) \vDash \bigwedge_{i=1}^{k} \left(\neg \bigwedge_{\alpha \in \Delta_0^{\vec{a}_i, \mathbf{A}_{i\mathcal{L}}}} \alpha(\vec{x}) \right) \leftrightarrow \neg R(\vec{x})$$

para algunas estructuras $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathcal{K}$ y vectores $\vec{a}_1 \in A_1^n, \ldots, \vec{a}_k \in A_k^n$. Por lo tanto la fórmula

$$\varphi = \left(\bigvee_{i=1}^{k} \bigwedge_{\alpha \in \Delta_0^{\vec{a}_i, \mathbf{A}_{i\mathcal{L}}}} \alpha(\vec{x}) \right)$$

esta en $[\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ y define R en $\mathcal{K}$. $\square$

4.2.2. Conjunción de atómicas relacionales para una clase de estructuras

Lema 50. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in [\bigwedge \mathrm{At}(\mathcal{L})]$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ por φ.*

Corolario 51. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in [\bigwedge \mathrm{At}(\mathcal{L})]$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ por φ.*

Teorema 52. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$ lenguajes de primer orden. Sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Para una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras, son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $[\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathcal{K}$.

(2) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_\mathcal{L}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_\mathcal{L}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^\mathbf{A}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^\mathbf{B}$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\varphi \in [\bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ un fórmula que define R en $\mathcal{K}$, por el corolario anterior tenemos que φ define R en $\mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$. Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_\mathcal{L}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_\mathcal{L}$, que $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ es una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in R^\mathbf{A}$. Tenemos entonces que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Como las relaciones homomórficas preservas fórmulas abiertas positivas relaciones $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ con lo que $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y por lo tanto $(b_1, \ldots, b_n) \in R^\mathbf{B}$.

(2)⇒(1). Aplicando el Teorema 49 a la clase $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ tenemos que hay una $\mathcal{L}$-fórmula $\varphi \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que φ esta en forma normal disyuntiva (DNF). Es decir

$$\varphi = \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_l$$

donde cada ψ_i es conjunción de atómicas relacionales.

Veremos que hay ψ_j que define R en $\mathcal{K}$. Lo haremos por el absurdo, supondremos que no la hay y llegaremos a una contradicción. Como φ también define a R en $\mathcal{K}$, para cada $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $(a_1, \ldots, a_n) \notin R^\mathbf{A}$ tenemos que $\mathbf{A} \nvDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ por lo tanto $\mathbf{A} \nvDash \psi_i[a_1, \ldots, a_n]$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Por lo tanto para que ninguna ψ_j defina R en $\mathcal{K}$ deben existir $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l$ y $(a_1^i, \ldots, a_n^i) \in R^{\mathbf{A}_i}$ tal que $\mathbf{A} \nvDash \psi_i[a_1^i, \ldots, a_n^i]$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pero esto nos dice que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_l & \nvDash & \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_l[(a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_l & \nvDash & \varphi[(a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)] \end{array}$$

lo cual es absurdo porque

$$((a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)) \in R^{\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_l}$$

y φ define R en $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$. Por lo tanto hay $j \in \{1, \ldots, l\}$ tal que ψ_j define R en $\mathcal{K}$. □

4.2.3. Disyunción de atómicas relacionales para una clase de estructuras

Lema 53. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$ por φ.*

Corolario 54. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$ por φ.*

Teorema 55. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $[\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ que define R en $\mathcal{K}$.

(2) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\varphi \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$ un fórmula que define R en $\mathcal{K}$, por el corolario anterior tenemos que φ define R en $\mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$. Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, que $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ es una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Tenemos entonces que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Como las relaciones homomórficas preservas fórmulas abiertas positivas relaciones $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ con lo que $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y por lo tanto $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

(2)⇒(1). Por la condición (2) tenemos que R es definible en $\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$ por una fórmula $\varphi \in [\bigvee \bigwedge \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que φ esta en forma normal conjuntiva (CNF). Es decir

$$\varphi = \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_l$$

donde cada δ_i es disyunción de atómicas relacionales.

Mostraremos que hay δ_j que define R en $\mathcal{K}$. Supongamos que no la hay. Como φ también define R en $\mathcal{K}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in R^A$ se tiene que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash \delta_j[a_1, \ldots, a_n]$ para todo j. Entonces para que ninguna δ_j defina R en $\mathcal{K}$, tienen que existir $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k \in \mathcal{K}$ y $(a_1^i, \ldots, a_n^i) \notin R^{\mathbf{A}_i}$ tal que $\mathbf{A}_j \vDash \delta_i[a_1^i, \ldots, a_n^i]$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pero esto nos dice que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_k & \vDash & \delta_i[(a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)] \;\; 1 \leq i \leq l \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_l & \vDash & \delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_l[(a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)] \end{array}$$

Con lo que $\mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_l \vDash \varphi[(a_1^1, \ldots, a_1^j), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^j)]$, lo cual es absurdo porque $((a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)) \notin R^{\mathbf{A}_1 \times_w \cdots \times_w \mathbf{A}_l}$ y φ define a R en $\mathbb{P}_{fin}^w(\mathcal{K})$. Por lo tanto hay δ_j que define R en $\mathcal{K}$. $\square$

4.2.4. Atómica Relacional para una clase de estructuras

Lema 56. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_{fin}^w \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ por φ.*

Corolario 57. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Si R es definible por una fórmula $\varphi \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ en $\mathcal{K}$ entonces R es definible en $\mathbb{P}_u \mathbb{P}_{fin}^w \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ por φ.*

Teorema 58. *Sean $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}'$lenguajes de primer orden y sea $R \in \mathcal{L}' - \mathcal{L}$ un símbolo de relación n-aria. Dada una clase $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}'$-estructuras. Son equivalentes*

(1) Hay una fórmula en $\mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ que define R en $\mathcal{K}$.

(2) Sean $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u \mathbb{P}_{fin}^w \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$ y sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$, si $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ entonces $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $\varphi \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L})$ un fórmula que define R en $\mathcal{K}$, por el corolario anterior tenemos que φ define R en $\mathbb{P}_{\mathcal{U}} \mathbb{P}_{fin}^w \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$. Supongamos que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{P}_u \mathbb{P}_{fin}^w \mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$, $\mathbf{A}_0 \leq \mathbf{A}_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{B}_0 \leq \mathbf{B}_{\mathcal{L}}$, que $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ es una relación homomórfica tal que $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \sigma$ y $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$. Tenemos entonces que $\mathbf{A} \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A}_0 \vDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. Como las relaciones homomórficas preservas fórmulas abiertas positivas relaciones $\mathbf{B}_0 \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ con lo que $\mathbf{B} \vDash \varphi[b_1, \ldots, b_n]$ y por lo tanto $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{B}}$.

(2)⇒(1). Por el teorema 55 tenemos que R es definible en $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$ por una fórmula $\varphi = \alpha_1 \vee \cdots \vee \alpha_l \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L})]$. Mostraremos que hay α_j que define R en $\mathcal{K}$. Supongamos que no la hay. Como φ también define R en $\mathcal{K}$, para toda $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ y $(a_1, \ldots, a_n) \notin R^{\mathbf{A}}$ se tiene que $\mathbf{A} \nvDash \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ y por lo tanto $\mathbf{A} \nvDash \alpha_j[a_1, \ldots, a_n]$ para todo j. Entonces para que ninguna α_i defina R en $\mathcal{K}$, tienen que existir $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_l \in \mathcal{K}$ y $(a_1^i, \ldots, a_n^i) \in R^{\mathbf{A}_i}$ tal que $\mathbf{A}_j \nvDash \alpha_i[a_1^i, \ldots, a_n^i]$ para cada $i \in \{1, \ldots, l\}$. Pero esto nos dice que

$\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k \not\models \varphi[(a_1^1, \ldots, a_1^l), \ldots, (a_n^1, \ldots, a_n^l)]$ lo cual es absurdo porque $((a_1^1, \ldots, a_1^j), \ldots, (a_k^1, \ldots, a_k^j)) \in R^{\mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_k}$ y φ define R en $\mathbb{P}_{fin}(\mathcal{K})$. Por lo tanto hay α_j que define R en $\mathcal{K}$. $\square$

5. Aplicaciones de las caracterizaciones semánticas para términos

La existencia de algunos tipos especiales de términos en un álgebra, puede ser caracterizada con definibilidad de relaciones. Dicho de una manera mas precisa, dada una $\mathcal{L}$-álgebra $\mathbf{A}$, el hecho de que ciertas relaciones sean definibles por fórmulas de determinados formatos en una nueva estructura $\mathbf{B}$ construida a partir de $\mathbf{A}$, es equivalente a que $\mathbf{A}$ posea términos que cumplan algunas propiedades concretas. En esta sección veremos algunos casos particulares de estas caracterizaciones.

Como la definibilidad de relaciones involucradas en esta sección, fue estudiada en este trabajo y en [1]. Sabemos que el hecho de que se de la definibilidad de una relación en una estructura $\mathbf{A}$ es equivalente a que se de alguna preservación de la relación para algún morfismo en algún conjunto de estructuras relacionadas con $\mathbf{A}$, es decir se puede caracterizar de forma *semántica*. Tenemos entonces que la existencia de los términos estudiados en esta sección es equivalente a un preservación de esta forma, es decir tiene una caracterización semántica. Dar las caracterizaciones de este modo excede al alcance de este trabajo.

5.1. Términos caracterizados con fórmulas relacionales

Teorema 59. *Sea $\mathbf{A}$ un $\mathcal{L}$-álgebra y sean $D_1, D_2 \subseteq A$, son equivalentes*

(1) Existe un $\mathcal{L}$-término $t_1(x_1)$ tal que

$$a \in D_1 \text{ sii } t^{\mathbf{A}}[a] \in D_2$$

para cada $a \in A$.

(2) Sea $\mathbf{A}' = (\mathbf{A},\, r^{\mathbf{A}'} = D_2,\, R^{\mathbf{A}'} = D_1)$. R es definible por una fórmula en $\mathrm{At}_r(\mathcal{L} \cup \{r\})$.

Demostración. (1)⇒(2). Sea $t(x_1)$ un $\mathcal{L}$-término tal que

$$a \in D_1 \text{ sii } t^{\mathbf{A}}[a] \in D_1$$

Veamos que $r(t)$ define R en $\mathbf{A}'$

$$\begin{array}{ccl} a & \in & D_1 \text{ sii } t^{\mathbf{A}}[a] \in D_1 \\ & \Downarrow & \\ a & \in & R^{\mathbf{A}'} \text{ sii } t^{\mathbf{A}'}[a] \in r^{\mathbf{A}'} \\ & \Downarrow & \\ a & \in & R^{\mathbf{A}'} \text{ sii } \mathbf{A}' \vDash r(t)[a] \end{array}$$

(2)⇒(1). Sea $\alpha \in \mathrm{At}_r(\mathcal{L} \cup \{r\})$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}'$. Como r es el único nombre de relación en $\mathcal{L} \cup \{r\}$, α debe ser de la forma $r(t)(x_1)$ donde t es un $\mathcal{L}$-término. Luego

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}' & \vDash & \alpha[a] \text{ sii } a \in R^{\mathbf{A}'} \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}' & \vDash & r(t)[a] \text{ sii } a \in D_1 \\ & \Updownarrow & \\ t^{\mathbf{A}'}[a] & \in & r^{\mathbf{A}'} \text{ sii } a \in D_1 \\ & \Updownarrow & \\ t^{\mathbf{A}'}[a] & \in & D_2 \text{ sii } a \in D_1 \\ & \Updownarrow & \\ t^{\mathbf{A}}[a] & \in & D_2 \text{ sii } a \in D_1 \end{array}$$

y por lo tanto t es el término buscado. □

Teorema 60. *Sea* $\mathbf{A}$ *un* $\mathcal{L}$*-álgebra y sean* $D_1, D_2 \subseteq A$*, son equivalentes*

(1) Existen $\mathcal{L}$-términos $t_1(x_1), ..., t_k(x_n)$ tal que

$$a \in D_1 \text{ sii } t_i^{\mathbf{A}}[a] \in D_2 \text{ para algún } i \in \{1, ..., k\}$$

para cada $a \in A$.

(2) Sea $\mathbf{A}' = (\mathbf{A},\ r^{\mathbf{A}'} = D_2,\ R^{\mathbf{A}'} = D_1)$. R es definible por una fórmula en $[\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L} \cup \{r\})]$.

Demostración. (1)⇒(2). Sean $t_1(x_1), ..., t_k(x_1)$ $\mathcal{L}$-términos $t_1(x_1), ..., t_k(x_1)$ tal que

$$a \in D_1 \text{ sii } t_i^{\mathbf{A}}[a] \in D_2 \text{ para algún } i \in \{1, ..., k\}$$

Veamos que $r(t_1) \vee ... \vee r(t_k)$ define R en $\mathbf{A}'$. Sea $a \in A$

$$\begin{array}{rcl} a & \in & D_1 \text{ sii } t_i^{\mathbf{A}}[a] \in D_2 \ \text{ para algún } i \in \{1, ..., k\} \\ & \Downarrow & \\ a & \in & R^{\mathbf{A}'} \text{ sii } t_i^{\mathbf{A}'}[a] \in r^{\mathbf{A}'} \ \text{ para algún } i \in \{1, ..., k\} \\ & \Downarrow & \\ a & \in & R^{\mathbf{A}'} \text{ sii } \mathbf{A}' \vDash r(t_i)[a] \text{ para algun } i \in \{1, ..., k\} \\ & \Downarrow & \\ a & \in & R^{\mathbf{A}'} \text{ sii } \mathbf{A}' \vDash r(t_1) \vee ... \vee r(t_n)[a] \end{array}$$

(2)⇒(1). Sea $\alpha \in [\bigvee \mathrm{At}_r(\mathcal{L} \cup \{r\})]$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}'$. Como r es el único nombre de relación en $\mathcal{L} \cup \{r\}$, α debe ser de la forma $r(t_1) \vee ... \vee r(t_n)$ donde $t_1, ..., t_k$ son $\mathcal{L}$-términos. Sea $a \in A$ se tiene que luego $t_1, ..., t_k$ son los términos buscados. □

Sea $\mathbf{A}$ un $\mathcal{L}$-álgebra, Sean $D_1, D_2 \subseteq A$, queremos saber si existe un $\mathcal{L}$-término $t(x_1)$ tal que

$$a \in D_1 \Rightarrow t^{\mathbf{A}}[a] \in D_2$$

Nuevamente caracterizaremos el problema en términos de definibilidad de una relación por una atómica.

Para eso definiremos una nueva estructura a partir de $\mathbf{A}$.

Sea f_0 un símbolo de función unaria que no esta en $\mathcal{L}$, y sean r, R dos símbolos de relación unaria, tomamos $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{f_0, r, R\}$.

Definimos la $\mathcal{L}'$-estructura $\mathbf{A}_p$ construida partir de $\mathbf{A}$, de la siguiente manera

-Universo $\mathbf{A}_p = A \cup \{z\}$ (donde $z \notin A$)

-$f^{\mathbf{A}_p}(b_1, ..., b_n) = \left\{ \begin{array}{cc} f^{\mathbf{A}}(b_1, ..., b_n\ ) & \text{si } b_1, ..., b_n \in A \\ z & \text{c.c} \end{array} \right\}$ para cada f símbolo de función n-aria en $\mathcal{L}$

-$f_0^{\mathbf{A}_p}(b) = \left\{ \begin{array}{cc} b & \text{si } b \in D_1 \\ z & \text{c.c} \end{array} \right\}$

-$r^{\mathbf{A}_p} = D_2$

-$R^{\mathbf{A}_p} = D_1$

Lema 61. *Sea $\mathbf{A}$ un $\mathcal{L}$-álgebra. Sean $D_1, D_2 \subseteq A$ son equivalentes*

(1) Existe un $\mathcal{L}$-término $t(x_1)$ tal que

$$a \in D_1 \Rightarrow t^{\mathbf{A}}[a] \in D_2$$

(2) Sea $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L} \cup \{f_0, r\}$. Existe una fórmula atómica en $\mathcal{L}_0$ que define R en $\mathbf{A}_p$.

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2). Sea $t(x_1)$ un $\mathcal{L}$-término tal que $a \in D_1 \Rightarrow t^{\mathbf{A}}[a] \in D_2$. Sea $t' = t(f_0(x_1))$, nótese que $r(t')$ define R en $\mathbf{A}_p$.

(2)$\Rightarrow$(1). Sea α una fórmula atómica que define a R en $\mathbf{A}_p$, α es de la forma $r(t)$. Sea $a \in A_p$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}_p & \vDash & r(t)[a] \text{ sii } a \in R^{\mathbf{A}_p} \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}_p & \vDash & r(t)[a] \text{ sii } a \in D_1 \\ & \Updownarrow & \\ t^{\mathbf{A}_p}[a] & \in & r^{\mathbf{A}_p} \text{ sii } a \in D_1 \\ & \Updownarrow & \\ t^{\mathbf{A}_p}[a] & \in & D_2 \text{ sii } a \in D_1 \end{array}$$

nótese que este término lleva los elementos de D_1 a D_2 tal como se desea, pero podría tener ocurrencias de f_0. Si no hay ocurrencias de f_0 en el término, entonces es justo el término que buscamos. Supongamos entonces que hay ocurrencias de f_0. Como tenemos para cada $a \in D_1$ se tiene que $t^{\mathbf{A}_p}(a) \in D_2$, esto nos dice que las ocurrencias de f_0 actúan como la identidad cuando se le aplica el término t a los elementos $a \in D_1$, por que si no, quiere decir que en algún momento se genera un z y esto llevaría a que el z se propagara (por como están definidas las funciones en $\mathbf{A}_p$) y finalmente ocurriría que $t^{\mathbf{A}_p}(a) = z$ y $z \notin D_2$, lo cual seria absurdo.

Por lo tanto sea t' el término resultante de limpiar a t de todas las ocurrencias de f_0 es el término buscado. $\square$

Aunque los teoremas anteriores enuncian resultados sobre términos declarados en una sola variable, las mismas ideas de las pruebas pueden utilizarse para generalizar estos teoremas para términos declarados en n variables.

5.2. Caracterización de una función biyectiva en una álgebra finita

Definición 62. Sea $\mathbf{A}$ un $\mathcal{L}$-álgebra. Sea $f : A^n \to A$ una función y $t(x_1, \ldots, x_n)$ un $\mathcal{L}$-término. Diremos que t define a f en $\mathbf{A}$ si se cumple que

$$t^{\mathbf{A}}[a_1, \ldots, a_n] = f(a_1, \ldots, a_n)$$

para cada $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Veremos que la existencia de un término que defina a una función en un álgebra finita, cuando dicha función es unaria y biyectiva, es caracterizable en términos de definibilidad de relaciones.

Para probarlo necesitaremos los siguientes resultados

Lema 63. *Sea $\mathbf{A}$ una $\mathcal{L}$-álgebra finita con $A = \{1, \ldots, k\}$. Sean $s(x_1), t(x_1)$ $\mathcal{L}$-términos. Se da que*

$$\begin{array}{ccl} \mathbf{A} & \vDash & (s = t)[a] \text{ para cada } a \in A \\ & \Updownarrow & \\ \mathbf{A}^k & \vDash & (s = t)[(1, ..., k)] \end{array}$$

Demostración. Supongamos $\mathbf{A} \vDash (s = t)[a]$ para cada $a \in A$, es decir, $s^{\mathbf{A}}[a] = t^{\mathbf{A}}[a]$ para cada $a \in A$. Luego

$$\begin{array}{rcl} s^{\mathbf{A}^k}[(1, ..., k)] & = & (s^{\mathbf{A}}[1], ..., s^{\mathbf{A}}[k]) \\ & = & (t^{\mathbf{A}}[1], ..., t^{\mathbf{A}}[k]) \\ & = & t^{\mathbf{A}^k}[(1, ..., k)] \end{array}$$

y entonces $\mathbf{A}^k \vDash (s=t)[(1,...,k)]$. Supongamos ahora que $\mathbf{A}^k \vDash (s=t)[(1,...,k)]$. Luego

$$\begin{array}{rcl} s^{\mathbf{A}^k}[(1,...,k)] & = & t^{\mathbf{A}^k}[(1,...,k)] \\ & \Downarrow & \\ (s^{\mathbf{A}}[1],...,s^{\mathbf{A}}[k]) & = & (t^{\mathbf{A}}[1],...,t^{\mathbf{A}}[k]) \end{array}$$

Esto nos dice que $s^{\mathbf{A}}[a] = t^{\mathbf{A}}[a]$ para cada $a \in A$, y por lo tanto $\mathbf{A} \vDash (s=t)[a]$ para cada $a \in A$. □

Corolario 64. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-álgebra finita con* $A = \{1,...,k\}$. *Sean* $s(x_1), t(x_1)$ $\mathcal{L}$*-términos. Se da que*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{A}^k & \vDash & (s=t)[(1,...,k)] \\ & \Downarrow & \\ \mathbf{A}^k & \vDash & (s=t)[(a_1,...,a_k)] \text{ para cada } (a_1,...,a_k) \in A^k \end{array}$$

Demostración. Supongamos $\mathbf{A}^k \vDash (s=t)[(1,...,k)]$. Por el Lema anterior tenemos que $s^{\mathbf{A}}[a] = t^{\mathbf{A}}[a]$ para cada $a \in A$. Sea $(a_1,...,a_k) \in A^k$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl} s^{\mathbf{A}^k}[(a_1,...,a_k)] & = & s^{\mathbf{A}^k}[(a_1,...,a_k)] \\ & = & (s^{\mathbf{A}}[a_1],...,s^{\mathbf{A}}[a_k]) \\ & = & (t^{\mathbf{A}}[a_1],...,t^{\mathbf{A}}[a_k]) \\ & = & t^{\mathbf{A}^k}[(a_1,...,a_k)] \end{array}$$

Por lo tanto $\mathbf{A}^k \vDash (s=t)[(a_1,...,a_k)]$. □

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente teorema:

Teorema 65. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-álgebra finita con* $A = \{1,\ldots,k\}$. *Sea* $f : A \to A$ *una función biyectiva. Sea* $\mathbf{A}_0 = (\mathbf{A}^k, r^{\mathbf{A}_0} = \{(f(1),\ldots,f(k))\}, R^{\mathbf{A}_0} = \{(1,\ldots,k)\}$. *Son equivalentes*

(1) Existe un $\mathcal{L}$*-término* $t(x_1)$ *que define* f *en* $\mathbf{A}$

(2) Existe una fórmula en $[\bigvee\bigwedge \mathrm{At}(\mathcal{L} \cup \{r\})]$ *que define* R *en* $\mathbf{A}_0$

Demostración. (1)⇒(2). Sea $t(x_1)$ un $\mathcal{L}$-término que define f en $\mathbf{A}$. Nótese que $r(t)$ define R en $\mathbf{A}_0$ ya que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}_0 & \vDash & r(t)[(a_1,\dots,a_k)] \\
& \Updownarrow & \\
t[(a_1,\dots,a_k)] & \in & r^{\mathbf{A}_0} \\
& \Updownarrow & \\
(t^{\mathbf{A}}[a_1],\dots,t^{\mathbf{A}}[a_k]) & = & (f(1),\dots,f(k)) \\
& \Updownarrow & \\
(f(a_1),\dots,f(a_k)) & = & (f(1),\dots,f(k)) \\
& \Updownarrow & \text{(como } f \text{ es biyectiva)} \\
(a_1,\dots,a_k) & = & (1,\dots,k)
\end{array}$$

(1)⇒(2). Sea $\varphi(x_1)$ en $[\bigvee\bigwedge \mathrm{At}(\mathcal{L}\cup\{r\})]$ que define R en $\mathbf{A}_0$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que φ es de la forma $\psi_1\vee\cdots\vee\psi_m$ donde cada ψ_i es conjunción de atómicas. Luego como $(1,\dots,k)\in R^{\mathbf{A}_0}$ tenemos que

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}_0 & \vDash & \varphi[(1,...,k)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & \psi_i[(1,...,k)] \text{ para algún } i\in\{1,...,m\}
\end{array}$$

ψ_i es de la forma $\alpha_1\wedge...\wedge\alpha_n$ donde cada α_j es atómica. Luego

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}_0 & \vDash & \psi_i[(1,\dots,k)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & \alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_n[(1,\dots,k)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & \alpha_j[(1,\dots,k)] \text{ para cada } j\in\{1,\dots,n\}
\end{array}$$

Si alguna de estas atómicas es de la forma $r(t)$, es inmediato que t define f en $\mathbf{A}$. Supongamos que ninguna atómica α_j es de esta forma, por lo tanto son todas igualdades de términos y $\psi_i=(s_1=t_1)\wedge\cdots\wedge(s_n=t_n)$. Entonces

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A}_0 & \vDash & (s_1=t_1)\wedge\cdots\wedge(s_n=t_n)[(1,\dots,k)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & (s_j=t_j)[(1,\dots,k)] \;\text{ para cada } j\in\{1,\dots,n\}
\end{array}$$

Pero entonces por el Corolario anterior puede verse que $\mathbf{A}_0\vDash(s_j=t_j)[(a_1,\dots,a_k)]$ para cada $(a_1,\dots,a_k)\in A^k$ para cada $j\in\{1,\dots,n\}$. Entonces en particular para $(1, \ldots, 1) \in A^k$ tenemos que

$$\begin{array}{lcl}
\mathbf{A}_0 & \vDash & (s_j = t_j)[(1, \ldots, 1)] \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\} \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & (s_1 = t_1) \wedge \cdots \wedge (s_n = t_n)[(1, \ldots, 1)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & \psi_i[(1, \ldots, 1)] \\
& \Downarrow & \\
\mathbf{A}_0 & \vDash & \varphi[(1, \ldots, 1)]
\end{array}$$

Lo cual es absurdo porque $(1, \ldots, 1) \notin R^{\mathbf{A}_0}$. Por lo tanto debe haber alguna atómica en ψ_i de la forma $r(t)$ y luego t define f en $\mathbf{A}$. $\square$

6. Una caracterización para un formato universal

En esta sección estudiaremos una caracterización de definibilidad de relaciones en una estructura finita para un formato cuyas fórmulas contienen cuantificadores universales.

Sea $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$[\forall x_n \mathrm{Op}(\mathcal{L})] = \{\forall x_n \varphi : \varphi \in \mathrm{Op}(\mathcal{L})\}$$

El formato que estudiaremos será

$$[\bigvee \forall x_n \mathrm{Op}(\mathcal{L})]$$

el conjunto de disyunciones de fórmulas del formato $[\forall x_n \mathrm{Op}(\mathcal{L})]$.

Definición 66. Sean R_1, R_2 dos relaciones diremos que R_2 extiende a R_1 si $R_1 \subseteq R_2$.

Teorema 67. *Sea* $\mathbf{A}$ *una* $\mathcal{L}$*-estructura finita y* $R \subseteq A^n$*. Son equivalentes:*

(1) Existe una fórmula en $[\bigvee \forall x_{n+1} \mathrm{Op}(\mathcal{L})]$ *que define* R *en* $\mathbf{A}$*.*

(2) Sean $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$ *y* $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *un isomorfismo tal que para cada* $z \in A$ *se puede extender* σ *a un isomorfismo* $\sigma_z : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}_1$ *donde* $\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1 \leq \mathbf{A}$ *y* $a \in \mathrm{Im}(\sigma_z)$*. Sean* $a_1, \ldots, a_n \in A_0$*, si* $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ *entonces* $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R^{\mathbf{A}}$*.*

Demostración. (1)$\Rightarrow$(2). Sea $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in [\bigvee \forall x_{n+1} \mathrm{Op}(\mathcal{L})]$ una fórmula que define R en $\mathbf{A}$. Sea $\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ un isomorfismo donde $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0 \leq \mathbf{A}$, tal que para cada $z \in A$ se puede extender σ a un isomorfismo σ_z tal que $z \in \mathrm{Im}(\sigma_z)$ y sea $(a_1, \ldots, a_n) \in R^{\mathbf{A}}$ con $a_1, \ldots, a_n \in A_0$. Veamos que $(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) \in R^{\mathbf{A}}$. Tenemos que φ es de la forma $\delta_1 \vee ... \vee \delta_j$ donde cada $\delta_i \in [\forall x_{n+1} \mathrm{Op}(\mathcal{L})]$. Luego

$$\begin{array}{rcl}
(a_1, \ldots, a_n) & \in & R^{\mathbf{A}} \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \delta_1 \vee \cdots \vee \delta_j[a_1, \ldots, a_n] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \delta_i[a_1, \ldots, a_n] \text{ para algún } i \in \{1, \ldots, j\}
\end{array}$$

Sin perdida de generalidad podemos suponer que δ_i es de la forma $\forall_{x_{n+1}}(\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k)$ donde cada $\beta_i \in [\bigwedge \pm \mathrm{At}(\mathcal{L})]$. Luego

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A} & \vDash & \forall_{x_{n+1}}(\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k)[a_1, \ldots, a_n] \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[a_1, \ldots, a_n, z] \text{ para todo } z \in A \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[a_1, \ldots, a_n, \sigma_z^{-1}(z)] \text{ para todo } z \in A \\
 & \Downarrow & \text{(como los } \sigma_z \text{ son isomorfismos)} \\
\mathbf{A} & \vDash & \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[\sigma_z(a_1), \ldots, \sigma_z(a_n), \sigma_z(\sigma_z^{-1}(z))] \text{ para todo } z \in A \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[\sigma_z(a_1), \ldots, \sigma_z(a_n), z] \text{ para todo } z \in A \\
 & \Updownarrow & \text{Como } a_1, \ldots, a_n \in A_0 \text{ y } \sigma_z \text{ extiende a } \sigma \\
\mathbf{A} & \vDash & \beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n), z] \text{ para todo } z \in A \\
 & \Updownarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \forall_{x_{n+1}}\beta_1 \vee \cdots \vee \beta_k[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)] \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \varphi[\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)] \\
 & \Updownarrow & \\
(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_n)) & \in & R^{\mathbf{A}}
\end{array}$$

(2)$\Rightarrow$(1). Sea $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ definimos

$$\alpha^{(a_1,\ldots,a_n)} = \forall_{x_{n+1}} \left(\bigvee_{z \in A} \Delta^{(a_1,\ldots,a_n,z),\mathbf{A}} \right)$$

donde los Δ son los diagramas atómicos de los vectores. Luego definimos la fórmula

$$\varphi = \bigvee_{\vec{a} \in R^{\mathbf{A}}} \alpha^{\vec{a}}$$

Veremos que φ define R en $\mathbf{A}$. Es fácil ver que $\vec{a} \in R^{\mathbf{A}} \Rightarrow \mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{a}]$. Ahora supongamos para algún $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ tenemos que $\mathbf{A} \vDash \varphi[\vec{b}]$ luego

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{A} & \vDash & \alpha^{\vec{a}}[\vec{b}] \text{ para algún } \vec{a} \in R^{\mathbf{A}} \\
 & \Downarrow & \\
\mathbf{A} & \vDash & \forall_{x_{n+1}} \left(\bigvee_{z \in A} \Delta^{(\vec{a},z),\mathbf{A}} \right) [\vec{b}] \text{ para algún } \vec{a} \in R^{\mathbf{A}}
\end{array}$$

Esto no dice que para cada $z \in A$ tenemos que

$$\Delta^{(\vec{a},d),\mathbf{A}}[b_1, \ldots, b_n, z] \text{ para algún } d \in A$$

por lo tanto sean

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{0,d} &= \text{subestructura generada por } \{a_1, \ldots, a_n, d\} \\
\mathbf{B}_{0,z} &= \text{subestructura generada por } \{b_1, \ldots, b_n, z\}
\end{aligned}$$

por el Lema 9, hay un isomorfismo $\sigma_z : \mathbf{A}_{0,d} \to \mathbf{B}_{0,z}$ tal que $\sigma_z(a_1) = b_1, \ldots, \sigma_z(a_n) = b_n, \sigma_z(d) = z$. Luego sean

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_0 &= \text{subestructura generada por } \{a_1, \ldots, a_n\} \\
\mathbf{B}_0 &= \text{subestructura generada por } \{b_1, \ldots, b_n\}
\end{aligned}$$

es fácil ver que cada uno de los isomorfismos σ_z extienden al isomorfismo$\sigma : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ en el cual $\sigma(a_1) = b_1, \ldots, \sigma(a_n) = b_n$. Por lo tanto $(b_1, \ldots, b_n) \in R^{\mathbf{A}}$. $\square$

Referencias

[1] M. Campercholi y D. Vaggione, *Semantical conditions for the definability of functions and relations,* Algebra Universalis **76** (2016), no. 1, pp 71-98.