

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

TESIS DOCTORAL



CONDICIONES DE CONTORNO BASADAS EN  
CARACTERÍSTICAS PARA LAS ECUACIONES  
GASDINÁMICAS Y MAGNETOHIDRODINÁMICAS.  
APLICACIÓN A LA DINÁMICA DE LOS ARCOS DE LA  
CORONA SOLAR

AUTOR: ING. ANDRÉS M. CIMINO

DIRECTOR: DRA. ANDREA COSTA

10 DE DICIEMBRE DE 2015



CONDICIONES DE CONTORNO BASADAS EN CARACTERÍSTICAS  
PARA LAS ECUACIONES GASDINÁMICAS Y  
MAGNETOHIDRODINÁMICAS.  
APLICACIÓN A LA DINÁMICA DE LOS ARCOS DE LA CORONA  
SOLAR

*por*

ING. ANDRÉS M. CIMINO

DRA. ANDREA COSTA

DIRECTOR

**COMISIÓN ASESORA**

DRA. ANDREA COSTA

ASOCIACIÓN

DR. SERGIO ELASKAR

FCEFYN-UNC

DR. JOSÉ A. INAUDI

FCEFYN-UNC

*Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de la  
Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de  
obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.*

CÓRDOBA, ARGENTINA  
10 DE DICIEMBRE DE 2015





ACTA DE EXAMENES

Libro: 00001

Acta: 03301

Hoja 01/01

LLAMADO: 1

10/12/2015

CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGRESO	COND.	NOTA	FIRMA
31449159	CIMINO, Andrés Martín	DNI: 31449159	2011	T	APROBADO	

SACCO, Carlos - GUTIERREZ, Gustavo - ROVIRA, Marta - INAUDI, José - SCHULZ, Walkiria -

Observaciones:

WALKIRIA SCHULZ

Córdoba, \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_.

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a: \_\_\_\_\_

1      -      1      -      1  
 Inscriptos   Ausentes   Examinados   Reprobados   Aprobados  
 03/12/2015 11:24:09



*A mi abuelo Miguel, por inspirarme a ser lo que soy hoy.*



---

# Agradecimientos

Como primera medida quisiera agradecer a mi familia, cuyo apoyo y comprensión incondicionales hicieron mucho más fácil mi vida como doctorando. Sobre todo a mis dos abuelas Yaya y Tita.

También me siento muy agradecido por tener muchos muy buenos amigos, que siempre supieron acompañarme en el día a día, en los momentos de alegría y de frustración. Siempre tuvieron buenos consejos para mí, compartimos muy lindos momentos y conversaciones, así como proyectos e ideas. Para ustedes, mi gratitud eterna. A los que están cerca, a los que están lejos, y a los que ya no están.

Por último quisiera agradecerle a mi directora la *Dra. Andrea Costa* y a mi codirector el *Dr. Sergio Elaskar* por su confianza y apoyo durante esta tesis, así como al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por financiar esta investigación.



---

# Resumen

**Palabras claves:** *Magnetohidrodinámica - Volúmenes Finitos- Condiciones de Contorno - Corona Solar .*

Continuando con la línea de estudio de trabajos anteriores, empleamos un esquema de alta resolución de volúmenes finitos para modelar numéricamente la dinámica de los arcos de la baja corona solar. El modelo numérico empleado consistió de un esquema 1D tipo Godunov de Harten Yee, tanto gasdinámico como magnetohidrodinámico. Evaluamos los flujos convectivos numéricos mediante un solver de Riemann aproximado del tipo de Roe. Para el caso del modelo MHD 1D usamos un solver de Riemann de Roe específico, desarrollado por Cargó y Gallice, y normalizamos las variables y vectores propios del sistema, para evitar la superposición no física de distintas ondas características.

A su vez hemos incluido términos de conducción no lineal de calor, pérdidas por radiación térmica específicas a los arcos coronales y efectos de deposición de energía para modelar correctamente la termodinámica del sistema, de acuerdo a la literatura específica.

Además implementamos al esquema anterior una formulación para las condiciones de borde con un método basado en características, que permitió un tratamiento físicamente más consistente de los contornos y la correcta resolución de ondas entrantes y salientes al dominio. Utilizamos un integrador temporal implícito TVD para lograr mayor estabilidad en el cálculo de los términos difusivos y de fuente.

Luego de calibrar y probar el esquema desarrollado, partimos de soluciones hidrostáticas encontradas en la literatura, e introdujimos perturbaciones en las variables del problema, para luego estudiar la evolución del sistema. Se estudió, por otro lado, la interacción entre los flujos convectivos, los difusivos y los efectos de los términos fuente, obteniendo patrones de ondas con velocidades y períodos similares a los de las observaciones.



---

# Abstract

**Keywords:** *Magnetohydrodynamics - Finite Volume Method- Boundary Conditions- Solar Corona.*

Continuing with the previous work of our research group, we used a high resolution TVD scheme to numerically model the dynamics of solar coronal loops. We used the one dimensional Godunov type flux developed by Harten and Yee, for both gasdynamics and magnetohydrodynamics. We also used an approximate Roe type Riemann solver to solve interphase fluxes. For the MHD system we used an exact Roe solver developed by Cargo and Gallice. We also normalised all variables, eigenvalues and eigenvectors of the system to avoid nonphysical results due to overlappings or indeterminations in characteristic waves.

We also included source and diffusive terms that account for nonlinear heat transfer, radiation emission of energy phenomena specific to coronal loops and energy deposition functions in order to correctly model the thermodynamics of the system, according to the available literature.

Furthermore, we coupled the mentioned scheme with a characteristic-based boundary condition model, which allowed to deal with incoming and outgoing waves at boundaries in a more physically consistent manner, solving the time evolution of the system at the boundaries. We also used a TVD backward Euler implicit scheme robust enough to solve for the complex and demanding source and diffusive terms present maintaining second order accuracy in both time and space.

After testing and validating the algorithm, we employed hydrostatic solutions for coronal loops as initial conditions. We then introduced perturbations in different variables to study the time evolution of the system. We then studied the interaction between convective and diffusive processes, and the influence of source terms on them, obtaining different wave patterns. Those patterns had velocities and periods that somewhat resemble those found in observations.



---

# Zusammenfassung

**Schlüsselwörter:** *Magnetohydrodynamik - Finite-Volumen-Verfahren - Grenzbedingungen - Sonnen Corona.*

Um an die früheren Arbeiten unserer Forschungsgruppe anzuschließen, haben wir ein hochauflösendes Total-Variation-Diminishing (TVD) Verfahren benutzt, um die Dynamik der koronalen Bögen zu modellieren. Wir haben dafür die 1D Godunov-Typ Flussfunktion von Harten und Yee verwendet, sowohl für die Gasdynamik als auch für die Magnetohydrodynamik.

Um das Riemann Problem in der Interphase von verschiedene Gitterzellen zu lösen, haben wir einen Roe Löser benutzt. Für das MHD-System verwendeten wir einen exakten Roe Löser, der von Cargo und Gallice entwickelt wurde. Des Weiteren haben wir alle Variablen, Eigenwerte und Eigenvektoren des Systems normalisiert, um die physikalisch unmögliche Überlagerung von charakteristischen Wellen zu verhindern.

Gleichzeitig haben wir auch Quellen und diffusive Effekte, nichtlineare Wärmeübertragung und spezifische Strahlungsemission für die koronalen Bögen und Energiezuwachs Funktionen eingeschlossen, um die Thermodynamik des Systems, entsprechend der verfügbaren Fachliteratur, vollständig zu modellieren.

Darüber hinaus haben wir für das beschriebene Schema ein Verfahren zur Herleitung der Grenzbedingungen entwickelt, das sich auf die charakteristischen Wellen stützt, und eine physikalisch konsistentere Beschreibung der Umgebung ermöglicht. Zusätzlich wird eine korrekte Auflösung der ein- und auslaufenden Wellen im Arbeitsbereich gewährleistet. Um eine höhere Stabilität in der Kalkulation der Quellen und Diffusionseffekte zu erreichen, haben wir einen TVD Backward-Euler-implizite Zeitintegrationsschema genutzt.

Nachdem wir unser Modell kalibriert und getestet hatten, haben wir hydrostatische Lösungen aus der Literatur verwendet, um unter dem Einfluss von Störungen die Dynamik des Systems zu studieren. Wir haben eine starke Interaktion zwischen den

Konvektionsflüssen und den Diffusionseffekten sowie den Wärmequellen gefunden. Diese Interaktion produziert nichtlineare Wellen mit ähnlichen Geschwindigkeiten wie man sie in der Literatur finden kann.

---

# Símbolos y Abreviaturas

## Símbolos

### Escalares

#### Griegos

$\alpha_i$  : Coeficientes de expansión espectral del sistema hiperbólico

$\alpha_f, \alpha_s$  : Coeficientes de normalización de Roe y Balsara (1996)

$\beta$  : Parámetro del plasma

$\beta_y, \beta_z$  : Campos magnéticos transversales normalizados

$\gamma$  : Exponente isoentrópico

$\epsilon_0$  : Permeabilidad eléctrica en el vacío

$\eta$  : Resistividad eléctrica

$\kappa$  : Conductividad térmica

$\kappa_{sp}$  : Constante de conductividad térmica de Spitzer (1962)

$\Lambda$  : Función parametrizada de pérdidas por radiación

$\Lambda_0$  : Escala de altura hidrostática

$\lambda_D$  : Longitud de Debye

$\lambda_{j+1/2}^{(l)}$  : valor propio asociado al autovector  $l$ -ésimo en la interfaz de las celdas  $j$  y  $j + 1$

$\mu$  : Condición limitadora del tamaño de paso de tiempo “CFL Like”

$\mu_0$  : Permeabilidad magnética en el vacío

$\rho$  : Densidad de masa

$\sigma$  : Función para mejorar la integración temporal del esquema de *Harten – Yee*

$\phi$  : Potencial eléctrico

$\Psi$  : Función de viscosidad numérica escalar

$\Omega$  : Dominio del sistema hiperbólico

### **Latinos**

$A$  : Área de la sección transversal

$a$  : Velocidad del sonido

$b_x$  : Velocidad de Alfvén en la dirección del flujo

$b_y, b_z$  : Velocidades de Alfvén transversales

$C_p$  : Calor específico a presión constante

$C_v$  : Calor específico a volumen constante

$C_{j+1/2}^{\pm}$  : Coeficientes de expansión del flujo numérico para una ley de conservación escalar en la interfaz de las celdas  $j$  y  $j + 1$

$D$  : Difusividad térmica

$E_H$  : Función de calentamiento

$E_{H0}$  : Coeficiente de la función de calentamiento

$e_i$  : Energía interna térmica (por unidad de volumen)

$e_t$  : Energía total (por unidad de volumen)

$f(u)$  : Función de flujo hiperbólico para una ley de conservación escalar

$FO$  : Número de Fourier

$g_j$  : Función limitadora para una ley de conservación escalar discreta evaluada en la celda  $j$

$k_B$  : Constante de Boltzmann

$H$  : Entalpía (por unidad de volumen)

$H_t$  : Entalpía total (por unidad de volumen)

$H^*$  : Entalpía total magnetohidrodinámica (por unidad de volumen)

$L$  : Longitud característica

$\mathcal{L}^{(l)}$  : Operador asociado a la onda  $l$ -ésima en los contornos.

$L_{rad}$  : Balance de calor por unidad de volumen cedido al exterior por radiación

$m_i$  : Masa de la partícula  $i$ -ésima

$n$  : Densidad de partículas

$p$  : Presión

$Pe$  : Número adimensional de Péclet

$\dot{Q}$  : Balance de calor por unidad de volumen transportado por conducción

$q_{sat}$  : Valor de saturación para el vector de flujo de calor por conducción

$q_i$  : Carga eléctrica de la partícula  $i$ -ésima

$T$  : Temperatura

$TV$  : Variación total de la solución del sistema de leyes conservativas

$u$  : Componente normal de la velocidad, variable conservada por una ley de conservación escalar

$v, w$  : Componentes transversales de la velocidad

## Vectores y Matrices

### Griegos

$\Lambda$  : matriz de valores propios

$\Phi$  : Función de viscosidad numérica para una ley de conservación vectorial

$\Psi$  : Función de viscosidad numérica vectorial

### Latinos

$\mathbf{A}$  : Matriz jacobiana del vector de flujo hiperbólico respecto a las variables conservativas

$\mathbf{AS}$  : Matriz jacobiana de los términos fuente respecto a las variables conservativas

$\mathbf{B}$  : Vector de campo magnético

$\mathbf{E}$  : Vector de campo eléctrico

$\mathbf{E}_j$  : Matrices de coeficientes del miembro izquierdo del esquema implícito de Yee et al. (1985)

$\mathbf{F}$  : Vector de flujo hiperbólicos

$\mathbf{g}$  : Aceleración de la gravedad

$\mathbf{g}_j$  : Función limitadora para el sistema de leyes de conservación evaluada en la celda  $j$

$\mathbf{j}$  : Densidad de corriente

$\mathbf{J}$  : Matriz jacobiana de los operadores de los contornos respecto a las variables conservadas

**L** : Matriz de vectores propios izquierdos del sistema en variables conservativas.

$\mathcal{L}$  : Vector de operadores asociados a ondas en los contornos.

**l** : Matriz de vectores propios izquierdos del sistema en variables primitivas.

$\hat{\mathbf{n}}$  : Versor normal

**P** : Matriz de transformación de variables conservativas a primitivas.

**q** : Vector de transporte de calor por conducción

**R** : Matriz de vectores propios derechos del sistema en variables conservativas.

**r** : Matriz de vectores propios derechos del sistema en variables primitivas.

**S** : Vector de términos fuente del sistema hiperbólico

**U** : Vector de variables conservativas

**V** : Vector de variables primitivas

**v** : Vector velocidad

**W** : Vector de variables características

**w** : Vector de velocidades con distribución probabilística

## Abreviaturas y acrónimos

**BC** : Boundary Conditions, condiciones de contornos

**FVM** : Finite Volume Method, método de volúmenes finitos

**IVP** : Initial Value Problem, problema de valor inicial

**MHD** : Magneto Hydro Dynamics: modelo magnetohidrodinámico

**TVD** : Total Variation Diminishing: método de variación total decreciente



---

# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VIII</b>
<b>Resumen</b>	<b>X</b>
<b>Abstract</b>	<b>XII</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>XIV</b>
<b>Símbolos y Abreviaturas</b>	<b>XVII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Plasma en la corona solar . . . . .	1
1.1.1. Arcos magnéticos . . . . .	3
1.1.2. Modelización numérica de los arcos coronales . . . . .	5
1.2. Organización de esta tesis . . . . .	7
<b>2. Sistemas Hiperbólicos y sus Propiedades</b>	<b>9</b>
2.1. Leyes de conservación . . . . .	9
2.2. Matriz jacobiana del flujo hiperbólico . . . . .	11
2.3. Problema de Riemann . . . . .	11
2.3.1. Campos característicos . . . . .	12
2.3.2. Variables características . . . . .	14
2.4. Formulación en variables primitivas . . . . .	14
<b>3. Modelos Físicos</b>	<b>17</b>
3.1. Términos fuente . . . . .	18

3.1.1.	Pérdidas de calor por radiación . . . . .	18
3.1.2.	Conducción de calor . . . . .	20
3.1.3.	Función de calentamiento . . . . .	23
3.2.	Ecuaciones de Euler . . . . .	23
3.2.1.	Conservación de la Masa . . . . .	24
3.2.2.	Conservación de la Cantidad de Movimiento . . . . .	24
3.2.3.	Conservación de la Energía . . . . .	24
3.2.4.	Sistema de Ecuaciones Conservativas . . . . .	25
3.2.5.	Formulación cuasi-lineal del sistema . . . . .	27
3.2.6.	Ecuaciones de Euler con sección variable . . . . .	28
3.2.7.	Adimensionalización de las ecuaciones de Euler . . . . .	29
3.2.8.	Parámetros para adimensionalización . . . . .	29
3.2.9.	Ecuaciones adimensionales . . . . .	33
3.3.	Modelo Magnetohidrodinámico . . . . .	35
3.3.1.	Concepto de plasma . . . . .	35
3.3.2.	Hipótesis del continuo. Parámetros básicos de un plasma: longitud de Debye y frecuencia de plasma. . . . .	37
3.3.3.	Obtención de la descripción continua a partir de la descripción estadística del plasma. . . . .	39
3.3.4.	Ecuaciones de Maxwell . . . . .	42
3.3.5.	Conservación de la masa . . . . .	42
3.3.6.	Conservación de la cantidad de movimiento . . . . .	44
3.3.7.	Inducción magnética . . . . .	45
3.3.8.	Conservación de la energía . . . . .	45
3.3.9.	Sistema MHD real en variables conservativas . . . . .	46
3.4.	Adimensionalización de las ecuaciones . . . . .	48
3.4.1.	Parámetros para adimensionalización . . . . .	48
3.4.2.	Ecuaciones adimensionales . . . . .	51
3.4.3.	Formulación conservativa para el sistema multidimensional . . . . .	53
3.4.4.	Jacobiano en variables primitivas . . . . .	55
3.5.	Sistema unidimensional . . . . .	57
3.5.1.	Normalización del sistema de ecuaciones . . . . .	60

<b>4. Esquema Numérico</b>	<b>67</b>
4.1. Discretización en volúmenes finitos . . . . .	67
4.2. Método TVD de Harten para una ley de conservación unidimensional	68
4.2.1. Generalización de Yee . . . . .	71
4.2.2. Extensión a sistemas multidimensionales . . . . .	72
4.3. Términos fuente . . . . .	74
4.4. Integración temporal . . . . .	76
4.4.1. Esquema implícito de Yee-Warming-Harten . . . . .	79
4.5. <i>Solver</i> de Riemann aproximado de Roe para MHD . . . . .	83
<b>5. Condiciones de Contorno</b>	<b>91</b>
5.1. Introducción . . . . .	91
5.2. Condiciones de contorno para el modelo gasdinámico . . . . .	93
5.2.1. Implementación para el Integrador Temporal Implícito . . . . .	98
5.3. Generalización del Modelo . . . . .	102
5.3.1. Pared sólida . . . . .	104
5.3.2. Salida . . . . .	105
5.3.3. Entrada . . . . .	109
5.4. Extensión al modelo MHD . . . . .	111
5.4.1. Ecuaciones asociadas a las ondas características . . . . .	113
5.4.2. Variación espacial de las variables primitivas en función de los operadores $\mathcal{L}$ . . . . .	115
5.4.3. Formulaciones particulares de las BCs para MHD . . . . .	116
5.4.4. Salida . . . . .	117
5.4.5. Entrada . . . . .	120
5.4.6. Implementación en el algoritmo . . . . .	123
<b>6. Resultados</b>	<b>125</b>
6.1. Casos gasdinámicos . . . . .	125
6.1.1. Tobera de sección variable . . . . .	125
6.1.2. Arco coronal de sección variable . . . . .	132
6.1.3. Convección difusión unidimensional compresible . . . . .	137
6.1.4. Tubo de choque de Sod . . . . .	145

6.2. Casos Hidrostáticos . . . . .	156
6.3. Casos Magnetohidrodinámicos . . . . .	161
6.3.1. Tubo de choque de Sod . . . . .	161
6.3.2. Tubo de choque MHD de Brio y Wu . . . . .	165
6.4. Arcos magnéticos con perturbaciones . . . . .	174
6.4.1. Incremento de calentamiento uniforme . . . . .	177
6.4.2. Incremento de calentamiento concentrado en las bases . . . . .	186
6.4.3. Pulso de presión en el centro del arco . . . . .	190
<b>7. Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>195</b>
7.1. Conclusiones . . . . .	195
7.2. Contribuciones originales . . . . .	197
7.3. Trabajo futuro . . . . .	198
<b>A. Derivadas de los operadores <math>\mathcal{L}_i</math> para el modelo de Euler</b>	<b>201</b>
A.1. Extremo izquierdo . . . . .	201
A.1.1. Operador $\mathcal{L}^{(1)}$ . . . . .	202
A.1.2. Operador $\mathcal{L}^{(2)}$ . . . . .	203
A.1.3. Operador $\mathcal{L}^{(3)}$ . . . . .	204
A.2. Extremo Derecho . . . . .	204
A.2.1. Operador $\mathcal{L}^{(1)}$ . . . . .	205
A.2.2. Operador $\mathcal{L}^{(2)}$ . . . . .	206
A.2.3. Operador $\mathcal{L}^{(3)}$ . . . . .	207
A.3. Derivadas de los vectores propios de las ecuaciones Euler . . . . .	208
<b>Bibliografía</b>	<b>209</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Plasma en la corona solar

Sobre la superficie del Sol (o de cualquier otra estrella de características similares) ocurre la emisión de la mayoría de la radiación óptica que podemos observar a simple vista. Esta región se conoce como *Fotosfera*. Existe otra región por encima de la superficie solar, donde la densidad del medio es mucho menor, la temperatura mucho más elevada y donde ocurren una gran variedad de fenómenos dinámicos. Dicha región se conoce como *Corona solar*, y está compuesta principalmente por hidrógeno completamente ionizado, más algunos oligoelementos responsables de la mayoría de la radiación electromagnética emitida. Entre estas regiones encontramos la *Cromosfera*, en la que la temperatura y densidad no varían demasiado, seguida de una pequeña región de transición, donde se produce un incremento abrupto de la temperatura. En la Fig. 1.1, tomada de la página web de la NASA, se esquematizan dichas regiones

La mayoría de la información disponible de la corona solar fue obtenida mediante telescopios espaciales en distintas longitudes de onda. Sobre todo en longitudes de onda extremo ultravioletas (EUV), rayos X blandos (SXR) y rayos X duros (HXR). La investigación y el entendimiento de los fenómenos de la física coronal dieron un salto importante cuando se pusieron en órbita los primeros telescopios espaciales, como el observatorio solar en la estación SKYLAB en la década del 70. En la década de los 90 varias misiones espaciales (entre ellas las Yohkoh de Japón (Ogawara et al., 1991), la SoHo y la TRACE (Handy et al., 1999)) permitieron obtener gran cantidad

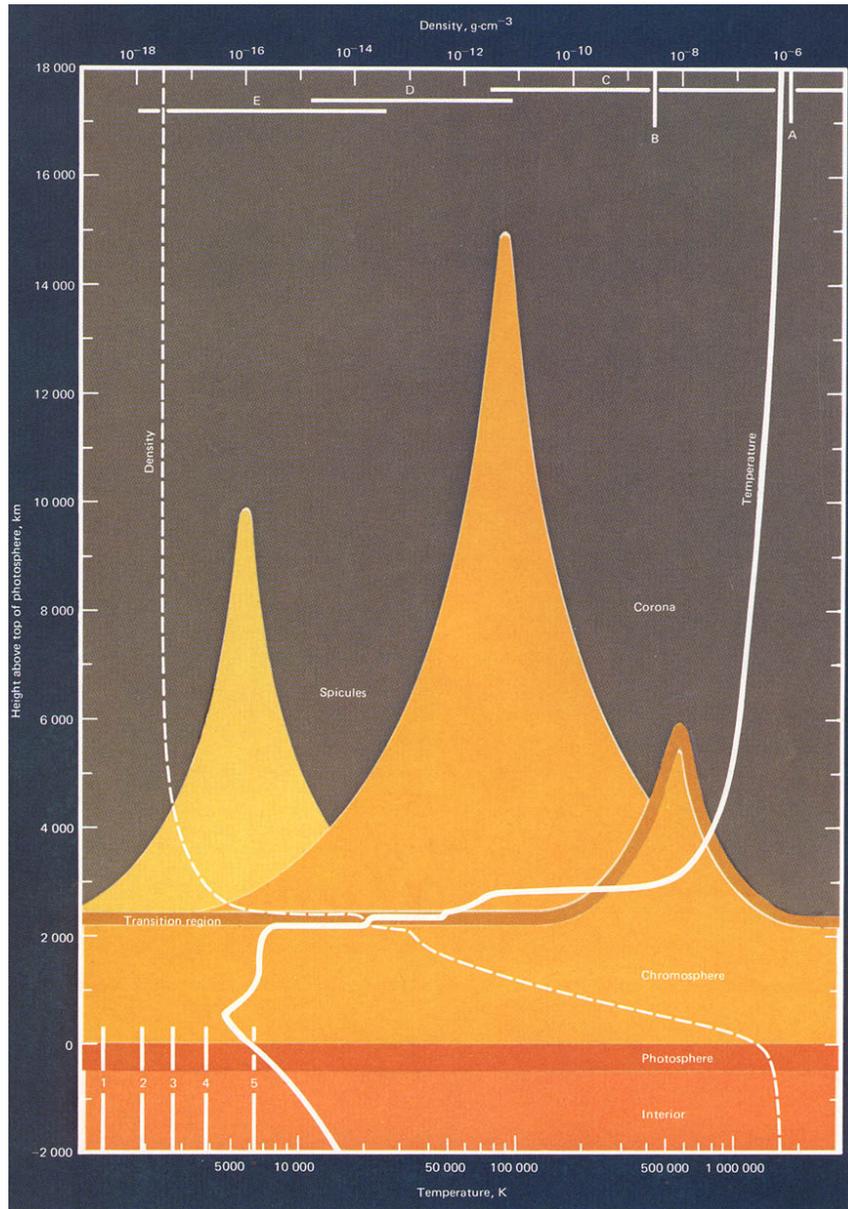


Figura 1.1: Esquema de las distintas regiones presentes en la atmósfera solar (tomado del sitio oficial de NASA: <http://history.nasa.gov/SP-402/p2.htm>)

de datos en las longitudes EUV y SXR. En la corona solar también existen fenómenos magnéticos de diversa topología, que producen flujos complejos del plasma de la corona solar. Generalmente suele distinguirse entre la llamada *Región activa*, donde la actividad magnética es mucho más intensa y existen puntos de concentración del

campo magnético de diferente polaridad. Por esta razón suelen formarse estructuras compuestas por líneas cerradas llamadas arcos magnéticos, o amplias regiones de protuberancias con forma similar a un casco, llamadas *Helmet Streamers*. Además suelen existir regiones donde las líneas de campo son abiertas, produciéndose flujo de plasma caliente y radiación electromagnética hacia el espacio exterior, conocidos como *soft X-Ray jets*. Los fenómenos anteriormente mencionados ocurren de manera lenta y no producen grandes desequilibrios energéticos locales. Sin embargo, existen otros fenómenos que involucran procesos abruptos y liberación de gran cantidad de energía magnética, tales como las fulguraciones (o *flares*) o las eyecciones de masa coronal (o *Coronal Mass Ejections, CMEs*)

Para cuantificar la influencia relativa de la energía asociada al campo magnético respecto a la energía térmica del plasma se emplea el parámetro  $\beta$  del plasma

$$\beta = \frac{p}{\frac{B^2}{2\mu_0}} \quad (1.1)$$

Cuando  $\beta \ll 1$  el campo magnético ejerce fuerzas que encapsulan y direccionan el flujo del plasma en la dirección de sus líneas, haciendo que éstas actúen como “tubos de flujo”. En general se acepta que la densidad de partículas en la cromosfera suele ser del orden de  $9 \cdot 10^{20}$  part/m<sup>3</sup> (lo que equivale a una densidad de masa de  $1,5 \cdot 10^{-6}$ kg/m<sup>3</sup>), y puede disminuir hasta seis órdenes de magnitud bajo ciertas condiciones, por ejemplo dentro de un arco coronal de gran longitud. Esto suele traer complicaciones desde el punto de vista numérico, ya que en la zona cercana al ápice del arco se tienen regiones con densidades mucho menores, lo que puede inducir que se obtengan presiones negativas si no se usa el esquema de flujo y el paso de tiempo adecuados.

### 1.1.1. Arcos magnéticos

Gran parte de la energía magnética de la corona está contenida en arcos magnéticos. Ellos se originan en regiones donde el campo magnético posee gran intensidad, formando estructuras tubulares que empiezan y finalizan en regiones de diferente polaridad. Inicialmente se pensaba que poseían grandes diámetros, pero observaciones más recientes confirman que son más bien haces de múltiples estructuras de pequeños

diámetros, a veces agrupadas. Dentro de ellos se produce flujo de plasma, actuando el campo magnético como barrera. De esta manera, cada arco tiene sus propias condiciones de densidad y temperatura, constituyendo cada uno de ellos una pequeña atmósfera aislada del resto. La dinámica del plasma en los arcos coronales está gobernada por el campo magnético, comportándose como un medio inhomogéneo donde el transporte de masa, cantidad de movimiento y energía ocurre principalmente a lo largo de las líneas de campo y, en cambio, es fuertemente inhibido en la dirección transversal a las mismas. En la corona solar el parámetro  $\beta$  suele tomar valores de alrededor de 0,01 (Aschwanden, 2004), lo que justifica el uso de un modelo unidimensional orientado en la dirección de las líneas de campo para el estudio de la dinámica de los arcos coronales.

La temperatura en la cromosfera suele ser del orden de los 7000 K, pero una vez que el plasma fluye en el interior de un arco ésta crece hasta valores de  $10^6$  K en el ápice del mismo (Aschwanden, 2004). Este fenómeno es aún discutido en la comunidad científica. Si bien los modelos que pretenden explicar el calentamiento son muy diversos (hay modelos de disipación de la turbulencia de la fotosfera, modelos de microreconexión magnética y de disipación de ondas (Coen, 2008)) hay sin embargo consenso en que el calentamiento es en última instancia debido a la transformación en energía cinética y calor de la energía magnética contenida en las estructuras magnéticas que emergen a la corona. Por otro lado, la radiación electromagnética juega un papel importante en el transporte de calor hacia el exterior del arco, debiéndose sobre todo a los oligoelementos presentes en el plasma coronal y teniendo mayor importancia en las zonas cercanas a las bases (Aschwanden, 2004). Por otro lado, la transferencia de calor por conducción tiene gran importancia en la dinámica de los arcos debido a que la conductividad térmica es no lineal y muy elevada, haciendo que en algunos casos este proceso sea más efectivo que la convección para el transporte de energía

Para modelar de forma correcta a los arcos coronales es necesario tener en cuenta los fenómenos termodinámicos anteriormente mencionados. Inicialmente se obtuvieron soluciones analíticas hidrostáticas con funciones para evaluar la transmisión de calor basadas en observaciones empíricas, como el de Rosner et al. (1978) y la generalización hecha por Serio et al. (1981). Estos trabajos seminales permitieron obtener

relaciones características entre diversos parámetros, como escalas de altura y relaciones entre cantidad de energía aportada y radiada en el exterior. También existen diversas soluciones numéricas, los autores Aschwanden y Schrijver (2002) propusieron una parametrización para aproximar soluciones en base a correlaciones con soluciones numéricas.

Por otro lado, autores propusieron soluciones hidrodinámicas simplificadas donde se asumía que el flujo es estacionario y adiabático o isotérmico, como el trabajo de Cargill y Priest (1980). Distintos autores encontraron inestabilidades de distintos tipos, como de *Rayleigh-Taylor*, debidas a desbalances en la ecuación de la energía debido a procesos radiativos o a la función de calentamiento, etc. (Priest, 1982).

Otros autores realizaron simulaciones numéricas, tanto hidrodinámicas (Müller et al., 2003) como magnetohidrodinámicas (Fernandez et al., 2009) para modelar arcos coronales formados en post fulguraciones.

### 1.1.2. Modelización numérica de los arcos coronales

La modelización numérica de los arcos de la corona solar presenta varios desafíos: como primera medida, existen condiciones de presión y densidad muy pequeñas. Si no se adimensionalizan las variables y el esquema de flujo numérico no está bien condicionado para esta situación, el sistema puede converger a soluciones físicamente imposibles (como presiones negativas) (Einfeldt et al., 1991). Además, en general los grandes gradientes espaciales y temporales que ocurren en los arcos coronales suelen ser difíciles de tratar numéricamente.

Por otro lado, los fenómenos energéticos no lineales que ocurren agregan complejidad. Uno de ellos es la emisión de energía por radiación. Ésta se produce por distintos fenómenos de recombinación y *bremstrahlung* que ocurren con los oligoelementos más pesados. Para modelar estos fenómenos es necesario emplear un modelo multiespecies con una base de datos con las tasas de reacción. Esto vuelve al sistema de ecuaciones rígido o "stiff", haciendo necesario el empleo de integradores temporales robustos y pasos de tiempo más pequeños. Müller et al. (2003) emplean las rutinas HAO-DIAPER para obtener las tasas de emisión de radiación de cada una de las especies existentes en la corona solar, junto con un integrador temporal implícito no lineal basado en el método de Newton-Raphson.

Por otro lado, en general las simulaciones de problemas astrofísicos involucran dominios de grandes dimensiones y son necesarias discretizaciones muy finas del mismo. Además, si se emplea el modelo magnetohidrodinámico es necesario resolver ocho ecuaciones por celda, lo cual insume un gran costo computacional. En los trabajos de Coen (2008) y Petralia et al. (2014) se emplean códigos paralelizados en lenguajes de alta performance.

En la presente tesis realizamos simulaciones de arcos mediante un modelo MHD unidimensional con términos fuente para tener en cuenta términos de conducción térmica, radiación electromagnética y fuentes de calentamiento definidas *ad hoc*. Los términos de radiación fueron tratados de una forma simplificada, pero de gran aceptación en la literatura. Esto permite usar un modelo sencillo y computacionalmente económico, pero suficientemente preciso para estudiar el comportamiento del fenómeno astrofísico. Para obtener mayor precisión en el cálculo de los términos convectivos usamos un esquema TVD de alta resolución, que permite resolver discontinuidades con buena precisión, manteniendo segundo orden de resolución en regiones donde la solución es continua. Para tratar adecuadamente los términos fuente fue necesario implementar un integrador temporal implícito tipo *Backward Euler*, sobre todo porque en ciertos casos el transporte de energía es tan intenso que ésta puede tomar valores negativos localmente. Además, este integrador temporal permitiría en un futuro utilizar un modelo multifluidos con modelos de radiación.

Finalmente, empleamos como condiciones iniciales distribuciones de densidad y temperatura basadas en soluciones hidrostáticas o hidrodinámicas, para luego añadirles perturbaciones y poder hacer análisis de sensibilidad. De esta manera empleamos condiciones iniciales más sofisticadas que las empleadas en trabajos anteriores del grupo, como el de Fernandez et al. (2009).

Debido a que las primeras simulaciones produjeron oscilaciones en el contorno y soluciones espurias, y debido a que generalmente el flujo de plasma en la cromosfera suele ser subsónico, fue necesario utilizar un modelo de condiciones de contorno más sofisticado para tener en cuenta fenómenos transitorios y modelar la física del problema de forma más consistente. Para ello empleamos un esquema de condiciones de contorno (BCs, Boundary conditions) basado en características. Mediante los operadores desarrollados por Thompson (1987), varios autores han adaptado y

probado distintos modelos de condiciones de contorno basados en características, como por ejemplo los trabajos de Poinsoy y Lele (1992), Sutherland y Kennedy (2003), T.Colonius (2004), etc. Estos modelos han sido utilizados en problemas de gran complejidad, como simulación directa de flujos turbulentos, combustión y flujos reactivos. Tienen la capacidad de adaptarse a cambios bruscos en el sistema y de reflejar o transmitir correctamente distintos tipos de ondas que llegan a los contornos. Sin embargo, no se ha avanzado demasiado en este tipo de modelos para el sistema MHD. En el trabajo de Dedner et al. (2001) los autores desarrollan un método de condiciones de no reflexión de ondas para MHD con términos fuente basado en expansiones asintóticas, y en el trabajo de Hayashi (2005) emplean un modelo basado en características para resolver un problema similar al del viento solar, pero para flujo estacionario con condiciones de entrada impuestas. La propuesta de la presente tesis fue la de desarrollar y probar un esquema basado en características que sea capaz de resolver transitorios y tratar de forma efectiva y consistente las diferentes ondas que pudieran ocurrir en arcos coronales.

## 1.2. Organización de esta tesis

Para llevar a cabo los estudios de los arcos coronales fue necesario implementar las herramientas anteriormente descritas, para un correcto tratamiento de las condiciones de contorno y para lograr que el integrador temporal pudiera resolver correctamente la dinámica de los términos parabólicos y fuente. Por eso, buena parte de la tesis se dedica a la descripción y validación de dichas herramientas.

En el Capítulo 2 describimos las propiedades de los sistemas hiperbólicos de ecuaciones. Los modelos gasdinámicos y magnetohidrodinámicos generalmente son expresados como leyes de conservación (Leveque, 2005), donde la evolución temporal y espacial del sistema se debe a familias de ondas no lineales que se propagan a partir de perturbaciones. Por esta razón una buena comprensión de las propiedades matemáticas de los sistemas hiperbólicos permite diseñar y entender los métodos numéricos utilizados en las simulaciones. Además, el modelo de condiciones de contorno utilizado aprovecha ciertas propiedades de los sistemas hiperbólicos.

En el Capítulo 3 describimos los modelos físicos con los que usualmente se es-

tudian los arcos coronales: los términos fuente existentes, el modelo gasdinámico de las ecuaciones de Euler, y el modelo Magnetohidrodinámico. Describimos también la forma de adimensionalizar las ecuaciones en ambos modelos para un buen condicionamiento del sistema de ecuaciones del integrador implícito, y la normalización de los valores y vectores propios del sistema MHD para salvar casos en los que el sistema se vuelve indeterminado

En el Capítulo 4 discutimos los detalles de la implementación numérica de los modelos físicos: Describimos el esquema TVD de Harten Yee utilizado para las simulaciones, el integrador temporal y la discretización numérica de los términos fuente.

En el Capítulo 5 describimos el modelo de condiciones de contorno que utilizamos, sus ventajas y propiedades. Describimos su extensión al esquema MHD y su implementación con el integrador temporal implícito.

En el Capítulo 6 discutimos primero los casos que usamos para validar las herramientas desarrolladas: primero modelos analíticos estacionarios para flujos gasdinámicos con distintos tipos de términos fuente, luego soluciones hidrostáticas para arcos coronales para validar el cálculo de los términos fuente. A continuación probamos el modelo de condiciones de contorno para casos inestacionarios tanto gasdinámicos como MHD y evaluamos el comportamiento del modelo de condiciones de contorno, y finalmente analizamos casos de soluciones hidrostáticas perturbadas para arcos coronales.

En el Capítulo 7 evaluamos las fortalezas y debilidades de la metodología implementada, y proponemos trabajos para seguir desarrollando la investigación.

---

## Capítulo 2

# Sistemas Hiperbólicos y sus Propiedades

### 2.1. Leyes de conservación

Muchos de los modelos matemáticos de flujos gasdinámicos y de plasmas tienen la propiedad de que pueden expresarse como leyes de conservación. Por esta razón, se han desarrollado gran cantidad de esquemas numéricos para resolver problemas relacionados a leyes de conservación, que a su vez tienen propiedades ventajosas respecto a la física del problema y al análisis de estimación de errores numéricos y estabilidad. Por esta razón, resulta pertinente hacer un breve resumen de las propiedades de las leyes de conservación

A continuación, se define lo que es una *ley de conservación*

**Definición 2.1** *Considerando una variable escalar  $u$ , que representa la densidad de una propiedad física por unidad de volumen en un dominio  $\Omega$  de  $n$  dimensiones, delimitado por una superficie de frontera  $A$ . Se dice que  $u$  cumple una ley de conservación si la variación temporal de  $u$  en el dominio considerado es igual y opuesta a los flujos  $\mathbf{F}(u)$  de dicha variable a través de la superficie  $A$ .*

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} u d\Omega = - \oint_A \mathbf{F}(u) \cdot \hat{\mathbf{n}} dA \quad (2.1)$$

La función de flujos es una función vectorial, que para el caso cartesiano tridimen-

sional puede expresarse mediante tres funciones escalares  $f(u)$ ,  $g(u)$ ,  $h(u)$  asociadas a las direcciones  $x, y$  y  $z$  respectivamente.

$$\mathbf{F}(u) = [f(u), g(u), h(u)] \quad (2.2)$$

Si la función  $u$  y su flujo  $\mathbf{F}(u)$  son continuos en el dominio considerado, puede aplicarse el teorema de la divergencia y expresarse la ley de conservación en forma diferencial:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(u) = 0 \quad (2.3)$$

Para una variable vectorial, el concepto de ley de conservación puede generalizarse expresando las  $m$  componentes escalares que componen la variable vectorial considerada. De la misma manera, pueden escribirse de forma compacta un conjunto de leyes de conservación en forma vectorial, donde  $\mathbf{U}$  es un vector de  $m$  variables conservativas y  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  el tensor de flujos de dichas variables.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0 \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix}; \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1(u_1, u_2, \dots, u_m) & g_1(u_1, u_2, \dots, u_m) & h_1(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ f_2(u_1, u_2, \dots, u_m) & g_2(u_1, u_2, \dots, u_m) & h_2(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ f_3(u_1, u_2, \dots, u_m) & g_3(u_1, u_2, \dots, u_m) & h_3(u_1, u_2, \dots, u_m) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_m(u_1, u_2, \dots, u_m) & g_m(u_1, u_2, \dots, u_m) & h_m(u_1, u_2, \dots, u_m) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

En el caso de que existan términos fuentes, el sistema dejará de ser conservativo. Dichos términos fuentes se añaden como un vector  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  en el miembro derecho de la ecuación.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (2.6)$$

Si el vector de términos fuente a su vez es función del gradiente del vector de variables de estado, el sistema deja de ser hiperbólico. Sin embargo, como en la mayoría de los problemas de mecánica de fluidos y plasmas el flujo está dominado por la convección, pueden utilizarse todas las herramientas matemáticas desarrolladas

para el cálculo de los flujos hiperbólicos (Leveque, 2005).

## 2.2. Matriz jacobiana del flujo hiperbólico

Aplicando la regla de la cadena de la derivación a la componente en  $x$  de la divergencia del tensor de flujos

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (2.7)$$

se obtiene la formulación *cuasi-lineal* del sistema conservativo, donde  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$  es la matriz jacobiana del sistema para la dirección  $x$ . De la misma manera, para las demás componentes de la divergencia se obtienen las jacobianas  $\mathbf{A}_y(\mathbf{U})$  y  $\mathbf{A}_z(\mathbf{U})$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{A}_y(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y} + \mathbf{A}_z(\mathbf{U}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z} = 0 \quad (2.8)$$

En el caso de que el sistema sea unidimensional, las derivadas  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial y}$  y  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial z}$  son nulas, por lo tanto sólo es necesario calcular la jacobiana  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$

A continuación se presenta el problema de Riemann para analizar las distintas soluciones posibles para un sistema de leyes de conservación:

## 2.3. Problema de Riemann

El problema de Riemann para el sistema de  $m$  leyes de conservación hiperbólico unidimensional es el problema de valores iniciales (IVP) más sencillo que existe. Consiste de dos estados iniciales constantes separados por una discontinuidad en  $x = 0$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{0} \quad \{-\infty < x < \infty, t > 0\} \quad (2.9a)$$

$$\mathbf{U}(t = 0, x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L^{(i)} & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_R^{(i)} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.9b)$$

La solución general del problema de Riemann es un sistema de  $m$  ondas características, cuyas velocidades de propagación son los valores propios  $\lambda_i$  del sistema.

Si todos los valores propios del sistema son reales y cada uno posee un vector propio linealmente independiente asociado, se dice que el sistema de ecuaciones es *hiperbólico*. Si los valores propios son reales y distintos, el sistema es *estrictamente hiperbólico*. Los valores propios del sistema representan velocidades de propagación de ondas, y los vectores propios el cambio en las variables de estado a través de una onda característica. Todo sistema hiperbólico posee dos tipos de vectores propios:

- Los vectores propios derechos  $\mathbf{R}^{(i)}$

Que cumplen la relación

$$\mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{R}^{(i)} = \lambda_i\mathbf{R}^{(i)} \quad (2.10)$$

- Los vectores propios izquierdos  $\mathbf{L}^{(i)}$

Que cumplen la relación

$$\mathbf{L}^{(i)}\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \lambda_i\mathbf{L}^{(i)} \quad (2.11)$$

Si se define la matriz  $\mathbf{R}$ , cuyas columnas son los vectores propios derechos; y la matriz  $\mathbf{L}$ , cuyas filas son los vectores propios izquierdos, dichas matrices cumplen la relación:

$$\mathbf{R} = \mathbf{L}^{-1} \quad (2.12)$$

### 2.3.1. Campos característicos

Cada velocidad característica  $\lambda_i$  y su vector propio asociado  $\mathbf{R}^{(i)}$  define un campo característico. Dichos campos característicos se clasifican en

- **Genuinamente no lineal**

Un campo característico es *genuinamente no lineal* si, para alguna normalización de  $\mathbf{R}^{(i)}$ , se cumple que el gradiente del valor propio asociado es monótono

$$\nabla_{\mathbf{U}}\lambda_i \cdot \mathbf{R}^{(i)} \neq 0 \quad (2.13)$$

Esto implica que la velocidad característica varía a través de la onda, permitiendo que éstas convergan o diverjan (Matatsuka, 2013).

- **Linealmente degenerado**

Un campo característico es *linealmente degenerado* si, por el contrario,

$$\nabla_{\mathbf{U}} \lambda_i \cdot \mathbf{R}^{(i)} = 0 \quad (2.14)$$

En ambos casos el gradiente  $\nabla_{\mathbf{U}}$  representa el gradiente respecto de las variables conservativas.

■ **No convexo**

Si el campo característico considerado para algunos valores de  $\mathbf{U}$  es *genuinamente no lineal*, y en otros es *linealmente degenerado*, se dice que el campo característico es *no convexo*

Si una familia de ondas del sistema es *genuinamente no lineal*, admite soluciones discontinuas (como ondas de choque) o continuas (como ondas de expansión). Si es *linealmente degenerada* admitirá sólo soluciones de la forma de discontinuidades de contacto. Pero si el campo característico es *no convexo* podrán existir estados donde a la izquierda y derecha existan ondas diferentes (choques y expansiones), o que dos ondas de la misma familia viajen en la misma dirección, sin alcanzarse nunca. Este fenómeno ocurre en el sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica, como se discutirá más adelante.

Cuando los vectores propios del sistema son linealmente independientes, pueden expresarse los estados izquierdo y derecho como combinación lineal de los mismos:

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{R}^{(i)}; \quad \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{R}^{(i)} \quad (2.15)$$

La solución a la izquierda de la onda asociada a  $\lambda_1$  es igual al estado inicial  $\mathbf{U}_L$ . De la misma manera, la solución a la derecha de la onda  $\lambda_m$  es igual a  $\mathbf{U}_R$ . El problema de Riemann es autosimilar, es decir dada una solución  $\mathbf{U}(t, x)$  del IVP dado por la Ec. (2.9), para cualquier constante  $\kappa > 0$  la función  $\mathbf{U}_\kappa(t, x) = \mathbf{U}(\kappa t, \kappa x)$  es también una solución de dicha Ecuación.

### 2.3.2. Variables características

Definiendo la matriz  $\mathbf{R}$  como la matriz cuyas columnas son los vectores propios del sistema, puede obtenerse un nuevo conjunto de variables mediante la transformación

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{U} \quad (2.16)$$

Dichas variables se conocen como *Variables Características*.

Al tener la matriz jacobiana  $\mathbf{A}$  un conjunto completo de vectores propios linealmente independientes, puede diagonalizarse mediante:

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{R} \quad \text{donde} \quad \Lambda_{i,i} = \lambda_i \quad (2.17)$$

De esta manera, se obtiene un sistema de  $m$  ecuaciones desacopladas que representan  $m$  problemas de Riemann escalares

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0 \quad (2.18a)$$

$$w_i(t = 0, x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } x < 0 \\ \beta_i & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.18b)$$

Cuya solución es:

$$w_i(x, t) = w_i(x - \lambda t, 0) \quad (2.19)$$

Luego, puede expresarse la solución en función de las variables conservativas como:

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i \mathbf{R}^{(i)} + \sum_{i=1}^I \beta_i \mathbf{R}^{(i)} \quad (2.20)$$

## 2.4. Formulación en variables primitivas

Si uno define un nuevo vector de variables  $\mathbf{V}$  mediante una relación definida a través de una matriz de transformación  $\mathbf{P}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \quad \text{donde} \quad P_{ij} = \frac{\partial U_i}{\partial V_j} \quad (2.21)$$

este nuevo vector de variables  $\mathbf{V}$  se conoce como vector de variables primitivas. Si se aplica esta transformación a un sistema conservativo unidimensional

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= 0 \\ \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{P}^{-1} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

se obtiene un nuevo sistema cuasi lineal

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A}_p(\mathbf{V}) \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = 0 \quad (2.22)$$

y definiendo la matriz  $\mathbf{Q}$  como

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{V}} \quad (2.23)$$

La matriz jacobiana  $\mathbf{A}_p$  de dicho sistema está dada por:

$$\mathbf{A}_p(\mathbf{V}) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \quad (2.24)$$

En general la definición de un sistema primitivo para un sistema conservativo dado no es única. Además, el sistema primitivo no necesariamente puede expresarse como ley de conservación; y en el caso de que se pueda, en general no estará en concordancia con las leyes de conservación físicas del problema. Esto puede verse claramente en las diferencias entre el sistema de Euler conservativo y el sistema primitivo en el libro de Toro (2009).

Sin embargo, se demuestra que los valores propios del sistema primitivo coinciden con los del sistema conservativo, y los vectores propios derechos pueden transformarse de un sistema a otro mediante una ley de la forma de la Ec. (2.21), es decir:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{P} \mathbf{r}^{(i)} \quad (2.25)$$

donde  $\mathbf{R}^{(i)}$  son los vectores propios derechos del sistema en variables conservativo, y  $\mathbf{r}^{(i)}$  son los del sistema en variables primitivas. De la misma manera, la transformación de los vectores propios izquierdos se realiza mediante:

$$\mathbf{L}^{(i)} = \mathbf{l}^{(i)} \mathbf{P}^{-1} \quad (2.26)$$

Donde  $\mathbf{L}^{(i)}$  son los vectores propios izquierdos del sistema en variables conservativo, y  $\mathbf{l}^{(i)}$  son los del sistema en variables primitivas.

---

## Capítulo 3

### Modelos Físicos

En la literatura relacionada al estudio de los arcos coronales se emplean principalmente dos modelos para su análisis:

#### **El modelo Hidrodinámico, o Gasdinámico**

Basado en las ecuaciones de Euler para un fluido compresible, que incluyen la conservación de la masa, de la cantidad de movimiento y de la energía.

#### **El modelo Magnetohidrodinámico**

Surge de una combinación de las ecuaciones de Euler con las ecuaciones de Maxwell del Electromagnetismo, vinculando la Fuerza de Lorenz con las velocidades de movimiento del plasma y la ley de Ampere.

Se justifica el uso de la formulación hidrodinámica en virtud de que en la mayoría de los arcos coronales se cumple la condición de que el parámetro  $\beta$  es mucho menor que 1 (Aschwanden, 2004). De esta manera, las líneas de campo magnético son lo suficientemente intensas para encapsular el flujo, favoreciendo los procesos de transporte en la dirección tangente a las mismas, e inhibiéndolos en la dirección normal. Entonces, puede tratarse al sistema como un sistema hidrodinámico equivalente que fluye a lo largo de las líneas de campo. Por otro lado, en la presente tesis se tuvieron en cuenta otro tipo de fenómenos no asociados con el transporte convectivo. Dichos fenómenos se trataron, en una primera aproximación, como términos fuente.

### 3.1. Términos fuente

Se ha comprobado a través de observaciones y modelos teóricos que los arcos coronales intercambian masa y energía con la corona y la cromosfera. Este intercambio se realiza a través de difusión térmica por conducción de calor a través de sus bases, y por radiación hacia el exterior a lo largo del arco. Además, existe un incremento de energía dentro de la corona cuyas causas aún no están del todo claras (Coen, 2008), pero que también cumple un rol crucial en la dinámica energética. Dichos efectos tienen gran importancia en la distribución de presiones y temperaturas y en los fenómenos de transporte. A pesar de la complejidad del sistema, se obtuvieron soluciones analíticas para casos simplificados, que proporcionan leyes de escala y estabilidad para distintos parámetros del problema (Serio et al., 1981). En el presente trabajo se tuvieron en cuenta dichos efectos como términos fuentes. Se aplican sobre la ecuación de la energía, mediante funciones simples basadas en observaciones o propuestas en la literatura.

#### 3.1.1. Pérdidas de calor por radiación

En la presente tesis utilizamos un modelo semiempírico de gran aceptación en la literatura (Aschwanden, 2004). Éste expresa a las pérdidas radiativas como función de la densidad de partículas  $n$  y una función  $\Lambda(T)$  obtenida de correlaciones de observaciones mediante radiotelescopios en espectro ultravioleta y de rayos X (Handy et al., 1999). Mediante el uso de ciertos filtros en los radiotelescopios es posible obtener imágenes en las que la intensidad de rayos mostrada es proporcional a la densidad de energía en el arco. Dicha correlación es indirecta, ya que la mayor parte de la radiación es emitida por oligoelementos, que representan cerca del 1% del total de las partículas. En base a consideraciones de equilibrio de energía es posible expresar las pérdidas por radiación como función de la densidad de partículas  $n = [\text{part}/\text{cm}^3]$  y una función empírica  $\Lambda(T)$  basada en regresiones de la intensidad de emisiones observada. Dicha función fue obtenida por Rosner et al. (1978) como una correlación de las observaciones de varios autores por funciones potenciales definidas a trozos.

$$L_{rad} = n^2 \Lambda(T) [\text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \text{s}^{-1}] \quad (3.1)$$

En la Fig. 3.1 se reprodujo el gráfico de dicha función. Las correlaciones empleadas

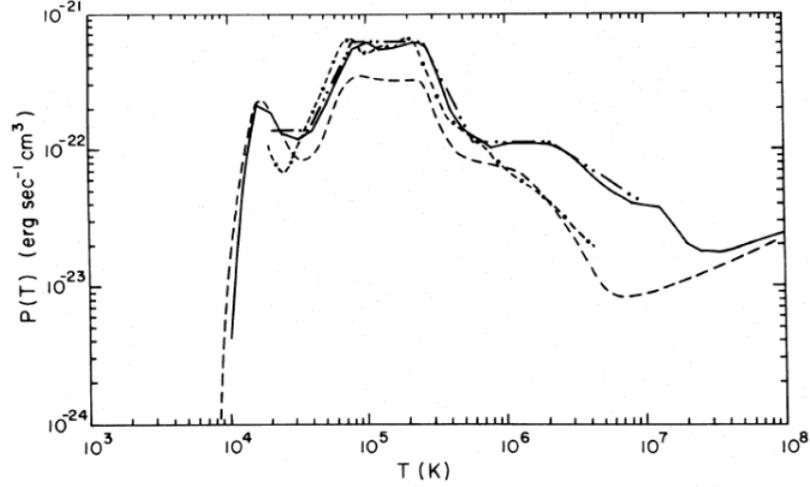


Figura 3.1: Función  $\Lambda(T)$  de pérdidas radiativas en función de la temperatura.

normalmente en la literatura son válidas para temperaturas mayores a los  $1,5 \cdot 10^4$  K, pero como en ciertos casos la temperatura en la cromósfera es menor a este valor, ajustamos una relación potencial para  $10^{4,0} < T < 10^{4,2}$ . Las funciones de correlación para  $\Lambda(T)$  se presentan a continuación:

$$\Lambda(T) = \begin{cases} 10^{-58,70} T^{8,81}; & 10^{4,0} < T < 10^{4,2} \\ 10^{-21,68}; & 10^{4,2} < T < 10^{4,3} \\ 10^{-21,85}; & 10^{4,3} < T < 10^{4,6} \\ 10^{-31} T^2; & 10^{4,6} < T < 10^{4,9} \\ 10^{-21,2}; & 10^{4,9} < T < 10^{5,4} \\ 10^{-10,4} T^{-2}; & 10^{5,4} < T < 10^{5,75} \\ 10^{-21,94}; & 10^{5,75} < T < 10^{6,3} \\ 10^{-17,73} T^{-2/3}; & 10^{6,3} < T < 10^7 \end{cases} \quad (3.2)$$

### 3.1.2. Conducción de calor

La conducción de calor sigue la Ley de Fourier, que define al vector flujo de calor como:

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla T \quad (3.3)$$

donde el coeficiente  $\kappa$  puede ser una función no lineal de la temperatura u otras variables termodinámicas.

Para modelar este coeficiente para un plasma completamente ionizado se empleó el modelo de Spitzer, basado en el modelo desarrollado por el mismo autor para obtener la conductividad eléctrica (Spitzer, 1962). Dicho modelo propone una relación no lineal para calcular el flujo de calor en la dirección paralela a las líneas del campo magnético  $\mathbf{B}$ . Se basa en considerar que el plasma está completamente ionizado, por lo que permite asumir que ocurren muchas colisiones de partículas y que el flujo de calor debido a la conducción se debe a las colisiones entre electrones y iones. Luego, la transferencia de calor será función de la energía cinética de los electrones. Teniendo en cuenta el teorema de la equipartición de la energía puede expresarse la misma en función de la temperatura de los electrones, pudiendo expresar de esta forma al coeficiente de transferencia de calor como:

$$\kappa = \frac{1,84 \cdot 10^{-5} T_e^{5/2}}{\ln \Lambda} \quad (3.4)$$

donde  $\ln \Lambda$  es el logaritmo de Coulomb,  $T_e$  es la temperatura de los electrones. Para temperaturas superiores  $4,2 \cdot 10^5$  K es:

$$\ln \Lambda = 29,7 + \ln \left( n^{-1/2} \frac{T_e}{10^6} \right) \quad (3.5)$$

En el presente trabajo asumimos que  $T_e = T$ , y definimos

$$\kappa_{sp} = \frac{1,84 \cdot 10^{-5}}{\ln \Lambda} \approx \text{constante} \quad (3.6)$$

Luego, la ley de Fourier puede expresarse como:

$$\mathbf{q} = -\kappa_{sp} T^{5/2} \nabla T \quad (3.7)$$

De manera que el término de difusión térmica puede expresarse como:

$$\dot{Q}_{cond} = -\nabla \cdot \mathbf{q} = \frac{d}{dx} \left( \kappa_{sp} T^{5/2} \frac{dT}{dx} \right) = \frac{2}{7} \kappa_{sp} \frac{d^2 T^{7/2}}{dx^2} \quad (3.8)$$

El plasma coronal es en realidad de tipo no colisional, por lo tanto no cumpliría con la hipótesis necesaria. Sin embargo, existe evidencia de que la ley de Spitzer puede emplearse también en caso de que el plasma sea no colisional (Goedbloed y Poedts, 2004).

### Saturación del flujo de calor

Sin embargo, el modelo de Spitzer no da resultados correctos en casos donde el camino libre medio de los electrones se torna suficientemente grande comparado a la longitud característica de la conducción. En este caso se dice que el flujo de calor por conducción está *saturado*. Los autores Cowie y McKee (1977) describen el modelo para la saturación del flujo de calor. El valor máximo del flujo de calor por conducción para un plasma puede expresarse como

$$q_{max} = \frac{3}{2} n_e k_B T_e v_c \quad (3.9)$$

Donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $v_c$  es una velocidad característica, del orden de magnitud de la velocidad de los electrones. Esta velocidad característica debe obtenerse de la función de distribución de los electrones, que además debe satisfacer que sea estable frente a perturbaciones en el campo eléctrico y que no transporte corriente neta. Los autores demostraron que si la fuente de calor posee una función de distribución Maxwelliana y existe un gradiente infinito de temperatura puede obtenerse un valor límite para el flujo de calor, dado por

$$q_{sat} = 0,4 \left( \frac{2k_B T_e}{\pi m_e} \right)^{1/2} n_e k_B T_e \quad (3.10)$$

Este valor máximo teórico es además poco sensible al valor de la función de distribución usada, lo que lo vuelve una estimación útil. Definiendo a la velocidad del sonido isotérmica como  $c_{iso} = (n_e k_B T_e)^{1/2}$  e introduciendo un factor  $\phi$  para tener

en cuenta las incertidumbres, puede expresarse el flujo de calor por conducción como:

$$q_{sat} = 5\phi\rho c_{iso}^3 \quad (3.11)$$

En el trabajo de Petralia et al. (2014) se propuso estimar el flujo de calor por conducción de la forma

$$\mathbf{q}_{cond\ lim} = \frac{q_{sat}}{q_{sat} + \|\mathbf{q}_{cond}\|} \mathbf{q}_{cond} \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{q}_{cond}$  es el flujo de calor dado por la teoría clásica de Spitzer.

Normalizando los flujo de calor por conducción respecto al flujo saturado según

$$\bar{\mathbf{q}}_{cond\ lim} = \frac{\mathbf{q}_{cond\ lim}}{q_{sat}}, \quad \bar{\mathbf{q}}_{cond} = \frac{\mathbf{q}_{cond}}{q_{sat}}, \quad (3.13)$$

obtenemos la expresión

$$\bar{\mathbf{q}}_{cond\ lim} = \frac{1}{1 + \|\bar{\mathbf{q}}_{cond}\|} \bar{\mathbf{q}}_{cond} \quad (3.14)$$

En la Fig. 3.2 comparamos ambos flujos de calor normalizados

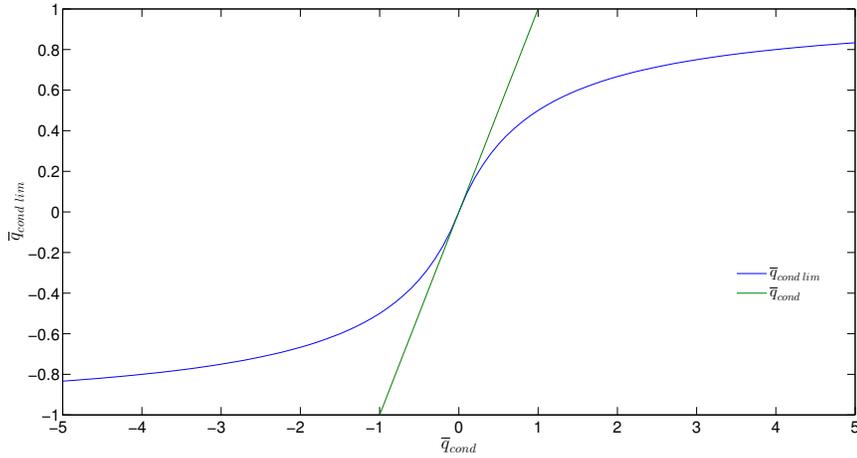


Figura 3.2: Comparación entre los flujos de calor por conducción limitado y convencional

### 3.1.3. Función de calentamiento

Se conoce que en la cromosfera existen grandes cantidades de energía almacenada en el campo electromagnético, en cambio en la corona tiene mayor importancia la energía térmica. De acuerdo a observaciones mediante telescopios de Raxos X y UV, la temperatura aumenta drásticamente desde la zona de la fotosfera (donde  $T < 10^4$  K) hacia la Corona (donde  $T \approx 10^6$  K) a través de una pequeña zona de transición. La causa de este incremento de temperatura es la transformación de energía almacenada en el campo magnético en energía térmica, pero el mecanismo por el cual esta transformación se lleva a cabo no se conoce con certeza todavía. Existen diversas teorías, algunas lo atribuyen a fenómenos de difusión turbulenta en ondas de Alfvén y magnetosónicas de alta frecuencia, otras a deposiciones de energía debidas a *nanoflares* y otras a fenómenos de reconexión magnética. En la práctica, varios autores modelan dicho efecto de calentamiento mediante funciones simples con un solo máximo en toda la longitud del arco. En el presente trabajo se empleó una función de calentamiento simétrica, definida para la mitad del arco como

$$E_H(x, t) = E_{H0} \exp\left(\frac{x - x_0}{H_{cal}}\right) \exp\left(-\frac{(t - t_0)^2}{\tau_{cal}^2}\right) \quad \text{para } 0 < x < L/2 \quad (3.15)$$

Donde  $E_{H0}$  representa la cantidad de calor depositada en la base, y  $H_{cal}$  y  $\tau_{cal}$  son escalas de altura y tiempo respectivamente, ajustadas con las observaciones. Esta función tiene la ventaja de permitir representar una función de calentamiento uniforme en el espacio cuando  $H_{cal} \rightarrow \infty$  y en el tiempo cuando  $\tau_{cal} \rightarrow \infty$ , y de permitir concentrar el efecto de calentamiento hacia las bases o el ápice. Este tipo de funciones de calentamiento se han empleado para obtener soluciones analíticas en varios trabajos, como (Aschwanden y Tsiklauri, 2009; Rosner et al., 1978; Serio et al., 1981); así como en soluciones numéricas (Müller et al., 2003).

## 3.2. Ecuaciones de Euler

El sistema de ecuaciones de Euler describe la dinámica de un fluido compresible en ausencia de viscosidad a través de tres leyes de conservación. Éstas son la ley de conservación de la masa, la ley de conservación de cantidad de movimiento lineal y

la ley de conservación de la energía.

### 3.2.1. Conservación de la Masa

En un sistema de coordenadas euleriano  $\{(t, \mathbf{x}) : t > 0, \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3\}$ , dado el vector velocidad para las tres componentes espaciales en  $\mathbf{x} = [x, y, z]$ , respectivamente

$$\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) := [u, v, w]$$

y siendo  $\rho(t, \mathbf{x})$  la densidad de masa del fluido. Luego la ley de conservación de la masa expresa que la masa de una partícula material arrastrada por el flujo no cambia en el tiempo. Para un sistema Euleriano se expresa de forma diferencial como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{v} = 0 \quad (3.16)$$

### 3.2.2. Conservación de la Cantidad de Movimiento

La ley de conservación de cantidad de movimiento expresa que la variación de la cantidad de movimiento asociada a una partícula diferencial que se mueve con el flujo es igual a la sumatoria de fuerzas externas que actúan sobre dicha partícula material.

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}^T}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I}p)]^T = \mathbf{S}_{cm}(\mathbf{U}) \quad (3.17)$$

donde  $p(t, \mathbf{x})$  es la presión del fluido. Y donde  $\mathbf{S}_{cm}(U)$  son términos fuente asociados a la cantidad de movimiento. En la presente tesis se incorporaron efectos del peso propio del fluido como términos fuente, que se expresan en función de la aceleración de la gravedad local  $\mathbf{g}$  como

$$\mathbf{S}_{cm}(\mathbf{U}) = \rho \mathbf{g} \quad (3.18)$$

### 3.2.3. Conservación de la Energía

Finalmente la ley de conservación de la energía total del fluido se escribe en forma diferencial como:

$$\frac{\partial \rho (e_i + \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \left\{ \rho e_i + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p \right\} \mathbf{v} \right] = \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{S}_e(\mathbf{U}) \quad (3.19)$$

donde  $e_i(t, \mathbf{x})$  es la energía interna por unidad de masa. La conservación de energía también puede ser expresada en función de otras variables termodinámicas, como la entalpia:

$$H = e_i + \frac{p}{\rho} \quad (3.20)$$

y la entalpia total

$$H_t = H + \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \quad (3.21)$$

Se demuestra que para un flujo adiabático la entalpia total se conserva a lo largo de una línea de corriente.

El término  $\nabla \cdot \mathbf{q}$  representa la transferencia de calor por conducción, donde  $\mathbf{q}$  es el vector flujo de calor .

$$\mathbf{q} = -\kappa \nabla(T) \quad (3.22)$$

Donde  $\kappa$  es un tensor de conductividad térmica. Para el caso de un medio de conductividad isotrópica y homogénea se reduce a un escalar.

En este caso los términos fuente representan aportes y sustracciones de energía debidas a la función de calentamiento, Ec.(3.15), y a la transferencia de energía hacia el exterior por emisión de radiación, Ec.(3.1). Además debe incluirse el efecto de transporte de energía potencial gravitatoria, dado por  $\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v}$  .

$$\mathbf{S}_e(\mathbf{U}) = \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} + L_{rad} + E_H \quad (3.23)$$

### 3.2.4. Sistema de Ecuaciones Conservativas

Las tres Leyes de conservación (3.16), (3.17) y (3.19) forman el sistema de ecuaciones de Euler. Introduciendo la definición de energía total  $e_t(t, \mathbf{x})$  como la suma de la energía interna y energía cinética por unidad de masa:

$$e_t = e_i + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \quad (3.24)$$

el problema de valores iniciales para el sistema de ecuaciones de Euler puede ser escrito en la forma compacta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\nabla \cdot \mathbf{F}) &= \mathbf{S}(\mathbf{U}) & \text{en } \mathbf{x} \in \Omega, t > 0 \\ \mathbf{U}(t = 0, \mathbf{x}) &= \phi(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (3.25a)$$

donde

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho \mathbf{v}^T \\ \rho e_t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho \mathbf{v} \\ \rho \mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I}p \\ (\rho e_t + p) \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (3.25b)$$

Una ecuación de estado (EOS) dada por relaciones termodinámicas provee la ecuación adicional necesaria para la clausura del sistema. Si se considera en todos los casos que el fluido es una mezcla de gases térmicamente perfectos, puede emplearse la Ecuación de estado calórica:

$$e_i = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)} \quad (3.26)$$

donde  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$  es el exponente isoentrópico para el gas o mezcla de gases considerados, y  $C_p$  y  $C_v$  son los calores específicos a presión y volumen constante, respectivamente. La temperatura del sistema se define como:

$$T = \frac{e_i}{C_v} \quad (3.27)$$

y el calor específico a volumen constante  $C_v$  está dado por:

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1} \quad (3.28)$$

### 3.2.5. Formulación cuasi-lineal del sistema

La matriz jacobiana para el sistema de Euler está dada por:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u^2 + \frac{\gamma-1}{2}\mathbf{v}^2 & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 \\ -\gamma\frac{e_t u}{\rho} + (\gamma-1)u\mathbf{v}^2 & \gamma\frac{e_t}{\rho} - \frac{\gamma-1}{2}[\mathbf{v}^2 + 2u^2] & (\gamma-1)uv & (\gamma-1)uw & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Cuyos vectores propios derechos son:

$$\mathbf{R}_c^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ H_t - ua \end{bmatrix}; \mathbf{R}_c^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \\ w \\ \frac{1}{2}\mathbf{v}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{R}_c^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ v \end{bmatrix}; \mathbf{R}_c^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ w \end{bmatrix}; \mathbf{R}_c^5 = \begin{bmatrix} 1 \\ u+a \\ v \\ w \\ H_t + ua \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

donde  $a$  es la velocidad del sonido y  $H_t$  la entalpía total del flujo, Ec. (3.21).

La matriz de transformación entre el sistema conservativo y el sistema primitivo, dada por la Relación (2.21), se expresa como:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 0 & 0 & 1 \\ uv & \rho v & \rho u & 0 & 0 \\ uw & \rho w & 0 & \rho u & 0 \\ \frac{1}{2}u\mathbf{v}^2 & \frac{1}{2}\rho\mathbf{v}^2 + \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p & \rho uv & \rho uw & \frac{\gamma}{\gamma-1}u \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

### 3.2.6. Ecuaciones de Euler con sección variable

En el caso de que sea necesario estudiar el flujo compresible en un conducto cuya sección varía, pueden extenderse las ecuaciones de Euler para tener en cuenta dichos efectos. Asumiendo que el área de la sección es sólo función de  $x$ , la ecuación de conservación de la masa para un volumen de control, despreciando términos de orden superior, puede expresarse como:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho A u}{\partial x} = 0 \quad (3.33)$$

Se observa que en este caso la magnitud transportada por el fluido es un producto entre la densidad y el área  $\rho A$ . De la misma manera, puede expresarse la conservación de la cantidad de movimiento como:

$$\frac{\partial \rho A u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho A u^2 + pA) - p \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (3.34)$$

Y la conservación de la energía

$$\frac{\partial \rho e_t A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[u(\rho e_t A + pA)] = 0 \quad (3.35)$$

De esta manera, la expresión de este sistema en forma conservativa es análoga a la de las ecuaciones de Euler ordinarias, con la adición de un término fuente en la cantidad de movimiento para incorporar los efectos de cambio de área:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho A \\ \rho A u \\ \rho e_t A \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho A u \\ \rho A u^2 + pA \\ (\rho e_t A + pA)u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ p \frac{\partial A}{\partial x} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Se observa que las variables conservativas y los flujos son los de las ecuaciones de Euler ordinarias multiplicadas por  $A$ . La matriz jacobiana del sistema conservativo es idéntica a la del sistema de Euler con área constante, por ende es independiente del área. Lo mismo ocurre con los vectores propios derechos asociados a dicha matriz.

El sistema puede expresarse en función de las variables primitivas  $\rho A$ ,  $u$  y  $pA$  de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho A \\ u \\ pA \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho A & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho A} \\ 0 & \gamma pA & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho A \\ u \\ pA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{p}{\rho A} \frac{\partial A}{\partial x} \\ (\gamma - 1)pu \frac{\partial A}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Las matrices de transformación entre el sistema conservativo y el sistema primitivo para este sistema son:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho A & 0 \\ \frac{1}{2}u^2 & \rho Au & \frac{1}{\gamma-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u & \rho A & 0 \\ u^2 & 2\rho Au & 1 \\ \frac{1}{2}u^3 & \frac{3}{2}\rho Au^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}pA & \frac{\gamma}{\gamma-1}u \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

### 3.2.7. Adimensionalización de las ecuaciones de Euler

Como en la presente tesis se trataron efectos de flujos difusivos y términos fuente, resulta práctico expresar el sistema de ecuaciones en variables adimensionales. Además, debido a que las ecuaciones que componen el sistema de leyes de conservación poseen diferentes unidades físicas, ocurre que las diferentes componentes de los vectores propios pueden tener órdenes de magnitud muy distintos. Esto resulta problemático desde el punto de vista numérico, sobre todo en el caso de la implementación de un integrador implícito. Además, desde el punto de vista físico, al adimensionalizar el sistema de ecuaciones, los términos fuente y difusivos quedan afectados por números adimensionales que dan información extra sobre la física del problema

Para adimensionalizar estas ecuaciones deben expresarse los operadores en función de los parámetros adimensionales y combinaciones de éstos. Dichas combinaciones forman los números adimensionales que describen la física del problema. Empleamos la notación de sobrelineado en esta sección para identificar a las variables adimensionales, y el subfijo *ref* para identificar los valores de referencia.

$$\frac{A}{A_{ref}} = \bar{A}$$

A continuación, se obtienen los valores por los que tienen que reemplazarse las variables dimensionales para adimensionalizar las ecuaciones:

### 3.2.8. Parámetros para adimensionalización

#### Longitudes

Las longitudes se adimensionalizan mediante una longitud de referencia  $L$ , que en general suele ser igual a la longitud o semilongitud del dominio considerado. Para cada una

de las dimensiones espaciales  $x_i$

$$\bar{x}_i = \frac{x_i}{L} \rightarrow x_i = L\bar{x}_i \quad (3.39)$$

Luego, los operadores asociados a derivadas respecto de variables espaciales pueden expresarse como:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}_i} = L\nabla \rightarrow \nabla = \frac{1}{L}\bar{\nabla} \quad (3.40)$$

## Densidad

Las densidades se adimensionalizan mediante una densidad de referencia, que suele estar relacionada a alguna condición física, como el valor en el contorno o un valor mínimo esperable.

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{ref}} \rightarrow \rho = \bar{\rho}\rho_{ref} \quad (3.41)$$

Debe tenerse en cuenta que, como los datos experimentales y valores de referencia están dados en función de la densidad de iones  $n_i$ , éstos deben multiplicarse por la masa promedio de todas las especies presentes para transformar a la variable  $\bar{\rho}$ .

## Velocidades

Optamos por adimensionalizar las componentes del vector velocidad  $v_i$  mediante una velocidad de sonido  $a$ ,

$$a^2 = \frac{\gamma P}{\rho} \quad (3.42)$$

ésta es la velocidad a la que se propaga la información física en el presente modelo. Como valor de referencia se adoptó un valor representativo del problema, generalmente el valor en el contorno

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{a_{ref}} \rightarrow v_i = a_{ref}\bar{v}_i \quad (3.43)$$

donde

$$a_{ref}^2 = \frac{\gamma P_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (3.44)$$

## Tiempo

El tiempo se adimensionaliza mediante un cociente entre la longitud de referencia y la velocidad de referencia, es decir:

$$\bar{t} = t \frac{a_{ref}}{L} \rightarrow t = \bar{t} \frac{L}{a_{ref}} \quad (3.45)$$

y el operador de derivada temporal, empleando el resultado anterior:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\frac{a_{ref}}{L} \partial t} = \frac{L}{a_{ref}} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{a_{ref}}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \quad (3.46)$$

Luego, la unidad de tiempo de referencia será:

$$t_{ref} = \frac{L}{a_{ref}}$$

## Presión y energía

Para adimensionalizar la presión de la energía utilizamos la Ec. (3.21) que define la entalpia total. Analizando las dimensiones de esta ecuación observamos que la presión y el producto densidad energía interna son dimensionalmente equivalentes al producto de la densidad por la velocidad al cuadrado:

$$[\rho e_i] = [p] = [\rho v^2]$$

Luego, se define al valor de referencia para la presión como:

$$p_{ref} = \rho_{ref} a_{ref}^2 \quad (3.47)$$

y al de la energía como:

$$e_{i ref} = a_{ref}^2 \quad (3.48)$$

entonces:

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_{ref} a_{ref}^2} \rightarrow p = \rho_{ref} a_{ref}^2 \bar{p} \quad (3.49)$$

$$\bar{e}_i = \frac{e_i}{a_{ref}^2} \rightarrow e_i = a_{ref}^2 \bar{e}_i \quad (3.50)$$

## Temperatura

La temperatura se adimensionaliza también mediante la conservación de la entalpía total, reconociendo que ésta es dimensionalmente igual a

$$[T] = \left[ \frac{L^2}{t^2} \right]$$

Luego, se emplea la velocidad del sonido para adimensionalizar la temperatura

$$\bar{T} = T \frac{1}{a_{ref}^2} \rightarrow T = \bar{T} a_{ref}^2 \quad (3.51)$$

El vector flujo de calor, definido como  $\mathbf{q} = -\kappa \cdot \nabla T$ , se adimensionaliza empleando un valor de referencia para la conductividad térmica  $\mathbf{k}$ :

$$\mathbf{q} = -\frac{\kappa_{ref} a_{ref}^2}{L} \bar{\mathbf{k}} \cdot \nabla \bar{T} \quad (3.52)$$

## Aceleración de la gravedad

La aceleración de la gravedad se adimensionaliza mediante una escala de altura relevante para la física del problema, que de acuerdo a la literatura (Aschwanden y Schrijver, 2002; Cargill y Priest, 1980) es:

$$\bar{g} = \frac{L}{\Lambda_0} \quad (3.53)$$

donde la constante  $\Lambda_0$  está asociada a la escala de longitud de la solución analítica para una columna hidrostática isotérmica

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{p_0 z}{\rho_0 g}\right)$$

Luego, la escala de altura asociada es:

$$\Lambda_0 = \frac{p_0}{\rho_0 g}$$

donde  $\rho_0$  y  $p_0$  corresponden a los valores de dichas variables para una altura de referencia, que suele considerarse en el contorno del dominio. Luego

$$\bar{g} = g \frac{\rho_0 L}{p_0}$$

En el presente trabajo se optó por agregar la constante  $\gamma$  a la adimensionalización, para así poder adimensionalizar con la velocidad del sonido. Esto trae como ventaja una ecuación más simple en variables adimensionales, que a su vez sigue respetando las magnitudes físicas usadas para la adimensionalización.

$$\bar{g} = g \frac{L}{a_{ref}^2} \quad (3.54)$$

### 3.2.9. Ecuaciones adimensionales

Reemplazando las expresiones de las variables dimensionales en función de las adimensionales, Ecs. (3.39), (3.40), (3.41), (3.51), (3.49), (3.45), y sacando factor común en cada caso, se obtienen las expresiones adimensionales de cada una de las ecuaciones de conservación.

Para simplificar las expresiones se expresan dichas ecuaciones en notación indicial (por ejemplo,  $\mathbf{a} = a_i$ , Panton (2013)), con la convención de los subíndices repetidos para el producto escalar  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i$  y para el producto externo  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = a_i b_j$ .

#### Continuidad

Sacando factor común  $\frac{a_{ref}}{L} \rho_{ref}$  en la Ecuación (3.16) de conservación de masa, permite expresarla de manera adimensional como:

$$\frac{a_{ref}}{L} \rho_{ref} \left[ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{v}_i) \right] = 0 \quad (3.55)$$

Luego, la expresión adimensional de la ecuación de continuidad es idéntica a su expresión dimensional

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{v}_i) = 0 \quad (3.56)$$

#### Conservación de cantidad de movimiento

Sacando factor común  $\frac{\rho_{ref} a_{ref}^2}{L}$  en el miembro izquierdo de la ecuación de cantidad de movimiento y resolviendo se obtiene la expresión adimensional de esta ley de conservación. Para el caso ideal, al ser un sistema homogéneo la ecuación adimensional tiene la misma forma que la dimensional. Sin embargo, en el sistema no ideal (no homogéneo) los términos

del miembro derecho quedan afectados por números adimensionales

$$\frac{\rho_{ref} a_{ref}^2}{L} \left\{ \frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\rho v_i v_j} + \delta_{ij} (\overline{p})] \right\} = \overline{\rho} \rho_{ref} \overline{g_i} \frac{a_{ref}^2}{L} \quad (3.57)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es la *delta de Kronecker*. Operando y simplificando obtenemos

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i}}{\partial t} + \nabla \cdot [\overline{\rho v_i v_j} - \delta_{ij} (\overline{p})] = \overline{\rho g_i} \quad (3.58)$$

### Conservación de energía

Para la ecuación de la energía se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_{ref} a_{ref}^3}{L} \left\{ \frac{\partial \overline{\rho e_t}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\overline{\rho e_t} + \overline{p}) \overline{v_i}] \right\} \\ = \frac{\kappa_{ref}}{L^2} a_{ref}^2 \nabla \cdot \overline{q_i} + E_H + L_{rad} + \rho_{ref} a_{ref} \frac{a_{ref}^2}{L} \overline{\rho g_i} \cdot \overline{v_i} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición del número de Péclet:

$$Pe = \frac{uL}{D} \quad (3.59)$$

donde  $D = \frac{\kappa}{C_p \rho}$  es la difusividad térmica.

$$\left\{ \frac{\partial \overline{\rho e_t}}{\partial t} + \nabla \cdot [(\overline{\rho e_t} + \overline{p}) \overline{v_i}] \right\} = \frac{1}{Pe} \nabla \cdot \overline{q_i} + \frac{L}{\rho_{ref} a_{ref}^3} E_H + \frac{L}{\rho_{ref} a_{ref}^3} L_{rad} + \overline{\rho g_i} \cdot \overline{v_i} \quad (3.60)$$

### Sistema de ecuaciones conservativas

Reemplazando los resultados anteriores (Ecs. (3.56), (3.58) y (3.60)) en las Ecuaciones de conservación (3.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \overline{\rho} \\ \overline{\rho \mathbf{v}} \\ \overline{\rho e_t} \end{bmatrix} + \frac{1}{L} \nabla \cdot \begin{bmatrix} \overline{\rho \mathbf{v}} \\ \overline{\rho \mathbf{v}} \otimes \overline{\mathbf{v}} + \mathbf{I}(\overline{p}) \\ (\overline{\rho e_t} + \overline{p}) \overline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \\ \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{Pe} \nabla \cdot (\overline{\kappa \nabla T}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\rho g_i} \\ \frac{L}{\rho_{ref} a_{ref}^3} E_H + \frac{L}{\rho_{ref} a_{ref}^3} L_{rad} + \overline{\rho g_i} \cdot \overline{v_i} \end{bmatrix} \quad (3.61) \end{aligned}$$

De ahora en adelante, a menos que se diga lo contrario, dejamos de lado el subrayado para designar variables adimensionales.

## 3.3. Modelo Magnetohidrodinámico

### 3.3.1. Concepto de plasma

Se estima que el 90 % de la materia visible del universo se encuentra en estado de plasma. Podemos identificar como plasmas a la corona solar, el medio interestelar, el medio interplanetario, el interior de muchas estrellas, el medio con el que se confina las reacciones nucleares en un reactor.

Un plasma consiste en un conjunto de partículas cargadas y libres que tienen comportamientos colectivos, gracias a la gran interacción que ocurre entre ellas debida a las fuerzas eléctricas y magnéticas autoinducidas por los movimientos de estas partículas y también debido a campos magnéticos externos. Las partículas son libres en tanto la energía cinética es mayor que la energía de interacción entre ellas, aunque las fuerzas que las

vinculan son de largo alcance. Como están cargadas, apartamientos de carga apreciables hacen que el plasma reaccione neutralizando el exceso de carga mediante la creación de campos eléctricos. El hecho de que estos campos intrínsecos o autoconsistentes impidan que haya grandes apartamientos de cargas se traduce, en general, en que los plasmas son globalmente (o estadísticamente) neutros. Es decir, el número de cargas positivas y negativas es aproximadamente el mismo para longitudes mayores que una longitud característica del plasma llamada *longitud de Debye*.

Podemos esbozar la siguiente definición para un plasma:

**Definición 3.1** *Un plasma es un fluido total o parcialmente ionizado, globalmente neutro, donde el comportamiento colectivo debido a fuerzas electromagnéticas define el estado del sistema.*

La complejidad de los plasmas es tanto de tipo temporal como espacial, y se caracteriza por la excitación de gran cantidad de modos dinámicos y colectivos.

Si se entrega energía a un gas mediante una descarga eléctrica o una elevada temperatura éste se ioniza produciendo a su vez cargas que son capaces de ionizar. La cantidad relativa de partículas ionizadas en función de la temperatura  $T$  para un gas en equilibrio termodinámico puede ser obtenida mediante la ecuación de Saha (Goedbloed y Poedts, 2004), asumiendo

una ionización de un sólo electrón

$$\frac{n_i}{n_e} = \left( \frac{2\pi m_e k_B}{h^2} \right)^{3/2} \frac{T^{3/2}}{n_i} \exp\left(-\frac{U_i}{k_B T}\right) \quad (3.62)$$

donde  $n_i$  y  $n_e$  son la densidad de partículas de iones y electrones respectivamente,  $k_B$  es la constante de Boltzmann  $h$  es la constante de Planck y  $U_i$  es el potencial de ionización del gas considerado. Teniendo en cuenta que la energía de ionización del hidrógeno es de 13,6 eV, el exponente de la expresión es  $-15,8 \cdot 10^{-4}/T$ . Esto significa que para que un gas se encuentre en estado de plasma se requieren temperaturas elevadas, que son poco comunes en las situaciones de la vida cotidiana. Por esta razón, el estudio de los plasmas en laboratorios requiere entrega de energía para generar las condiciones de densidad y temperatura necesarias para sostenerlos.

En general en los plasmas suelen ocurrir procesos de intercambio de energía que involucran radiación, recombinación e intercambio de calor entre especies. Los electrones libres emiten radiación electromagnética al ser acelerados y los iones, átomos y moléculas emiten y absorben radiación al excitarse y desexcitarse a diferentes niveles, radiación que a su vez produce ionización. Eventualmente se llega a un equilibrio entre los diferentes procesos dadas ciertas condiciones de interacción con las condiciones externas. Los procesos de ionización más importantes (que involucran átomos neutros  $A$ , iones  $i$  y electrones  $e$ ) son, entre otros, procesos asociados a:

- impacto electrónico ( $e + A \rightarrow i^{(+)} + 2e$ )
- ionización radiativa ( $h\nu + A \rightarrow i^{(+)} + e$ )

con sus procesos inversos asociados

- recombinación a tres cuerpos ( $i^{(+)} + 2e \rightarrow e + A$ )
- recombinación radiativa ( $i^{(+)} + e \rightarrow h\nu + A$ )

donde  $\nu$  es la frecuencia de onda asociada a la radiación emitida. En equilibrio termodinámico estos procesos se equilibran, cada proceso y su inverso producen la misma cantidad de reacciones por unidad de tiempo, lo que produce una población relativa de especies estacionaria que es función de la temperatura de cada especie. Sin embargo, puede asociarse una única temperatura a todos los procesos. Muy rara vez el plasma es lo suficientemente extenso y denso como para retener la radiación y establecer un equilibrio con ella (es el caso de los interiores estelares). Sin embargo, en la mayoría de los plasmas es posible tener

equilibrio termodinámico entre los procesos que no involucran radiación: la ecuación de Saha (Ec. (3.62)) permite obtener la población relativa de especies. Sin embargo, en las condiciones de la corona solar (y también en las condiciones habituales del plasma de laboratorio) la recombinación de tres cuerpos es mucho menos probable que la recombinación radiativa, se establece entonces un equilibrio no termodinámico, en el que la ionización por impacto es balanceada por recombinación radiativa.

### 3.3.2. Hipótesis del continuo. Parámetros básicos de un plasma: longitud de Debye y frecuencia de plasma.

En el caso de partículas no cargadas, para que un conjunto de éstas pueda pensarse como un continuo debe cumplirse la condición de que el camino libre medio entre colisiones resulte muy pequeño frente a las dimensiones lineales características. Muchos de los plasmas de interés son tales que las colisiones binarias (de a dos partículas) ocurren poco frecuentemente; se dice que dichos plasmas son no colisionales (Inan y Golkowski, 2011). Sin embargo, aun así puede utilizarse la hipótesis del continuo, ya que existen otros mecanismos físicos distintos a las colisiones binarias que hacen que los plasmas posean comportamiento colectivo (Costa, 2015).

Los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$  son los que se encargan de uniformizar las propiedades del plasma para longitudes mayores que una cierta longitud característica, permitiendo tratar al plasma como medio continuo. En ese caso se introduce una magnitud más apropiada que el camino libre medio que permite distinguir entre el comportamiento colectivo que genera dicha cuasi neutralidad y el comportamiento en el que dicha neutralidad no es posible: la *longitud de Debye*.

Para obtener la longitud de Debye de un plasma compuesto de hidrógeno monoatómico podemos asumir que el mismo está compuesto por iones de Hidrógeno y electrones, y que la densidad de partículas de cada especie sigue una distribución de Maxwell-Boltzmann para el potencial eléctrico  $\phi$

$$n_i(x) = n_{oi} \exp\left(-\frac{q_i\phi(x)}{k_B T}\right) \quad (3.63)$$

es posible determinar la distribución espacial de la densidad de carga  $\rho_{qi} = q_i n_i(x)$  y del campo eléctrico  $\mathbf{E}(x)$  mediante la Ley de Gauss de la electrostática:

$$-\frac{\partial^2 \phi(x)}{\partial x^2} = \frac{q_i n_i(x)}{\epsilon_0} \quad (3.64)$$

donde  $\epsilon_0$  es la permeabilidad eléctrica en el vacío. Asumiendo una perturbación en la distribución de cargas (por ejemplo que en una pequeña región existen sólo electrones) es posible encontrar una solución linealizada para el campo eléctrico, empleando las Ecs. (3.63) y (3.64).

$$\phi(x) = K \exp\left(-\frac{\|x\|}{\lambda_D}\right) \quad (3.65)$$

Donde  $\lambda_D$  es la longitud de Debye y  $K$  una constante. Dicha longitud cuantifica el alcance de una perturbación en el campo eléctrico local debida a un cambio local en la distribución de cargas de una especie dada.

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{q_i n_i}} \quad (3.66)$$

Por lo tanto, si la longitud característica del plasma en estudio es mucho mayor que la longitud de Debye  $\lambda_D$  pueden ignorarse los efectos de dichas perturbaciones. En este caso, el plasma puede considerarse como cuasi neutro, y por ende, como un medio continuo y homogéneo.

Ello se debe a que las interacciones dominantes son de largo alcance y que pequeños apartamientos de la neutralidad de carga son inmediatamente restituidos por la aparición de campos eléctricos locales, generando una dinámica que afecta colectivamente a gran número de ellas. Es decir, para problemas en los que interesa describir fenómenos con longitudes características mayores a la longitud de Debye de un plasma, éste puede ser descrito como un medio continuo en el que prevalece la cuasi neutralidad y para fenómenos cuya longitudes son menores a la longitud de Debye del plasma, este debe ser descrito como un conjunto de partículas discreto en los que el apartamiento de la cuasi neutralidad es importante.

La contraparte temporal de la longitud de Debye es la frecuencia de plasma. Dicha frecuencia da cuenta de la respuesta temporal del plasma para restituir el equilibrio de cargas, es equivalente a la frecuencia restitutiva de un resorte o frecuencia restitutiva ante oscilaciones de cargas. Existe una frecuencia asociada a cada especie que lo componen . En caso de un plasma de hidrógeno existirá una asociada a los iones y otra a los electrones:

$$\omega_{pe,i} = \sqrt{\frac{n_{e,i} q_{e,i}^2}{\epsilon_0 m_{e,i}}} \quad (3.67)$$

La frecuencia asociada a los electrones es la más importante y es usualmente denominada “frecuencia de plasma”, a secas. Esta frecuencia es la escala temporal más fundamental de los plasmas.

Dado que el plasma es estadísticamente neutro, pequeños apartamientos de la cuasineutralidad generarán pequeños campos eléctricos debidos al desbalance de cargas. Es decir, es esperable que en la pequeña escala encontremos apartamientos locales de la neutralidad. A la vez, un apartamiento de la neutralidad generará inmediatamente una fuerza restitutiva. La fuerza restitutiva lleva a oscilaciones espontáneas del plasma que ocurren a la frecuencia de plasma. Dado que los electrones se mueven mucho más rápidamente que los iones, éstos son los responsables fundamentales de la oscilación. En tal caso se puede considerar el modelo sencillo en que los iones están quietos y los electrones no tienen movimiento térmico. Es fácil demostrar que  $\omega_p$  corresponde a la oscilación electrostática típica en respuesta a una pequeña separación de cargas (M.Bellan, 2006).

Otra escala de longitud relevante de un plasma es el llamado radio de ciclotrón, o radio de Larmor. Considerando un campo magnético homogéneo y constante en el tiempo, una partícula con carga  $q$  poseerá un movimiento circular alrededor de las líneas de campo con una frecuencia de rotación

$$\Omega_c = \frac{qB}{m} \quad (3.68)$$

Y el radio de giro asociado a dicho movimiento, para un valor dado de velocidad perpendicular  $v_{\perp}$

$$r_c = \frac{v_{\perp}}{\Omega_c} \quad (3.69)$$

Las Ecs. (3.68) y (3.69) imponen restricciones sobre las escalas temporales y espaciales del problema a estudiar: si la escala espacial del problema es mucho mayor al radio de Larmor o si la escala temporal es mucho mayor que la inversa de frecuencia del ciclotrón, pueden ignorarse estos efectos.

### 3.3.3. Obtención de la descripción continua a partir de la descripción estadística del plasma.

Para entender al plasma como sistema dinámico hace falta notar que las partículas cargadas son aceleradas por fuerzas de Lorenz y gradientes de presión, pero a su vez el movimiento de dichas partículas produce cambios en la configuración espacial y temporal de los campos eléctrico  $\mathbf{E}$  y magnético  $\mathbf{B}$ . De esta manera, para modelizar un plasma es necesario expresar de forma consistente la realimentación entre los campos eléctrico y magnético con las ecuaciones de movimiento para un conjunto estadísticamente grande de partículas cargadas. Existen distintos niveles de aproximación para modelizar las ecuaciones de movimiento de las partículas.

El primero de ellos caracteriza al plasma a través de las funciones de distribución de probabilidad  $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{w}, t)$ , que representa la densidad de probabilidad para que existan partículas con una velocidad  $\mathbf{w}$  determinada en una posición  $\mathbf{x}$  y un instante de tiempo dados. Planteando la conservación de la derivada total de dicha función para cada especie, se plantea un sistema de ecuaciones para cada una de las  $i$  especies consideradas

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{w}_i \cdot \nabla f_i + q_i \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{w}_i}{c} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{w}_i} = 0 \quad (3.70)$$

conocidas como ecuaciones de Vlasov, que combinadas con las ecuaciones de Maxwell permiten determinar el comportamiento del plasma.

El segundo paso implica la integración en el espacio de velocidades a las funciones  $f_i$  y sus productos con las velocidades estadísticas  $\mathbf{w}$ , asumiendo algún tipo de distribución para así obtener ecuaciones de conservación de masa, de cantidad de movimiento y de energía. Teniendo en cuenta que la densidad de partículas, la densidad de cantidad de movimiento y la densidad de energía de las mismas puede obtenerse como

$$n_i = \int_0^\infty f_i d\mathbf{w}; \quad n_i \mathbf{v}_i = \int_0^\infty \mathbf{w} f_i d\mathbf{w}; \quad (3.71)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es la velocidad local promedio para la especie considerada. Por otro lado, expresando la velocidad probabilística  $\mathbf{w}$  como una suma de una componente media  $\mathbf{v}$  más una componente aleatoria  $\mathbf{w}'$  con media igual a 0.

$$\mathbf{w} = \mathbf{v}_i(x, t) + \mathbf{w}'(x, t) \quad (3.72)$$

Luego, integrando el producto

$$\begin{aligned} m_i \int_0^\infty \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} f_i d\mathbf{w} &= m_i \int_0^\infty (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}' + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}') f_i d\mathbf{w} \\ &= m_i \int_0^\infty (\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + \mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}') f_i d\mathbf{w} \\ &= m_i n_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i + m_i \int_0^\infty (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}') f_i d\mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.73)$$

El término  $m_i n_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$  representa la energía cinética del centro de masa del elemento considerado, y  $\mathbf{P}_i = m_i \int_0^\infty (\mathbf{w}' \cdot \mathbf{w}') f_i d\mathbf{w}$  da origen a un tensor de presiones. Se obtienen así expresiones para la conservación de la masa y cantidad de movimiento para cada una de

las  $i$  especies.

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot n_i \mathbf{v}_i = 0 \quad (3.74)$$

$$m_i n_i \left[ \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}_i \right] = -\nabla \cdot \mathbf{P}_i + n_i q_i (\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B}) + P_{ij} \quad (3.75)$$

Donde  $\mathbf{P}_i$  es el tensor de tensiones, y  $P_{ij}$  la cantidad de movimiento intercambiadas por colisiones entre las especies  $i$  y  $j$ . Nuevamente, combinadas con las ecuaciones de Maxwell, y considerando los iones y los electrones como dos especies independientes, se obtiene un set de ecuaciones que se conoce como *teoría de dos fluidos*. Dichas ecuaciones representan la conservación como medio continuo de la masa y cantidad de movimiento, definidas de forma relativa a la velocidad media de la especie considerada. Para darle clausura al sistema es necesario definir una ecuación de energía y una ecuación de estado, o simplemente alguna suposición sobre la termodinámica del modelo (procesos adiabáticos, isotérmicos, etc).

Un tercer paso de aproximación implica plantear las leyes de conservación considerando al plasma como un solo fluido, haciendo un promedio ponderado de todas las especies según su masa molecular  $m_i$ , y definiendo:

$$\rho = \sum m_i n_i, \quad (3.76)$$

$$\rho \mathbf{v} = \sum m_i n_i \mathbf{v}_i, \quad (3.77)$$

$$\mathbf{j} = \sum n_i q_i \mathbf{v}_i, \quad (3.78)$$

donde  $\rho$  es la densidad en masa,  $\mathbf{v}$  es la velocidad del centro de masa del elemento considerado y  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente. Esta última aproximación permite obtener la familia de modelos conocidos como magnetohidrodinámicos (MHD).

El modelo magnetohidrodinámico es un modelo relativamente sencillo para analizar la dinámica de plasmas empleando la mecánica del continuo. Posee la ventaja de considerar al plasma como un conjunto homogéneo de partículas en estado de cuasi neutralidad, lo que permite reducir el número de ecuaciones a resolver e ignorar los efectos de las oscilaciones de alta frecuencia. En el caso de un plasma, en general pueden existir partículas con diferente carga eléctrica neta y la interacción entre partículas de distinta carga. Dicho modelo surge de una combinación de el sistema de ecuaciones de Euler acopladas a las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell, que luego de una serie de hipótesis simplificativas y de trabajo algebraico, permite obtener un nuevo sistema de ocho ecuaciones escalares. Como primera medida, se introducen las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial.

### 3.3.4. Ecuaciones de Maxwell

Consisten de un conjunto de cuatro ecuaciones diferenciales vectoriales que describen las relaciones entre el campo eléctrico y el campo magnético para un medio o sistema de partículas conocido. Es decir, conociendo la carga  $q$ , la velocidad  $\mathbf{v}$  y la posición  $\mathbf{x}$  de cada partícula que compone el sistema, permiten determinar el campo eléctrico  $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ , el campo magnético  $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$  y las fuerzas electromagnéticas que actúan en cada partícula (M.Bellan, 2006).

#### Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \quad (3.79)$$

#### Ausencia de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.80)$$

#### Ley de inducción de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.81)$$

#### Ley de Ampere

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.82)$$

Teniendo en cuenta la relación

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz, es posible afirmar que si las velocidades características de los fenómenos estudiados son mucho menores a  $c$  puede despreciarse el término de la variación temporal del campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en la Ec. (3.82).

### 3.3.5. Conservación de la masa

En el caso de un plasma, en general pueden existir distintas especies con diferentes cargas( por ejemplo: iones de diversos tipos, electrones libres, etc). Por esta razón, debe expresarse una ecuación de conservación de masa para cada uno de los conjuntos de partículas existentes. Para el caso más simple de un plasma compuesto sólo por iones con carga

positiva unitaria y electrones libres, se tienen dos ecuaciones de conservación. Definiendo la densidad de partículas de una especie  $\alpha$  como:

$$n_\alpha = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta V} \quad (3.83)$$

donde  $N$  es el número de partículas contenidas en un elemento de volumen  $\Delta V$ .

Luego, la ley de conservación de la cantidad de partículas puede derivarse de la Ecuación de Vlasov (3.70) para los iones:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}_i) = 0 \quad (3.84)$$

De la misma manera, para los electrones:

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{v}_e) = 0 \quad (3.85)$$

Como la cantidad de partículas es igual a la suma de la cantidad total de electrones más la cantidad total de iones, puede definirse una densidad de partículas total de la siguiente manera

$$n = n_e + n_i \quad (3.86)$$

Cuando se considera un plasma globalmente neutro, en virtud de que las escalas del problema considerado son mucho mayores que la longitud de Debye (Ec. (3.66)), se cumple para un volumen dado:

$$n_e \approx n_i \rightarrow n \approx 2n_e$$

La densidad de masa para una especie se obtiene multiplicando su densidad de partículas por su masa molecular promedio. Por otro lado, se define la densidad del plasma como

$$\rho = mn \quad (3.87)$$

Donde  $m$  es una masa molecular promedio de todas las especies. Para el caso de un plasma compuesto sólo por iones y electrones:

$$\rho = n_e m_e + n_i m_i \approx n_i m_i \quad (3.88)$$

Ya que la masa de los electrones resulta despreciable respecto de la de los iones. Luego, multiplicando la ecuación de conservación de los iones por una masa promedio de las partí-

culas, se obtiene una ecuación de continuidad análoga a la del caso hidrodinámico (Euler), Ec. (3.16).

### 3.3.6. Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación de cantidad de movimiento es análoga a dicha ecuación en el modelo de Euler, con la diferencia que en el miembro derecho aparece una fuerza electromagnética de Lorenz sobre el volumen de partículas considerado

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}^T}{\partial t} + [\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}^T \otimes \mathbf{v} + \mathbf{I}p)]^T = \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{g} \quad (3.89)$$

donde  $\mathbf{j}$  es la densidad de corriente, dada por la Ec. (3.78). Para un plasma de Hidrógeno completamente ionizado puede expresarse como:

$$\mathbf{j} = q_e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e) \quad (3.90)$$

Multiplicando vectorialmente a ambos miembros de la Ec. (3.82) por  $\mathbf{B}$ , permite expresar el término  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$  como función de  $\mathbf{B}$ :

$$\mu_0 \mathbf{j} \times \mathbf{B} = (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

Usando la identidad

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})$$

se obtiene

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} \left[ \nabla \cdot (\mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) - \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right]$$

Reemplazando este resultado en la ecuación de cantidad de movimiento (Ec. (3.89)), puede agruparse el término del producto tensorial de  $\mathbf{B}$  con el de  $\mathbf{v}$ , y el término del producto escalar de  $\mathbf{B}$  con la presión:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B}) + \nabla (p + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) = \rho \mathbf{g} \quad (3.91)$$

### 3.3.7. Inducción magnética

Para expresar la ley de Inducción Magnética (Ec. (3.81)) en función sólo del campo magnético  $\mathbf{B}$ , es necesario relacionar el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  con el campo  $\mathbf{B}$  a través de la ley de Ohm. La ley de Ohm se obtiene planteando la suma de las ecuaciones de conservación de cantidad de movimiento de los electrones y la de los iones (3.75), previamente multiplicadas por  $q_e/m_e$  y  $q_i/m_i$  respectivamente. Teniendo en cuenta las Ecs. (3.76), y teniendo en cuenta que  $m_e \ll m_i$  puede obtenerse:

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = -\frac{q_e}{m_e} \nabla \cdot \mathbf{P}_e + \frac{n_e q_e^2}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) + q_e m_e \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{n_e q_e^2}{m_e} \eta \cdot \mathbf{j} \quad (3.92)$$

Si además se desprecian variaciones en la densidad de corriente por oscilaciones en el plasma  $\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}$ , los efectos del tensor de presión electrónica  $\nabla \cdot \mathbf{P}_e$  y la contribución del efecto Hall  $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ , la ley de Ohm se expresa como:

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \eta \cdot \mathbf{j} \quad (3.93)$$

donde  $\eta$  representa un tensor de resistividad general, que representa los efectos anisotrópicos en la conductividad eléctrica.

Tomando el rotor a ambos miembros, puede despejarse  $\nabla \times \mathbf{E}$ , que luego se reemplaza en la ecuación de la inducción magnética (3.81) y mediante la identidad vectorial

$$\nabla \times (\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) = \nabla \cdot (\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{A}_2) \quad (3.94)$$

permite obtener:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v}) = -\nabla \times \left[ \frac{1}{\mu_0} \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \right] \quad (3.95)$$

### 3.3.8. Conservación de la energía

De manera análoga al caso del sistema de Euler, esta relación representa el primer principio de la termodinámica para un plasma cuasi neutro. Se parte de la derivada sustancial de la energía del sistema, representada como la suma de la energía interna  $e_i$  y la energía cinética.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho e_i \right) + \nabla \cdot \left[ \mathbf{v} \left( \frac{1}{2} \rho \mathbf{v}^2 + \rho e_i \right) \right] + \nabla \cdot (p \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\mathbf{k} \cdot \nabla T) + \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} \quad (3.96)$$

donde la energía interna se relaciona con la presión y la densidad de acuerdo a la ecuación de estado, Ec. (3.26).

Para expresar la conservación de la energía en el sistema MHD resulta conveniente agregar la energía asociada al campo magnético  $\frac{B^2}{2\mu_0}$ , a la energía total  $e_t$  transportada por el fluido. Luego, la energía total  $e_t$  se define para dicho sistema como:

$$e_t = e_i + \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\rho\mu_0} \quad (3.97)$$

Luego, para introducir los términos magnéticos se suma a ambos miembros la ecuación de la inducción multiplicada escalarmente por  $\mathbf{B}$ . Por otro lado se reemplaza el valor de  $\mathbf{E}$  dado por la ley de Ohm (3.93), lo que permite obtener:

$$\begin{aligned} \frac{\rho\partial e_t}{\partial t} + \nabla \cdot \left[ \mathbf{v} \left( \rho e_t + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B}) \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \right] = \\ \nabla \cdot \left( \mathbf{k}\nabla T - \frac{1}{\mu_0} [\eta(\nabla \times \mathbf{B})] \times \mathbf{B} \right) + \rho\mathbf{v}\mathbf{g} \end{aligned} \quad (3.98)$$

### 3.3.9. Sistema MHD real en variables conservativas

Combinando las ecuaciones (3.16), (3.91) y (3.98), puede escribirse el sistema MHD en forma de ley de conservación con términos fuente.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho\mathbf{v} \\ \mathbf{B} \\ \rho e_t \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho\mathbf{v} \\ \rho\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{I} \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \\ \mathbf{v} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{v} \\ \left( \rho e_t + p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) \mathbf{v} - \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} \end{bmatrix} = \\ \nabla \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{k} \cdot \nabla T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho\mathbf{g} \\ -\nabla \times \frac{1}{\mu_0} \eta (\nabla \times \mathbf{B}) \\ L_{Rad} + E_H + \rho\mathbf{v}\mathbf{g} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.99)$$

A su vez deben agregarse dos ecuaciones más para la clausura del sistema:

#### Una ecuacion de estado

Para un gas monoatómico completamente ionizado sigue siendo válida la ley de gases

perfectos, por lo tanto se emplea una ecuación de estado de la forma (3.26).

### Conservación de la divergencia nula de $\mathbf{B}$

No es necesario incluir a la conservación de la divergencia del campo magnético  $\mathbf{B}$  como ecuación explícita en el sistema de leyes de conservación, ya que tomando la divergencia de la ecuación de la inducción (3.114) y manipulado algebraicamente el sistema, vemos que está implícita la condición

$$\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B}) = 0 \quad (3.100)$$

De esta manera, si es  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  inicialmente, esta condición debería mantenerse en el tiempo.

Sin embargo, debido a la inexactitud de los métodos numéricos, suelen generarse monopolos magnéticos espurios, que luego se van acumulando si el modelo numérico no los elimina explícitamente. Para salvar esta condición existen diferentes enfoques posibles, entre ellos:

- Resolver la divergencia de  $\mathbf{B}$  de manera aproximada en una malla colocalizada (“staggered”)
- Expresar el campo magnético en función de su potencial vector, con la desventaja de aumentar el orden de las ecuaciones diferenciales
- Cambiar la formulación del sistema de leyes de conservación para que la condición de divergencia nula se transporte como un escalar (Powell, 1995)
- Usar un esquema análogo al modelo de compresibilidad artificial para flujos incompresibles (Yalim, 2008)

Cuando se trata de un sistema MHD unidimensional, la condición de divergencia nula se simplifica, ya que al sólo existir derivadas no nulas en una dirección, en este caso la dirección  $x$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0 \quad \rightarrow B_x = \text{cte} \end{aligned} \quad (3.101)$$

## 3.4. Adimensionalización de las ecuaciones

Es necesario adimensionalizar el sistema MHD por las mismas razones que se adimensionaliza el sistema de Euler, y además porque las expresiones de las matrices jacobianas y los vectores propios son más sencillas en variables adimensionales, ya que desaparece el factor  $\mu_0$  de las ecuaciones. Nuevamente, por simplicidad usamos la notación indicial en el proceso.

### 3.4.1. Parámetros para adimensionalización

#### Longitudes

Las longitudes y los operadores de derivadas espaciales se adimensionalizan de la misma manera que para el sistema de Euler, de acuerdo a las Ecs. (3.39), (3.40).

#### Densidad

Las densidades se adimensionalizan mediante una densidad de referencia, al igual que para el sistema de Euler, de acuerdo a la Ec. (3.41).

Debe tenerse en cuenta que en muchos problemas astrofísicos y de dinámica de plasmas los datos y valores de referencia están dados en función de la densidad de partículas  $n$ , éstos deben multiplicarse por la masa promedio de las especies consideradas para transformar a la variable  $\bar{\rho}$ .

#### Velocidades

Debido a que en el modelo MHD la energía asociada al campo magnético  $\mathbf{B}$  es la más importante (en virtud de que el parámetro  $\beta < 1$ ); y a que las velocidades características del sistema dependen fuertemente del mismo, las velocidades se adimensionalizan mediante una velocidad de Alfvén. En el caso de un flujo unidimensional, se adopta la velocidad de Alfvén en la dirección  $x$   $b_{xref}$ .

$$\bar{v}_i = \frac{v_i}{b_{xref}} \rightarrow v_i = b_{xref} \bar{v}_i \quad (3.102)$$

la velocidad de Alfvén es la velocidad de propagación de las ondas homónimas, y se calcula como:

$$b_{xref} = \frac{B_{ref}}{\sqrt{\mu_0 \rho_{ref}}} \quad (3.103)$$

En el Sistema Internacional de Unidades (SI) el valor de la permitividad magnética en el vacío es de  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ . Sin embargo, en el sistema CGS (muy utilizado en artículos de astrofísica) la definición de la corriente es distinta, por lo tanto el valor de la constante  $\mu_0$  posee otro valor. Existen tres tipos de sistemas CGS: electrostático, electromagnético, y gaussiano. La física deja claro que existen sólo dos constantes independientes de entre  $\epsilon_0$ ,  $\mu_0$  y  $c$ , dependiendo de cómo se defina el sistema de unidades empleado. Las ecuaciones de Maxwell pueden expresarse independientemente del sistema de referencia usado de acuerdo al trabajo de Leung (2004), como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi k_c \rho_q \quad (3.104)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.105)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\alpha_l \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.106)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 4\pi \alpha_b \mathbf{j} + \frac{\alpha_b}{k_c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3.107)$$

En la tabla 3.1 se expresan los distintos factores de conversión para pasar de un sistema a otro. donde el factor de conversión  $b = 10^7 \text{ A}^2/\text{N} = 4\pi/\mu_0 = 4\pi\epsilon_0 c^2$

sistema	$k_c$	$\alpha_b$	$\epsilon_0$	$\mu_0$	$k_a = \frac{k_c}{c^2}$	$\alpha_l = \frac{k_c}{\alpha_B c^2}$
cgs electrostático(ESU)	1	$c^{-2}$	1	$c^{-2}$	$c^{-2}$	1
cgs electromagnético(EMU)	$c^2$	1	$c^{-2}$	1	1	1
CGS Gaussiano	1	$c^{-1}$	1	1	$c^{-2}$	$c^{-1}$
CGS de Lorenz Heavyside	$\frac{1}{4\pi}$	$\frac{1}{4\pi c}$	1	1	$\frac{1}{4\pi c^2}$	$c^{-1}$
SI	$\frac{c^2}{b}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{b}{4\pi c^2}$	$\frac{4\pi}{b}$	$\frac{1}{b}$	1

Tabla 3.1: Conversión de sistemas de unidades para las ecuaciones del electromagnetismo

### Campos magnéticos

Los campos magnéticos se adimensionalizan empleando un valor de campo de referencia. Para flujos unidimensionales, se cumple que  $B_x = \text{cte}$ , por lo que el valor de  $B_x$  resulta una elección natural.

$$\overline{B}_i = \frac{B_i}{B_{ref}} \rightarrow B_i = \overline{B}_i B_{ref} \quad (3.108)$$

## Tiempo

El tiempo se adimensionaliza mediante la longitud de referencia y la velocidad de Alfvén

$$\bar{t} = t \frac{b_{xref}}{L} \rightarrow t = \bar{t} \frac{L}{b_{xref}}$$

y el operador de derivada temporal, empleando el resultado anterior:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\frac{b_{xref}}{L} \partial t} = \frac{L}{b_{xref}} \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = \frac{b_{xref}}{L} \frac{\partial}{\partial \bar{t}}$$

Luego, la unidad de tiempo de referencia será:

$$t_{ref} = \frac{L}{b_{xref}}$$

## Presión

La presión mecánica se adimensionaliza con la presión magnética de referencia, ya que ésta última está asociada a la densidad de energía electromagnética :

$$\bar{p} = \frac{p}{\frac{B_{ref}^2}{\mu_0}} \rightarrow p = \frac{B_{ref}^2}{\mu_0} \bar{p}$$

## Temperatura

La temperatura se adimensionaliza mediante la velocidad de Alfvén al cuadrado.

$$\bar{T} = T \frac{1}{b_{xref}^2} \rightarrow T = \bar{T} b_{xref}^2 \quad (3.109)$$

## Energía

Por último, la energía total (compuesta por la suma de las energías interna, cinética y magnética) se adimensionaliza con la velocidad de Alfvén al cuadrado, que representaría además una densidad de energía (energía por unidad de masa) asociada al campo magnético.

$$\bar{e}_t = \frac{e_t}{\frac{B_{ref}^2}{\rho \mu_0}} \rightarrow e_t = b_{xref}^2 \bar{e}_t$$

### 3.4.2. Ecuaciones adimensionales

#### Continuidad

Sacando factor común  $\frac{b_{x_{ref}}}{L}\rho_{ref}$  en la ecuación de conservación de masa expresada en notación indicial (Ec. (3.16)) permite expresarla de manera adimensional

$$\frac{b_{x_{ref}}}{L}\rho_{ref} \left[ \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot (\bar{\rho} \bar{v}_i) \right] = 0$$

Luego, la expresión adimensional de la ecuación de continuidad es idéntica a su expresión dimensional

#### Conservación de cantidad de movimiento

De la misma manera que para el sistema de Euler, para el caso ideal la ecuación adimensional tiene la misma forma que la dimensional. Pero el miembro derecho del sistema no homogéneo queda afectado por números adimensionales:

$$\frac{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^2}{L} \left\{ \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{B}_i \bar{B}_j + \delta_{ij} \left( \bar{p} + \frac{\bar{B}_j \bar{B}_j}{2} \right) \right] \right\} = \bar{\rho} \rho_{ref} \bar{g}_i \frac{b_{x_{ref}}^2}{L} \quad (3.110)$$

Dividiendo a ambos miembros por  $\frac{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^2}{L}$ , y multiplicando y dividiendo el segundo miembro por  $u$ , se obtiene que los términos no homogéneos quedan multiplicados por:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{\nabla} \cdot \left[ \bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j - \bar{B}_i \bar{B}_j + \delta_{ij} \left( \bar{p} + \frac{\bar{B}_j \bar{B}_j}{2} \right) \right] = \bar{\rho} \bar{g}_i$$

#### Inducción electromagnética

En el miembro derecho de la ecuación de la inducción aparece el llamado número de *Reynolds Magnético*:

$$Re_M = \frac{\mu_0 u L}{\eta} \quad (3.111)$$

que representa una medida de la intensidad del acoplamiento entre el flujo y el campo magnético (Goedbloed y Poedts, 2004) y el número de Alfvén

$$Al = \frac{b_{x_{ref}}}{u} \quad (3.112)$$

Sacando como factor común los parámetros de referencia

$$\frac{B_{ref} b_{x_{ref}}}{L} \frac{\partial \overline{B}_i}{\partial \overline{t}} + \frac{B_{ref} b_{x_{ref}}}{L} \overline{\nabla} \cdot (\overline{v}_i \overline{B}_j - \overline{B}_i \otimes \overline{v}_j) = -\frac{B_{ref} \eta_{ref}}{L^2 \mu_0} \overline{\nabla} \times [\overline{\eta} (\overline{\nabla} \times B_i)] \quad (3.113)$$

obtenemos

$$\frac{\partial \overline{B}_i}{\partial \overline{t}} + \overline{\nabla} \cdot (\overline{v}_i \overline{B}_j - \overline{B}_i \overline{v}_j) = -\frac{1}{R_M Al} \overline{\nabla} \times [\overline{\eta} (\overline{\nabla} \times \overline{B}_i)] \quad (3.114)$$

## Conservación de energía

Para la ecuación de la energía se saca factor común  $\frac{b_{x_{ref}} B_{ref}^2}{a \mu_0}$  del miembro izquierdo, obteniéndose:

$$\frac{b_{x_{ref}} B_{ref}^2}{L \mu_0} \left\{ \frac{\partial \overline{e}_t}{\partial \overline{t}} + \overline{\nabla} \cdot \left[ \left( \overline{e}_t + \overline{p} + \frac{\overline{B}_j \overline{B}_j}{2} \right) \overline{v}_i - (\overline{B}_j \cdot \overline{v}_j) \overline{B}_i \right] \right\} = \frac{k_{ref}}{L^2} b_{x_{ref}}^2 \overline{\nabla} \cdot \overline{q}_i + E_H + L_{rad} + \rho_{ref} \frac{b_{x_{ref}}^3}{L} \overline{\rho g}_i \cdot \overline{v}_i \quad (3.115)$$

Los términos fuente resultan idénticos a los de la ecuación de energía del modelo de Euler, con la diferencia de que están afectados por un factor de adimensionalización distinto. Teniendo en cuenta las Definiciones del número de Péclet (3.59) y el de Alfvén (3.112) obtenemos:

$$\left\{ \frac{\partial \overline{e}_t}{\partial \overline{t}} + \overline{\nabla} \cdot \left[ \left( \overline{e}_t + \overline{p} + \frac{\overline{B}_j \overline{B}_j}{2} \right) \overline{v}_i - (\overline{B}_j \cdot \overline{v}_j) \overline{B}_i \right] \right\} = \frac{1}{Pe Al} \overline{\nabla} \cdot \overline{q}_i + \frac{L}{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^3} E_H + \frac{L}{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^3} L_{rad} + \overline{\rho g}_i \cdot \overline{v}_i \quad (3.116)$$

### Sistema de ecuaciones conservativas

Reemplazando los resultados anteriores en las Ecuaciones de conservación (3.99): Se observa que el sistema de ecuaciones es independiente del valor de  $\mu_0$  que se adopte.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \begin{bmatrix} \bar{\rho} \\ \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{e}_t \end{bmatrix} + \bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \\ \bar{\rho} \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{I} \left( (\bar{p} + \frac{\bar{\mathbf{B}}^2}{2}) \right) \\ (\bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{B}} - \bar{\mathbf{B}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) \\ (\bar{e}_t + \bar{p} + \frac{\bar{\mathbf{B}}^2}{2}) \bar{\mathbf{v}} - (\bar{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix} = \\ \bar{\nabla} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{PeAl} \bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{q}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\rho} \bar{\mathbf{g}} \\ -\bar{\nabla} \times \frac{1}{\mu_0} \eta (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{B}}) \\ \frac{L}{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^3} E_H + \frac{L}{\rho_{ref} b_{x_{ref}}^3} L_{rad} + \bar{\rho} \bar{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \end{bmatrix} \quad (3.117) \end{aligned}$$

A continuación, se presentan las formulaciones en variables conservativas y primitivas para los sistemas MHD adimensionales de siete y ocho ondas respectivamente. Para simplificar la notación, se le retirará el subrayado a las variables adimensionales, y de ahora en adelante, a menos que se diga expresamente lo contrario, se trabajará con el sistema adimensional.

### 3.4.3. Formulación conservativa para el sistema multidimensional

Expresando la Ecuación (3.117) en forma de un sistema de ecuaciones escalares adimensionales y sin incluir los términos fuentes, se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ e_t \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 - B_x^2 + p + \frac{B^2}{2} \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uv - B_x B_y \\ 0 \\ u B_y - B_x v \\ u B_z - B_x w \\ C_1 u - C_2 B_x \\ \rho v \\ \rho v^2 - B_y^2 + p + \frac{B^2}{2} \\ \rho vw - B_y B_z \\ \rho vw - B_y B_z \\ \rho vw - B_y B_z \\ v B_x - B_y u \\ 0 \\ v B_z - B_y w \\ C_1 v - C_2 B_y \\ \rho w \\ \rho w^2 - B_z^2 + p + \frac{B^2}{2} \\ \rho wv - B_z B_x \\ \rho wv - B_z B_x \\ \rho wv - B_z B_x \\ \rho ww - B_z B_z + p + \frac{B^2}{2} \\ w B_x - B_z u \\ w B_y - B_z v \\ 0 \\ C_1 w - C_2 B_z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.118) \end{aligned}$$

donde:

$$C_1 = e_t + p + \frac{B^2}{2}; \quad C_2 = B_x u + B_y v + B_z w; \quad B^2 = B_x^2 + B_y^2 + B_z^2$$

La naturaleza de la ecuación de la inducción (Ec. (3.95)) implica que el vector de flujo tenga componente nula para la dirección  $x$ . Esta condición es un problema para la implementación de la solución numérica de este sistema hiperbólico si se usa un esquema de flujos numéricos proyectados en la dirección normal a la cara de la celda (como en el caso de Powell (1995)), porque aparece un valor propio nulo en el sistema de vectores y valores propios. Los autores Peyrard y Villedieu (1999) y Sokolov et al. (2008) proponen posibles soluciones para este inconveniente.

De manera análoga al sistema de Euler, la matriz jacobiana para el flujo en la dirección  $x$  se expresa como:

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2u^2 + \frac{1-\gamma}{2}\mathbf{v}^2 & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & 0 & (2-\gamma)B_y & (2-\gamma)B_z & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & 0 & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{uB_y}{\rho} + \frac{vB_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ -\frac{uB_z}{\rho} + \frac{wB_x}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 & u & 0 \\ Ac_{8,1} & Ac_{8,2} & Ac_{8,3} & Ac_{8,4} & 0 & Ac_{8,5} & Ac_{8,6} & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

donde

$$\begin{aligned} Ac_{8,1} &= -\gamma \frac{e_t u}{\rho} + (\gamma - 1) u \mathbf{v}^2 - \frac{2 - \gamma}{2} u \frac{B^2}{\rho} + \frac{B_x}{\rho} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{v}) \\ Ac_{8,2} &= \left( \gamma \frac{e_t}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{2} [\mathbf{v}^2 + 2u^2] + \frac{2 - \gamma}{2} \frac{B^2}{\rho} \right) - \frac{B_x^2}{\rho} \\ Ac_{8,3} &= (1 - \gamma) uv - \frac{B_x B_y}{\rho} \\ Ac_{8,4} &= (1 - \gamma) wu - \frac{B_z B_x}{\rho} \\ Ac_{8,6} &= (2 - \gamma) B_y u - B_x v \\ Ac_{8,7} &= (2 - \gamma) B_z u - w B_x \end{aligned}$$

La matriz jacobiana para el caso de dos dimensiones o más tendrá ocho autovalores en general distintos, que corresponden a diferentes ondas características:

- 4 Ondas magnetoacústicas Existen dos tipos de ondas magnetosónicas: rápidas y

lentas. Dichas ondas se propagan con velocidades:

$$\lambda_{f,s} = u \pm c_{f,s} \quad (3.120)$$

donde

$$c_{f,s}^2 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{B^2}{\rho} \right) \pm \sqrt{\left( \frac{\gamma p}{\rho} + \frac{B^2}{\rho} \right)^2 - 4 \frac{\gamma p B_x^2}{\rho^2}} \right] \quad (3.121)$$

- 2 Ondas de Alfvén que viajan a velocidad:

$$\lambda_a = u \pm b_x$$

donde

$$b_x = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}$$

- Una onda entrópica

$$\lambda_s = u$$

- Una onda asociada a la divergencia nula del campo magnético

$$\lambda_B = 0$$

El sistema conservativo, así como está planteado, no posee solución para un problema de Riemann con cualquier tipo de condición inicial, ya que para la matriz jacobiana uno de los autovalores es 0 y uno de los vectores propios queda indeterminado. Por esta razón es necesario modificar el sistema de leyes de conservación para salvar esta dificultad.

### 3.4.4. Jacobiano en variables primitivas

Otra manera de expresar el sistema MHD es en variables primitivas. De manera similar al sistema de Euler, puede expresarse las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía en función de las variables  $u, v, w, p$  en forma cuasi-lineal para la dirección  $x$  a través de la

matriz jacobiana del flujo en dicha dirección.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -w & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix} = 0 \quad (3.122)$$

donde el vector de variables primitivas  $\mathbf{V}$  y la matriz jacobiana del sistema primitivo  $\mathbf{A}_p$  son, respectivamente

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ B_x \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & -\frac{B_y}{\rho} & \frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & -v & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & -w & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & (\gamma - 1)\mathbf{v} \cdot \mathbf{B} & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

Los valores propios del sistema primitivo son idénticos a los del sistema conservativo, y las matrices de transformación entre ambos sistemas, dada por la relación (2.21) son:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(u^2 + v^2 + w^2) & \rho u & \rho v & \rho w & B_y & B_z & \frac{1}{\gamma - 1} \end{bmatrix} \quad (3.124)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ u^2 & 2\rho u & 0 & 0 & B_y & B_z & 1 \\ uv & \rho v & \rho u & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ uw & \rho w & 0 & \rho u & 0 & -B_x & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -B_z & B_y & w & -v & 0 \\ Q_{7,1} & Q_{7,2} & \rho uv - B_x B_y & \rho uw - B_x B_z & 2uB_y - vB_x & 2uB_z - wB_x & \frac{\gamma}{\gamma-1}u \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

donde

$$Q_{7,1} = \frac{1}{2}u(u^2 + v^2 + w^2) \quad Q_{7,2} = \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2 + w^2) + \rho u^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}p + B_y^2 + B_z^2$$

### 3.5. Sistema unidimensional

Sin embargo, como para el sistema unidimensional la ecuación de la inducción magnética en la dirección  $x$  es trivialmente nula, la ecuación de conservación asociada a la componente  $B_x$  del campo magnético también lo es. Luego, si sólo interesa resolver las ecuaciones del sistema en la dirección  $x$  se elimina dicha ecuación del sistema, y se obtiene un sistema de siete ondas, eliminando así el autovalor igual a 0.

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ B_y \\ B_z \\ e_t \end{bmatrix} + \nabla \cdot \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 - B_x^2 + p + \frac{B^2}{2} \\ \rho uv - B_x B_y \\ \rho uw - B_x B_z \\ uB_y - B_x v \\ wB_y - B_z v \\ C_1 u - C_2 B_x \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.126)$$

Se demuestra que la matriz jacobiana conservativa para el caso unidimensional es igual a la del sistema multidimensional, con la 5ª columna y fila eliminadas.

$$\mathbf{A}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2u^2 + \frac{1-\gamma}{2}\mathbf{v}^2 & (3-\gamma)u & (1-\gamma)v & (1-\gamma)w & (2-\gamma)B_y & (2-\gamma)B_z & (\gamma-1) \\ -uv & v & u & 0 & -B_x & 0 & 0 \\ -uw & w & 0 & u & -B_x & 0 & 0 \\ -\frac{uB_y}{\rho} + \frac{vB_x}{\rho} & \frac{B_y}{\rho} & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & u & 0 & 0 \\ -\frac{uB_z}{\rho} + \frac{wB_x}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & 0 & -\frac{B_x}{\rho} & 0 & u & 0 \\ Ac_{8,1} & Ac_{8,2} & Ac_{8,3} & Ac_{8,4} & Ac_{8,5} & Ac_{8,6} & \gamma u \end{bmatrix} \quad (3.127)$$

La matriz jacobiana primitiva es

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \quad (3.128)$$

Teniendo en cuenta las siguientes definiciones:

$$b_x = \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}; \quad b_y = \frac{B_y}{\sqrt{\rho}}; \quad b_z = \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}; \quad (3.129)$$

que no son otra cosa que velocidades de Alfvén, y definiendo además:

$$b^2 = b_x^2 + b_y^2 + b_z^2 \quad (3.130)$$

$$b_{\perp}^2 = b_y^2 + b_z^2 \quad (3.131)$$

Pueden expresarse los vectores propios izquierdos y derechos de la jacobiana primitiva:

- Para las ondas magnetosonicas rápidas:

$$\mathbf{l}_{\pm f} = \left[ 0, \pm c_f, \pm \frac{-c_f}{(c_f^2 - b_x^2)} b_x b_y, \pm \frac{-c_f}{(c_f^2 - b_x^2)} b_x b_z, \frac{c_f^2}{(c_f^2 - b_x^2)} \frac{b_y}{\sqrt{\rho}}, \frac{c_f^2}{(c_f^2 - b_x^2)} \frac{b_z}{\sqrt{\rho}}, \frac{1}{\rho} \right] \quad (3.132)$$

$$\mathbf{r}_{\pm f} = \begin{bmatrix} \rho \\ \pm c_f \\ \pm \frac{-c_f}{(c_f^2 - b_x^2)} b_x b_y \\ \pm \frac{-c_f}{(c_f^2 - b_x^2)} b_x b_z \\ \frac{c_f^2}{(c_f^2 - b_x^2)} b_y \sqrt{\rho} \\ \frac{c_f^2}{(c_f^2 - b_x^2)} b_z \sqrt{\rho} \\ \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (3.133)$$

- Para las ondas magnetosonicas lentas:

$$\mathbf{l}_{\pm s} = \left[ 0, \pm c_s, \pm \frac{-c_s}{(c_s^2 - b_x^2)} b_x b_y, \pm \frac{-c_s}{(c_s^2 - b_x^2)} b_x b_z, \frac{c_s^2}{(c_s^2 - b_x^2)} \frac{b_y}{\sqrt{\rho}}, \frac{c_s^2}{(c_s^2 - b_x^2)} \frac{b_z}{\sqrt{\rho}}, \frac{1}{\rho} \right] \quad (3.134)$$

$$\mathbf{r}_{\pm s} = \begin{bmatrix} \rho \\ \pm c_s \\ \pm \frac{-c_s}{(c_s^2 - b_x^2)} b_x b_y \\ \pm \frac{-c_s}{(c_s^2 - b_x^2)} b_x b_z \\ \frac{c_s^2}{(c_s^2 - b_x^2)} b_y \sqrt{\rho} \\ \frac{c_s^2}{(c_s^2 - b_x^2)} b_z \sqrt{\rho} \\ \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

- Para las ondas de Alfvén:

$$\mathbf{l}_{\pm a} = \left[ 0, 0, -B_z, B_y, \pm \frac{B_z}{\sqrt{\rho}}, \mp \frac{B_y}{\sqrt{\rho}}, 0 \right] \quad (3.136)$$

$$\mathbf{r}_{\pm a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -B_z \\ B_y \\ \pm\sqrt{\rho}B_z \\ \mp\sqrt{\rho}B_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

- Para la onda entrópica:

$$\lambda_e = u \quad (3.138)$$

$$\mathbf{l}_e = \left[ 1, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{-1}{a^2} \right] \quad (3.139)$$

$$\mathbf{r}_e = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.140)$$

### 3.5.1. Normalización del sistema de ecuaciones

El sistema MHD tiene la particularidad de que, bajo ciertas circunstancias, valores propios asociados a ondas diferentes se aproximan entre sí, y sus vectores propios asociados (en el caso de que dichos valores propios coincidan) se vuelven singulares, o indeterminados, cuando están expresados en la forma tradicional. De esta forma, el sistema de vectores y valores propios se degenera, lo que produce dificultades en su implementación numérica. Para salvar esta dificultad, se normalizaron los vectores propios de acuerdo a la metodología propuesta por Roe y Balsara (1996).

Analizando el sistema MHD 1D en variables primitivas adimensionales

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & \frac{B_y}{\rho} & \frac{B_z}{\rho} & \frac{1}{\rho} \\ 0 & 0 & u & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u & 0 & \frac{B_x}{\rho} & 0 \\ 0 & B_y & -B_x & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & B_z & 0 & -B_x & 0 & u & 0 \\ 0 & \gamma p & 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ B_y \\ B_z \\ p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.141)$$

Teniendo en cuenta las Ecs. (3.129), (3.130), y (3.131) puede obtenerse una nueva matriz jacobiana cuyos vectores y valores propios ponen en evidencia casos de indeterminación. Los valores propios del sistema son, usando la nomenclatura propuesta por los autores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= u - c_f; & \lambda_2 &= u - b_x & \lambda_3 &= u - c_s & \lambda_4 &= u \\ \lambda_5 &= u + c_s & \lambda_6 &= u + b_x & \lambda_7 &= u + c_f \end{aligned} \quad (3.142)$$

Las velocidades magnetosónicas se obtienen resolviendo la ecuación característica:

$$c^4 - (a^2 + b^2)c^2 + a^2b_x^2 = 0 \quad (3.143)$$

Donde  $a$  es la velocidad del sonido gasdinámica, dada por la Ec. (3.42). Luego, resolviendo esta ecuación de cuarto grado pueden expresarse las velocidades magnetosónicas como:

$$\begin{aligned} c_f^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p}{\rho} + b^2 \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\gamma p}{\rho} + b^2 \right)^2 - 4 \frac{\gamma p}{\rho} b_x^2} \\ c_s^2 &= \frac{1}{2} \left( \frac{\gamma p}{\rho} + b^2 \right) - \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{\gamma p}{\rho} + b^2 \right)^2 - 4 \frac{\gamma p}{\rho} b_x^2} \end{aligned}$$

Además, dichas soluciones cumplen las siguientes identidades:

$$c_f^4 - a^2b_x^2 = c_f^2 (c_f^2 - c_s^2); \quad c_s^4 - a^2b_x^2 = c_s^2 (c_s^2 - c_f^2) \quad (3.144a)$$

$$(c^2 - a^2)(c^2 - b_x^2) = c^2 b_\perp; \quad c_f c_s = a \|b_x\|; \quad c_f^2 + c_s^2 = a^2 + b^2 \quad (3.144b)$$

Se observa que las curvas de  $c_f$  y  $c_s$  constantes son elipses e hipérbolas cofocales respectivamente. Despejando de las expresiones de dichas velocidades pueden obtenerse ecuaciones de elipses e hipérbolas respectivamente en el plano cartesiano cuyos ejes son  $b_x/a$  y  $b_\perp/a$ .

$$2c_f^2 - \left(\frac{\gamma p}{\rho} + b^2\right) = \sqrt{\left(\frac{\gamma p}{\rho} + b^2\right)^2 - 4\frac{\gamma p}{\rho} b_x^2}$$

$$\frac{a^2}{c_f^2} \left(\frac{b_x}{a}\right)^2 + \frac{a^2}{(c_f^2 - a^2)} \left(\frac{b_\perp}{a}\right)^2 = 1$$

De la misma manera para la onda magnetosónica lenta, se obtiene la expresión para una familia de hipérbolas

$$\frac{a^2}{c_f^2} \left(\frac{b_x}{a}\right)^2 - \frac{a^2}{(c_f^2 - a^2)} \left(\frac{b_\perp}{a}\right)^2 = 1$$

Por otro lado, en el caso de que

$$b_y = b_z = 0$$

ocurre:

$$c_f^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b_x^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b_x^2)^2} = a^2$$

$$c_s^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b_x^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(a^2 - b_x^2)^2} = b_x^2$$

Luego, cuando  $b_x = a$  ambas velocidades magnetosónicas serán iguales, lo que produce que el sistema de vectores propios se vuelva indeterminado. Los vectores propios asociados a las ondas magnetosónicas son los que resultan entonces indeterminados, por esta razón han sido estudiados más en detalle.

En la Figura 3.3 se presenta un gráfico de dichas familias de curvas para distintos valores de  $c_s$  y  $c_f$  adimensionales. Se observa que para el caso en que  $b_x \approx a$  y  $b_\perp \approx 0$  ocurre que  $c_s \approx b_x \approx c_f \approx 1$ . Luego, el sistema dejaría de ser estrictamente hiperbólico.

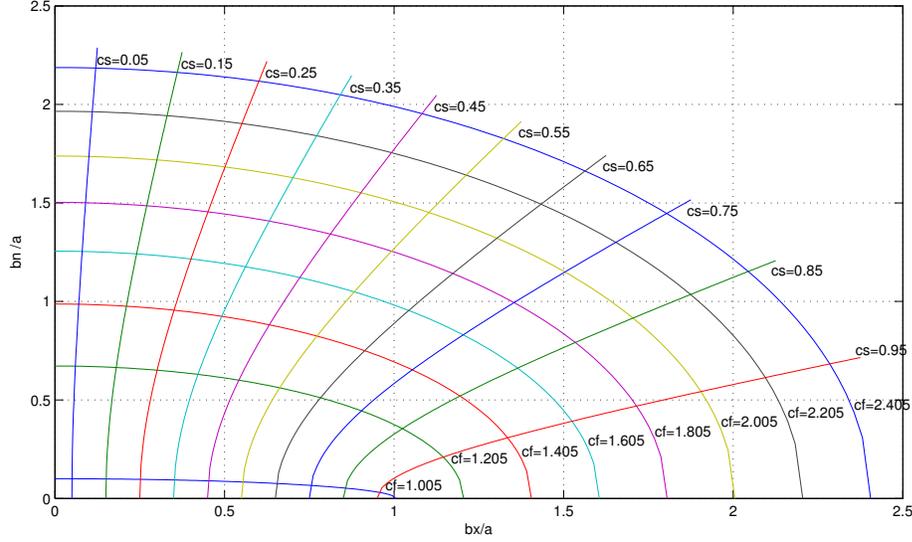


Figura 3.3: Curvas de velocidades magnetosónicas constantes

Cuando se hace el producto interior de los vectores izquierdo y derecho asociados a una misma onda característica, dados por las Ecs. (3.132), (3.133), (3.134) y (3.135), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_f \cdot \mathbf{R}_f &= \frac{2c_f^2(c_f^2 - c_s^2)}{(c_f^2 - b_x^2)} \\ \mathbf{L}_s \cdot \mathbf{R}_s &= \frac{2c_s^2(c_f^2 - c_s^2)}{(c_s^2 - b_x^2)} \end{aligned} \quad (3.145)$$

Estas expresiones pueden ser singulares o indeterminadas en algunos casos. Por esta razón, y para garantizar que los vectores propios sean ortonormales, es necesario multiplicar a dichos vectores por sendos factores  $k_l$  y  $k_r$ , cuyo producto sea igual a

$$k_l k_r = \frac{(c^2 - b_x^2)}{2c^2(c_f^2 - c_s^2)}$$

donde  $c$  representa la velocidad asociada al vector propio que se desea normalizar (rápida o lenta). Definiendo los factores  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  como:

$$\alpha_f^2 = \frac{a^2 - c_s^2}{c_f^2 - c_s^2} \quad \alpha_s^2 = \frac{c_f^2 - a^2}{c_f^2 - c_s^2} \quad (3.146)$$

Que a su vez poseen la ventaja de cumplir las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}\alpha_f^2 + \alpha_s^2 &= 1 \\ \alpha_f^2 c_f^2 + \alpha_s^2 c_s^2 &= a^2 \\ \alpha_f \alpha_s &= \frac{ab_\perp}{c_f^2 - c_s^2}\end{aligned}$$

Los autores normalizan los vectores izquierdos por  $1/a^2$  para que tengan las mismas dimensiones que los vectores derechos.

De esta manera, los vectores propios izquierdos y derechos normalizados a las ondas magnetosónicas se expresan como:

$$\mathbf{l}_s = \frac{1}{2a^2} \left[ 0, \pm\alpha_s c_s, \pm\alpha_f c_f \beta_y S_{Bx}, \pm\alpha_f c_f \beta_z S_{Bx}, -\frac{\alpha_f \beta_y a}{\sqrt{\rho}}, -\frac{\alpha_f \beta_z a}{\sqrt{\rho}}, \frac{\alpha_s}{\rho} \right] \quad (3.147a)$$

$$\mathbf{l}_f = \frac{1}{2a^2} \left[ 0, \pm\alpha_f c_f, \mp\alpha_s c_s \beta_y S_{Bx}, \mp\alpha_s c_s \beta_z S_{Bx}, \frac{\alpha_s \beta_y a}{\sqrt{\rho}}, \frac{\alpha_f \beta_z a}{\sqrt{\rho}}, \frac{\alpha_f}{\rho} \right] \quad (3.147b)$$

$$\mathbf{r}_s = \begin{bmatrix} \alpha_s \rho \\ \pm\alpha_s c_s \\ \pm\alpha_f c_f \beta_y S_{Bx} \\ \pm\alpha_f c_f \beta_z S_{Bx} \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} \beta_y a \\ -\alpha_f \sqrt{\rho} \beta_z a \\ \alpha_s \rho a^2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{r}_f = \begin{bmatrix} \alpha_f \rho \\ \pm\alpha_f c_f \\ \mp\alpha_s c_s \beta_y S_{Bx} \\ \mp\alpha_s c_s \beta_z S_{Bx} \\ \alpha_s \sqrt{\rho} \beta_y a \\ \alpha_s \sqrt{\rho} \beta_z a \\ \alpha_f \rho a^2 \end{bmatrix} \quad (3.148)$$

donde

$$\beta_y = \frac{b_y}{b_\perp}, \quad \beta_z = \frac{b_z}{b_\perp}, \quad S_{Bx} = \text{signo}(B_x) \quad (3.149)$$

Sin embargo, estas expresiones son indeterminadas cuando  $b_\perp = 0$ , es decir cuando  $b_y = b_z = 0$ . Para salvar esta indeterminación, los autores proponen en este caso establecer  $\beta_y = \beta_z = 1/\sqrt{2}$

Los vectores propios asociados a las ondas de Alfvén y a la onda de entropía permanecen sin cambios. A pesar de ello, a los vectores de las ondas de Alfvén para simlificar el cálculo numérico se los expresa en función de los parámetros  $\beta$

anteriormente definidos:

$$\mathbf{l}_a = \frac{1}{2} \left[ 0, 0, \pm\beta_z, \mp\beta_y, -\frac{\beta_z S_{Bx}}{\sqrt{\rho}}, \frac{\beta_y S_{Bx}}{\sqrt{\rho}}, 0 \right] \quad (3.150)$$

$$\mathbf{r}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm\beta_z \\ \mp\beta_y \\ -\beta_z S_{Bx} \sqrt{\rho} \\ \beta_y S_{Bx} \sqrt{\rho} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.151)$$

### Casos de indeterminación

Existen seis casos posibles, en función de los valores que puedan tomar las variables  $a$ ,  $b_x$ , y  $b_\perp$ .

1. Si  $b_x \approx 0$  pero  $b_\perp \neq 0$ , los coeficientes  $\alpha_f$  y  $\alpha_s$  quedan:

$$c_f^2 \approx a^2 + b_\perp^2; \quad c_s^2 \approx \frac{a^2 b_x^2}{a^2 + b_\perp^2} \quad (3.152)$$

$$\alpha_f^2 \approx \frac{a^2}{a^2 + b_\perp^2}; \quad \alpha_s^2 \approx \frac{b_\perp^2}{a^2 + b_\perp^2};$$

2. Si  $b_x \approx 0$  y  $b_\perp \approx 0$  se obtiene el límite gasdinámico. Para este caso la onda rápida se convierte en una onda sónica, y la onda lenta desaparece.

$$c_f^2 \approx a^2; \quad c_s^2 \approx 0 \quad (3.153)$$

$$\alpha_f^2 \approx 1; \quad \alpha_s^2 \approx 0;$$

3. Si  $|b_x| < a - \epsilon$  y  $b_\perp \approx 0$  donde  $\epsilon$  es un número pequeño

$$c_f^2 \approx a^2; \quad c_s^2 \approx b_x^2 \quad (3.154)$$

$$\alpha_f^2 \approx 1; \quad \alpha_s^2 \approx 0;$$

De la misma forma que para el caso anterior, las ondas magnetosónicas rápidas tienden a ondas sónicas, pero las ondas lentas tienden a ondas de Alfvén

4. Si  $|b_x| > a + \epsilon$  y  $b_\perp \approx 0$

$$c_f^2 \approx b_x^2; \quad c_s^2 \approx a^2 \quad (3.155)$$

$$\alpha_f^2 \approx 0; \quad \alpha_s^2 \approx 1$$

En este caso ocurre lo inverso para el caso anterior, las ondas lentas tienden a ondas acústicas. En todos los casos anteriores no existen indeterminaciones en los vectores propios.

5. Si  $|b_x| \approx a$  y  $b_\perp \approx 0$  se obtiene el caso magnetosónico, donde ambas ondas magnetosónicas se superponen:

$$c_f^2 \approx a^2; \quad c_s^2 \approx a^2 \quad (3.156)$$

El mayor inconveniente en este caso es que los factores  $\alpha$  se vuelven indeterminados

$$\alpha_f^2 \approx 0; \quad \alpha_s^2 \approx 0$$

Sin embargo, como cumplen con la condición  $\alpha_s^2 + \alpha_f^2 = 1$ , los vectores propios no se vuelven singulares. Los autores demostraron que, mediante una expansión asintótica en el entorno:

$$b_x \approx (a + \epsilon_1)\text{signo}(b_x); \quad b_\perp = \epsilon_2$$

$$\alpha_f \approx \sin\left(\frac{\text{atan}\left(\frac{b_\perp}{|b_x|-a}\right)}{2}\right) + \delta_f; \quad \alpha_s \approx \cos\left(\frac{\text{atan}\left(\frac{b_\perp}{|b_x|-a}\right)}{2}\right) + \delta_s;$$

donde además demostraron que  $|\delta_{f,s}| \leq \frac{b_\perp}{4a}$ .

6. Si  $|b_x| \gg a$  y  $b_\perp \gg a$  se obtiene el límite de vacío. En este caso el sistema queda mal condicionado, de la misma manera que ocurre con el sistema de Euler, y no hay normalización que pueda salvar esta condición.

---

# Capítulo 4

## Esquema Numérico

### 4.1. Discretización en volúmenes finitos

En el método de volúmenes finitos (FVM, Finite Volume Method), se discretiza el dominio  $\Omega$  del problema en un número finito  $N$  de celdas  $\Omega_j = [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}]$ , ( $j = 1, 2, \dots, N$ ).

Dentro de cada celda  $\Omega_j$  se propone una interpolación a las variables del vector de estado por funciones constantes a trozos. Es decir, se asume que las variables conservativas toman un valor constante dentro de cada celda, que se va actualizando conforme se avanza en el tiempo. De esta manera la forma integral de una ley de un sistema no conservativo, dada por la Ec. (2.6) puede escribirse para cada celda  $\Omega_j$  en la forma discreta como:

$$\frac{\Delta \mathbf{U}_j}{\Delta t} = -\frac{1}{\Delta x} \left[ \bar{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} - \bar{\mathbf{F}}_{j-\frac{1}{2}} \right] + \mathbf{S}(\mathbf{U})_j \quad (4.1)$$

donde  $\Delta x = x_{j+1} - x_j > 0$ ,  $\mathbf{U}$  es el vector de variables de estado, y  $\bar{\mathbf{F}}_{j+1/2}$  es una función de flujo numérico, evaluada en la interfaz de dos celdas contiguas, que debe aproximar de forma discreta la función de flujo del sistema hiperbólico continuo. Dicha función, por lo tanto debe ser consistente con el flujo del sistema continuo, y además debe cumplir con otras propiedades matemáticas para garantizar la estabilidad y convergencia del esquema. Este sistema de ecuaciones se integra luego en el tiempo mediante un método numérico, que puede ser implícito o explícito. A

continuación, se explica la función de flujo numérico de Harten-Yee, empleada en la presente tesis.

## 4.2. Método TVD de Harten para una ley de conservación unidimensional

Partiendo de una ley de conservación escalar de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.2)$$

$$u(x, 0) = \phi(x)$$

cuya velocidad característica es  $a$ , se define la Variación Total (TV) de la solución como:

$$TV = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx \quad (4.3)$$

Si la Variación Total no aumenta en el tiempo

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad (4.4)$$

(Harten, 1983) demostró que a medida que la solución avance en el tiempo no se crearán nuevos extremos locales, los máximos existentes no aumentarán, y los mínimos no disminuirán. Si un esquema numérico cumple esta relación para la variación total, se dice que es un esquema *Total Variation Diminishing* (TVD). Cumplir la propiedad TVD implica que la solución no muestre oscilaciones espurias en zonas cercanas a discontinuidades.

Asumiendo además que existe una función de entropía (ya sea física o numérica)  $\eta(u)$  con un flujo asociado  $\Psi(u)$  tal que también cumple la ley de conservación:

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial \Psi(u)}{\partial x} = 0 \quad (4.5)$$

Puede expresarse la solución aproximada  $\bar{u}$  a la Ec. (4.2) con un esquema conservativo

de la forma:

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2}) \quad (4.6)$$

Un esquema numérico general de  $2k + 1$  celdas puede expresarse , mediante un operador diferencial discreto  $\mathbf{L}(u)$  en función de coeficientes  $C_{j+1/2}^\pm$ :

$$\bar{u}_j^{n+1} = \mathbf{L}\bar{u}^n = \bar{u}_j^n + C_{j+1/2}^+ \Delta_{j+1/2} \bar{u} - C_{j-1/2}^- \Delta_{j-1/2} \bar{u} \quad (4.7)$$

Donde la notación  $\Delta_{j+1/2}$  y  $\Delta_{j-1/2}$  significa:

$$\Delta_{j+1/2} \bar{u} = \bar{u}_{j+1} - \bar{u}_j; \quad \Delta_{j-1/2} \bar{u} = \bar{u}_j - \bar{u}_{j-1}$$

Los coeficientes  $C_{j+1/2}^+$  y  $C_{j-1/2}^-$  son en general función de los valores de la variable  $u$  en otras celdas, esto permite que el esquema numérico pueda ser no lineal.

$$C_{j+1/2}^+ = C^+(u_{j-k+1}, \dots, u_{j+k}); \quad C_{j-1/2}^- = C^-(u_{j-k}, \dots, u_{j+k-1}) \quad (4.8)$$

(Harten, 1983) demostró que si dichos coeficientes cumplen las condiciones:

$$C_{j+1/2}^+ \geq 0; \quad C_{j-1/2}^- \geq 0; \quad C_{j+1/2}^+ + C_{j-1/2}^- \leq 1 \quad (4.9)$$

entonces el esquema numérico es TVD.

También demostró que si se emplea la función de flujo numérico:

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ f(\bar{u}_{j+1}) + f(\bar{u}_j) - \frac{\Delta x}{\Delta t} \psi \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_j \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right] \quad (4.10)$$

donde la velocidad característica numérica se estima como:

$$\bar{a}_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{f(\bar{u}_{j+1}) - f(\bar{u}_j)}{\Delta_{j+1/2} \bar{u}} & \text{si } \Delta_{j+1/2} \bar{u} \neq 0 \\ a(x_{j+1/2}) & \text{si } \Delta_{j+1/2} \bar{u} = 0 \end{cases} \quad (4.11)$$

el esquema resultante es TVD, siempre que la función  $\psi(x)$  sea una función escalar que cumpla la condición:

$$\|x\| \leq \psi(x) \leq 1 \quad \text{para } 0 \leq \|x\| \leq \mu \leq 1$$

Donde  $\mu$  se define como:

$$\mu = \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \max(\bar{a}_{j+1/2}) \quad (4.12)$$

que resulta ser una condición de estabilidad similar a la de Courant-Friedrichs-Lewy, por lo tanto se conoce como condición “CFL like”.

Sin embargo, este esquema es de primer orden de precisión. Para lograr una aproximación de segundo orden, Harten se vale de que se demuestra que una aproximación de primer orden a la ley de conservación (4.2) es en realidad una aproximación de segundo orden a una ley no conservativa de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \frac{\partial g(u)}{\partial x}$$

Donde el miembro derecho representa un término difusivo.

Pasando al primer miembro el término que contiene a  $g(u)$  se obtiene una ley de conservación con una función de flujo modificada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ f(u) - g(u) \frac{\Delta x}{\Delta t} \right] = 0 \quad (4.13)$$

Si la función  $g(u)$  es de orden

$$g(u) = \mathcal{O}(\Delta x)$$

Entonces se cumple que:

$$\frac{\partial}{\partial x} g(u) = \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

por lo tanto el esquema es de segundo orden. Luego, aplicando el esquema de flujo (4.10) al flujo de la ley de conservación modificada (4.13) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{j+1/2} = & \frac{1}{2} \left[ f(\bar{u}_{j+1}) + f(\bar{u}_j) + \right. \\ & \left. \frac{\Delta x}{\Delta t} (g_j + g_{j+1}) - \frac{\Delta x}{\Delta t} \psi \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2} \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde  $\gamma_{j+1/2}$  es:

$$\gamma_{j+1/2} = \begin{cases} \frac{g(\bar{u}_{j+1}) - g(\bar{u}_j)}{\Delta_{j+1/2} \bar{u}} & \text{si } \Delta_{j+1/2} \bar{u} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \Delta_{j+1/2} \bar{u} = 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Si la función de disipación numérica  $g(\bar{u})$  es Lipschitz continua y satisface las condiciones:

$$g_{j+1} + g_j = \left[ \psi \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} \right) - \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} \right)^2 \right] \Delta_{j+1/2} \bar{u} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$\gamma_{j+1/2} \Delta_{j+1/2} \bar{u} = g_{j+1} - g_j = \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

Entonces el esquema conservativo (Ec. (4.6)) con el flujo dado por la Ec. (4.14) es de segundo orden de precisión. Dicho esquema numérico se conoce como *Flujo de Harten*.

Harten llamó a la función  $g(\bar{u})$  función limitadora, ya que cumple la función de limitar la cantidad de viscosidad numérica introducida en el flujo. La función limitadora que él propuso luego fue llamada *minmod*.

$$g_j = S_{j+1/2} \max \left[ 0, \min \left( \left\| \sigma \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right\|, S_{j+1/2} \sigma \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j-1/2} \right) \Delta_{j-1/2} \bar{u} \right) \right] \quad (4.16)$$

donde

$$\sigma(x) = \frac{1}{2} \psi(x) - x^2 > 0 \quad (4.17)$$

O en su forma discreta

$$S_{j+1/2} = \text{signo} \left[ \sigma \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right] \quad (4.18)$$

Por otro lado, el flujo de Harten cumple con la propiedad de preservar la positividad en regiones de densidades bajas, como es propuesta por (Einfeldt et al., 1991).

### 4.2.1. Generalización de Yee

(Yee, 1987) introdujo una modificación en el flujo de Harten para volverlo más flexible en la elección de la función limitadora a emplear, y para lograr que sea menos difusivo. Dicho flujo modificado se conoce como *flujo de Harten-Yee*. Sacando como

factor común a la función  $\sigma$  (Ec. (4.18)) de la función limitadora, permite expresar el flujo de Harten-Yee como:

$$\bar{f}_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left[ f(\bar{u}_{j+1}) + f(\bar{u}_j) + \sigma(a_{j+1/2})(g_j + g_{j+1}) - \psi \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2} \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right] \quad (4.19)$$

La función limitadora *minmod* para este flujo se calcula como:

$$g_j = S_{j+1/2} \max \left[ 0, \min \left( \left\| \left( \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{a}_{j+1/2} \right) \Delta_{j+1/2} \bar{u} \right\|, S_{j+1/2} (\lambda \bar{a}_{j-1/2}) \Delta_{j-1/2} \bar{u} \right) \right] \quad (4.20)$$

El flujo de Harten Yee también cumple con la propiedad de conservación de la positividad en regiones de baja densidad, lo que lo hace una opción adecuada para sistemas físicos como la corona solar o los arcos coronales.

### 4.2.2. Extensión a sistemas multidimensionales

Llamando  $\mathbf{R}$  a la matriz cuyas columnas son los vectores propios derechos de la matriz jacobiana  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$  puede obtenerse:

$$\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}$$

Teniendo en cuenta la definición de las variables características (Ec. (2.16)):

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{U} \quad (4.21)$$

Pueden expresarse las ecuaciones del sistema de leyes conservativas de forma desacoplada de la siguiente manera:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}_x = \mathbf{0} \quad (4.22)$$

Luego, puede aplicarse el esquema TVD escalar de Harten-Yee a cada una de dichas ecuaciones desacopladas. La forma final del flujo numérico TVD de Yee que

se obtiene al invertir la transformación para obtener nuevamente el esquema en las variables originales.

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i + \mathbf{R}_{i+1/2} \mathbf{\Phi}_{i+1/2}] \quad (4.23)$$

donde la función  $\mathbf{\Phi}$  es la función de viscosidad numérica, cuyas componentes se expresan como:

$$\phi_{i+1/2}^{(l)} = \sigma^{(l)}(\lambda_{i+1/2}^{(l)})(g_{i+1} + g_i^{(l)}) - \psi\left(\lambda_{i+1/2}^{(l)} + \gamma_{i+1/2}^{(l)}\right) \alpha_{i+1/2}^{(l)} \quad (4.24)$$

Para el caso multidimensional, la función limitadora *minmod* se implementa de la siguiente manera:

$$g_i^{(l)} = S_{i+1/2} \max \left\{ \left[ 0, \min \left( (\lambda_{i+1/2}^{(l)}) |\alpha_{i+1/2}^{(l)}|, (\lambda_{i-1/2}^{(l)}) \alpha_{i-1/2}^{(l)} S_{i+1/2} \right) \right] \right\} \quad (4.25)$$

$$S_{i+1/2} = \text{signo}(\alpha_{i+1/2}^{(l)}) \quad (4.26)$$

Y los coeficientes  $\gamma$  para el caso multidimensional se generalizan como:

$$\gamma_{j+1/2}^{(l)} = \begin{cases} \frac{g_{j+1}^{(l)} - g_j^{(l)}}{\alpha_{j+1/2}^{(l)}} & \text{si } \alpha_{j+1/2}^{(l)} \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{j+1/2}^{(l)} = 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

La función  $\sigma(\lambda)$ , para retener el segundo orden de precisión en la integración temporal explícita con Euler (Yee, 1989), se define como:

$$\sigma^{(l)}(\lambda_{i+1/2}^{(l)}) = \frac{1}{2} \left( \psi(\lambda_{i+1/2}^{(l)}) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\lambda_{i+1/2}^{(l)})^2 \right) \quad (4.28)$$

Y la función  $\psi(\lambda_{i+1/2}^{(l)})$  es la función encargada de introducir la disipación numérica propiamente dicha. Para respetar la condición de entropía y lograr la convergencia a una solución físicamente correcta (Harten y Hyman, 1983), esta función se define como:

$$\psi(\lambda_{i+1/2}^{(l)}) = \begin{cases} |\lambda_{i+1/2}^{(l)}| & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^{(l)}| \geq \delta_1 \\ \left( (\lambda_{i+1/2}^{(l)})^2 + \delta_1^2 \right) / 2\delta_1 & \text{si } |\lambda_{i+1/2}^{(l)}| < \delta_1 \end{cases} \quad (4.29)$$

donde  $\delta_1$  es un número real pequeño.

### 4.3. Términos fuente

Como se explicó en el capítulo anterior, el modelo considerado toma en cuenta términos fuente asociados a:

- la gravedad
- la conducción de calor con el modelo de Spitzer, dado por la Ec. (3.8)
- La función de calentamiento  $E_H$
- La función de enfriamiento por radiación  $L_{rad}$ , dada por la Ec. (3.1)

Asumiendo que la gravedad actúa en la dirección del eje  $x$  y en sentido contrario,  $\mathbf{g} = -g\mathbf{i}$ , el vector de términos fuente se expresa para el modelo de Euler unidimensional como:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho g \\ -\rho g u + \frac{2}{7}\kappa_{sp} \frac{\partial^2 T^{7/2}}{\partial x^2} + E_H + L_{rad} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

El tratamiento numérico de las fuentes asociadas a la gravedad, el calentamiento y la radiación no presentan inconvenientes respecto a su discretización numérica. Todos ellos dependen de la posición o de las variables de estado de la celda considerada. De esta manera, dichos términos fuente se discretizan como:

$$\frac{1}{\Omega_j} \int_{\Omega_j} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \approx \mathbf{S}_j(\mathbf{U}_j) \quad (4.31)$$

Para evaluar el término de la conducción de calor existen dos opciones: una diferencia finita centrada, de acuerdo a (Aschwanen, 2004):

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{2}{7}\kappa_{sp} \frac{T_{j-1}^{7/2} - 2T_j^{7/2} + T_{j+1}^{7/2}}{\Delta x^2} \quad (4.32)$$

Esta formulación posee la ventaja de ser más sencilla de implementar y de derivar su matriz jacobiana analítica respecto de las variables de estado.

Por otro lado, el término de conducción de calor puede discretizarse mediante una formulación de volúmenes finitos, de acuerdo a (Versteeg y Malalasekera, 2007)

$$\int_{\Omega_j} \nabla \cdot (\kappa \nabla T) d\Omega = \int_{A_j} \mathbf{n} \cdot (\kappa \nabla T) dA \quad (4.33)$$

Expresando esta relación para el sistema unidimensional de manera discreta, como diferencias en las interfaces con la celda de la izquierda y de la derecha:

$$\int_{\Omega_j} \frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa \frac{\partial T}{\partial x} \right) d\Omega = \left( \kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j-1/2} - \left( \kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j+1/2} \quad (4.34)$$

Los valores de la conductividad térmica en las mencionadas interfaces se evalúa mediante un promedio aritmético, debido al carácter elíptico del término de conducción térmica:

$$\begin{aligned} \kappa_{j-1/2} &= \frac{\kappa_{j-1} + \kappa_j}{2} = \kappa_{sp} \frac{T_{j-1}^{5/2} + T_j^{5/2}}{2} \\ \kappa_{j+1/2} &= \frac{\kappa_{j+1} + \kappa_j}{2} = \kappa_{sp} \frac{T_j^{5/2} + T_{j+1}^{5/2}}{2} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Luego, los flujos numéricos difusivos en cada interfaz se evalúan como:

$$\begin{aligned} F_{cj-1/2} &= \left( \kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j-1/2} = \kappa_{j-1/2} A_{j-1/2} \frac{T_{j-1} - T_j}{\Delta x} \\ F_{cj+1/2} &= \left( \kappa A \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{j+1/2} = \kappa_{j+1/2} A_{j+1/2} \frac{T_j - T_{j+1}}{\Delta x} \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde  $A_{j+1/2}$  es el área en la interfaz entre las celdas  $j$  y  $j+1$ . Luego, el término de conducción de calor asociado a la celda  $j$  se expresa como:

$$\dot{Q}_{cond} = \frac{F_{cj-1/2} - F_{cj+1/2}}{\Delta x} \quad (4.37)$$

En ambos casos es necesario considerar una condición de estabilidad para el paso de tiempo basada en el número de Fourier de la malla:

$$FO = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} \quad (4.38)$$

donde  $D = \frac{\kappa}{C_p \rho}$  es la difusividad térmica, que se estima con los valores de la celda considerada. Para determinar el paso de tiempo, se compara el valor del mismo obtenido mediante la condición CFL (Ec. (4.12)) y se elige el menor de ellos.

## 4.4. Integración temporal

El método de integración temporal tiene gran importancia, sobre todo para lograr que el esquema sea estable en el tiempo y para tratar de manera consistente los términos fuente. El esquema de integración temporal debe satisfacer:

- La conservación de la condición TVD en el tiempo (Hoffmann y Chiang, 2000a)
- La preservación de los posibles estados estacionarios discretos que sean solución del problema (Bouchut, 2004)

$$\frac{\partial}{\partial x} [\mathbf{F}(\mathbf{U}, \mathbf{x})] = \mathbf{S}(\mathbf{U}, \mathbf{x}) \quad (4.39)$$

Los esquemas de integración temporal pueden ser explícitos o implícitos, dependiendo del instante de tiempo en el que se evalúen las funciones de flujos numéricos y términos fuente. Los esquemas explícitos pueden asociarse a expresiones de la forma:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}^n)}{\partial x} - \mathbf{S}(\mathbf{U}^n) = 0 \quad (4.40)$$

Los esquemas implícitos a este tipo de expresiones:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1})}{\partial x} - \mathbf{S}(\mathbf{U}^{n+1}) = 0 \quad (4.41)$$

O una combinación de ambos, en función de un parámetro  $0 \leq \eta \leq 1$ :

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\Delta t} + \eta \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}^{n+1})}{\partial x} - \eta \mathbf{S}(\mathbf{U}^{n+1}) = (\eta - 1) \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U}^n)}{\partial x} - (\eta - 1) \mathbf{S}(\mathbf{U}^n) \quad (4.42)$$

La desventaja de los esquemas implícitos frente a los explícitos es que es necesaria la evaluación de la función de flujo y de términos fuentes en el instante  $n + 1$ . Como

la mayoría de las veces esto no puede calcularse de forma exacta, es necesario hacer una extrapolación por serie de Taylor:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{j+1/2}^{n+1}(\mathbf{U}_j^{(n+1)}, \mathbf{U}_{j+1}^{(n+1)}) &\approx F_{j+1/2}(\mathbf{U}_j^n, \mathbf{U}_{j+1}^n) + \frac{\partial \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{U}_j^{(n)}, \mathbf{U}_{j+1}^{(n)})}{\partial \mathbf{U}_j} \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} \Delta t \\ &+ \frac{\partial \mathbf{F}_{j+1/2}(\mathbf{U}_j^{(n)}, \mathbf{U}_{j+1}^{(n)})}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} \frac{\partial \mathbf{U}_{j+1}}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_j^{n+1}(\mathbf{U}_{j-1}^{n+1}, \mathbf{U}_j^{n+1}, \mathbf{U}_{j+1}^{n+1}) &\approx \mathbf{S}^n + \frac{\partial \mathbf{S}^n}{\partial \mathbf{U}_j} \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} \Delta t \\ &+ \frac{\partial \mathbf{S}^n}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} \frac{\partial \mathbf{U}_{j+1}}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial \mathbf{S}^n}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} \frac{\partial \mathbf{U}_{j-1}}{\partial t} \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (4.44)$$

donde se define la notación simplificada para las matrices jacobianas numéricas asociadas a los flujos

$$\frac{\partial \mathbf{F}_{j+1/2}^n}{\partial \mathbf{U}_j} = \mathbf{A}_j^c(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}); \quad \frac{\partial \mathbf{F}_{j+1/2}^n}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} = \mathbf{A}_j^+(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \quad (4.45)$$

y a los términos fuentes:

$$\frac{\partial \mathbf{S}_j^n}{\partial \mathbf{U}_j} = \mathbf{A}_j^c(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_j^n}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} = \mathbf{A}_j^+(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \quad (4.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_j^n}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} = \mathbf{A}_j^-(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \quad (4.48)$$

La mencionada linealización introduce errores de discretización en el esquema. Pero, por otro lado, los métodos implícitos tienen condiciones de estabilidad para la integración temporal menos severas y son menos sensibles a errores numéricos cuando se tienen términos fuentes que vuelven “rígido” (“stiff”) al sistema de ecuaciones.

Reemplazando las Expresiones (4.43) y (4.44) en la (4.41), e introduciendo la notación

$$\Delta \mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j^{n+1} - \mathbf{U}_j^n \quad (4.49)$$

se obtiene la formulación discreta para el esquema implícito *backward Euler* :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \mathbf{U}_j}{\Delta t} + \frac{\mathbf{A}_j^c}{\Delta x} \Delta \mathbf{U}_j + \frac{\mathbf{A}_j^+}{\Delta x} \Delta \mathbf{U}_{j+1} - \frac{\mathbf{A}_j^c}{\Delta x} \Delta \mathbf{U}_{j-1} - \frac{\mathbf{A}_j^+}{\Delta x} \Delta \mathbf{U}_j \\ - (\mathbf{A}\mathbf{S}_j^c \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{A}\mathbf{S}_j^+ \Delta \mathbf{U}_{j+1} + \mathbf{A}\mathbf{S}_j^- \Delta \mathbf{U}_{j-1}) \Delta t = - \frac{F(\mathbf{U}_{j+1/2}^n) - F(\mathbf{U}_{j-1/2}^n)}{\Delta x} + \mathbf{S}(\mathbf{U}_j^n) \end{aligned} \quad (4.50)$$

que se expresa de manera compacta como:

$$\begin{aligned} \left[ \mathbf{I} + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_j^c - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{A}_{j-1}^+ - \mathbf{A}\mathbf{S}_j^c \Delta t)) \right] \Delta \mathbf{U}_j \\ + \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}_j^+ - \mathbf{A}\mathbf{S}_j^+ \Delta t \right] \Delta \mathbf{U}_{j+1} - \left[ \frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{A}_{j-1}^c - \mathbf{A}\mathbf{S}_j^- \Delta t \right] \Delta \mathbf{U}_{j-1} = \\ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{j-1/2}^n - \mathbf{F}_{j+1/2}^n] + \mathbf{S}^n \Delta t \end{aligned} \quad (4.51)$$

Luego, si expresamos el vector de términos fuente en función de las variables conservativas y evaluamos el término de conducción mediante la Ec. (4.32), se obtienen las matrices jacobianas asociadas a dicho vector:

$$\mathbf{A}\mathbf{S}_j^c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -g & 0 & 0 \\ AS_{j33}^c & -\frac{n \rho_j T_j^{n-1} u_j K}{C_v m_h^2 \mu^2} + \frac{2 \kappa_{sp} T_j^{2,5} u_j}{C_v \Delta x^2 \rho_j} - g & \frac{n \rho_j T_j^{n-1} K}{C_v m_h^2 \mu^2} - \frac{2 \kappa_{sp} T_j^{2,5}}{C_v \Delta x^2 \rho_j} \end{bmatrix} \quad (4.52a)$$

$$AS_{j33}^c = \frac{(n \rho_j T_j^{n-1} u_j^2 - 2 C_v (n-2) \rho_j T_j^n) K}{2 C_v m_h^2 \mu^2} - \frac{\kappa_{sp} T_j^{2,5} u_j^2 - 2 C_v \kappa_{sp} T_j^{3,5}}{C_v \Delta x^2 \rho_j} \quad (4.52b)$$

$$\mathbf{AS}_j^+ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_{sp} T_{j+1}^{2,5} u_{j+1}^2 - 2 C_v \kappa_{sp} T_{j+1}^{3,5}}{2 C_v \Delta x^2 \rho_{j+1}} & -\frac{\kappa_{sp} T_{j+1}^{2,5} u_{j+1}}{C_v \Delta x^2 \rho_{j+1}} & \frac{\kappa_{sp} T_{j+1}^{2,5}}{C_v \Delta x^2 \rho_{j+1}} \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

$$\mathbf{AS}_j^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa_{sp} T_{j-1}^{2,5} u_{j-1}^2 - 2 C_v \kappa_{sp} T_{j-1}^{3,5}}{2 C_v \Delta x^2 \rho_{j-1}} & -\frac{\kappa_{sp} T_{j-1}^{2,5} u_{j-1}}{C_v \Delta x^2 \rho_{j-1}} & \frac{\kappa_{sp} T_{j-1}^{2,5}}{C_v \Delta x^2 \rho_{j-1}} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

donde se empleó una función  $\Lambda(T)$  genérica, que describe en general a todas las ecuaciones asociadas a la función de pérdidas por radiación (Ec. (3.2)), para obtener las derivadas respecto del sistema conservativo.

$$\Lambda(T) = KT^n$$

Por otro lado, si empleamos una discretización del término de conducción de calor por volúmenes finitos, como la dada por la Ec. (4.37), las expresiones analíticas de las matrices jacobianas asociadas a los términos fuente se vuelven demasiado complejas y extensas para lograr una implementación eficiente.

Otra opción posible es emplear una evaluación numérica aproximada para dichas matrices jacobianas, como se explicará en el capítulo siguiente.

#### 4.4.1. Esquema implícito de Yee-Warming-Harten

Para implementar un esquema implícito que tenga segundo orden de precisión en la integración espacial sin presentar oscilaciones, debe verificarse que los términos convectivos cumplan la propiedad TVD. (Yee et al., 1985) demostraron que para una ley de conservación escalar unidimensional

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$$

un esquema general de la forma

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \eta \left( \bar{f}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} \right) = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (1 - \eta) \left( \bar{f}_{j+1/2}^n - \bar{f}_{j-1/2}^n \right)$$

con el flujo numérico  $\bar{f}_{j+1/2}$  de Harten (Ec. (4.14)) es TVD de segundo orden en el espacio bajo la condición de estabilidad tipo CFL

$$\left\| \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{j+1/2} \right\| \leq \frac{\Delta t}{\Delta x} \psi(\lambda_{j+1/2}) \leq \frac{1}{1 - \eta}$$

El parámetro  $\eta$  varía entre 0 y 1. Cuando  $\eta = 0$  se obtiene el esquema explícito forward Euler, cuando  $\eta = 1$  se obtiene un esquema implícito backward Euler. Se demuestra para este último caso que dicho esquema es incondicionalmente estable para una ley de conservación escalar de coeficientes constantes. Para  $\eta = 1/2$  se obtiene un esquema implícito de segundo orden en el tiempo estable para  $\text{CFL} \leq 2$ .

Analizando el caso para  $\eta = 1$ , correspondiente al esquema *Backward Euler*

$$u_j^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} \eta \left( \bar{f}_{j+1/2}^{n+1} - \bar{f}_{j-1/2}^{n+1} \right) = u_j^n$$

Expresando los flujos numéricos a través de las Relaciones (4.7):

$$f_{j+1/2} = f_j - C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2} \Delta u_{j+1/2}; \quad f_{j-1/2} = f_j - C^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2} \Delta u_{j-1/2};$$

Dicho esquema implícito puede escribirse de la forma:

$$u_j^{n+1} - \frac{\Delta t}{\Delta x} C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^{n+1} \Delta_{j+1/2} u^{n+1} + \frac{\Delta t}{\Delta x} C^+(\lambda + \gamma)_{j-1/2}^{n+1} \Delta_{j-1/2} u^{n+1} = u_j^n \quad (4.55)$$

Para el flujo de Harten (Ec. (4.14)), los términos  $C^-$  y  $C^+$  se expresan como:

$$C_{j+1/2}^{\pm} = \frac{1}{2} \left[ \psi(\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}) \pm (\lambda_{j+1/2} + \gamma_{j+1/2}) \right] \quad (4.56)$$

Donde las expresiones de  $\lambda$ ,  $\gamma$  y  $g_j$  están dadas por las Ecs. (4.11), (4.15) y (4.16) respectivamente.

Con la diferencia que la función  $\sigma(\lambda)$ , en caso de buscar un esquema de segundo

orden en la integración temporal, se expresa como:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \psi(\lambda) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( \eta - \frac{1}{2} \right) \lambda^2 \right]$$

Cuando se desee un esquema para encontrar soluciones estacionarias puede emplearse:

$$\sigma(\lambda) = \frac{1}{2} [\psi(\lambda)]$$

debido a que el esquema es más estable, permitiendo pasos de integración mayores.

Debe notarse que el esquema dado por la Ec. (4.55) es un sistema no lineal de ecuaciones, cuyas incógnitas son los  $u_j^{n+1}$ . Dicho sistema puede linealizarse mediante una extrapolación de primer orden de la forma de la Relación (4.50), o directamente resolver el sistema mediante un método de solución de sistemas no lineales. Sin embargo, los autores plantean directamente asumir que:

$$C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^{n+1} \approx C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n \quad (4.57)$$

De esta manera se obtiene el sistema linealizado más simple posible, pero se pierde la propiedad de la conservatividad del esquema.

Definiendo la variable  $d_j$ , que representa el cambio de la variable de estado entre dos pasos sucesivos de tiempo

$$d_j = u_j^{n+1} - u_j^n \quad (4.58)$$

Puede escribirse el esquema de la forma

$$E_1 d_{j-1} + E_2 d_j + E_3 d_{j+1} = -\frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n] \quad (4.59)$$

donde

$$\begin{aligned}
E_1 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n \\
E_2 &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [C^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n + C^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \\
E_3 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} [C^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n]
\end{aligned} \tag{4.60}$$

Esta formulación tiene la ventaja de cumplir con las siguientes propiedades:

- El esquema es consistente con la formulación conservativa
- El esquema tiene segundo orden de aproximación en el espacio
- El esquema es independiente del valor del paso de tiempo  $\Delta t$  para los términos convectivos

En la presente tesis se empleó el flujo de Harten Yee (Ec. (4.19)) en lugar del flujo original de Harten (Ec. (4.14)), ya que el primero, al ser una generalización del segundo, también cumple la propiedad TVD para el esquema conservativo, y además tiene la ventaja de ser menos difusivo.

El esquema se generaliza para el caso multidimensional de la misma manera que para el esquema explícito, es decir aplicando el esquema unidimensional al sistema en variables características, y luego realizando la transformación inversa. El flujo de Harten-Yee multiminesional está dado por la Ec. (4.23), y los coeficientes  $E_i$  se generalizan mediante:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} \mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n \\
\mathbf{E}_2 &= 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^-(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n + \mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n] \\
\mathbf{E}_3 &= -\frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{J}^+(\lambda + \gamma)_{j+1/2}^n]
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Donde

$$\mathbf{J}_{j+1/2}^\pm = \mathbf{R}_{j+1/2}^n \mathbf{diag}(C^\pm(\lambda^l + \gamma^l)_{j+1/2}^n) (\mathbf{R}^{-1})_{j+1/2}^n \tag{4.62}$$

Para implementar el esquema es necesario determinar entonces los vectores y valores propios aproximados del problema de Riemann asociado al modelo considerado, así

como los coeficientes  $\alpha_i$  de expansión espectral. Para el caso del modelo de Euler, se utilizó el solver de Roe convencional (Roe, 1981), y para el caso MHD se empleó el solver de Roe de (Cargo y Gallice, 1997), que se detalla a continuación

## 4.5. *Solver* de Riemann aproximado de Roe para MHD

Para obtener los vectores y valores propios  $\mathbf{R}_i^{(l)}$  y  $\lambda_i^{(l)}$  y los coeficientes de intensidad de onda  $\alpha_i^{(l)}$  es necesario resolver un problema de Riemann en cada interfaz entre 2 celdas. Dicho esquema se basa en reemplazar la matriz jacobiana exacta  $\mathbf{A}$  por una matriz aproximada  $\overline{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)$  lineal, que es función de las variables en el estado izquierdo y derecho. Dicha matriz debe poseer las siguientes propiedades (Roe, 1981):

**Consistencia con la Jacobiana exacta:**

$$\lim_{\mathbf{U}_R \rightarrow \mathbf{U}_L} \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{A}(\mathbf{U})$$

**Hiperbolicidad del sistema**

La matriz de Roe debe tener valores propios reales y vectores propios linealmente independientes.

**Conservación a través de Discontinuidades**

Debe cumplir la condición de Rankine Hugoniot para las discontinuidades:

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = \overline{\mathbf{A}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L)(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L)$$

Para el caso de un sistema MHD unidimensional (de siete ondas), el estado intermedio de Roe, de acuerdo a (Cargo y Gallice, 1997), está dado por:

$$\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{U}_R, \mathbf{U}_L) = \mathbf{U}(\underline{\rho}, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}, \overline{H^*}, \underline{B}_y, \underline{B}_z)$$

donde los términos subrayados y sobrelineados denotan distintos tipos de promedios de Roe:

$$\underline{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_L}\xi_R + \sqrt{\rho_R}\xi_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}; \quad \bar{\xi} = \frac{\sqrt{\rho_R}\xi_R + \sqrt{\rho_L}\xi_L}{\sqrt{\rho_R} + \sqrt{\rho_L}}$$

A su vez, se define un incremento linealizado del producto entre dos variables como:

$$\Delta(\xi\eta) = \underline{\xi}\Delta\eta + \bar{\eta}\Delta\xi$$

donde  $\Delta\xi = \xi_L - \xi_R$ .

Para el caso general del problema de Riemann de ocho ondas no existe un *solver* de Roe general, por lo que varios autores utilizan distintos tipos de promedios para construir una matriz aproximada. Sin embargo, si no es la matriz de Roe exacta no se cumple la condición de Rankine Hugoniot en las discontinuidades.

El esquema de Roe desarrollado por Cargo y Gallice se basó en obtener primero una matriz de Roe para el sistema MHD unidimensional isoentrópico, que a su vez para el caso de  $B = 0$  se reduzca a la matriz de Roe para el flujo gasdinámico, y para el caso de  $\gamma = 2$  se reduzca al *solver* de (Brio y Wu, 1988).

El sistema MHD 1D isoentrópico se expresa como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0 \quad (4.63a)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p + B^2/2) = 0 \quad (4.63b)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial Bu}{\partial x} = 0 \quad (4.63c)$$

Cuya matriz jacobiana es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\bar{u}^2 + \bar{a}^2 + X & 2\bar{u} + Y & Z \\ -\bar{u}\frac{\bar{B}}{\rho} & \frac{\bar{B}}{\rho} & \bar{u} \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

La complicación surge cuando se estima el salto en la presión magnética, proporcional a  $\Delta B^2$ . Si se toma un promedio aritmético entre los valores a la izquierda y

derecha:

$$\Delta B^2 = 2 \left( \frac{B_R + B_L}{2} \right) \Delta B$$

El sistema de ecuaciones puede dar valores propios imaginarios. Por esta razón los autores propusieron una expansión más general de la forma:

$$\Delta \frac{B^2}{2} = X \Delta \rho + Y \Delta(\rho u) + Z \Delta B \quad (4.65)$$

donde los coeficientes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  deben evaluarse. Como se espera que el sistema sea invariante en una transformación galileana y que los valores propios sean simétricos respecto de la velocidad  $u$ , el término  $Y$  debe ser igual a 0. Por otro lado, para obtener el mismo resultado que Brio y Wu para  $\gamma = 2$ , se obtiene que  $Z = \underline{B}$ . Finalmente, se obtiene que

$$X = \frac{(\Delta B)^2}{2(\sqrt{\rho_L} + \sqrt{\rho_R})^2} \quad (4.66)$$

lo que permite expresar el promedio de Roe para el salto de la presión magnética como:

$$\Delta \frac{B^2}{2} = X \Delta \rho + \underline{B} \Delta B \quad (4.67)$$

A partir de este resultado, puede obtenerse la matriz jacobiana de Roe para el sistema MHD conservativo de siete ondas.

$$\overline{\mathbf{A}}_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{2,1} & (3-\gamma)\bar{u} & (1-\gamma)\bar{v} & (1-\gamma)\bar{w} & (2-\gamma)\underline{B}_y & (2-\gamma)\underline{B}_z & \gamma-1 \\ -\bar{u}\bar{v} & \bar{v} & \bar{u} & 0 & -\underline{B}_x & 0 & 0 \\ -\bar{u}\bar{w} & \bar{w} & 0 & \bar{u} & 0 & -\underline{B}_x & 0 \\ \frac{B_y}{\rho}\bar{u} + \frac{B_x}{\rho}\bar{v} & \frac{B_y}{\rho} & \frac{-B_x}{\rho} & 0 & \bar{u} & 0 & 0 \\ \frac{B_z}{\rho}\bar{u} + \frac{B_x}{\rho}\bar{v} & \frac{B_z}{\rho} & 0 & \frac{-B_x}{\rho} & 0 & \bar{u} & 0 \\ A_{7,1} & A_{7,2} & A_{7,3} & A_{7,4} & A_{7,5} & A_{7,6} & A_{7,7} \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Donde

$$\begin{aligned}
A_{2,1} &= -\bar{u}^2 + (2 - \gamma)X + \frac{\gamma - 1}{2}\bar{\mathbf{v}}^2 \\
A_{7,1} &= \bar{u}\bar{H}^* + \bar{u}(A_{2,1} + \bar{u}^2) + \frac{B_x}{\rho}(\underline{\mathbf{B}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \\
A_{7,2} &= \bar{H}^* + \bar{u}(A_{2,2} - 2\bar{u}) - \frac{B_x^2}{\rho} \\
A_{7,3} &= \bar{u}A_{2,3} - \frac{B_x^2}{\rho}\frac{B_y}{\rho} \\
A_{7,4} &= \bar{u}A_{2,4} - \frac{B_x^2}{\rho}\frac{B_z}{\rho} \\
A_{7,5} &= \bar{u}A_{2,5} - B_x\bar{v} \\
A_{7,6} &= \bar{u}A_{2,6} - B_x\bar{w} \\
A_{7,7} &= \bar{u} + \bar{u}A_{2,7}
\end{aligned}$$

Los valores propios de esta matriz son, respectivamente:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \bar{u} - \bar{c}_f & \lambda_2 &= \bar{u} - \bar{c}_a & \lambda_3 &= \bar{u} - \bar{c}_s & \lambda_4 &= \bar{u} \\
\lambda_5 &= \bar{u} + \bar{c}_s & \lambda_6 &= \bar{u} + \bar{c}_a & \lambda_7 &= \bar{u} + \bar{c}_f
\end{aligned} \tag{4.69}$$

donde:

$$\bar{c}_a^2 = \bar{b}_x^2 \tag{4.70}$$

$$\bar{c}_f^2 = \frac{1}{2} \left( \bar{a}^{*2} + \sqrt{\bar{a}^{*4} - 4\bar{a}^2\bar{b}_x^2} \right) \tag{4.71}$$

$$\bar{c}_s^2 = \frac{1}{2} \left( \bar{a}^{*2} - \sqrt{\bar{a}^{*4} - 4\bar{a}^2\bar{b}_x^2} \right) \tag{4.72}$$

y

$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{b}} &= \begin{bmatrix} \frac{B_x}{\sqrt{\rho}}, & \frac{B_y}{\sqrt{\rho}}, & \frac{B_z}{\sqrt{\rho}} \end{bmatrix} \\
\bar{a}^2 &= (2 - \gamma)X + (\gamma - 1) \left( \bar{H}^* - \bar{\mathbf{v}}^2/2 - \bar{\mathbf{b}}^2 \right) \\
\bar{a}^{*2} &= \bar{a}^2 + \bar{\mathbf{b}}^2
\end{aligned} \tag{4.73}$$

Los vectores propios derechos de dicha matriz, luego de normalizarse de acuerdo a Roe y Balsara, pueden expresarse como

$$\mathbf{R}^{(1)} = \frac{1}{\underline{\rho}\bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho}\alpha_f \\ \underline{\rho}\alpha_f(\bar{u} - \bar{c}_f) \\ \underline{\rho}(\alpha_f\bar{v} + \alpha_s\bar{c}_s\beta_y S) \\ \underline{\rho}(\alpha_f\bar{w} + \alpha_s\bar{c}_s\beta_z S) \\ \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}\beta_y \\ \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}\beta_z \\ \underline{\rho}\alpha_f \left[ (\bar{H}^* - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} - \bar{u}\bar{c}_f) + \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s S(\beta_y\bar{v} + \bar{w}\beta_z) + \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a} |\mathbf{B}_\perp| \right] \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

$$\mathbf{R}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\underline{\rho}\beta_z \\ \underline{\rho}\beta_y \\ -S\sqrt{\underline{\rho}}\beta_z \\ S\sqrt{\underline{\rho}}\beta_y \\ -\underline{\rho}(\bar{v}\beta_z - \bar{w}\beta_y) \end{bmatrix} \quad (4.75)$$

$$\mathbf{R}^{(3)} = \frac{1}{\underline{\rho}\bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho}\alpha_s \\ \underline{\rho}\alpha_s(\bar{u} - \bar{c}_s) \\ \underline{\rho}(\alpha_s\bar{v} - \alpha_f\bar{c}_f\beta_y S) \\ \underline{\rho}(\alpha_s\bar{w} - \alpha_f\bar{c}_f\beta_z S) \\ -\sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}\beta_y \\ -\sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}\beta_z \\ \underline{\rho}\alpha_s \left[ (\bar{H}^* - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} - \bar{u}\bar{c}_s) - \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f S(\beta_y\bar{v} + \bar{w}\beta_z) - \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a} |\mathbf{B}_\perp| \right] \end{bmatrix} \quad (4.76)$$

$$\mathbf{R}^{(4)} = \frac{1}{\bar{a}^2} \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \\ 0 \\ 0 \\ \bar{v}^2/2 + \frac{\gamma-2}{\gamma-1}X \end{bmatrix} \quad (4.77)$$

$$\mathbf{R}^{(5)} = \frac{1}{\underline{\rho}\bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho}\alpha_s \\ \underline{\rho}\alpha_s(\bar{u} + \bar{c}_s) \\ \underline{\rho}(\alpha_s\bar{v} + \alpha_f\bar{c}_f\beta_y S) \\ \underline{\rho}(\alpha_s\bar{w} + \alpha_f\bar{c}_f\beta_z S) \\ -\sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}\beta_y \\ -\sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}\beta_z \\ \underline{\rho}\alpha_s \left[ (\overline{H^*} - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} + \overline{uc}_s) \right] + \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f S(\beta_y\bar{v} + \bar{w}\beta_z - \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a} |\mathbf{B}_\perp|) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{R}^{(6)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \underline{\rho}\beta_z \\ -\underline{\rho}\beta_y \\ -S\sqrt{\underline{\rho}}\beta_z \\ S\sqrt{\underline{\rho}}\beta_y \\ \underline{\rho}(\bar{v}\beta_z - \bar{w}\beta_y) \end{bmatrix} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{R}^{(7)} = \frac{1}{\underline{\rho}\bar{a}^2} \begin{bmatrix} \underline{\rho}\alpha_f \\ \underline{\rho}\alpha_f(\bar{u} + \bar{c}_f) \\ \underline{\rho}(\alpha_f\bar{v} - \alpha_s\bar{c}_s\beta_y S) \\ \underline{\rho}(\alpha_f\bar{w} - \alpha_s\bar{c}_s\beta_z S) \\ \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}\beta_y \\ \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}\beta_z \\ \underline{\rho}\alpha_f \left[ \overline{H^*} - \frac{\mathbf{B}^2}{\underline{\rho}} + \overline{uc}_f \right] - \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s S(\beta_y\bar{v} + \bar{w}\beta_z + \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a} |\mathbf{B}_\perp|) \end{bmatrix} \quad (4.80)$$

Y los coeficientes de expansión espectral están dados por:

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{1}{2}[\alpha_f(X\Delta\rho + \Delta p) + \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s S(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w) - \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f\Delta u + \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)] \quad (4.81a)$$

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{1}{2}[\beta_y\Delta w - \beta_z\Delta v + \frac{S}{\sqrt{\underline{\rho}}}(\beta_y\Delta B_z - \beta_z\Delta B_y)] \quad (4.81b)$$

$$\bar{\alpha}_3 = \frac{1}{2}[\alpha_s(X\Delta\rho + \Delta p) - \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f S(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w) - \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s\Delta u - \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)] \quad (4.81c)$$

$$\bar{\alpha}_4 = (\bar{a}^2 - X)\Delta\rho - \Delta p \quad (4.81d)$$

$$\bar{\alpha}_5 = \frac{1}{2}[\alpha_s(X\Delta\rho + \Delta p) + \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f S(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w) + \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s\Delta u - \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_f\bar{a}(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)] \quad (4.81e)$$

$$\bar{\alpha}_6 = \frac{1}{2}[-\beta_y\Delta w + \beta_z\Delta v + \frac{S}{\sqrt{\underline{\rho}}}(\beta_y\Delta B_z - \beta_z\Delta B_y)] \quad (4.81f)$$

$$\bar{\alpha}_7 = \frac{1}{2}[\alpha_f(X\Delta\rho + \Delta p) - \underline{\rho}\alpha_s\bar{c}_s S(\beta_y\Delta v + \beta_z\Delta w) + \underline{\rho}\alpha_f\bar{c}_f\Delta u + \sqrt{\underline{\rho}}\alpha_s\bar{a}(\beta_y\Delta B_y + \beta_z\Delta B_z)] \quad (4.81g)$$



---

# Capítulo 5

## Condiciones de Contorno

### 5.1. Introducción

Un modelado consistente y físicamente correcto de las condiciones de contorno es fundamental para lograr la estabilidad numérica del modelo, así como para lograr que converja a una solución físicamente correcta.

Dado un sistema conservativo hiperbólico de la forma:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{C}' = 0 \quad \text{para } x_L \leq x \leq x_R$$

Empleando esta formulación, los términos fuente se incluyen en el vector  $\mathbf{C}'$ , que es igual a  $\mathbf{C}' = -\mathbf{S}$  de la Ec. (3.25a).

Con una discretización del dominio físico en  $M$  celdas, y en los contornos con una formulación general con  $k$  celdas, numeradas para el extremo izquierdo ( $x < x_L$ ) ( $-k \dots -1, 0$ ), y para el extremo derecho ( $x > x_R$ ) ( $M+1, M+2 \dots M+k$ ). En la Figura 5.1 se esquematiza el problema considerado.

En el contorno del dominio se tendrá en general una serie de ondas características que se propagan hacia afuera, y otras que se transmiten desde el contorno hacia el interior del dominio. Las características que se propagan hacia afuera dependen sólo de las variables en el interior del dominio (y por ello no pueden ser influenciadas por el valor de las variables en el contorno). Por esta razón, las ondas características salientes imponen relaciones de compatibilidad que deben satisfacer las variables en

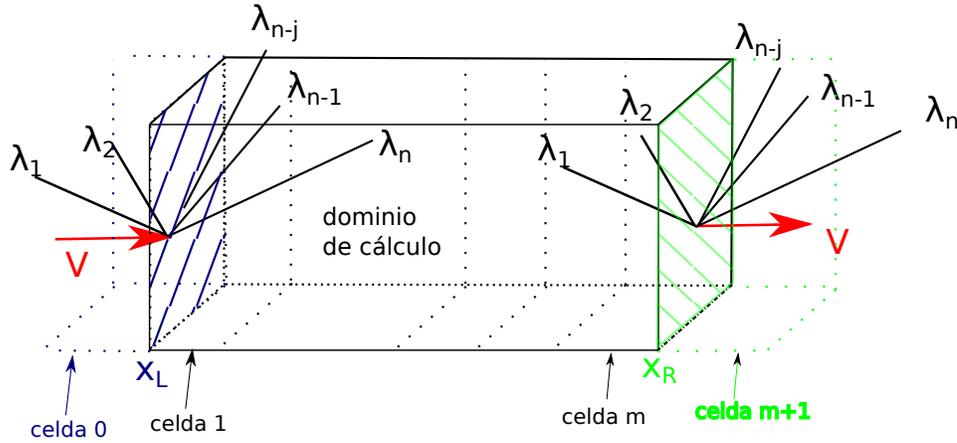


Figura 5.1: Características entrantes y salientes al dominio

el contorno. El valor de estas últimas debe evolucionar en el tiempo para satisfacer las relaciones impuestas por las ondas características salientes en cada instante.

De la misma forma, las características entrantes sólo dependen del valor de las variables en el contorno, pero influyen en la evolución de las variables en el interior del dominio. Por ello deben ser establecidas a priori de acuerdo a la física del problema que se desee estudiar, como se expresa en los libros de Hoffmann y Chiang (2000b) y Blazek (2005).

De esta manera, en un contorno de un problema hiperbólico de  $n$  variables con  $b$  características entrantes, sólo tiene sentido físico imponer el valor de  $b$  variables en el contorno. Sin embargo, es necesario determinar de alguna manera el valor de las restantes  $n - b$  variables para poder evaluar flujos, u otras operaciones necesarias para cálculos dentro del dominio. Por estas razones, algunos autores hablan de “condiciones de contorno físicas” cuando se le asigna el valor a una variable en el contorno y de “condiciones de contorno numéricas” cuando se imponen las relaciones de compatibilidad anteriormente mencionadas.

La forma más simple de estimar las variables asociadas a las características salientes es mediante una extrapolación de orden cero o de orden uno. Esta extrapolación puede hacerse en el espacio, o en el espacio-tiempo, o incluso emplear esquemas de diferencias finitas explícitos o implícitos. Una discusión bastante completa sobre distintas formas de implementar BCs por extrapolación se encuentra en el trabajo de (Yee, 1981). Para imponer BCs con extrapolación de orden cero en el espacio para

el esquema de Harten-Yee es necesario extrapolar tanto el valor de la variable como el de las funciones limitadoras  $g_i$  (dadas por la Ec. (4.25)) en las celdas que colindan con los contornos.

$$\begin{cases} \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}_1; & \mathbf{g}_0 = \mathbf{g}_1 & \text{para } x < x_L \\ \mathbf{U}_{m+1} = \mathbf{U}_m; & \mathbf{g}_{m+1} = \mathbf{g}_m & \text{para } x > x_R \end{cases} \quad (5.1)$$

Puede demostrarse que para que se cumpla la condición  $\mathbf{g}_{m+1} = \mathbf{g}_m$  es necesario que

$$\begin{cases} \mathbf{U}_m = \mathbf{U}_{m+1} \\ \mathbf{U}_{m+2} = \mathbf{U}_{m-1} \end{cases} \quad (5.2)$$

Sin embargo, esta forma en general no suele ser consistente con la física del problema, ya que una extrapolación implica necesariamente imponer un gradiente a la variable extrapolada. Dicho gradiente no coincide en general con el gradiente dado por las características salientes.

Por esta razón, distintos autores desarrollaron modelos de condiciones de contorno basado en características, donde las variables asociadas a características salientes se calculan de acuerdo a valores estimados de dichas características (Dutt, 1988; Engquist y Madja, 1977; Hedstrom, 1979).

En la presente tesis implementamos las condiciones de contorno mediante una formulación basada en ondas características, de acuerdo a las metodologías propuesta por (Thompson, 1987, 1990), y (Poinsot y Lele, 1992), primero en el sistema gasdinámico de Euler y luego en el sistema MHD .

## 5.2. Condiciones de contorno para el modelo gasdinámico

A continuación se muestra cómo se implementan las condiciones de contorno basadas en características para el sistema de ecuaciones de Euler unidimensional conservativo en su forma más simple: asumiendo la no reflexión de las ondas entrantes al dominio. Luego agregamos términos no conservativos, primero considerando los efectos de la gravedad como término fuente y luego agregando efectos de difusión

térmica en la ecuación de la energía.

Tomando el sistema de ecuaciones de Euler en variables primitivas, Ec. (3.29) expresado en forma matricial, siendo  $\mathbf{C}$  el vector de términos fuente expresado en variables primitivas:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{C} = 0 \quad (5.3)$$

y teniendo en cuenta la transformación entre el sistema conservativo y primitivo, dados por la Ec. (2.21)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &= \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= \mathbf{Q} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} \end{aligned} \quad (5.4)$$

luego

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{Q} \\ \mathbf{C} &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}' \end{aligned}$$

Premultiplicando la Ec. (5.3) por los vectores propios izquierdos  $\mathbf{I}^{(i)}$  puede expresarse la evolución del sistema en función de los vectores propios izquierdos y de las velocidades características:

$$\mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \lambda^{(i)} \mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{I}^{(i)} \cdot \mathbf{C} = 0 \quad (5.5)$$

donde los vectores propios se eligen de la siguiente manera:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}^{(1)T} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho a \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}^{(2)T} = \begin{bmatrix} -a^2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}^{(3)T} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho a \\ 1 \end{bmatrix}$$

En el contorno izquierdo las ondas con  $\lambda^{(i)} \leq 0$  serán ondas salientes y las ondas con  $\lambda^{(i)} \geq 0$  serán entrantes. En el contorno derecho es a la inversa. El criterio de (Hedstrom, 1979) para establecer condiciones de contorno no reflejantes expresa que *las amplitudes de las ondas entrantes debe ser constante en el tiempo*. Definiendo

una nueva variable vectorial  $\mathbf{Z}$  mediante:

$$d\mathbf{Z}^{(i)} = \mathbf{I}^{(i)}d\mathbf{V} + \mathbf{I}^{(i)}\mathbf{C}dt \quad (5.6)$$

la Ec. (5.5) puede reescribirse como un sistema conservativo en variables características

$$\frac{\partial \mathbf{Z}^{(i)}}{\partial t} + \lambda^{(i)} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(i)}}{\partial x} = 0 \quad (5.7)$$

Se observa que para este sistema la amplitud de cada onda, dada por  $\mathbf{Z}^{(i)}$  es constante a lo largo de una curva  $\mathcal{C}$  en el plano  $x - t$  definida por  $\frac{dx}{dt} = \lambda^{(i)}$ . Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que esta parametrización con la variable  $\mathbf{Z}$  es exacta sólo si el Sistema (5.6) cumple la condición de integrabilidad de Pfaff. Para el caso de un vector  $\mathbf{C}$  constante en la celda esta condición queda satisfecha. Y en el caso de no ser una relación exacta, aún así este método provee de una buena estimación para la variación temporal de las variables en el contorno.

Luego, si para imponer las condiciones de contorno se desea que las amplitudes de las ondas entrantes al dominio sean iguales a cero en el contorno, basta con establecer para cada una de ellas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{Z}^{(i)}}{\partial t} \Big|_{x=x_L, x_R} &= 0 \\ \mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{I}^{(i)} \cdot \mathbf{C} &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Para determinar cuáles ondas son entrantes y cuáles salientes, basta con evaluar su velocidad característica en el contorno considerado proyectada en la dirección a la normal a dicho contorno.

Tomando como referencia la Figura 5.1, el contorno ubicado en  $x_L$  es una entrada de flujo. En este caso, si la velocidad característica  $\lambda^{(i)}$  es menor a cero, la onda será saliente al dominio; y si fuera mayor a cero, se trata de una onda entrante. Se observa que las ondas  $\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)} \dots \lambda^{(j)}$  son salientes y poseen velocidades menores a cero (ya que se propagan en dirección contraria a la velocidad del flujo  $V$ ).

El contorno ubicado en  $x_R$  es una salida, y en este caso las ondas salientes al dominio son  $\lambda^{(n-j)}, \dots \lambda^{(n-1)} \dots \lambda^{(n)}$ , que poseen una velocidad positiva (se propagan en la misma dirección que la velocidad del flujo).

$$\begin{cases} [\mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \lambda_i \mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{I}^{(i)} \cdot \mathbf{C}]_{x=x_L} = 0 & \text{si } \lambda^{(i)} \leq 0 \\ [\mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{I}^{(i)} \cdot \mathbf{C}]_{x=x_L} = 0 & \text{si } \lambda^{(i)} > 0 \end{cases} \quad (5.9)$$

Definiendo el operador  $\mathcal{L}^{(i)}$

$$\mathcal{L}^{(i)} = \begin{cases} \lambda^{(i)} \mathbf{I}^{(i)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} & \text{para ondas salientes} \\ 0 & \text{para las demás ondas} \end{cases} \quad (5.10)$$

pueden establecerse las condiciones de contorno de manera sistemática y consistente.

Para el sistema de Euler, las ecuaciones de variación de las variables primitivas a lo largo de las curvas características se expresan entonces como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} - \rho a \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}^{(1)} = 0 \quad (5.11a)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathcal{L}^{(2)} = 0 \quad (5.11b)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}^{(3)} = 0 \quad (5.11c)$$

Los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  se expresan para el sistema de Euler mediante:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \lambda^{(1)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right); \quad \mathcal{L}^{(2)} = \lambda^{(2)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right); \quad \mathcal{L}^{(3)} = \lambda^{(3)} \left( \frac{\partial p}{\partial x} + \rho a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5.12)$$

Pueden estimarse los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  en las celdas  $j$ -ésimas de los contornos mediante

derivadas descentradas :

$$\begin{cases} \mathcal{L}_j^{(1)} = (u_j - a_j) \frac{1}{\Delta x} [p_{j+1} - p_j - \rho_j a_j (u_{j+1} - u_j)], & j < 1, \quad u_j - a_j < 0 \\ \mathcal{L}_j^{(1)} = (u_j - a_j) \frac{1}{\Delta x} [p_j - p_{j-1} - \rho_j a_j (u_j - u_{j-1})], & j > M, \quad u_j - a_j > 0 \end{cases} \quad (5.13a)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_j^{(2)} = u_j \frac{1}{\Delta x} [p_{j+1} - p_j - a_j^2 (\rho_{j+1} - \rho_j)], & j < 1, \quad u_j < 0 \\ \mathcal{L}_j^{(2)} = u_j \frac{1}{\Delta x} [p_j - p_{j-1} - a_j^2 (\rho_j - \rho_{j-1})], & j > M, \quad u_j > 0 \end{cases} \quad (5.13b)$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}_j^{(3)} = (u_j + a_j) \frac{1}{\Delta x} [p_{j+1} - p_j + \rho_j a_j (u_{j+1} - u_j)], & j < 1, \quad u_j + a_j < 0 \\ \mathcal{L}_j^{(3)} = (u_j + a_j) \frac{1}{\Delta x} [p_j - p_{j-1} + \rho_j a_j (u_j - u_{j-1})], & j > M, \quad u_j + a_j > 0 \end{cases} \quad (5.13c)$$

$$\mathcal{L}_j^{(i)} = 0 \quad \text{en los demás casos} \quad (5.13d)$$

Una vez determinados los valores del operador  $\mathcal{L}$  en cada caso, se puede evaluar la evolución temporal de las variables primitivas en los contornos:

$$\frac{\Delta p_j}{\Delta t} = -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_j^{(3)} + \mathcal{L}_j^{(1)}) \quad (5.14a)$$

$$\frac{\Delta u_j}{\Delta t} = -\frac{1}{2\rho_j a_j} (\mathcal{L}_j^{(3)} - \mathcal{L}_j^{(1)}) \quad (5.14b)$$

$$\frac{\Delta \rho_j}{\Delta t} = \frac{1}{a_j^2} \left( \frac{\Delta p_j}{\Delta t} + \mathcal{L}_j^{(2)} \right) \quad (5.14c)$$

Estas relaciones permiten, mediante el mismo integrador temporal utilizado para las celdas del dominio, obtener la evolución temporal de las variables primitivas en el contorno. Para obtener la evolución de las variables conservativas se emplean las relaciones:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = u \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial e_t}{\partial t} = \frac{1}{2} u^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{\partial p}{\partial t}$$

Obteniéndose la forma discreta para integrar en el contorno:

$$\frac{\Delta \rho_j}{\Delta t} = \frac{1}{a_j^2} \left[ \mathcal{L}_j^{(2)} - \frac{1}{2} (\mathcal{L}_j^{(3)} + \mathcal{L}_j^{(1)}) \right] \quad (5.15a)$$

$$\frac{\Delta (\rho u)_j}{\Delta t} = \frac{u_j}{a_j^2} \left[ \mathcal{L}_j^{(2)} - \frac{1}{2} (\mathcal{L}_j^{(3)} + \mathcal{L}_j^{(1)}) \right] - \frac{1}{2a_j} (\mathcal{L}_j^{(3)} - \mathcal{L}_j^{(1)}) \quad (5.15b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta e_{tj}}{\Delta t} &= \frac{1}{2} \frac{u_j^2}{a_j^2} \left[ \mathcal{L}_j^{(2)} - \frac{1}{2} (\mathcal{L}_j^{(3)} + \mathcal{L}_j^{(1)}) \right] - \frac{u_j}{2a_j} (\mathcal{L}_j^{(3)} - \mathcal{L}_j^{(1)}) \\ &\quad - \frac{1}{2(\gamma - 1)} (\mathcal{L}_j^{(3)} + \mathcal{L}_j^{(1)}) \end{aligned} \quad (5.15c)$$

### 5.2.1. Implementación para el Integrador Temporal Implícito

Para integrar dichas ecuaciones mediante un esquema explícito, simplemente se evalúan los términos del miembro derecho con las variables de estado en el paso de tiempo  $n$ , y la derivada temporal se calcula con una diferencia finita. Para utilizar el esquema de integración implícito es necesario evaluar el miembro de la derecha en el paso  $n + 1$ . Llamando  $\mathbf{I}$  a la matriz cuyas filas son los vectores propios izquierdos del sistema en variables primitivas y  $\mathcal{L}$  al vector cuyos elementos son los  $\mathcal{L}^{(i)}$ , puede escribirse el sistema en forma matricial

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = - [\mathbf{PI}^{-1}\mathcal{L} + \mathbf{C}']^{n+1} \quad (5.16)$$

Teniendo en cuenta las leyes de transformación para los vectores propios izquierdos y derechos entre el sistema primitivo y el sistema conservativo, dadas por las Ecs. (2.12), (2.25) y (2.26), la expresión del sistema puede simplificarse a:

$$\mathbf{PI}^{-1}\mathcal{L} = \mathbf{Pr}\mathcal{L} = \mathbf{R}\mathcal{L} \quad (5.17)$$

siendo  $\mathbf{r}$  la matriz de vectores propios del sistema primitivo y  $\mathbf{R}$  su homóloga en el sistema conservativo.

Los términos del miembro derecho se evalúan mediante una expansión en serie de Taylor, de la misma forma que para la Ec. (4.43). Debe tomarse especial cuidado en evaluar las derivadas en los nodos del stencil que usa esta metodología. Por un lado, los vectores propios se evalúan sólo en la celda considerada. Pero por otro, los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  se evalúan de la misma manera que para el esquema explícito, en función de que las ondas sean entrantes o salientes. Teniendo en cuenta que las derivadas espaciales se evalúan mediante esquemas

descentrados distintos según se trate del contorno derecho o izquierdo

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}^{(i)}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}), & \text{para } j < 1 \\ \mathcal{L}^{(i)} = \mathcal{L}^{(i)}(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j), & \text{para } j > M \end{cases} \quad (5.18)$$

Por estas razón se emplean dos tipos de extrapolaciones, según se trate del extremo izquierdo o derecho:

$$[\mathbf{R}\mathcal{L}]^{n+1} \approx [\mathbf{R}\mathcal{L}]^n + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} (\mathbf{R}\mathcal{L})^n \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} (\mathbf{R}\mathcal{L})^n \frac{\partial \mathbf{U}_{j+1}}{\partial t} \Delta t, \quad \text{para } j < 1 \quad (5.19a)$$

$$[\mathbf{R}\mathcal{L}]^{n+1} \approx [\mathbf{R}\mathcal{L}]^n + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} (\mathbf{R}\mathcal{L})^n \frac{\partial \mathbf{U}_j}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} (\mathbf{R}\mathcal{L})^n \frac{\partial \mathbf{U}_{j-1}}{\partial t} \Delta t, \quad \text{para } j > M \quad (5.19b)$$

El vector de términos fuente no presenta mayores dificultades, ya que se evalúa de la misma manera que para el interior del dominio, o sea mediante la Ec. (4.44).

Luego, para integrar las condiciones de borde de forma implícita es necesario evaluar la matriz jacobiana

$$\frac{\partial}{\partial U_j^{(k)}} \mathbf{R}\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial U_j^{(k)}} \begin{bmatrix} R_{11}\mathcal{L}^{(1)} + R_{12}\mathcal{L}^{(2)} + R_{13}\mathcal{L}^{(3)} \\ R_{21}\mathcal{L}^{(1)} + R_{22}\mathcal{L}^{(2)} + R_{23}\mathcal{L}^{(3)} \\ R_{31}\mathcal{L}^{(1)} + R_{32}\mathcal{L}^{(2)} + R_{33}\mathcal{L}^{(3)} \end{bmatrix} \quad (5.20)$$

donde el operador  $\frac{\partial}{\partial U_j^{(k)}}$  implica la derivada respecto a la  $k$ -ésima componente del vector de variables conservativas evaluada en la  $j$ -ésima celda del dominio. Luego, la columna  $k$ -ésima matriz jacobiana exacta del operador de derivadas espaciales en el contorno, valuada en la celda  $j$ -ésima se obtiene haciendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial U_j^{(k)}} \mathbf{R}\mathcal{L} = & \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{11}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{11} + \frac{\partial R_{12}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{12} + \frac{\partial R_{13}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(3)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{13} \\ \frac{\partial R_{21}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{21} + \frac{\partial R_{22}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{22} + \frac{\partial R_{23}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(3)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{23} \\ \frac{\partial R_{31}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{31} + \frac{\partial R_{32}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{32} + \frac{\partial R_{33}}{\partial U_j^{(k)}} \mathcal{L}^{(3)} + \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_j^{(k)}} R_{33} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.21)$$

El sistema de ecuaciones para integrar implícitamente las variables del contorno puede

expresarse como:

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \Delta t \right] \Delta \mathbf{U}_j + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} \mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j+1} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \Delta t \quad \text{para } j < 1 \quad (5.22)$$

$$\left[ \mathbf{I} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_{j-1}, \mathbf{U}_j) \Delta t \right] \Delta \mathbf{U}_j + \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} \mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}) \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j-1} = -\mathbf{R}(\mathbf{U}_j) \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}) \Delta t \quad \text{para } j > M \quad (5.23)$$

Como los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  tienen dentro un operador diferencial discreto, no puede aceptarse que conmuten con el operador diferencial respecto de las variables de estado, empleado para evaluar las jacobianas. Luego, se define para el contorno izquierdo

$$\mathbf{J}^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}); \quad \mathbf{J}^+ = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j+1}} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}); \quad (5.24)$$

y para el contorno derecho:

$$\mathbf{J}^c = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_j} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}); \quad \mathbf{J}^- = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}_{j-1}} \mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}); \quad (5.25)$$

Finalmente, las variables en el contorno se integran implícitamente agregando el siguiente conjunto de ecuaciones al sistema global:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} + \mathbf{J}^c \Delta t) \Delta \mathbf{U}_j + \mathbf{J}^+ \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j+1} &= -\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j+1}) \Delta t \quad \text{para } j < 1 \\ \mathbf{J}^- \Delta t \Delta \mathbf{U}_{j-1} + (\mathbf{I} + \mathbf{J}^c \Delta t) \Delta \mathbf{U}_j &= -\mathbf{R}_j \mathcal{L}(\mathbf{U}_j, \mathbf{U}_{j-1}) \Delta t \quad \text{para } j > M \end{aligned} \quad (5.26)$$

Mediante el procesador simbólico *wxMaxima* se obtuvieron las derivadas de los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$ , que se expresan de manera sencilla en el Apéndice A.

## Matriz Jacobiana Aproximada Numéricamente

La obtención de esta matriz jacobiana exacta resulta relativamente sencilla para el modelo anteriormente descrito. Sin embargo, para un modelo más complejo (como el modelo MHD) las expresiones analíticas resultan demasiado extensas y complejas de derivar, incluso mediante un procesador simbólico. Además, deben obtenerse 49 elementos para cada una de las tres matrices jacobianas (en  $j-1$ ,  $j$ , y  $j+1$ ) que se necesitan. Esta metodología resulta entonces propensa a los errores, tanto en la obtención de las expresiones como en su implementación en el algoritmo. Por esta razón, se optó por emplear para los casos más complejos una estimación numérica de la jacobiana presentada en el trabajo de (Knoll y

Keyes, 2004), basada en las aproximaciones a productos de matrices y vectores usadas para los métodos de resolución de sistemas no lineales tipo Newton-Krylov.

Dada una función vectorial  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  y un vector  $\mathbf{v}$ , este método permite obtener de manera aproximada el producto de la matriz jacobiana asociada a  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  y el vector  $\mathbf{v}$  mediante:

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \cdot \mathbf{v} \approx \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{v}) - \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\varepsilon} \quad (5.27)$$

donde  $\varepsilon$  es un parámetro que representa una “pequeña perturbación”. Debe elegirse cuidadosamente, dependiendo de las propiedades del vector  $\mathbf{v}$  y del error de truncamiento de la computadora utilizada ( $\varepsilon_{trunc}$ ). El error en la aproximación es proporcional a  $\varepsilon$ , pero si su valor es muy pequeño, los errores de redondeo pueden llevar a resultados inexactos.

Para obtener el jacobiano aproximado se emplea una serie de vectores  $\mathbf{e}_k$  cuyos elementos son iguales a 0, excepto el  $k$ -ésimo, que es igual a 1. Dichos vectores representan una perturbación en la componente  $k$ -ésima del vector de variables conservativas evaluados en la celda  $j$ -ésima  $U_j^{(k)}$ . De esta manera, la columna  $k$ -ésima de la matriz jacobiana aproximada se obtiene haciendo

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{e}_k \approx \mathbf{J}^{(k)} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{U} + \varepsilon_k \mathbf{e}_k) - \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\varepsilon_k} \quad (5.28)$$

donde el parámetro  $\varepsilon_k$  se estima, de acuerdo a Knoll y Keyes (2004), para cada variable  $U_j^{(k)}$  como:

$$\varepsilon_k = bU_j^{(k)} + b \quad (5.29)$$

donde  $b = \mathcal{O}\sqrt{\varepsilon_{trunc}}$ . Para una computadora de 64 bits y doble precisión basta con hacer  $b = 10^{-6}$ .

Sin embargo, en el caso de que  $U_j^{(k)} = -1$  el valor de  $\varepsilon_k$  se anula, ocurriendo una singularidad en el valor de los jacobianos aproximados. Esto ocurre por ejemplo con el campo magnético transversal en el tubo de choque de Brio y Wu, caso que se discutirá más adelante. Por esta razón modificamos esta fórmula tomando el valor absoluto de  $U_j^{(k)} = -1$

$$\varepsilon_k = b\|U_j^{(k)}\| + b \quad (5.30)$$

Como para el modelo gasdinámico unidimensional de Euler pudimos obtener las matrices jacobianas exactas, comparamos los resultados obtenidos con ambos métodos. Como se encontró que no existieron diferencias significativas, para el sistema MHD se implementó

sólo el modelo con los jacobianos aproximados.

Por otro lado, también se probó calcular las matrices jacobianas asociadas a los términos fuente en el interior del dominio de cálculo con esta metodología. Como se obtuvieron muy buenos resultados, con errores relativos máximos del orden del 2% o 3% comparados a la expresión analítica de los casos más simples, optamos por emplear esta metodología para determinar dichas matrices en el código.

### 5.3. Generalización del Modelo

La formulación de condiciones de contorno basadas en características que imponen la no reflexión de ondas es una herramienta muy poderosa, sin embargo no es suficientemente flexible. Esto se debe a que no siempre la solución físicamente correcta a un problema de contorno es la no reflexión de las ondas entrantes. Esto se ve claramente, por ejemplo, en una salida subsónica donde la presión está impuesta. Necesariamente la información del cambio de presión en el contorno debe viajar aguas arriba hasta que se encuentre un equilibrio. Sin embargo, especificar más condiciones de contorno que las estrictamente definidas por la física del problema produce oscilaciones e inestabilidades en el método. Con la salvedad de que la condición impuesta sea la solución analítica esperada en el contorno, que sólo puede conocerse para pocos problemas sencillos. En los trabajos de (Poinsot y Lele, 1992) y de (Yee, 1981) se presenta una discusión muy completa sobre la física y el buen condicionamiento (*well-posedness*) de las condiciones de contorno para las ecuaciones de Euler y Navier Stokes.

Por estas razones, en un segundo trabajo de (Thompson, 1990) se generalizó esta metodología para distintos tipos de condiciones y para cualquier sistema de ecuaciones hiperbólico. En dicho trabajo se estudió el sistema de Euler 3D con términos fuente debidos a la gravedad. En este caso, por la naturaleza de los estudios de esta tesis, se emplea un modelo cuasi-unidimensional con área variable  $A(x)$  y con un vector de términos fuente genérico  $\mathbf{C}'$ , asumido como constante dentro de la celda. El término  $-p \frac{\partial A}{\partial x}$  se encuentra incluido como término fuente en el término del vector  $\mathbf{C}'^{(2)}$ , asociado a la componente normal de la

cantidad de movimiento.

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u A}{\partial x} + C^{(1)} = 0 \quad (5.31a)$$

$$\frac{\partial \rho u A}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2 A}{\partial x} + \frac{\partial p A}{\partial x} + C^{(2)} = 0 \quad (5.31b)$$

$$\frac{\partial \rho e_t A}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [u (\rho e_t A + p A)] + C^{(3)} = 0 \quad (5.31c)$$

Las ecuaciones en variables primitivas quedan:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + u \frac{\partial \rho A}{\partial x} + \rho A \frac{\partial u}{\partial x} + C^{(1)} = 0 \quad (5.32a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho A} \frac{\partial p A}{\partial x} + C^{(2)} = 0 \quad (5.32b)$$

$$\frac{\partial p A}{\partial t} + u \frac{\partial p A}{\partial x} + \gamma p A \frac{\partial u}{\partial x} + C^{(3)} = 0 \quad (5.32c)$$

En este caso los vectores propios izquierdos y los operadores  $\mathcal{L}$  son análogos a los del sistema unidimensional, con la diferencia que están valuados en función de las nuevas variables primitivas, es decir:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \lambda^{(1)} \left( \frac{\partial p A}{\partial x} - \rho A a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5.33a)$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \lambda^{(2)} \left( \frac{\partial p A}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho A}{\partial x} \right) \quad (5.33b)$$

$$\mathcal{L}^{(3)} = \lambda^{(3)} \left( \frac{\partial p A}{\partial x} + \rho A a \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (5.33c)$$

Luego el sistema de ecuaciones en variables primitivas se expresa en función de los operadores  $\mathcal{L}_i$  como:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ -\mathcal{L}^{(2)} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(1)}) \right] + C^{(1)} = 0 \quad (5.34a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2\rho A a} (\mathcal{L}^{(3)} - \mathcal{L}^{(1)}) + C^{(2)} = 0 \quad (5.34b)$$

$$\frac{\partial p A}{\partial t} + \frac{1}{2} (\mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(1)}) + C^{(3)} = 0 \quad (5.34c)$$

Además resultan útiles las siguientes relaciones para la variación temporal de las variables conservadas dadas por la Ec. (5.15); y otras que relacionan la variación temporal y

espacial de la temperatura, adaptadas del trabajo de (Poinsot y Lele, 1992):

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{T}{\rho a^2} \left[ \mathcal{L}^{(2)} + \frac{\gamma-1}{2} \left( \mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) \right] = -\frac{C^{(3)}}{\rho R} \quad (5.35a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T}{\rho a^2} \left[ \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} + \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{u+a} + \frac{\mathcal{L}^{(1)}}{u-a} \right) \right] \quad (5.35b)$$

Trabajando algebraicamente con estas ecuaciones pueden obtenerse diferentes tipos de condiciones de contorno, que se explicitarán a continuación.

Esta nueva manera de emplear los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  se integra implícitamente empleando el mismo método que el empleado para el modelo de condiciones no reflejantes, explicado en la sección anterior.

### 5.3.1. Pared sólida

En este caso la condición está dada por  $u = 0 \quad \forall t$ . Para el caso de  $x = x_L$ , se tiene que  $\lambda^{(1)} = -a$  y  $\mathcal{L}^{(1)}$  será una onda saliente, por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \lambda^{(1)} \left( \frac{\partial pA}{\partial x} - \rho Aa \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

como  $u = 0$ , entonces  $\mathcal{L}^{(2)} = 0$ .

Como se necesita que  $u$  en el contorno continúe siendo 0 en el tiempo, luego  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \forall t$ . Inspeccionando la Ec. (5.34b) se observa que debe cumplirse:

$$\frac{1}{2\rho Aa} \left( \mathcal{L}^{(3)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + C^{(2)} = 0 \rightarrow \mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L}^{(1)} - 2\rho AaC^{(2)} \quad (5.36)$$

La evolución en el tiempo de las demás variables primitivas resulta:

$$\frac{\partial \rho A}{\partial t} + \frac{1}{a^2} \left[ \mathcal{L}^{(1)} - \rho AaC^{(2)} \right] + C^{(1)} = 0; \quad \frac{\partial pA}{\partial t} - \rho AaC^{(2)} + C^{(3)} = 0$$

Para el caso de  $x = x_R$ ,  $\mathcal{L}^{(3)}$  será una onda saliente, y se calcula como:

$$\mathcal{L}^{(3)} = \lambda^{(3)} \left( \frac{\partial pA}{\partial x} + \rho Aa \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

y la condición para la velocidad se impone mediante

$$\frac{1}{2\rho Aa} \left( \mathcal{L}^{(3)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + C^{(2)} = 0 \rightarrow \mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(3)} + 2\rho AaC^{(2)}$$

### 5.3.2. Salida

Que exista una salida en el contorno implica necesariamente que

$$\begin{aligned} u < 0 & \text{ para } x = x_L \\ u > 0 & \text{ para } x = x_R \end{aligned}$$

Por lo tanto, los operadores  $\mathcal{L}^{(2)}$  y  $\mathcal{L}^{(3)}$  deberá obtenerse siempre mediante la relación para ondas salientes dadas por la Ec. (5.13), siempre y cuando los términos fuente no incluyan términos con derivadas de segundo orden en las variables conservadas (como por ejemplo en el caso de conducción térmica). Este caso se analizará en la sección de resultados. En caso de que esto no ocurra, se debe determinar sólo el valor del operador  $\mathcal{L}^{(1)}$ . Dicho valor dependerá de si el flujo es subsónico o supersónico.

#### Flujo supersónico

Esta condición implica:

$$\begin{aligned} u < a < 0 & \text{ para } x = x_L \\ 0 < a < u & \text{ para } x = x_R \end{aligned}$$

Para  $x = x_L$  todas las velocidades características son menores a cero. Por lo tanto, no puede imponerse ninguna condición de contorno y los valores de los  $\mathcal{L}^{(i)}$  deben calcularse de acuerdo a las Ecs. (5.13). De la misma manera ocurre para  $x = x_R$ .

#### Flujo subsónico

Para el caso de  $x = x_L$ , sólo la característica  $\lambda^{(3)} = u + a$  es mayor a cero. Por lo tanto, es necesario definir una condición a través de  $\mathcal{L}^{(3)}$ . Para ello, existen diferentes opciones:

**No reflexión de la onda entrante** Reescribiendo la ecuación característica para la onda 3

$$\left[ \mathbf{I}^{(3)} \cdot \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(3)} + \mathbf{I}^{(3)} \cdot \mathbf{C} \right]_{x=x_L} = \left( \frac{\partial pA}{\partial t} + \rho Aa \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \mathcal{L}^{(3)} + \rho AaC^{(2)} - C^{(3)} = 0$$

Como el término entre paréntesis representa la derivada temporal de la amplitud de la onda, para que ésta sea cero, debe anularse

$$\mathcal{L}^{(3)} + \rho AaC^{(2)} - C^{(3)} = 0 \rightarrow \mathcal{L}^{(3)} = -\rho AaC^{(2)} + C^{(3)} \quad (5.37)$$

De la misma manera, para el extremo  $x = x_R$  la única característica menor a cero será  $\lambda^{(1)} = u - a$ . Mediante el mismo razonamiento, se obtiene:

$$\mathcal{L}^{(1)} - \rho AaC^{(2)} + C^{(3)} = 0 \rightarrow \mathcal{L}^{(1)} = \rho AaC^{(2)} - C^{(3)}$$

**Fuerza total nula en el contorno** Analizando la ecuación de la cantidad de movimiento en variables primitivas (Ec. (5.32b)), si exigimos que la sumatoria de fuerzas sea cero en el contorno, ello implica que un elemento de fluido es transportado por advección simple:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.38)$$

La condición necesaria para que se cumpla la condición anterior es

$$\frac{1}{\rho A} \frac{\partial pA}{\partial x} + C^{(2)} = 0 \quad (5.39)$$

Esta condición resulta útil cuando no se conoce con certeza el comportamiento de alguna de las variables en el contorno, como primera estimación.

Relacionando las Ecs. (5.32b) y (5.34b) se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{1}{2\rho Aa} \left( \mathcal{L}^{(3)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + C^{(2)} = u \frac{\partial u}{\partial x}$$

. Luego, el valor de  $\mathcal{L}^{(3)}$  puede despejarse, obteniéndose:

$$\mathcal{L}^{(3)} = \mathcal{L}^{(1)} + 2\rho Aa \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - C^{(2)} \right) \quad (5.40)$$

Mediante el mismo razonamiento, para el extremo  $x = x_R$  se obtiene:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(3)} - 2\rho Aa \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - C^{(2)} \right)$$

El término  $\frac{\partial u}{\partial x}$  se evalúa con una derivada descentrada, de la misma forma que para los operadores  $\mathcal{L}$  asociados a ondas salientes.

**Presión constante** Si se desea que la presión sea constante en el tiempo en el contorno, de acuerdo a la Ec. (5.34c) debe cumplirse que:

$$\frac{1}{2} \left( \mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) + C^{(3)} = 0$$

Luego, para el contorno izquierdo debe satisfacerse la siguiente relación:

$$\mathcal{L}^{(3)} = -\mathcal{L}^{(1)} - 2C^{(3)} \quad (5.41)$$

Y para el derecho:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\mathcal{L}^{(3)} - 2C^{(3)} \quad (5.42)$$

**Presión impuesta en el “campo lejano”** Este tipo de condición implica que la intensidad de la onda reflejada es proporcional a la diferencia entre la presión en el contorno y un cierto valor de presión  $p_\infty$ , asociado a un flujo en el “campo lejano” o “far field”. Este tipo de condición es parcialmente reflejante, ya que la intensidad de la onda reflejada será igual a cero si ambas presiones son iguales. Este esquema resulta útil para modelizar flujos inestacionarios que pasan a través de salidas o entradas donde las condiciones pueden variar en el tiempo, y la presión puede fluctuar y reestablecerse después de un cierto lapso de tiempo. (Poinsot y Lele, 1992) emplean la siguiente expresión  $\mathcal{L}^{(1)}$  en el contorno derecho

$$\mathcal{L}^{(1)} = K(p - p_\infty) \quad (5.43)$$

donde  $K = \sigma(1-M^2)a_j/L$  es una constante que cuantifica la intensidad de la onda reflejada. Ella depende de  $M$ : el número de Mach máximo del flujo,  $\sigma$ : un parámetro definido por el usuario  $a_j$ : la velocidad del sonido en el contorno, y  $L$ : una longitud característica del flujo.

**Velocidad constante** Esta condición implica  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \forall t$ , al igual que la condición de pared sólida. Por esta razón se emplea la Relación (5.36) para determinar el operador  $\mathcal{L}$

saliente, con la diferencia de que se emplea un valor de  $u$  distinto de cero como condición a imponer.

**Gradiente de temperatura impuesto** Si se desea establecer un flujo de calor constante en el tiempo en el contorno, estableciendo un valor para  $\frac{\partial T}{\partial x}$  en la relación (5.35b), puede despejarse cualquiera de los  $\mathcal{L}^{(i)}$  en función de otros dos

$$\frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{u + a} + \frac{\mathcal{L}^{(1)}}{u - a} \right) = \frac{\rho a^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x}; \quad (5.44)$$

Luego, para el contorno izquierdo debe cumplirse que:

$$\mathcal{L}^{(3)} = (u + a) \left\{ \frac{\rho a^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} \right\} \frac{2}{\gamma - 1} - (u + a) \frac{\mathcal{L}^{(1)}}{u - a} \quad (5.45)$$

Y para el derecho:

$$\mathcal{L}^{(1)} = (u - a) \left\{ \frac{\rho a^2}{T} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} \right\} \frac{2}{\gamma - 1} - (u - a) \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{u + a} \quad (5.46)$$

**Temperatura constante** Si se desea que la temperatura sea constante en el tiempo en el contorno, estableciendo  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$  en la Relación (5.35a) se obtiene:

$$\mathcal{L}^{(2)} + \frac{\gamma - 1}{2} (\mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(3)}) = -\gamma C^{(3)}; \quad (5.47)$$

pudiendo despejarse cualquiera de los  $\mathcal{L}^{(i)}$  en función de otros dos. Luego, para el contorno izquierdo debe cumplirse que:

$$\mathcal{L}^{(3)} = -\mathcal{L}^{(1)} - \left\{ \gamma C^{(3)} + \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} \right\} \frac{2}{\gamma - 1} \quad (5.48)$$

y para el derecho:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\mathcal{L}^{(3)} - \left\{ \gamma C^{(3)} + \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{u} \right\} \frac{2}{\gamma - 1} \quad (5.49)$$

### 5.3.3. Entrada

Que exista una entrada implica que

$$\begin{aligned} u &> 0 && \text{para } x = x_L \\ u &< 0 && \text{para } x = x_R \end{aligned}$$

En este caso es necesario definir al menos dos operadores  $\mathcal{L}$  en función de dos condiciones de contorno “físicas”:

- $\mathcal{L}^{(2)}$  y  $\mathcal{L}^{(3)}$  para  $x_L$
- $\mathcal{L}^{(2)}$  y  $\mathcal{L}^{(1)}$  para  $x_R$

#### Flujo Supersónico:

En este caso todas las ondas características son entrantes al dominio. Por esta razón será necesario además especificar el valor de  $\mathcal{L}^{(1)}$  para  $x_L$  y el de  $\mathcal{L}^{(3)}$  para  $x_R$ . Si se quiere obtener una solución estacionaria, donde

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

entonces, debe elegirse:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \rho A a C^{(2)} - C^{(3)}; \quad \mathcal{L}^{(2)} = a^2 C^{(1)} - C^{(3)}; \quad \mathcal{L}^{(3)} = -\rho A a C^{(2)} - C^{(3)}; \quad (5.50)$$

Sino, pueden establecerse valores para  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$  y  $\frac{\partial p}{\partial t}$  y resolver el sistema de Ecuaciones (5.34) para obtener los valores de los  $\mathcal{L}^{(i)}$ .

#### Flujo Subsónico:

Existen dos opciones posibles para establecer los valores de los dos operadores asociados a ondas entrantes al dominio:

- Establecer que la onda asociada a  $\mathcal{L}^{(2)}$  no se refleja, lo que equivale a establecer que el flujo de entrada posee entropía constante. Luego, se determina el valor de la otra onda entrante en función de alguna condición física que se desee imponer (presión constante, gradiente de fuerza, no reflexión, temperatura constante, etc.)

- Establecer alguna condición física asociada a la onda de mayor velocidad absoluta ( $\mathcal{L}^{(3)}$  para  $x_L$  y  $\mathcal{L}^{(1)}$  para  $x_R$ ), y con el valor obtenido establecer un valor para  $\mathcal{L}^{(2)}$  en función de otra condición física que desee imponerse (caudal másico constante, gradiente de temperatura, temperatura constante, etc.).

### Condiciones de no reflexión para la onda entrópica

En este caso la condición de no reflexión establece que  $\mathcal{L}^{(2)} = 0$ . Para determinar  $\mathcal{L}^{(3)}$  puede emplearse:

- La Ec. (5.37) si se desea imponer la condición de no reflexión de la onda 3.
- La Ec. (5.40) para la condición de fuerza nula en el contorno.
- La Ec. (5.42) para la condición de presión constante en el contorno.
- La Ec. (5.43) para la condición de presión  $p_\infty$  impuesta en el “campo lejano”.
- La Ec. (5.36) para la condición de velocidad constante.
- La Ec. (5.47) para la condición de temperatura constante en el contorno.
- La Ec. (5.44) para imponer el gradiente de temperatura en el contorno.
- Establecer el caudal másico en la entrada mediante la Relación (5.15b) para despejar  $\mathcal{L}^{(3)}$  y  $\mathcal{L}^{(1)}$

$$(u + a) \mathcal{L}^{(3)} - 2u\mathcal{L}^{(2)} + (u - a) \mathcal{L}^{(1)} = 2\rho Aa^2 C^{(2)} + 2a^2 u C^{(1)} \quad (5.51)$$

de donde

$$\begin{aligned} (u + a) \mathcal{L}^{(3)} &= 2\rho Aa^2 C^{(2)} + 2a^2 u C^{(1)} - (u - a) \mathcal{L}^{(1)} && \text{para } x_L \\ (u - a) \mathcal{L}^{(1)} &= 2\rho Aa^2 C^{(2)} + 2a^2 u C^{(1)} - (u + a) \mathcal{L}^{(3)} && \text{para } x_R \end{aligned} \quad (5.52)$$

Las otras opciones posibles para definir  $\mathcal{L}^{(2)}$  necesitan de alguna condición sobre la onda entrante cuya velocidad es  $\|u + a\|$  ( $\mathcal{L}^{(3)}$  para  $x_L$  y  $\mathcal{L}^{(1)}$  para  $x_R$ ).

**Condición de flujo de masa constante para el operador  $\mathcal{L}^{(2)}$**  De la Relación (5.51) se despeja el valor de  $\mathcal{L}^{(2)}$  para que se satisfaga la condición  $\frac{\partial \rho u}{\partial t}$

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{1}{2u} \left[ 2\rho Aa^2 C^{(2)} + 2a^2 u C^{(1)} - (u - a) \mathcal{L}^{(1)} - (u + a) \mathcal{L}^{(3)} \right] \quad (5.53)$$

**Condición de Temperatura constante para el operador  $\mathcal{L}^{(2)}$**  Se despeja el valor de  $\mathcal{L}^{(2)}$  de la Ec. (5.35a), obteniéndose:

$$\mathcal{L}^{(2)} = -\frac{\gamma-1}{2}(\mathcal{L}^{(3)} + \mathcal{L}^{(1)}) - C^{(3)}\gamma(\gamma-1) \quad (5.54)$$

**Gradiente de temperatura impuesto para el operador  $\mathcal{L}^{(2)}$**  Se despeja el valor de  $\mathcal{L}^{(2)}$  de la Ec. (5.35b):

$$\mathcal{L}^{(2)} = u \left[ \frac{\rho a^2}{T} - \frac{\gamma-1}{2} \left( \frac{\mathcal{L}^{(3)}}{u+a} + \frac{\mathcal{L}^{(1)}}{u-a} \right) \right] \quad (5.55)$$

## 5.4. Extensión al modelo MHD

La metodología anteriormente desarrollada para las ecuaciones de Euler puede extenderse de manera relativamente sencilla al sistema MHD.

Partiendo de la formulación del modelo MHD unidimensional en variables conservativas de 7 ondas, puede aplicarse la formulación de Thompson (1990) al modelo MHD real.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{C}' = 0 \quad \text{para } x_L \leq x \leq x_R$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{C}'$  están dados por las Relaciones (3.126).

Expresando el sistema no conservativo en variables primitivas

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{C} = 0$$

donde la matriz jacobiana  $\mathbf{A}$  para el sistema primitivo normalizado está dada por la Ec. (3.141), y sus vectores propios derechos e izquierdos, dados por las Ecs. (3.139), (3.147) y (3.150). La matriz de conversión  $\mathbf{P}$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{P} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \rightarrow \mathbf{P} = \frac{\partial U_i}{\partial V_j}$$

están dadas por la Relación (3.124). Luego, para el tratamiento de los términos fuente en los contornos debe realizarse la operación

$$\mathbf{C} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{C}'$$

obteniéndose para el sistema MHD estudiado en esta tesis:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ g_x \\ g_y \\ g_z \\ 0 \\ 0 \\ (\gamma - 1) \left( \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + L_{rad} + E_H \right) \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

De la misma manera que para el caso de las ecuaciones de Euler, aplicando la formulación de Thompson para condiciones de contorno de no reflexión, dadas por las Ecs. (5.8) y (5.9), se obtienen las expresiones para los operadores  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}^{(1)} = (u - c_f) \left[ \frac{\alpha_s \beta_z c_s S}{2a^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\alpha_s \beta_y c_s S}{2a^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha_f c_f}{2a^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_f}{2a^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_s \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\alpha_s \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] \quad (5.57a)$$

$$\mathcal{L}^{(2)} = (u - b_x) \left[ \frac{\beta_y}{2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\beta_z}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta_y S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\beta_z S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] \quad (5.57b)$$

$$\mathcal{L}^{(3)} = (u - c_s) \left[ -\frac{\alpha_f \beta_z c_f S}{2a^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\alpha_f \beta_y c_f S}{2a^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\alpha_s c_s}{2a^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_s}{2a^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\alpha_f \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\alpha_f \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] \quad (5.57c)$$

$$\mathcal{L}^{(4)} = u \left( \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (5.57d)$$

$$\mathcal{L}^{(5)} = (u + c_s) \left[ \frac{\alpha_f \beta_z c_f S}{2a^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\alpha_f \beta_y c_f S}{2a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha_s c_s}{2a^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_s}{2a^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\alpha_f \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\alpha_f \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] \quad (5.57e)$$

$$\mathcal{L}^{(6)} = (u + b_x) \left( -\frac{\beta_y}{2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\beta_z}{2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\beta_y S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\beta_z S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \quad (5.57f)$$

$$\mathcal{L}^{(7)} = (u + c_f) \left[ -\frac{\alpha_s \beta_z c_s S}{2a^2} \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\alpha_s \beta_y c_s S}{2a^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\alpha_f c_f}{2a^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\alpha_f}{2a^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_s \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\alpha_s \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial x} \right] \quad (5.57g)$$

En este caso la formulación es más extensa que para el caso de Euler, ya que se tienen siete ondas y la expresión de los vectores propios resulta más compleja debido a la normalización necesaria. Además, se agrega la complejidad de que en un contorno dado pueden haber distintas combinaciones de ondas entrantes y salientes en función de los valores de  $c_f$ ,  $b_x$  y  $c_s$ . Sin embargo, como esta metodología posee la gran ventaja de resolver cada onda por separado, no se presentan problemas de interacción entre las mismas.

### 5.4.1. Ecuaciones asociadas a las ondas características

Haciendo el producto escalar entre el vector propio  $\mathbf{l}^{(1)}$  del sistema MHD, dado por la Ec. (3.147), con la derivada temporal del vector de variables primitivas y con el vector de términos fuentes (de acuerdo a la Ec.(5.8)), se obtiene la variación temporal de la amplitud de la onda 1. De la misma manera se obtienen expresiones análogas para las ondas restantes. A continuación se muestran las relaciones asociadas a las siete ondas características del sistema:

#### Onda 1

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(1)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(1)} + \mathbf{l}^{(1)} \cdot \mathbf{C} = & -\frac{\alpha_f c_f}{2a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g_x \right) + \frac{\alpha_s \beta_y c_s S}{2a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) + \frac{\alpha_s \beta_z c_s S}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) \\ & + \frac{\alpha_f}{2a^2 \rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\gamma - 1) L_{rad} + E_H (\gamma - 1) \right) \\ & + \frac{\alpha_s \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\alpha_s \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \mathcal{L}^{(1)} = 0 \quad (5.58) \end{aligned}$$

#### Onda 2

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(2)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(2)} + \mathbf{l}^{(2)} \cdot \mathbf{C} = & \frac{\beta_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) - \\ & \frac{\beta_z}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) + \frac{\beta_y S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\beta_z S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \mathcal{L}^{(2)} \quad (5.59) \end{aligned}$$

**Onda 3**

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(3)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(3)} + \mathbf{l}^{(3)} \cdot \mathbf{C} = & -\frac{\alpha_s c_s}{2a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g_x \right) - \frac{\alpha_f \beta_z c_f S}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) - \frac{\alpha_f \beta_y c_f S}{2a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) \\ & - \frac{\alpha_f \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} - \frac{\alpha_f \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \\ & \frac{\alpha_s}{2a^2 \rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\gamma - 1) L_{rad} + E_H (\gamma - 1) \right) + \mathcal{L}^{(3)} = 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

**Onda 4**

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(4)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(4)} + \mathbf{l}^{(4)} \cdot \mathbf{C} = & \frac{\partial \rho}{\partial t} \\ & - \frac{1}{a^2} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\gamma - 1) L_{rad} + E_H (\gamma - 1) \right) + \mathcal{L}^{(4)} = 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

**Onda 5**

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(5)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(5)} + \mathbf{l}^{(5)} \cdot \mathbf{C} = & \frac{\alpha_f \beta_z c_f S}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) + \frac{\alpha_f \beta_y c_f S}{2a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) + \frac{\alpha_s c_s}{2a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g_x \right) \\ & + \frac{\alpha_s}{2a^2 \rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\gamma - 1) L_{rad} + E_H (\gamma - 1) \right) \\ & - \frac{\alpha_f \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\alpha_f \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \mathcal{L}^{(5)} = 0 \end{aligned} \quad (5.62)$$

**Onda 6**

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(6)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(6)} + \mathbf{l}^{(6)} \cdot \mathbf{C} = & -\frac{\beta_y}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) + \frac{\beta_z}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) \\ & + \frac{\beta_y S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} - \frac{\beta_z S}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \mathcal{L}^{(6)} = 0 \end{aligned} \quad (5.63)$$

**Onda 7**

$$\begin{aligned} \mathbf{l}^{(7)} \cdot \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathcal{L}^{(7)} + \mathbf{l}^{(7)} \cdot \mathbf{C} = & -\frac{\alpha_s \beta_z c_s S}{2a^2} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + g_z \right) - \frac{\alpha_s \beta_y c_s S}{2a^2} \left( \frac{\partial v}{\partial t} + g_y \right) + \frac{\alpha_f c_f}{2a^2} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + g_x \right) \\ & + \frac{\alpha_f}{2a^2 \rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} + (\gamma - 1) \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + (\gamma - 1) L_{rad} + E_H (\gamma - 1) \right) \\ & + \frac{\alpha_s \beta_z}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\alpha_s \beta_y}{2a\sqrt{\rho}} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \mathcal{L}^{(7)} = 0 \end{aligned} \quad (5.64)$$

### 5.4.2. Variación espacial de las variables primitivas en función de los operadores $\mathcal{L}$

Teniendo en cuenta la expresión de los operadores  $\mathcal{L}$  (dada por la Ec. (5.57)) es posible expresar el sistema de forma cuasilineal como :

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathcal{L} \quad (5.65)$$

donde  $\mathbf{K}$  es una matriz cuyas filas son los vectores propios izquierdos  $\mathbf{I}^{(i)}$  multiplicados por su velocidad característica asociada  $\lambda^{(i)}$ . De esta manera, premultiplicando a ambos miembros por la inversa de  $\mathbf{K}$  puede obtenerse las derivadas parciales  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x}$  en función de los operadores  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\alpha_f \rho \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} + \frac{\alpha_s \rho \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} + \frac{\mathcal{L}^{(4)}}{u} + \frac{\alpha_s \rho \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} + \frac{\alpha_f \rho \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \quad (5.66a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha_f c_f \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} + \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} - \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} - \frac{\alpha_f c_f \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \quad (5.66b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} = & -\frac{\alpha_s \beta_y c_s \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} + \frac{\beta_z \mathcal{L}^{(6)}}{u + b_x} + \frac{\alpha_f \beta_y c_f \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} - \frac{\alpha_f \beta_y c_f \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} \\ & - \frac{\beta_z \mathcal{L}^{(2)}}{u - b_x} + \frac{\alpha_s \beta_y c_s \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \end{aligned} \quad (5.66c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} = & -\frac{\alpha_s \beta_z c_s \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} - \frac{\beta_y \mathcal{L}^{(6)}}{u + b_x} + \frac{\alpha_f \beta_z c_f \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} - \frac{\alpha_f \beta_z c_f \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} \\ & + \frac{\beta_y \mathcal{L}^{(2)}}{u - b_x} + \frac{\alpha_s \beta_z c_s \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \end{aligned} \quad (5.66d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial x} = & \frac{a \alpha_s \beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} - \frac{\beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(6)}}{u + b_x} - \frac{a \alpha_f \beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} - \frac{a \alpha_f \beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} \\ & - \frac{\beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(2)}}{u - b_x} + \frac{a \alpha_s \beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \end{aligned} \quad (5.66e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial x} = & \frac{a \alpha_s \beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} + \frac{\beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(6)}}{u + b_x} - \frac{a \alpha_f \beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} - \frac{a \alpha_f \beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} \\ & + \frac{\beta_y \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(2)}}{u - b_x} + \frac{a \alpha_s \beta_z \sqrt{\rho} \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \end{aligned} \quad (5.66f)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{a^2 \alpha_f \rho \mathcal{L}^{(7)}}{u + c_f} + \frac{a^2 \alpha_s \rho \mathcal{L}^{(5)}}{u + c_s} + \frac{a^2 \alpha_s \rho \mathcal{L}^{(3)}}{u - c_s} + \frac{a^2 \alpha_f \rho \mathcal{L}^{(1)}}{u - c_f} \quad (5.66g)$$

Estas relaciones resultan útiles si se desea imponer condiciones de contorno que impliquen gradientes de las variables primitivas.

### 5.4.3. Formulaciones particulares de las BCs para MHD

Empleando las Relaciones (5.66) y las Identidades (3.144), es posible expresar la variación temporal de las variables primitivas  $\mathbf{V}$  en función del vector de términos fuente y de los operadores  $\mathcal{L}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \alpha_f \rho \left( \mathcal{L}^{(7)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) + \alpha_s \rho \left( \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(3)} \right) + \mathcal{L}^{(4)} + C^{(1)} = 0 \quad (5.67a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha_f c_f \left( \mathcal{L}^{(7)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + \alpha_s c_s \left( \mathcal{L}^{(5)} - \mathcal{L}^{(3)} \right) + C^{(2)} = 0 \quad (5.67b)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha_s \beta_y c_s \left( \mathcal{L}^{(7)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) + \beta_z \left( \mathcal{L}^{(6)} - \mathcal{L}^{(2)} \right) + \alpha_f \beta_y c_f \left( \mathcal{L}^{(5)} - \mathcal{L}^{(3)} \right) + C^{(3)} = 0 \quad (5.67c)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha_s \beta_z c_s \left( \mathcal{L}^{(7)} - \mathcal{L}^{(1)} \right) - \beta_y \left( \mathcal{L}^{(6)} - \mathcal{L}^{(2)} \right) + \alpha_f \beta_z c_f \left( \mathcal{L}^{(5)} - \mathcal{L}^{(3)} \right) + C^{(4)} = 0 \quad (5.67d)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_y}{\partial t} + \frac{\sqrt{\rho}}{u - c_f} (a \alpha_s \beta_y u - \alpha_s \beta_y b_x c_s - \alpha_f b_y c_f) \mathcal{L}^{(1)} \\ - \frac{\sqrt{\rho}}{u - c_s} (a \alpha_f \beta_y u + \alpha_s b_y c_s - \alpha_f \beta_y b_x c_f) \mathcal{L}^{(3)} - \frac{\sqrt{\rho}}{u + c_s} (a \alpha_f \beta_y u - \alpha_s b_y c_s + \alpha_f \beta_y b_x c_f) \mathcal{L}^{(5)} \\ + \frac{\sqrt{\rho}}{u + c_f} (a \alpha_s \beta_y u + \alpha_s \beta_y b_x c_s + \alpha_f b_y c_f) \mathcal{L}^{(7)} - \beta_z \sqrt{\rho} \left( \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(6)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.67e)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_z}{\partial t} + \frac{\sqrt{\rho}}{u + c_f} (a \alpha_s \beta_z u + \alpha_s \beta_z b_x c_s + \alpha_f b_z c_f) \mathcal{L}^{(7)} \\ - \frac{\sqrt{\rho}}{u + c_s} (a \alpha_f \beta_z u - \alpha_s b_z c_s + \alpha_f \beta_z b_x c_f) \mathcal{L}^{(5)} - \frac{\sqrt{\rho}}{u - c_s} (a \alpha_f \beta_z u + \alpha_s b_z c_s - \alpha_f \beta_z b_x c_f) \mathcal{L}^{(3)} \\ + \frac{\sqrt{\rho}}{u - c_f} (a \alpha_s \beta_z u - \alpha_s \beta_z b_x c_s - \alpha_f b_z c_f) \mathcal{L}^{(1)} + \beta_y \sqrt{\rho} \left( \mathcal{L}^{(2)} + \mathcal{L}^{(6)} \right) = 0 \end{aligned} \quad (5.67f)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \alpha_f \left( \mathcal{L}^{(7)} + \mathcal{L}^{(1)} \right) + \rho a^2 \alpha_s \left( \mathcal{L}^{(5)} + \mathcal{L}^{(3)} \right) + C^{(7)} = 0 \quad (5.67g)$$

De esta manera, imponiendo condiciones sobre estas relaciones pueden modelarse los mismos tipos de condiciones de contorno que para el modelo de Euler. Como primera medida, de acuerdo al valor de la velocidad en el contorno es posible diferenciar el caso de paredes sólidas, entradas y salidas.

#### 5.4.4. Salida

Cuando se trata de una salida en uno de los extremos del dominio existirán al menos 4 ondas salientes, a saber

- Las ondas asociadas a  $\mathcal{L}^{(4)}, \mathcal{L}^{(5)}, \mathcal{L}^{(6)}, \mathcal{L}^{(7)}$  para el extremo derecho  $x = x_R$
- Las ondas asociadas a  $\mathcal{L}^{(1)}, \mathcal{L}^{(2)}, \mathcal{L}^{(3)}, \mathcal{L}^{(4)}$  para el extremo izquierdo  $x = x_L$

Las ondas restantes pueden ser salientes o entrantes dependiendo de su velocidad característica asociada, es decir, para el contorno derecho  $x = x_R$

- La onda 3 será saliente al dominio si  $u > c_s$ : en este caso se tratará de un flujo *súper magnetosónico lento*.
- La onda 2 será saliente si  $u > b_x$ : en este caso se tratará de un flujo *súper alfvénico*.
- La onda 1 será saliente si  $u > c_f$ : en este caso se tratará de un flujo *súper magnetosónico rápido*.

De la misma manera ocurre para el contorno izquierdo  $x = x_L$

- La onda 5 será saliente al dominio si  $|u| > c_s$ : en este caso se tratará de un flujo *super magnetosónico lento*.
- La onda 6 será saliente si  $|u| > b_x$ : en este caso se tratará de un flujo *super alfvénico*.
- La onda 7 será saliente si  $|u| > c_f$ : en este caso se tratará de un flujo *super magnetosónico rápido*.

De esta forma, existen 3 operadores posibles sobre los que se puede imponer condiciones de contorno particulares y tres potenciales casos “súper” o “sub”. Para establecer condiciones sobre las variables gasdinámicas (la presión, densidad, temperatura y velocidad) decidimos emplear el operador  $\mathcal{L}^{(1)}$  por dos razones. Primero porque, como demostraron los autores (Roe y Balsara, 1996), cuando el sistema degenera al caso gasdinámico puro la onda magnetosónica rápida se transforma en onda sónica y la onda magnetosónica lenta desaparece, de acuerdo a la Ec. (3.153). Además, si se establecen condiciones para las ondas magnetosónicas rápidas pueden establecerse condiciones sobre dichas variables incluso en flujos super alfvénicos. Las ondas de Alfvén en este caso sólo transportan información de las componentes transversales de la velocidad y del campo magnético, por lo tanto no influyen en las variables termodinámicas.

### Flujo súper magnetosónico rápido

En este caso todas las ondas son salientes al dominio, y no debe imponerse ninguna condición. Todos los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  deben establecerse de acuerdo a las Relaciones de compatibilidad (5.57).

### Flujo submagnetosónico rápido

Cada una de las condiciones sobre variables gasdinámicas en el modelo de Euler para el caso subsónico tienen su versión análoga en MHD para el caso “submagnetorápido”.

**Condición sobre la variación temporal de la presión** Despejando el valor de  $\mathcal{L}^{(7)}$  de la Ec. (5.67g) se obtiene una expresión análoga a la del contorno de presión constante de Euler (Ec. (5.42)) para el contorno izquierdo.

$$\mathcal{L}^{(7)} = -\frac{\alpha_s \mathcal{L}^{(5)}}{\alpha_f} - \frac{\alpha_s \mathcal{L}^{(3)}}{\alpha_f} - \mathcal{L}^{(1)} - \frac{C^{(7)}}{a^2 \alpha_f \rho} - \frac{1}{a^2 \alpha_f \rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.68)$$

Y en el contorno derecho,  $\mathcal{L}^{(1)}$  debe cumplir:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{\alpha_s \mathcal{L}^{(5)}}{\alpha_f} - \frac{\alpha_s \mathcal{L}^{(3)}}{\alpha_f} - \mathcal{L}^{(7)} - \frac{1}{a^2 \alpha_f \rho} \frac{\partial p}{\partial t} \quad (5.69)$$

**Gradiente de fuerza nulo** Esta condición es análoga al contorno de fuerza nula para gasdinámica (Ec. (5.40)), con la diferencia que en la suma de fuerzas aparecen fuerzas de origen magnético. La relación que debe satisfacer  $\mathcal{L}^{(7)}$  en el extremo izquierdo para garantizar esta condición es:

$$\mathcal{L}^{(7)} = \mathcal{L}^{(1)} - \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(5)}}{\alpha_f c_f} + \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(3)}}{\alpha_f c_f} + \frac{1}{\alpha_f c_f} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - C^{(2)} \right) \quad (5.70)$$

y en el extremo derecho,  $\mathcal{L}^{(1)}$  debe cumplir:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(7)} + \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(5)}}{\alpha_f c_f} - \frac{\alpha_s c_s \mathcal{L}^{(3)}}{\alpha_f c_f} - \frac{1}{\alpha_f c_f} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} - C^{(2)} \right) \quad (5.71)$$

**Condición sobre la variación temporal de la velocidad** De la misma manera que para el sistema gasdinámico, esta condición se emplea para imponer paredes sólidas (estableciendo  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  y  $u = 0$ ) o salidas de velocidad constante (estableciendo  $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$  y

$u = \text{cte}$ ). Es decir, se establecen relaciones de restricción sobre las ondas magnetosónicas rápidas análogas a las del modelo gasdinámico (dadas por la Ec. (5.36)). Para el contorno izquierdo debe cumplirse:

$$\mathcal{L}^{(7)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\alpha_s c_s}{\alpha_f c_f} \mathcal{L}^{(3)} - \frac{\alpha_s c_s}{\alpha_f c_f} \mathcal{L}^{(5)} - \frac{1}{\alpha_f c_f} \left( C^{(2)} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (5.72)$$

y para el derecho:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(1)} + \frac{\alpha_s c_s}{\alpha_f c_f} \mathcal{L}^{(5)} - \frac{\alpha_s c_s}{\alpha_f c_f} \mathcal{L}^{(3)} + \frac{1}{\alpha_f c_f} \left( C^{(2)} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (5.73)$$

**Condición sobre la variación temporal de la temperatura** Esta expresión es análoga a la del modelo gasdinámico, se obtiene planteando la evolución temporal en función de los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  mediante la Ec.(5.67g) y la Ec. de estado.

$$\mathcal{L}^{(7)} = \frac{\gamma R}{(1-\gamma) a^2 \alpha_f} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{-\alpha_s \mathcal{L}^{(5)}}{\alpha_f} + \frac{\mathcal{L}^{(4)}}{(\gamma-1) \alpha_f \rho} + \frac{-\alpha_s \mathcal{L}^{(3)}}{\alpha_f} - \mathcal{L}^{(1)} - \frac{\gamma C^{(7)}}{(\gamma-1) a^2 \alpha_f \rho} + \frac{C^{(1)}}{(\gamma-1) \alpha_f \rho} \quad (5.74)$$

### Flujo subalfvénico

Si el flujo es subalfvénico, entonces al menos dos condiciones deben ser impuestas sobre las variables en el contorno. Una de ellas está asociada a cualquiera de las variables gasdinámicas mediante cualquiera de las expresiones utilizadas para salidas submagnetosónicas rápidas, como las Ecs. (5.68), (5.70) o (5.72). Por otro lado, existen dos componentes transversales de la velocidad ( $v$  y  $w$ ) y dos componentes transversales del campo magnético ( $B_y$  y  $B_z$ ) que pueden restringirse mediante condiciones de contorno. Sin embargo, las variables mencionadas se encuentran acopladas entre sí a través de las componentes transversales de la ecuación de cantidad de movimiento y de la inducción magnética (Ecs. (3.91) y (3.95), respectivamente). El acoplamiento ocurre para componentes asociadas al mismo eje de coordenadas: la ecuación de cantidad de movimiento en  $y$  está acoplada solamente a la ecuación de la inducción en  $y$ , y de la misma manera ocurre para las componentes análogas en la dirección  $z$ . De esta manera, si ocurre una variación temporal en sólo una de dichas variables transversales asociadas a la dirección  $y$  (por ejemplo,  $v$ ), necesariamente ocurrirá una variación temporal para la otra (en este caso  $B_y$ ), pero las variables asociadas a la otra dirección no serán perturbadas. Esto se observa en el tubo de choque de (Brio y Wu,

1988), donde si como condición inicial se establece una perturbación sobre  $B_y$  solamente, sólo aparecerá la componente en la dirección  $y$  de la velocidad. Pero si dicha perturbación ocurre en  $B_z$  sólo aparecerán componentes de la velocidad en la dirección  $z$ . Esto puede deberse a una particularidad del sistema MHD unidimensional, debido a que sólo aparecen derivadas respecto a  $x$  en las ecuaciones de inducción.

### Flujo submagnetosónico lento

En caso de que el flujo sea submagnetosónico lento, la relación característica asociada a la onda magnetosónica lenta (Ec. (5.62)) permite imponer vínculos entre variables tanto gasdinámicas como magnéticas. Sin embargo, sabiendo cómo es la degeneración del sistema MHD al sistema gasdinámico, creemos que no es una buena idea imponer restricciones sobre variables gasdinámicas a través de  $\mathcal{L}^{(5)}$ , ya que podrían imponerse condiciones que, en caso de que el flujo sea localmente gasdinámico, sean no físicas, redundantes o contradictorias. A pesar de que el sistema permite una cierta flexibilidad, siempre debe verificarse que todas las condiciones impuestas a través de operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  satisfagan las ecuaciones de conservación del sistema.

#### 5.4.5. Entrada

En el caso de tener una entrada al menos cuatro ondas son entrantes al dominio, y las ondas salientes deben ser determinadas de acuerdo a las Ecs. (5.57). Además, la onda asociada al cuarto vector propio (y al transporte de la entropía del flujo) será entrante. De esta manera, si la ecuación de la energía no tiene términos fuente, el flujo será isoentrópico y el valor físicamente correcto para  $\mathcal{L}^{(4)}$  será cero. Sin embargo, de manera análoga al modelo gasdinámico, si existiera conducción de calor o cualquier otro fenómeno no isoentrópico, puede emplearse el operador  $\mathcal{L}^{(4)}$  para imponer la temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = - \left[ \alpha_f (\gamma - 1) \mathcal{L}^{(7)} + \alpha_s (\gamma - 1) \mathcal{L}^{(5)} - \frac{\mathcal{L}^{(4)}}{\rho} + \alpha_s (\gamma - 1) \mathcal{L}^{(3)} + \alpha_f (\gamma - 1) \mathcal{L}^{(1)} \right] T \quad (5.75)$$

o también el caudal másico  $\rho u$  puede establecerse a través de dicho operador mediante:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} = -\alpha_f \rho (u + c_f) \mathcal{L}^{(7)} - \alpha_s \rho (u + c_s) \mathcal{L}^{(5)} - u \mathcal{L}^{(4)} - \alpha_s \rho (u - c_s) \mathcal{L}^{(3)} - \alpha_f \rho (u - c_f) \mathcal{L}^{(1)} \quad (5.76)$$

Para las tres ondas restantes pueden existir tres patrones de onda posibles, los cuales se describen a continuación:

### Entrada súper magnetosónica rápida

Si  $u - c_f > 0$  en  $x = x_L$ , o si  $u + c_f < 0$  en  $x = x_R$ , la entrada es submagnetosónica rápida. Luego, todas las ondas características serán entrantes al dominio. Una vez que el flujo alcanza esta condición, ninguna información física puede viajar desde el dominio aguas arriba de la entrada. Esto requiere que todos los operadores  $\mathcal{L}$  sean iguales a cero, lo que implica que en el contorno existirá una solución estacionaria tal que  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = 0$ .

### Entrada súper alfvénica

Si la entrada es súper alfvénica, entonces una onda característica magnetosónica rápida sale del dominio. Si la entrada es isoentrópica, entonces puede establecerse el caudal másico de entrada a través de  $\mathcal{L}^{(1)}$  o  $\mathcal{L}^{(7)}$  usando la Ec. (5.76). Empleamos dichos operadores porque en el modelo gasdinámico isoentrópico dicha condición se impone a través de ondas sónicas. Además, todas las condiciones empleadas para salidas ( $\frac{\partial p}{\partial t}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , fuerza nula, etc) pueden ser utilizadas, siempre y cuando el problema esté bien condicionado.

En esta tesis optamos por establecer condiciones de no reflexión para todas las ondas de Alfvén y magnetosónicas lentas entrantes. Sin embargo, este tema sigue abierto a discusión, y cierto grado de flexibilidad es admisible. (Hayashi, 2005) empleó un esquema de condiciones de contorno similar para modelar problemas astrofísicos de viento solar utilizando un esquema de volúmenes finitos 3D para MHD, imponiendo condiciones de contorno extrapoladas para todas las variables a 300 radios solares de la superficie del sol (lo que equivale a modelar esta región como una salida súper magnetosónica rápida). Para los contornos adyacentes a la cromósfera empleó una formulación de entrada submagnetosónica lenta estacionaria mediante un esquema de BCs basado en características. Por tratarse de una entrada submagnetosónica lenta, deben imponerse cinco restricciones. El autor empleó tres de las cinco restricciones para imponer que la componente normal del campo magnético  $\mathbf{B}$

fuera constante en el tiempo. Para ello debe cumplirse que:

$$\begin{cases} \frac{\partial B_x}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) = 0 \\ \frac{\partial B_x}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5.77)$$

para asegurar que  $B_x$  es constante en el tiempo y para que el campo magnético en el contorno satisfaga la condición de divergencia nula  $\nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0}$ . Hayashi implementó esta condición igualando a cero la derivada temporal de los términos del rotor de la Ec. (5.77).

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_y = 0 \rightarrow u \frac{\partial B_z}{\partial t} + B_z \frac{\partial u}{\partial t} - B_x \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{V} \times \mathbf{B})_z = 0 \rightarrow u \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_y \frac{\partial u}{\partial t} - B_x \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (5.78)$$

Estas relaciones implican un conjunto de ecuaciones de vínculo complejas entre variables gasdinámicas y magnéticas, que establecen condiciones como un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son los operadores  $\mathcal{L}$ . Por otro lado, estas relaciones de vínculo no permiten flexibilidad, ya que si el flujo se acelerara y fuera super magneosónico lento sería necesario imponer más condiciones sobre los  $\mathcal{L}$  entrantes, modificando así el sistema de ecuaciones para el caso anterior. Esto puede traer inconvenientes desde el punto de vista numérico y de la implementación. El autor propone tres opciones diferentes para las otras dos restricciones que deben imponerse:

1. Limitar el flujo de masa cuando éste exceda un valor máximo crítico, a través de relaciones de la forma:

$$\rho u = (\rho u)_{crit}; \quad \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = 0 \quad (5.79)$$

2. Establecer la velocidad y su derivada temporal iguales a cero en el caso que el contorno asociado a la cromósfera se transforme en una salida
3. Establecer el valor de la temperatura y de la densidad, a través de alguna relación politrópica para la energía, de la forma

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^k} \right) \quad (5.80)$$

donde  $k$  es un exponente politrópico elegido *ad hoc*.

Sin embargo, no queda claro cómo funciona este modelo cuando se establece la velocidad y su derivada temporal iguales a cero. En ese caso debería cesar todo flujo de masa hacia

el interior, independientemente de lo que ocurra dentro. Algo similar ocurriría cuando se establece el caudal másico crítico y su derivada temporal: la condición se tornaría en algo similar a una entrada supersónica.

#### 5.4.6. Implementación en el algoritmo

De la misma manera que para el modelo gasdinámico, se expresa el valor de la derivada temporal de las variables primitivas en función de los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  y de los términos fuentes de acuerdo a la Ec. (5.16).

También es necesario hacer una extrapolación por serie de Taylor para  $\mathbf{R}\mathcal{L}$ , mediante las Ecs. (5.19). Como se explicó anteriormente, dada la complejidad de las expresiones de los operadores  $\mathcal{L}^{(i)}$  y de los vectores propios, las matrices jacobianas asociadas a las Ecs. (5.21) se calculan de manera aproximada con la metodología propuesta por (Knoll y Keyes, 2004), ya que las expresiones analíticas son muy difíciles de obtener y propensas a errores de implementación.



---

# Capítulo 6

## Resultados

### 6.1. Casos gasdinámicos

#### 6.1.1. Tobera de sección variable

El primer caso de estudio se trata de una tobera divergente de longitud  $L = 10$  ft. Es un *Benchmark* clásico definido con unidades en el sistema inglés (Hoffmann y Chiang, 2000b). Su ley de variación de área está dada por:

$$A(x) = 1,398 + 0,347 \tanh(0,8x - 4) \quad (6.1)$$

El fluido considerado posee exponente isoentrópico  $\gamma = 1,4$  y constante de gas  $R = 1716$  lb-ft/slug R. En todos los casos adimensionalizamos las variables y dimensiones del problema de acuerdo a:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_i}; \quad \bar{p} = \frac{p}{\rho_i a_i^2}; \quad \bar{e}_t = \frac{e_t}{\rho_i a_i^2}; \quad \bar{u} = \frac{u}{a_i}; \quad \bar{x} = \frac{x}{L}; \quad \bar{t} = \frac{ta_i}{L};$$

donde  $\rho_i$  y  $a_i$  son la densidad y la velocidad del sonido a la entrada respectivamente, y  $L$  la longitud de referencia, en este caso la longitud de la tobera.

Utilizamos en todos los casos como condición inicial una interpolación lineal entre el valor de la solución analítica en  $x = 0$  y  $x = L$ , y una discretización del dominio en 200 celdas más 2 en cada uno de los contornos, el número de iteraciones varió de acuerdo al tipo de problema estudiado. Evaluamos la convergencia mediante la norma  $L_2$  de la variación de la densidad en dos pasos de tiempo sucesivos.

## Flujo supersónico en todo el dominio

Para este caso sólo deben definirse las condiciones a la entrada para las tres variables de estado. Las condiciones a la salida dependerán sólo de los valores en el dominio, por lo tanto deberán obtenerse mediante una relación de compatibilidad (Poinsot y Lele, 1992). Para el caso analizado se emplearon las siguientes condiciones en la entrada:

$$M_i = 1,5; \quad p_i = 2000 \text{ lb/ft}^2; \quad \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} \text{ slug/ft}^3; \quad a_i = 1118 \text{ ft/s}$$

Para este caso sólo puede emplearse la condición de *entrada supersónica* para la entrada, y la de *salida supersónica*. Comparamos los resultados con los obtenidos para condiciones de contorno extrapoladas convencionales. Este es el caso más sencillo, y como era de esperarse, el modelo de BCs no tuvo influencia en los resultados ya que las BCs extrapoladas son adecuadas en el caso de flujos supersónicos.

En la Figura 6.1 mostramos los resultados obtenidos.

En ambos casos con menos de 500 iteraciones la solución convergió de manera práctica al estado estacionario, ya que el residuo de la densidad tomaba valores del orden de  $1 \cdot 10^{-8}$ . Resulta llamativo que ambos esquemas de BCs exhiben casi exactamente la misma curva de convergencia; sin embargo esto puede explicarse por la naturaleza de la solución. La solución analítica predice gradiente nulo en la salida para todas las variables, condición que es satisfecha de forma exacta por ambos modelos. Además, como las condiciones iniciales son de flujo supersónico en todo el dominio los cambios durante el transitorio no pueden ser influenciados por las condiciones a la salida.

Por esta razón, para esta condición el modelo de condiciones de contorno no tiene influencia en el proceso de convergencia, como era de esperarse.

## Flujo supersónico en la entrada y salida subsónica

Para este caso las condiciones a la entrada son idénticas al caso anterior, con la diferencia que se impone una presión a la salida mucho mayor, de manera tal que aparezca una onda

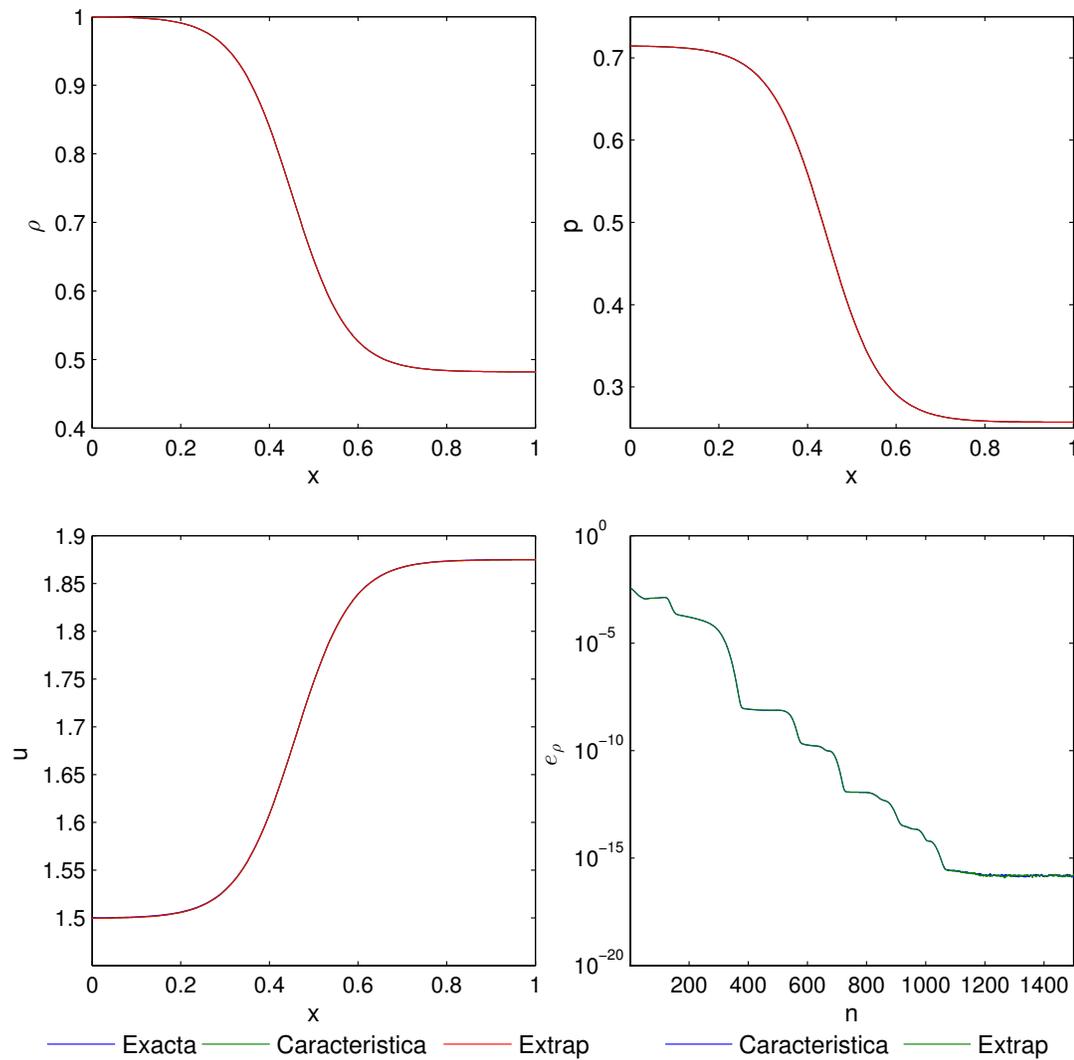


Figura 6.1: Caso supersónico. Perfiles de densidad, presión, velocidad y convergencia en  $e_\rho$

de choque en  $x = 5$  ft

$$\left\{ \begin{array}{l} M_i = 1,5; \quad p_i = 2000 \text{ lb/ft}^2; \quad \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} \text{ slug/ft}^3; \quad a_i = 1118 \text{ ft/s}; \\ \text{en la entrada} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p_e = 4930 \text{ lb/ft}^2; \\ \text{en la salida} \end{array} \right.$$

En todos los casos corrimos 2500 iteraciones con  $CFL = 1,8$ , los resultados obtenidos se ven en la Figura 6.2.

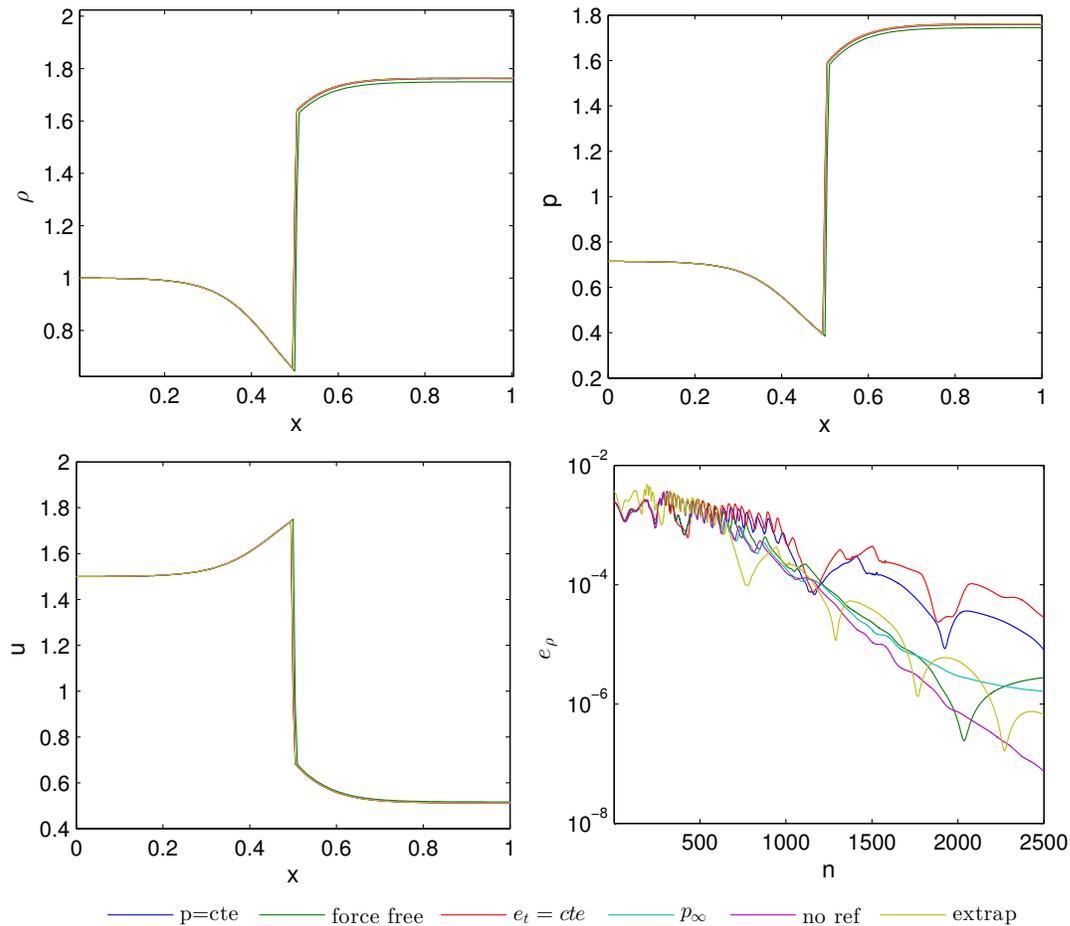


Figura 6.2: Caso supersónico-subsonico. Perfiles de densidad, presión, velocidad y convergencia en  $e_\rho$

En este caso la elección de las condiciones de contorno juega un rol más importante en la convergencia a la solución que en el caso anterior. Como la solución analítica depende directamente de cuánto sea el valor de la presión a la salida, el valor inicial de las variables de estado en el contorno determina la solución numérica. El esquema de fuerza nula (Ec. (5.40)) produjo, para  $CFL \leq 1,8$ , menores oscilaciones durante el transitorio que los demás esquemas, sin variar el valor de la presión en el contorno. Sin embargo, para valores de  $CFL$  mayores a 1.8 el algoritmo converge a una solución con menor presión a la salida, con la onda

de choque ubicada más hacia la derecha, que también es físicamente correcta. Este tipo de condición resulta ventajosa si se tiene un contorno abierto en el que no se conoce a priori qué ocurrirá con la presión; sin embargo debe tenerse en cuenta que la solución dependerá del valor del  $CFL$ . La imposición de la presión en el contorno (a través de la Ec. (5.42)) también produjo buenos resultados, sin embargo se ven oscilaciones en la convergencia, probablemente debido a la reflexión de la onda numérica 1 hacia el interior del dominio. La condición de no reflexión (Ec. (5.37)) también funcionó de forma sorprendentemente buena, aunque la solución fue más fuertemente dependiente del valor de  $CFL$ . Para valores de  $CFL \geq 2,0$  el algoritmo no llega a la convergencia, y para  $1,4 < CFL < 2,0$  converge a soluciones cuya presión a la salida es mayor a la inicial. Sin embargo, si para las primeras 300 iteraciones se emplea otro esquema que preserve la presión de salida para luego cambiar al esquema de no reflexión se mantiene dicho valor de presión y pueden aprovecharse las propiedades de convergencia de este último esquema. El esquema que preserva la presión en el “campo lejano” (Ec. (5.43)) también produjo muy buenos resultados en cuanto a su curva de convergencia, con además la ventaja de preservar el valor inicial de la presión en el contorno. Luego, si la física de problema requiere que el valor de la presión en el contorno se mantenga en el tiempo, los esquemas más confiables son el de presión constante y el de presión impuesta en el “far field”.

Es importante notar que todos los esquemas muestran curvas de convergencia muy similares para las primeras 300 iteraciones. Esto se debe a que como las condiciones iniciales difieren mucho de la solución final, debido a que son simples interpolaciones lineales de las condiciones en el contorno. Por esta razón, el estado del sistema evoluciona rápidamente dentro del dominio, formándose una onda de choque que se mueve de posición, hasta estabilizarse en su posición final. Este estado transitorio demora en enviar su información física hasta los contornos, por lo que el modelo de BCs no influye en gran medida durante este transitorio.

### Flujo subsónico en todo el dominio

Para este caso la tobera se comporta como un difusor, y conociendo las condiciones a la entrada sólo es posible una solución física, dada por las ecuaciones de flujo isoentrópico para sección variable.

$$M_i = 0,8; \quad p_i = 2000 \text{ lb/ft}^2; \quad \rho_i = 2,241 \cdot 10^{-3} \text{ slug/ft}^3; \quad a_i = 1118 \text{ ft/s}$$

Este caso fue el que más dificultades presentó para obtener una solución que converja,

necesitándose más de 2500 iteraciones con  $CFL = 1,8$ .

Existen a priori varias opciones para imponer condiciones de contorno en la entrada, sin embargo la mayoría de ellas no funcionaron correctamente. Como se discutió en el capítulo anterior, existen diferentes combinaciones posibles para dar valores a los operadores  $\mathcal{L}^{(2)}$  y  $\mathcal{L}^{(3)}$ . Sin embargo, como el flujo que ingresa al dominio es isoentrópico la única opción posible para  $\mathcal{L}^{(2)}$  es la de no reflexión. Si se elige otra opción, el algoritmo produce resultados no físicos. Si imponemos condiciones de presión constante o fuerza nula en el contorno el esquema no converge. Sin embargo, imponiendo la condición de caudal másico constante en el tiempo a través del operador  $\mathcal{L}^{(3)}$  (Ec. (5.52)) obtuvimos buenos resultados, con diferentes propiedades de convergencia dependiendo del esquema de condiciones de contorno utilizado para la salida. Los resultados obtenidos con dichas condiciones se muestran en la Figura 6.3. También probamos establecer una entrada de velocidad constante, sin embargo no logramos que el sistema convergiera.

Nuevamente la condición de fuerza nula resultó ser la que mejores propiedades de convergencia exhibió, además de poseer la ventaja de permitir obtener el valor correcto de la presión en el contorno en caso de que se utilice una condición inicial cuyo valor no sea correcto.

Las condiciones de presión constante y no reflexión de ondas también se comportan de manera satisfactoria, siendo ésta última más propensa a inestabilidades para valores de  $CFL \geq 2,0$ . Para lograr convergencia empleando el esquema de BCs extrapoladas es necesario definir todas las variables a la entrada, como si se tratara de flujo supersónico. En este caso es posible gracias a que se conoce la solución analítica del problema. Sin embargo, en un problema más general, donde no se conoce la solución en el contorno, definir en exceso las condiciones de contorno en general lleva a oscilaciones o inestabilidades en la solución (Yee, 1981), a menos que se conozca la solución exacta en el contorno (como en este caso).

Todos los esquemas probados muestran a grandes rasgos curvas de convergencia similares para las primeras 800 iteraciones; a partir de ese momento algunos esquemas muestran un proceso de aceleración de la convergencia (sobre todo el extrapolado). Esto ocurre porque el sistema evoluciona rápidamente dentro del dominio debido a que las condiciones iniciales son muy diferentes a la solución analítica, como en el caso anterior. En el caso del esquema de extrapolación, como las variables en el contorno están establecidas de antemano y no varían en el tiempo, en la región adyacente a la entrada la solución varía poco en el tiempo y el proceso de convergencia es influenciado sobre todo por la evolución temporal dentro del dominio y por la condición de presión impuesta a la salida. Por otro lado, para los esquemas de BCs basados en características la solución varía en el tiempo en la entrada.

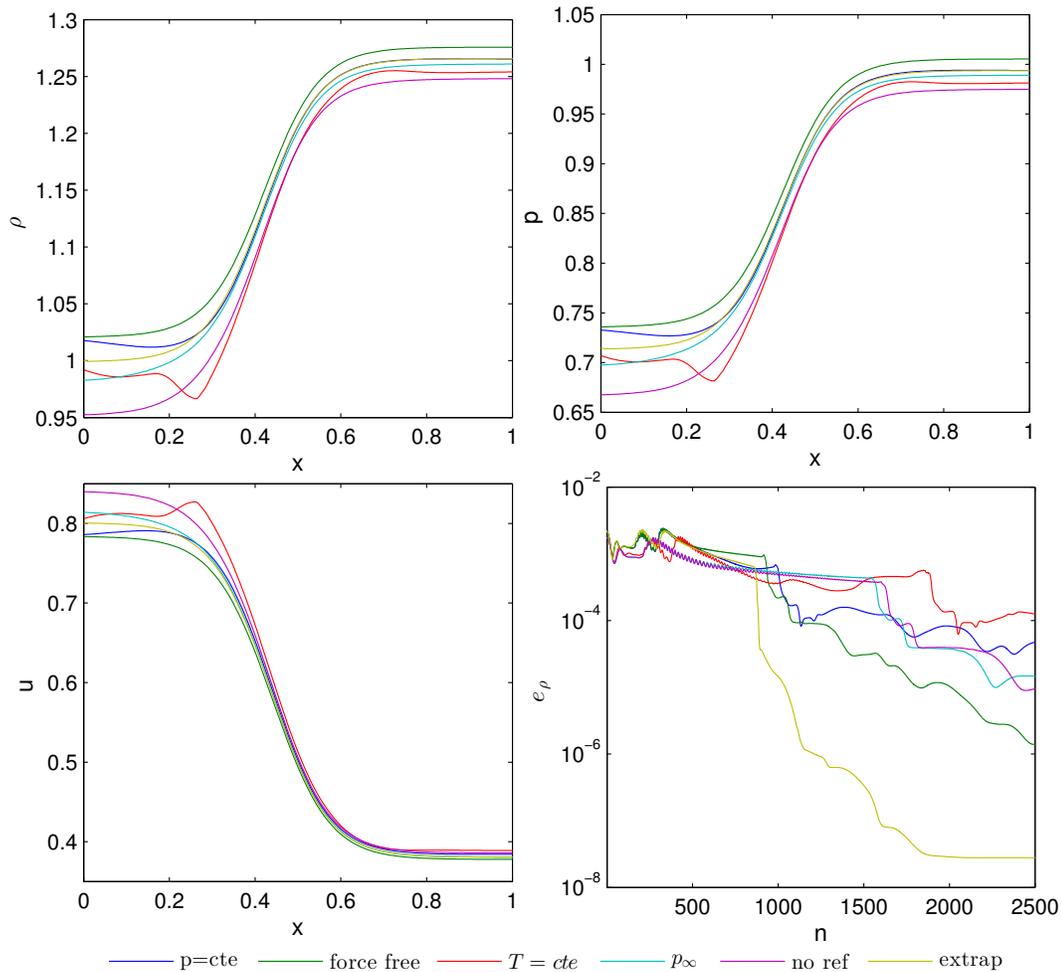


Figura 6.3: Caso subsónico. Perfiles de densidad, presión, velocidad y convergencia en  $e_\rho$

Esto tiene una gran influencia en el proceso de convergencia: cuando la solución cambia dentro del dominio, hasta que alcanza una condición de pseudo equilibrio en la entrada. Este estado de equilibrio no satisface la condición impuesta a la salida, lo que produce que una onda viaje desde la salida hacia el interior del dominio, provocando cambios en la solución. Una vez que dicha onda llega a la entrada, las variables en la misma evolucionan para satisfacer la condición de caudal másico constante, y una onda se propaga hacia el interior. Esta nueva onda produce cambios en el dominio hasta llegar a la salida, haciendo que el proceso se repita. Esto ocurre muchas veces hasta que se logra la convergencia.

### 6.1.2. Arco coronal de sección variable

El segundo caso analizado consiste en un modelo gasdinámico analítico simplificado de un arco de la corona solar, propuesto por (Cargill y Priest, 1980). Dicho modelo consiste de un arco circular con hidrógeno monoatómico, en cuyas bases la presión es igual a la presión de la cromósfera solar. En una de las bases se impone una velocidad de entrada  $\mathbf{v}_0$ , y se consideran los efectos de la gravedad.

Tomando una coordenada curvilínea  $0 \leq s \leq 2L$  a lo largo de la línea media del arco y despreciando su curvatura, el problema se idealiza con las Ecuaciones de Euler cuasi unidimensionales de sección variable (3.36). En la Figura 6.4, tomada de la referencia citada, se esquematiza el modelo.

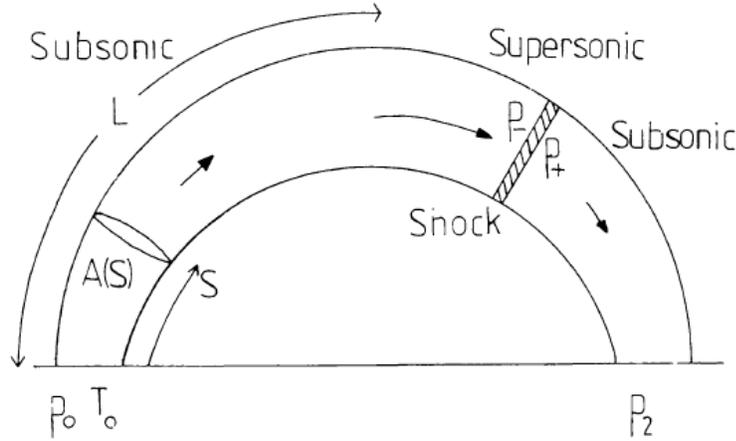


Figura 6.4: Esquema del modelo del arco de (Cargill y Priest, 1980)

Para implementar un modelo numérico del sistema es necesario incluir un vector de términos fuente de la forma:

$$\mathbf{S} = \left[ 0, \quad p \frac{\partial A}{\partial x} - \rho A g \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right), \quad -\rho A u g \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right) \right]^T \quad (6.2)$$

en las Ecs. (3.36).

Los autores asumieron simplificaciones en la ecuación de la energía (flujo isoentrópico o isotérmico) y flujo estacionario, lo que les permitió obtener una relación analítica a través de una ecuación diferencial ordinaria (ODE) para la velocidad de la forma:

$$\left(u - \frac{a^2}{u}\right) \frac{\partial u}{\partial s} = -g \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right) + \frac{a^2}{A} \frac{\partial A}{\partial s} \quad (6.3)$$

Imponiendo la condición de contorno  $u = u_0$  para  $s = 0$  puede integrarse esta ecuación para obtener una ecuación algebraica no lineal, de donde se despeja la distribución de velocidades. Y mediante las relaciones isoentrópicas y la ecuación de continuidad se obtienen las demás variables.

Como condición inicial empleamos un estado constante para la densidad, velocidad y presión. La discretización del dominio fue de 400 celdas, más dos en cada uno de los contornos. Para este modelo tanto la entrada como la salida serán subsónicas, por lo tanto empleamos la condición de caudal másico constante para la entrada y probamos las condiciones de presión constante, no reflexión y fuerza nula en la salida. La solución depende fuertemente de la ley de variación de la sección con la coordenada  $s$ , así como la longitud del arco, ya que la gravedad solar produce un gradiente en la densidad, cuyo mínimo se encuentra para  $s = L$ , y además desacelera el flujo en la rama ascendente, y lo acelera en la descendiente.

Elegimos para simular el caso de un arco de longitud  $L = 140 \cdot 10^6$  m, cuya densidad y temperatura en las bases son respectivamente de  $\rho = 1,18 \cdot 10^{-12}$  kg/m<sup>3</sup> y  $T = 1 \cdot 10^6$  K. Dichas condiciones implican un valor de aceleración de gravedad adimensionalizado de  $g = 2,8$ . La variación de sección del arco viene dada por:

$$A(x) = A_0 \left[ 1 + (k - 1) \sin^2 \left( \frac{\pi s}{2L} \right) \right]; \quad L = 140 \cdot 10^6 \text{m}; \quad k = 5$$

donde  $k$  representa un factor de contracción entre el área de la base  $A_0$  y el área a la mitad del arco  $A(s = L)$ . Teniendo en cuenta que la solución adimensional resulta independiente del valor del área en la base  $A_0$ , por simplicidad empleamos  $A_0 = 1$ . La velocidad en la entrada vale  $u_0 = 0,27a$ . Para estas condiciones, la solución analítica predice flujo subsónico en ambas bases (entrante a la izquierda y saliente a la derecha). Si la velocidad en la entrada o si el efecto de la gravedad son suficientemente grandes, el flujo se vuelve sónico en  $s = L$ . Esto se debe a que existen dos efectos que compiten: la variación del área, que hace que el flujo reduzca su velocidad (como en un difusor subsónico); y por otro lado la gravedad variable, cuyo efecto decae con la altura, posibilitando que el flujo se acelere (la aceleración de la gravedad es máxima en  $s = 0,2L$ , pero es nula en  $s = 2L$ ). Por estas razones las soluciones posibles pueden tener varios extremos locales. De esta manera, si la contracción de área y el cambio en la gravedad son suficientes, el flujo puede volverse supersónico en la segunda mitad del arco  $L < s < 2L$ . Para satisfacer la condición de presión en la cromósfera para  $s = 2L$  necesariamente debe aparecer una onda de choque en dicho segmento del arco. Sin embargo, de acuerdo a la solución analítica dicha onda puede aparecer en cualquier parte

de la semilongitud del arco. Esto presenta un problema desde el punto de vista numérico: es imposible que el algoritmo converja a una solución estacionaria si existen infinitas soluciones posibles entre  $L < s < 2L$ ; cualquier solución obtenida cambiaría hacia otra solución con la más pequeña perturbación en algún parámetro.

El caso analizado produce como resultado  $M = 0,9$  para  $s = L$ . Corrimos 6000 iteraciones con  $CFL = 1,2$ , para poder analizar las particularidades del proceso de convergencia. Este caso se encuentra cercano a la condición límite de  $M = 1$  para  $s = L$ , por lo que pueden aparecer soluciones supersónicas durante el transitorio de convergencia. Además, se ve claramente que la distribución de velocidades a lo largo del arco posee tres máximos locales

Empleamos la condición de caudal másico constante a la entrada, ya que dio buenos resultados para el caso del difusor subsónico, y la solución también implica flujo isoentrópico. Evaluamos diferentes esquemas de condiciones de contorno para la salida: presión constante en el tiempo (Ec. (5.42)), temperatura constante en el tiempo, no reflexión (Ec. (5.37)), presión impuesta en el campo lejano (Ec. (5.43)) y fuerza nula en el contorno (Ec. (5.40)).

Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 6.5, donde se presentan los perfiles de densidad y velocidad, comparados con los de la solución analítica.

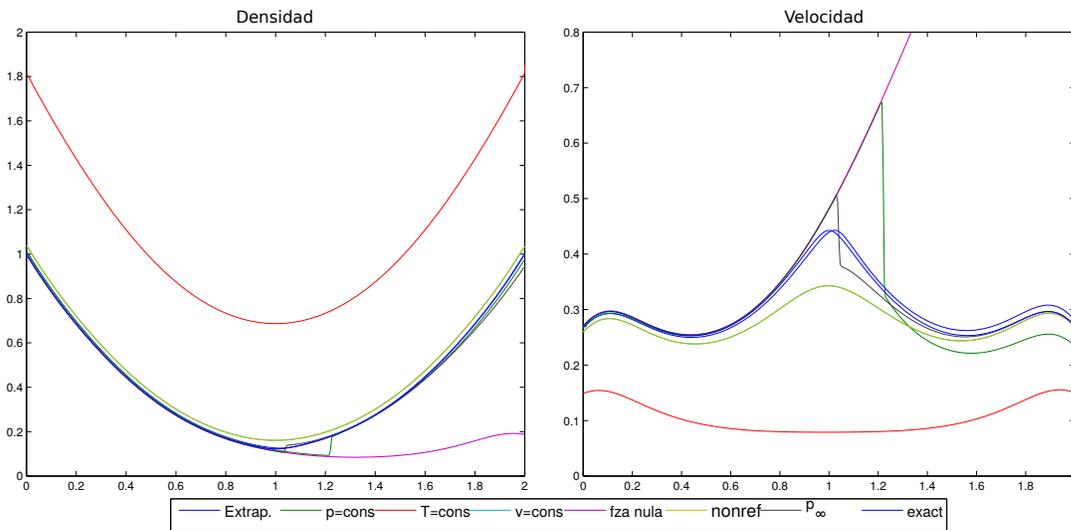


Figura 6.5: Distribuciones de velocidad y densidad para 6000 iteraciones

El proceso de convergencia no resulta sencillo: durante el transitorio suelen aparecer regiones donde el flujo es supersónico, que eventualmente pueden cambiar las condiciones en la salida (dependiendo del tipo de esquema de BCs utilizado), haciendo que el sistema

converja a una solución no física (con una presión en la cromósfera diferente de la real). El sistema también resulta muy sensible a las condiciones iniciales, pudiendo obtenerse presiones negativas en el caso de que el paso de tiempo sea suficientemente grande. Esto ocurrió incluso con distribuciones de densidad parabólicas, con distribuciones de presión y velocidad que satisfacen las ecuaciones de conservación. En la Figura 6.6 se muestran las curvas de convergencia obtenidas.

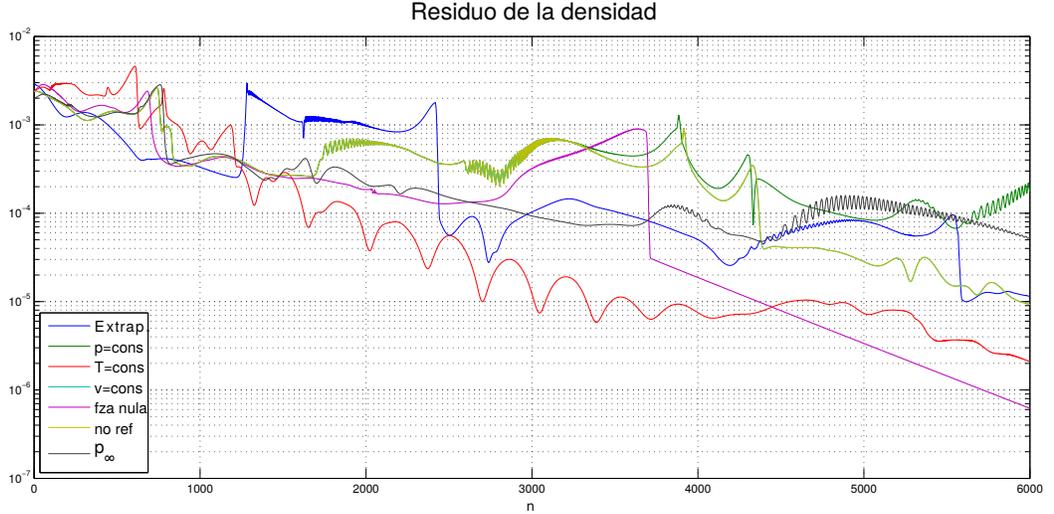


Figura 6.6: Curvas de convergencia para distintos esquemas de BCs para el arco coronal de (Cargill y Priest, 1980)

Otro aspecto interesante de notar es que la presencia de términos fuente en la ecuación de cantidad de movimiento provocó que la convergencia a la velocidad fuera mucho más lenta que la convergencia a la presión y a la densidad.

Para evaluar la influencia de los términos fuente relativa a la de los efectos convectivos, calculamos la relación entre las componentes del vector de términos fuente  $C'_i$  y las componentes del vector de flujos numérico  $\bar{F}_i$  para las ecuaciones de cantidad de movimiento y energía. Dichas relaciones evaluadas en los contornos:

$$\frac{C'_2(x=0)}{F_2(x=0)} = 2,50 \quad \frac{C'_3(x=0)}{F_3(x=0)} = 1,093 \quad (6.4)$$

y para un punto representativo del dominio, como  $s = L/2$

$$\frac{C'_2(x=L/2)}{F_2(x=L/2)} = 1,53 \quad \frac{C'_3(x=L/2)}{F_3(x=L/2)} = 1,51 \quad (6.5)$$

De esta manera, los efectos gravitatorios tienen un rol importante en el modelo de BCs, ya que sus efectos son mayores a los de la convección, y a que los efectos de variación de área no están presentes.

El modelo de condiciones de contorno que mejores resultados produjo fue el de presión constante en el contorno, aunque vimos que la convergencia fue bastante errática, y para casos más severos (como para  $k = 20$  y  $L = 175 \cdot 10^6$  m) una vez alcanzada la solución analítica, ésta no era estable y después de un tiempo el algoritmo convergía a otra solución.

Nuevamente la condición de no reflexión de ondas probó poseer las mejores propiedades de convergencia, pero ocurrió que resultó muy sensible a las condiciones iniciales, debido a que el flujo se volvía supersónico durante el transitorio, provocando que la salida se volviera también supersónica y cambiara el valor en la presión. Una estrategia que empleamos para subsanar este problema fue utilizar la condición de salida con presión constante para las primeras 3000 iteraciones, y luego cambiar a las condiciones de no reflexión. Sin embargo, este problema quedó resuelto con el esquema de presión impuesta en el campo lejano, que resultó ser una buena solución de compromiso entre ambos esquemas. A pesar de ello, la tasa de convergencia no es tan buena como hubiéramos esperado. Podría ser mejorada quizás ajustando el coeficiente  $\sigma$  en la Ec. (5.43) a un valor más apropiado para este tipo de flujo. El esquema de temperatura constante no convergió a la solución esperada porque produjo una discontinuidad en la salida y una mayor presión en la admisión. A pesar de esto, su tasa de convergencia es mayor que la de los esquemas anteriores.

La condición de fuerza nula en el contorno no convergió a la solución analítica propuesta simplemente porque se demuestra que para esta solución no se cumple que

$$\frac{\partial pA}{\partial x} + \rho Ag - p \frac{dA}{dx} = 0$$

El algoritmo converge a una solución con expansión supersónica, que verifica la relación anterior. Finalmente, debemos notar que el esquema de extrapolación para BCs posee una curva de convergencia de mayor velocidad y con menor cantidad de oscilaciones. Sin embargo, como en los casos anteriores, esta solución requirió definir todas las variables en la entrada, porque de otra manera no se lograba la convergencia. Esto no resulta práctico cuando tienen que analizarse casos cuya solución analítica no se conoce en el contorno. Si bien en la Figura 6.5 se observa que esta solución es la que más se acerca a la analítica, lo que ocurre es que se mantiene oscilando. Sin embargo, las condiciones extrapoladas probaron ser más robustas e insensibles a la condición inicial.

### 6.1.3. Convección difusión unidimensional compresible

Para validar los efectos de los términos convectivos, de conducción de calor y de fuentes en la ecuación de la energía, se propuso un modelo simplificado basado en el sistema de ecuaciones de Euler. Dicho modelo requiere las siguientes simplificaciones:

- flujo estacionario unidimensional
- Dominio de sección constante
- viscosidad nula
- Gas calóricamente perfecto

El sistema de ecuaciones del modelo de Euler para el caso 1D estacionario para un dominio de sección constante se expresa como:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(\rho u) &= 0 \rightarrow \frac{d\rho}{dx}u + \rho \frac{du}{dx} = 0 \\
 \frac{d}{dx}(\rho u^2 + p) &= 0 \rightarrow \rho u \frac{du}{dx} + \frac{dp}{dx}RT + \rho R \frac{dT}{dx} = 0 \\
 \frac{d}{dx}[u(E + p)] &= \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{Q}_{cal} \rightarrow \rho u C_p \frac{dT}{dx} + \rho u^2 \frac{du}{dx} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{Q}_{cal}
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

Que a su vez permiten obtener las siguientes relaciones integrales:

$$\begin{aligned}
 \rho u &= \rho_0 u_0 \\
 \rho u^2 + \rho RT &= \rho_0 u_0^2 + \rho_0 RT_0
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Mediante manipulación algebraica de las Leyes de conservación (6.6) y usando las Relaciones integrales (6.7), puede obtenerse

$$\left[ u - \frac{RT}{u} \right] \frac{du}{dx} + R \frac{dT}{dx} = 0 \rightarrow \frac{R}{\left[ \frac{RT}{u} - u \right]} \frac{dT}{dx} = \frac{du}{dx} \tag{6.8}$$

Reemplazando en la expresión de la energía

$$\rho u C_p \frac{dT}{dx} + \rho u^2 \frac{R}{\left[ \frac{RT}{u} - u \right]} \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{Q}_{cal} \tag{6.9}$$

luego

$$\rho u \left[ C_v + \frac{R^2 T}{RT - u^2} \right] \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2T}{dx^2} + \dot{Q}_{cal} \tag{6.10}$$

Por otro lado, despejando la velocidad  $u$  de la Relación integral de la cantidad de movimiento (6.7):

$$u^2 = \frac{\rho_0}{\rho} u_0^2 + \frac{\rho_0}{\rho} RT_0 - RT \quad (6.11)$$

puede resolverse esta ecuación cuadrática para  $u$ , definiendo el término auxiliar  $\Gamma = \left(u_0 + \frac{RT_0}{u_0}\right)$

$$u = \frac{\Gamma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT} \quad (6.12)$$

La solución asociada al signo positivo corresponde a una solución de flujo completamente supersónico, y la solución asociada al signo negativo corresponde a flujo subsónico. Reemplazando este resultado en la ecuación de la energía, y teniendo en cuenta la Relación integral (6.7), se obtiene una ecuación diferencial ordinaria no lineal de segundo orden que describe la variación de la temperatura en el espacio para un flujo compresible estacionario:

$$\rho u \left[ C_v + \frac{R^2 T}{2RT - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT}} \right] \frac{dT}{dx} = \kappa \frac{d^2 T}{dx^2} + \dot{Q}_{cal} \quad (6.13)$$

Esta ecuación tiene solución analítica con una integral impropia. Por esta razón resulta más práctico resolverla mediante un esquema de diferencias finitas. Debe tenerse en cuenta además que deberá establecerse como condición de contorno el valor de la velocidad, la densidad y la temperatura en la entrada. La temperatura en la salida deberá imponerse también, pero teniendo en cuenta que debe cumplirse la Relación

$$T \leq \frac{\Gamma^2}{4R}$$

Dicho problema puede resolverse mediante diferencias finitas discretizando la derivada primera y la derivada segunda con una fórmula centrada.

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} + h^2 \frac{\rho_0 u_0}{\kappa} \left\{ C_v + \frac{R^2 T_i}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right\} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} = \dot{Q}_{cal i} \quad (6.14)$$

o con una fórmula descentrada aguas arriba de la corriente:

$$-T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} + h^2 \frac{\rho_0 u_0}{\kappa} \left\{ C_v + \frac{R^2 T_i}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right\} \frac{T_i - T_{i-1}}{h} = \dot{Q}_{cali} \quad (6.15)$$

Para que el esquema con derivada primera centrada sea estable es necesario agregar difusión numérica, en función del número de Péclet de la malla, definido como

$$Pe_{\Delta x} = \frac{u\Delta x}{2\alpha} \quad (6.16)$$

donde  $D = \kappa/(\rho C_p)$  es la difusividad térmica. Luego:

$$Pe_{\Delta x} = \frac{\rho u C_p \Delta x}{2\kappa} = \frac{\rho_0 u_0 C_p \Delta x}{2\kappa}$$

La viscosidad numérica necesaria para estabilizar el problema para  $Pe_{\Delta x} > 1$  y que a su vez se reduzca en caso de que  $Pe_{\Delta x} < 1$  puede obtenerse mediante

$$\kappa_{num} = Pe_{\Delta x} \kappa f(Pe_{\Delta x})$$

Existen distintas opciones para elegir la función  $f(Pe_{\Delta x})$ . En este caso se eligió:

$$f(Pe_{\Delta x}) = \frac{1}{\tanh(Pe_{\Delta x})} - \frac{1}{Pe_{\Delta x}} \quad (6.17)$$

y que con ella la solución aproximada converge con mayor precisión a la solución analítica para la ecuación de convección-difusión incompresible, dada por

$$T(x) = \frac{e^{2Pe_L} T_0 - T_L}{e^{2Pe_L} - 1} - \frac{e^{2Pe_x} (T_0 - T_L)}{e^{2Pe_L} - 1} \quad (6.18)$$

donde

$$Pe_L = \frac{\rho_0 u_0 L C_p}{\kappa}; \quad Pe_x = \frac{\rho_0 u_0 x C_p}{\kappa} \quad (6.19)$$

El sistema no lineal se resuelve mediante el método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones no lineales

$$\mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{G}(T_i^{(k)}) = \mathbf{T}^{(k)} - \mathbf{J}^{-1}(F_j, T_i^{(k)}) \cdot \mathbf{F}(T_i^{(k)}) \quad (6.20)$$

donde

$$F_j = -T_{i-1} + 2T_i - T_{i+1} + h^2 \frac{\rho_0 u_0}{\kappa + \kappa_{num}} \left\{ C_v + \frac{R^2 T_i}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right\} \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h} - \dot{Q}_{cal i} = 0 \quad (6.21)$$

y los jacobianos asociados están dados por:

$$\begin{aligned} J_{i,i-1} &= \frac{\partial F_i}{\partial T_{i-1}} = -1 - \frac{h}{2} \frac{\rho_0 u_0}{\kappa + \kappa_{num}} \left\{ C_v + \frac{R^2 T_i}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right\} \\ J_{i,i} &= \frac{\partial F_i}{\partial T_i} = 2 + \frac{h}{2} \frac{\rho_0 u_0}{\kappa + \kappa_{num}} \left\{ \frac{R^2}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} - \dots \right. \\ &\quad \left. \frac{R^2 T_i \left( 2R \mp \frac{\Gamma R}{\sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right)}{\left( 2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i} \right)^2} \right\} (T_{i+1} - T_{i-1}) \\ J_{i,i+1} &= \frac{\partial F_i}{\partial T_{i+1}} = -1 + \frac{h}{2} \frac{\rho_0 u_0}{\kappa + \kappa_{num}} \left\{ C_v + \frac{R^2 T_i}{2RT_i - \frac{\Gamma^2}{2} \mp \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Gamma^2 - 4RT_i}} \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Para resolver el sistema no lineal (6.20), en lugar de invertir el jacobiano  $\mathbf{J}$ , se emplea un vector auxiliar  $\mathbf{Y}$  tal que

$$\mathbf{J} \cdot \mathbf{Y} = -\mathbf{F}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones y reemplazando el resultado en la Ec. (6.20) se obtiene la expresión recursiva utilizada para obtener la solución:

$$\mathbf{T}^{(k+1)} = \mathbf{T}^{(k)} + \mathbf{Y}$$

Para definir completamente el problema es necesario imponer cuatro condiciones de contorno, ya que la ecuación a resolver es de orden 2. En este caso se define el caudal másico (a través de la densidad y la velocidad) y la temperatura en la entrada. La última condición que se impone es la temperatura a la salida.

A continuación se muestran las soluciones para las siguientes condiciones de contorno, tomando como condiciones iniciales una interpolación lineal entre los valores en los contor-

nos.

$$\begin{cases} \rho_0 = 1,225 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}; & u_0 = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}; & T_0 = 400 \text{ K}; & \text{en la entrada} \\ T_L = 500 \text{ K} & & & \text{en la salida} \end{cases}$$

Adoptamos una constante de conductividad térmica  $\kappa = 2,6 \cdot 10^4 \frac{\text{W}}{\text{m K}}$  y una longitud unitaria para el dominio. Para este valor de la conductividad se obtiene un número de Péclet basado en la longitud del orden de  $Pe_L = 2,36$ .

En la Figura 6.7 se muestran los resultados obtenidos para la velocidad y la temperatura. Se observa que las curvas de temperatura de las soluciones por diferencias finitas coinciden

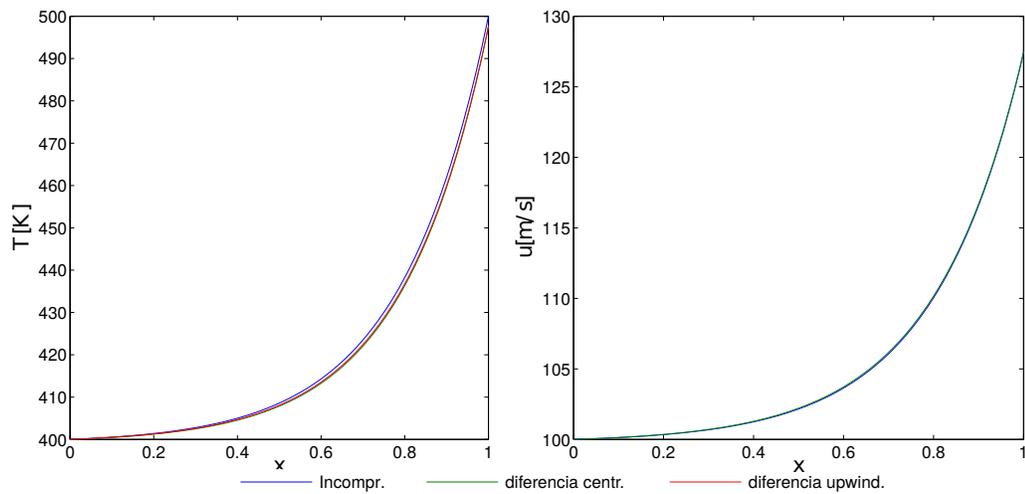


Figura 6.7: Solución incompresible y soluciones por diferencias finitas de la Ec. (6.13)

y que existe una diferencia inferior al 2% respecto a la curva que representa la solución analítica de la ecuación de la advección difusión incompresible. Esto se debe a que para las condiciones iniciales planteadas el número de Mach es menor a 0,3 en casi todo el dominio, lo cual permitiría asumir una solución de flujo incompresible. Por otro lado, las distribuciones de velocidad y densidad no pueden compararse con la solución incompresible, ya que dicha solución asume  $u = \text{cte}$  y  $\rho = \text{cte}$ . Sin embargo, las soluciones asociadas a ambos esquemas de diferencias finitas coinciden en todo el dominio.

Como condiciones iniciales para la simulación numérica empleamos una interpolación lineal entre las variables en los contornos. Para llegar a convergencia fueron necesarias 8000 iteraciones con  $CFL = 1,5$ . Empleamos el presente modelo para evaluar el comportamiento del sistema de ecuaciones de Euler con diferentes modelos de BCs para un vector de términos

fuente dado por:

$$\mathbf{C}' = \left[ 0, 0, \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right] \quad (6.23)$$

La derivada segunda de la temperatura fue discretizada con un esquema de diferencias finitas centradas. Para calcular las matrices jacobianas de los términos fuente expresamos la temperatura en función de las variables conservativas empleando las Ecs. (3.24) y (3.27).

(Poinsot y Lele, 1992) proponen que para modelar condiciones de contorno para las ecuaciones de Navier-Stokes es necesario imponer  $\mathbf{q} = \text{cte}$  a las salidas, lo que implica

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (6.24)$$

Sin embargo, en el presente problema para obtener convergencia fue necesario imponer como mínimo, dos condiciones de contorno de tipo Dirichlet a la entrada y a la salida: imponiendo solamente una condición sobre alguna de las variables (presión, velocidad o temperatura) más la condición dada por (6.24) a la salida, el algoritmo oscila sin llegar a un estado estacionario. Creemos que esto puede deberse a la gran importancia relativa del término de conducción de calor: el sistema deja de comportarse como hiperbólico, para comportarse más como un sistema parabólico. Además, la relación de compatibilidad impuesta por el operador  $\mathcal{L}^{(2)}$  para ondas salientes (5.33b) implica que la entropía del sistema se conserva, lo cual no es físicamente correcto para la salida derecha, debido al flujo de calor existente.

Por estas razones, obtuvimos los mejores resultados cuando impusimos los valores de la velocidad  $u$  y la temperatura  $T$ , o cuando impusimos velocidad y caudal másico  $\rho u$  a la salida. Otra opción que probamos fue imponer la velocidad y el gradiente de temperatura a la salida, pero en este caso el sistema converge a una solución con menor temperatura. Por otro lado, estableciendo condiciones de no reflexión a la salida el algoritmo converge a una condición de flujo con velocidad y temperatura constantes a lo largo del dominio. Lo mismo ocurre con las condición de fuerza nula en el contorno. La Figura 6.8 muestra las distribuciones de temperatura y velocidad obtenidas para los diferentes modelos de BCs probados (dados en la Tabla 6.1), y la Figura 6.9 muestra los respectivos perfiles de presión y densidad. Para el caso de las condiciones de contorno extrapoladas, la única forma de lograr la convergencia fue estableciendo las tres variables en cada uno de los contornos, es decir que fue necesario imponer dos condiciones adicionales a las físicamente necesarias.

En la Tabla 6.1 se especifican las condiciones de contorno que utilizamos en cada uno de los casos, tanto para la entrada como para la salida:

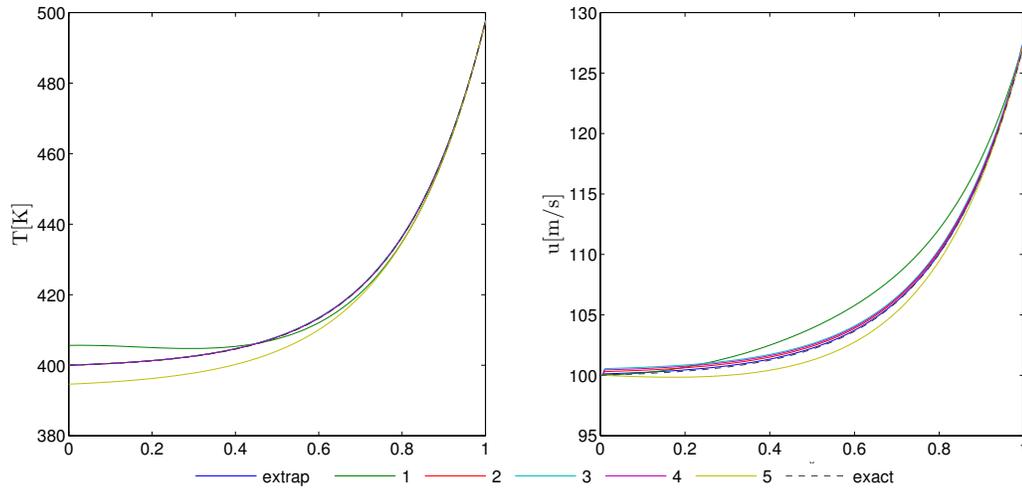


Figura 6.8: Distribuciones de velocidad y temperatura para 8000 pasos de tiempo

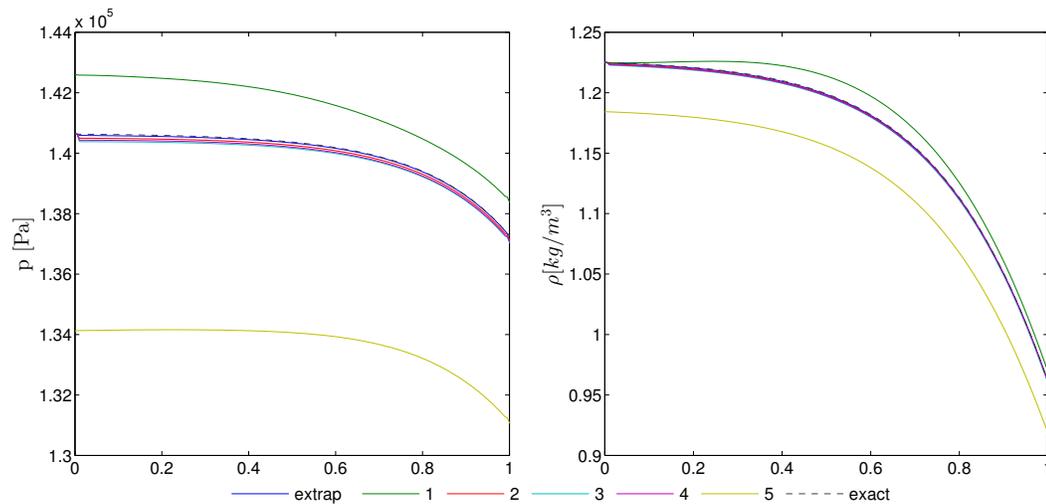


Figura 6.9: Distribuciones de presión y densidad para 8000 pasos de tiempo

Como se puede ver en la Figura 6.10 en general se llega a la convergencia de forma más efectiva cuando se establecen las tres variables a la entrada. Cuando se establece sólo la velocidad, o el caudal másico la solución oscila cuando se encuentra a una solución próxima a la físicamente correcta, como se muestra en las Figuras 6.8 y 6.9.

Para establecer las condiciones de contorno a la salida imponiendo temperatura y velocidad (casos 1, 2 y 5) se calcula  $\mathcal{L}^{(3)}$  para velocidad constante, de acuerdo a la Ec. (5.36),

Leyenda	Entrada	Salida
1	$\rho, v$	$T, v$
2	$\rho, v, p$	$T, v$
3	$\rho, v, p$	$T, \rho v$
4	$\rho, v, p$	$\rho, v$
5	$v$	$T, v$

Tabla 6.1: Código para leyenda de condiciones de contorno

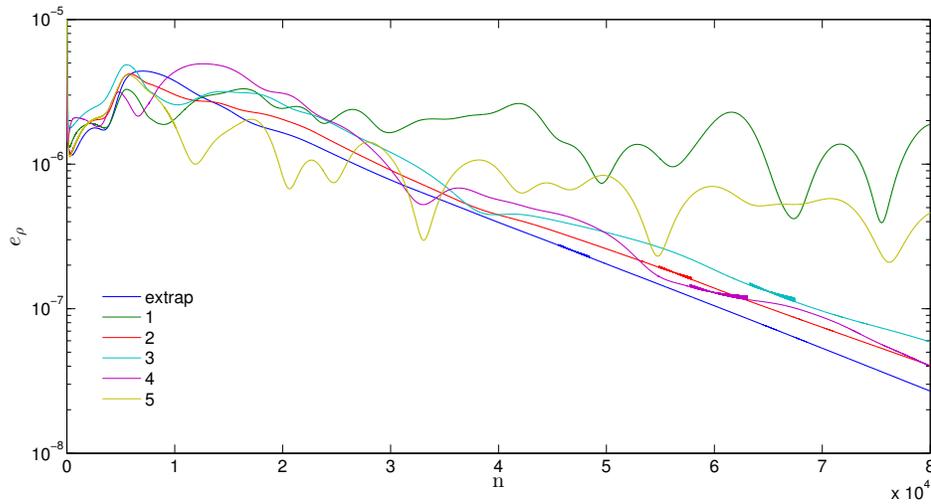


Figura 6.10: Curvas de convergencia para los diferentes modelos de BCs dados en 6.1.

y luego se reemplaza este valor en la expresión de  $\mathcal{L}^{(2)}$  para temperatura constante, dada por la Ec. (5.54).

Para establecer condiciones de contorno sobre la temperatura y el caudal másico (caso 3) es necesario resolver un sistema de dos Ecuaciones (la (5.47) y la (5.51)) cuyas incógnitas son  $\mathcal{L}^{(1)}$  y  $\mathcal{L}^{(2)}$ . De esta manera se obtiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(2)} &= \frac{a(\gamma-1)\mathcal{L}^{(3)}}{\gamma u - a} \\
 \mathcal{L}^{(1)} &= -\frac{(\gamma u + a)\mathcal{L}^{(3)}}{\gamma u - a}
 \end{aligned}
 \tag{6.25}$$

Para implementar la condición de gradiente de temperatura fijo usamos la derivada primera de la solución analítica valuada en  $x = L$  para estimar el valor

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \frac{\rho_0 u_0 C_p e^{\frac{\rho_0 u_0 C_p L}{\kappa}} (T_0 - T_L)}{\kappa \left( e^{\frac{\rho_0 u_0 C_p L}{\kappa}} - 1 \right)} \quad (6.26)$$

Luego puede calcularse el valor del operador  $\mathcal{L}^{(1)}$  en función de  $\mathcal{L}^{(2)}$  y  $\mathcal{L}^{(3)}$  mediante la Relación (5.46). Resultó más práctico imponer la condición de velocidad constante mediante  $\mathcal{L}^{(1)}$  e imponer el gradiente de temperatura a través de  $\mathcal{L}^{(2)}$  mediante la Relación (5.55). Otra opción es imponer la condición de gradiente de temperatura a través de  $\mathcal{L}^{(1)}$  y la condición de caudal másico constante a través de  $\mathcal{L}^{(2)}$ . Sin embargo, esta opción resulta en un sistema de ecuaciones que tiene como soluciones expresiones complejas para  $\mathcal{L}^{(1)}$  y  $\mathcal{L}^{(2)}$ . Por esta razón, y porque la otra versión de implementación de condiciones basada en gradiente de temperatura no convergió a la solución correcta, decidimos no implementar esta versión.

#### 6.1.4. Tubo de choque de Sod

El tubo de choque de Sod es un caso de prueba clásico para validar esquemas numéricos para flujo compresible. Consiste en un problema de Riemann para gases perfectos con condiciones iniciales dadas por:

$$\begin{aligned} [\rho, u, p]_l &= (1, 0, 1) \\ [\rho, u, p]_r &= \left( \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{10} \right) \end{aligned}$$

Empleamos un fluido modelo con  $R = 1$ . La solución a este problema consiste en una onda de choque que viaja hacia la derecha seguida por una discontinuidad de contacto. La onda de choque produce un aumento de presión y temperatura en el fluido que atraviesa. Por otro lado, un abanico de expansión viaja hacia la izquierda, que produce una disminución gradual de la presión y la temperatura.

En este caso decidimos probar el caso con dos tipos de condiciones de contorno:

- Pared cerrada en ambos contornos
- Pared cerrada en el contorno izquierdo y un contorno abierto a la atmósfera a la derecha

## Pared sólida

Para el caso de la pared sólida la solución exacta se obtiene mediante la teoría de las características y no presenta mayores problemas desde el punto de vista numérico. Las ondas genuinamente no lineales rebotan contra las paredes generando ondas del mismo tipo (la onda de choque rebota como onda de choque, y la de expansión rebota como expansión). La solución analítica puede encontrarse en el trabajo final de grado de (Acosta Lusa y Tamagno, 2004), así como soluciones numéricas para ambos tipos de condiciones de contorno. Para modelar una pared sólida con el esquema de BCs extrapoladas, se extrapolan todas las variables del problema excepto la componente normal de la cantidad de movimiento, que es reflejada:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{m+1}^{(2)} = -\mathbf{U}_m^{(2)} \\ \mathbf{U}_{m+1}^{(l)} = \mathbf{U}_m^{(l)} \end{cases} \quad \text{para } l \neq 2 \quad (6.27)$$

Ambos resultados representan correctamente la solución esperada, y tanto la onda de choque como el abanico de expansión son correctamente reflejados por ambos esquemas. En la Figura 6.11 se comparan los contornos de densidad obtenidos con ambos esquemas, y en la Figura 6.12 los contornos de velocidad para 600 pasos de tiempo. Sin embargo,

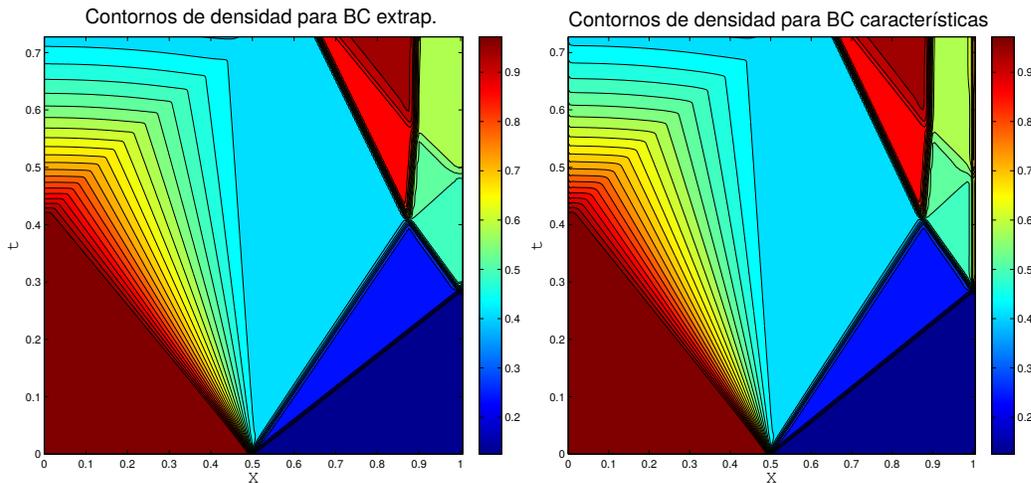


Figura 6.11: Comparación de los contornos de densidad obtenidos.

existen pequeñas diferencias: el esquema basado en características garantiza que  $u = 0$  en el contorno, mientras que el esquema extrapolado produce velocidades negativas en el

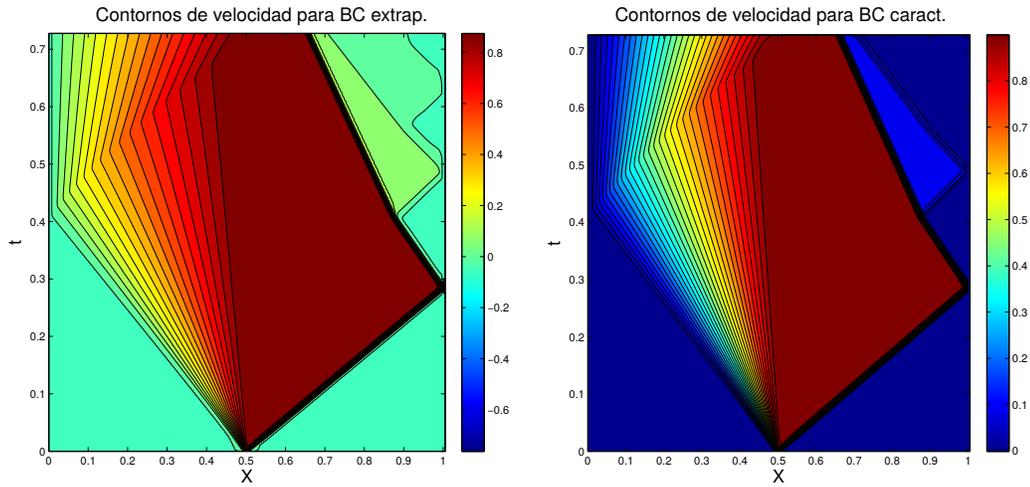


Figura 6.12: Comparación de los contornos de velocidad obtenidos

contorno (para garantizar flujo igual a cero) cuando la onda de choque se refleja (de acuerdo a la Ec. (6.27)). Los valores negativos en la escala del gráfico se dejaron para hacer énfasis en este punto. Por otro lado, el esquema basado en características produce variaciones en la presión y la densidad para mantener la velocidad igual a cero. Esto no ocurre para el esquema extrapolado, que refleja la densidad y la presión a ambos lados.

El modelo de condiciones de contorno basado en características para pared sólida se comportó de manera muy satisfactoria, conservando la energía del sistema. Cuando la onda de choque llega al contorno el esquema genera un incremento espurio de energía asociado a su rebote con la pared, debido a inexactitudes en la evaluación de las derivadas descentradas y los jacobianos. Sin embargo, el incremento de energía es inferior al 1% de la energía total del sistema. Además, el incremento de energía es menor que el obtenido utilizando un esquema de condiciones de contorno extrapoladas con gradiente cero. En la Figura 6.13 comparamos la evolución de la energía total del sistema  $\rho e_t$ , integrada en la longitud del tubo,

$$E_t = \int_0^L \rho e_t dx \quad (6.28)$$

para ambos esquemas.

La interacción del abanico de expansión con la pared también genera cambios de energía en el sistema, en este caso disminuyéndola de manera progresiva a medida que rebotan las ondas del abanico. La cantidad de energía perdida en este caso es también del orden del

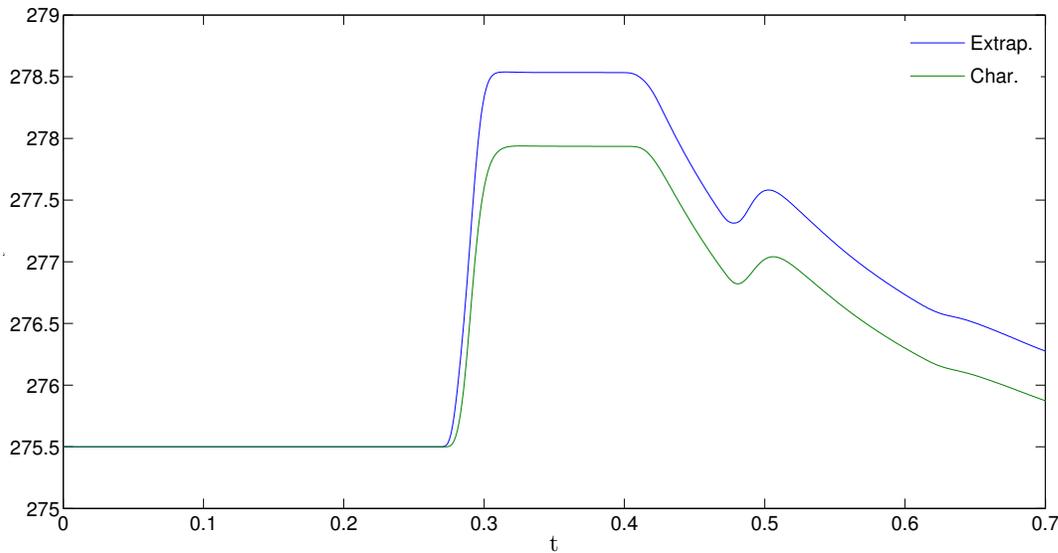


Figura 6.13: Evolución de la energía total del sistema con BC de pared cerrada para ambos esquemas

1%. Otra diferencia que notamos entre ambos esquemas es un incremento muy pequeño en el tamaño del paso de tiempo cuando la onda de choque llega a la pared. El paso de tiempo para el esquema extrapolado es casi imperceptiblemente mayor (menos del 0,1%), el efecto acumulado en el tiempo de cálculo a lo largo de varios pasos da una diferencia de  $2,1 \cdot 10^{-4}$ s, que no produce diferencias significativas en los resultados obtenidos.

### Extremo abierto a la atmósfera

Para el caso del conducto abierto a la atmósfera la física del problema es más compleja. Como primera medida deben distinguirse dos casos posibles: cuando el flujo detrás de la onda de choque es supersónico, o cuando éste es subsónico. En el caso de que el flujo sea subsónico (como en el test de Sod) cuando una onda característica llega a un extremo abierto que conecta a una región de presión constante, dicha onda debe reflejarse hacia adentro como una onda de la familia opuesta. De esta manera se mantiene la condición de presión constante e igual a la presión de salida. Esto implica que si la onda incidente es de expansión, ésta debe reflejarse como onda de compresión, y viceversa. Este resultado se extiende para choques y expansiones: si una onda de choque llega a un extremo abierto, debe reflejarse como un abanico de expansión. Una discusión completa puede encontrarse

en el libro de (Shapiro, 1953).

Sin embargo, de acuerdo a fotografías Schlieren, lo que ocurre en realidad es que cuando la onda de choque llega al contorno derecho y sale al exterior se forma en la salida una estructura de flujo tridimensional inestacionario. Esto hace que la presión aumente por un período de tiempo muy pequeño en la zona adyacente a la salida. De acuerdo a (Rudinger, 1955), si la velocidad detrás del choque es tal que el flujo es subsónico, una vez que la onda de choque se alejó lo suficiente de la salida la presión se restituye mediante un frente de expansión, que luego se propaga hacia adentro del tubo como una serie de ondas de expansión “discretas”, separadas a ciertos intervalos de tiempo. Este proceso se esquematiza en la Figura 6.14.

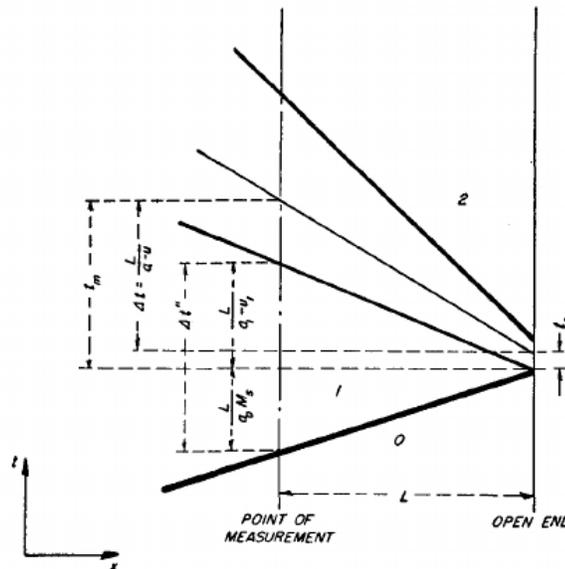


Figura 6.14: Reflexión de una onda de choque como ondas de expansión discretas, tomado de (Rudinger, 1955)

El autor además explica que mientras mayor sea la intensidad de la onda de choque, menor serán los intervalos de tiempo entre las ondas de expansión reflejadas. Por esta razón, para choques de mucha intensidad puede modelarse la reflexión de los mismos como un abanico de expansión centrado.

Por otro lado, si el flujo detrás de la onda de choque es supersónico, las condiciones de contorno analíticas para un estado estacionario exigen que la velocidad en la salida sea igual a la velocidad del sonido.

Probamos diferentes modelos de condiciones de contorno para evaluar cuál de ellos se comportaba mejor, y así poder determinar cuál era suficientemente simple y preciso para emplearse en casos más complejos con salidas inestacionarias a extremos abiertos. En particular para el test de Sod, el número de Mach detrás de la onda de choque es  $M = 0,9$ , de manera que alguna condición debe imponerse sobre la onda que se refleja hacia adentro. Naturalmente, una condición de no reflexión resulta inapropiada. Una opción posible sería una salida de presión constante. Sin embargo, este tipo de condición tiene dos inconvenientes: primero, las reflexiones “discretas” de ondas de expansión dependen sobre todo de con cuánta precisión resuelve el flujo numérico de Harten-Yee a la onda de choque dentro del dominio. Si el choque es capturado en tres celdas, se reflejarán tres ondas desde el contorno. Segundo: si el flujo se vuelve sónico en la salida, la presión en los nodos del contorno evolucionará en el tiempo. Si después de un tiempo las condiciones aguas arriba hacen que el flujo a la salida vuelva a ser subsónico, el esquema de condiciones de contorno mantendrá constante este nuevo valor de presión en lugar de la presión física en la salida, dada por las condiciones iniciales. Esto es porque el esquema numérico impone  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , en vez de el valor de la presión. Intentamos subsanar este problema volviendo a imponer el valor de la presión en las celdas de la salida una vez que el flujo se volviera subsónico nuevamente.

Otra opción que evaluamos fue emplear el esquema de la presión impuesta en el “far field”  $p_\infty$ . Este esquema, para el valor de  $\sigma = 0,25$  utilizado por (Poinsot y Lele, 1992), se comporta en la práctica como un esquema de no reflexión. La onda reflejada hacia adentro del dominio prácticamente no influye en la presión aguas arriba y muestra una interacción muy débil con las demás ondas.

Para obtener resultados similares a los obtenidos con una salida de presión constante fue necesario usar un parámetro  $\sigma$  100 veces mayor, es decir  $\sigma = 25$ . Además, emplear en la Expresión (5.43) el valor del número de Mach máximo del flujo produjo menores reflexiones y algunas oscilaciones. Optamos por emplear el valor del número de Mach en el contorno en su lugar, y obtuvimos mejores resultados. En las Figuras 6.15 y 6.16 mostramos una comparación de los contornos de densidad y velocidad, respectivamente, obtenidos para una salida de presión constante y para una salida con presión impuesta en el “far field”, con tres valores de  $\sigma$ .

A pesar de que el abanico de expansión reflejado no se observa con tanta claridad como para el esquema de salida de  $p = \text{cte}$ , el patrón de interacción de ondas y la presión en las celdas del contorno coinciden.

Como tercera opción probamos el esquema de fuerza nula en el contorno. Se observa

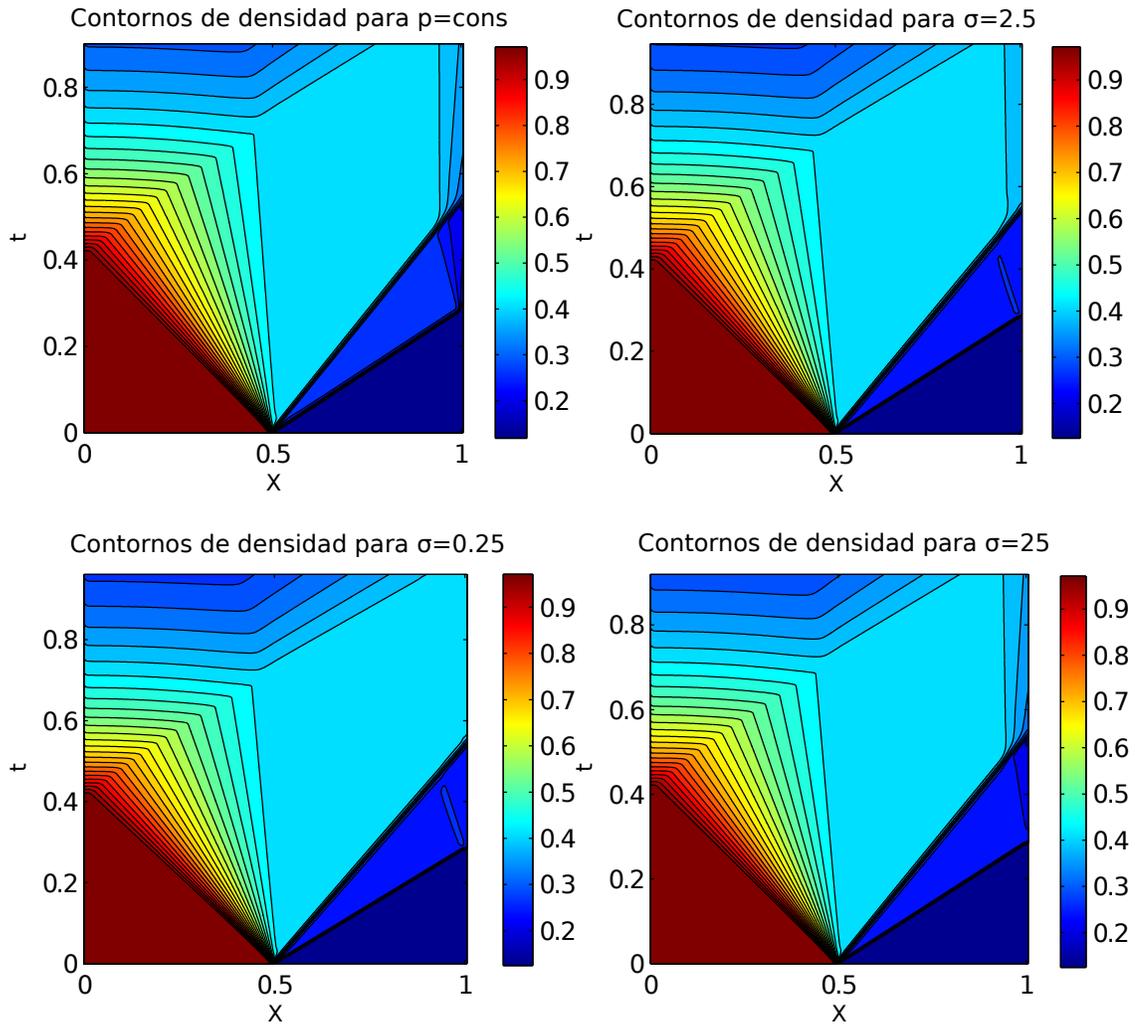


Figura 6.15: Contornos de densidad obtenidos para distintos tipos de salidas con presión impuesta.

que una onda se refleja hacia adentro del dominio, pero la intensidad de dicha onda es significativamente menor que la que se observa para el caso de salida de presión constante. En la Figura 6.17 se observan los resultados obtenidos para el esquema de fuerza nula.

Debe notarse además que la energía total del sistema  $\int_0^L \rho e_t dx$  no se ve significativamente afectada por el esquema de condiciones de contorno utilizado. Las curvas asociadas a los diferentes esquemas se superponen, como se muestra en la Figura 6.18.

El siguiente paso fue evaluar lo que ocurre después de que el flujo se vuelve supersónico en la región vecina a la salida. En este caso probamos con dos condiciones posibles para la

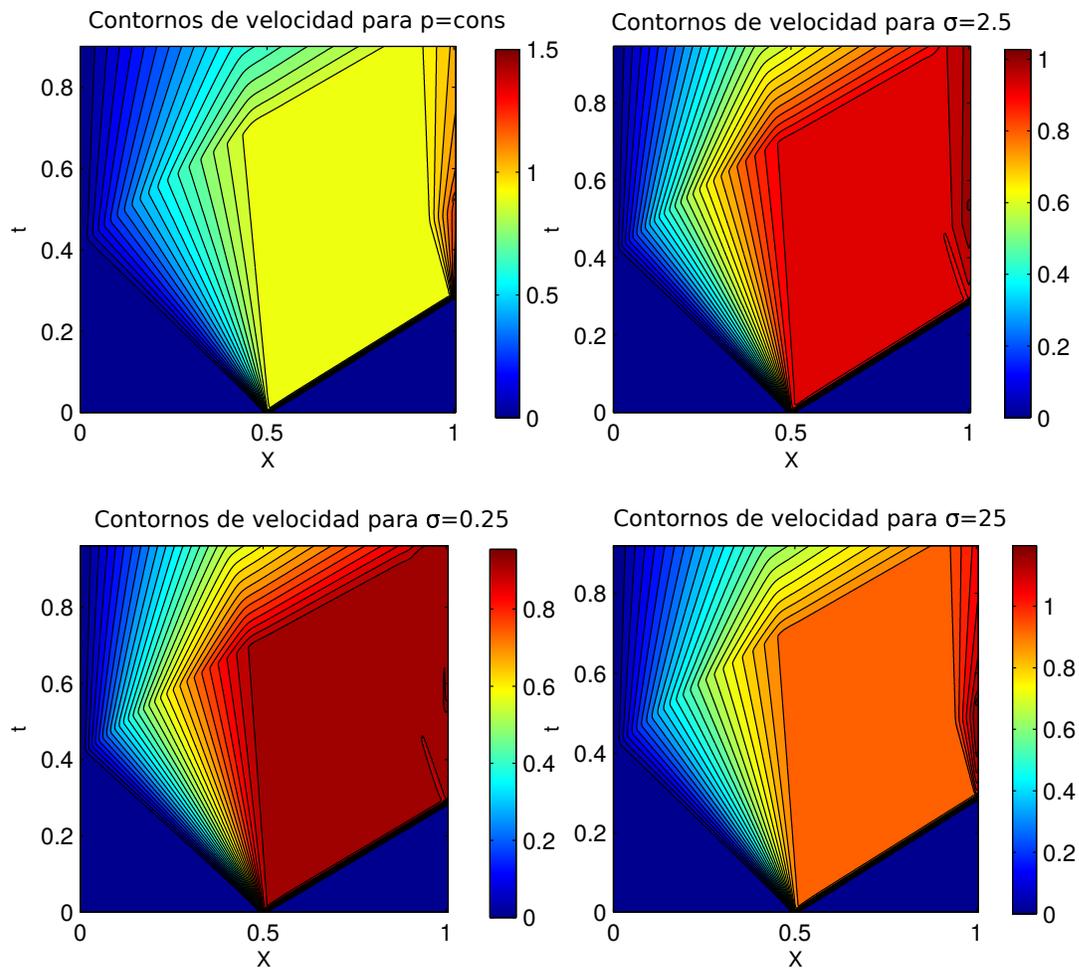


Figura 6.16: Contornos de velocidad obtenidos para distintos tipos de salidas con presión impuesta.

salida:

1.  $u = a$  en la salida (salida sónica),
2. una salida supersónica no reflejante.

La condición de salida sónica puede implementarse de dos maneras distintas:

1. usando un esquema de velocidad constante en el tiempo  $u = a$ ,
2. estableciendo una condición de número de Mach constante en el tiempo a través de

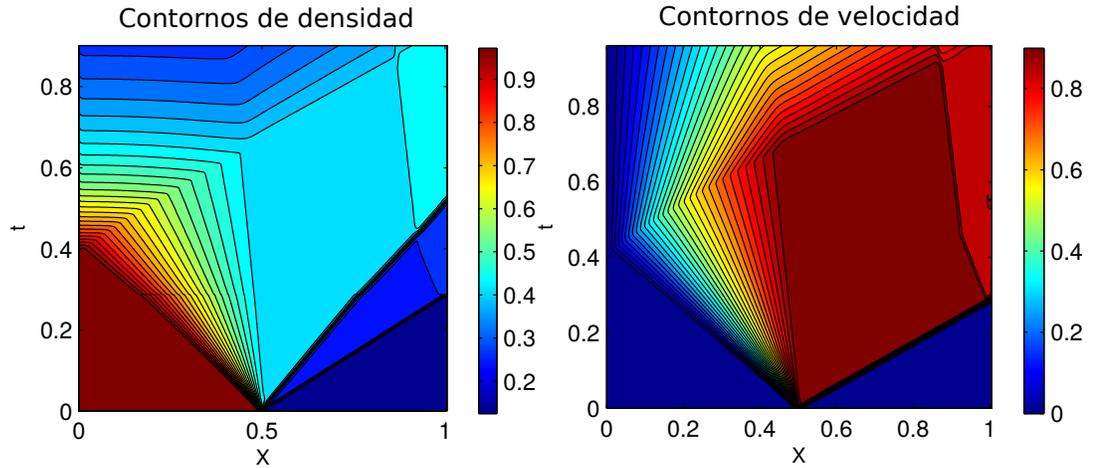


Figura 6.17: Contornos de densidad y velocidad constante para el esquema de fuerza nula en el contorno.

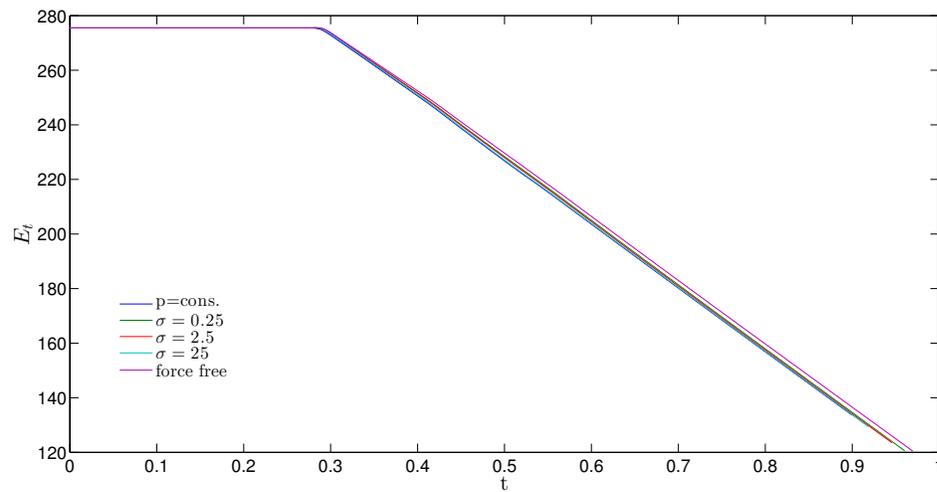


Figura 6.18: Evolución de la energía total del sistema para el caso de extremo abierto

$\mathcal{L}^{(1)}$ , que debe cumplir la relación:

$$\mathcal{L}^{(1)} = -\frac{((\gamma - 1)u - 2a)\mathcal{L}^{(3)} + 2u\mathcal{L}^{(2)}}{(\gamma - 1)u + 2a} \quad (6.29)$$

Además, si el flujo en un tiempo futuro volviera a ser subsónico debido a fenómenos que ocurran aguas arriba, el esquema de BCs de salida de presión constante preservaría

el valor de la presión actual. Dicho valor es distinto del valor de la presión en la salida, determinado por las condiciones iniciales. Para salvar este inconveniente es necesario restablecer la presión en las celdas del contorno, de la misma manera que para el esquema de condiciones extrapoladas. Cuando combinamos cualquiera de los dos esquemas de salidas sónicas ( $u = \text{cte}$  o  $M = \text{cte}$ ) junto con el esquema de presión constante para salidas subsónicas produjo inestabilidades, como se muestra en la Figura 6.19, que llevaron a un colapso de la simulación, a menos que se penalizara severamente el paso de tiempo.

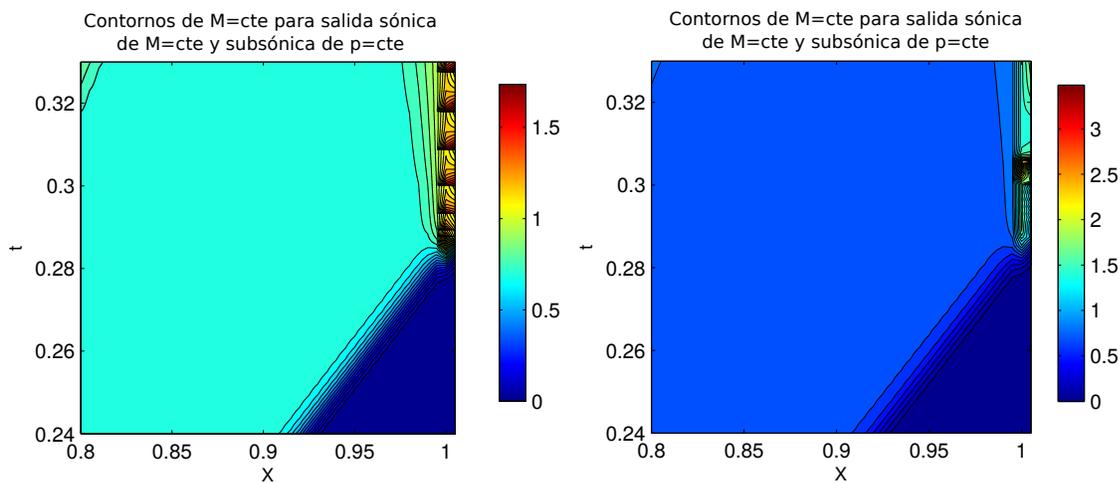


Figura 6.19: Comparación de esquemas de salida sónica con  $p = \text{cte}$  para ondas subsónicas

Esto se debe a que cuando el flujo llega a condición sónica en la salida la presión aumenta. Pero cuando por la propia evolución del sistema el flujo se vuelve subsónico nuevamente, la presión se restablece a  $p = 0,1$ , lo que produce una disminución repentina en la velocidad del sonido, que a su vez incrementa el número de Mach local. Este proceso se repite varias veces, siendo más acentuado cuando se emplea la condición de velocidad constante.

Este tipo de inestabilidad no fue tan severa cuando empleamos el esquema de presión impuesta en el campo lejano, pero el esquema se volvía inestable si no se reducía el paso de tiempo cuando la salida se volvía sónica. Sin embargo, observamos que aguas arriba de la salida el flujo se vuelve siempre supersónico, sin importar el esquema utilizado. Esto nos lleva a pensar que la solución físicamente correcta es una salida supersónica inestacionaria, sin reflexión de ondas.

Por último comparamos los resultados obtenidos con el esquema extrapolado. Lo implementamos de manera que si la salida se vuelve supersónica, el esquema extrapola todas las variables conservadas, y si el flujo es subsónico, establece la presión igual a  $p = 0,1$  a través de la energía total y extrapola los valores de las otras variables conservadas.

La Figura 6.20 muestra los contornos de Mach constante obtenidos para la condición de  $p_\infty$ . La condición de velocidad constante a la salida produjo mayores valores de  $M$ .

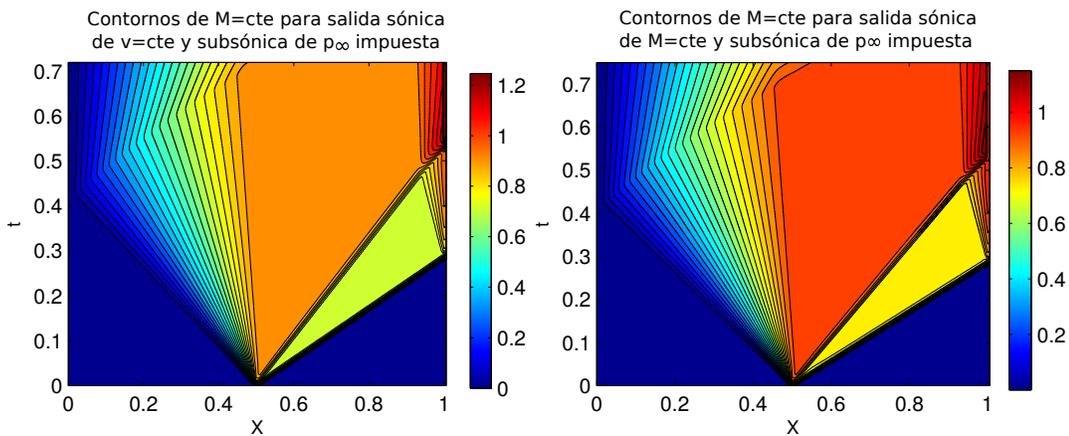


Figura 6.20: Comparación de esquemas de salida sónica con  $p_\infty$  impuesta para ondas subsónicas

La solución para la salida supersónica inestacionaria se muestra en la Figura 6.21 para la velocidad y la densidad, y en la Figura 6.23 para la presión y el número de Mach. Los mismos gráficos se muestran para el esquema de condiciones extrapoladas en las Figuras 6.22 y 6.24 respectivamente.

Ambos esquemas concuerdan en los resultados y en los patrones de ondas obtenidos. Aparecen algunas diferencias, particularmente cuando interactúan el abanico de expansión que viaja hacia la derecha reflejado desde la pared izquierda con el abanico de expansión que viaja a la izquierda, producto de la interacción de la onda de choque con la salida. Además, el esquema basado en características muestra curvas de contornos más suaves cerca de la salida. Por otro lado, el esquema extrapolado produjo pequeñas oscilaciones en la salida, sobre todo luego de que la onda de choque llegara a la salida y cuando el abanico de expansión que viaja hacia la izquierda interactúa con la discontinuidad de contacto, probablemente porque el flujo cambió de subsónico a supersónico a la salida, y la imposición directa de la presión produjo inestabilidades.

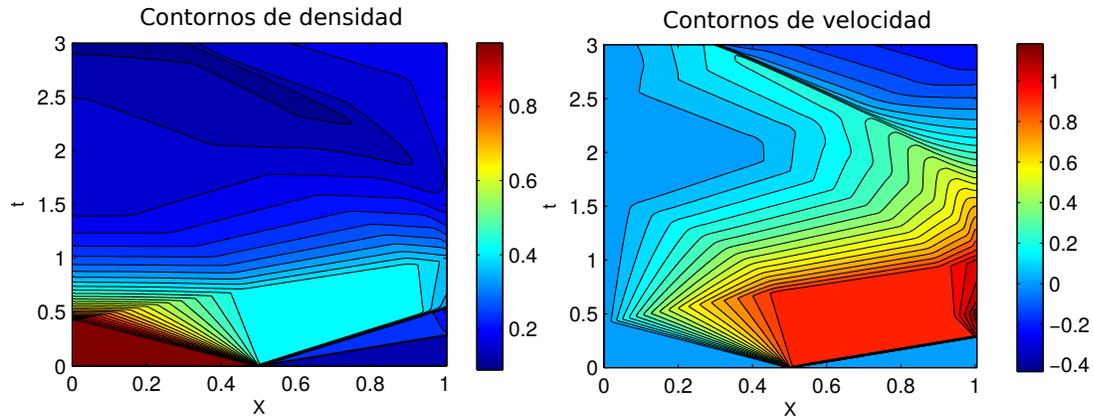


Figura 6.21: Contornos de densidad y velocidad constante para condiciones supersónicas no reflejantes y subsónicas de  $p_\infty$  impuesta

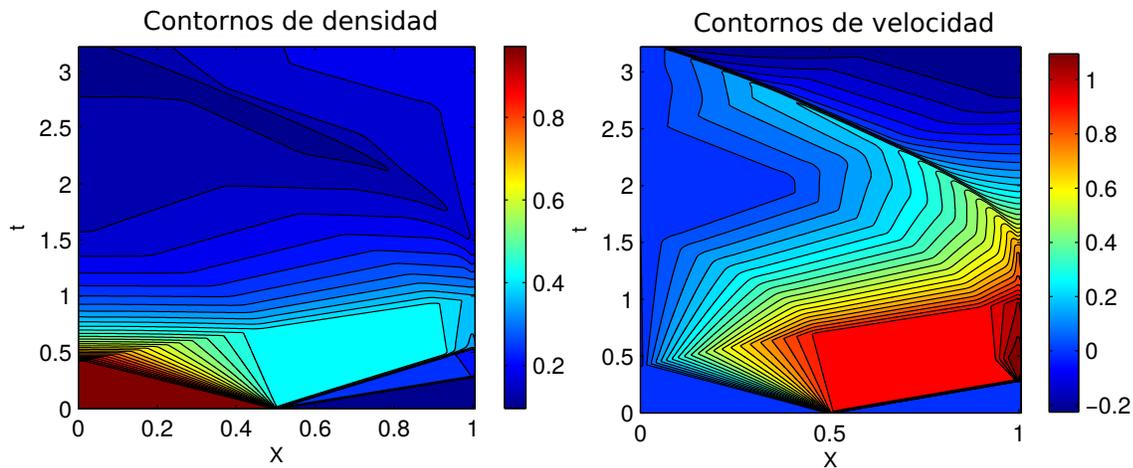


Figura 6.22: Contornos de densidad y velocidad constante para el esquema extrapolado

## 6.2. Casos Hidrostáticos

Para comprobar que el código calcula de forma correcta los términos fuente del problema astrofísico a estudiar, se empleó una solución hidrostática aproximada propuesta por (Aschwanden y Schrijver, 2002) para arcos de diversos tamaños y condiciones iniciales. El modelo emplea un sistema de coordenadas análogo al de la Figura 6.4, y tiene en cuenta:

- Efectos de gravedad variables a lo largo del arco

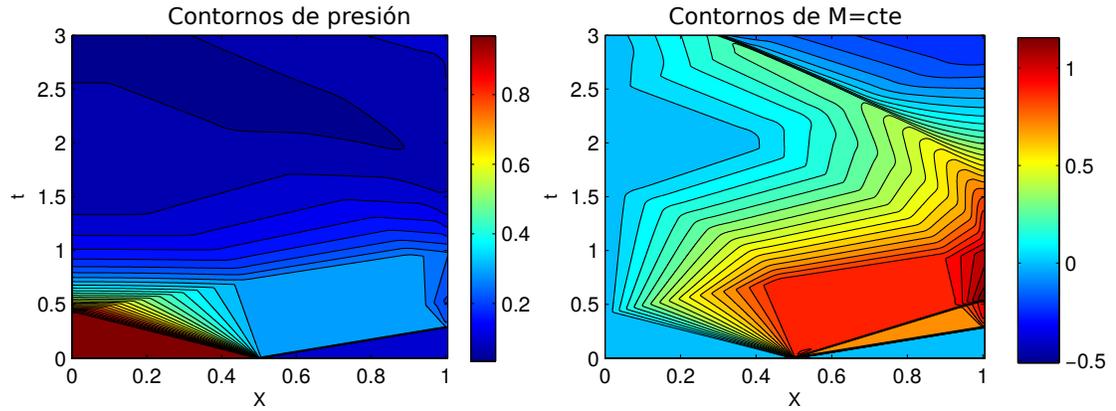


Figura 6.23: Contornos de presión y número de Mach constante para condiciones supersónicas no reflejantes y subsónicas de  $p_\infty$  impuesta

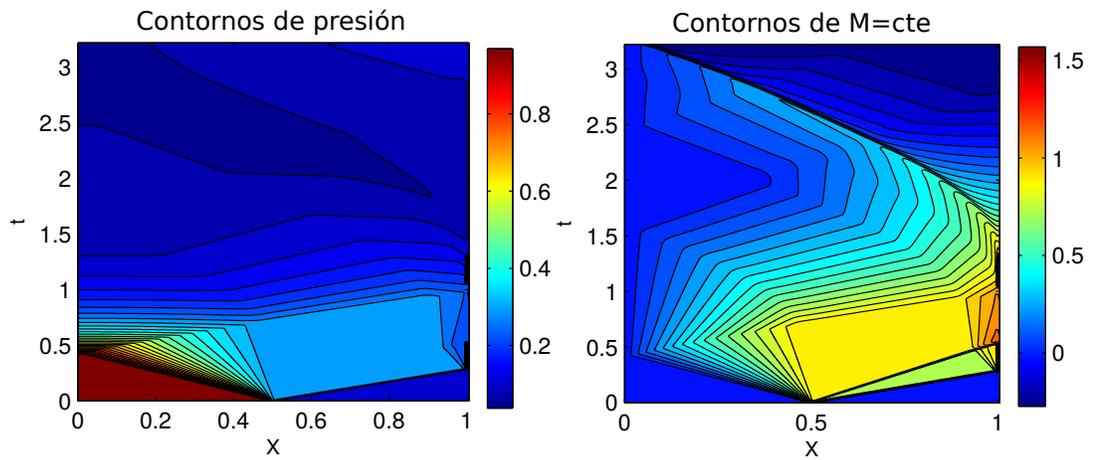


Figura 6.24: Contornos de presión y número de Mach constante para el esquema extrapolado

- Conducción térmica de acuerdo al modelo de Spitzer, dado por la Ec. (3.7)
- Disipación por radiación de acuerdo a la Ec. (3.1)
- Una ley de calentamiento de la forma

$$E_H = E_{H0} \exp\left(-\frac{(s - s_0)}{s_H}\right)$$

Para el caso general de un arco con una distribución de temperatura, sección y una función de calentamiento arbitrarias no existe una solución analítica. (Aschwanden y Schrijver, 2002) obtuvieron soluciones aproximadas basadas en correlaciones estadísticas de un gran número de soluciones numéricas para distintos valores de los parámetros.

Empleando la variable normalizada  $z$ :

$$z = \left( \frac{L - s}{L - s_0} \right)$$

La distribución aproximada de temperatura a lo largo del arco es:

$$\begin{cases} T(s) = T_{max} [1 - z^a]^b & \text{para } \frac{s_H}{L} > 0,3 \\ T(s) = T_{max} [1 - z^a]^b \left[ 1 + 0,5 \cdot \log_{10} \left( \frac{L}{s_H} \right) (1 - z) z^5 \right] & \text{para } \frac{s_H}{L} \leq 0,3 \end{cases} \quad (6.30)$$

La presión se obtiene mediante una expresión similar a la de la distribución hidrostática:

$$p(s) = p_0 e^{-\frac{h(s)-h_0}{\lambda_p(s)}}$$

La escala de altura para la presión se determina mediante:

$$\lambda_p(s) = \lambda_0 \frac{T(s)}{10^6} \left( 1 + \frac{h(s)}{R_{sun}} \right) q_\lambda(L, s_H)$$

donde  $R_{sun} = 6,96 \cdot 10^8$  m es el radio solar y  $h$  es la altura, dada por:

$$h = \frac{2L}{\pi} \sin \left( \frac{\pi s}{2L} \right)$$

Y la densidad se obtiene a través de la ecuación de estado.

Los coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $q_\lambda$  se interpolan a través de otro grupo de coeficientes:

$$\begin{aligned} a(L, s_H) &= a_0 + a_1 \left( \frac{L_0}{s_H} \right)^{a_2} \\ b(L, s_H) &= b_0 + b_1 \left( \frac{L_0}{s_H} \right)^{b_2} \\ q_\lambda(L, s_H) &= c_0 + c_1 \left( \frac{L_0}{s_H} \right)^{c_2} \end{aligned}$$

donde  $L_0$  es la semilongitud medida desde las bases.

Estas aproximaciones son válidas para:

$$4 \cdot 10^6 \text{ m} \leq L \leq 400 \cdot 10^6 \text{ m}; \quad 4 \cdot 10^6 \text{ m} \leq s_H \leq 400 \cdot 10^6 \text{ m};$$

$$1 \cdot 10^6 \text{ K} \leq T_{max} \leq 10 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Este modelo sencillo permite validar los términos fuente para arcos de diferentes longitudes, con diferentes funciones de calentamiento y diferentes leyes de variación de sección. A continuación se presentan los resultados para un arco de sección constante con semilongitud  $L = 40 \cdot 10^6 \text{ m}$ . Para este caso además existen gráficos de resultados de una simulación con un código hidrostático en el trabajo de (Aschwanden y Schrijver, 2002), que también se emplearon para comparar resultados. Los datos de dicha simulación se levantaron como puntos discretos de las figuras del trabajo citado mediante un programa para tomar información de gráficos, y son representados con círculos.

Una vez obtenidas las soluciones hidrostáticas aproximadas para la presión y densidad, se emplearon éstas como condición inicial para el código de FVM desarrollado. Con dichas condiciones iniciales y condiciones de contorno extrapoladas y características análogas a las empleadas en la Sección 6.1.3, corrimos 4000 pasos de tiempo con  $CFL = 0,9$ . En ese período de tiempo las oscilaciones en la velocidad se amortiguaron y el sistema convergió a una solución hidrostática idéntica a la obtenida por (Aschwanden y Schrijver, 2002) con su código hidrostático, y muy cercana a la solución aproximada parametrizada.

Por otro lado, para la condición inicial planteada el código de volúmenes finitos dio como resultado velocidades casi nulas en todo el dominio (salvo pequeñas oscilaciones cerca de las bases, posiblemente debido a que la solución hidrostática propuesta es aproximada), y conservó esta configuración de presión, densidad y velocidad a lo largo del tiempo. En la Figura 6.25 se presentan los perfiles de densidad y temperatura obtenidos, comparados con el caso hidrostático simulado por los autores y las soluciones parametrizadas.

En la Figura 6.26 comparamos los términos de conducción de calor y pérdidas de energía por radiación para las tres soluciones mencionadas. De esta forma, comparamos los términos fuente calculados por el código FVM para dichas condiciones como los calculados para obtener la solución hidrostática aproximada y los de la simulación hidrostática. En todos los casos se obtuvo una muy buena correlación. Para evaluar los flujos de calor por conducción empleamos tanto la formulación de diferencias finitas, Ec. (4.32) como la de volúmenes finitos, Ec. (4.37). Ambos esquemas funcionaron adecuadamente, existiendo diferencias del orden del 1% entre los resultados obtenidos con el método de volúmenes finitos y los con el esquema de diferencias finitas en la región cercana a las bases.

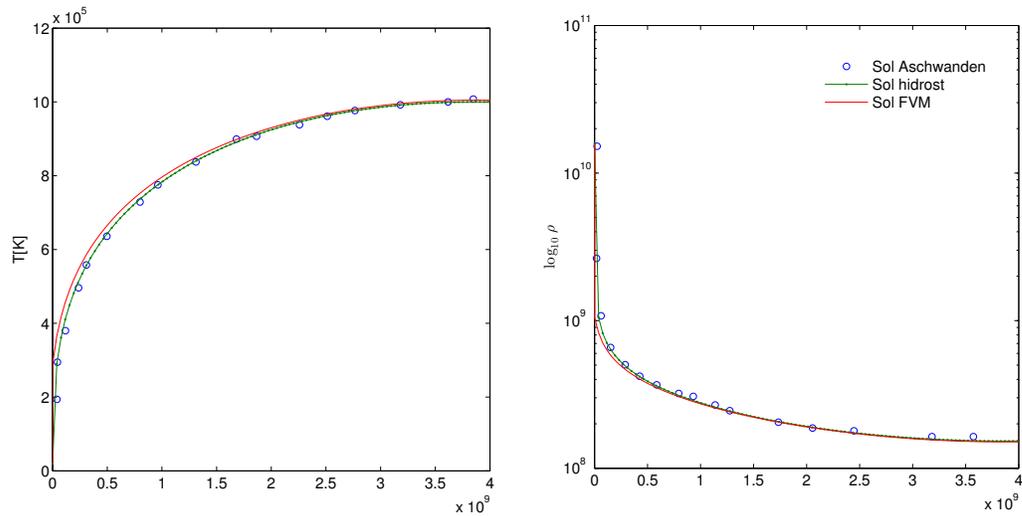


Figura 6.25: Comparación de los perfiles de densidad y temperatura obtenidos con la solución hidrostática numérica de (Aschwanden y Schrijver, 2002), la parametrizada aproximada y mediante volúmenes finitos

Por otro lado, evaluamos el efecto de considerar una limitación por saturación del flujo de calor por conducción, de acuerdo a la Ec. (3.12). Dicha condición no fue tomada en cuenta en la solución obtenida por los autores. Sin embargo, se observa que la limitación del flujo de calor posee escasa influencia en la cantidad de calor transportada. Creemos que esto se debe a que en las zonas de las bases (donde existe mayor gradiente de temperatura) la densidad es más elevada, lo que implica un valor del flujo de saturación  $q_{sat}$  mayor.

Por otro lado, derivamos el flujo de calor por conducción de la solución aproximada mediante derivadas analíticas y numéricas de la expresión obtenida para temperatura, dada por la Ec.(6.30). Se observa que la solución aproximada para el flujo de calor (obtenida como una derivada exacta o aproximada de la solución paramétrica para  $T$ ) es ligeramente diferente de la solución numérica obtenida por Aschwanden. Creemos que esto se debe a que la solución aproximada es menos exacta en las regiones cercanas a las bases, y estas pequeñas diferencias inciden en el gradiente de  $T^{7/2}$ . Sin embargo, el código de volúmenes finitos desarrollado muestra muy buena coincidencia con los valores obtenidos por la solución numérica hidrostática. Lo mismo ocurre con la función de pérdidas radiativas  $L_{rad}$ .

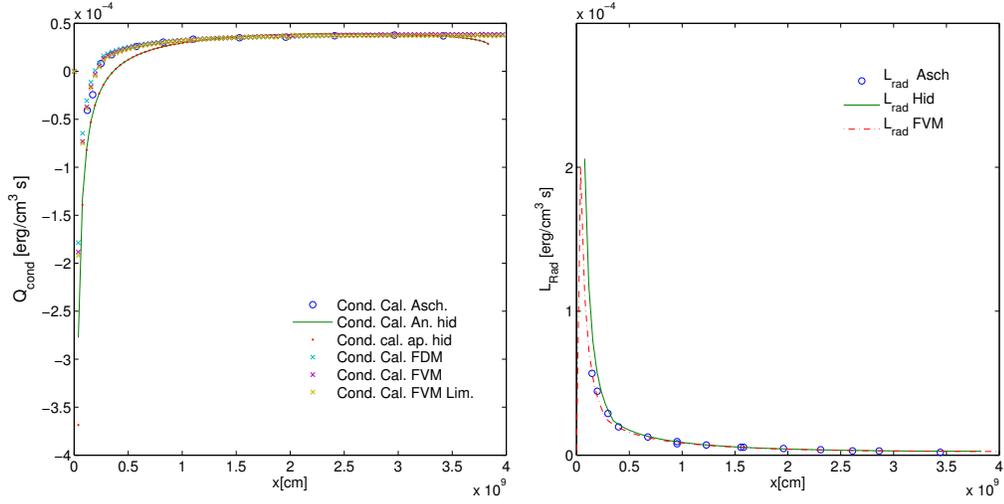


Figura 6.26: Comparación de términos de conducción de calor y pérdidas radiativas para las tres soluciones hidrostáticas

## 6.3. Casos Magnetohidrodinámicos

### 6.3.1. Tubo de choque de Sod

Como primera medida, corrimos el test de Sod con el algoritmo MHD para comparar los resultados con el algoritmo que resuelve las ecuaciones de Euler, con el objetivo de verificar si la formulación de BCs en variables características para MHD degenera correctamente al caso gasdinámico para condiciones iniciales gasdinámicas.

En este caso el dominio computacional fue discretizado en 200 celdas y ambos contornos con dos celdas fantasmas. Corrimos 2000 pasos de tiempo con  $CFL = 0,5$ .

Al igual que para el test de Sod analizado con el modelo gasdinámico, resolvimos el problema con dos tipos de condiciones de contorno: ambos extremos con paredes cerradas, y un extremo con un contorno abierto a una región de presión constante.

#### Pared cerrada

Comparamos el problema del test de Sod con condiciones de contorno de pared cerrada en ambos extremos implementadas con el modelo basado en características. Para el modelo MHD usamos condiciones de no reflexión para las ondas magnetosónicas lentas y de Alfvén. La condición de velocidad nula en la pared se impone a través de los operadores  $\mathcal{L}$  asociados

a ondas magnetosónicas rápidas. En las Figuras 6.27 y 6.28 se muestran los resultados para los contornos de densidad y velocidad, respectivamente

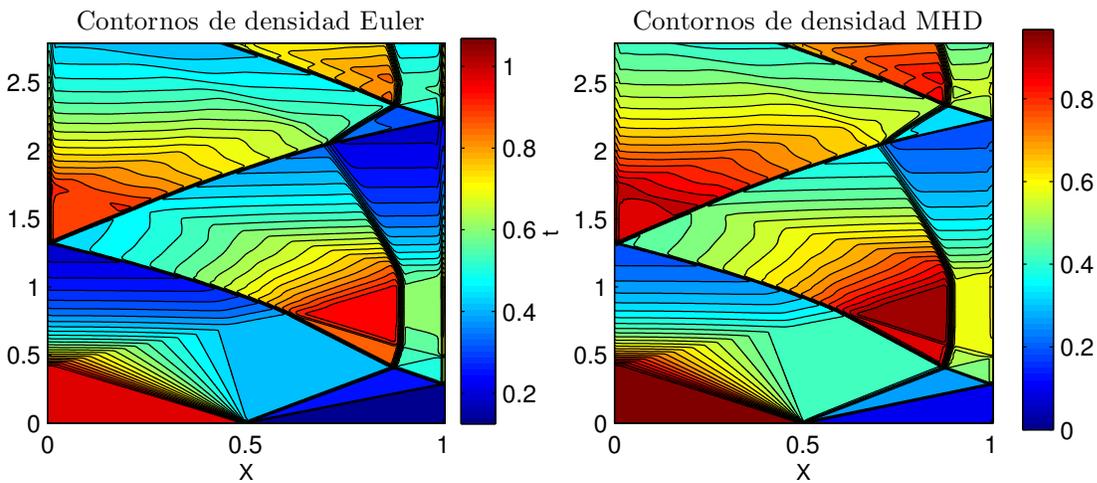


Figura 6.27: Comparación de contornos de densidad para BC características en un tubo de Sod de pared cerrada

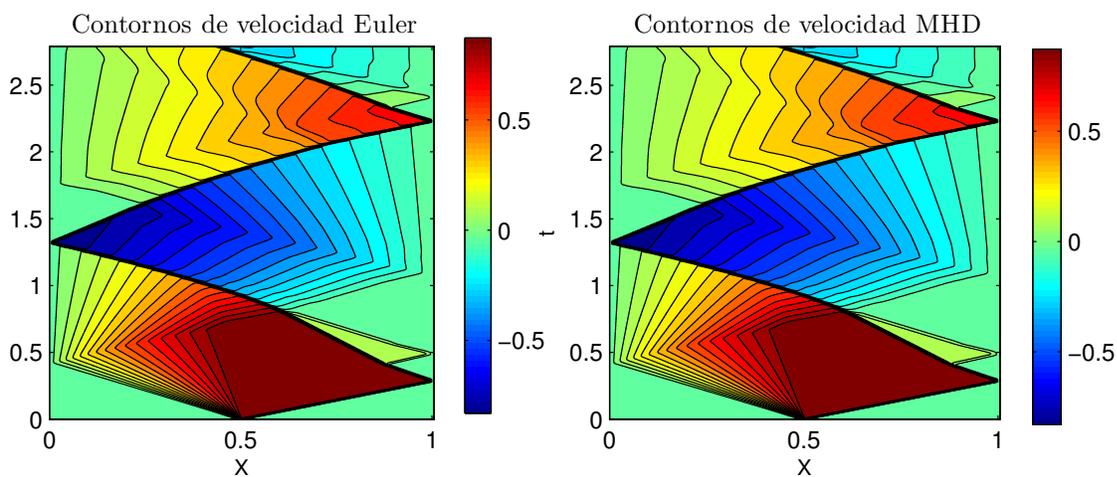


Figura 6.28: Comparación de contornos de velocidad para BC características en un tubo de Sod de pared cerrada

Observamos que ambos resultados concuerdan, y se observan los mismos patrones de ondas en ambos casos. Tanto la onda de choque que viaja hacia la derecha como el abanico de expansión son correctamente reflejadas en ambas paredes sólidas. Estos resultados

indican que el esquema de condiciones de contorno para MHD degenera correctamente al sistema gasdinámico cuando  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , y que la normalización propuesta en las Ecs. (3.146) y (3.149) funciona correctamente para el esquema de condiciones de contorno basado en características.

### Extremo abierto

Por otro lado, repetimos la comparación entre el modelo MHD y gasdinámico para dos variantes de condiciones de contorno para extremos abiertos: con presión constante implementada a través de  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  y de presión impuesta en el “far field”. Hacemos esto sólo a fines de comparación, más allá de una precisa descripción de la física del problema, como vimos en la sección anterior. En las Figuras 6.29 y 6.30 mostramos la comparación de los contornos de densidad y velocidad obtenidos para el caso de  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ .

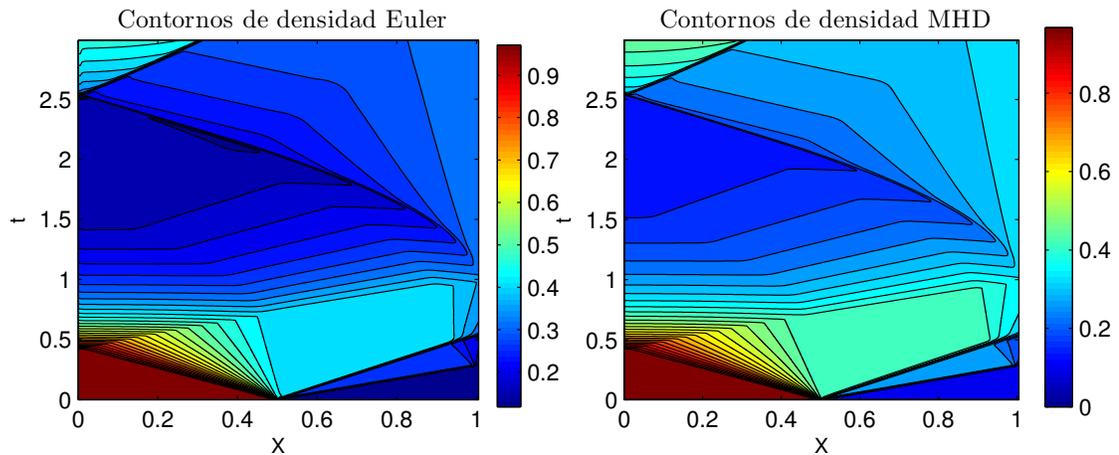


Figura 6.29: Comparación de contornos de densidad para BCs basadas en características con extremo abierto y  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

En las Figuras 6.31 y 6.32 mostramos la comparación de los contornos de densidad y velocidad obtenidos para el caso de  $p_\infty$  impuesta.

Se observa que en todos los casos los resultados comparados entre ambos modelos coinciden, y se observa que las ondas poseen las mismas velocidades de propagación. La diferencia entre el contorno con  $p_\infty$  impuesta y con  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  se debe al fenómeno que ocurre cuando el flujo se vuelve supersónico a la salida, que produce una evolución temporal del valor de la presión, como se discutió en la sección anterior.

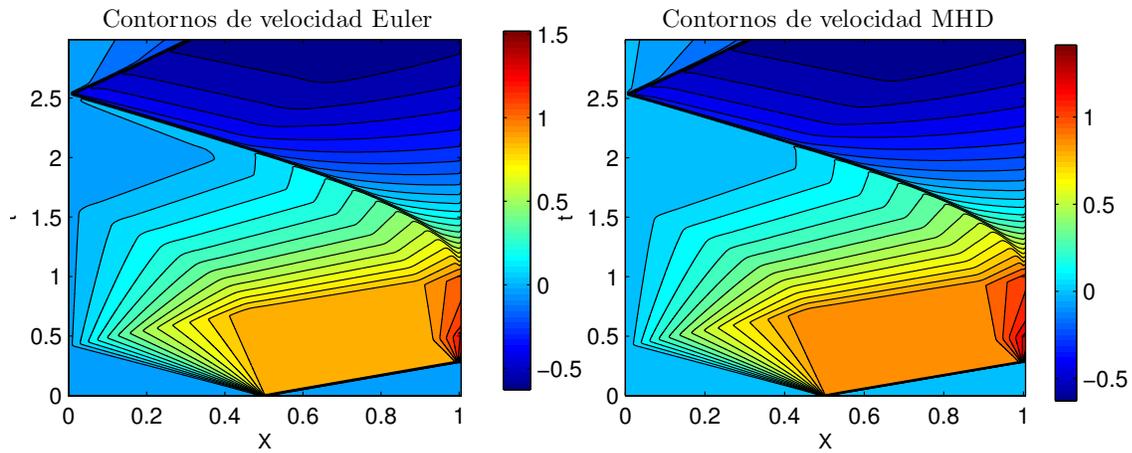


Figura 6.30: Comparación de contornos de velocidad para BC características con extremo abierto y  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$

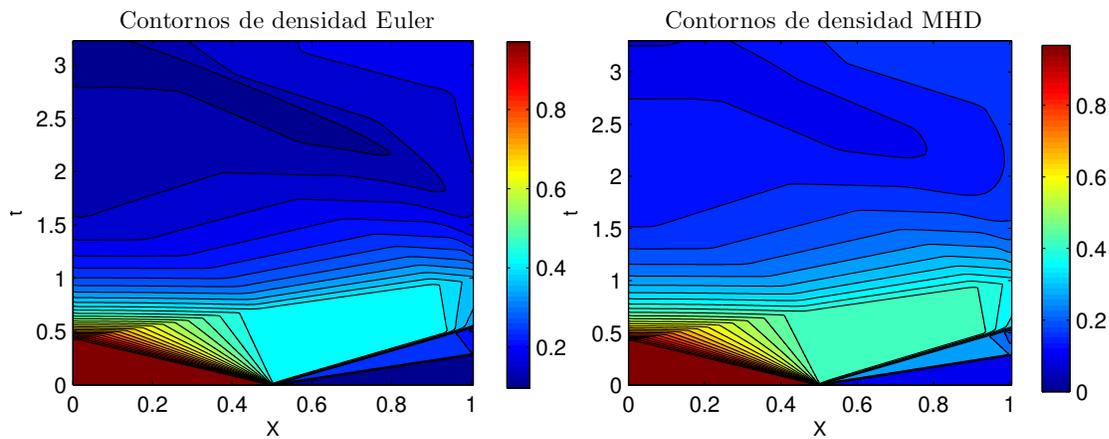


Figura 6.31: Comparación de contornos de densidad para BCs basadas en características con extremo abierto y  $p_\infty$  impuesta

Estos resultados demuestran que el esquema de condiciones de contorno y el algoritmo MHD resuelven correctamente casos gasdinámicos, y que es correcto establecer condiciones sobre variables gasdinámicas a través de los operadores asociados a ondas magnetosónicas rápidas.

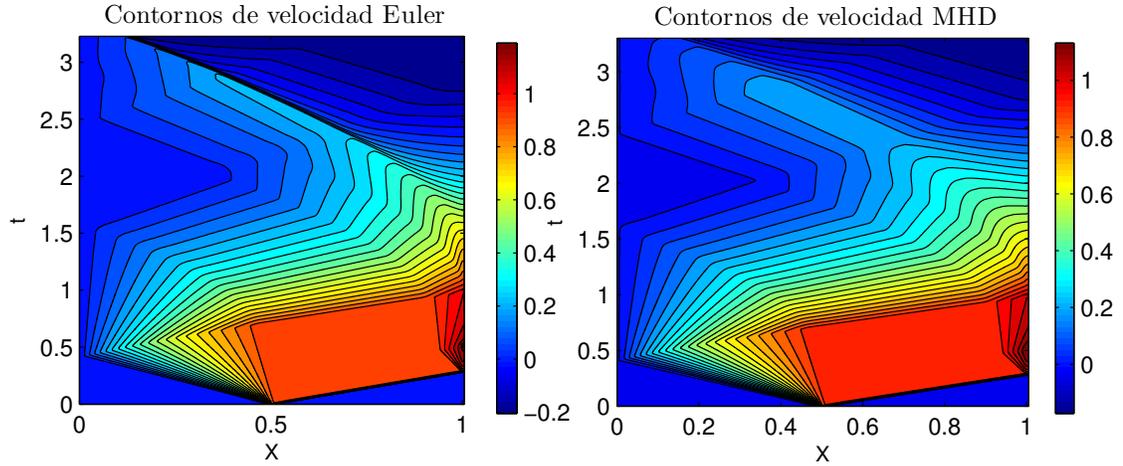


Figura 6.32: Comparación de contornos de velocidad para BCs basadas en características con extremo abierto y  $p_\infty$  impuesta

### 6.3.2. Tubo de choque MHD de Brio y Wu

#### Solución en el dominio

Para validar el correcto funcionamiento del *solver* de Roe para MHD implementado, corrimos el caso del tubo de choque MHD de (Brio y Wu, 1988). Este tubo de choque se basa en el test de Sod, con la diferencia de que se agrega una discontinuidad en una de las componentes transversales del campo magnético  $\mathbf{B}$ . Las condiciones iniciales para este caso son:

$$\begin{aligned} [\rho, u, v, w, B_y, B_z, p]_l &= (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1) \\ [\rho, u, v, w, B_y, B_z, p]_r &= \left(\frac{1}{8}, 0, 0, 0, -1, 0, \frac{1}{10}\right) \end{aligned}$$

En este caso empleamos un exponente isoentrópico  $\gamma = 1,4$ , y campo magnético normal  $B_x = 0,75$  para un fluido modelo con  $R = 1$ , de acuerdo a lo propuesto por (Cargo y Gallice, 1997). La solución consiste de tres ondas que viajan hacia la derecha y dos que viajan hacia la izquierda. Hacia la derecha se propagan, de derecha a izquierda:

- Un abanico de expansión magnetosónico rápido, de muy baja intensidad
- Un choque magnetosónico lento
- Una discontinuidad de contacto gasdinámica

Hacia la izquierda se propagan

- Un abanico de expansión magnetosónica rápido
- Una *onda compuesta* magnetosónica lenta, consistente de un choque adherido a una expansión.

La discontinuidad en la componente  $B_y$  del campo magnético produce la onda compuesta anteriormente mencionada. Ésta es una estructura de onda propia del sistema MHD; aparece en esta condición porque el sistema MHD es *no convexo*. Cuando  $B_y$  se hace nulo la onda magnetosónica lenta cambia de carácter, como lo explican (Brio y Wu, 1988; Goedbloed y Poedts, 2004). Para una discusión más profunda de las distintas estructuras de ondas posibles en MHD puede consultarse la tesis de (Yalim, 2008) y sobre las posibles soluciones del problema de Riemann en MHD en el trabajo de (Takahashi y Yamada, 2013).

Como primera medida, verificamos que el esquema resuelva correctamente las ondas que ocurren dentro del dominio. Corrimos un primer caso empleando 400 celdas de longitud  $L = 2$  y número  $CFL = 0,5$ . En la Figura 6.33 se muestran los resultados obtenidos para distintos intervalos de tiempo. Los resultados se comparan con la solución para  $t = 80$  con 800 celdas y  $CFL = 0,9$  extraída del trabajo de (Cargo y Gallice, 1997).

Se observa que el código captura las cinco ondas del sistema, por lo que se comporta adecuadamente para resolver casos inestacionarios. Además se observa que la difusión introducida por el integrador implícito no es excesiva, no siendo necesario el uso de compresibilidad artificial.

Además, como el solver de Riemann empleado se basa en promedios de Roe exactos, cumple de forma exacta la condición de Rankine-Hugoniot de conservación a través de discontinuidades. Esto hace que no aparezcan resultados espurios para la velocidad  $w$  y para el campo magnético  $B_z$  (que deben mantenerse iguales a cero durante toda la simulación). Esto no ocurre con solvers de Riemann aproximados que usan promedios aritméticos.

## Condiciones de contorno

Una vez que verificamos que el algoritmo resuelve correctamente la solución dentro del dominio, analizamos lo que ocurre cuando las ondas interactúan con distintos tipos de contorno. Para ello comparamos las soluciones obtenidas con el esquema de BCs basado en características con las obtenidas con condiciones de extrapolación de orden cero. Nuevamente, comparamos los resultados para un contorno de pared cerrada y un contorno abierto de presión constante. Para el caso del test de Brio y Wu la conservación de la componente normal del campo magnético  $B_x$  y de la divergencia del mismo en el contorno se satisfacen automáticamente, ya que  $B_x = \text{cte}$  también en los contornos.

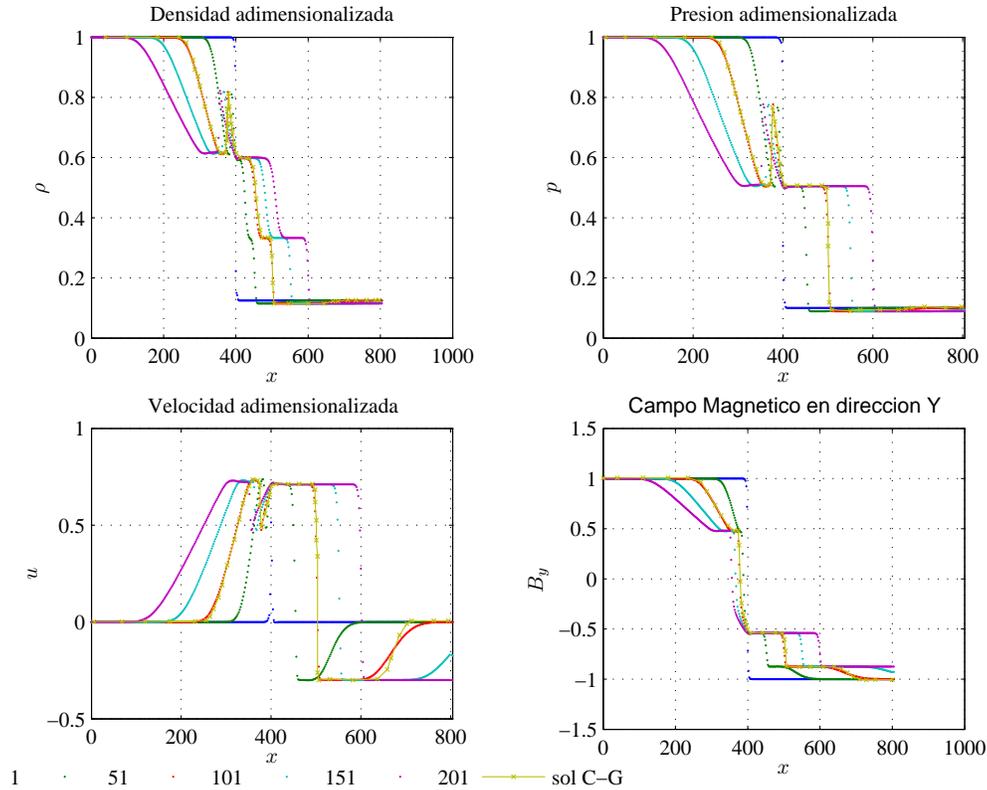


Figura 6.33: Tubo de choque MHD

**Pared cerrada** Comparamos las condiciones extrapoladas, implementadas de la misma manera que para el modelo gasdinámico (mediante la Ec. (6.27)), con las del esquema característico. Implementamos la condición de velocidad nula en el contorno mediante las Ecs. (5.72) y (5.73). Para las demás ondas implementamos condiciones de no reflexión, de manera similar a lo realizado con las condiciones extrapoladas.

La Figura 6.34 muestra los perfiles de densidad obtenidos para distintos instantes:  $t = 0,2$ ,  $t = 0,4$  y  $t = 0,6$ .

Se observa que para el instante  $t \approx 0,15$  el abanico de expansión magnetosónico rápido que viaja hacia la derecha llega a la pared, y es reflejado de manera correcta por ambos esquemas. Se observa que para  $t = 0,2$  existe una onda de expansión que viaja desde la pared hacia el interior, a pesar de que su intensidad es muy pequeña.

Sin embargo, en los instantes de tiempo siguientes aparecen diferencias entre los resultados asociados a cada esquema. Encontramos que las mencionadas discrepancias ocurren

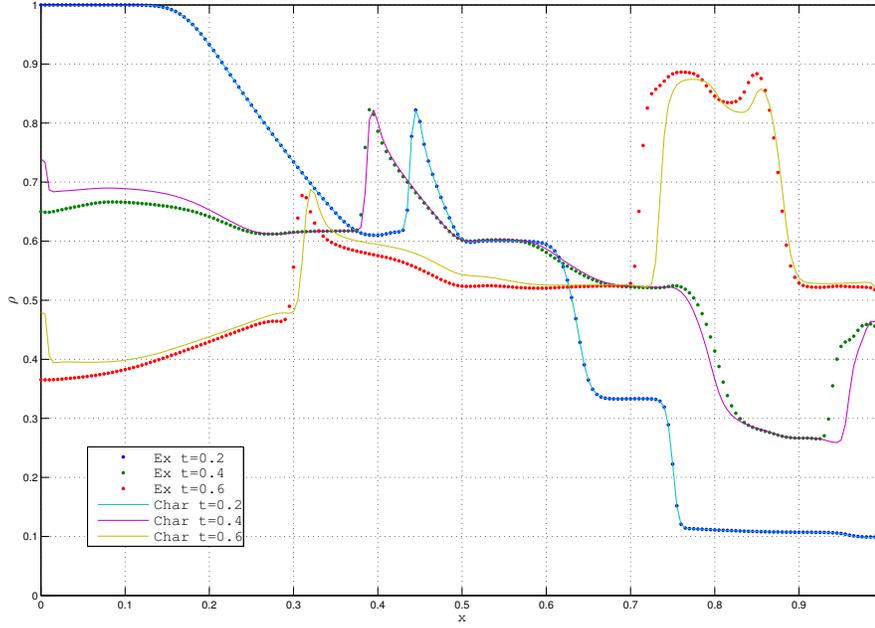


Figura 6.34: Perfiles de densidad asociados a esquemas de BCs extrapolado y característico en distintos instantes de tiempo

cuando ondas que transportan perturbaciones en la componente transversal del campo magnético  $B_y$  interactúan con las paredes. Esto puede observarse claramente en la Figura 6.35, y además este comportamiento también se observa para la componente transversal de la velocidad  $v$ .

Creemos que las diferencias mencionadas pueden explicarse en virtud de una restricción implícita que impone el esquema extrapolado de BCs. Como anteriormente discutimos, la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección  $y$  se encuentra acoplada sólo con la componente en  $y$  de la ecuación de la inducción, pero ambas están desacopladas de sus componentes análogas en la dirección  $z$ . Estas ecuaciones pueden expresarse en variables primitivas como:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{B_x}{\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial B_y}{\partial t} + B_y \frac{\partial u}{\partial x} - B_x \frac{\partial v}{\partial x} + u \frac{\partial B_y}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (6.31)$$

Para imponer una pared sólida es necesario que  $u_{m+1} = -u_m$ , pero todas las demás variables se extrapolan, o sea  $v_{m+1} = v_m$ ,  $B_{y_{m+1}} = B_{y_m}$ . Esto implica que todas las

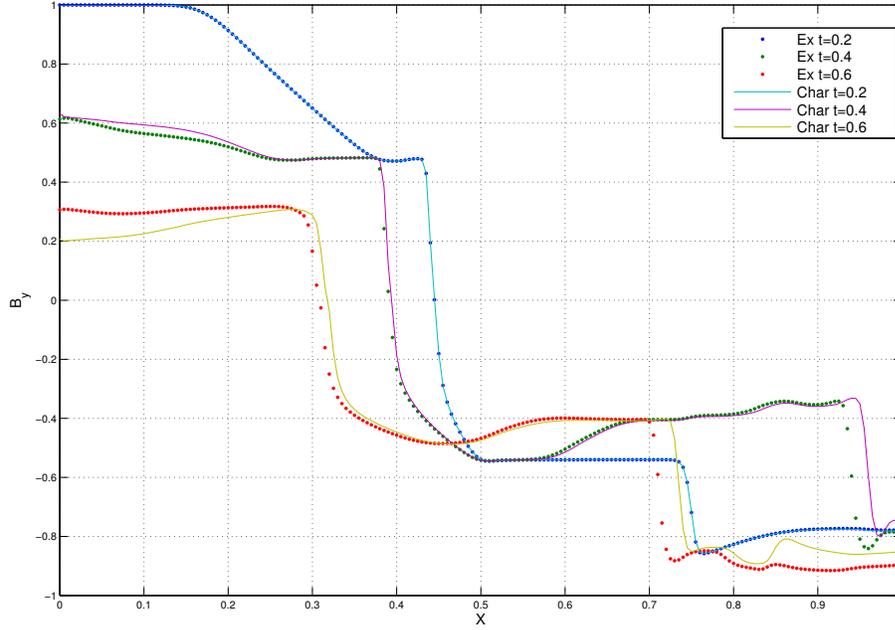


Figura 6.35: Perfiles de campo magnético transversal  $B_y$  para esquemas de BCs extrapolado y característico en distintos instantes de tiempo

variables tienen derivada espacial nula, salvo la velocidad  $u$ . La derivada de la velocidad respecto a  $x$  en la interfaz entre la última celda del dominio (celda  $m$ ) y la primera del contorno derecho (celda  $m + 1$ ) puede estimarse como:

$$\frac{\partial u}{\partial x_m} \approx 2 \frac{u_m}{\Delta x} \quad (6.32)$$

Luego, teniendo en cuenta las Ecs. (6.31), la evolución temporal de  $B_y$  en la mencionada interfaz queda determinada por:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} \approx -B_y \frac{2u_m}{\Delta x} \quad (6.33)$$

Esto demuestra que la extrapolación impone condiciones sobre  $B_y$ , que en general son diferentes por la evolución temporal obtenida en función de los operadores  $\mathcal{L}$ , dada por la Ec. (5.67e). Creemos que la restricción dada por esta última relación es más consistente porque está basada en satisfacer las relaciones de conservación en el contorno. La perturbación en

$B_y$  es a su vez transmitida a  $v$  debido al acoplamiento anteriormente explicado. Además, el valor inicial de  $B_y$  en el test de Brio y Wu contribuye significativamente a la energía total  $\rho e_t$  del sistema. Por esta razón, una diferencia en  $B_y$  produce una diferencia significativa en la densidad y la presión. La Figura 6.36 muestra los distintos patrones de ondas obtenidos para ambos esquemas.

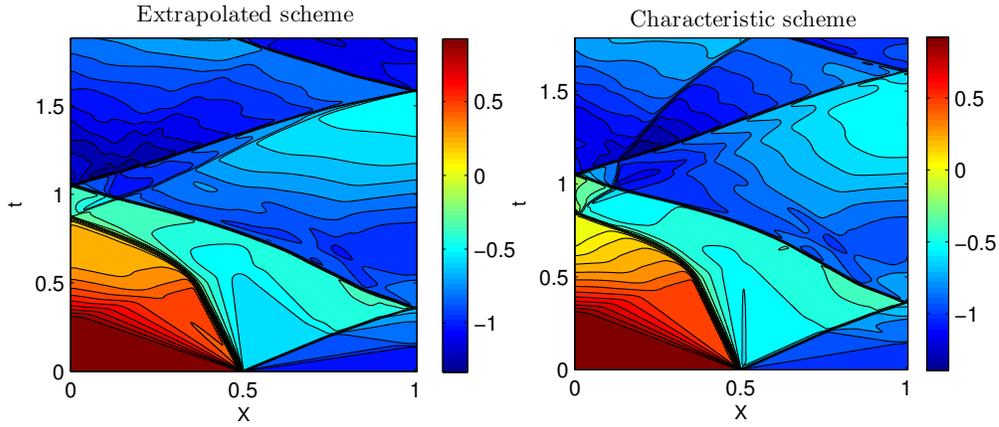


Figura 6.36: Comparación de contornos de  $B_y$  constante para el test de Brio y Wu con pared cerrada

### Extremo abierto

En este caso consideramos que el plasma sale a una región de estancamiento, donde la presión  $p$  y la componente normal del campo magnético  $B_x$  son constantes en todas partes.

Este caso presentó varias dificultades desde el punto de vista numérico, tanto para el esquema de BCs de extrapolación como para el esquema característico. Para la implementación del esquema extrapolado debe hacerse una distinción a priori: si el flujo a la salida es súper magnetosónico rápido, o sea  $u > c_f$ , entonces todas las variables conservadas deben ser extrapoladas. Pero si el flujo es sub magnetosónico rápido debe imponerse al menos una condición. Elegimos imponer un valor en la presión  $\bar{p}$  a través de la energía total  $\rho e_t$ .

$$\begin{cases} \rho e_{tm+1} = \frac{\bar{p}}{\gamma-1} + \frac{1}{2}\rho(u_{m+1}^2 + v_{m+1}^2 + w_{m+1}^2) + (B_{xm+1}^2 + B_{ym+1}^2 + B_{zm+1}^2) \\ \text{si } u < c_f \end{cases} \quad (6.34)$$

$$\begin{cases} \rho e_{tm+1} = \rho e_{tm} & \text{si } u > c_f \end{cases} \quad (6.35)$$

Todas las demás variables se extrapolan.

Comp primera medida, probamos el esquema que impone  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ , dado por la Ec. (5.69). Funcionó adecuadamente hasta que el choque magnetosónico lento alcanzó la salida. Cuando ello ocurrió, a pesar de que la presión se mantuvo constante en el contorno, la evolución de otras variables del sistema llevó a que el flujo se vuelva súper magnetosónico rápido en las celdas del contorno. Una vez que el flujo se volvió súper magnetosónico rápido la presión comenzó a incrementarse en el tiempo, hasta que el flujo se volvió una vez más submagnetosónico rápido. Cuando esto ocurre, el esquema  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  vuelve a imponer una condición sobre la conservación del valor de la presión, pero conservando el nuevo valor. Esto produce que eventualmente la simulación colapse.

Es decir, ocurrió un fenómeno similar al de la salida supersónica para el problema gasdinámico, a pesar de que en este caso se trata de un choque magnetosónico lento. Este resultado sugiere que quizás la condición de no reflexión para la onda magnetosónica no sea la más apropiada. Sin embargo, no es sencillo determinar cuál es la solución físicamente correcta, ya que este caso es difícil de implementar experimentalmente. Además, no queda claro sobre qué variable debe imponerse qué condición, debido a la complejidad del problema.

Para salvar esta dificultad empleamos también el esquema que impone presión en el “campo lejano”, dado por la Ec. (5.43). Sin embargo, este esquema debió ser nuevamente modificado para representar los mismos patrones de ondas antes de que el flujo se torne magnetosónico rápido (antes de que el choque magnetosónico lento llegue a la salida). Para ello fue necesario establecer un valor para  $\sigma = 25000$ . En las Figuras 6.37 y 6.38 mostramos contornos de densidad y velocidad constantes respectivamente, obtenidos con los esquemas basados en características que conservan  $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$  y  $p_\infty$ . Se observa que la expansión magnetosónica rápida que viaja hacia la derecha casi no se percibe por su pequeña intensidad.

Por otro lado, comparamos el esquema basado en características para  $p_\infty$  con el esquema de BCs extrapoladas. En las Figuras 6.39 y 6.40 comparamos los contornos de densidad y velocidad obtenidos.

El esquema extrapolado también produjo inestabilidades en el contorno derecho, y empleando este esquema también obtuvimos flujo magnetosónico rápido una vez que el choque magnetosónico llegara a la salida. Sin embargo, la simulación no colapsó, gracias a que el esquema extrapolado impone de facto el valor inicial de la presión en el contorno, una vez que el flujo vuelve a ser submagnetosónico lento.

Nuevamente, los patrones de ondas obtenidos con ambos esquemas de BCs difieren,

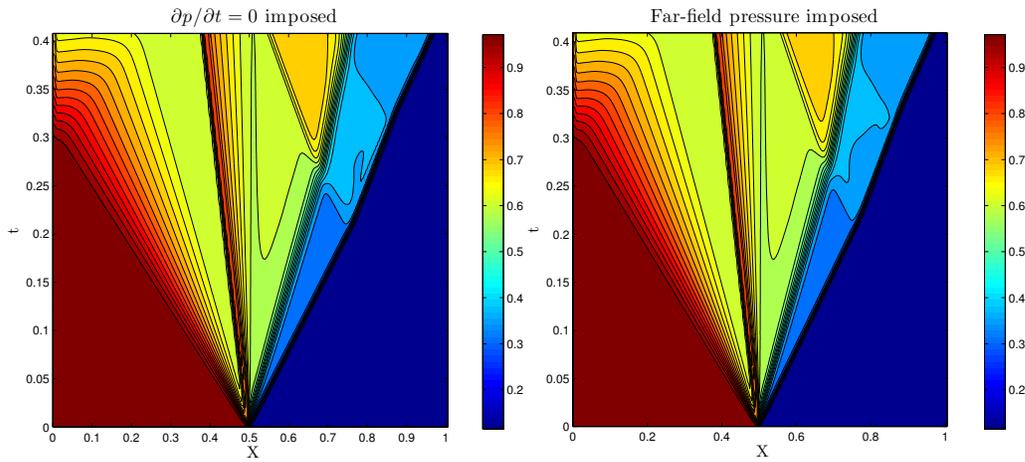


Figura 6.37: Comparación de contornos de densidad del test de Brio-Wu con extremo abierto para esquemas de BCs basados en características

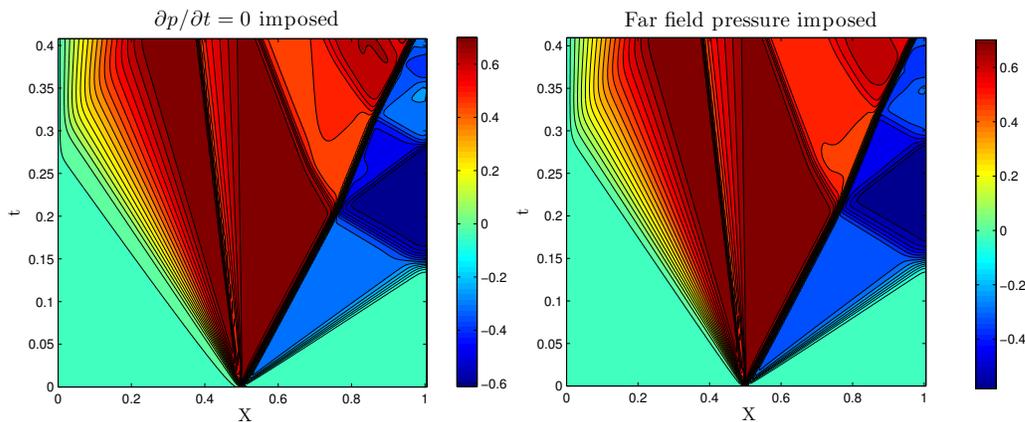


Figura 6.38: Comparación de contornos de velocidad del test de Brio-Wu con extremo abierto para esquemas de BCs basados en características

especialmente en la región afectada por la reflexión del choque magnetosónico lento. Sin embargo, esta imposición abrupta de la presión por parte del esquema extrapolado hace que el algoritmo interprete que existe una discontinuidad en el contorno, lo cual creemos no es físicamente correcto. En cambio, el esquema basado en características produce siempre soluciones más suaves y estables en el tiempo, con cambios que ocurren más gradualmente. Podemos observar estos fenómenos en la Figura 6.41. Además, el esquema basado en características muestra más reflexiones de ondas desde el contorno derecho, sobre todo después

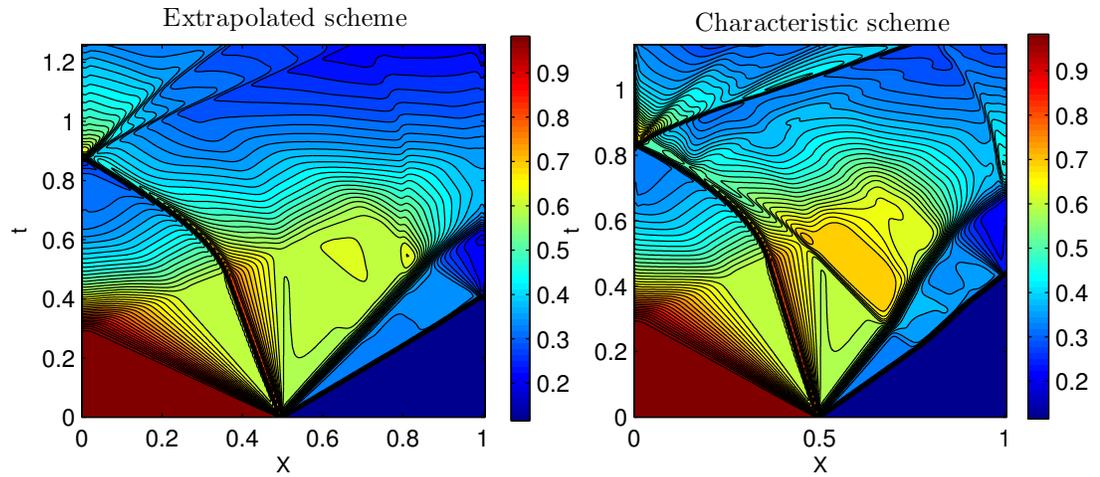


Figura 6.39: Comparación de contornos de densidad entre BCs extrapoladas y basadas en características para el test de Brio-Wu con extremo abierto

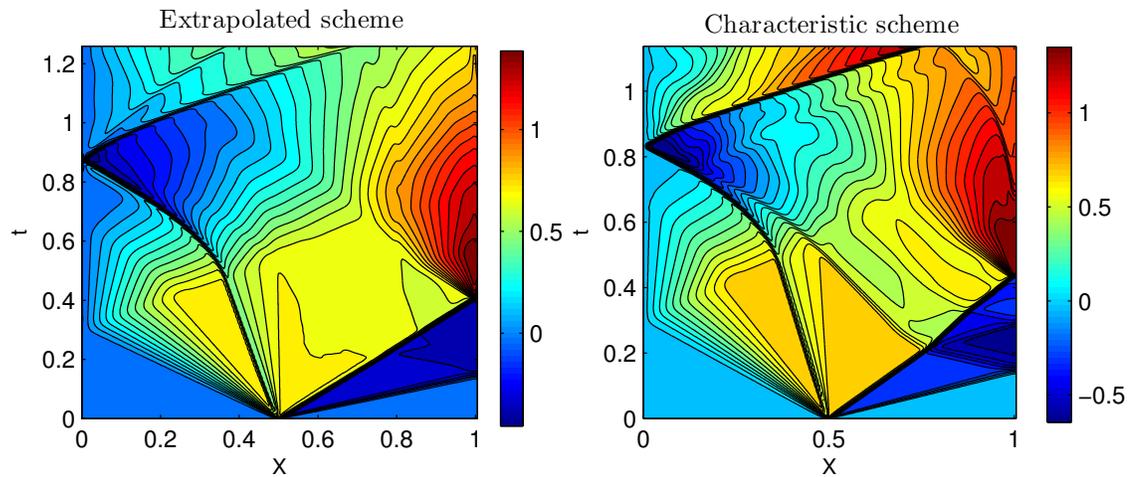


Figura 6.40: Comparación de contornos de velocidad entre BCs extrapoladas y basadas en características para el test de Brio-Wu con extremo abierto

de la interacción entre la discontinuidad de contacto con el contorno abierto.

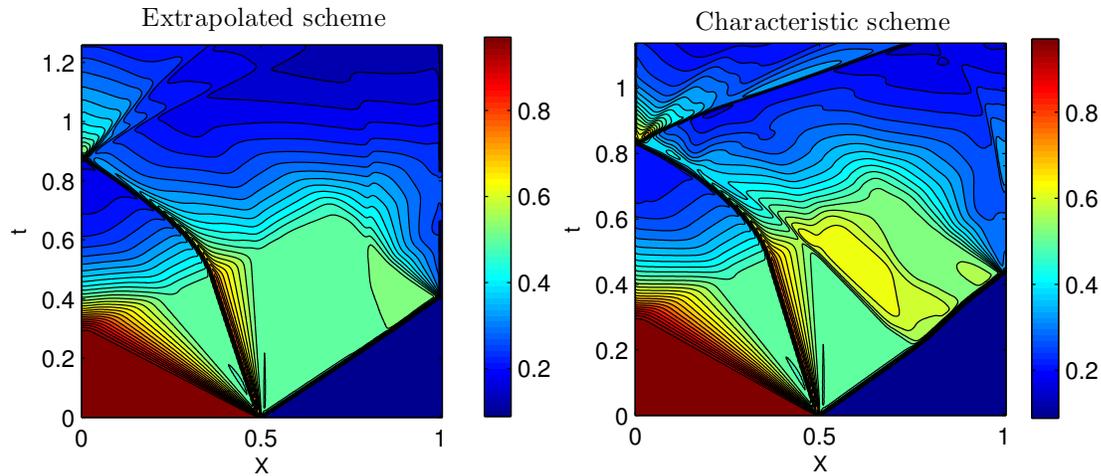


Figura 6.41: Comparación de contornos de presión para esquemas de BCs extrapoladas y basadas en características para una salida de presión constante

## 6.4. Arcos magnéticos con perturbaciones

Finalmente, empleamos las herramientas desarrolladas en esta tesis para analizar arcos magnéticos de la corona solar sometidos a perturbaciones de distintos tipos. Generalmente la información que se posee sobre la dinámica de los arcos coronales se obtiene mediante telescopios que miden en el espectro EUV SXR. Ellos permiten determinar indirectamente la densidad a través de la medición de emisión diferencial de radiación en dichas bandas de frecuencias (Handy et al., 1999; Ogawara et al., 1991). De acuerdo a observaciones existen ondas que se propagan dentro del arco, conocidas como brillantamientos, que se manifiestan como emisiones más intensas. Dichos brillantamientos fueron interpretados originalmente como flujo de plasma “congelado” al campo magnético debidos a efectos anisotrópicos en el ingreso de energía desde la cromósfera (Nakariakov y Verwichte, 2005). Se asociaba a las observaciones a ondas magnetoacústicas con velocidad inferior a la de Alfvén. Estas perturbaciones se propagan desde la base hacia arriba, con períodos de entre 5 y 20 minutos, con intensidades que van decayendo a medida que la onda se acerca al ápice. Las ondas que descienden desde el ápice hacia abajo son de menor intensidad, debido a los mecanismos de difusión. Sin embargo, de acuerdo a (Borgazzi y Costa, 2005) también se han observados eventos en espectro EUV donde los brillantamientos se propagan desde arriba hacia las bases, para luego rebotar hacia arriba con una intensidad aún mayor. Los brillantamientos estudiados en el trabajo anteriormente citado mostraron un aumento en

las emisiones de un 60 % para el telescopio MICA y un 100 % para el TRACE. Como la intensidad de emisión diferencial es proporcional a la densidad de partículas al cuadrado, podría esperarse que para cambios de densidad del orden de un 40 % a través de una onda, ésta podría ser detectada como abrillantamiento.

En el trabajo de (Fernandez et al., 2009), investigadores del grupo de trabajo propusieron que los abrillantamientos pueden explicarse como ondas de choque que se propagan debido a deposiciones repentinas de energía. Dichas deposiciones se modelaron como incrementos locales de presión. El modelo empleado consideraba al sistema como adiabático, asumiendo que las pérdidas de energía por radiación eran compensadas por el transporte de calor por conducción y el efecto del calentamiento, tanto local como globalmente. Sin embargo, no pudo lograrse que el modelo reprodujera el rebote de las ondas desde la base, una vez que incidían sobre los contornos.

En la presente tesis extendimos y enriquecimos el modelo anterior, tomando condiciones iniciales más realistas basadas en soluciones hidrostáticas con términos fuente en equilibrio adiabático. Tomamos como modelo inicial el arco hidrostático de  $L = 40 \cdot 10^3$  km y calentamiento uniforme de la Sección 6.2, y lo sometimos a distintas perturbaciones:

- Incremento en la cantidad de calor introducido, manteniendo una distribución homogénea.
- Incremento en la cantidad de calor introducido, concentrando la deposición en las bases o en el ápice.
- Perturbaciones en la distribución inicial de presión.

En todos los casos se partió de condiciones iniciales basadas en la solución hidrostática, y se emplearon tanto el modelo gasdinámico como el modelo MHD. Para el modelo MHD empleamos un valor del campo magnético longitudinal de  $B_x = 20$  G y componentes transversales nulas. Dichas componentes del campo magnético son nulas ya que los arcos coronales son estructuras fuertemente dominadas por el campo magnético, donde las líneas de campo son tangentes al vector velocidad.

Sin embargo, en ausencia de componentes transversales en el campo magnético y con valor de la velocidad de Alfvén  $c_a$  mayor a la velocidad del sonido  $a$  el sistema MHD degenera en un sistema similar al gasdinámico, como describen (Roe y Balsara, 1996) en la Ec. (3.155). En este caso la onda magnetosónica lenta se transforma en una onda sónica, y la onda magnetosónica rápida en una onda de Alfvén trivialmente nula. Por esta razón, el sistema de ondas es idéntico al gasdinámico, siendo la única diferencia que el campo

magnético longitudinal  $B_x$  introduce un valor constante adicional en la energía total  $\rho e_t$  del sistema. Y desde el punto de vista numérico, el paso de tiempo se verá reducido debido a que se calcula con la velocidad característica mayor  $|u| + |c_f|$ , que en este caso está asociada a una onda trivial. En las Figuras 6.42 y 6.43 analizamos un tubo de choque con condiciones iniciales adimensionalizadas similares a las del trabajo de (Fernandez et al., 2009), para distintos valores de  $B_x$  y para el caso gasdinámico.

$$\begin{cases} \rho = 1, u = 0 & \forall x \\ p = 0,1 & 0 \leq x \leq 0,4 \wedge 0,6 \leq x \leq 1 \\ p = 1 & 0,4 \leq x \leq 0,6 \end{cases} \quad (6.36)$$

Los valores adimensionalizados que empleamos para el campo magnético longitudinal fueron de  $B_x = 0, 1, 2$ . La solución consiste en dos ondas de choque que viajan hacia los extremos del tubo, con dos ondas de expansión que viajan hacia el centro a medida que las ondas de choque se van desplazando. En el medio la onda de contacto es trivial.

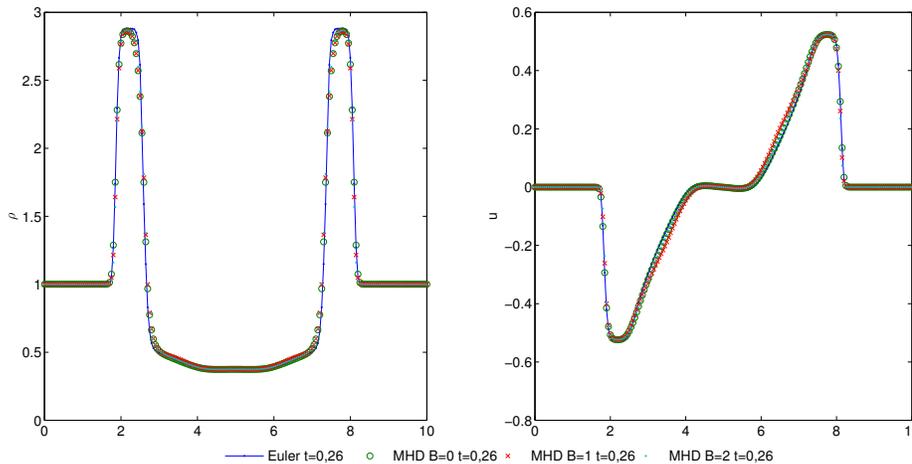


Figura 6.42: Perfiles de densidad y velocidad normal para el tubo de choque (6.36) con distintos valores de  $B_x$

Dichas figuras ponen en evidencia lo explicado anteriormente, esto justifica que muchos autores, como (Müller et al., 2003) empleen modelos gasdinámicos para llevar a cabo simulaciones de arcos unidimensionales. Sin embargo, para modelar problemas en más de una dimensión ya es necesario incluir los efectos de los campos magnéticos, para contemplar efectos locales relacionados a la relación entre la energía y el campo magnético.

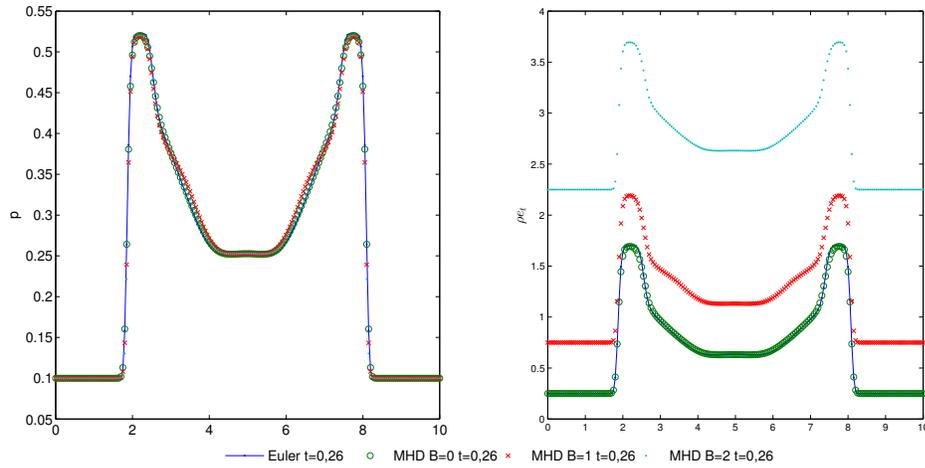


Figura 6.43: Perfiles de presión y energía para el tubo de choque (6.36) con distintos valores de  $B_x$

### 6.4.1. Incremento de calentamiento uniforme

Como primera medida propusimos perturbar la solución hidrostática de (Aschwanen y Schrijver, 2002) para calentamiento uniforme incrementando el valor de la función  $E_H$  por un factor arbitrario  $K_{cal}$ . El factor  $K_{cal}$  toma valores de 2, 5, 10, 15 y 20. En todos los casos empleamos condiciones de contorno basadas en características de entrada con velocidad nula impuesta y de temperatura impuesta a través de la onda asociada a la entropía; las mismas utilizadas en el modelo de convección-difusión compresible (Sección 6.1.3). El dominio de cálculo se discretizó en 200 celdas, con un valor de  $CFL = 0,5$  y  $FO = 0,2$ ; la cantidad de pasos de tiempo varió dependiendo del caso analizado, siendo el valor máximo para  $K_{cal} = 20$  de 300.000 pasos, para lograr una simulación de unos 3500 segundos.

#### $K_{cal}$ menor o igual a 5

Para valores de  $K_{cal}$  menores o iguales a cinco el sistema aumenta rápidamente su temperatura y presión, produciéndose luego un incremento de velocidad que se propaga desde las bases hacia el ápice. Dicho incremento de velocidad produce ondas que a su vez generan fluctuaciones en la presión y la densidad. Eventualmente dichas ondas son amortiguadas, y el sistema llega a una solución de equilibrio hidrostática. En la Figura 6.44 mostramos los perfiles de temperatura y densidad estacionarios para  $K_{cal} = 1, 2, 5$ . Graficamos sólo la mitad del arco,  $0 \leq x \leq L$  debido a que las soluciones estacionarias son

simétricas. En la Figura 6.45 los perfiles de velocidad para distintos instantes de tiempo en el dominio normalizado  $0 \leq x/L \leq 2$  para resaltar el carácter antisimétrico de los perfiles de velocidad.

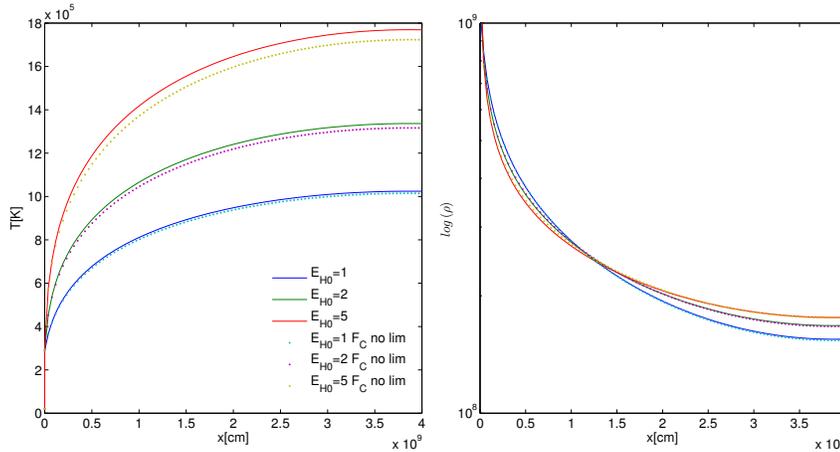


Figura 6.44: Perfiles de temperatura y densidad estacionarios para arcos coronales con  $K_{cal} = 1, 2, 5$  y  $s_H = \infty$

Se observa que para estos casos el modelo de conducción térmica (limitado o no limitado) no tiene mucha influencia en la solución de equilibrio estacionario. Creemos que esto se debe a que el gradiente de temperatura más grande se encuentra en la región de las bases y la cantidad de calor aportada por  $E_H$  no llega a ser suficiente para generar temperaturas mucho más elevadas, por lo que el valor de  $Q_{cond}$  en la mayor parte del dominio es mucho menor que el valor de saturación  $Q_{sat}$ .

Las perturbaciones en la velocidad originalmente poseen forma de pico, pero luego de recorrer varias veces el arco toman una forma similar a una senoide. Creemos que la difusión juega un papel fundamental para hacer que las ondas mencionadas posean esa forma más suave. Su amplitud se incrementa durante los primeros 200 segundos hasta alcanzar un valor máximo, para luego amortiguarse. Resulta llamativo además que la velocidad crece sólo en el sentido desde la base hacia el ápice, existiendo velocidades mucho menores en la dirección descendente para  $K_{cal} = 2$  y siendo las velocidades ascendentes mucho mayores que las descendentes para  $K_{cal} = 5$ . Creemos que esto puede explicarse debido al efecto de la conducción térmica: en la dirección descendente el sistema transporta energía de forma más eficiente por conducción térmica que por efectos convectivos. Esta idea es apoyada por la Figura 6.45, donde se observa que las velocidades descendentes para el flujo de calor

no limitado son mayores que aquellas para el modelo con flujo limitado ( $t = 600$  s). Este resultado además estaría de acuerdo con lo que discuten (Nakariakov y Verwichte, 2005) en su trabajo sobre la menor intensidad de las ondas descendientes.

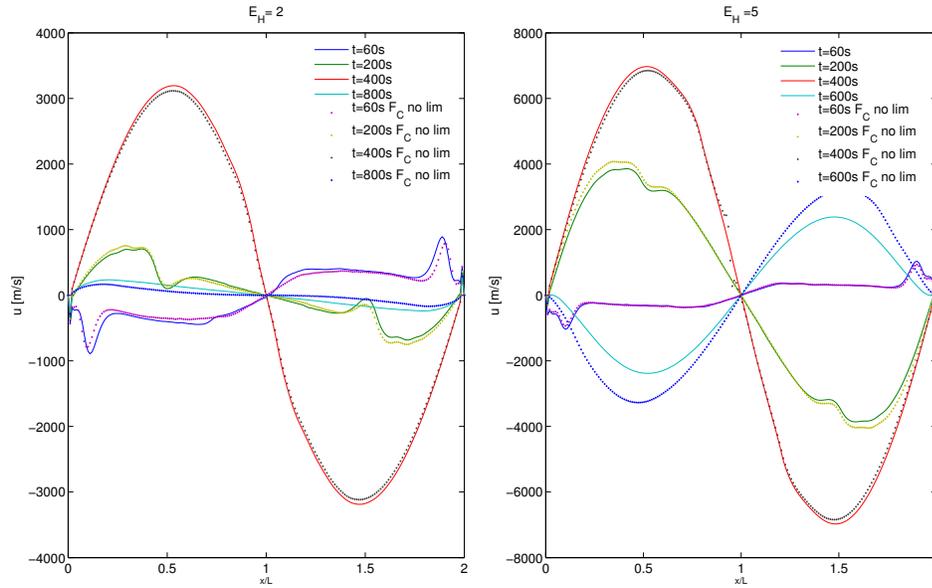


Figura 6.45: Perfiles de velocidad para arcos coronales con  $K_{cal} = 2, 5$  y  $s_H = \infty$

Si bien el proceso de evolución del sistema es complejo, pueden verse algunas características del mismo si graficamos la evolución temporal de la velocidad y la presión en algún punto representativo. Para ello graficamos  $u$  en  $x = L/2$ , donde se produjeron los máximos de las velocidades, y la presión, densidad y temperatura en el centro del arco, esto es  $x = L$ . Dichos resultados se muestran en la Figura 6.46. En esta figura también se evidencian los fenómenos discutidos anteriormente: el rápido incremento de la temperatura, reflejado en la pendiente de la curva de la presión, las oscilaciones asimétricas de la velocidad (más marcadas cuanto menor sea  $K_{cal}$ ) y su eventual amortiguamiento. Suponemos que el principal efecto causante del amortiguamiento es la fuga de calor por las bases, que disipa la energía de las ondas mecánicas que se propagan hacia arriba cuando éstas retornan hacia las bases.

A pesar del efecto de amortiguamiento, existe una cuasi periodicidad en el fenómeno ondulatorio observado, y los períodos de las ondas están dentro del margen posible registrado en distintas observaciones. El período de las ondas no es afectado por el modelo de conducción térmica elegido, quizás por las mismas razones por las que la solución

estacionaria no es afectada. Estimamos la velocidad de propagación de las ondas como el cociente entre  $L/2$  y el tiempo en el que ocurre el valor máximo de velocidad para  $x = L/2$  (al que asociamos con el paso de la onda). Al período  $\tau$  lo estimamos determinando el tiempo en el que la velocidad en  $x = L/2$  hace un ciclo completo, es decir, aumenta hasta llegar a un máximo para luego disminuir hasta alcanzar un mínimo, y volver a cero.

$$V_{onda} \approx \frac{L/2}{t_{u_{max}}} \quad (6.37)$$

En la Tabla 6.2 se muestran los períodos y velocidades de ondas obtenidas.

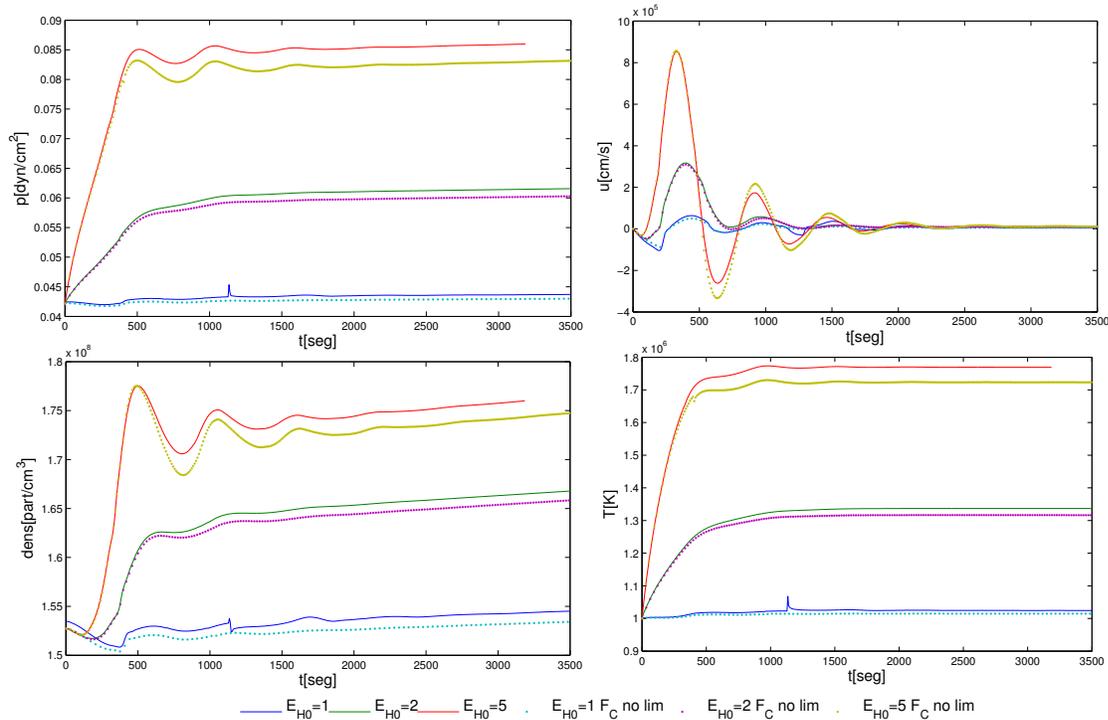


Figura 6.46: Evolución temporal de  $p(x = L)$  y  $u(x = L/2)$  para  $K_{cal} = 2, 5$   $s_H = \infty$

Sin embargo, notamos que los cambios en la densidad a través de la onda para  $K_{cal} = 5$  son del orden del 5% y en la temperatura no se ven cambios apreciables, luego no creemos que dichas ondas puedan asociarse a abrillantamientos. Otra particularidad que notamos es que la temperatura se ve mucho menos afectada por el proceso inestacionario, no así la presión y la densidad. Esta última presenta un incremento constante con muy baja pendiente. Suponemos que cuando se amortiguan las ondas y la temperatura se estabiliza

el sistema es gobernado por un balance de los términos fuente, y el exceso de energía es liberado al exterior por la radiación, haciendo que la densidad crezca lentamente.

En la Figura 6.47 mostramos los términos fuente asociados a la conducción térmica y a las pérdidas por radiación. Se observa que las pérdidas radiativas no son prácticamente afectadas por el incremento de temperatura del sistema. Esto se debe a que la función  $\Lambda(T)$  (Ec. (3.2)) es constante hasta  $T \approx 2 \cdot 10^6$  K, y a partir de ese valor decrece con la temperatura. Además, como la densidad no varía en gran medida, concluimos que cualquier exceso de calor que posea el sistema debe equilibrarse mediante conducción térmica o a través de ondas mecánicas.

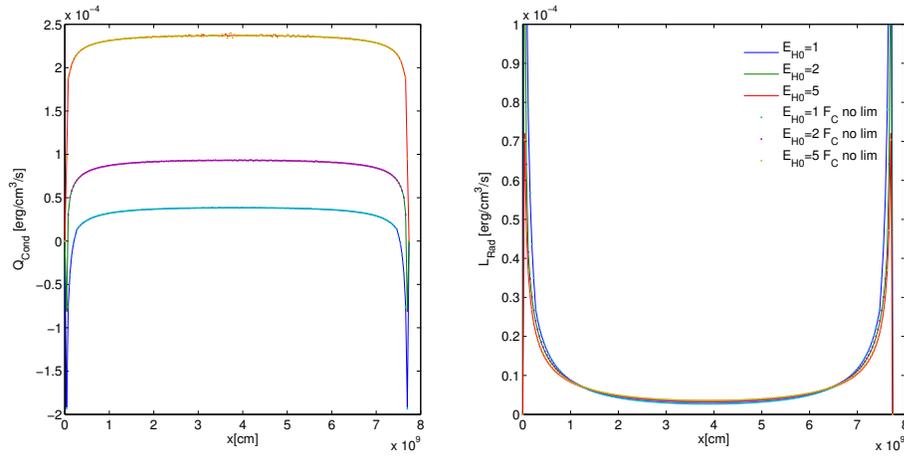


Figura 6.47: Conducción de calor y pérdidas por radiación para  $s_H = \infty$

### $K_{\text{cal}}$ mayor a 5

Cuando el parámetro  $K_{\text{cal}}$  toma valores mayores a 5 las oscilaciones en el arco presentan amplitudes mucho mayores, y las velocidades en la dirección descendente toman valores más cercanos a las velocidades en la dirección ascendente. Se observa que los efectos convectivos tienen mayor importancia, y le toma más tiempo al sistema anteriormente explicada amortiguar las oscilaciones, aunque el sistema termina convergiendo finalmente a un estado similar a una solución hidrostática. Creemos que el sistema no está en un estado estacionario porque los gráficos de convergencia siguen mostrando cambios cada ciertos intervalos de tiempo. Sin embargo, es difícil aseverar si las pequeñas velocidades de las últimas oscilaciones son amortiguadas por la viscosidad numérica del esquema de volúmenes finitos o por

algún proceso físico. En la Figura 6.48 se muestran los perfiles de temperatura y densidad para  $t = 1500$  s de simulación.

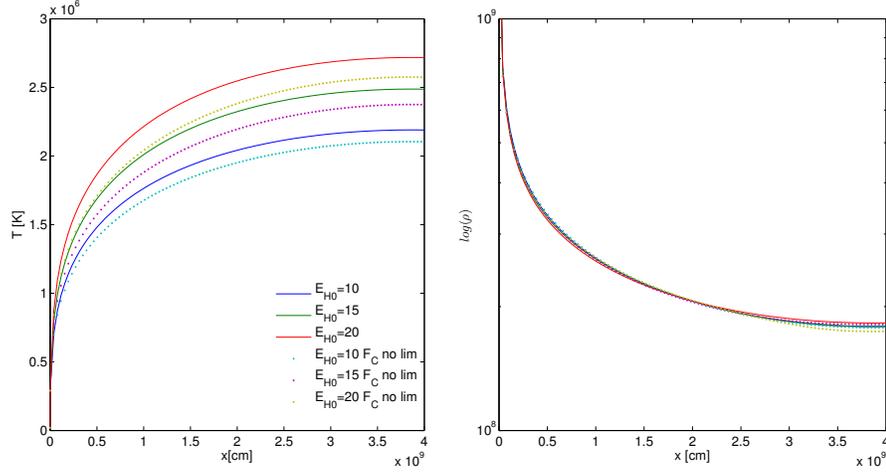


Figura 6.48: Perfiles de temperatura y densidad estacionarios para arcos coronales con  $K_{cal} = 10, 15, 20$  y  $s_H = \infty$

Se observa que el modelo de conducción térmica influye en el valor máximo de la temperatura en el centro del arco. Esto se explica debido a que para el modelo de flujo de calor limitado la cantidad de calor transportada hacia las bases es menor. Luego, el sistema posee más energía en la zona central del arco, que no puede ser evacuada hacia las bases. Además, en esta región el equilibrio entre calentamiento y conducción térmica se produce a temperaturas mayores ya que al estar limitado el flujo de calor es necesario un valor de la conductividad térmica  $\kappa = \kappa_{sp} T^{5/2}$  más elevado.

En la Figura 6.49 se muestran las evoluciones temporales de la presión, densidad y temperatura para  $x = L$  y de la velocidad para  $x = L/2$ .

Como en los casos anteriores, también se observan comportamientos cuasi periódicos en las ondas observadas. Los períodos son más cortos y las velocidades mayores debido a la mayor energía involucrada. Una diferencia notable es que, para valores elevados de  $K_{cal}$  a partir de la segunda oscilación comienza a haber un desfase entre las ondas asociadas a diferentes modelos de conducción térmica. El modelo de flujo de calor limitado produce períodos más cortos pero amplitudes menores. Sin embargo, resulta llamativo que la distribución de densidad a la que converge el sistema no resultara significativamente afectada por la cantidad de calor depositada. A pesar de ello, a través de las ondas ocurren variaciones

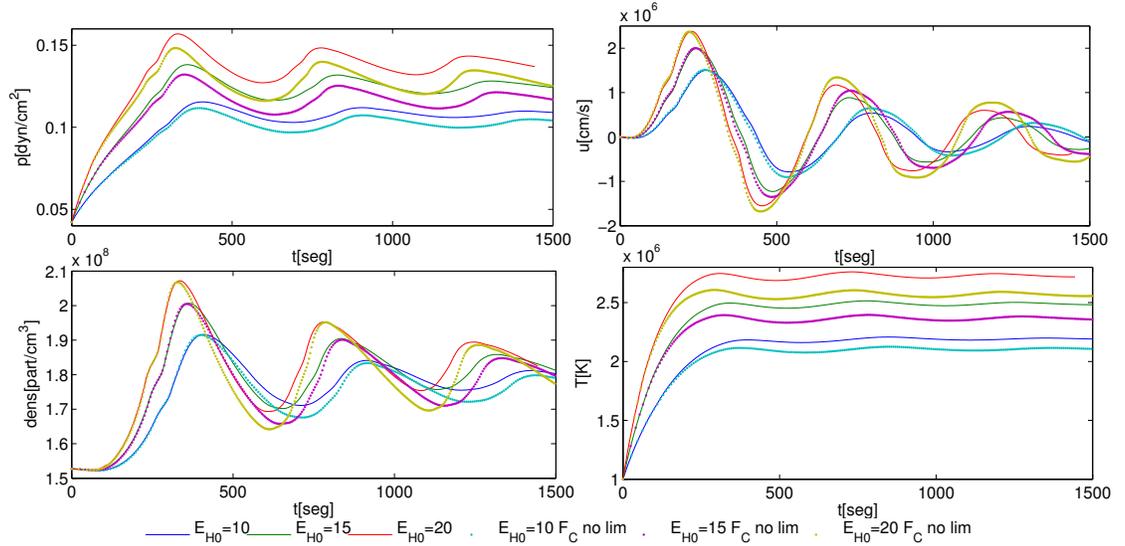


Figura 6.49: Evolución temporal de  $p(x = L)$   $T(x = L)$   $\rho(x = L)$  y  $u(x = L/2)$  para  $K_{cal} = 10, 15, 20$  y  $s_H = \infty$

de entre un 20 a 30 % en la densidad, por lo que podría llegar a analizarse si dichas ondas podrían considerarse abrillantamientos.

En estos casos observamos que las velocidades máximas se incrementan cada vez menos si  $K_{cal}$  toma valores mayores a 10, obteniéndose períodos cada vez más cercanos a un hipotético valor asintótico. Esto permite conjeturar que el sistema llega a un estado de saturación a partir de cierta cantidad de energía introducida. Como en el caso anterior, el

$K_{cal}$	Período $\tau$	$V_{onda}$
2	24 min 4 s	96,9 km/s
5	17 min 36 s	118,6 km/s
10	14min 38 s	140,3 km/s
15	13 min 0 s	157,6 km/s
20	11 min 54 s	169,5 km/s

Tabla 6.2: Períodos y velocidades de ondas estimadas para distintos valores de  $K_{cal}$  con  $s_H = \infty$

modelo de conducción de calor no tiene mayor influencia en las velocidades del sistema. Creemos que esto ocurre porque para estos casos la energía depositada es tan elevada que la convección posee un rol dominante en la dinámica del sistema.

De la misma manera que para los valores de  $K_{cal}$  menores a 5, las pérdidas por radiación

$L_{rad}$  no se vieron influenciadas por la cantidad de calor depositada. Las curvas asociadas al flujo de calor por conducción fueron análogas a las del caso anterior, pero con un valor mayor en la región superior.

### Influencia del modelo de condiciones de contorno

Por otro lado, comparamos los resultados obtenidos con los que obtuvimos con el esquema de condiciones extrapoladas análogas a las empleadas para el tubo de choque con pared sólida (Ec. (6.27)), para evaluar el funcionamiento del esquema característico desarrollado para esta tesis. Los resultados fueron llamativamente diferentes, tanto en la configuración de estado estacionario del sistema, como en las ondas que se formaron durante el transitorio. En la Figura 6.50 se muestran los perfiles de temperatura y densidad para el estado estacionario final.

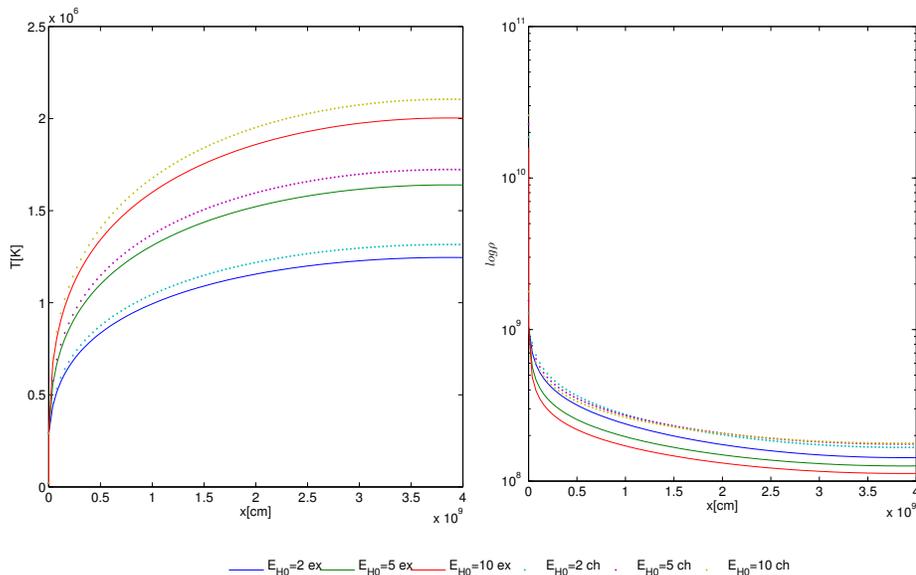


Figura 6.50: Perfiles de temperatura y densidad estacionarios para arcos coronales con  $s_H = \infty$  y diferentes modelos de BCs

Nuevamente, para lograr que el sistema converja a una solución fue necesario establecer la presión y densidad en los contornos, e imponer la condición de velocidad nula en la interfaz de las celdas del dominio con el contorno (mediante la Ec. (5.2)). Esto, como se explicó anteriormente, va en contra de lo que exige la teoría para imponer condiciones

de contorno. Sin embargo, si no se impone la densidad y presión, se obtienen soluciones asimétricas, a nuestro juicio espurias. El esquema extrapolado, al imponer la condición de velocidad nula en las caras, produce una discontinuidad de velocidades en los contornos. Esto induce también discontinuidades en la presión, densidad y temperatura, como si se tratara de una salida supersónica. Este resultado no puede ser físicamente correcto, ya que en todos los casos el estado del sistema en la cromósfera implica condiciones de flujo subsónico. Además, los valores de densidad y presión en el interior del dominio son menores a los obtenidos por la solución paramétrica, contrario a lo que se esperaría debido a que se le está introduciendo energía al sistema y a que la masa debe conservarse. En la Figura 6.51 se muestra una comparación para ambos esquemas de la evolución temporal de  $\rho(x = L)$  y  $u(x = L/2)$ .

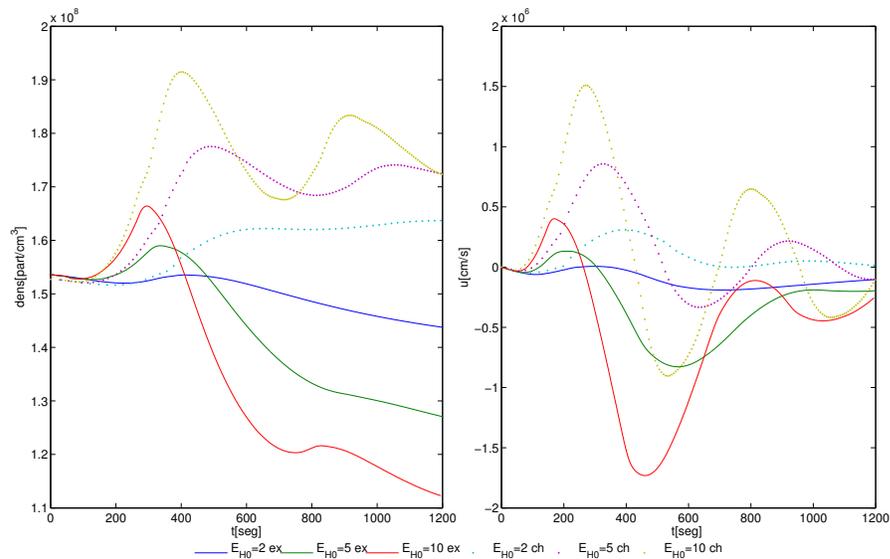


Figura 6.51: Evolución temporal de  $\rho(x = L)$  y  $u(x = L/2)$  para  $s_H = \infty$  y distintos modelos de BCs

Con el esquema extrapolado el sistema converge hacia menores valores de densidad y presión sin mostrar el comportamiento cuasi periódico obtenido con el modelo basado en características. Las perturbaciones de la velocidad para el modelo extrapolado viajan en la dirección opuesta a la del otro modelo de BCs debido a que la discontinuidad de velocidades en el contorno invierte el signo de la velocidad. En la Figura 6.52 se muestran los perfiles de velocidades para distintos instantes de tiempo. Para valores reducidos del parámetro de calentamiento  $K_{cal}$  la componente de velocidad ascendente tomó valores mucho mayores

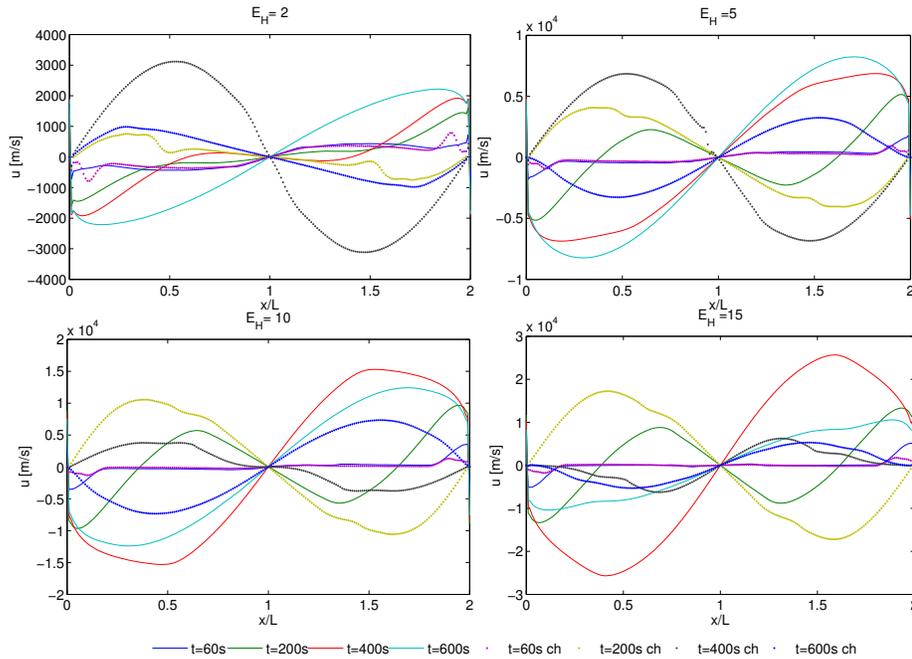


Figura 6.52: Perfiles de velocidad para BCs extrapoladas (línea continua) y características (puntos) con  $K_{cal} = 2, 5, 10, 15$  y  $s_H = \infty$

que la descendente. Para valores mayores de  $K_{cal}$  los perfiles de velocidad resultaron más simétricos. Mientras mayor sea dicho parámetro, más sinusoidal es la forma de la distribución. Incluso, con este modelo de condiciones se obtuvieron velocidades mayores, a pesar de existir gradientes de presión menores. Creemos que esto puede explicarse porque el modelo de BCs extrapoladas no conserva en este caso la cantidad de movimiento: al estar impuesta la densidad en las celdas del contorno y al poseer ésta una velocidad igual y opuesta a las celdas del dominio, existirá un flujo neto de cantidad de movimiento de los contornos hacia el interior del dominio. Este inconveniente no existe con el modelo de BCs basadas en características, que justamente satisface las leyes de conservación. Por estas razones, concluimos que el esquema basado en características produce resultados físicamente más consistentes que el esquema extrapolado.

### 6.4.2. Incremento de calentamiento concentrado en las bases

La siguiente hipótesis que probamos fue considerar un arco de las mismas dimensiones, con idénticas condiciones de contorno, y con una función de calentamiento que deposita

la misma cantidad de energía, pero concentrada en las bases. Empleando el modelo de calentamiento dado por la Ec. (3.15), e igualando a la cantidad de calor depositada por una función de calentamiento uniforme  $\overline{E}_H$ .

$$\overline{E}_H L = \int_0^L E_{H0} \exp\left(-\frac{s}{s_H}\right) ds \quad (6.38)$$

Para el caso de  $s_H = 0,1L$  se obtiene una solución hidrostática mediante la solución paramétrica explicada en la Sección 6.2. Si se emplea dicha solución como condición inicial para el esquema de volúmenes finitos, éste converge rápidamente a un estado estacionario con una temperatura máxima un 20 % mayor, pero con una distribución espacial idéntica. Suponemos que quizás la solución parametrizada no funcione adecuadamente para estos casos extremos. Para este modelo utilizamos el modelo de flujo de calor limitado, ya que produjo períodos más cortos en los casos anteriores (lo consideramos el caso más desfavorable). Además, de acuerdo a la literatura sería el caso físicamente más realista (Petralia et al., 2014).

Analizamos distribuciones de función de calentamiento para  $K_{cal} = 1, 2, 5, 10, 15, 20$  y  $s_H = 0,1L$ . Nuevamente empleamos condiciones de contorno basadas en características con  $T$  y  $u$  impuestas,  $CFL = 0,5$ ,  $FO = 0,2$  y la cantidad de pasos de tiempo suficientes para lograr unos 2000 segundos de tiempo de simulación.

En todos los casos el sistema llega a una condición de pseudo equilibrio, donde la conducción térmica balancea el exceso de energía de la función de calentamiento. Sin embargo, el sistema evoluciona por “escalones”, pasando por distintos estados de pseudo equilibrio y le toma bastante más tiempo alcanzarlo. En la Figura 6.53 se muestran las distribuciones de temperatura y densidad para  $t = 2000$  s.

El efecto de concentrar el calentamiento en las bases lleva a distribuciones de temperatura casi isotérmicas en la parte central del arco, con fuertes gradientes cerca de las bases. Como es de esperarse, las temperaturas máximas son menores que las obtenidas para el caso uniforme a igualdad de energía depositada. Las curvas de densidades para el final de la simulación son similares para todos los casos, presentando algunas ondas que aún se propagan.

Nuevamente el sistema exhibe un comportamiento cuasi periódico, pero con velocidades de propagación de ondas mucho mayores y períodos aún más cortos. Aparecieron perturbaciones en las velocidades que parten desde las bases hacia el ápice del arco, pero para este caso fueron de mayor amplitud y con forma de “diente de sierra”. A medida que el parámetro  $K_{cal}$  fue aumentando, incrementó el valor de las velocidades locales hasta llegar

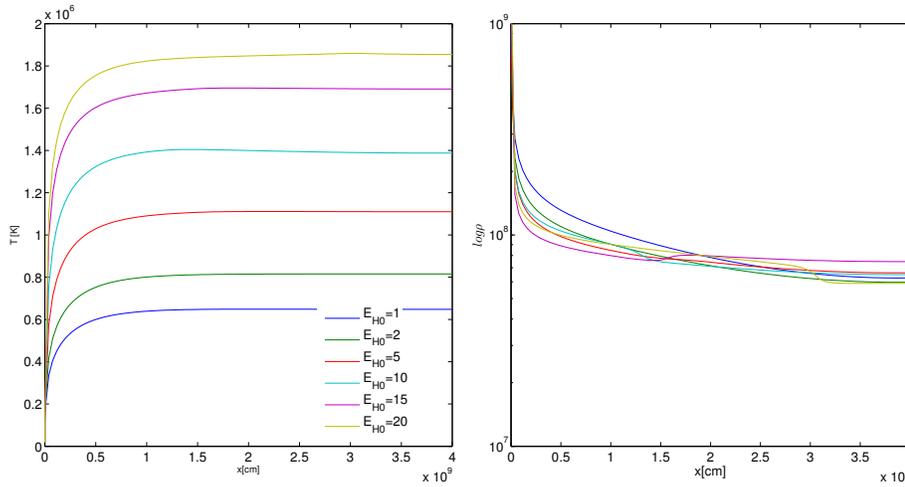


Figura 6.53: Perfiles de temperatura y densidad estacionarios para arcos coronales con  $K_{cal} = 1, 2, 5, 10, 15, 20$  y  $s_H = 0,1L$

a un valor de saturación en la velocidad local del flujo para  $K_{cal} = 15$ . Sin embargo, la velocidad de propagación de las ondas sigue aumentando ligeramente, aunque presumiblemente tendiendo a un valor asintótico como en los casos anteriores. En los primeros instantes de tiempo las ondas se propagaron con la misma velocidad, pero a medida que se produjeron rebotes aparecieron defasajes en las velocidades de propagación. Sin embargo, los valores máximos de las velocidades y presiones fueron inferiores a los del caso con calentamiento uniforme. Las distribuciones de velocidades obtenidas para distintos instantes de tiempo se muestran en la Figura 6.54.

En la Figura 6.55 se muestra la evolución temporal para la presión, densidad y temperatura en  $x = L$  y la velocidad en  $x = L/2$ . Allí pueden observarse los defasajes anteriormente mencionados y los cambios abruptos en la presión y velocidad asociados al paso de una onda. Resulta llamativo que mientras mayor sea la cantidad de calor depositada, más lenta se vuelve la propagación de las ondas luego de los rebotes. Se observa que en estos casos existen cambios significativos en la densidad (del orden de hasta un 100 %) y en la temperatura a través de las ondas, por lo que es posible considerar estas ondas como abrillantamientos. Aunque probablemente el hecho de que la condición inicial no concida con la solución hidrostática a la que converge para  $K_{cal} = 1$ . Los períodos y velocidades obtenidas están cerca del límite inferior de lo que normalmente se acepta en la literatura, y pueden verse en la Tabla 6.3

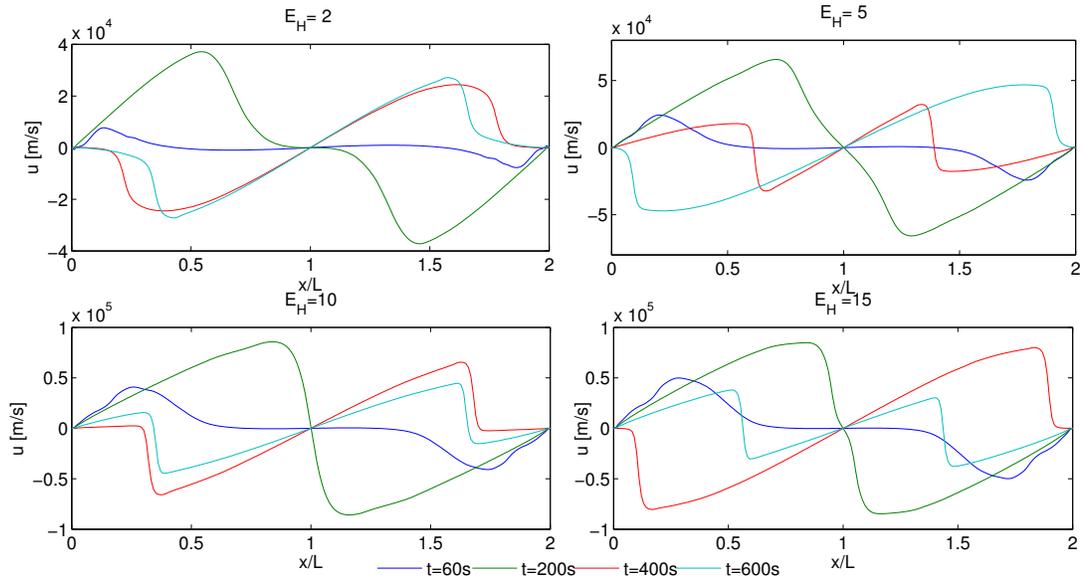


Figura 6.54: Perfiles de velocidad para arcos coronales con  $K_{cal} = 2, 5, 10, 15$  y  $s_H = 0,1L$

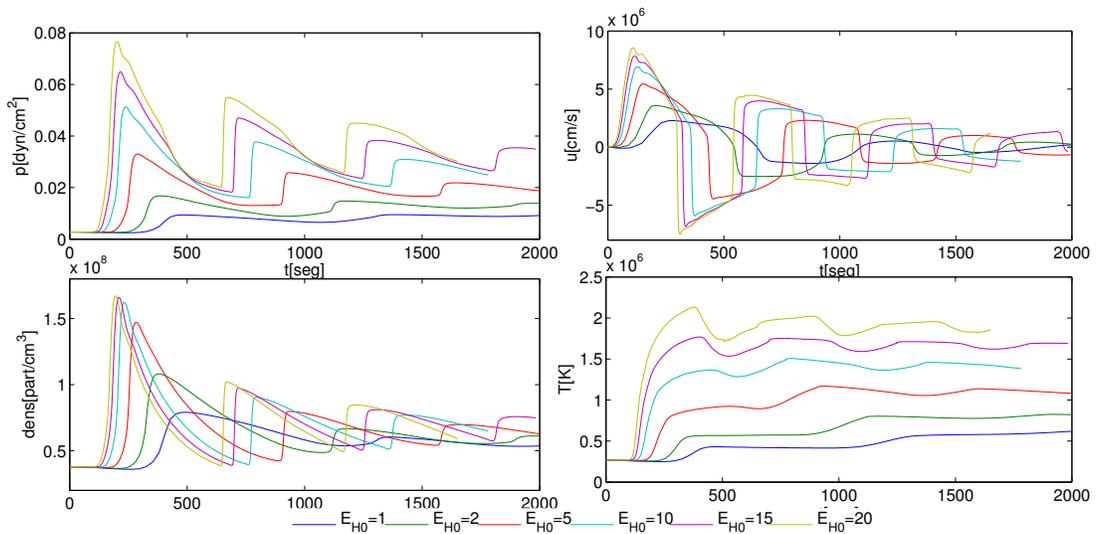


Figura 6.55: Evolución temporal de  $p(x = L)$ ,  $\rho(x = L)$ ,  $T(x = L)$  y  $u(x = L/2)$  para  $K_{cal} = 2, 5, 10, 15$  y  $s_H = 0,1L$

$K_{cal}$	Período $\tau$	$V_{onda}$
2	18 min 20s	189,2 km/s
5	14 min 24s	256,2 km/s
10	12 min 0 s	308,2 km/s
15	10 min 46s	338,3 km/s
20	10min 0 s	359,6 km/s

Tabla 6.3: Períodos y velocidades de ondas estimadas para distintos valores de  $K_{cal}$  con  $s_H = 0,1L$

### 6.4.3. Pulso de presión en el centro del arco

La siguiente hipótesis que probamos fue asumir que el arco sufre una deposición brusca de energía en la zona del ápice. Dicho proceso fue modelado como un incremento discontinuo en la presión para la solución hidrostática de equilibrio, mediante la Ec. (6.39). Las condiciones iniciales para la densidad y la velocidad son las mismas que para el problema hidrostático

$$\begin{cases} p = p_{hidr}, & 0 \leq x \leq 0,4 \wedge 0,6 \leq x \leq 1 \\ p = K_p p_{hidr}, & 0,4 \leq x \leq 0,6 \end{cases} \quad (6.39)$$

En el caso que analizamos usamos  $K_p = 10$ , el mismo valor empleado en el trabajo de (Fernandez et al., 2009). Como en los casos anteriores, modelamos ambos contornos como entradas con velocidad (nula) impuesta y temperatura impuesta. Corrimos  $6 \cdot 10^5$  pasos de tiempo con  $CFL = 0,5$  y  $FO = 0,2$ . También comparamos los dos modelos presentados para el flujo de calor por conducción: el modelo clásico y el modelo limitado, obteniendo resultados muy diferentes en el transitorio. En la Figura 6.56 se muestran los perfiles de presión para distintos instantes de tiempo.

Como en los casos anteriores, se obtuvieron soluciones simétricas para la presión, temperatura y densidad para ambos modelos de conducción térmica. Sin embargo, puede verse claramente que la estructura de las ondas obtenidas son muy diferentes en ambos casos. Para el caso del flujo de calor no limitado, la conducción térmica rápidamente redistribuye la energía originalmente depositada en el centro a toda la región. Luego, la presión se incrementa de forma suave y homogénea en todo el dominio (respetando el gradiente de presión impuesto por la gravedad), hasta llegar a los contornos, donde el sistema elimina energía hacia afuera del dominio.

En la Figura 6.57 se muestran los perfiles de velocidad para los mismos instantes de tiempo. Para el caso de flujo de calor no limitado, se propagan dos ondas de compresión

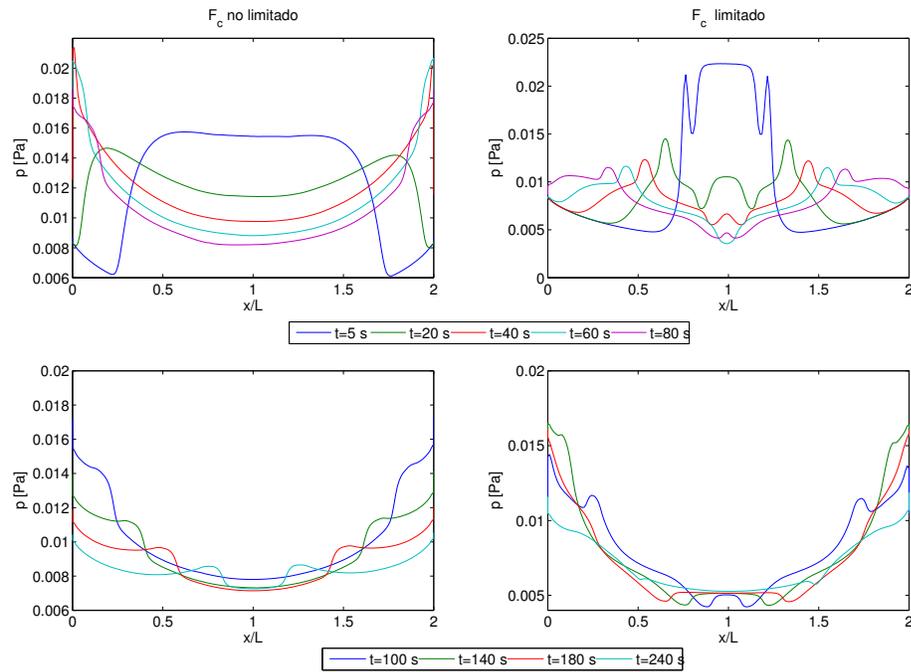


Figura 6.56: Comparación de distribuciones de presión para los diferentes modelos de conducción térmica en distintos instantes de tiempo

hacia los extremos, que no llegan a ser ondas de choque por los efectos de la difusión. El paso de tiempo se encuentra en todos los casos más limitado por la difusión que por la convección, lo que pone en evidencia que la primera es el mecanismo más eficiente de transporte de energía. Las ondas rebotan en los contornos conservando prácticamente la intensidad, aunque a medida que se acercan al centro aumenta su intensidad, probablemente debido al gradiente favorable de presión asociado a la gravedad. Por otro lado, para el modelo de flujo de calor limitado la estructura de ondas es completamente diferente: en el instante inicial la conducción térmica combinada con los efectos convectivos genera una concavidad en la distribución de presiones. Esto hace que se propaguen cuatro ondas de compresión simétricas: dos que se propagan hacia los extremos, y dos que se propagan hacia el centro. En la región central existen dos efectos que compiten: la difusión térmica que disminuye la presión, y las dos ondas de compresión que viajan hacia adentro. Como en los casos anteriores, la difusión térmica tuvo el rol más importante. Sin embargo, dicha limitación reduce significativamente la transferencia de energía en la región próxima a la discontinuidad. Esto lleva a que la convección tenga un rol más importante, apareciendo

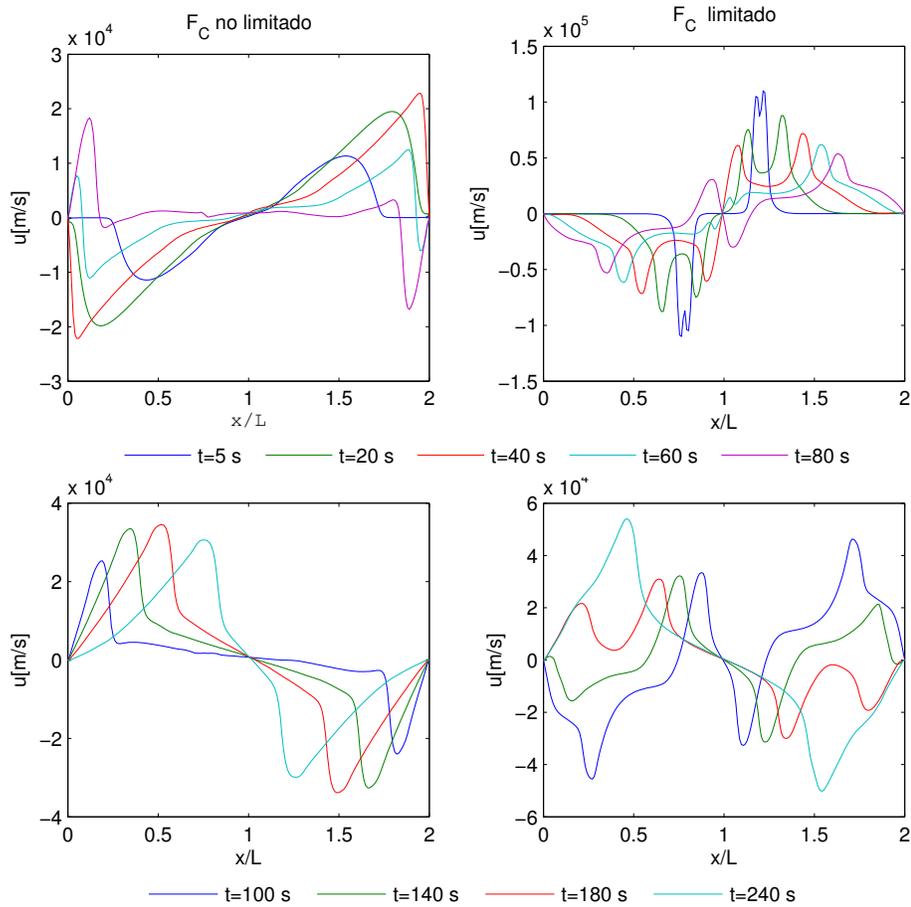


Figura 6.57: comparación de distribuciones de velocidad entre los diferentes modelos de conducción térmica en distintos instantes de tiempo

velocidades con valores del doble que para el caso del flujo no limitado.

Para descartar que los resultados asociados al flujo limitado sean espurios debido a un problema del esquema numérico analizamos el efecto de emplear una discretización espacial de 400 celdas. Los resultados obtenidos para la presión y la velocidad se muestran en la Figura 6.58.

Se observa que para ambas mallas los resultados son casi idénticos, sobre todo la velocidad de propagación del frente de onda. Luego, concluimos que si existe un problema con el método numérico no se debe a la discretización.

Como en los casos anteriores, eventualmente las ondas del sistema terminan siendo amortiguadas y el sistema converge a una solución similar a una hidrostática. Con las tres

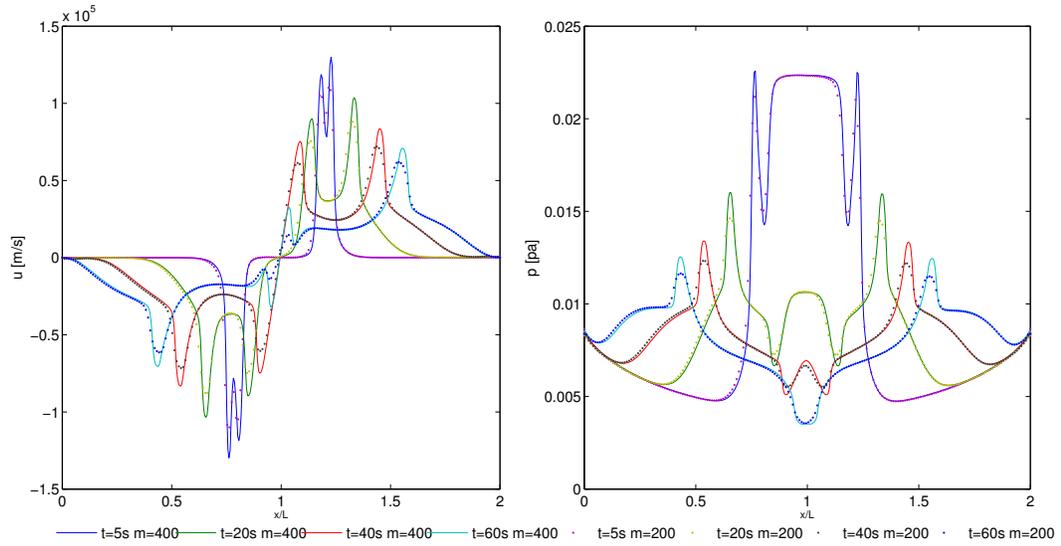


Figura 6.58: Comparación de las distribuciones de velocidad y presión en distintos instantes de tiempo considerando dos discretizaciones diferentes

hipótesis planteadas no se pudo obtener brillantamientos como los obtenidos en el trabajo de (Fernandez et al., 2009), por lo que podemos asumir que será necesario analizar arcos con diferentes longitudes u otro tipo de condiciones iniciales.



---

# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajos futuros

### 7.1. Conclusiones

En la presente tesis nos propusimos desarrollar un modelo numérico unidimensional para la simulación numérica de la dinámica de los arcos de la corona solar, que a su vez incluyera términos fuentes y de difusión térmica. Esto se debe a que, de acuerdo a la bibliografía estudiada, es necesario incluir efectos de variación de área, gravedad y modelos simplificados de los fenómenos energéticos complejos que existen en el sistema considerado.

Para poder incluir dichos efectos y lograr que el algoritmo numérico fuera estable fue necesaria la implementación de un integrador temporal implícito. Elegimos el integrador de (Yee et al., 1985), junto con el flujo numérico de (Yee, 1989). Dichas herramientas permitieron obtener un algoritmo numérico altamente robusto y confiable, que conserva la propiedad TVD y preserva la positividad incluso en condiciones donde la presión y densidad son bajas.

Implementamos algoritmos con dichos esquemas numéricos para el modelo gasdinámico y magnetohidrodinámico, empleando el primero como “banco de pruebas” de las herramientas implementadas, para luego comparar los resultados con los del modelo MHD. Para el modelo MHD fue necesario normalizar los vectores y valores propios del sistema, para evitar indeterminaciones. Además, utilizamos un solver de Roe exacto para MHD que no se había empleado anteriormente en el grupo de trabajo. Dicho solver agregó robustez y precisión al algoritmo. Por otro lado, todos los algoritmos fueron implementados en variables adimensionales. Esto se hizo para evitar problemas numéricos por diferencias de orden de magnitud entre las diferentes ecuaciones que componen el sistema de leyes de conservación,

y para poder comparar el efecto de los términos fuente con el de los términos convectivos.

Probamos dichos esquemas con problemas muy exigentes desde el punto de vista numérico, como el arco de (Cargill y Priest, 1980) (Sección 6.1.2) o el modelo de advección difusión compresible (Sección 6.1.3). Ambos casos poseen soluciones subsónicas con una importancia relativa de los términos fuente muy severa, que exigen al integrador temporal. Sin embargo el algoritmo convergió a la solución estacionaria, incluso con valores de  $CFL$  mayores a uno y en condiciones próximas a las que no existe una solución única del problema, para el caso del arco de Cargill. Podemos asegurar entonces que el esquema de discretización de los términos convectivos, difusivos y fuente resultó sumamente confiable y suficientemente preciso para extenderse y utilizarse en otras aplicaciones de mayor complejidad.

Otro desafío que encontramos en el desarrollo de la tesis fue obtener una forma consistente y numéricamente eficiente de modelizar las condiciones de contorno. En las regiones cercanas a las bases de los arcos coronales existen fuertes gradientes de densidad y temperatura. Además, el arco intercambia energía y masa con la cromósfera; existen flujos de entrada en general subsónicos y flujos de calor por conducción. El esquema tradicionalmente empleado en el grupo de trabajo de extrapolación de orden cero para las condiciones de contorno resultó inadecuado para modelar estos fenómenos. Para ello utilizamos un esquema más sofisticado, basado en características, que a su vez es suficientemente flexible para posibilitar imponer diversas restricciones físicas a los contornos, tanto para entradas como salidas de flujo. Evaluamos diferentes condiciones posibles para *benchmarks* conocidos o soluciones analíticas especialmente seleccionadas para validar los modelos físicos necesarios. En todos los casos el esquema basado en características convergió con la cantidad de condiciones necesarias establecida por la teoría, y se obtuvieron resultados muy satisfactorios en las curvas de convergencia para problemas estacionarios. Dicho esquema también probó ser exitoso en casos donde la conducción de calor y otros términos fuente tienen valores comparables a los de los flujos convectivos, empleando condiciones sobre la onda característica que transporta el flujo de entropía. Esto permitió mantener la consistencia con la física en todos los casos. Además, dicho esquema logró acoplarse de manera relativamente sencilla al integrador temporal implícito a través de matrices jacobianas aproximadas.

Este esquema además resultó ser más flexible y físicamente consistente para problemas inestacionarios, permitiendo modelar fenómenos físicos complejos en salidas de tubos de choque a regiones de fluido sin perturbar. Probamos diferentes condiciones posibles, haciendo ajuste fino en algunas de ellas, lo que permitió adquirir experiencia en este tipo de fenómenos transitorios.

El esquema de condiciones de contorno basado en características fue extendido al modelo magnetohidrodinámico con todas sus variantes. En las pruebas que realizamos este esquema demostró tener ventajas claras respecto de la consistencia con la física comparado con el esquema extrapolado. Sin embargo, quedaron ciertos interrogantes sobre qué condiciones se pueden imponer sobre cuáles de las ondas que componen el sistema. A pesar de ello, estamos confiados en que los fundamentos físicos de nuestra elección son sólidos, y como aún es un tema de discusión en la comunidad resta todavía mucho por hacerse.

Finalmente, basándonos en soluciones hidrostáticas conocidas de la literatura para arcos coronales hidrostáticos, demostramos que el algoritmo desarrollado trata correctamente los términos fuente y es capaz de converger a dichas soluciones. Introduciendo perturbaciones en las mismas (con diferentes distribuciones de las funciones de calentamiento o picos en la temperatura) obtuvimos patrones de ondas cuyos períodos y velocidades están dentro del orden de los observados. Las soluciones obtenidas nos permitieron sacar conclusiones importantes sobre la dinámica de la energía del sistema y el balance de los términos fuente. El modelo de condiciones de contorno desarrollado obtuvo importantes ventajas comparado al esquema tradicional extrapolado. Sin embargo, resta aún hacer un barrido de parámetros del problema para verificar si alguno de los casos obtenidos coincide con observaciones de eventos de brillantamientos reales.

A pesar de ello, el caso que modela una deposición de energía como un incremento brusco en la temperatura no produjo los resultados esperados: los mismos fueron fuertemente dependientes del modelo de conducción de calor empleado. En ambos casos dicho fenómeno tuvo gran influencia en la dinámica del sistema, siendo el medio más efectivo de transporte de energía. El modelo de flujo de calor limitado produjo resultados inesperados que necesitan analizarse de manera más profunda. Además, un barrido de parámetros permitiría identificar casos donde los términos fuente y difusivos tengan menor importancia. Por ejemplo, el parámetro de adimensionalización de los mismos es inversamente proporcional a la longitud del arco, luego para longitudes mayores éstos tendrían menos importancia.

## 7.2. Contribuciones originales

Para obtener los resultados de esta tesis fue necesario desarrollar herramientas y estudiar problemas que terminaron siendo aportes novedosos en sí mismos.

Todo el esfuerzo invertido en la implementación del modelo de condiciones de contorno, su acoplamiento con el integrador temporal y el cálculo de sus matrices jacobianas asociadas

de forma aproximada permitió estudiar las propiedades de convergencia de cada uno de los esquemas descritos y qué esquemas fueron más apropiados para distintos tipos de problema. Las conclusiones de los diferentes casos gasdinámicos que probamos (tanto estacionarios como inestacionarios) fueron vertidas en el trabajo (Cimino et al., 2015b), aún en revisión. Dichas herramientas constituyen una base para continuar con una línea de investigación en modelos de condiciones de contorno robustos, sofisticados y computacionalmente sencillos, con múltiples aplicaciones a problemas de ingeniería y física.

De la misma manera, la extensión del modelo de condiciones de contorno al sistema MHD es una innovación en sí misma, puesto que no existen muchos trabajos en esta área, y es un tema muy vigente en la comunidad científica. El desarrollo del esquema y las pruebas realizadas se materializaron en el trabajo (Cimino et al., 2015a), en revisión. Además, dicho modelo tiene muchas aplicaciones a problemas astrofísicos (como los arcos coronales, las ondas Moreton y el viento solar) y de ingeniería (como la propulsión eléctrica), ya que muchos de ellos presentan dificultades debidas a la modelización de las condiciones de contorno.

Finalmente, los resultados obtenidos para los arcos coronales con perturbaciones constituyen una extensión y una mejora del modelo utilizado por el grupo de trabajo. A su vez permitieron plantear como posible explicación de los fenómenos observados efectos de acoplamiento entre transferencia de calor, ondas del tipo convectivo y deposiciones de energía. También resulta novedoso el efecto que tiene el modelo de conducción térmica en las familias de ondas obtenidas. Luego de terminar de hacer un análisis de sensibilidad más pormenorizado pasaremos en limpio las conclusiones, que serán vertidas en una publicación que se encuentra en proceso de escritura, ya que los resultados que obtuvimos con valores elevados elevados de  $K_{cal}$  (especialmente para una función de calentamiento concentrada en las bases) resultan prometedores.

### 7.3. Trabajo futuro

Como se explicó anteriormente, es necesario realizar más corridas para hacer un barrido de parámetros ( $L$ ,  $s_H$ ,  $\rho_0$ , etc.) con el objetivo de determinar la sensibilidad del sistema a cada uno de ellos, y poder encontrar correlaciones posibles entre las velocidades de las ondas y los mismos. Además, resta determinar si alguno de los casos obtenidos se asemeja a alguno de los brillantamientos observados.

A pesar del éxito obtenido, el modelo unidimensional tiene algunas limitaciones, so-

bre todo cuando se trata del sistema MHD. En este caso sólo existen ondas transversales asociadas a las componentes transversales del campo magnético, que no pueden estar presentes en este tipo de modelo para los arcos coronales. Además, el hecho de que exista campo magnético constante en la dirección longitudinal y se considere una sola dirección de propagación de ondas no permite obtener todas las ondas posibles del sistema (switch on shocks, choques intermedios, etc.) y tampoco posibilita simular fenómenos como el de reconexión. El paso lógico siguiente sería extender el esquema a dos dimensiones. Para ello será necesario hacer alguna transformación sobre el solver de Roe empleado para extenderlo al caso bidimensional.

Además, la extensión del modelo a dos dimensiones implica necesariamente modelizar de diferente manera las condiciones de contorno, de manera de generar un algoritmo que sea capaz de detectar las direcciones de propagación de las ondas en el contorno, para imponer restricciones en las direcciones de las mismas. Esta extensión permitiría a su vez calibrar y verificar el modelo con otras soluciones analíticas o experimentales, que a su vez podrían resolver los interrogantes sobre qué condiciones pueden imponerse sobre cuáles ondas características.

Por otro lado, como en el grupo de trabajo también se emplea el programa FLASH para la simulación de flujos de plasma, podrían introducirse las herramientas aquí desarrolladas en el mismo. De esta manera se aprovecharían además las ventajas de paralelización y mallado adaptativo que posee FLASH, permitiendo correr casos más grandes y complejos, incluso tridimensionales. Emplear el programa FLASH además posibilitaría utilizar modelos de emisiones de radiación más sofisticados y hacer uso de un modelo multifluidos, mejorando de esta manera la calidad de las simulaciones.

Otra posible línea de desarrollo sería la extensión al modelo MHD del código paralelo orientado a objetos para mallas no estructuradas desarrollado por el Dr. J. P. Saldía, integrante del grupo de trabajo. Esto también posibilitaría analizar casos más grandes y emplear librerías específicas para radiación en ambientes astrofísicos.



---

## Apéndice A

# Derivadas de los operadores $\mathcal{L}_i$ para el modelo de Euler

A continuación se expresan las derivadas utilizadas para calcular la matriz jacobiana del operador  $\mathbf{R}\mathcal{L}$  en el contorno, de acuerdo a la Ec. (5.21). Las derivadas  $\frac{\partial}{\partial U_{kj}}$  implican derivación respecto a la  $k$ -ésima componente del vector de variables conservativas evaluada en la  $j$ -ésima celda del dominio. Para el caso del modelo de Euler unidimensional, esto es:

$$U_{1j} = \rho_j; \quad U_{2j} = (\rho u)_j; \quad U_{3j} = E_j$$

Esas derivadas son las asociadas a los operadores  $\mathcal{L}_i$  cuando las ondas son *salientes*. Si la onda  $i$ -ésima es entrante, el operador asociado será cero en caso de condición de no reflexión, o estará expresado en función de otros  $\mathcal{L}^{(j)}$  para otro tipo de condición. Luego, su derivada será también 0 (si se trata de una condición de no reflexión) o una combinación lineal de las otras derivadas de los  $\mathcal{L}^{(j)}$  (para otro tipo de condición).

Debe tenerse en cuenta que, al emplearse derivadas descentradas para evaluar los operadores  $\mathcal{L}^{(j)}$  en el contorno, las expresiones de estas derivadas variarán según se trate del contorno derecho o el contorno izquierdo.

### A.1. Extremo izquierdo

Para el caso del extremo izquierdo las derivadas espaciales se evalúan con una fórmula descentrada a la derecha

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_{j+1} - A_j}{\Delta x}$$

ya que las velocidades de ondas salientes irán hacia la izquierda.

### A.1.1. Operador $\mathcal{L}^{(1)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{1j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{a_j}{2\rho_j} - \frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4a_j\rho_j} - \frac{u_j}{\rho_j} \right] [p_{j+1} - p_j - a_j\rho_j(u_{j+1} - u_j)] \\ &\quad + \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left[ - \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4a_j} \right) (u_{j+1} - u_j) - \frac{a_j}{2} (u_{j+1} + u_j) - \frac{(\gamma-1)u_j^2}{2} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{2j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{(\gamma-1)\gamma u_j}{2a_j\rho_j} + \frac{1}{\rho_j} \right] [p_{j+1} - p_j - a_j\rho_j(u_{j+1} - u_j)] \\ &\quad + \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left[ \frac{(\gamma-1)\gamma u_j(u_{j+1} - u_j)}{2a_j} + (\gamma-1)u_j + a_j \right] \end{aligned} \quad (\text{A.1b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{3j}} &= \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left[ - \frac{(\gamma-1)\gamma(u_{j+1} - u_j)}{2a_j} - \gamma + 1 \right] \\ &\quad - \frac{(\gamma-1)\gamma[p_{j+1} - p_j - a_j\rho_j(u_{j+1} - u_j)]}{2\rho_j a_j \Delta x} \end{aligned} \quad (\text{A.1c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{1j+1}} = \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)u_{j+1}^2}{2} + \frac{a_j\rho_j u_{j+1}}{\rho_{j+1}} \right) \quad (\text{A.2a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{2j+1}} = \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left[ -(\gamma-1)u_{j+1} - \frac{a_j\rho_j}{\rho_{j+1}} \right] \quad (\text{A.2b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{3j+1}} = \frac{(\gamma-1)(u_j - a_j)}{\Delta x} \quad (\text{A.2c})$$

A.1.2. Operador  $\mathcal{L}^{(2)}$ 

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{1j}} = \frac{u_j}{\Delta x} \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_{j+1}-\rho_j)u_j^2}{2\rho_j} - \frac{(\gamma-1)u_j^2}{2} + a_j^2 \frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} + a_j^2 \right) - \frac{u_j(p_{j+1}-p_j - a_j^2(\rho_{j+1}-\rho_j))}{\Delta x \rho_j} \quad (\text{A.3a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{2j}} = \frac{p_{j+1}-p_j - a_j^2(\rho_{j+1}-\rho_j)}{\Delta x \rho_j} + \frac{u_j}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_{j+1}-\rho_j)u_j}{\rho_j} + (\gamma-1)u_j \right) \quad (\text{A.3b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{3j}} = \frac{u_j}{\Delta x} \left[ -\frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_{j+1}-\rho_j)}{\rho_j} - \gamma + 1 \right] \quad (\text{A.3c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{1j+1}} = \frac{u_j}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)u_{j+1}^2}{2} - a_j^2 \right) \quad (\text{A.4a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{2j+1}} = -\frac{(\gamma-1)}{\Delta x} u_j u_{j+1} \quad (\text{A.4b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{3j+1}} = \frac{(\gamma-1)u_j}{\Delta x} \quad (\text{A.4c})$$

### A.1.3. Operador $\mathcal{L}^{(3)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{1j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left[ \frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4a_j \rho_j} - \frac{a_j}{2\rho_j} - \frac{u_j}{\rho_j} \right] (p_{j+1} - p_j + a_j \rho_j (u_{j+1} - u_j)) \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4a_j} \right) (u_{j+1} - u_j) + \frac{a_j}{2} (u_{j+1} + u_j) - \frac{(\gamma-1)u_j^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{2j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{\rho_j} - \frac{(\gamma-1)\gamma u_j}{2a_j \rho_j} \right) [p_{j+1} - p_j + a_j \rho_j (u_{j+1} - u_j)] \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( - \frac{(\gamma-1)\gamma u_j (u_{j+1} - u_j)}{2a_j} + (\gamma-1)u_j - a_j \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{3j}} &= \frac{(\gamma-1)\gamma}{2\rho_j a_j \Delta x} [p_{j+1} - p_j + a_j \rho_j (u_{j+1} - u_j)] \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)\gamma (u_{j+1} - u_j)}{2a_j} - \gamma + 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.5c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{1j+1}} = \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)u_{j+1}^2}{2} - \frac{a_j \rho_j u_{j+1}}{\rho_{j+1}} \right) \quad (\text{A.6a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{2j+1}} = \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \frac{a_j \rho_j}{\rho_{j+1}} - (\gamma-1)u_{j+1} \right) \quad (\text{A.6b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{3j+1}} = \frac{(\gamma-1)(u_j + a_j)}{\Delta x} \quad (\text{A.6c})$$

## A.2. Extremo Derecho

Para el caso del extremo derecho las derivadas espaciales se evalúan con una fórmula descentrada a la izquierda

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{A_j - A_{j-1}}{\Delta x}$$

ya que las velocidades de ondas salientes irán hacia la derecha.

A.2.1. Operador  $\mathcal{L}^{(1)}$ 

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{1j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4\rho_j a_j} + \frac{a_j}{2\rho_j} - \frac{u_j}{\rho_j} \right) (p_j - p_{j-1} - a_j \rho_j (u_j - u_{j-1})) \quad (\text{A.7a}) \\ &+ \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma u_j^2}{4a_j} \right) (u_j - u_{j-1}) + \frac{a_j}{2}(u_j + u_{j-1}) + \frac{(\gamma-1)u_j^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{2j}} = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u_j}{2a_j \rho_j} + \frac{1}{\rho_j} \right) (p_j - p_{j-1} - a_j \rho_j (u_j - u_{j-1})) \quad (\text{A.7b})$$

$$+ \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u_j (u_j - u_{j-1})}{2a_j} - (\gamma-1)u_j - a_j \right) \quad (\text{A.7c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{3j}} = \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma (u_j - u_{j-1})}{2a_j} + \gamma - 1 \right) \quad (\text{A.7d})$$

$$- \frac{(\gamma-1)\gamma (p_j - p_{j-1} - a_j \rho_j (u_j - u_{j-1}))}{2a_j \Delta x \rho_j} \quad (\text{A.7e})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{1j-1}} = \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( -\frac{(\gamma-1)u_{j-1}^2}{2} - \frac{a_j \rho_j u_{j-1}}{\rho_{j-1}} \right) \quad (\text{A.8a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{2j-1}} = \frac{(u_j - a_j)}{\Delta x} \left( (\gamma-1)u_{j-1} + \frac{a_j \rho_j}{\rho_{j-1}} \right) \quad (\text{A.8b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(1)}}{\partial U_{3j-1}} = \frac{(1-\gamma)(u_j - a_j)}{\Delta x} \quad (\text{A.8c})$$

### A.2.2. Operador $\mathcal{L}^{(2)}$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{1j}} = \frac{1}{\Delta x} u_j \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_j - \rho_{j-1})u_j^2}{2\rho_j} + \frac{(\gamma-1)u_j^2}{2} + \frac{a_j^2(\rho_j - \rho_{j-1})}{\rho_j} - a_j^2 \right) - \frac{u_j(p_j - p_{j-1} - a_j^2(\rho_j - \rho_{j-1}))}{\Delta x \rho_j} \quad (\text{A.9a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{2j}} = \frac{p_j - p_{j-1} - a_j^2(\rho_j - \rho_{j-1})}{\Delta x \rho_j} + \frac{u_j}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_j - \rho_{j-1})u_j}{\rho_j} - (\gamma-1)u_j \right) \quad (\text{A.9b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{3j}} = \frac{u_j}{\Delta x} \left( -\frac{(\gamma-1)\gamma(\rho_j - \rho_{j-1})}{\rho_j} + \gamma - 1 \right) \quad (\text{A.9c})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{1j-1}} = \frac{u_j \left( a_j^2 - \frac{(\gamma-1)u_{j-1}^2}{2} \right)}{\Delta x} \quad (\text{A.10a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{2j-1}} = \frac{(\gamma-1)u_j u_{j-1}}{\Delta x} \quad (\text{A.10b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(2)}}{\partial U_{3j-1}} = \frac{(1-\gamma)u_j}{\Delta x} \quad (\text{A.10c})$$

A.2.3. Operador  $\mathcal{L}^{(3)}$ 

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{1j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1) \gamma u_j^2}{4 a_j \rho_j} - \frac{a_j}{2 \rho_j} - \frac{u_j}{\rho_j} \right) (p_j - p_{j-1} + a_j \rho_j (u_j - u_{j-1})) \quad (\text{A.11a}) \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \left( \frac{(\gamma-1) \gamma u_j^2}{4 a_j} \right) (u_j - u_{j-1}) - \frac{a_j}{2} (u_j + u_{j-1}) + \frac{(\gamma-1) u_j^2}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{2j}} &= \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{\rho_j} - \frac{(\gamma-1) \gamma u_j}{2 a_j \rho_j} \right) (p_j - p_{j-1} + a_j \rho_j (u_j - u_{j-1})) \quad (\text{A.11b}) \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( - \frac{(\gamma-1) \gamma u_j (u_j - u_{j-1})}{2 a_j} - (\gamma-1) u_j + a_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{3j}} &= \frac{(\gamma-1) \gamma (p_j - p_{j-1} + a_j \rho_j (u_j - u_{j-1}))}{2 \rho_j a_j \Delta x} \quad (\text{A.11c}) \\ &+ \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( \frac{(\gamma-1) \gamma (u_j - u_{j-1})}{2 a_j} + \gamma - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{1j-1}} = \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left( - \frac{(\gamma-1) u_{j-1}^2}{2} + \frac{a_j \rho_j u_{j-1}}{\rho_{j-1}} \right) \quad (\text{A.12a})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{2j-1}} = \frac{(u_j + a_j)}{\Delta x} \left[ (\gamma-1) u_{j-1} - \frac{a_j \rho_j}{\rho_{j-1}} \right] \quad (\text{A.12b})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}^{(3)}}{\partial U_{3j-1}} = \frac{(1-\gamma)}{\Delta x} (u_j + a_j) \quad (\text{A.12c})$$

### A.3. Derivadas de los vectores propios de las ecuaciones Euler

Vector propio  $\mathbf{R}^{(1)}$

$$\frac{\partial \mathbf{R}^{(1)}}{\partial U_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{4a\rho} + \frac{a}{2\rho} - \frac{u}{\rho} \\ -u \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{4a\rho} - \frac{a}{2\rho} \right) + \frac{(\gamma-2)u^2}{2\rho} + \frac{au}{\rho} - \frac{a^2}{(\gamma-1)\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial U_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\gamma-1)\gamma u}{2a\rho} + \frac{1}{\rho} \\ \frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{2a\rho} - \frac{\gamma u}{\rho} + \frac{u}{\rho} - \frac{a}{\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial U_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{(\gamma-1)\gamma}{2a\rho} \\ \frac{\gamma}{\rho} - \frac{(\gamma-1)\gamma u}{2a\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial U_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{4a\rho} - \frac{a}{2\rho} - \frac{u}{\rho} \\ u \left( \frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{4a\rho} - \frac{a}{2\rho} \right) + \frac{(\gamma-2)u^2}{2\rho} - \frac{au}{\rho} - \frac{a^2}{(\gamma-1)\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial U_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho} - \frac{(\gamma-1)\gamma u}{2a\rho} \\ -\frac{(\gamma-1)\gamma u^2}{2a\rho} - \frac{(\gamma-1)u}{\rho} + \frac{a}{\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}_3}{\partial U_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{(\gamma-1)\gamma}{2a\rho} \\ \frac{(\gamma-1)\gamma u}{2a\rho} + \frac{\gamma}{\rho} \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

---

# Bibliografía

- Acosta Lusa, M. y Tamagno, J. (2004). Modelado cuasi unidimensional del movimiento de un pistón en el interior de un tubo. Technical report, FCEFYN UNC.
- Aschwanden, M. (2004). *Physics of the Solar Corona*. Springer-Verlag.
- Aschwanden, M. K. y Schrijver, C. J. (2002). Analytical Approximations to Hydrostatic Solutions and Scaling Laws of Coronal Loops. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 142:269–283.
- Aschwanden, M. K. y Tsiklauri, D. (2009). The Hydrodynamic Evolution of Impulsively Heated Coronal Loops: Explicit Analytical Approximations. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 185:171–185.
- Blazek, J. (2005). *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Elsevier.
- Borgazzi, A. y Costa, A. (2005). Characterization of intensity and spatial variations along coronal loops ii. a trace case study. *Astronomy and Astrophysics*, 441:327 – 335.
- Bouchut, F. (2004). *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-balanced Schemes for Sources*. Frontiers in mathematics. Springer.
- Brio, M. y Wu, C. (1988). An upwind differencing scheme for the equations of ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, 75.
- Cargill, P. J. y Priest, E. (1980). Siphon flows in coronal loops. I - Adiabatic flow. *Solar Physics*, 65:251–269.
- Cargo, P. y Gallice, G. (1997). Roe Matrices for Ideal MHD and Systematic Construction of Roe Matrices for Systems of Conservation Laws. *Journal of Computational Physics*, 136:446–466.

- Cimino, A. M., Krause, G. J., Elaskar, S. A., y Costa, A. (2015a). Characteristic boundary conditions for magnetohydrodynamics: the brio-wu shock tube. *Computers & Fluids* (en revisión).
- Cimino, A. M., Tamagno, J. P., Elaskar, S. A., y Costa, A. (2015b). Some applications of boundary conditions based on characteristics for gas dynamic flows with source terms. *Journal of Applied Fluid Mechanics* (en revisión).
- Coen, O. (2008). *The Solar Corona Through Numerical Eyes*. PhD thesis, University of Michigan.
- Costa, A. (2015). *Introducción a la Magnetohidrodinámica*. Universitas.
- Cowie, L. y McKee, C. (1977). The Evaporation of Spherical Clouds in a Hot Gas. I. Classical and Saturated Mass Loss Rates. *The Astrophysical Journal*, 211:135–146.
- Dedner, A., Kröner, D., Sofronov, I., y Wesenberg, M. (2001). Transparent boundary conditions for mhd simulations in stratified atmospheres. *Journal of Computational Physics*, 171:448–478.
- Dutt, P. (1988). Stable Boundary Conditions and Difference Schemes For Navier-Stokes Equations. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 25:245–267.
- Einfeldt, B., Muntz, C., Roe, P., y Sjögreen, B. (1991). On godunov type methods near low densities. *Journal of Computational Physics*, 92.
- Engquist, B. y Madja, A. (1977). Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves. *Mathematics of Computations*, 31:104–129.
- Fernandez, C. A., Costa, A., Elaskar, S., y Schulz, W. (2009). Numerical simulation of the internal plasma dynamics of post flare loops. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*.
- Goedbloed, J. y Poedts, S. (2004). *Principles of Magnetohydrodynamics. With Applications to Laboratory and Astrophysical Plasmas*. Cambridge University Press.
- Handy, B. N., Acton, L. W., y Kankelborg, C. C. (1999). The transition region and coronal explorer. *Solar Physics*, 187.
- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 49:357–393.

- Harten, A. y Hyman, J. M. (1983). Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. *Journal of Computational Physics*, 50:235–269.
- Hayashi, K. (2005). Magnetohydrodynamic simulations of the solar corona and solar wind using a boundary treatment to limit solar wind mass flux. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 161.
- Hedstrom, G. (1979). Nonreflecting boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 30.
- Hoffmann, K. A. y Chiang, S. (2000a). *Computational Fluid Dynamics. Volume I*. ESS.
- Hoffmann, K. A. y Chiang, S. (2000b). *Computational Fluid Dynamics. Volume II*. ESS.
- Inan, U. y Golkowski, M. (2011). *Principles of Plasma Physics for Engineers and Scientists*. Cambridge.
- Knoll, D. y Keyes, D. (2004). Jacobian-free newton-krylov methods: a survey of approaches and applications. *Journal of Computational Physics*, 193.
- Leung, P. T. (2004). A note on the "system-free" expressions of maxwell's equations. *European Journal of Physics*.
- Leveque, R. (2005). *Numerical Methods for Conservation Laws*. Birkhäuser.
- Matatsuka, K. (2013). *I do like CFD, Vol 1. Governing Equations and Exact Solutions*. CFDbooks.
- M.Bellan, P. (2006). *Fundamentals of Plasma Physics*. Cambridge.
- Müller, D. A. N., Hansteen, V. H., y Peter, H. (2003). Dynamics of solar coronal loops. i. condensation in cool loops and its effect on transition region lines. *Astronomy and Astrophysics*, 411:605–613.
- Nakariakov, V. M. y Verwichte, E. (2005). Coronal waves and oscillations. *Living Rev. Solar Phys.*
- Ogawara, Y., Takano, T., Kato, T., Kosugi, T., y Tsuneta, S. (1991). The solar a mission: an overview. *Solar Physics*, 136.
- Panton, R. L. (2013). *Incompressible Flow*. Wiley.

- Petralia, A., Reale, F., 2, S. O., y Klimchuk, J. A. (2014). MHD modeling of coronal loops: injection of high-speed chromospheric flows. *Astronomy and Astrophysics*.
- Peyrard, P. F. y Villedieu, P. (1999). A roe scheme for ideal mhd equations on 2d adaptively refined triangular grids. *Journal of Computational Physics*, 150.
- Poinsot, T. y Lele, S. K. (1992). Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 101:104–129.
- Powell, K. (1995). An approximate riemann solver for magnetohydrodynamics (that works in more than one dimension). Technical report, NASA.
- Priest, R. (1982). *Solar Magnetohydrodynamics*. D. Reidel.
- Roe, P. L. (1981). Approximate riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *Journal of Computational Physics*, 43:357–372.
- Roe, P. L. y Balsara, D. S. (1996). Notes on the Eigensystem of Magnetohydrodynamics. *Journal of Numerical Analysis*, 56:57–69.
- Rosner, R., Tucker, W., y Vaiana, G. (1978). Dynamics of the Quiescent Solar Corona. *The Astrophysical Journal*, 220:643–655.
- Rudinger, G. (1955). On the Reflection of Shock Waves from an Open End of a Duct. *Journal of Applied Physics*, 26.
- Serio, S., Peres, G., y Vaiana, G. (1981). Closed coronal structures ii. generalized hydrostatic model. *The Astrophysical Journal*, 243:288–300.
- Shapiro, A. (1953). *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Number v. 1 in *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*. Ronald Press Co.
- Sokolov, I., K.G.Powell, O.Coen, y Gombosi, T. (2008). Computational magnetohydrodynamics, based on solution of the well-posed riemann problem. *ASP Conference Series*, 385.
- Spitzer, L. (1962). *Physics of fully ionized gases*. Interscience.
- Sutherland, J. y Kennedy, C. (2003). Improved boundary conditions for viscous,reacting, compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 191:502–524.

- Takahashi, K. y Yamada, S. (2013). Regular and non-regular solutions of the riemann problem in ideal magnetohydrodynamics. *Journal of Plasma Physics*, 79:335–356.
- T.Colonius (2004). Modeling artificial boundary conditions for compressible flow. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*
- Thompson, K. (1987). Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 68:1–24.
- Thompson, K. (1990). Time dependent boundary conditions for hyperbolic systems, ii. *Journal of Computational Physics*, 89:439–461.
- Toro, E. (2009). *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- Versteeg, H. y Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics. The Finite Volume Method*. Pearson. Prentice Hall.
- Yalim, M. S. (2008). *An Artificial Compressibility Analogy Approach for Compressible Ideal MHD*. PhD thesis, Von Karman Institute for Fluid Dynamics.
- Yee, H., Warming, R., y Harten, A. (1985). Implicit total variation diminishing (tvd) schemes for steady-state calculations. *Journal of Computational Physics*, 57:327–360.
- Yee, H. C. (1981). Numerical approximation of boundary conditions with applications to inviscid equations of gas dynamics. *NASA Technical Memorandum*, 81265.
- Yee, H. C. (1987). Upwind and symmetric shock-capturing schemes. *NASA Technical Memorandum*, 89464.
- Yee, H. C. (1989). A class of high-resolution explicit and implicit shock-capturing methods. *NASA Technical Memorandum*, 101088.