MÉTODOS CUANTITATIVOS PARA LA TOMA DE DECISIONES
PROGRAMACIÓN LINEAL

MATERIAL DE APOYO CON ENFOQUE PRÁCTICO

MARIANA FUNES

2022

FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS
Escuela de Graduados FCE · UNC
UNC Universidad Nacional de Córdoba

Índice

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Resolver un problema de P.L. es encontrar el conjunto de valores de las variables no negativos que satisfacen simultáneamente todas las restricciones.

En este material desarrollaremos los métodos Gráfico y Simplex para resolver problemas lineales. Para explicarlos utilizaremos el siguiente problema:

> Un fabricante de juguetes ha diseñado dos nuevos modelos electrónicos: Autorrap y Robotec. Un distribuidor al que exhibió los prototipos está convencido de que los juguetes tendrán éxito en el mercado y se ha comprometido a comprarle todos los juguetes de ambos modelos que pueda fabricar para el próximo mes. Los insumos que se utilizan en la fabricación de los juguetes son plaquetas electrónicas, planchas de plástico y mano de obra. Cada unidad de Autorrap requiere 6 plaquetas electrónicas, 5 planchas de plástico y 8 horas de mano de obra. Los requerimientos, por unidad, de Robotec son: 6 plaquetas electrónicas, 10 planchas de plástico y 4 horas de mano de obra. Ha calculado que la contribución a la utilidad para los juguetes será de $60 para Autorrap y $80 para Robotec. Cuenta con 300 plaquetas electrónicas, 400 planchas de plástico y 320 horas de mano de obra para encarar la producción de los juguetes.
>
> El fabricante desea determinar la cantidad de juguetes de cada modelo que debe fabricar para vender al distribuidor el próximo mes, de manera de maximizar la contribución a la utilidad.

Se presenta a continuación la formulación matemática de este problema:

Max $60\, x_1 + 80\, x_2$ Función Objetivo de contribución total a la utilidad

Sujeto a

$6\, x_1 + 6\, x_2 \leq 300$ Restricción de las plaquetas electrónicas

$5\, x_1 + 10\, x_2 \leq 400$ Restricción de las planchas de plástico

$8\, x_1 + 4\, x_2 \leq 320$ Restricción de las horas mano de obra

$x_1, x_2 \geq 0$

Donde: x_1 : número de autos a fabricar en el mes

x_2 : número de robots a fabricar en el mes

SOLUCIÓN GRÁFICA DE PROBLEMAS DE P.L.

Cuando los problemas son pequeños, es decir, con dos variables, es posible utilizar el método gráfico. Aunque este método no puede emplearse para resolver problemas con más de dos variables, resultará útil para explicar el proceso de solución.

Pasos del Método

Son tres los pasos que deben seguirse para encontrar una solución gráfica:

1. Graficar las restricciones.
2. Graficar la función objetivo.
3. Encontrar el punto que optimice la función objetivo.

1º Graficar las restricciones

Como tenemos dos variables, se requieren dos dimensiones para graficar el problema. En el eje de las absisas mediremos el número de autos a fabricar (x_1), y en el eje de las ordenadas mediremos el número de robots a fabricar (x_2). Tanto x_1 como x_2 deben ser no negativas, por lo que sólo deberemos considerar la porción de la gráfica donde $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$. Por lo tanto, las restantes restricciones deberán graficarse en lo que se considera **región no negativa**, la que corresponde al primer cuadrante.

Las restricciones pueden graficarse trazando dos puntos. La forma más simple de encontrar esos puntos, es trabajando con la desigualdad como si fuera una igualdad. Así, la restricción de las plaquetas electrónicas $6\ x_1 + 6\ x_2 \leq 300$ se transforma en la ecuación $6\ x_1 + 6\ x_2 = 300$.

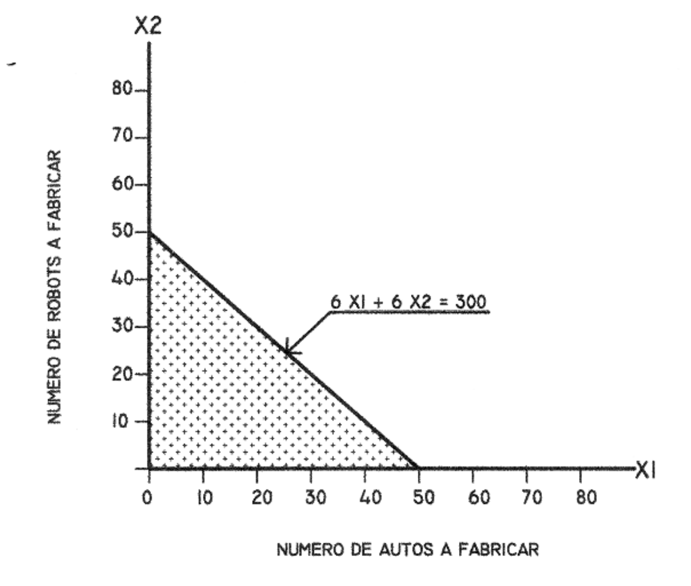
Trabajando con esta expresión encontramos el valor de cada una de las variables anulando la otra; es decir:

Si $x_1 = 0$, entonces $6\ x_2 = 300$. $\therefore$ $x_2 = 50$.

Si $x_2 = 0$, entonces $6\ x_1 = 300$ y $x_1 = 50$.

Una vez identificados los dos puntos, éstos se grafican y se unen con una recta. Ver Figura I.

FIGURA I



Los puntos que se encuentran en la recta, representan cantidades a fabricar de x_1 y x_2 que cumplen con la relación $6\ x_1 + 6\ x_2 = 300$. Todos puntos que se encuentran en la recta y por debajo de ésta, representan cantidades a fabricar de x_1 y x_2 que cumplen con la relación $6\ x_1 + 6\ x_2 \leq 300$ (los puntos de la recta y la zona sombreada de la Figura I).

Así como hicimos con la restricción de las plaquetas, debemos proceder con las restricciones de las planchas de plástico y las horas de mano de obra.

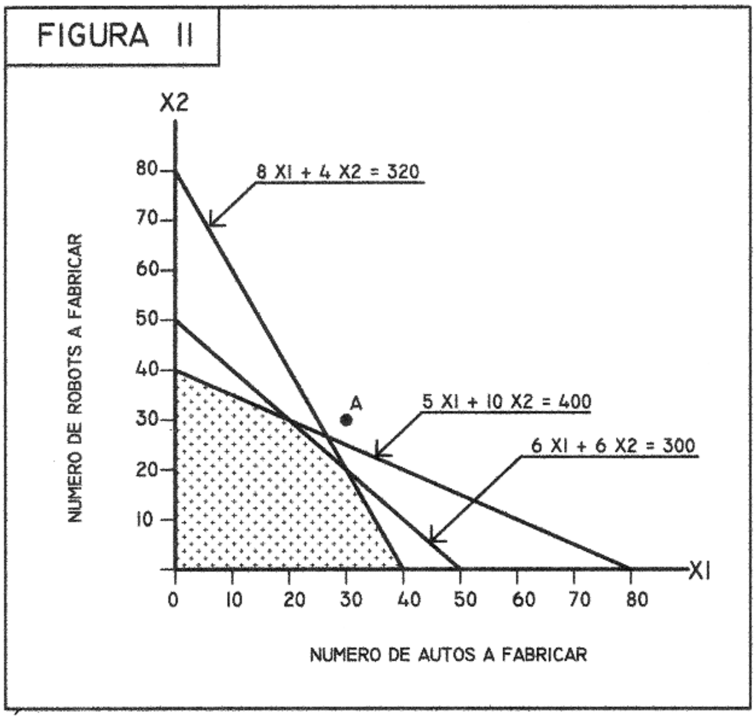
Para la restricción de la planchas de plástico $5\ x_1 + 10\ x_2 \leq 400$

Si $x_1 = 0$, $x_2 = 40$
Si $x_2 = 0$, $x_1 = 80$

Para la restricción de las horas de mano de obra $8\ x_1 + 4\ x_2 \leq 320$

Si $x_1 = 0$, $x_2 = 80$
Si $x_2 = 0$, $x_1 = 40$

Si graficamos estas restricciones, junto con la primera, obtenemos la gráfica de la Figura II.



En la gráfica se puede observar una región sombreada que satisface en forma simultánea las tres restricciones. Dado que todos los puntos de la zona sombreada son **soluciones posibles o factibles** para el problema, es decir, representan cantidades a fabricar de x_1 y x_2 que cumplen simultáneamente con todas las restricciones, la región sombreada recibe el nombre de **región factible**.

Cualquier punto ubicado fuera de la región factible (por ejemplo, el punto A de la Figura II) representa una combinación de autos y robots a fabricar que utiliza más insumos de los disponibles. Por lo tanto, al no cumplir con las tres restricciones, no se considera una solución posible del problema.

No se podrían fabricar 30 autos y 30 robots, ya que con esta combinación se emplearían:

$6 \times 30 + 6 \times 30 = 360$ plaquetas electrónicas

$5 \times 30 + 10 \times 30 = 450$ planchas de plástico

$8 \times 30 + 4 \times 30 = 360$ horas de mano de obra

que no se poseen, ya que el número máximo de plaquetas, planchas y horas que se pueden usar son 300, 400 y 320, respectivamente.

2º Graficar la función objetivo

Hasta aquí hemos encontrado todas las soluciones posibles, pero se desea determinar la solución que aporte la mayor contribución a las utilidades, es decir, la **solución óptima**.

Un procedimiento para encontrar la solución óptima sería calcular el valor de la función objetivo para cada una de las soluciones factibles, y la que arrojara el valor más elevado, sería la solución óptima. El problema de este procedimiento es que hay demasiadas soluciones factibles (de hecho, si observamos el gráfico, vemos que son infinitas) y la evaluación de todas las soluciones no sería posible.

En lugar de calcular la contribución a la utilidad para cada solución posible, seleccionaremos un valor arbitrario cualquiera de la contribución a la utilidad, e identificaremos todas las soluciones posibles que dan el valor seleccionado. Es decir, identificaremos el número de autos y robots que debemos fabricar para obtener esa utilidad arbitraria.

Si el valor de contribución a la utilidad arbitrario fuera \$1200, la ecuación $60\ x_1 + 80\ x_2 = 1200$, representaría todos los puntos de una recta que darían una contribución a la utilidad de \$1.200.

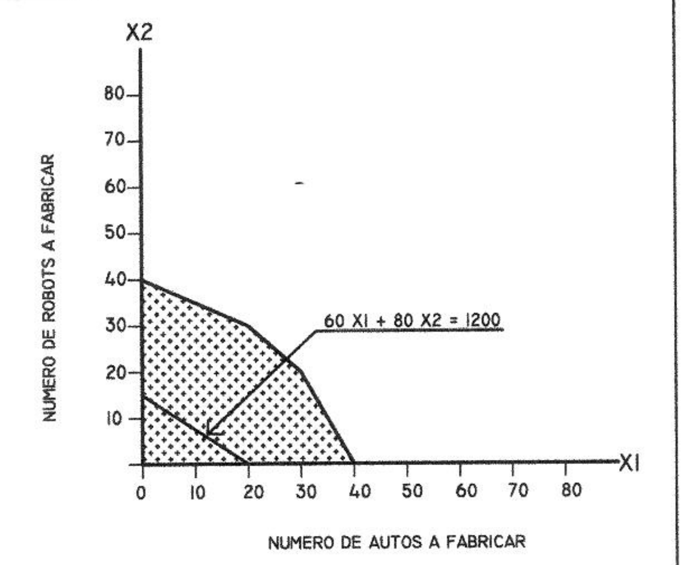
Como hicimos con las restricciones, podemos graficar la recta que representa la función objetivo para un valor de \$ 1.200.

Si $x_1 = 0$, $80\ x_2 = 1200 \therefore x_2 = 15$

Si $x_2 = 0$, $60\ x_1 = 1200 \therefore x_1 = 20$

En la Figura III puede observarse la gráfica de la región factible y de la función objetivo para una contribución de \$ 1.200.

FIGURA III

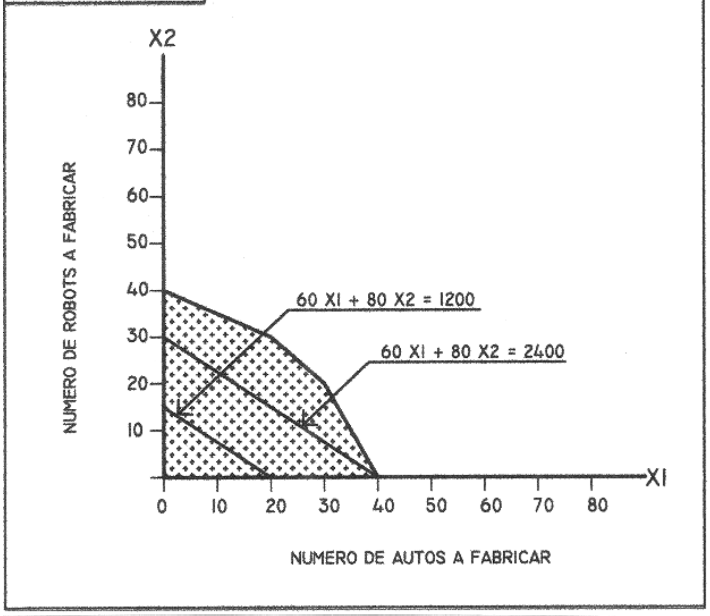


Como el objetivo es determinar la solución factible que nos dé la contribución a la utilidad más elevada, seguimos seleccionando valores de contribución a la utilidad más elevados y encontrando las soluciones que nos den esos valores seleccionados.

Trabajando con el valor de contribución $ 2.400,
Si $x_1 = 0$, $x_2 = 30$
Si $x_2 = 0$, $x_1 = 40$.

La gráfica de la función objetivo para una contribución de $ 1.200 y $ 2.400 se presenta en la Figura IV.

FIGURA IV



Si se observa esta gráfica con detalle, se podrán identificar las siguientes propiedades:

1. Las rectas de la función objetivo son **paralelas** entre sí.
2. La recta con contribución a la utilidad más elevada ($2.400) está más alejada del origen - punto (0,0) -.

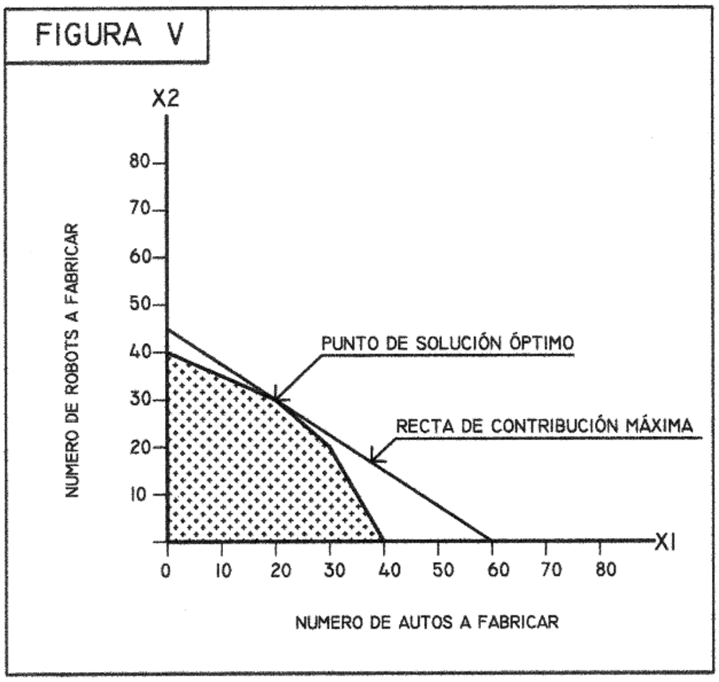
Estas propiedades implican que, si trazamos rectas de la función objetivo más alejadas del origen, en forma paralela a las ya graficadas, podemos obtener soluciones que den valores cada vez más elevados de contribución a las utilidades.

Dado que los puntos que se encuentran fuera de la región factible no son aceptables, deberemos determinar la recta de la función objetivo que esté más alejada del origen, pero que continúe en contacto con la región factible. El punto de la región factible que coincida con la recta de la función objetivo más alejada del origen, será la solución óptima de este programa lineal.

3º Encontrar el punto que dé el valor óptimo a la función objetivo

Se podrá encontrar el punto de solución óptimo para el problema, desplazando la recta de la función objetivo en forma paralela en el sentido de optimización, tan lejos como la región factible lo permita.

En la Figura V puede observase el punto óptimo para el problema de los juguetes.



Deberemos determinar ahora cuáles son los valores de x_1 y x_2 para este punto. Observe que el punto de solución óptimo se encuentra en la intersección de las rectas de restricción de las plaquetas electrónicas y las planchas de plástico. Esto es, la solución óptima estará en un punto que satisface simultáneamente las expresiones:

1) $6\,x_1 + 6\,x_2 = 300$ (ecuación de la recta de restricción de las plaquetas electrónicas)
2) $5\,x_1 + 10\,x_2 = 400$ (ecuación de la recta de restricción de las planchas de plástico)

Para encontrar los valores de x_1 y x_2 que satisfagan simultáneamente estas ecuaciones, se puede utilizar cualquier método de resolución de sistemas de ecuaciones. En este caso, utilizaremos el método de sustitución:

1. Despejaremos x_1 en la primera ecuación:
   Dado: $6\,x_1 + 6\,x_2 = 300$
   $x_1 = 50 - x_2$
2. Sustituimos la expresión de x_1, obtenida en el punto anterior, en la segunda ecuación y obtenemos el valor de x_2.
   Dado: $5\,x_1 + 10\,x_2 = 400$
   Sustituimos x_1 por su igual $(50 - x_2)$: $5\,(50 - x_2) + 10\,x_2 = 400$
   $250 - 5\,x_2 + 10\,x_2 = 400$
   $250 + 5\,x_2 = 400$
   $\mathbf{x_2} = \dfrac{(400 - 250)}{5} = \mathbf{30}$
3. Sustituimos el valor de x_2, encontrado en el punto anterior, en la primera ecuación y obtenemos el valor de x_1.
   Dado: $6\,x_1 + 6\,x_2 = 300$
   Sustituimos x_2 por 30: $6\,x_1 + 6 \cdot 30 = 300$
   Despejamos el valor de x_1: $\mathbf{x_1} = \dfrac{(300 - 180)}{6} = \mathbf{20}$

La **solución óptima** del problema es $\mathbf{x_1 = 20}$ y $\mathbf{x_2 = 30}$. Es decir, se deberán fabricar 20 autos y 30 robots para maximizar la contribución a la utilidad. La **contribución máxima** que podrá obtener **será de $ 3600**, que se obtiene reemplazando los valores óptimos de x_1 y x_2 en la función objetivo (60 . 20 + 80 . 30 = 3600).

Variables de Holgura o Slack

Además de la solución óptima y de su contribución total a las utilidades, el fabricante de juguetes deberá tener información sobre los requerimientos de fabricación de los insumos que dispone. Es posible obtener esta información reemplazando en las restricciones del programa lineal los valores óptimos de las variables de decisión, $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$.

Restricción	**Insumos requeridos Para $x_1 = 20$ y $x_2 = 30$**	**Insumos Disponibles**
Número de plaquetas electrónicas	6 (20) + 6 (30) = 300	300
Número de planchas de plástico	5 (20) + 10 (30) = 400	400
Horas de Mano de Obra	8 (20) + 4 (30) = 280	320

La solución completa indica que la fabricación de 20 autos y 30 robots requerirá 300 plaquetas electrónicas, 400 planchas de plástico, pero solamente 280 de las 320 horas de mano de obra disponibles. La diferencia entre las horas disponibles (320) y las que se utilizan (280), representa una ***holgura***.

Para considerar las diferencias entre los recursos disponibles y los que se utilizan, se agregan variables a la formulación de los problemas de P.L., que reciben el nombre de **variables de holgura o slack** (slack es el término del idioma inglés que significa holgura).

En forma general, las variables de holgura representan la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de una restricción de $\leq$ o $\geq$.

Como en el problema tenemos tres restricciones de $\leq$, tenemos tres variables de holgura. Los valores de estas variables, que en este caso representan las diferencias entre los recursos utilizados y los recursos disponibles, son:

Restricción	**Valor de la Variable de holgura**
Número de plaquetas electrónicas	0
Número de planchas de plástico	0
Horas de Mano de Obra	40

Como estas variables no hacen ninguna contribución a la utilidad (por lo general representan cantidades de recursos que no se utilizan), tienen coeficiente igual a cero en la función objetivo[1].

[1] En ciertas aplicaciones, algunos o todos los recursos utilizados pueden venderse para contribuir a la utilidad. En estos casos, las variables de holgura se convierten en variables de decisión que representan el total de recursos a vender. Un coeficiente $\neq 0$ en la función objetivo para estas variables reflejaría la utilidad asociada con la venta de cada unidad de recurso.

Agregando las variables de holgura al enunciado matemático del problema, éste se convierte en:

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Max} & 6x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 & & \\
\text{Sujeto a} & & & \\
 & 6x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 300 \\
 & 5x_1 + 10x_2 + x_4 & = & 400 \\
 & 8x_1 + 4x_2 + x_5 & = & 320 \\
 & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 & &
\end{array}
$$

Las restricciones que eran de menor o igual, se han transformado en igualdades, ya que las variables de holgura que hemos agregado representan la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de la restricción.

Si reemplazamos los valores de las variables $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 40$, en las restricciones, veremos que esas expresiones se verifican:

$$
\begin{array}{lcl}
6(20) + 6(30) + 0 & = & 300 \\
5(20) + 10(30) + 0 & = & 400 \\
5(20) + 4(30) + 40 & = & 320
\end{array}
$$

Para este problema, $\mathbf{x_3}$, $\mathbf{x_4}$ y $\mathbf{x_5}$ representan la cantidad de insumos que no se utilizan. x_3 y x_4 son iguales a cero y esto significa que no quedan disponibles plaquetas electrónicas ni planchas de plástico, ya que todas se emplean en la producción de los juguetes. $x_5 = 40$ significa que no se utilizan 40 horas de mano de obra del total de 320 disponibles.

Del proceso de solución es conviene resaltar algunas nociones importantes:

Primero: los puntos que resulta necesario considerar para buscar la solución óptima, son los que se encuentran sobre la **frontera** de la región factible (líneas rectas que forman la parte extrema), debido a que para cualquier punto que se encuentre *en* la región factible, existe un punto con mayores utilidades que está *sobre* la frontera de la región factible.

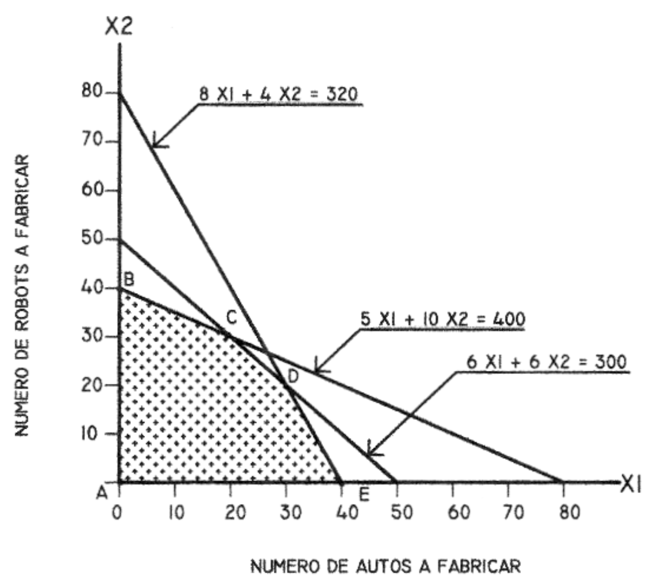
Segundo: *los únicos puntos sobre la frontera que es necesario considerar son las esquinas o vértices*, que ocurren en la intersección de dos o más restricciones. Para cualquier punto que se encuentra sobre la frontera, siempre hay un vértice que tiene la misma utilidad o mayor.

Si un problema de programación lineal tiene **solución óptima**, ésta se encuentra en un **vértice** de la región factible.

En terminología de programación lineal, estos vértices se conocen como **puntos extremos** de la región factible.

En la Figura VI se han identificado con las letras A, B, C, D y E los vértices para el problema de los juguetes. Los mismos corresponden a la intersección de restricciones o condiciones de no negatividad, y sus coordenadas pueden encontrarse, como lo hicimos en el Paso 3 del método gráfico, resolviendo las ecuaciones simultáneas de los pares de restricciones y/o condiciones de no negatividad que lo forman.

FIGURA VI



Cualquier punto sobre la recta de restricción, corresponde a una combinación de autos y robots que emplean la totalidad del insumo relacionado a esa restricción, lo que implica que **sobre la recta de restricción, la variable de holgura asociada es cero**. Los puntos que se encuentran por debajo de la recta de restricción, corresponden a combinaciones de autos y robots que no emplean todo el insumo disponible. Por consiguiente, la variable de holgura asociada a esa restricción será positiva.

Al identificar las coordenadas de los vértices, puede también obtenerse el valor que asumen las variables de holgura en dicho punto. Por ejemplo, en el **vértice A** (que surge de la intersección de las condiciones de no negatividad $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$), $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

Reemplazando estos valores en las ecuaciones de restricción:

$6\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 = 300$

$5\,x_1 + 10\,x_2 + x_4 = 400$

$8\,x_1 + 4\,x_2 + x_5 = 320$

tendremos: $x_3 = 300$, $x_4 = 400$ y $x_5 = 320$.

En el **vértice B** se intersecan la condición de no negatividad de x_1 y la restricción de las planchas de plástico. Por lo tanto, $x_1 = 0$ y $x_4 = 0$ (ya que sobre la recta de restricción, la variable de holgura asociada es cero). Dados los valores de x_1 y x_4, podemos, por sustitución, encontrar los valores de las variables restantes.

De la restricción de las planchas de plástico podemos obtener el valor de x_2. Al ser x_1 y x_4 iguales a cero, $10\,x_2 = 400 \;\therefore\; x_2 = 40$ y con este valor, podemos encontrar los valores de x_3 y x_5.

De la restricción de las plaquetas electrónicas, $x_3 = 300 - 6\,x_2 = 300 - 240 = 60$.

De la restricción de la mano de obra, $x_5 = 320 - 4\,x_2 = 320 - 160 = 160$.

En la Tabla I se presentan los valores de las variables de decisión y de holgura, y de la función objetivo para cada uno de los vértices. Se sugiere al estudiante verificar los resultados.

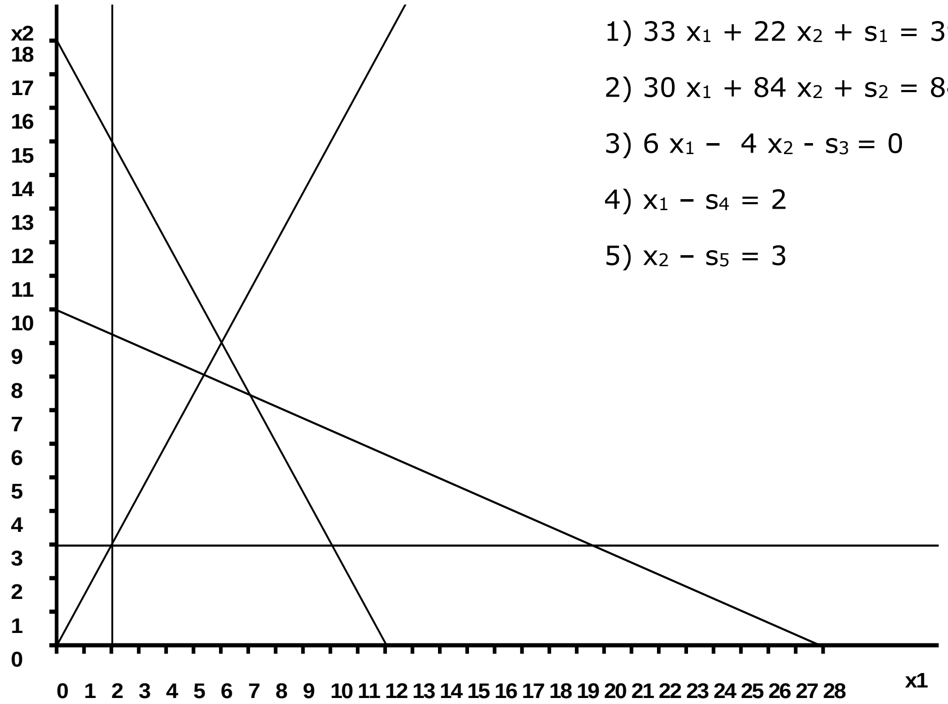
TABLA I

Vértice	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	Z ($)
A	0	0	300	420	320	0
B	0	40	60	0	160	3.200
C	20	30	0	0	40	3.600
D	30	20	0	50	0	3.400
E	40	0	60	200	0	2.400

EJERCICIO DE APLICACIÓN

En la Figura VII se presentan las rectas asociadas al siguiente conjunto de restricciones:

FIGURA VII



1) $33\ x_1 + 22\ x_2 + s_1 = 396$

2) $30\ x_1 + 84\ x_2 + s_2 = 840$

3) $6\ x_1 - 4\ x_2 - s_3 = 0$

4) $x_1 - s_4 = 2$

5) $x_2 - s_5 = 3$

1. Identifique en el gráfico de la figura VII las restricciones dadas y sombree la región factible.

2. Dado el objetivo: Max $18\ x_1 + 21\ x_2$, indique el vértice óptimo y determine el valor de las variables y el valor máximo de la función objetivo en ese punto. Clasifique la solución y justifique.

3. Dado el objetivo: Max $4\ x_1 - 4\ x_2$, indique el vértice óptimo y determine el valor de las variables y el valor máximo de la función objetivo en ese punto. Clasifique la solución y justifique.

4. Dado el objetivo: Min $9\ x_1 + 6\ x_2$, indique el vértice óptimo y determine el valor de las variables y el valor máximo de la función objetivo en ese punto. Clasifique la solución y justifique.

La idea de explorar los vértices de la región factible para encontrar la solución óptima de un programa lineal, es la que incorpora un algoritmo de solución que se denomina **Método Simplex**. En cada paso de este algoritmo, se resuelven en forma simultanea las ecuaciones que forman un vértice, se prueba si ese vértice es óptimo, y si no lo es, se pasa a otro vértice adyacente que será mejor que el anterior en término de utilidades o costos, y se repite el proceso hasta encontrar el vértice óptimo.

A continuación, describiremos los pasos a seguir para aplicar el método simplex:

1º) Convertir las desigualdades en igualdades, incorporando variables de holgura o slack, sumándolas o restándolas según el sentido de la desigualdad.

Recordemos que estas variables aparecen en la función objetivo con coeficiente nulo, ya que no aportan ningún beneficio que pueda reflejarse en dicha función.

$$\text{Max } z = 60\ x_1 + 80\ x_2 + 0\ x_3 + 0\ x_4 + 0\ x_5$$

S.a.:

$$\begin{aligned} 6\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 \quad\quad\quad &= 300 \\ 5\,x_1 + 10\,x_2 \quad + x_4 \quad &= 400 \\ 8\,x_1 + 4\,x_2 \quad\quad + x_5 &= 320 \end{aligned}$$

$$\forall\ x_i \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4, 5$$

Para este problema:

x_3: número de plaquetas electrónicas que no se utilizan

x_4: número de planchas de plástico que no se utilizan

x_5: horas de mano de obra que no se utilizan

Al añadir las variables de holgura se obtiene un modelo modificado que contiene sólo igualdades, es decir, se obtiene un sistema de ecuaciones.

En términos generales, un modelo de programación lineal tiene m ecuaciones y n incógnitas no negativas, en donde $n \geq m$. Cuando el número de variables es mayor al número de ecuaciones, para resolver el problema se trabaja con las soluciones posibles básicas de éste, las que gráficamente corresponden a los vértices del polígono de soluciones.

Una **solución posible básica** es el conjunto de valores de las variables, no negativos, que satisfacen las restricciones, en la que se anulan n - m variables y los m valores restantes se obtienen resolviendo el sistema cuadrado m x m.

Las n - m variables que se igualan a cero reciben el nombre de **variables no básicas**, y las m variables que se utilizan en el proceso de resolución reciben el nombre de **variables básicas**.

2º Encontrar una solución básica inicial o de partida para el problema

En el problema del ejemplo ha quedado planteado un sistema de 3 ecuaciones y 5 incógnitas. Para encontrar una solución básica deberemos anular dos variables, y encontrar los valores de las tres restantes. Para determinar qué variables serán básicas y cuáles serán no básicas, se analiza la matriz de coeficientes de las restricciones, buscando la matriz identidad de orden m x m. En este caso, de orden 3 x 3.

Matriz de coeficientes ampliada del problema

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_0
6	6	1	0	0	300
5	10	0	1	0	400
8	4	0	0	1	320

Los vectores i-ésimos unitarios indican las variables que estarán en la base en la solución inicial o de partida.

3º Completar la tabla simplex

La tabla puede diferir en su estructura según el autor que se analice, o el gusto de quien trabaja, pero la información que contiene es la misma. A continuación, en la Tabla I, se presenta el cuadro inicial del método, y se realiza la descripción del mismo.

Tabla I

		c_j →	60	80	0	0	0
c_i	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
0	X_3	300	6	6	1	0	0
0	X_4	400	5	10	0	1	0
0	X_5	320	8	4	0	0	1
	Zj	0	0	0	0	0	0
		Cj-Zj	60	80	0	0	0

Variables Básicas

Coeficientes de la función objetivo de las variables básicas

Valores del lado derecho de las restricciones

Coeficientes de la función objetivo

Coeficientes de las restricciones

Fila z_j

Fila $c_j - z_j$

Contenido de la tabla:

Fila c_j: está compuesta por los coeficientes de las variables en la función objetivo.

Columna c_j: contiene los coeficientes de la función objetivo de las variables básicas.

Columna Base: Indica las variables básicas. Éstas se ubican en la base, en la fila que corresponde a la ubicación del número uno en el vector unitario.

Columna P_0: (también se la suele llamar vector solución). En el primer cuadro, contiene los valores del lado derecho de las ecuaciones de restricción. Sus elementos se identifican como λ_i

en el Teorema que fundamenta el método, representando el valor de la variable ubicada en la i-ésima fila de la base).

Columnas P_1 a P_5: en el primer cuadro, contiene los coeficientes de las variables en las restricciones. En los cuadros siguientes, los elementos de estas columnas se identifican como λ_{ij} en el Teorema que fundamenta el método (elemento correspondiente a la i-ésima fila de la base y a la j-ésima columna de la tabla).

Fila z_j: El valor de z_j se calcula sumando los productos de los coeficientes c_i de las variables básicas y los valores de los elementos de la columna j correspondiente. Es decir, $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_{ij} \; \forall j$. Por ejemplo, $Z_1 = 0 \times 6 + 0 \times 5 + 0 \times 8 = 0$.

Para la columna P_0 indica el valor que asume la función objetivo en la solución $\left(z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_i \right)$.

Fila $c_j - z_j$: Refleja la diferencia entre los coeficientes de las variables en la función objetivo y los valores de z para el vector j correspondiente.

4º Analizar si la solución es óptima

Para ello se examina la fila c_j - z_j, empleando el siguiente criterio:

- En caso de trabajar con un problema de **máximo**, se habrá encontrado una solución óptima, cuando todas las diferencias c_j - z_j sean menores o iguales a 0.

$$\mathbf{Z_{(MAX)} \text{ si } \forall \, j, \, c_j - z_j \leq 0}$$

- En caso de trabajar con un problema de **mínimo**, se habrá encontrado una solución óptima, cuando todas las diferencias c_j - z_j sean mayores o iguales a 0.

$$\mathbf{Z_{(MIN)} \text{ si } \forall \, j, \, c_j - z_j \geq 0}$$

Si al analizar la fila c_j - z_j, se observa que existen valores positivos en caso de máximo, (o valores negativos para el caso de mínimo), la solución encontrada no es óptima y se debe seguir trabajando. Esto implica ingresar a la base el vector asociado a una variable no básica.

Para determinar la variable no básica que debe hacerse básica, se emplea el **primer criterio de selección del método simplex:**

elegir aquella variable con la mayor diferencia c_j - z_j, en caso de máximo, es decir, la que más suma (y, la que más resta, en caso de mínimo)

En este caso la variable que debe hacerse básica es x_2, cuyo c_j - z_j = 80. (En la Tabla II está sombreado el vector P_2 asociado a esta variable).

5º Determinar la variable que debe hacerse no básica

Para ello, se calculan los cocientes λ_i / λ_{ij} **para los $\lambda_{ij} > 0$**. Es decir, se realizan los cocientes entre los elementos del vector solución (P_0) y los elementos del vector que ingresa a la base (P_2), fila por fila. Estos cálculos se realizan en la tabla (Ver Tabla II).

Para determinar la variable que se hace no básica, se emplea el **segundo criterio de selección del método simplex:**

de los cocientes λ_i / λ_{ij} para los $\lambda_{ij} > 0$, el menor (ya sea en caso de máximo, como en caso de mínimo)

Al menor de los cocientes, se lo llama θ, e indica a su vez, el nivel que asumirá la variable x_2 en la nueva solución.

Tabla II

	C_j			60	80	0	0	0	
		Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	λ_i / λ_{ij} ; λ_{ij} >0
F1	0	X_3	300	6	**6**	1	0	0	300/6 = 50
F2	0	X_4	**400**	**5**	**10**	**0**	**1**	**0**	400/10 = 40
F3	0	X_5	320	8	**4**	0	0	1	320/4 = 80
		Zj	0	0	0	0	0	0	----
			Cj-Zj	60	80	0	0	0	----

En este caso la variable que se hace no básica es x_4, cuyo vector está sombreado en la Tabla II.

6º Actualizar la tabla simplex

Consiste en formar una nueva base, incorporando el vector de la nueva variable básica y eliminando el vector de la nueva variable no básica. Esto implica transformar en vector unitario, el vector que ingresa a la base.

Decimos que el vector que ingresa, lo hace en el lugar del vector que sale. En la columna "Base" de la nueva Tabla Simplex, x_2 ocupará el lugar que tenía x_4 y el vector

$\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$, deberá transformarse en un vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Para hacerlo, se emplean operaciones elementales en filas.

- La primera etapa del proceso de recálculo de la tabla consiste en dividir los elementos del vector que sale de la base por el elemento intersección entre el vector que entra y el vector que sale.

  Para nuestro ejemplo se deben dividir los elementos de la fila F2 de la Tabla II por 10, obteniendo una nueva fila F'2, cuyos elementos son: $\begin{pmatrix} \mathbf{40} & \mathbf{1/2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1/10} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

- El segundo paso consiste en trabajar con las filas restantes de manera que se obtengan ceros en la columna de la variable que se hace básica. Para esto, se multiplican los elementos de la fila obtenida en el paso anterior (F'2) por el elemento intersección entre la columna de la variable que se hace básica y la fila que se quiere recalcular, cambiado de signo, y se le suman los elementos de la fila que se reemplaza.

  Para nuestro caso se deben calcular dos filas nuevas F'1 y F'3.

F’1 = F’2 x (-6) + F1
F’3 = F’2 x (-4) + F3

Cálculos de F’1

[F´2 x (-6)]		(-6) x 40	(-6) x 1/2	(-6) x 1	(-6) x 0	(-6) x 1/10	(-6) x 0
[F1]	+	300	6	6	1	0	0
[F´1]		60	3	0	1	-3/5	0

Cálculos de F’3

[F´2 x (-4)]		(-4) x 40	(-4) x 1/2	(-4) x 1	(-4) x 0	(-4) x 1/10	(-4) x 0
[F3]	+	320	8	4	0	0	1
[F´3]		160	6	0	0	-2/5	1

Estos cálculos se transfieren a la nueva tabla (Ver Tabla III). Con esta información se repite el proceso de cálculo de la fila z_j y la fila $c_j - z_j$, y se repiten los pasos 4º y siguientes, de ser necesario.

Tabla III

C_j			60	80	0	0	0	
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	λ_i / λ_{ij} ; λ_{ij} >0
0	X_3	**60**	**3**	**0**	**1**	**-3/5**	**0**	60 / 3 = 20
80	X_2	40	**½**	1	0	1/10	0	40 x 2 = 80
0	X_5	160	**6**	0	0	-2/5	1	160 / 6 = 26,66
	Zj	3.200	40	80	0	8	0	----
		Cj-Zj	20	0	0	-8	0	----

La solución obtenida en este cuadro está dada por Z = 3.200, x_3 = 60, x_2 = 40, x_5 = 160, x_1 y x_4 son variables no básicas iguales a cero.

Como la diferencia $c_1 - z_1 = 20$, esto implica que se puede mejorar esta solución incorporando a la base el vector asociado a x_1. Se calculan los cocientes λ_i / λ_{ij} , para λ_{ij} >0, con los elementos del vector P_0 y P_1 fila por fila. Esta información se encuentra en la Tabla III. El menor de los cocientes calculados es 20. Esto indica que el vector asociado a x_3 debe salir de la base para que ingrese el vector asociado a x_1 y esta última asume el valor 20.

Actualizando la tabla simplex según las operaciones descriptas en el paso 6º, y calculando las filas z_j y $c_j - z_j$ se obtiene la Tabla IV.

Tabla IV

C_j			60	80	0	0	0
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
60	X_1	20	1	0	1/3	-1/5	0
80	X_2	30	0	1	-1/6	1/5	0
0	X_5	40	0	0	-2	4/5	1
	Zj	3.600	60	80	20/3	4	0
		Cj-Zj	0	0	-20/3	-4	0

Como para todo j, $c_j - z_j \leq 0$; detenemos el procedimiento porque hemos llegado a la solución óptima. Siendo ésta (observe el vector solución, P_0), $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ y $x_5 = 40$, y el valor del funcional, 3.600.

Interpretando estos valores se puede decir que se deben producir 20 autos y 30 robots, que se utilizan todas las plaquetas electrónicas y las planchas de plástico y que no estamos empleando 40 horas de mano de obra de las 320 disponibles. Con este esquema de producción, el fabricante de juguetes obtendrá una contribución máxima de $ 3.600.

VARIABLES ARTIFICIALES

La segunda etapa del método simplex indicaba la necesidad de encontrar una solución básica inicial para el problema, para lo que se sugería analizar la matriz de coeficientes de las restricciones, buscando la matriz identidad de orden m x m.

Suele ocurrir que, al analizar la matriz de coeficientes, no se encuentran los m vectores unitarios (lo cual ocurre, generalmente, cuando las restricciones son de ≥ o de =), y para generar la solución básica de partida, debe incorporarse un conjunto de variables denominadas **"artificiales"**, obteniendo un problema distinto del original.

La función de estas variables es sólo la de identificar la solución factible básica inicial, y como no tienen significado en términos de la solución del problema, se aplica un procedimiento para asegurar que no aparezcan en la tabla final. Éste consiste en asignarles **en la función objetivo** un coeficiente lo suficientemente grande, que **reste** en caso de máximo y que **sume** en caso de mínimo.

Dado que los coeficientes son arbitrariamente grandes, la contribución de las variables artificiales a la formación del máximo o del mínimo de Z resulta contraproducente, razón por la que el algoritmo trabajará para eliminarlas rápidamente de la base inicial.

El procedimiento no garantiza la eliminación de todas las variables artificiales, y si alguna figurase con valor distinto de cero en la solución óptima, implicaría que el problema original no tiene solución óptima, es decir, es un problema no factible.

Para determinar el coeficiente de las variables en la función objetivo, algunos autores sugieren asignar un valor arbitrario que sea 10 veces mayor que el valor absoluto del mayor coeficiente de la función objetivo. Otros, sugieren agregarlas en la función objetivo precedidas de un coeficiente indeterminado, para lo que se suele emplear la letra M o W. Este último será el procedimiento que emplearemos en estas notas.

Para explicar el procedimiento, utilizaremos como ejemplo el siguiente ejemplo:

$$\text{Max } z = 30\ x_1 + 20\ x_2$$

S.a.:

$$\begin{aligned} x_1 + 0.5\,x_2 &\leq 10 \\ 4\,x_1 + 3\,x_2 &\geq 30 \\ 2\,x_1 + 4\,x_2 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1 \text{ y } 2$$

1. Corresponde incorporar dos variables de holgura para transformar las inecuaciones en ecuaciones; una debe sumarse en la primera restricción (es una restricción de ≤), una debe restarse en la segunda restricción (es una restricción de ≥):

$$\text{Max } z = 30\,x_1 + 20\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4$$

S.a.:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 0.5\,x_2 & + & x_3 & & & = & 10 \\ 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & - & x_4 & = & 30 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & = & 20 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Ha quedado planteado un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas, por lo que para obtener una solución posible básica inicial se deberá anular una variable y resolver un sistema de 3 x 3.

2. La matriz de coeficientes de las restricciones nos queda:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.5 & 1 & 0 & 10 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 30 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 20 \end{array}\right)$$

Necesitaríamos tres vectores unitarios para obtener la matriz identidad de orden 3 x 3. En este caso sólo tenemos uno. Para generar los vectores que nos faltan, deberemos incorporar variables artificiales. **Se incorporan tantas variables artificiales como vectores unitarios necesitemos generar**, y se las ubica en la restricción en la que necesitamos obtener el elemento "uno" del vector unitario que nos falta.

Como el problema con el que trabajamos es de **mínimo**, los coeficientes de las variables artificiales deberán **sumarse en la función objetivo**. Recordemos que **si el problema es de máximo**, **los coeficientes deben restarse**.

Incorporando las variables artificiales al modelo del apartado 1., obtenemos el modelo siguiente:

$$\text{Max } z = 30\,x_1 + 20\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 - M\,x_5 - M\,x_6$$

S.a.:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 0.5\,x_2 & + & x_3 & & & & & & & = & 10 \\ 4\,x_1 & + & 3\,x_2 & & & - & x_4 & + & x_5 & & & = & 30 \\ 2\,x_1 & + & 4\,x_2 & & & & & & & + & x_6 & = & 20 \end{array}$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

La nueva matriz de coeficientes de las restricciones ahora cuenta con los tres vectores unitarios que nos permitirán obtener directamente la solución posible básica inicial, anulando x_1, x_2 y x_4.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 4 & 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right)$$

3. A continuación, se presenta la Tabla Simplex inicial del problema modificado:

C_j			30	20	0	0	- M	- M	
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	λ_i / λ_{ij} ; $\lambda_{ij} > 0$
0	X_3	10	1	0.5	1	0	0	0	10 / 0.5 = 20
- M	X_5	30	4	3	0	-1	1	0	30 / 3 = 10
- M	X_6	20	2	4	0	0	0	1	20 / 4 = 5
	Zj	- 50 M	- 6 M	- 7 M	0	M	- M	- M	
		Cj-Zj	30 + 6M	20 + 7M	0	- M	0	0	

Algunas consideraciones del proceso de solución:

- Si en el cuadro final aparece alguna variable artificial con valor positivo, esto implica que el problema original es no factible.
- Si en el cuadro final aparecen variables artificiales, todas con valor cero, esto implica que el problema original tiene solución óptima degenerada.

INTERPRETACIÓN ECONÓMICA DE LOS ELEMENTOS DE LA TABLA SIMPLEX

Recordemos el planteo original del problema de los juguetes que utilizamos como ejemplo para explicar los métodos gráfico y simplex, al que habíamos incorporado las variables de holgura.

Max $60\,x_1 + 80\,x_2 + 0\,x_3 + 0\,x_4 + 0\,x_5$ (Contribución total a la utilidad)

Sujeto a

$6\,x_1 + 6\,x_2 + x_3 = 300$ (Plaquetas electrónicas)

$5\,x_1 + 10\,x_2 + x_4 = 400$ (Planchas de plástico)

$8\,x_1 + 4\,x_2 + x_5 = 320$ (Horas mano de obra)

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

Donde: x_1 : número de autos a fabricar en el mes

x_2 : número de robots a fabricar en el mes

x_3 : número de plaquetas electrónicas que no se utilizan

x_4 : número de planchas de plástico que no se utilizan

x_5 : horas de mano de obra que no se utilizan

En este problema, $\begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ representan las cantidades de insumos (plaquetas electrónicas, planchas de plástico y horas de mano de obra), necesarios para fabricar un auto, y $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}$ los insumos necesarios para fabricar un robot.

Aplicando el método Simplex, se encontró la primera solución posible básica, dada por: $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = 300$; $x_4 = 400$ y $x_5 = 320$, para la que Z asumía el valor cero.

Introduciendo a la base el vector asociado a x_2 y eliminando de la misma el vector asociado a x_4, se obtuvo la siguiente tabla simplex:

C_j			60	80	0	0	0
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
0	X_3	60	3	0	1	-3/5	0
80	X_2	40	½	1	0	1/10	0
0	X_5	160	6	0	0	-2/5	1
	Zj	3.200	40	80	0	8	0
		Cj-Zj	20	0	0	-8	0

En esta solución, produciendo 40 robots y ningún auto, se obtiene una contribución total a la utilidad de $3.200. Con este esquema de producción se utilizan todas las planchas de plástico disponibles y se tiene un excedente de 60 plaquetas electrónicas y 160 hs. de mano de obra.

Puede ser interesante analizar qué sucedería si el empresario decidiera producir autos, también.

Para producir un auto son necesarias 6 plaquetas electrónicas, 5 planchas de plástico y 8 hs. de mano de obra. Existe disponibilidad de plaquetas electrónicas y hs. de mano de obra; no ocurre lo mismo con las planchas de plástico. Quiere decir que, para poder producir un auto, se debería dejar de producir robots en alguna cantidad, de manera de liberar planchas de plástico, que son las que se han usado en su totalidad.

Son necesarias 5 planchas de plástico para fabricar un auto y 10 para producir un robot.

¿Qué cantidad de robots se deberá dejar de producir para liberar las 5 planchas que hacen falta para producir un auto?

Aplicando regla de tres simple:

10 planchas ________________ 1 robot

5 planchas ________________ $\frac{5 \text{ planchas} . 1 \text{ robot}}{10 \text{ planchas}} = \frac{1}{2}$ robot

Entonces, dejando de producir ½ robot se obtienen las 5 planchas que hacen falta:

$$\underbrace{10}_{\text{Planchas de plástico que requiere 1 robot}} \quad \text{x} \quad \underbrace{1/2}_{\text{Disminución en el nº de robots fabricados para liberar planchas de plástico para fabricar 1 auto}} \quad = \quad \underbrace{5}_{\text{nº de planchas de plástico que se necesitan para fabricar 1 auto}}$$

Cuando se deja de producir ½ robot, no sólo se dejan de utilizar planchas plásticas, sino también los otros dos insumos. Son 3 plaquetas electrónicas y 2 h de mano de obra las que dejarán de utilizarse:

$$\underbrace{6}_{\substack{\text{Plaquetas}\\ \text{que requiere}\\ \text{1 robot}}} \quad \text{x} \quad \underbrace{1/2}_{\substack{\text{Disminución en el nº de}\\ \text{robots fabricados para}\\ \text{liberar planchas de plástico}\\ \text{para fabricar 1 auto}}} \quad = \quad \underbrace{3}_{\substack{\text{nº de plaquetas que}\\ \text{dejan de utilizarse}\\ \text{por dejar de fabricar}\\ \text{½ robot}}}$$

$$\underbrace{4}_{\substack{\text{Horas M.O.}\\ \text{que requiere}\\ \text{1 robot}}} \quad \text{x} \quad \underbrace{1/2}_{\substack{\text{Disminución en el nº de}\\ \text{robots fabricados para}\\ \text{liberar planchas de plástico}\\ \text{para fabricar 1 auto}}} \quad = \quad \underbrace{2}_{\substack{\text{Horas M.O. que}\\ \text{dejan de utilizarse}\\ \text{por dejar de fabricar}\\ \text{½ robot}}}$$

Para producir un auto son necesarias:
6 plaquetas electrónicas,
5 planchas de plástico y
8 hs. de mano de obra.

Si se deja de fabricar ½ robot, se dejarán de utilizar:
3 plaquetas electrónicas,
5 planchas de plástico y
2 hs. de mano de obra.

Entonces, de las 6 plaquetas que se necesitan para fabricar 1 auto, 3, resultarán de las que no se utilicen por dejar de fabricar ½ robot y, las 3 restantes, se tomarán de las que habían quedado disponibles. Lo mismo sucederá con las horas de mano de obra. De las 8 horas que se necesitan para fabricar 1 auto, 2, resultarán de las que no se utilicen por dejar de fabricar ½ robot y, las 6 restantes, se tomarán de las que habían quedado disponibles. Recordemos que la solución actual indica que existen 60 plaquetas y 160 h de mano de obra sin utilizar. Por último, las 5 planchas de plástico necesarias, se obtendrán al dejar de producir ½ robot.

La información de las modificaciones que deben hacerse en el nivel de producción y recursos para fabricar un auto está reflejada en la columna del vector P_1 del cuadro simplex. El elemento $\lambda_{11} = 3$, indica en cuánto debe disminuir el nivel del recurso plaquetas electrónicas sobrantes, para producir 1 auto. El elemento $\lambda_{21} = 1/2$, indica en cuánto debe disminuir la producción de robots, para producir 1 auto. Y el elemento $\lambda_{31} = 6$, indica en cuánto debe disminuir el nivel del recurso hora de mano de obra sobrante, para producir 1 auto.

En términos generales los elementos λ_{ij} indican las modificaciones que deben hacerse en el nivel de producción de la variable ubicada en la i-ésima fila de la base para producir **una unidad** de una variable j-ésima.

- Cuando λ_{ij} es positivo, indica una disminución del nivel de la variable básica
- Cuando λ_{ij} es negativo, indica un aumento del nivel de la variable básica

Antes de continuar, analicemos qué modificaciones se producirían en el nivel de producción de las variables básicas, si se llegara a romper una plancha plástica.

En este momento se están empleando todas las planchas disponibles (400), para fabricar los 40 robots. ¿Qué sucedería si una de las 400 se rompe? Naturalmente, se deberá dejar de producir 1/10 robot, ya que 1 robot emplea 10 planchas de plástico. ¿Qué sucedería con el resto de los recursos, plaquetas electrónicas y horas de mano de obra, en consecuencia? Al dejar de producir 1/10 robot y no afectar los recursos a la producción de otro juguete, se dejarán de usar 3/5 plaquetas y 2/5 hs. de mano de obra, aumentando los niveles de x_3 (nº de plaquetas que no se utilizan) y de x_5 (hs. de mano de obra que no se utilizan).

$$\underbrace{6}_{\text{Plaquetas que requiere 1 robot}} \quad \times \quad \underbrace{1/10}_{\text{Disminución en el nº de robots fabricados}} \quad = \quad \underbrace{3/5}_{\text{Plaquetas que no se utilizan}}$$

$$\underbrace{4}_{\text{Hs. M.O que requiere 1 robot}} \quad \times \quad \underbrace{1/10}_{\text{Disminución en el nº de robots fabricados}} \quad = \quad \underbrace{2/5}_{\text{Hs. M.O. que no se utilizan}}$$

Esta información puede encontrarse en la columna correspondiente al vector P_4 del cuadro simplex.

Las modificaciones que se realicen en el esquema de producción, producirán modificaciones en la función objetivo.

Cuando se calcula la fila z_j , se determina en cuánto se modifica el valor de Z (en este caso, la contribución total a la utilidad), por producir a nivel unitario la variable j-ésima. Recordemos que $z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \lambda_{ij} \ \forall j$.

- Si z_j es positivo, indica en cuánto disminuye Z por producir la variable j a nivel unitario
- Si z_j es negativo, indica en cuánto aumenta Z por producir la variable j a nivel unitario

Los coeficientes c_j determinan la contribución unitaria al objetivo, para este caso, cuánto gana el empresario por producir y vender un auto o un robot.

Cuando se calcula la fila $c_j - z_j$, se determina el incremento neto en Z como consecuencia de producir el producto j-ésimo a nivel unitario.

- **Si el incremento neto es positivo, esto indica que aumentará el valor de Z**.

  En caso de máximo, resultará conveniente producir una unidad del producto j-ésimo, porque la contribución a la utilidad (c_j) es mayor que el costo de producirlo (z_j). En caso de mínimo, no resultará conveniente, ya que el aumento de Z implica una desmejora de la función de costo.

- **Si el incremento neto es negativo, esto indica que disminuirá el valor de Z**.

  En caso de máximo, no resultará conveniente producir una unidad del producto j-ésimo, porque la contribución a la utilidad es menor que el costo de producirlo. En caso de mínimo, resultará conveniente producir una unidad del producto j-ésimo, ya que el incremento neto negativo implica una disminución en la función de costo.

En nuestro ejemplo, el incremento neto en Z que produce la fabricación de un auto, es de \$20 (60 - 40). Como conviene producir una unidad, es razonable pensar que convendrá produir un nivel mayor. ¿Cuántos autos más se podrán producir? Producir autos implica que x_1 se hace básica, asumiendo un valor positivo. Lo que queremos saber es ¿Qué valor debe asumir x_1?.

Llamamos θ al nivel que asumirá la variable j-ésima que se hará básica. **Esta variable deberá asumir un valor que asegure que la nueva solución sea factible** (no se admite que las variables asuman valores negativos). Al incorporar esta variable, se modificarán los valores de las variables en la solución actual. Por otra parte, una de las variables básicas en la solución ctual deberá dejar de serlo, haciéndose igual a cero.

Fabricar autos producirá cambios en los valores de x_2, x_3 y x_5 . Los nuevos valores de estas variables estarán dados por:

Nuevo Valor	=	Valor actual	-	Modificación que se debe realizar para producir una unidad de la variable j-ésima	x	nº de unidades que se produzcan de la variable j-ésima
$\lambda_i´$		λ_i		λ_{ij}		θ

Para que la nueva solución sea factible, estos nuevos valores deben ser no negativos. Es decir, $\lambda_i - \lambda_{ij} . \theta \geq 0$. Por lo tanto, $\theta \leq \frac{\lambda_i}{\lambda_{ij}}$.

Para nuestro ejemplo:

$x_3 = \lambda_1 - \lambda_{11}. \theta \geq 0 \;\rightarrow\; 60 - 3 . \theta \geq 0 \;\therefore\; \theta \leq 20$

$x_2 = \lambda_2 - \lambda_{21}. \theta \geq 0 \;\rightarrow\; 40 - \frac{1}{2} . \theta \geq 0 \;\therefore\; \theta \leq 80$

$x_5 = \lambda_3 - \lambda_{31}. \theta \geq 0 \;\rightarrow\; 160 - 6 . \theta \geq 0 \;\therefore\; \theta \leq 26.66$

θ debe asumir un valor que satisfaga simultáneamente las tres inecuaciones. Si $\theta \leq 20$, será también menor o igual a 26.66 y menor o igual a 80. Es por eso que $\theta = \min \frac{\lambda_i}{\lambda_{ij}}$. En este caso θ = 20, es decir, x_1 deberá asumir el valor 20.

Habiendo determinado el valor de θ, y sin necesidad de calcular el nuevo cuadro simplex, se puede determinar el valor de Z y de las variables en la nueva solución.

Z’	=	Z	+	θ	x	(c_j - z_j)
Nuevo Valor de Z		Valor actual		nº de unidades que se produzcan de la variable j-ésima		Incremento neto en Z por producir una unidad de la variable j-ésima

Z’ = 3.200 + 20 x 20 = 3.600

Y las variables:

$$x_1 = \theta = 20$$
$$x_2 = \lambda_2 - \lambda_{21}.\ \theta = 40 - \frac{1}{2}.20 = 30$$
$$x_3 = \lambda_1 - \lambda_{11}.\ \theta = 60 - 3\ .\ 20 = 0 \text{ (variable que sale de la base)}$$
$$x_4 = 0 \text{ (variable no basica)}$$
$$x_5 = \lambda_3 - \lambda_{31}.\ \theta = 160 - 6\ .\ 20 = 40$$

El nuevo esquema de producción implicará fabricar 20 autos y 30 robots. Con este esquema, se utilizarán todas las plaquetas electónicas y las plnachas de plástico y quedarán disponibles 40 horas de mano de obra, generando una contribución total a la utilidad de $ 3.600.

De esta forma hemos podido determinar una nueva solución, pero no estamos en condiciones de establecer si la misma es óptima o nó. Para ello, deberemos calcular una nueva tabla simplex. A continuación se presenta la tabla simplex que surge al hacer básica x_1. Como los elementos de la fila c_j-z_j son negativos o nulos, la solución dada es la óptima.

C_j			60	80	0	0	0
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
60	X_1	20	1	0	1/3	-1/5	0
80	X_2	30	0	1	-1/6	1/5	0
0	X_5	40	0	0	-2	4/5	1
	Zj	3600	60	80	20/3	4	0
		Cj-Zj	0	0	-20/3	-4	0

EJERCICIO DE APLICACIÓN

Dado:

Max $7.5\ x_1 + 13\ x_2 + 17\ x_3$ (Contribución total a la utilidad)

S.A:

$0.2\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.6\ x_3 \leq 90$ (horas de corte)

$0.3\ x_1 + 0.3\ x_2 + 0.4\ x_3 \leq 102$ (horas de costura)

$0.4\ x_1 + 0.5\ x_2 + 0.6\ x_3 \leq 94$ (metros de tela)

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Donde: x_1 : cantidad de bolsas tipo I a fabricar

x_2 : cantidad de bolsas tipo II a fabricar

x_3 : cantidad de bolsas tipo III a fabricar

y el siguiente cuadro Simplex de este problema:

C_j			7.5	13	17	0	0	0
	Base	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
		150	0.33	0.50	1	1.66	0	0
		42	0.16	0.10	0	-0.66	1	0
		4	0.20	0.20	0	-1	0	1
	Zj	2550	5.61	8.50	17	28.22	0	0
		Cj-Zj	1.89	4.50	0	-28.22	0	0

1. Complete los datos que faltan en el cuadro.
2. Defina las variables de holgura teniendo en cuenta que x_4 corresponde a la 1º restricción, x_5 a la 2º restricción y x_6 a la 3º restricción.
3. Indique la solución y explique su significado.
4. ¿Qué significan $\lambda_{22} = 0.10$; $\lambda_{14} = 1.66$; $\lambda_{34} = -1$ y $\lambda_{11} = 0.33$?
5. ¿Qué significa $Z_1 = 5.61$?
6. ¿Qué significa $c_4 - z_4 = - 28.22$?
7. Si se pudiera mejorar la solución ¿Cuál será el valor de la función económica y cuál el valor de las variables en la nueva solución? **NO REALICE OTRA TABLA SIMPLEX, E INDIQUE LAS FÓRMULAS QUE EMPLEA PARA OBTENER LOS DATOS.**

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, David R., SWEENEY, Dennis J., WILLIAMS, Thomas A., CAMM, Jeffrey, COCHRAN, James, FRY, Michael, OHLMANN, Jeffrey. *Métodos cuantitativos para los negocios,* 13ª ed. Cengage Learning. México, 2016.

CARIGNANO, Claudia E. y ALBERTO, Catalina L. *Apoyo cuantitativo a las decisiones,* 5ª ed. Asociación Cooperadora de la Facultad de Ciencias Económicas. Argentina, 2019.

DAVIES K. McKEOWN P. *Modelos Cuantitativos para Administración*. Grupo Editorial Iberoamérica. México, 1986.

HILLIER, Frederick S. y LIEBERMAN, Gerald J. *Introducción a la investigación de operaciones,* 9ª ed. McGraw-Hill. México, 2010.