

**Universidad Nacional de Córdoba  
Facultad de Ciencias Exactas,  
Físicas y Naturales**

**Tesis Doctoral**



**Ecualización Óptima en Canales No-Lineales  
Altamente Dispersivos para Aplicación en Sistemas  
de Comunicación de Alta Velocidad**

Gabriel Nicolás Maggio

Córdoba, Argentina  
2015

# Ecualización Óptima en Canales No-Lineales Altamente Dispersivos para Aplicación en Sistemas de Comunicación de Alta Velocidad

por

Ing. Gabriel Nicolás Maggio

Dra. Graciela Corral Briones

Directora

## **Comisión Asesora**

Dr. Mario Rafael Hueda

FCEFYN, UNC

Dr. Víctor Hugo Sauchelli

FCEFYN, UNC

Esta Tesis fue enviada a la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba para cumplimentar los requerimientos de obtención del grado académico de Doctor en Ciencias de la Ingeniería.

Córdoba, Argentina

Setiembre de 2015



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA

Facultad de Cs. Exactas, Físicas y Naturales

## ACTA DE EXAMENES

Libro: 00001

Acta: 03197

Hoja: 01/01

LLAMADO: 1

25/09/2015

CATEDRA - MESA:

DI002 TESIS DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INGENIERIA

NUMERO	APELLIDO Y NOMBRE	DOCUMENTO	INGRESO	COND.	NOTA	FIRMA
30240837	MAGGIO, Gabriel Nicolás	DNI: 30240837	2009	T	APROBADO	

DOWHUSZKO, Alexis - ~~REX, Pedro Leonardo~~ - GROSZ, Diego - FINOCHIE, J. Jorge Manuel - VERA, Elizabeth

Observaciones:

Córdoba, \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Certifico que la/s firma/s que ha/n sido puesta/s en la presente Acta pertenece/n a

  
 Jorge M. Finochie

1	0	1	0	1
Inscriptos	Ausentes	Examinados	Reprobados	Aprobados
22/09/2015	09:30:21		(0-3)	(4-10)

Libro/Acta: 0000103197

Hoja: 01/01



A mis padres,

A mi hermano,

A mi mujer,

A mis amigos,

A la memoria de mis abuelos y mi tía  
Carmen.

## Agradecimientos

La presente Tesis es el resultado del esfuerzo de mucha gente, a la cuál estoy enormemente agradecido:

A mi familia, mi mujer y mis amigos por su paciencia y apoyo.

A Mario, Oscar y Graciela por la dirección y el apoyo.

Al Laboratorio de Comunicaciones Digitales de la FCEFYN. A su grupo directivo, Carmen, Mario, Graciela y Jorge; y a todos y cada uno de mis compañeros de estudio, en especial a Mariano y Damián.

A la Fundación Tarpuy.

Al CONICET.

---

## Resumen

La demanda de velocidad viene creciendo rápidamente en las últimas décadas, y esta tendencia no parece que vaya a detenerse. Esto requiere entonces del uso de algoritmos cada vez más sofisticados para optimizar al máximo la *performance* de los sistemas de comunicación. Para las próximas décadas el desafío será alcanzar la *performance óptima minimizando la complejidad de implementación*. Conjugar estos dos aspectos es clave para poder dar respuesta a las crecientes demandas del mercado en un mediano y largo plazo.

Desde el punto de vista del desempeño, los receptores que emplean el detector de secuencia de máxima verosimilitud (*maximum likelihood sequence detector* - MLSD) representan la solución de desempeño óptimo<sup>1</sup> en cualquier sistema de comunicación. Por este motivo, han sido extensamente estudiados y hay disponibles numerosos esquemas de recepción por MLSD en canales lineales y no-lineales. El inconveniente con los receptores MLSD es que la complejidad crece exponencialmente con la memoria de la interferencia intersímbolo (*intersymbol interference* - ISI) introducida por el canal. Esto hace que su implementación práctica en receptores comerciales sea imposible en canales altamente dispersivos. Esta situación deja esencialmente dos alternativas: i) Usar esquemas de ecualización sub-óptimos más simples. ii) Usar receptores MLSD asistidos por esquemas de reducción de complejidad que no afecten significativamente la *performance* de éste. Ambas alternativas han sido adoptadas con éxito en muchas aplicaciones, principalmente en canales con distorsión lineal. Sin embargo, en el caso de canales no-lineales se ha visto que el uso de esquemas sub-óptimos puede presentar pérdidas de desempeño muy grandes en comparación al óptimo (*i.e.*, el receptor MLSD). Además, las técnicas existentes para reducción de complejidad del MLSD no presentan grandes beneficios en canales no-lineales altamente dispersivos.

Esta Tesis propone un nuevo receptor MLSD para canales no-lineales. Este MLSD muestra una suave y lenta degradación de desempeño a medida que se reduce su complejidad de implementación. Esto permite entonces, mejorar el desempeño alcanzable con tecnologías disponibles actualmente. Como un ejemplo de aplicación, se presentan resultados en enlaces de fibra óptica de larga distancia con modulación de intensidad y detección

---

<sup>1</sup>El MLSD es óptimo si los símbolos transmitidos son equiprobables. En caso contrario, el desempeño óptimo se consigue con el criterio de máxima probabilidad a posteriori (*maximum a posteriori probability* - MAP).

directa (*intensity modulation and direct detection* - IM/DD) sin compensación óptica de dispersión. Estos enlaces de alta velocidad se caracterizan por presentar una respuesta no-lineal con memoria de varios símbolos. Estas características convierten a los enlaces IM/DD de fibra óptica en un escenario desafiante para el diseño de receptores óptimos, por lo cual resulta en una aplicación de interés para esta Tesis, aún cuando el MLSO propuesto es general y puede aplicarse a todo tipo de canales no-lineales factibles de ser modelados por series de Volterra (*e.g.*, canal magnético, enlaces satelitales, *etc.*).



## Summary

In the past decades, a huge speed demand has been experienced, and this trend does not seem to change. This requires the use of increasingly sophisticated algorithms to maximize *performance* of communication systems. For the next decades the challenge will be to achieve the *optimal performance, while minimizing the implementation complexity*. These two aspects are crucial to meet the increasing market demands in both, medium and long term.

From the viewpoint of performance, receivers employing the maximum likelihood sequence detector (MLSD) represent the solution of optimal<sup>1</sup> performance in any communication system. For this reason, they have been extensively studied and many MLSD schemes are available for reception in linear and nonlinear channels. The drawback with MLSD receivers is the complexity, which grows exponentially with the memory of the intersymbol interference (ISI) that is introduced by the channel. This limitation makes impossible the practical implementation of the MLSD in commercial receivers for highly dispersive channels. This drawback leaves essentially two alternatives: i) Use of sub-optimal equalization schemes, at a cost in performance, but with lower implementation complexity. ii) Use of MLSD schemes, aided by complexity reduction techniques without significantly affecting their performance. Both alternatives have been adopted successfully in many applications, especially in channels with linear distortion. However, in the case of nonlinear channels, the use of sub-optimal schemes can present a very large performance loss respect to the optimal scheme (*i.e.*, MLSD receiver). In addition, existing techniques for complexity reduction of MLSD receivers do not offer major benefits in highly nonlinear dispersive channels.

This Thesis proposes a new MLSD receiver for nonlinear channels. This MLSD shows a smooth and slow performance degradation as its implementation complexity is reduced. This allows to improve the performance achievable with available technologies. As an example of application, results are presented in long distance dispersion unmanaged fiber optic links with intensity modulation and direct detection (IM/DD). These high-speed fiber links are characterized for being nonlinear and having memory of several symbols. These features make this channel a very challenging scenario for the design of optimal receivers, thus

---

<sup>1</sup>The MLSD criterion is optimum if transmitted symbols are equiprobable. Otherwise the optimum performance is achieved by using the criterion of maximum a posteriori probability (MAP).

resulting in an application of interest for this Thesis, even though the proposed MLSD is general and can be applied to any class of nonlinear channels (e.g., magnetic channel, satellite links, etc.).

## Resumo

A demanda por velocidade está crescendo rapidamente nas últimas décadas e essa tendência não parece parar. Isto requer então a utilização de algoritmos cada vez mais sofisticados para otimizar o desempenho dos sistemas de comunicação. Assim, o grande desafio para as próximas décadas é alcançar o *desempenho* ótimo enquanto a *complexidade* de implementação é minimizado. Combinar esses dois aspectos é fundamental para responder às crescentes exigências do mercado a médio e longo prazo.

De acordo com o desempenho, os receptores que utilizam o detetor de sequência de verossimilhança máxima (*maximum likelihood sequence estimation* - MLSD) representam a solução de desempenho ótimo<sup>1</sup> em qualquer sistema de comunicação. Este é o motivo por o qual foram amplamente estudados y existem disponíveis numerosos esquemas de recepção por MLSD em canais lineares e não-lineares. A desvantagem com os receptores MLSD é que a complexidade cresce exponencialmente com a memória da interferência intersímbolo (*intersymbol interference* - ISI), introduzida pelo canal. Isto faz com que sua implementação prática em receptores comerciais seja impossível em canais altamente dispersivos. Isso deixa essencialmente duas alternativas: i) Fazer uso de esquemas de equalização subótima, com custo de desempenho maior mais com menor complexidade de implementação. ii) Fazer uso de técnicas de redução de complexidade do MLSD que não afetem significativamente seu desempenho. Ambas alternativas foram adotadas com sucesso em muitas aplicações, principalmente em canais com distorção linear. Embora, no caso de canais não-lineares deu para observar que o uso de esquemas sub-ótimos podem apresentar uma perda de desempenho muito grande em comparação ao ótimo (ou seja, receptor MLSD). Além disso as técnicas existentes para redução de complexidade do MLSD não apresentam grandes benefícios em canais não-lineares altamente dispersivos.

Essa tese propõe um novo receptor MLSD para canais dispersivos, apresentando uma suave e lenta degradação do desempenho. Isto permite, então, melhorar o desempenho alcançável com tecnologias disponíveis atualmente. Como um exemplo de aplicação, se apresentam resultados em canais de fibra ótica de larga distancia com modulação de intensidade y detecção direta (*intensity modulation and direct detection* - IM/DD) e sem compensação ótica. Essas ligações de alta velocidade caracterizam-se por apresentar uma ISI não-linear

---

<sup>1</sup>O MLSD é ótimo se os símbolos transmitidos são igualmente possíveis. Caso contrário, o desempenho ideal é obtido com a critério da máxima probabilidade a posteriori (*maximum a posteriori probability* - MAP).

y de grande memoria. Essas características tornam esses sistemas em um cenário muito desafiante para o projeto de receptores ótimos, por isso é que resulta em uma aplicação de interesse para esta Tese, ainda quando o MLSD proposto é geral y pode ser aplicado a todo tipo de canais não-lineares (e.g., canal magnético, ligação por satélite, etc.).

# ÍNDICE GENERAL

---

<b>Índice General</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.1.1 Canales con Interferencia Intersímbolo No-Lineal . . . . .	3
1.1.2 Compensación de la Interferencia Intersímbolo No-Lineal . . . . .	4
1.2 Ecuación Óptima en Canales con Interferencia Intersímbolo No-Lineal .	6
1.2.1 Detector de Secuencias de Máxima Verosimilitud . . . . .	6
1.2.2 MLSD Basado en Banco de Filtros Apareados (MFB-MLSD) . . . .	7
1.2.3 MLSD Sobremuestreado (OS-MLSD) . . . . .	8
1.3 Compensación Electrónica de la Dispersión . . . . .	9
1.3.1 Sistemas IM/DD con Compensación Electrónica de la Dispersión .	10
1.3.2 MLSD en Sistemas Ópticos con OOK-IM/DD . . . . .	11
1.4 Definición del Problema: Reducción de Complejidad de Receptores MLSD	12
1.5 Objetivos . . . . .	14
1.5.1 MLSD para Canales No-lineales . . . . .	15
1.6 Organización de la Tesis . . . . .	16
<b>2 Transmisión por Canales No-Lineales</b>	<b>19</b>
2.1 Serie de Volterra . . . . .	19
2.1.1 Sistemas No-Lineales de Segundo Orden . . . . .	21
2.1.2 Sistemas No-Lineales de Cualquier Orden N . . . . .	22
2.1.3 Simetría de los Kernels . . . . .	24
2.2 Transmisión de Datos a Través de Canales No-Lineales . . . . .	25
2.2.1 Kernels Unidimensionales de Volterra . . . . .	26
2.3 Comunicaciones por Fibra Óptica . . . . .	29

2.3.1	Ecuación de Propagación . . . . .	30
2.3.2	Distorsión en Fibras Monomodo . . . . .	33
2.3.3	Esquemas de Transmisión OOK con Detección Directa . . . . .	36
2.3.4	Análisis de un Enlace de Fibra Óptica por Serie de Volterra . . . . .	37
2.4	Conclusiones . . . . .	48
<b>3</b>	<b>Detección de Secuencias de Máxima Verosimilitud (MLSD)</b>	<b>49</b>
3.1	Detección con Mínima Probabilidad de Error . . . . .	50
3.1.1	Detección de Secuencias de Símbolos . . . . .	52
3.2	Detector de Viterbi (VD) . . . . .	55
3.2.1	Diagrama de Trellis . . . . .	56
3.2.2	Algoritmo de Viterbi . . . . .	61
3.3	Detectores MLSD Existentes . . . . .	62
3.3.1	Receptores MLSD para Canales Lineales . . . . .	62
3.3.2	Receptores MLSD para Canales No-Lineales . . . . .	65
3.3.3	Discusión . . . . .	68
3.4	Conclusiones . . . . .	71
<b>4</b>	<b>Nuevo Receptor MLSD para Canales No-Lineales</b>	<b>73</b>
4.1	Modelo del Canal No-Linear . . . . .	74
4.1.1	Modelo Ortogonal del Canal . . . . .	74
4.1.2	Compresión Espacial del Canal . . . . .	77
4.1.3	Ortogonalización de un Enlace IM/DD de Fibra Óptica . . . . .	80
4.2	Receptor MLSD para Canales No-Lineales con AWGN . . . . .	84
4.2.1	Receptor MLSD Basado en Filtros Apareados de Blanqueamiento Espacio-Temporal . . . . .	85
4.3	Conclusiones . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Estudio de Desempeño del Nuevo Receptor MLSD</b>	<b>89</b>
5.1	Desempeño en Condiciones Ideales . . . . .	89
5.1.1	Desempeño en Canales OOK-IM/DD Dominados por Dispersión Cromática . . . . .	91
5.1.2	Desempeño en Canales OOK-IM/DD con Dispersión por Modo de Polarización . . . . .	94
5.2	Desempeño en Condiciones No Ideales . . . . .	95
5.2.1	Efecto del Desconocimiento del Canal . . . . .	96
5.3	Conclusiones . . . . .	101

---

<b>6 Conclusiones</b>	<b>103</b>
6.1 Discusión Final . . . . .	103
6.2 Pasos a Seguir . . . . .	104
6.2.1 Una Posible Arquitectura de Implementación en Hardware . . . . .	104
<b>7 Publicaciones</b>	<b>107</b>
7.1 Descripción de las Publicaciones . . . . .	107
<b>Referencias</b>	<b>109</b>
<b>Ap. A Probabilidad de Error del MLSD</b>	<b>117</b>
A.1 Método de Estimación de la Probabilidad de Error . . . . .	117
A.2 Aproximación de la Probabilidad de Evento-Error . . . . .	120
A.2.1 Probabilidad de Evento-Error para un Canal con AWGN . . . . .	121
A.2.2 Ejemplo . . . . .	122
A.3 Probabilidad de Error de un VD Desajustado . . . . .	124
A.3.1 Ejemplo . . . . .	125





## LISTA DE FIGURAS

---

1.1	Respuesta en fase (I) y cuadratura (Q) de un amplificador de tubo de onda progresiva en función de la magnitud de entrada ( $r$ ) normalizada al punto de saturación [1]. . . . .	3
1.2	Estructuras de receptores MLSD para canales no-lineales ( <i>del inglés</i> , NLC): (A) MFB-MLSD y (B) OS-MLSD. . . . .	8
1.3	Sistema OOK-IM/DD con múltiples spans en un enlace DU considerado en esta Tesis. . . . .	10
1.4	Penalidad en OSNR respecto a B2B para una determinada BER de referencia con distintos ecualizadores en sistemas OOK-IM/DD sobre enlaces DU [2–4]. . . . .	13
1.5	Penalidad en OSNR respecto a B2B de un OS-MLSD con reducción de estados (SR) [5]. . . . .	14
2.1	Sistema de orden 2 a partir de 2 respuestas lineales $h_a(t)$ y $h_b(t)$ . . . . .	24
2.2	Sistema de orden 3 <i>interpretado</i> como un sistema MISO <i>lineal</i> . . . . .	27
2.3	Esquema OOK-IM/DD de comunicación por fibra óptica. . . . .	36
2.4	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de B2B con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	38
2.5	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 50 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	39
2.6	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 100 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	39
2.7	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 150 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	40
2.8	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 200 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	40
2.9	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 250 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	41

2.10	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 300 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	41
2.11	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 350 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	42
2.12	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 400 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	42
2.13	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 450 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	43
2.14	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 500 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	43
2.15	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 550 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	44
2.16	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 600 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	44
2.17	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 650 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	45
2.18	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 700 km con transformación raíz cuadrada en el receptor. . . . .	45
2.19	Ancho de la respuesta (expresada en cantidad de símbolos) en función de la distancia del enlace. . . . .	46
2.20	Reducción relativa de la componente lineal con la distancia del enlace. . . .	47
3.1	Diagrama de Estados para un canal con 4 estados ( $a_k \in \{0, 1\}$ y $L = 3$ ). Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por $a_k = 0$ y $a_k = 1$ , respectivamente. . . . .	57
3.2	Diagrama de trellis para un canal con 4 estados ( $a_k \in \{0, 1\}$ , $L = 3$ ). Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por $a_k = 0$ y $a_k = 1$ , respectivamente. . . . .	58
3.3	Trellis donde se destaca en rojo (o gris claro) el camino para la secuencia $\{0, 1, 1, 0\}$ Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por $a_k = 0$ y $a_k = 1$ , respectivamente. . . . .	59
3.4	Etapas de un trellis con métricas de rama Euclidianas Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por $a_k = 0$ y $a_k = 1$ , respectivamente. . . . .	60
3.5	MLSD de Forney. (A) esquema en tiempo continuo y (B) esquema con canal discreto equivalente. . . . .	63

3.6	MLSD de Ungerboeck. (A) esquema en tiempo continuo y (B) esquema con canal discreto equivalente. . . . .	64
3.7	OS-MLSD para canales no-lineales. . . . .	66
3.8	MFB-MLSD para canales no-lineales. . . . .	67
3.9	Penalidad en OSNR respecto a B2B de un OS-MLSD con SR [5]. . . . .	70
3.10	Penalidad en OSNR respecto a B2B de distintos ecualizadores en sistemas IM/DD [2, 3]. . . . .	71
4.1	Modelos MISO del canal no-lineal: (A) basado en una representación por VS; (B) basado en la nueva representación ortogonal con compresión espacial. . . . .	77
4.2	Proceso de ortogonalización siguiendo el orden $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ . . . . .	78
4.3	Proceso de ortogonalización siguiendo el orden $\mathcal{S} = \{1, 2, 0\}$ . . . . .	78
4.4	Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 700 km. . . . .	80
4.5	Energía de las respuestas $g_m^{(i-1)}(t)$ tras cada paso del proceso de ortogonalización correspondiente a un enlace OOK-IM/DD de 700 km. . . . .	82
4.6	NCPE para el canal no-lineal correspondiente a una transmisión IM/DD por fibra óptica DU con $L = 700$ km y $1/T = 10$ Gs/s. . . . .	83
4.7	Diagrama en bloques del nuevo receptor MLSD $P$ -dimensional. . . . .	87
5.1	Sistema OOK-IM/DD de fibra óptica con un receptor ST-WMF-MLSD. . . . .	91
5.2	Canal discreto equivalente para el ST-WMF-MLSD para un enlace de 700 km: (A) Respuesta $\mathbf{Q}^{(1)}[k]$ correspondiente a la primer fila de $\mathbf{Q}[k]$ ; (B) Respuesta $\mathbf{Q}^{(2)}[k]$ correspondiente a la segunda fila de $\mathbf{Q}[k]$ . . . . .	92
5.3	Canal discreto equivalente para el OS-MLSD para un enlace de 700 km. . . . .	93
5.4	Canal discreto equivalente para el MFB-MLSD para un enlace de 700 km. . . . .	94
5.5	Pérdida de desempeño de un ST-WMF-MLSD con $P = 2$ y un OS-MLSD en función de la longitud del enlace. . . . .	95
5.6	Penalidad de OSNR respecto a B2B para un $BER = 10^{-3}$ vs número de estados del VD para un enlace de $L = 700$ km con $DGD = 0$ ps. . . . .	96
5.7	Penalidad en OSNR respecto a B2B para una $BER = 10^{-3}$ versus número de estados del VD en un enlace de $L = 700$ km. $DGD = 25$ ps (izquierda) y $50$ ps (derecha). . . . .	97
5.8	Ejemplo de representación de un canal lineal sobremuestreado, con $R = T/T_s$ , por medio de un filtro de fase múltiple. . . . .	97
5.9	Penalidad a causa de una estimación imperfecta del canal versus la longitud (A) y el ancho de banda (B) del filtro promediador. . . . .	99

5.10	Penalidad en OSNR a una $BER = 10^{-3}$ versus número de estados del VD en un enlace de 700 km. . . . .	100
6.1	Arquitectura de implementación del ST-WMF-MLSD. . . . .	105
A.1	Trellis donde se destacan 2 caminos, el correcto (negro) y el elegido erróneamente (rojo), los cuales originan 2 eventos-error. . . . .	118
A.2	Trellis para el canal $h_k = [0.36; 0.86; 0.36]$ . Se indica el alfabeto de símbolos y los valores esperados en cada métrica de rama. . . . .	122
A.3	BER vs SNR para el canal $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ . . . . .	123
A.4	Trellis para el canal $\hat{h}_k = [0.36; 0.86]$ . Se indica el alfabeto de símbolos y los valores esperados en cada métrica de rama. . . . .	125
A.5	BER vs SNR para el canal $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ , cuando el VD supone el canal $\hat{h}_k = [0.36 ; 0.86]$ . . . . .	126
A.6	Eventos-error de un VD suponiendo el canal $\hat{h}_k = [0.36 ; 0.86]$ , cuando el canal verdadero es $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ . En negro se indica la secuencia correcta y en rojo la secuencia seleccionada en forma errónea. . . . .	127

## ACRÓNIMOS

---

**ADC** conversor analógico-digital (*analog-to-digital converter - ADC*).

**ASE** emisión espontánea amplificada (*amplified spontaneous emission*).

**AWGN** ruido aditivo Gaussiano y blanco (*additive white Gaussian noise*).

**B2B** transmisión sin fibra (*back-to-back*).

**BER** tasa de error de bit (*bit-error-rate*).

**BLW** desplazamiento de la línea base (*baseline wander*).

**BLWC** compensador de BLW (*BLW compensator*).

**BW** ancho de banda (*bandwidth*).

**CD** dispersión cromática (*chromatic dispersion*).

**CDF** función de distribución (*cumulative distribution function*).

**CMOS** semiconductor complementario de óxido metálico (*complementary metal-oxide-semiconductor*).

**DC** componente de continua (*direct current*).

**DCF** fibra para la compensación de dispersión (*dispersion compensation fiber*).

**DCM** módulo para la compensación de dispersión (*dispersion compensation module*).

**DD** detección directa (*direct detection*).

**DFE** ecualizador realimentado por decisiones (*decision feedback equalizer*).

**DGD** demora diferencial de grupo (*differential group delay*).

**DSP** procesamiento digital de señales (*digital signal processing*).

- DU** sin compensación óptica de dispersión (*dispersion-unmanaged*).
- EDC** compensación electrónica de dispersión (*electronic dispersion compensation*).
- EDFA** amplificador de fibra dopada con erbio (*erbium-doped fiber amplifier*).
- FO** corrimiento de frecuencia (*frequency offset*).
- FT** transformada de Fourier (*Fourier transform*).
- GVD** dispersión por velocidad de grupo (*group velocity dispersion*).
- IFT** transformada de Fourier inversa (*inverse Fourier transform*).
- IM** modulación de intensidad (*intensity modulation*).
- IM/DD** sistema con modulación de intensidad y detección directa (*system with intensity modulation and direct detection*).
- ISI** interferencia intersímbolo (*intersymbol interference*).
- IZT** transformada Z inversa (*inverse Z transform*).
- LE** ecualizador lineal (*linear equalizer*).
- LLR** logaritmo del cociente de verosimilitud (*log likelihood ratio*).
- LNLR** relación energía lineal a energía no-lineal (*linear-nonlinear ratio*).
- LPF** filtro pasa-bajos (*low-pass filter*).
- MD** dispersión modal (*modal dispersion*).
- MF** filtro apareado (*matched filter*).
- MFB** banco de filtros apareados (*matched-filter bank*).
- MFB-MLSD** MLSD basado en una interfaz con banco de filtros apareados (*MLSD based on a matched filter bank front-end*).
- MISO** múltiple entrada y salida única (*multiple-input single-output*).
- ML** máxima verosimilitud (*maximum likelihood*).

- MLSD** detección de secuencia de máxima verosimilitud (*maximum likelihood sequence detection*).
- MMSE** mínimo error cuadrático medio (*minimum mean square error*).
- NCPE** energía normalizada acumulada por dimensión espacial (*normalized cumulative path energy*).
- NMSE** error cuadrático medio normalizado (*normalized mean square error*).
- NRZ** señalización sin retorno a cero (*no-return to zero*).
- OA** amplificador óptico (*optical amplifier*).
- OOK** señalización de encendido-apagado (*on-off keying*).
- OS-MLSD** MLSD basado en una interfaz con sobremuestreo (*oversampled MLSD*).
- OSNR** relación señal-a-ruido óptica (*optical signal-to-noise ratio*).
- PDF** función densidad de probabilidad (*probability density function*).
- PMD** dispersión por modo de polarización (*polarization mode dispersion*).
- PSD** densidad espectral de potencia (*power spectral density*).
- QPSK** modulación de cuatro fases en cuadratura (*quadrature phase-shift keying*).
- RLS** mínimos cuadrados recursivos (*recursive least squares*).
- RV** variable aleatoria (*random variable*).
- S-WMF** banco de filtros apareados de blanqueamiento espacial (*space-whitened matched filter*).
- SG** gradiente estocástico (*stochastic gradient*).
- SMF** fibra óptica monomodo (*single mode fiber*).
- SNR** relación señal-a-ruido (*signal-to-noise ratio*).
- SPM** automodulación de fase (*self-phase modulation*).
- SR** reducción de estados (*state reduction*).

**ST-WMF** filtro apareado de blanqueamiento en espacio y tiempo (*space-time whitening matched filter*).

**ST-WMF-MLSD** MLSD con blanqueamiento espacio-temporal (*MLSD based on a space-time whitening matched filter*).

**TIA** amplificador de transimpedancia (*transimpedance amplifier*).

**VD** detector de Viterbi (*Viterbi detector*).

**WDM** multiplexación por división de longitud de onda (*wavelength division multiplexing*).

**WF** filtro blanqueador (*whitening filter*).

**WMF** filtro apareado blanqueador (*whitening matched filter*).

**XPM** modulación de fase cruzada (*cross-phase modulation*).

**ZT** transformada Z (*Z transform*).



## INTRODUCCIÓN

---

### 1.1 Introducción

Los sistemas de telecomunicaciones constituyen una de las áreas de la ingeniería que han crecido vertiginosamente en los últimos años, despertando gran interés y múltiples posibilidades de desarrollo innovador y creativo. Los objetivos que persiguen todos los investigadores y especialistas abocados a las telecomunicaciones pueden resumirse en los siguientes tópicos:

- Mejorar el desempeño del sistema
- Aumentar la velocidad de transmisión
- Reducir la complejidad de la implementación

Los avances recientes, tanto en la tecnología como en el desarrollo de los algoritmos para el procesamiento de señales propio de los sistemas de comunicaciones, posibilitaron realizar transmisiones a velocidades nunca antes pensadas. La necesidad creciente impuesta por el mercado hace necesario seguir mejorando la capacidad de los actuales sistemas con fuertes posibilidades de generar líneas de investigación sólidas y productivas. Mejorar la capacidad de los sistemas de comunicaciones no resulta simple debido a las limitaciones impuestas por los medios de transmisión (fibra óptica, cable, aire) y por la tecnología disponible. Por este motivo, para poder satisfacer los tres objetivos citados anteriormente es imprescindible realizar nuevos aportes teniendo en cuenta el estado de la tecnología actual y considerando fuertemente la que hoy se perfila y que estará disponible en los próximos años.

En esta Tesis, y como es frecuente en el estudio de sistemas de comunicaciones digitales, el término “canal” se utiliza para englobar todos los componentes/efectos que existen entre el transmisor del módem remoto (i.e., salida del conversor digital analógico) y el receptor

del equipo local (i.e., entrada del conversor analógico digital). La señal recibida a la entrada del módem receptor puede expresarse como

$$r(t) = s(t) + z(t), \quad (1.1)$$

donde  $s(t)$  es la señal recibida después de la propagación por el canal, mientras que  $z(t)$  representa la componente de ruido. En canales *lineales*, la componente  $s(t)$  está dada por [6]

$$s(t) = \sum_k a_k h(t - kT), \quad (1.2)$$

donde  $1/T$  es la tasa de transmisión de símbolos,  $a_k$  son los símbolos transmitidos (e.g.,  $a_k \in \{\pm 1\}$ ), mientras que  $h(t)$  es la respuesta al impulso lineal del canal. Uno de los resultados más importantes en comunicaciones digitales establece que, si se procesa adecuadamente la señal<sup>1</sup>, la información transmitida por canales con ruido aditivo Gaussiano y blanco (*additive white Gaussian noise* - AWGN) puede detectarse a partir de las muestras de la señal recibida *espaciadas temporalmente* cada  $T$  segundos [6]:

$$y_n = y(nT) = \sum_k a_k p_{n-k} + w_n, \quad (1.3)$$

donde  $p_n = p(nT) = [h(t) \oplus h^*(-t)]_{t=nT}$  es el canal equivalente de tiempo discreto,  $\oplus$  denota convolución y  $w_n = [h(t) \oplus z(t)]_{t=nT}$  es la componente de ruido. Debido a las imperfecciones propias del canal (e.g., ancho de banda (*bandwidth* - BW) reducido, distorsión de amplitud y fase, etc.), la energía de los símbolos transmitidos se dispersa en el tiempo y genera interferencia con los símbolos vecinos, originando lo que se conoce como interferencia intersímbolo (*intersymbol interference* - ISI). Matemáticamente, la ecuación (1.3) puede reescribirse como<sup>2</sup>

$$y_n = a_n + \underbrace{\sum_{k \neq n} a_k p_{n-k}}_{\text{interferencia intersímbolo}} + \underbrace{w_n}_{\text{ruido}}. \quad (1.4)$$

Esta última expresión resulta importante ya que permite observar los dos efectos principales presentes en todo canal de comunicaciones (la *ISI* y el *ruido*), los cuales generan problemas en el proceso de detección de la información transmitida,  $a_n$ . Estos dos efectos del canal se combaten tradicionalmente con diferentes técnicas. Por ejemplo, la degradación

<sup>1</sup>Recuperar la información a partir de muestras tomadas cada  $T$  segundos no es trivial y requiere utilizar un “pre-procesamiento” especial. En el caso considerado en (1.3) se “pre-procesa” la señal con un filtro de respuesta  $h^*(-t)$ , conocido como filtro apareado (*matched filter* - MF). Más detalles se pueden encontrar en [6].

<sup>2</sup>Sin pérdida de generalidad, se considera que  $p_0 = p(0) = 1$ .

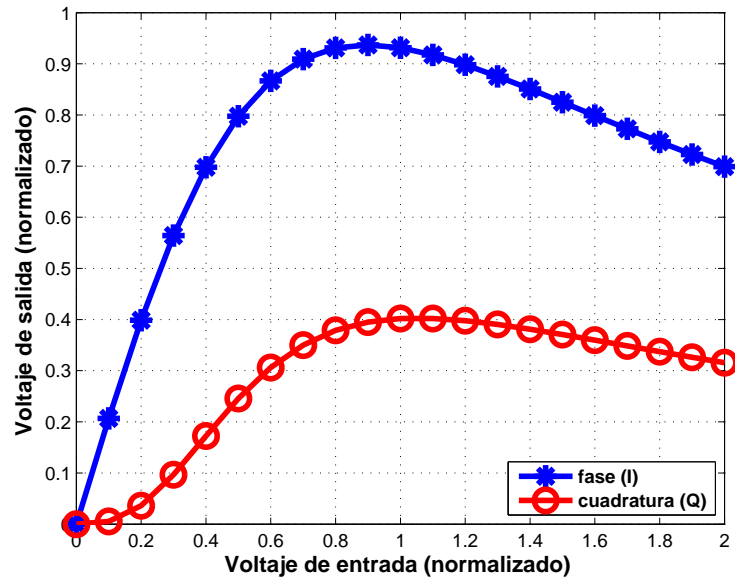


Fig. 1.1 Respuesta en fase (I) y cuadratura (Q) de un amplificador de tubo de onda progresiva en función de la magnitud de entrada ( $r$ ) normalizada al punto de saturación [1].

que origina el ruido en el proceso de detección se reduce con el empleo de *códigos de corrección de errores* [7]. Por su parte, la dispersión que se origina durante la propagación de la señal transmitida por el canal, se compensa con el empleo de técnicas de *ecualización*. Precisamente, la investigación de esquemas de ecualización constituye el eje temático de la presente Tesis Doctoral. El nivel de la ISI se exagera a medida que aumenta la velocidad de transmisión. Por este motivo, con el crecimiento de la demanda de velocidad, el desarrollo de nuevos y potentes algoritmos de ecualización para reducir el efecto de la ISI a la entrada del detector resulta indispensable para satisfacer eficientemente los tres desafíos citados anteriormente.

### 1.1.1 Canales con Interferencia Intersímbolo No-Lineal

Entre los “nuevos” efectos que aparecen en el proceso de incrementar la velocidad de transmisión y que requieren combatirse, se encuentra la *dispersión no-lineal* del canal. La compensación de esta dispersión no-lineal ha sido estudiada históricamente en aplicaciones satelitales. En estos enlaces, la respuesta de los amplificadores origina efectos no-lineales que deben compensarse en el receptor (ver Fig. 1.1). En canales dispersivos no-lineales, las muestras de la señal recibida pueden expresarse como

$$y_n = a_n + i_n + w_n, \quad (1.5)$$

donde  $i_n = f(\dots, a_{n+1}, a_n, a_{n-1}, \dots)$  representa la interferencia, la cual es una función (no-lineal en general) de la secuencia de símbolos transmitida [8, 9]. Este término de interferencia se conoce en la literatura como *interferencia intersímbolo no-lineal* [10, 11]. Una situación similar se encuentra en los sistemas de comunicación por fibra óptica monomodo (*single mode fiber* - SMF) con señalización de encendido-apagado (*on-off keying* - OOK) y utilizando modulación de intensidad y detección directa (*intensity modulation and direct detection* - IM/DD). El canal en un sistema OOK-IM/DD incluye: el modulador óptico, la fibra propiamente dicha, los amplificadores ópticos, filtros óptico y eléctrico, el fotodetector del receptor, etc. En numerosas aplicaciones como la considerada en este trabajo, la SMF origina principalmente dispersión lineal en *el dominio óptico* [4, 12–14]<sup>1</sup>. Esta dispersión lineal de la fibra, en combinación con la respuesta cuadrática del fotodetector, genera un canal equivalente en *el dominio eléctrico* con ISI no-lineal que puede modelarse matemáticamente con la ecuación (1.5) [8, 9].

### 1.1.2 Compensación de la Interferencia Intersímbolo No-Lineal

Típicamente, la dispersión de la *fibra* se compensa en el dominio óptico utilizando, *e.g.*, fibras para la compensación de dispersión (*dispersion compensation fibers* - DCFs) y/o módulos para la compensación de dispersión (*dispersion compensation modules* - DCMs), los cuales se colocan aproximadamente cada 80 km. De esta manera, la capacidad del sistema está limitada principalmente por el ruido que introducen los amplificadores ópticos usados para compensar la atenuación generada por la fibra.

Gracias a los avances de la tecnología de circuitos integrados, en los últimos años se desarrollaron potentes transceptores con procesamiento digital de señales (*digital signal processing* - DSP) que compensan la dispersión del canal en el *dominio eléctrico* [8, 15–17]. Esta tecnología ha permitido, *e.g.*, aumentar el alcance de los enlaces OOK-IM/DD a unos cientos de kilómetros (300-400 km) sin necesidad de utilizar etapas intermedias de compensación óptica de la dispersión [4, 15, 18, 19]. Es importante destacar que el empleo de amplificadores ópticos a lo largo del enlace para compensar la atenuación de la fibra resulta necesario aún cuando se utiliza compensación electrónica de dispersión (*electronic dispersion compensation* - EDC).

Existen en la literatura varias propuestas para compensar en forma *óptima* la ISI no-lineal originada en transmisiones por canales *satelitales*. Sin embargo, la aplicación de las mismas en sistemas ópticos OOK-IM/DD no resulta trivial debido a:

- la diferente naturaleza de la ISI (*e.g.*, a diferencia de los enlaces satelitales, la disper-

<sup>1</sup>Mayores detalles del modelado de la fibra óptica se discuten en el Cap. 2 de la Tesis.

sión de la fibra crece linealmente con la longitud del enlace y cuadráticamente con la tasa de transmisión de símbolo [20–22]), y

- la alta velocidad de transmisión de los enlaces ópticos (*e.g.*, decenas/cientos Gb/s versus cientos de Mb/s de los enlaces satelitales).

Numerosos estudios han mostrado que transeptores con EDC permiten aumentar la longitud de los enlaces OOK-IM/DD a más de 1000 km sin necesidad de DCF o DCM [4, 12, 13, 18]. Sin embargo, la complejidad de implementación de los esquemas óptimos de ecualización existentes para compensar *mucha* ISI, resulta muy elevada para su adopción en circuitos integrados comerciales. A este problema se suma la severa degradación del desempeño (*performance*) que experimentan los esquemas de complejidad reducida obtenidos a partir de *simplificaciones* de dichas arquitecturas óptimas [23].

En la presente Tesis Doctoral se propone una nueva arquitectura de ecualización óptima destinada a mejorar el desempeño de los sistemas de comunicación de alta velocidad por canales con ISI lineal y *no-lineal*. La nueva propuesta permite además derivar esquemas sub-óptimos en donde la reducción de la complejidad se realiza minimizando la degradación en *performance* experimentada por el receptor. Aunque la nueva técnica es genérica, en esta Tesis se enfoca el estudio a los sistemas de comunicaciones por enlaces ópticos OOK-IM/DD y *sin compensación óptica de la dispersión*. En estos sistemas, el impacto de la dispersión de la fibra y la respuesta no-lineal del fotodetector limitan seriamente la implementación práctica de potentes algoritmos de ecualización basados en DSP.

A continuación se resumen algunos de los aspectos y definiciones más relevantes del sistema OOK-IM/DD que se utiliza para evaluar la *performance* de la propuesta de ecualización realizada en esta Tesis:

- Similar a lo realizado en la literatura relacionada a técnicas de EDC (*e.g.*, [4, 8, 12, 24]), el modelo del *canal* relaciona la entrada y la salida del sistema OOK-IM/DD en el dominio eléctrico. Por este motivo, el término *canal* usado en la Tesis incluye no sólo la fibra óptica, sino también todos los demás componentes del enlace (*e.g.*, el modulador, el fotodetector, filtros óptico y eléctrico, *etc.*).
- Como es usual en el estudio de técnicas para la compensación electrónica de la dispersión [4, 12–17, 25–30], los enlaces considerados en la Tesis no incluyen esquemas de compensación óptica de la dispersión (*e.g.*, DCF o DCM). En estos enlaces, conocidos como *enlaces sin compensación óptica de dispersión (dispersion-unmanaged - DU)* [31], sólo se consideran amplificadores ópticos instalados a lo largo del enlace (*e.g.*, cada 80 km) para compensar la atenuación que introduce la fibra (*i.e.*, enlaces con múltiples *spans*).

- El sistema OOK-IM/DD utilizado en la Tesis no considera multiplexación por división de longitud de onda (*wavelength division multiplexing* - WDM). Por su parte, la longitud del enlace DU se limita a unos cientos de kilómetros (*e.g.*,  $\lesssim 1000$  km) con una relación señal-a-ruido óptica (*optical signal-to-noise ratio* - OSNR)  $\lesssim 15$  dB (medida a 12.5 GHz [20]). De esta manera, es posible emplear una potencia óptica de transmisión baja (*e.g.*,  $\lesssim -5$  dBm [14, 19]), por lo que pueden despreciarse los efectos no-lineales propios de la fibra óptica (*e.g.*, automodulación de fase (*self-phase modulation* - SPM), modulación de fase cruzada (*cross-phase modulation* - XPM), *etc.* [32]) [4, 8, 12, 14, 15, 18, 19, 22, 25, 28, 30, 33–36].
- En base a lo expuesto, se concluye que la ISI no-lineal del *canal* que se considera en esta Tesis se origina principalmente por el efecto combinado de la dispersión lineal de la fibra (en el dominio óptico) y la respuesta cuadrática del fotodetector [4, 8, 12, 13, 15, 18, 22, 25, 28, 33–37].

## 1.2 Ecualización Óptima en Canales con Interferencia Intersímbolo No-Lineal

### 1.2.1 Detector de Secuencias de Máxima Verosimilitud

El detector de secuencia de máxima verosimilitud (*maximum likelihood sequence detector* - MLSD) constituye la solución óptima para compensar la dispersión originada por el canal<sup>1</sup>. A lo largo de los años se han propuesto varios esquemas de recepción por MLSD, tanto para canales con ISI lineal como no-lineal [4, 38–42]. La complejidad del ecualizador MLSD (medida usualmente en cantidad de memoria y operaciones requeridas por unidad de tiempo) crece exponencialmente con la *memoria del canal* [6]. Por este motivo, su aplicación en canales altamente dispersivos representa un serio desafío para los diseñadores. El ecualizador óptimo propuesto por Forney [43] es la estructura de MLSD más difundida en la práctica para ecualizar canales *lineales*<sup>2</sup>. Este esquema se basa en la aplicación de un filtro apareado blanqueador (*whitening matched filter* - WMF) seguido por un detector de Viterbi (*Viterbi detector* - VD). En canales con AWGN, este filtro permite convertir la señal recibida en una secuencia discreta con estadística suficiente y con componentes de ruido in-

<sup>1</sup>Aunque el criterio que minimiza la probabilidad de error es el que maximiza la probabilidad a posteriori (MAP), el criterio de máxima verosimilitud es ampliamente usado y constituye la solución óptima en el caso que los símbolos transmitidos sean equiprobables [6].

<sup>2</sup>Esta Tesis se enfoca en soluciones óptimas de ecualización, por lo que soluciones basadas en ecualizadores lineales, realimentado por decisiones, *etc.*, no serán consideradas.

dependientes. Esto último permite implementar un VD con métricas *Euclidianas* [44]. Otra propiedad muy importante del WMF es que transforma al canal lineal en un sistema de *fase mínima* [6]. De esta manera, el canal a la entrada del VD tiene toda su energía concentrada en los primeros coeficientes o *taps*, lo cual permite *comprimir* la respuesta al impulso. De esta manera, es posible reducir significativamente la memoria del canal, lo cual se traduce directamente en una reducción en la complejidad de implementación del VD (e.g., ver [45]).

La mayoría de las propuestas de MLSD para canales no-lineales se han focalizado en aplicaciones para enlaces satelitales, donde la respuesta de los amplificadores son la causa de la ISI no-lineal (ver Fig. 1.1). Los canales no-lineales pueden modelarse usando diferentes técnicas como la representación en serie de Volterra [46]. A modo de ejemplo, en un canal con no-linealidad simple de segundo orden, la señal recibida puede expresarse como:

$$r(t) = \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} a_k f_0(t - kT)}_{\text{parte lineal}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{N-2} a_k a_{k+1} f_1(t - kT)}_{\text{parte no-lineal}} + \underbrace{n(t)}_{\text{ruido}} \quad (1.6)$$

donde  $N$  es el número de símbolos transmitidos,  $f_0(t)$  es la respuesta lineal del canal,  $f_1(t)$  es el *kernel* no-lineal, mientras que  $n(t)$  es un proceso AWGN que modela el ruido del canal. En este caso, el receptor MLSD detecta la secuencia  $\hat{a}_k$  que minimiza la *distancia* o *métrica* definida por [6]:

$$\mathcal{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| r(t) - \sum_{k=0}^{N-1} \hat{a}_k f_0(t - kT) - \sum_{k=0}^{N-2} \hat{a}_k \hat{a}_{k+1} f_1(t - kT) \right|^2 dt. \quad (1.7)$$

Existen dos arquitecturas principales de receptores MLSD para compensar canales no-lineales:

- MLSD basado en una interfaz con banco de filtros apareados (*MLSD based on a matched filter bank front-end* - MFB-MLSD) y
- MLSD basado en una interfaz con sobremuestreo (*oversampled MLSD* - OS-MLSD).

A continuación se presentan los principales conceptos sobre estas dos arquitecturas.

### 1.2.2 MLSD Basado en Banco de Filtros Apareados (MFB-MLSD)

Una forma de obtener el MLSD óptimo en canales no-lineales consiste en expandir el espacio de señal en base a un conjunto de respuestas generadoras como el ejemplo de la ecuación (1.6). Operando sobre la expresión (1.7) es posible encontrar que el receptor óptimo requiere un banco de dos MFs a  $f_0(t)$  y  $f_1(t)$  seguido de un VD, como se muestra en la Fig. 1.2-A. Los receptores MFB-MLSD y su performance en canales satelitales han sido

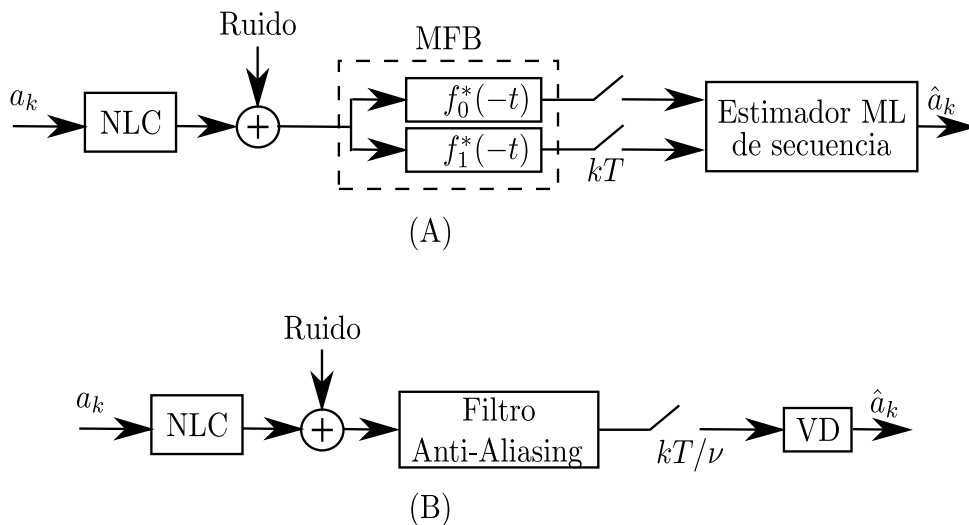


Fig. 1.2 Estructuras de receptores MLSD para canales no-lineales (*del inglés*, NLC): (A) MFB-MLSD y (B) OS-MLSD.

ampliamente estudiados en la literatura [38–41, 47]. Una característica de estos receptores es la *dimensionalidad* del banco de filtros, que depende principalmente de la naturaleza del canal (en el ejemplo anterior, la dimensión *espacial*<sup>1</sup> es 2). Uno de los inconvenientes de esta arquitectura para aplicaciones prácticas es la complejidad que requiere el VD debido a que las muestras de ruido a la salida del MFB están en general correlacionadas<sup>2</sup>.

### 1.2.3 MLSD Sobremuestreado (OS-MLSD)

En [42] se propone una arquitectura conceptualmente distinta al MFB-MLSD descrito anteriormente. En general, el BW de la señal transmitida aumenta debido a la no-linealidad del *canal*. Esto obliga a utilizar una frecuencia de muestreo superior a la requerida en canales lineales (*e.g.*,  $\nu/T$  con  $\nu > 1$ ). Por lo tanto, el filtro receptor se reduce a un filtro pasa-bajos (*low-pass filter* - LPF) de BW  $\nu/2T$ . La única restricción sobre este filtro es que tenga simetría vestigial y respuesta plana en la banda de paso. Esto permite que, en transmisiones por canales AWGN, las muestras de ruido resulten estadísticamente independientes, por lo tanto el VD requiere evaluar métricas Euclidianas  $\nu$ -dimensionales. La propuesta original en [42] considera un canal satelital, sin embargo el OS-MLSD también ha sido considerado para sistemas de comunicación por fibra óptica (*e.g.*, [4]). La estructura básica de un

<sup>1</sup>A lo largo de esta Tesis se adoptará la convención (arbitraria) de denominar a la dimensión del banco de filtros apareados (*matched-filter bank* - MFB) como la dimensión *espacial* del canal, para así diferenciarla de la tradicional dimensión temporal.

<sup>2</sup>Por este motivo, las métricas usadas por el algoritmo de Viterbi dejan de ser *simples distancias Euclidianas*.



receptor OS-MLSD se muestra en la Fig. 1.2-B.

En la actualidad, la arquitectura OS-MLSD resulta conveniente para aplicaciones satelitales debido a las *bajas* velocidades de transmisión usuales (*i.e.*, cientos de Mb/s pueden *manejarse* con la tecnología existente), la simplicidad de las métricas del VD (distancias Euclidianas) y además la *reducida* memoria del canal. Lamentablemente, como se mostrará luego en este capítulo, la elevada dispersión experimentada en canales de fibra óptica hace prohibitiva la aplicación de receptores óptimos OS-MLSD en enlaces de muy larga distancia. Por otra parte, la reducción de complejidad a partir del OS-MLSD no resulta eficiente en transmisiones por canales de fibra óptica debido a la importante degradación que se genera. Por este motivo, el desarrollo de nuevos esquemas de ecualización de complejidad reducida con baja degradación resulta de gran interés para la industria.

### 1.3 Compensación Electrónica de la Dispersión

Los enlaces de fibra óptica se han convertido en el medio preferido por los sistemas de comunicación digital de alto desempeño. La posibilidad de transmitir luz sobre largas distancias con un muy alto BW, baja atenuación y gran inmunidad a interferencias externas, consolidaron a la fibra óptica como un medio prácticamente *ideal*. Esto alentó el tendido de grandes redes de fibra óptica, las cuales se convirtieron en muy poco tiempo en verdaderas autopistas de información digital. En la actualidad, los sistemas ópticos con *detección coherente* son sin dudas los preferidos para aplicaciones de alta velocidad (*e.g.*,  $\gtrsim 100$  Gbps) [48–53]. Existen transceptores comerciales coherentes con EDC que pueden compensar en forma electrónica una dispersión cromática (*chromatic dispersion* - CD) de hasta 200 ns/nm [54].

La eficiencia de los sistemas OOK-IM/DD *con EDC* es menor que la de los esquemas coherentes, sin embargo los mismos se utilizan ampliamente en enlaces de velocidades *bajas* (*e.g.*, 10 Gb/s) y distancias  $< 500$  km<sup>1</sup>. En particular, esta limitación en distancia se debe principalmente a las restricciones impuestas por la ISI no-lineal del canal sobre la complejidad del receptor. Aunque la tecnología coherente es sin dudas la elegida para satisfacer las futuras demandas de velocidad, en esta Tesis se enfoca el estudio en los sistemas de comunicaciones por fibra óptica con OOK-IM/DD en enlaces DU. Los motivos que justifican esta decisión son los siguientes:

---

<sup>1</sup>Existen equipos comerciales con OOK-IM/DD que permiten mayores distancias y velocidades (*e.g.*, 40 Gb/s y 4000 km [55]) para lo cual utilizan compensación *óptica* de dispersión. Teniendo en cuenta que el eje central de esta Tesis se enfoca en nuevos algoritmos para la compensación *electrónica* de la dispersión, los enlaces OOK-IM/DD considerados en este trabajo (ver Fig. 1.3), no incluyen etapas de compensación óptica de la dispersión de la fibra (*e.g.*, DCF o DCM).

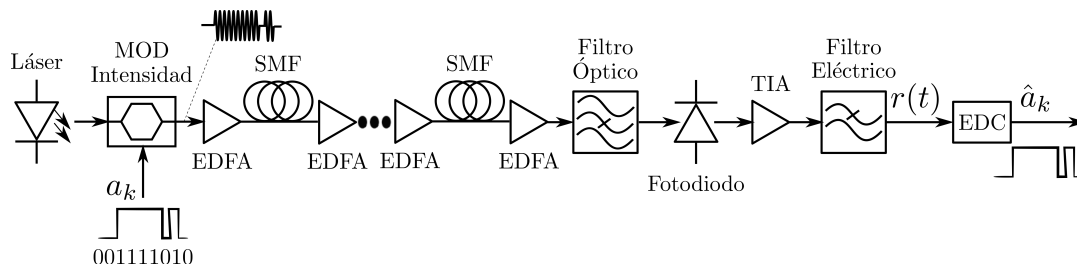


Fig. 1.3 Sistema OOK-IM/DD con múltiples spans en un enlace DU considerado en esta Tesis.

- La existencia de importantes trabajos publicados sobre la compensación de la dispersión en sistemas OOK-IM/DD con receptores MLSD brinda una excelente oportunidad para evidenciar los beneficios de los resultados derivados de esta Tesis [4, 8, 12–16, 18, 22, 25–28, 30, 33–37].
- La industria va a seguir usando enlaces ópticos OOK-IM/DD de *baja* velocidad con MLSD debido a su bajo costo [17, 26], por lo tanto resulta de interés poder brindar nuevas soluciones que permitan aumentar las capacidades de los mismos (*i.e.*, mayor velocidad y distancia).

Es importante enfatizar que la contribución realizada en este trabajo es genérica, y puede aplicarse a otros esquemas de comunicaciones como los sistemas ópticos coherentes, en donde los problemas de no-linealidades están recibiendo una gran atención en los últimos años [56–60].

### 1.3.1 Sistemas IM/DD con Compensación Electrónica de la Dispersión

Hasta hace una década todas las fibras instaladas operaban con simples sistemas IM/DD, con OOK. La principal ventaja de los sistemas con OOK-IM/DD es su simplicidad y bajo costo en componentes opto-eléctricos. La Fig. 1.3 muestra un típico sistema de comunicación IM/DD que utiliza únicamente EDC [8]. La portadora óptica se modula en intensidad por la señal de datos. El modulador de intensidad es básicamente un *interruptor* muy rápido que habilita o bloquea el paso de luz emitida por el láser [61]. Luego la señal óptica se amplifica con un amplificador de fibra dopada con erbio (*erbium-doped fiber amplifier* - EDFA) antes de transmitirla por la SMF. En enlaces largos se deben colocar EDFAs a lo largo del mismo (*e.g.*, cada  $\sim 80$  km) para compensar la atenuación de la fibra. En el receptor, la señal se amplifica y se filtra ópticamente antes de pasar por un fotodiodo. Este fotodiodo convierte la intensidad óptica en corriente eléctrica, por lo que se pierde toda información de fase y polarización de la señal recibida. Posteriormente, la señal pasa

por un amplificador de transimpedancia (*transimpedance amplifier* - TIA) para convertir corriente en voltaje. Finalmente, la señal eléctrica se procesa por el receptor para recuperar la información de datos.

En los enlaces sin regeneración, el ruido aditivo de emisión espontánea amplificada (*amplified spontaneous emission* - ASE) introducido por los EDFAs se acumula a lo largo del enlace. Por su parte, la fibra óptica introduce CD y dispersión por modo de polarización (*polarization mode dispersion* - PMD). Además de estos efectos lineales, la fibra también introduce no-linealidades, principalmente originadas por el *efecto Kerr* (mayores detalles se discuten en la Sección 2.3). Sin embargo, en los enlaces DU con OOK-IM/DD considerados en esta Tesis, los efectos de las no-linealidades de la fibra son despreciables [4, 12–15, 19, 22, 33, 34, 36, 62], por lo que la dispersión lineal de la fibra en combinación con el fotodiodo constituye la principal fuente de ISI no-lineal del canal equivalente [4, 8, 12, 13, 15, 18, 19, 22, 25, 28, 33–37, 62]. Además, el fotodiodo altera la distribución del ruido ASE generado por los EDFAs. Este ruido puede considerarse AWGN en el dominio óptico, pero a la salida del fotodiodo el ruido resultante es no-Gaussiano y señal-dependiente [8].

Como resultado del procesamiento opto-eléctrico descrito, se concluye que la señal recibida en sistemas OOK-IM/DD por enlaces DU de cientos de kilómetros, está afectada por ISI no-lineal y ruido no-Gaussiano. Esto hace de este tipo de enlaces un escenario muy complejo y desafiante, donde resulta imprescindible considerar en el receptor la presencia de no-linealidades para poder alcanzar desempeños óptimos. Por este motivo, los enlaces OOK-IM/DD de fibra óptica DU son un interesante marco donde proponer y evaluar receptores de alto desempeño para canales con ISI no-lineal.

### 1.3.2 MLSD en Sistemas Ópticos con OOK-IM/DD

El estudio de técnicas de ecualización electrónica para la compensación de dispersión en enlaces de fibra óptica se remonta a principios de los años noventa [63]. Sin embargo, no fue hasta principios del nuevo milenio que, gracias a los avances en la tecnología de circuitos integrados con semiconductor complementario de óxido metálico (*complementary metal-oxide-semiconductor* - CMOS), la *compensación electrónica de la dispersión* resultó técnicamente factible y económicamente viable. Debido a la naturaleza no-lineal de la ISI presente en enlaces OOK-IM/DD, el desempeño alcanzado con un ecualizador lineal (*linear equalizer* - LE) y un ecualizador realimentado por decisiones (*decision feedback equalizer* - DFE) es muy pobre y sustancialmente inferior al obtenido con receptores MLSD [2, 64, 65]. En la Fig. 1.4 se presentan resultados típicos reportados en la literatura [2, 3, 34], los cuales permiten apreciar las capacidades de los distintos esquemas de ecualización. En

$L$ [km]	0	100	200	300	400	500	600	700
$N$ [estados]	2	8	32	64	256	512	2048	8192

Table 1.1 Número de estados ( $N$ ) requeridos para alcanzar una longitud  $L$  del enlace [4].

particular, se muestra la penalidad en OSNR requerida para obtener una determinada tasa de error de bit (*bit-error-rate* - BER) en función de la longitud del enlace<sup>1</sup>. Se verifica que esquemas de ecualización *clásicos* como LE o DFE no pueden compensar eficientemente la dispersión en sistemas IM/DD de más de 250 km. Por su parte, la utilización de OS-MLSD permite compensar la dispersión en enlaces de largas distancias, con una pérdida en OSNR que oscila los 3 dB para todas las longitud posibles. Por esto, en enlaces DU con OOK-IM/DD, el MLSD se ha destacado como el único esquema viable para la transmisión a más de 200 km. Esto ha originado una gran cantidad de estudios, tanto experimentales como por simulación, así como el desarrollo de chips comerciales de EDC (e.g., [4, 8, 12, 13, 13–16, 18, 22, 25–28, 33–37]). Desafortunadamente, el número de estados necesarios en el VD crece dramáticamente como se observa en la Tabla 1.1, lo cual hace prohibitivo su implementación en equipos comerciales. Como una medida de referencia, la tecnología disponible permitiría implementar VDs con 64 ó 128 estados con un consumo razonable.

## 1.4 Definición del Problema: Reducción de Complejidad de Receptores MLSD

Una parte esencial de cualquier receptor MLSD es la búsqueda de la secuencia de datos *más verosímil* en base a las observaciones en el dominio discreto por medio del algoritmo de Viterbi. Este algoritmo va generando un diagrama de enrejado (*trellis*) que describe todas las posibles secuencias transmitidas y, mediante una comparación con la secuencia observada, va ponderando la verosimilitud de cada posible secuencia transmitida para finalmente seleccionar la *mejor* secuencia. Para realizar este proceso, el algoritmo se basa en un concepto de *estado* del sistema, y ante cada transmisión de un símbolo hay un cambio del estado de dicho sistema. Como no se conoce el símbolo transmitido, el algoritmo debe eva-

<sup>1</sup>La penalidad en OSNR respecto a una transmisión sin fibra (*back-to-back* - B2B) en función de la longitud del enlace para una determinada BER, es la forma usual adoptada en la literatura relacionada para evaluar el desempeño de distintos esquemas EDC [12, 15, 26, 33, 37, 65]. Típicamente, la BER de referencia que se utiliza (e.g.,  $BER \sim 10^{-3}$ ) es la requerida por el código de corrección de errores para obtener una tasa de error de salida  $\lesssim 10^{-15}$ . Para este valor de BER a la entrada del decodificador, un sistema OOK-IM/DD a 10.7 Gb/s como el mostrado en la Fig. 1.3 requiere una OSNR (medida en 0.1 nm) de aproximadamente 9.5 dB en B2B [36].

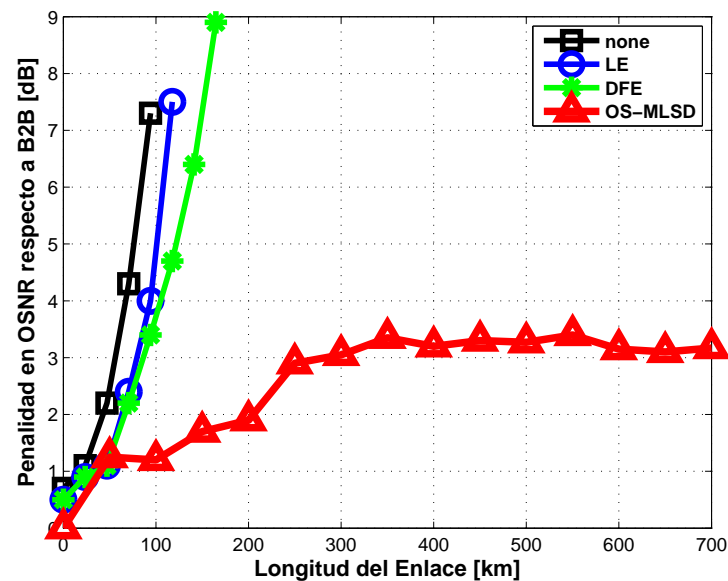


Fig. 1.4 Penalidad en OSNR respecto a B2B para una determinada BER de referencia con distintos ecualizadores en sistemas OOK-IM/DD sobre enlaces DU [2–4].

luar todos los posibles cambios de estados para cada símbolo transmitido. Entonces, tanto la cantidad de operaciones aritméticas como la cantidad de variables que deben almacenarse en memoria crecen proporcionalmente al número de estados. El número de estados crece en forma exponencial con la memoria del canal [6]. Por esto, el empleo de receptores MLSD resulta limitado en canales muy dispersivos.

Este problema del receptor MLSD es muy conocido en canales lineales, por lo que existen varias propuestas para reducir la complejidad sin generar una gran degradación de desempeño. Algunas de las principales alternativas consideradas son el algoritmo  $M$  [66, 67] y la estimación de secuencia con estados reducidos (*Reduced State Sequence Estimation - RSSE*) [45, 68]. La esencia detrás de todas estas estrategias es hacer una búsqueda a través de un diagrama de trellis *reducido*. Esta reducción en el número de estados requiere descartar *prematuramente* estados que se supongan *poco verosímiles*. El principal inconveniente de las estrategias para reducción de estados (state reduction - SR) del MLSD es que pueden presentar un desempeño muy pobre si la respuesta del canal no es de fase mínima [23].

En canales no-lineales se ha utilizado este tipo de estrategias para reducir complejidad [5, 12, 18, 19, 34]. Sin embargo, los desempeños no son buenos y en ocasiones la reducción de complejidad resulta *modesta*. Por ejemplo, en [5] se analiza un enlace con OOK-IM/DD ecualizado por un OS-MLSD con sobremuestreo  $\nu = 2$  y asistido por reducción activa de estados. La Fig. 1.5 compara un OS-MLSD con un esquema con SR de 16. Se alcanzan

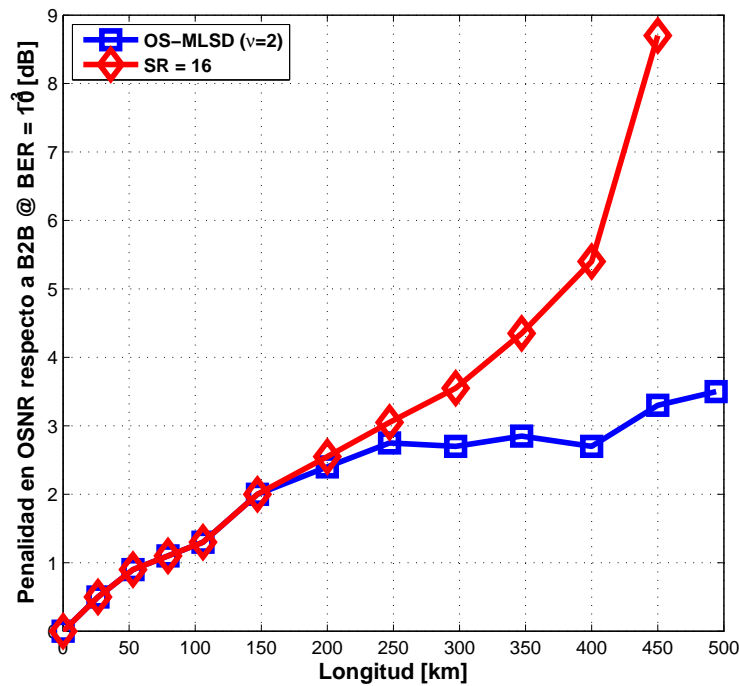


Fig. 1.5 Penalidad en OSNR respecto a B2B de un OS-MLSD con reducción de estados (SR) [5].

relativamente buenos desempeños para enlaces de  $\sim 300$  km. Para longitudes mayores el desempeño es pobre. Por ejemplo, en un enlace de 450 km una reducción de complejidad de  $\sim 16$  veces implica importantes pérdidas en desempeño (*i.e.*, casi 6 dB).

El pobre desempeño de las técnicas de SR en canales con considerable ISI no-lineal radica principalmente en que no se dispone de un receptor que *comprima* la respuesta del canal. En el caso de canales lineales, el receptor MLSD de Forney cumple este objetivo. Por su parte, los esquemas MFB-MLSD y OS-MLSD existentes para canales no-lineales no comprimen la respuesta del canal. Por eso es muy importante encontrar un receptor que extienda las propiedades del MLSD de Forney a canales no-lineales. Precisamente, en esta Tesis se mostrará que es posible mejorar la eficiencia de los esquemas de SR en canales no-lineales si se usa una arquitectura MLSD adecuada que permita *la compresión temporal (Forney) y espacial del canal*. La compresión espacial es un aspecto propio de canales no-lineales, la cual no ha sido abordada por las estrategias existentes.

## 1.5 Objetivos

En base a los conceptos, necesidades y problemáticas presentadas en las secciones anteriores se plantearon los siguientes objetivos para la presente Tesis:

- Estudiar nuevos esquemas de recepción **MLSD** generales, que puedan implementarse en forma sistemática y eficiente en cualquier aplicación de comunicaciones sobre canales no-lineales.
- Generalizar la estrategia del **MLSD** de Forney para canales no-lineales de modo de permitir una eficiente reducción de complejidad (**SR** en el **VD**).
- Proponer un receptor **MLSD** capaz de reducir complejidad en un sentido más amplio que el de las propuestas existentes para canales no-lineales. Específicamente se pretende contemplar la reducción de la tasa de muestreo y la dimensionalidad *espacial* (*i.e.*, cantidad de filtros del **MFB**), además de la naturalmente importante compresión *temporal*.
- Diseñar una arquitectura **MLSD** que sea capaz de operar en aplicaciones de alta velocidad y en canales no-lineales altamente dispersivos, como por ejemplo en los enlaces por fibra óptica.

### 1.5.1 **MLSD para Canales No-lineales**

La principal contribución de la Tesis es una novedosa arquitectura **MLSD** óptima para canales no-lineales. Esta arquitectura permite una reducción sistemática y eficiente de complejidad por simple truncamiento de estados que impacta en una degradación lenta y suave del desempeño. Además, es posible complementarla con estrategias de **SR** más sofisticadas para obtener mejores resultados. Los aspectos innovadores de dicho receptor **MLSD** son:

1. Al igual que el receptor óptimo de Forney para canales lineales, el **MLSD** propuesto permite implementar variantes sub-óptimas del receptor con complejidad reducida y con un bajo impacto en la performance.
2. El **MLSD** propuesto representa una generalización del receptor de Forney para canales no-lineales. Esta generalización requiere la consideración del problema de dimensionalidad *espacial* en canales no-lineales, algo que no ha sido considerado en propuestas anteriores.
3. El nuevo detector no sólo aborda el problema de *dimensionalidad espacial*, sino que permite reducir en forma *óptima* la cantidad de filtros en el **MFB**, un aspecto único que lo distingue de toda propuesta existente.
4. La propiedad de “*ortogonalidad extendida*” del **MFB** presenta, entre otros beneficios, el potencial de facilitar la convergencia de implementaciones adaptivas del receptor.

Para obtener la mencionada arquitectura MLSD se propone un nuevo modelo para el canal no-lineal que tiene los siguientes aspectos novedosos:

- Se introduce un proceso de ortogonalización *extendida* entre los distintos núcleos (*kernels*) del modelo por serie de Volterra del canal no-lineal.
- Se define el novedoso concepto de *dimensionalidad espacial* para un canal no-lineal, y se reduce en forma *óptima* esta dimensionalidad a través de un novedoso proceso de ortogonalización.
- La formalización no sólo permite el diseño del MLSD presentado en esta Tesis, sino que también podría simplificar y sistematizar el estudio teórico del impacto de las no-linealidades sobre el desempeño de los sistemas de comunicación, gracias a la posibilidad de analizar independientemente las dimensiones espaciales.

Estos aportes dieron lugar a las publicaciones [69–71]. En [69] se presenta la nueva formalización ortogonal para canales no-lineales y una novedosa arquitectura MLSD. Se aplica el MLSD propuesto en un sistema de comunicación por fibra óptica con IM/DD. Los resultados de simulación en [69] predicen que con la nueva arquitectura se podría llegar a duplicar la longitud de los enlaces IM/DD actuales, manteniendo fija la complejidad de implementación. En [70] se analiza teóricamente el impacto de una implementación adaptativa sobre el desempeño del MLSD. Se verifica que esta degradación es baja, y similar a la observada en alternativas MLSD universalmente adoptadas en comunicaciones por fibra óptica. En [71] se detalla la propiedad de *compresión espacial* y un procedimiento eficiente para alcanzarla. Además se verifica que, aún en presencia de alta PMD, el nuevo MLSD también puede reducir sustancialmente la complejidad comparado a estrategias existentes.

## 1.6 Organización de la Tesis

En el Capítulo 2 se introducen brevemente los fundamentos de las comunicaciones en canales no-lineales. En dicho capítulo se presentan algunos conceptos básicos respecto al análisis de sistemas no-lineales por serie de Volterra, los cuales serán útiles luego para el desarrollo del MLSD propuesto. Además, se introducen superficialmente algunos conceptos elementales sobre el enlace de fibra óptica y su comportamiento, por ser el escenario elegido en esta Tesis para presentar los beneficios del nuevo MLSD para canales no-lineales. Los conceptos sobre la fibra óptica primero se introducen como se los analiza típicamente en la literatura de ese tema [32], y luego se presenta un análisis más útil e ilustrativo por serie de Volterra para enfatizar las características más relevantes en cuanto a su utilización en EDC.



En el Capítulo 3 se presentan brevemente los conocidos conceptos de detección con mínima probabilidad de error, estadística suficiente, MF y MLSD, principalmente en el contexto de canales lineales por simplicidad. Se describen además las principales características de las estructuras típicas de MLSD, tanto para canales con ISI lineal como no-lineal.

En el Capítulo 4 se describe el principal aporte de la Tesis, que consiste en una nueva arquitectura MLSD para canales no-lineales. En el Capítulo 5 se evalúa numéricamente el MLSD propuesto en una aplicación de interés, *i.e.*, un sistema de comunicación por fibra óptica con IM/DD. Los resultados muestran la capacidad de esta arquitectura para reducir la complejidad de implementación frente al esquema adoptado universalmente para la recepción MLSD en enlaces de fibra óptica con ISI no-lineal. Se alcanza a ver que en la aplicación analizada se puede llegar a reducir la complejidad de implementación hasta  $\sim 8$  veces en comparación con el OS-MLSD adoptado en comunicaciones por fibra óptica.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presentan las conclusiones de la Tesis.



## TRANSMISIÓN POR CANALES NO-LINEALES

---

En este capítulo se introducen brevemente algunos aspectos esenciales concernientes al tratamiento de sistemas no-lineales, con un especial énfasis en las comunicaciones por fibra óptica. Para el modelado del sistema no-lineal y el tratamiento de señales se emplea la serie de Volterra [39, 72–74]. En la primera parte se introducen algunos conceptos generales sobre la serie de Volterra, así como nomenclatura que será utilizada en capítulos subsiguientes. Se intenta partir de conceptos elementales bien conocidos para sistemas lineales, y a partir de ellos brindar una extensión de las herramientas más elementales para sistemas no-lineales. Esta introducción pretende ser *operativa*, y el capítulo se enfoca en que el lector pueda *aceptar* y *aplicar* rápidamente los conceptos usados en esta Tesis. El lector interesado en abordar con mayor rigor matemático aspectos presentados en este capítulo, así como tantos otros que son omitidos, puede recurrir a una vasta literatura sobre el tema, *e.g.*, [72–76].

En la segunda parte del capítulo se introducen los sistemas de comunicación por fibra óptica, por ser un caso de aplicación de gran interés práctico. Se comenta brevemente sobre la ecuación no-lineal de Schrödinger que describe la propagación de la señal óptica a través de la fibra y se destacan las principales distorsiones que introduce este medio de comunicación en los enlaces considerado en esta Tesis. Esta presentación es meramente descriptiva y tomada esencialmente de [32]. Los enlaces de fibra óptica se caracterizan por presentar una respuesta no-lineal, por lo cual pueden estudiarse adecuadamente mediante la serie de Volterra. Al final del capítulo se utiliza la teoría de series de Volterra para ilustrar y discutir algunos de los aspectos más relevantes sobre el comportamiento de este canal de comunicación y los desafíos que implica para la implementación de receptores MLSD.

### 2.1 Serie de Volterra

Es usual y conveniente representar matemáticamente sistemas determinísticos a través de un operador aplicado sobre un espacio de señales de entrada  $x(t)$ , que devuelve una señal

$y(t)$  dentro de cierto espacio de salida, *i.e.*,

$$y(t) = \mathbf{H}[x(t)]. \quad (2.1)$$

Para el caso de un sistema lineal invariante en el tiempo este operador lineal, o *de primer orden*,  $\mathbf{H}_1$  debe tener las siguientes propiedades:

$$y(t) = \mathbf{H}_1 \left[ \sum_k a_k x_k(t) \right] = \sum_k a_k \mathbf{H}_1 [x_k(t)] = \sum_k a_k y_k(t) \quad \forall a_k \in \mathcal{R}, \quad (2.2a)$$

$$y(t + \tau) = \mathbf{H}_1 [x(t + \tau)] \quad \forall \tau \in \mathcal{R}, \quad (2.2b)$$

donde  $\mathcal{R}$  es el conjunto de los números reales. Estando en presencia de un sistema lineal, y permitiéndonos interpretar a cualquier señal de entrada  $x(t)$  descompuesta por una *sucesión continua de señales  $\delta(t)$  ponderadas y desplazadas temporalmente*<sup>1</sup>, *i.e.*, como

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad (2.3)$$

entonces por las propiedades de linealidad (ver ec. (2.2a)) e invarianza ante el desplazamiento (ver ec. (2.2b)) se puede expresar la salida  $y(t)$  del sistema como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau, \quad (2.4)$$

donde

$$h(t) = \mathbf{H}_1 [\delta(t)] \quad (2.5)$$

es la respuesta del sistema a un impulso  $\delta(t)$ . La respuesta al impulso describe completamente el comportamiento del sistema lineal, y la integral en (2.4) se conoce como la integral de convolución entre las señales  $x(t)$  y  $h(t)$  [77].

En el caso de estar en presencia de un sistema (u operador) que no cumpla con la condición (2.2a), entonces el sistema es *no-lineal* y ya no se pueden usar la respuesta al impulso  $h(t)$  y la integral de convolución para describir (completamente) el comportamiento del mismo. Sin embargo, así como la serie de Taylor establece que toda función *suficientemente suave* puede ser desarrollada como una serie de funciones elementales (polinomios) más simples de analizar, la serie de Volterra es su análogo para funcionales y establece que, bajo ciertas restricciones bastante generales, todo sistema no-lineal puede ser expresado

<sup>1</sup>La ec. (2.3) se conoce como *propiedad de escudriñamiento* del impulso  $\delta(t)$  de tiempo continuo [77].

como una sumatoria de sistemas u *operadores de orden entero*, con características muy similares al operador lineal  $\mathbf{H}_1[\cdot]$ , *i.e.*

$$y(t) = \sum_n \mathbf{H}_n[x(t)]. \quad (2.6)$$

Para entender algunas de las características de esta serie y los operadores elementales que le dan lugar, primero se considera con cierto detalle en la Sección 2.1.1 a los sistemas no-lineales de segundo orden, y luego en la Sección 2.1.2 se generaliza para operadores de mayor orden.

### 2.1.1 Sistemas No-Lineales de Segundo Orden

Supóngase el caso particular en que se pueda describir el funcionamiento del sistema a través de un operador  $\mathbf{H}_2$  *de segundo orden*. Este operador de segundo orden se define como

$$\mathbf{H}_2[x(t)] = \mathbf{H}_2\{x(t), x(t)\}, \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{H}_2\{\cdot, \cdot\}$  es un operador bilinear, *i.e.*,  $\mathbf{H}_2\{x(t), z(t)\}$  es lineal en  $x(t)$  dado  $z(t)$  fijo, y al mismo tiempo lineal en  $z(t)$  dado  $x(t)$  fijo. Entonces este operador bilinear  $\mathbf{H}_2\{\cdot, \cdot\}$  define el funcionamiento del sistema según la siguiente propiedad:

$$y(t) = \mathbf{H}_2[x(t)] = \mathbf{H}_2 \left[ \sum_{n=1}^N a_n x_n(t) \right] = \mathbf{H}_2 \left\{ \sum_{n=1}^N a_n x_n(t), \sum_{n=1}^N a_n x_n(t) \right\}, \quad (2.8a)$$

$$= \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N \mathbf{H}_2\{a_m x_m(t), a_n x_n(t)\} = \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m a_n \mathbf{H}_2\{x_m(t), x_n(t)\}. \quad (2.8b)$$

Nótese que para pasar de (2.8a) a (2.8b) se hace uso de la propiedad de bilinealidad.

Ahora bien, tal como en el caso de sistemas lineales (factibles de ser modelados por un operador lineal  $\mathbf{H}_1$ ), aquí también se puede expresar la salida del sistema mediante una integral de convolución. En el caso de este sistema de segundo orden se puede aprovechar la propiedad de bilinealidad en (2.8) para describir el funcionamiento del operador en base a una *convolución de segundo orden*. Representando nuevamente la señal  $x(t)$  de entrada al sistema como en (2.3), entonces la propiedad de bilinealidad en (2.8) implica que la salida

de este sistema se puede expresar como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1)x(\tau_2)\mathbf{H}_2\{\delta(t-\tau_1), \delta(t-\tau_2)\}d\tau_1d\tau_2 \quad (2.9a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau_1)x(\tau_2)h_2(t-\tau_1, t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2, \quad (2.9b)$$

donde  $h_2(t_1, t_2)$  en (2.9b) es la respuesta del operador bilineal  $\mathbf{H}_2\{\cdot, \cdot\}$  a dos impulsos, uno en el instante de tiempo  $t_1$  y otro en el instante de tiempo  $t_2$ . A ésta respuesta se la denomina *kernel de Volterra de segundo orden* del sistema.

Nótese también que haciendo un cambio de variables se puede reescribir la convolución de segundo orden en (2.9b) como

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t-\tau_1)x(t-\tau_2)d\tau_1d\tau_2. \quad (2.10)$$

Entonces las características de este sistema también se pueden representar a través de una respuesta (de segundo orden) del sistema al impulso, y de una integral de convolución (de segundo orden). Finalmente, otra similitud con los sistemas lineales es que de la definición  $h_2(t_1, t_2) = \mathbf{H}_2\{\delta(t_1), \delta(t_2)\}$  no parece nada trivial obtener el kernel de Volterra para poder así describir el sistema. Sin embargo, al igual que en el caso lineal, existen tantas metodologías como uno sea capaz de imaginar, y en general son bastante prácticas y eficientes. Para observar la simpleza de esta serie y su utilidad se presenta a continuación un simple ejemplo, en el cuál también se puede ver lo simple que puede ser a veces obtener la expresión de un kernel de Volterra.

### Ejemplo:

Considérese un sistema donde la relación de entrada-salida viene dada por  $y(t) = x^2(t)$ . En este caso, resulta por simple inspección de (2.8) que  $\mathbf{H}_2\{x_n(t), x_m(t)\} = x_n(t)x_m(t)$ , y por ende el kernel de Volterra de segundo orden para éste sistema resulta  $h_2(t_1, t_2) = \delta(t_1)\delta(t_2)$ . El kernel  $h_2(t_1, t_2) = \delta(t_1)\delta(t_2)$  define por completo el sistema (*i.e.*, no hace falta utilizar otros operadores), el cuál a su vez puede ser resintetizado mediante una simple integral de convolución de segundo orden. §

## 2.1.2 Sistemas No-Lineales de Cualquier Orden N

La relación entre entrada y salida indicada en (2.9b) es una generalización a sistemas de segundo orden de la integral de convolución para sistemas lineales en (2.4). Este análisis

fácilmente pueden extrapolarse a sistemas de mayor orden. Incluso propiedades de los sistemas de cualquier orden (*e.g.*, causalidad, estabilidad, invarianza temporal, *etc.*) también pueden ser relacionadas a características particulares de los kernels de Volterra correspondientes a dicho sistema.

Como se acaba de ver en la Sección 2.1.1, la generalización de sistemas lineales a sistemas de segundo orden implica reemplazar la propiedad de linealidad por la de bilinealidad, y las convoluciones (respuestas al impulso) unidimensionales por convoluciones (respuestas al impulso) bidimensionales. De la misma forma la generalización a sistemas de cualquier orden  $N$  requiere definir el sistema en base a operadores con la propiedad de  $N$ -linealidad y respuestas al impulso (convoluciones)  $N$ -dimensionales. En el caso más general se describe al sistema no-lineal como una sumatoria de sistemas  $n$ -lineales como sigue:

$$y(t) = \mathbf{H}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n[x(t)], \quad (2.11)$$

donde el  $n$ -ésimo operador  $\mathbf{H}_n[x]$  se define por

$$\mathbf{H}_n[x] = \mathbf{H}_n\{x_1, x_2, \dots, x_n\}|_{x_1=\dots=x_n=x}, \quad (2.12)$$

con  $\mathbf{H}_n\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  un *operador  $n$ -lineal* (*i.e.*, es lineal en  $x_i$  si las componentes  $x_{j \neq i}$  están fijas) y donde  $\mathbf{H}_0$  simplemente representa una función constante o componente de continua (*direct current* - DC). Todo lo dicho para los operadores de orden 2 (respecto a kernels e integrales de convolución) puede extenderse en forma análoga a operadores de orden  $n$ . Entonces se puede escribir *cualquier* sistema a través de integrales de convolución de  $n$ -ésimo orden como sigue:

$$y(t) = \text{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n x(t - \tau_i) d\tau_i, \quad (2.13)$$

donde  $h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  es el *kernel de Volterra de  $n$ -ésimo orden*, y el desarrollo en (2.13) se conoce como serie de Volterra<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup>El desarrollo en serie de Volterra lleva ese nombre en honor al matemático Vito Volterra que propuso esta serie en 1880 como generalización de la serie de Taylor para funcionales [78]. Fréchet demostró en 1910 que el conjunto de funcionales de Volterra  $\{\mathbf{H}_n[x(t)]\}_{n=0}^{\infty}$  es completo y generalizó el teorema de Weierstrass, demostrando que cualquier funcional continuo puede ser representado por una serie de funcionales de orden entero (como es el caso de la serie de Volterra) con una convergencia uniforme en todos los conjuntos compactos de funciones continuas [79]. El principal uso de la serie de Volterra fue en el estudio de funcionales y para resolver ecuaciones integro-diferenciales y en derivadas parciales. Hasta donde se sabe su aplicación al análisis y diseño de sistemas no-lineales fue sugerida por primera vez por Norbert Wiener en los años 30 [75]. La manera en que se presenta la serie de Volterra en este capítulo obedece principalmente a los lineamientos utilizados por Wiener para desarrollar el *modelo de Wiener* a partir de la serie de Volterra [76].

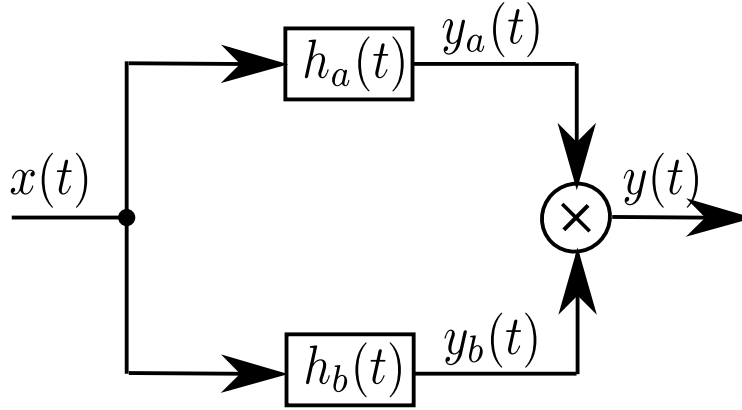


Fig. 2.1 Sistema de orden 2 a partir de 2 respuestas lineales  $h_a(t)$  y  $h_b(t)$ .

### 2.1.3 Simetría de los Kernels

Se dice que un kernel es simétrico si es invariante ante cualquier ordenamiento de sus argumentos, *e.g.*,  $h_2(t_1, t_2)$  es simétrico si  $h_2(t_1, t_2) = h_2(t_2, t_1) \forall t_1, t_2$ . En general los kernels de Volterra se obtienen de un modo que hace que no sean simétricos. Para poder convencer al lector de esto es conveniente analizar el sistema de segundo orden en la Fig. 2.1. Para este sistema se puede describir la salida en función de la entrada como

$$y(t) = y_a(t)y_b(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_a(\tau_1)h_b(\tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2 \quad (2.14a)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_2(\tau_1, \tau_2)x(t - \tau_1)x(t - \tau_2)d\tau_1d\tau_2. \quad (2.14b)$$

De (2.14) resulta inmediato que el kernel de Volterra de segundo orden de este sistema se puede expresar como

$$h_2(t_1, t_2) = h_a(t_1)h_b(t_2). \quad (2.15)$$

Se ve claramente de (2.15) que  $h_2(t_1, t_2) \neq h_2(t_2, t_1)$  a menos que  $h_a(t) = h_b(t)$ , por lo que el kernel  $h_2(\tau_1, \tau_2) = h_a(\tau_1)h_b(\tau_2)$  no será simétrico en general. Sin embargo, nótese que a nivel de sistema no se puede distinguir el kernel  $h_2(t_1, t_2)$  del kernel  $h_2(t_2, t_1)$ , *i.e.*, introduciendo uno u otro kernel en la ecuación (2.14b) se sigue obteniendo la misma salida  $y(t)$  para toda entrada  $x(t)$ . De hecho, estos 2 kernels ( $h_2(t_1, t_2) = h_a(t_1)h_b(t_2)$  y  $h_2(t_2, t_1) = h_a(t_2)h_b(t_1)$ ) no son distinguibles a nivel de sistema del kernel

$$h_s(t_1, t_2) = \frac{h_2(t_1, t_2) + h_2(t_2, t_1)}{2}, \quad (2.16)$$



el cuál es evidentemente simétrico.

Lo anterior es cierto en general para kernels de cualquier orden, y se puede hacer simétrico cualquier kernel de  $n$ -ésimo orden como se indica en (2.17).

$$h_s(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\substack{\text{Sobre todos los} \\ \text{posibles reordenamientos} \\ \text{de las } t_i, i = 1, 2, \dots, n}} h_n(t_1, \dots, t_n). \quad (2.17)$$

Entonces siempre es posible expresar la respuesta de un sistema usando kernels simétricos, lo que resulta muy útil para simplificar notación.

## 2.2 Transmisión de Datos a Través de Canales No-Lineales

La Tesis se enfoca en la equalización de sistemas de comunicaciones digitales. Entonces resulta de especial interés particularizar algunos aspectos del desarrollo por serie de Volterra al caso de la transmisión de información en tiempo discreto. Considérese la transmisión de una señal formada por una secuencia discreta de símbolos modulados como

$$x(t) = \sum_k a_k \delta(t - kT), \quad (2.18)$$

donde  $\{a_k\} = \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots$  es la secuencia de símbolos a transmitir. Supóngase que esta señal se transmite a través de un canal no-lineal. Si se modela al canal no-lineal por medio de una serie de Volterra es posible expresar la salida del sistema como<sup>1</sup>

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{H}_n[x(t)] \quad (2.19a)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} h_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \prod_{i=1}^n \left[ \sum_{k_i} a_{k_i} \delta(t - k_i T - \tau_i) d\tau_i \right] \quad (2.19b)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{k_1} \dots \sum_{k_n} h_n(t - k_1 T, t - k_2 T, \dots, t - k_n T) \prod_{i=1}^n a_{k_i} \right]. \quad (2.19c)$$

Observando la  $n$ -ésima componente, y aplicando en (2.19c) las propiedades de simetría de los kernels y de invarianza temporal, resulta que se puede expresar cada componente de la

<sup>1</sup>Se omite, sin pérdida de generalidad, el término de DC en (2.19) puesto que no sirve para transmitir información en sistemas de comunicaciones.

serie (e.g., la  $n$ -ésima) como

$$y_n(t) = \sum_k \sum_{k_2} \cdots \sum_{k_n} \left( a_k \prod_{i=2}^n a_{k_i} \right) h_n(t - kT, t - k_2T, \dots, t - k_nT) \quad (2.20a)$$

$$= \sum_k \sum_{k_2 \leq k} \cdots \sum_{k_n \leq k_{n-1}} \left( a_k \prod_{i=2}^n a_{k-k_i} \right) \bar{h}_n(t - kT, t - k_2T, \dots, t - k_nT). \quad (2.20b)$$

Nótese que  $\bar{h}_n(t_1, \dots, t_n)$  es simplemente una renormalización del kernel  $h_n(t_1, \dots, t_n)$  para eliminar en (2.20b) la necesidad de contemplar las combinaciones esencialmente idénticas (y por ende redundantes) de las secuencias  $a_k \prod_{i=2}^n a_{k_i}$  presentes en (2.20a).

La ec. (2.20) requiere conocer el kernel de Volterra  $h_n(t_1, t_2, \dots, t_n)$ . Sin embargo, generalmente se prefiere trabajar con sistemas lineales y unidimensionales de ser posible. En la siguiente sección se muestra cómo se puede interpretar a (2.20) como un sistema de múltiple entrada y salida única (*multiple-input single-output* - MISO) “*lineal*” en las *sub-secuencias*  $(a_k \prod_{i=2}^n a_{k-k_i})$  para valores fijos de  $k_2, k_3, \dots, k_n$ .

### 2.2.1 Kernels Unidimensionales de Volterra

Un kernel de Volterra de  $n$ -ésimo orden es una función  $n$ -dimensional (i.e.,  $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ ). En ciertas aplicaciones suele ser útil reescribir la respuesta en (2.20) desglosando el kernel  $\bar{h}(t_1, \dots, t_n)$  en función de *sub-kernels*  $f_m(t)$  *unidimensionales* (i.e.,  $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ ). Estos sub-kernels  $f_m(t)$  representan cada una de las *secciones* o *rebanadas* del kernel  $\bar{h}(t_1, \dots, t_n)$ . Concretamente se puede reescribir la respuesta  $y_n(t)$  en (2.20b) como sigue:

$$y_n(t) = \sum_k (a_k)^n \underbrace{f_{[0,0,\dots,0]}(t - kT)}_{n-1} + \sum_k (a_k)^{n-1} a_{k-1} \underbrace{f_{[0,0,\dots,0,1]}(t - kT)}_{n-2} \quad (2.21a)$$

⋮

$$+ \sum_k (a_k)^{n-2} a_{k-1}^2 \underbrace{f_{[0,0,\dots,0,1,1]}(t - kT)}_{n-3} \quad (2.21b)$$

⋮

$$+ \sum_k a_k (a_{k-1})^{n-1} \underbrace{f_{[0,1,1,\dots,1]}(t - kT)}_{n-2} \quad (2.21c)$$

⋮

$$+ \sum_k (a_k)^{n-1} a_{k-2} \underbrace{f_{[0,0,\dots,0,2]}(t - kT)}_{n-2} \quad (2.21d)$$

⋮

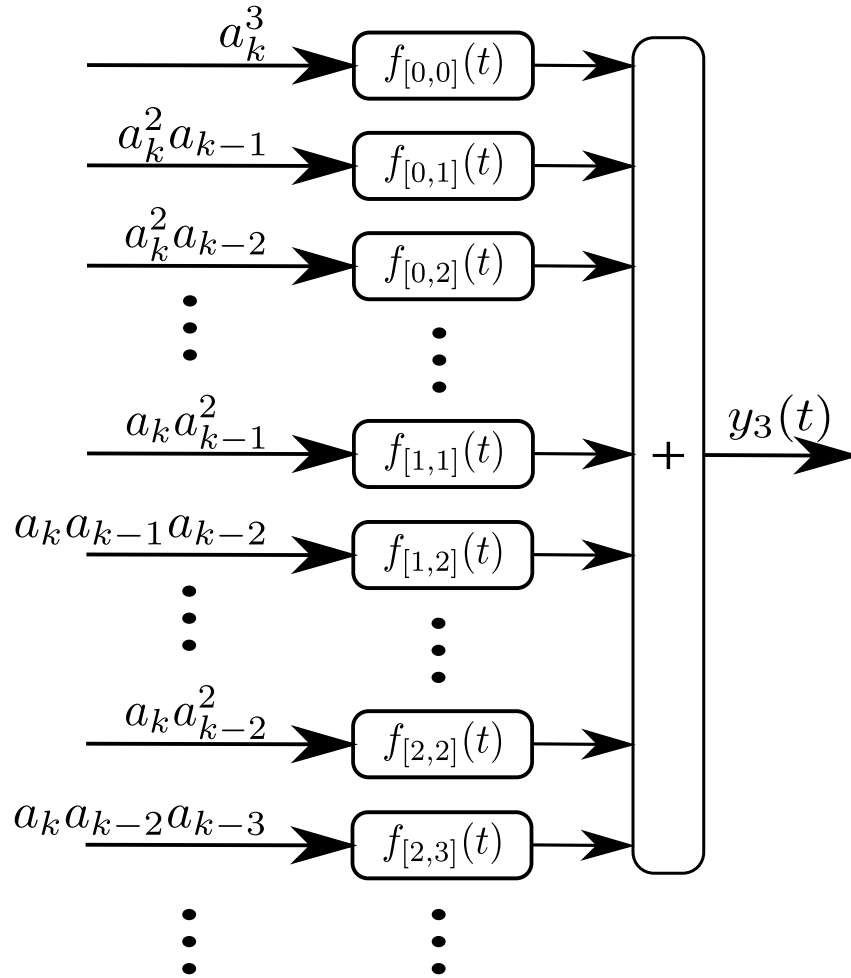


Fig. 2.2 Sistema de orden 3 interpretado como un sistema MISO lineal.

donde

$$f_{[i_1, i_2, \dots, i_{n-1}]}(t - kT) = \bar{h}_n(t - kT, t - (k - i_1)T, t - (k - i_2)T, \dots, t - (k - i_{n-1})T), \quad (2.22)$$

con  $i_j \geq 0 \forall j = 1, 2, \dots, n-1$ , es la notación para una de las infinitas secciones unidimensionales del kernel  $\bar{h}_n(t)$ . La interpretación MISO lineal del sistema de orden  $n$  se muestra en la Fig. 2.2 para  $n = 3$ . Nótese que la interpretación del sistema como lineal requiere suponer que las secuencias  $(a_k \prod_{i=2}^n a_{k-k_i})$  para valores distintos de  $k_2, k_3, \dots, k_n$  son independientes, algo que claramente no es cierto. Sin embargo, esta licencia puede permitir un mejor análisis del sistema al fraccionarlo en sub-sistemas más simples, siempre y cuando uno tenga presente que estas sub-secuencias en realidad **no** son independientes.

El beneficio de expresar todo en base a funciones unidimensionales en general prevalece

por sobre la complejidad en notación (comparar (2.20) y (2.21)). Esto es así porque en la práctica muy pocas secciones unidimensionales alcanzan para modelar con gran precisión la respuesta no-lineal  $y_n(t)$ . Así, con sólo unos pocos términos en (2.21), es posible tener una representación de  $y_n(t)$  esencialmente tan precisa como la (2.20). Además, también es usual que sólo algunos pocos kernels (multidimensionales) basten para obtener un excelente modelo del sistema, *i.e.*, sólo algunos términos en (2.19a) son suficientes para representar fielmente a  $y(t)$ . Ambos aspectos unidos justifican expresar en la práctica la respuesta  $y(t)$  en función de secciones unidimensionales de los kernels en vez de usar los propios kernels. De hecho, en todo lo que sigue de esta Tesis, se utilizará esta expansión en sub-kernels unidimensionales. Esta nueva representación no implica ningún cambio conceptual con respecto a (2.19). Lo que se logra es simplemente evidenciar que en la mayoría de las situaciones prácticas de interés, se sigue teniendo una sumatoria de sólo unos cuantos términos, salvo que ahora estos términos implican respuestas unidimensionales. Estas respuestas unidimensionales en general son más fáciles de analizar y también de estimar con métodos adaptivos [74]. Por esto mismo es común hacer un **abuso de notación** y directamente **llamar kernels de Volterra a cada una de las secciones definidas en (2.22)**<sup>1</sup>. Además, resulta cómodo también simplificar la notación en (2.22) obviando la indicación como sub-índice del orden de no-linealidad del kernel *padre* y la sección que representa el kernel *hijo*. En cambio, simplemente se usará un sub-índice arbitrario con el único fin de enumerar y diferenciar unos kernels (unidimensionales) de otros. Esta simplificación no representa ningún inconveniente. De hecho, la relación entre *padre* e *hijo* se puede deducir al observar la multiplicidad de las sub-secuencias de símbolos que se convolucionan con cada kernel *hijo* a la hora de formar la respuesta total del sistema (ver, *e.g.*, Fig. 2.2). En todo lo que sigue de la Tesis será adoptada esta nueva notación donde se denominan como kernels de Volterra directamente a los kernels *hijos*, y permitiendo usar una asignación arbitraria de sub-índices de los kernels, sólo con el objetivo de diferenciar unos de otros.

### Ejemplo de Representación con Kernels Unidimensionales

Un ejemplo de cómo se puede expresar la respuesta de un sistema no-lineal a una señal de datos usando la notación de *kernels de Volterra unidimensionales* se muestra a continuación:

---

<sup>1</sup>Cuando sea necesario se llamará kernel *padre* al kernel de Volterra (multidimensional) propiamente dicho, y kernel *hijo* a cualquiera de los kernels (unidimensionales) derivados como *sección* de algún kernel *padre*. De este modo se salvará el abuso de notación en la denominación de *kernels de Volterra*.

$$y(t) = \sum_k a_k f_0(t - kT) \quad (2.23a)$$

$$+ \sum_k a_k a_{k-1} f_1(t - kT) \quad (2.23b)$$

$$+ \sum_k a_k a_{k-2} f_2(t - kT) \quad (2.23c)$$

$$+ \sum_k a_k^3 f_3(t - kT) \quad (2.23d)$$

$$+ \sum_k a_k a_{k-2} a_{k-3} f_4(t - kT) \quad (2.23e)$$

En (2.23)  $f_0(t)$  es el kernel lineal (que coincide con el kernel lineal tradicional); los kernels de Volterra (unidimensionales)  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  corresponden a las secciones  $\bar{h}_2(t, t - T)$  y  $\bar{h}_2(t, t - 2T)$  del kernel (*padre*) de segundo orden  $h_2(t_1, t_2)$ , respectivamente; y finalmente los kernels (unidimensionales)  $f_3(t)$  y  $f_4(t)$  corresponden a las secciones  $\bar{h}_3(t, t, t)$  y  $\bar{h}_3(t, t - 2T, t - 3T)$  del kernel (*padre*) de tercer orden  $h_3(t_1, t_2, t_3)$ , respectivamente. Por último, cabe destacar en este ejemplo que la asignación de sub-índices para los kernels  $f_0, f_1, f_2, f_3, f_4$  es completamente arbitraria y cualquier otra alternativa hubiera sido posible e igualmente válida (*e.g.*, se podría haber usado  $f_4(t)$  para denotar al kernel lineal). §

El ejemplo de la ec. (2.23) también permite observar que, dependiendo de la modulación utilizada, algunas secciones de distintos kernels pueden quedar embebidas en otro kernel unidimensional de menor orden. Por ejemplo, si se supone  $a_k \in \{-1, 1\}$ , entonces resulta  $a_k = a_k^3$ , y por ende el kernel  $f_3(t)$  en (2.23d) se reduce a un kernel lineal, por lo que quedaría embebido en  $f_0(t)$ . Sin embargo, esto no implica ninguna dificultad operativa. De hecho es beneficioso puesto que *en la práctica un sistema originalmente no-lineal puede comportarse como un sistema lineal bajo ciertas condiciones de la modulación de la señal de entrada*.

## 2.3 Comunicaciones por Fibra Óptica

La fibra óptica es uno de los medios de transmisión más utilizados en la actualidad. Esto se debe a su gran capacidad, que permite transmitir a tasas de datos y distancias impensadas usando otros medios de comunicación. Su importancia práctica y características no-lineales hacen de estos enlaces un escenario propicio para aplicar la propuesta de esta Tesis para compensación de ISI no-lineal. Sólo con el fin de contextualizar los resultados presentados en los Capítulos 4 y 5 se comentan muy superficialmente algunas de las principales

características de estos sistemas. En la Sección 2.3.1 se presenta la ecuación no-lineal de Schrödinger que describe la propagación de la señal a través de la fibra óptica, y en el proceso se destacan algunas aproximaciones que se consideran para obtener dicha ecuación. Por ejemplo, se detalla cómo la ecuación no-lineal de Schrödinger surge de considerar una perturbación del modelo lineal. Este aspecto es uno de los tantos que sustentan el uso de series de Volterra para modelar estos enlaces. En la Sección 2.3.2 se mencionan algunos aspectos de las SMFs que se desprenden de la ecuación no-lineal de Schrödinger. Éstos dan lugar a distintas formas de distorsión que afectan el desempeño del sistema de comunicación. Finalmente, en la Sección 2.3.3, se describen los sistemas de comunicación con detección directa (*direct detection* - DD) que se usarán en los Capítulos 4 y 5 para evaluar las bondades del MLSO propuesto en esta Tesis. Cabe advertir que se omite un tratamiento profundo y detallado de la física de la fibra óptica por estar largamente fuera del alcance de la presente Tesis<sup>1</sup>. Sin embargo, es importante destacar y mencionar, al menos superficialmente, algunas características relevantes de este medio de comunicación. Ésto facilitará la comprensión e interpretación de algunos resultados presentados en el Capítulo 5. La caracterización más importante de los enlaces por fibra óptica con IM/DD se posterga hasta la Sección 2.3.4. Allí se presenta un análisis por serie de Volterra de estos sistemas y de los resultados se observa claramente el importante incremento en complejidad requerido por un MLSO para compensar enlaces de larga distancia.

### 2.3.1 Ecuación de Propagación

En esta sección se comenta superficialmente sobre el origen de la ecuación que describe la propagación en la fibra, tanto en su forma lineal como no-lineal. El objetivo es simplemente familiarizar rápidamente al lector con el mecanismo de propagación de la señal a través de una fibra óptica.

Como todo medio donde se transmiten ondas electromagnéticas, la propagación está descrita por las ecuaciones de Maxwell, que para el caso de la fibra se reducen a:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t, \quad (2.24a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \partial \mathbf{D} / \partial t, \quad (2.24b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.24c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.24d)$$

donde  $\times$  denota producto cruz, el operador  $\nabla$  está dado por  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,

<sup>1</sup>El lector interesado en una comprensión profunda de la propagación a través de las fibras ópticas puede revisar [32] y las referencias allí citadas.

$\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  son los campos eléctrico y magnetizante, el desplazamiento eléctrico y el campo magnético, respectivamente. Los flujos  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{B}$  se relacionan con los flujos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  a través de

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.25a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}, \quad (2.25b)$$

donde las constantes  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  son la permitividad y permeabilidad en el vacío, respectivamente, mientras que  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{M}$  son las polarizaciones eléctricas y magnéticas inducidas.

Ahora bien, en el caso particular de la fibra óptica, se observa que  $\mathbf{M} = 0$  y que  $\mathbf{P}$  está relacionado con el campo  $\mathbf{E}$  de una manera muy compleja.

### Ecuación de Propagación Lineal

En muchas aplicaciones es válido *aproximar* la relación entre  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{E}$  simplemente como

$$\mathbf{P}(z, t) = \epsilon_0 \chi \mathbf{E}(z, t), \quad (2.26)$$

donde  $\chi$  es la susceptibilidad de la fibra. Si además *se considera que la fibra es perfectamente isotrópica*, entonces se puede despreciar cualquier tipo de variación de  $\chi$  con la posición. Bajo estas condiciones se puede condensar las ecuaciones (2.24)-(2.26) en la ecuación

$$\nabla^2 \tilde{E} + n^2(\omega) k_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (2.27)$$

donde  $\tilde{E}(\omega, z)$  se usa en esta sección para denotar la transformada de Fourier (*Fourier transform* - FT) del campo  $\mathbf{E}(t, z)$ ,  $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$  es el número de onda en el vacío,  $\lambda$  es la longitud de onda del campo que oscila en el vacío a una frecuencia angular  $\omega$ , y donde  $n(\omega)$  es el índice de refracción [32].

La solución de (2.27) acepta infinitos modos de propagación guiados. Cada una de estas soluciones se encuentran indexadas por una constante de propagación  $\beta$  [32]. Dependiendo de los distintos parámetros físicos de la fibra (niveles de dopado, dimensiones físicas, *etc.*) pueden existir varias soluciones, cada una caracterizada por su propia constante de propagación  $\beta$ . Bajo ciertas condiciones de los parámetros físicos (*e.g.*, un diámetro suficientemente pequeño) hay un único modo de propagación posible, llamado *modo fundamental*. Las SMFs se diseñan para que sólo esté presente este modo fundamental. Este modo fundamental, al igual que la mayoría de los modos posibles, posee una componente  $\mathbf{E}_z$  en la dirección de propagación. Esto implica que, rigurosamente hablando, las ondas en una SMF no se propagan como ondas planas. Sin embargo, es una excelente *aproximación* considerar que este modo fundamental se comporta como si fuera un modo donde  $\mathbf{E}_z \approx 0$  y con pola-

rización lineal  $\mathbf{E}_x$ . Así la solución del campo para una SMF se puede *aproximar* como [32]

$$\tilde{E}(\omega) = \hat{x} [F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) \exp(j\beta z)], \quad (2.28)$$

donde  $\hat{x}$  es un versor que indica la dirección de polarización y  $F(x, y)$  es la distribución transversal dentro del núcleo. Por otro lado,  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  es la FT de una envolvente compleja (centrada en una frecuencia portadora  $\omega_0$ ) del campo en la posición  $z$ . Esta envolvente en la posición  $z$  corresponde a la inyección de un pulso con envolvente  $\tilde{A}(0, \omega - \omega_0)$  en el extremo  $z = 0$  de la fibra.

Antes de proseguir vale la pena mencionar que  $\beta(\omega)$  se podría determinar de la ecuación (2.27). Sin embargo, este es un procedimiento muy complejo que generalmente no devuelve una expresión cerrada para  $\beta(\omega)$ . Por ello, se prefiere expresar la constante de propagación por medio de una expansión en serie de Taylor alrededor de  $\beta_0$  como

$$\beta(\omega) = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2}(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (2.29)$$

donde los coeficientes

$$\beta_i = \frac{d^i \beta}{d\omega^i}(\omega = \omega_0) \quad (2.30)$$

se pueden obtener por medición. Generalmente, los términos  $\beta_i$  para  $i > 2$  son despreciables y se trunca la serie sin incluir términos de orden superior o igual a tres.

Si se supone que  $\tilde{A}(z, \omega - \omega_0)$  varía lentamente con la distancia, y se reemplaza  $\beta(\omega)$  usando (2.29), entonces se puede encontrar la siguiente ecuación para la evolución espacio-temporal de la envolvente compleja del pulso (*i.e.*, la que lleva la información):

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0. \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) describe con gran precisión la propagación *lineal* de un pulso óptico con envolvente  $A(z, t)$  a través de una SMF.

### Ecuación No-Lineal de Schrödinger

En la Sección 2.3.1 se ha mostrado una solución que usa una *aproximación* lineal entre el campo  $\mathbf{E}$  y la polarización  $\mathbf{P}$  (ver (2.26)). En realidad, esta aproximación no es suficientemente buena bajo ciertas condiciones, en cuyo caso es mejor reemplazarla por la siguiente relación no-lineal:

$$\mathbf{P}(z, t) \approx \epsilon_0 \left( \chi^{(1)} \mathbf{E}(z, t) + \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\mathbf{E}(z, t)|^2 \mathbf{E}(z, t) \right), \quad (2.32)$$



donde  $\chi^{(1)}$  y  $\chi^{(3)}$  pueden considerarse como constantes. Resolver (2.27) contemplando la dependencia no-lineal en (2.32) es un problema muy complejo. Sin embargo, se obtiene una excelente *aproximación* considerando esta no-linealidad como una perturbación de la solución lineal. Esto significa que se resuelve (2.27) como en la Sección 2.3.1, pero se reemplaza la constante de propagación  $\beta(\omega)$  por [32]

$$\tilde{\beta}(\omega) = \beta(\omega) + \Delta\beta. \quad (2.33)$$

Por medio del parámetro  $\Delta\beta$  se incorporan los efectos de atenuación y no-linealidades. El resultado que se obtiene tras un largo procedimiento es que la envolvente que se propaga según el modo fundamental responde a la ecuación diferencial [32]

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + j \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} = j\gamma |A|^2 A, \quad (2.34)$$

donde  $\gamma$  se define como el parámetro no-lineal de efecto Kerr<sup>1</sup>, mientras que  $\alpha$  es el coeficiente de atenuación, de aproximadamente 0.2 dB/km. La ecuación (2.34) se conoce como la ecuación *no-lineal de Schrödinger*, y describe con notable precisión la propagación de un pulso de envolvente  $A(z, t)$  a través de una SMF.

### 2.3.2 Distorsión en Fibras Monomodo

En esta sección se mencionan brevemente algunos efectos específicos de la fibra que resultan limitantes para los sistemas de comunicación por fibra óptica.

#### Dispersión Cromática

El efecto de la CD es una de las principales causas de distorsión en comunicaciones ópticas por enlaces DU [20]. Ésta surge a causa de la dependencia de la constante de propagación con la frecuencia (como se ve en la Sección 2.3.1, en las SMFs existe una única constante de propagación  $\beta(\omega)$  que caracteriza el modo de propagación elemental). De este modo, distintas componentes espectrales de un pulso se propagan a través de la fibra con velocidades diferentes. Entonces el pulso que llega al otro extremo de la fibra tiene una duración mayor a la del pulso transmitido<sup>2</sup>. La CD se describe en la práctica expandiendo la constante de

<sup>1</sup>La aproximación dada por (2.32) sólo considera *no-linealidades* por efecto Kerr. Sin embargo, es preciso mencionar que en la fibra existen otros efectos no-lineales como dispersión estimulada de Raman y dispersión estimulada de Brillouin. Más detalles al respecto se pueden encontrar en [32].

<sup>2</sup>En esta Tesis se considera que los pulsos son limitados por transformada al comienzo de la fibra.

propagación  $\beta(\omega)$  en serie de Taylor como en (2.29), midiendo los principales coeficientes de esta serie. Los parámetros  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son los principales coeficientes en las SMFs típicas<sup>1</sup>. El parámetro  $\beta_1$  está relacionado con la velocidad de grupo, *i.e.*, la envolvente del pulso óptico se propaga con una velocidad  $v_g$ , dada por

$$v_g^{-1} = \beta_1 = \frac{1}{c} \left( \bar{n}(\omega_0) + \omega_0 \frac{d\bar{n}}{d\omega}(\omega_0) \right). \quad (2.35)$$

Por otro lado, el parámetro  $\beta_2$  representa la dispersión por velocidad de grupo (*group velocity dispersion* - GVD), y es la principal responsable del ensanchamiento temporal del pulso óptico [20]. Si no hubiera GVD, todas las componentes del pulso se propagarían con la velocidad de grupo  $v_g$ , y demorarían un tiempo  $T = L/v_g$  para llegar al otro extremo de una fibra de longitud  $L$ . A causa de la GVD, un pulso con un ancho espectral  $\Delta\omega$  adquiere un ensanchamiento temporal en recepción dado por

$$\Delta T = \frac{dT}{d\omega} \Delta\omega = \frac{d(L/v_g)}{d\omega} \Delta\omega = L\beta_2 \Delta\omega. \quad (2.36)$$

En algunos sistemas de comunicación por fibra óptica se acostumbra hablar en términos de longitudes de onda en lugar de frecuencias (*i.e.*,  $f = c/\lambda$ ). Por tal motivo se suele expresar (2.36) en función de  $\Delta\lambda$ . Usando las relaciones  $\omega = 2\pi c/\lambda$  y  $\Delta\omega = -2\pi c\Delta\lambda/\lambda^2$  se puede reescribir (2.36) como

$$\Delta T = \frac{d(L/v_g)}{d\lambda} \Delta\lambda = DL\Delta\lambda, \quad (2.37)$$

donde

$$D = \frac{d(1/v_g)}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2, \quad (2.38)$$

es el *coeficiente de dispersión*.

Por último, se destaca que la CD también tiene gran influencia interactuando con efectos no-lineales. Particularmente el parámetro  $\beta_1(\omega)$  es muy importante para el efecto no-lineal de XPM porque permite establecer durante cuánto tiempo dos pulsos propagándose en diferentes longitudes de onda interactuarán de manera no-lineal [32].

---

<sup>1</sup>En ocasiones se opera en longitudes de onda  $\lambda \approx \lambda_D \simeq 1.31\mu\text{m}$ , donde  $\beta_2 \approx 0$ . En este caso resulta importante considerar el parámetro  $\beta_3$  en el modelo de la CD.

### Efectos No-Lineales

Como se mencionó en la Sección 2.3.1, la ecuación no-lineal de Schrödinger en (2.34) describe la propagación del campo a través de la fibra. La diferencia esencial de ésta respecto a la ecuación de propagación lineal en (2.31) es el término en el segundo miembro de (2.34). Este término resulta despreciable en enlaces DU con OOK-IM/DD como los considerados en esta Tesis, donde las potencias de transmisión son bajas (*e.g.*,  $< -5$  dBm) [4, 8, 12–15, 18, 19, 22, 25, 28, 33–36, 65]. Sin embargo, es importante destacar que en enlaces de muy larga distancia (*e.g.*, 1000 km o más), los efectos no-lineales de la fibra resultan considerables [19].

### Birrefringencia

En el repaso de las principales consideraciones para la obtención de la ecuación de propagación en la Sección 2.3.1 se mencionó la suposición de una solución polarizada linealmente en la dirección del versor  $\hat{x}$ . Ahora bien, se puede ver que la SMF siempre soporta simultáneamente otro modo de propagación ortogonal, polarizado a lo largo del eje  $\hat{y}$  [32]. En condiciones ideales, estos 2 modos ortogonales tienen idénticas constantes de propagación, y pulsos transmitidos en estos modos se propagan de manera independiente. Sin embargo, en condiciones reales, la fibra no es perfectamente isotópica a causa de deformaciones por temperatura, defectos de fabricación, estrés mecánico, *etc.* Esto afecta la naturaleza degenerada de los 2 modos de propagación, generando así birrefringencia. La consecuencia de esto es que las constantes de propagación  $\beta$  de los 2 modos ortogonales son diferentes. Así, si se transmite un pulso excitando ambas polarizaciones, entonces las componentes asociadas al eje más rápido (aquel para el cual  $\beta$  es más pequeña) llegarán más rápido al otro extremo de la fibra, en comparación con las componentes asociadas al otro eje de polarización. Este fenómeno es denominado demora diferencial de grupo (*differential group delay* - DGD) o PMD de primer orden. En este caso, el retardo entre las componentes que se propagan más rápido y más lento viene dado por

$$\Delta T = \left| \frac{L}{v_{gx}} - \frac{L}{v_{gy}} \right| = L |\beta_{1x} - \beta_{1y}|, \quad (2.39)$$

donde  $\beta_{1x}$  y  $\beta_{1y}$  son los coeficientes lineales de los desarrollos de Taylor (ver ec. (2.29)) para las constantes de propagación  $\beta_x(\omega)$  y  $\beta_y(\omega)$ , correspondientes a los modos de propagación a lo largo de las direcciones  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$ , respectivamente.

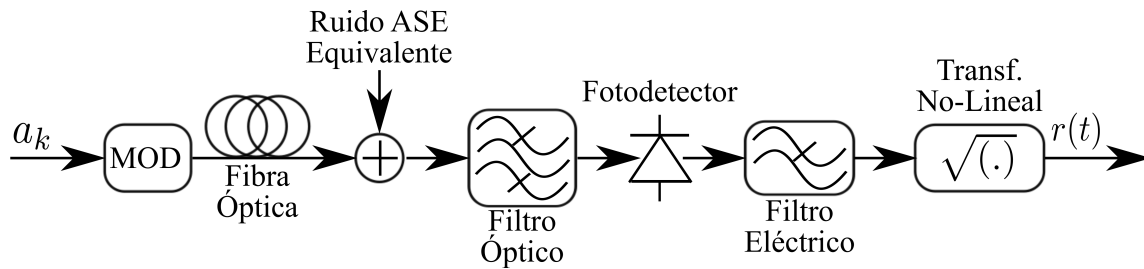


Fig. 2.3 Esquema OOK-IM/DD de comunicación por fibra óptica.

### 2.3.3 Esquemas de Transmisión OOK con Detección Directa

Hasta hace una década todas las fibras instaladas operaban esencialmente con simples esquemas OOK con modulación de intensidad (*intensity modulation* - IM), y utilizando un fotodiodo para recobrar la información de intensidad óptica (*i.e.*, usando DD). La principal ventaja de los sistemas OOK-IM/DD es su simplicidad. Sin embargo, es un sistema caracterizado por una fuerte presencia de no-linealidades a causa de la respuesta cuadrática del fotodiodo. La Fig. 2.3 muestra el modelo de un sistema de comunicación OOK-IM/DD.

Un modelo *equivalente* del enlace de la Fig. 1.3 se muestra en la Fig. 2.3. Nótese que (i) la componente de ruido que modela el ruido ASE (introducido por los amplificadores) se suma *recién* al final del enlace y además (ii) la atenuación de la fibra se supone perfectamente compensada por los amplificadores ópticos<sup>1</sup>. Este modelo *equivalente* se utiliza ampliamente para la evaluación teórica y experimental de la performance de receptores EDC [4, 8, 12, 13, 19, 25, 28, 30, 33, 34, 36, 37, 62]. En sistemas DU con potencia óptica de transmisión baja, como los esquemas OOK-IM/DD considerados en la Tesis, la dispersión de la fibra es prácticamente lineal, por lo que la interacción del ruido ASE y el efecto Kerr es despreciable. Así la exactitud del modelo equivalente de la Fig. 2.3 resulta satisfactoria. De esta manera, es posible realizar pruebas del receptor bajo distintas condiciones de OSNR, ya sea variando (i) la potencia transmitida y/o (ii) la potencia del ruido que se suma al final del enlace<sup>2</sup>. Una vez determinado el margen de OSNR que puede tolerar el receptor, es posible conocer el comportamiento del mismo en un enlace *real* realizando el *link budget*, para lo cual se necesita conocer el número de EDFAs, la figura de ruido de los mismos, la longitud de los spans, la potencia óptica, *etc.*

La portadora óptica es modulada en intensidad por la señal de datos. El modulador de intensidad es básicamente un interruptor muy rápido que habilita o bloquea el paso de luz emitida por el láser. Luego, la señal óptica modulada se transmite a través de la SMF. En el

<sup>1</sup>De esta manera el modelo teórico supone una fibra sin atenuación mientras que el efecto de los amplificadores ópticos se evidencia exclusivamente por la presencia del ruido ASE al final del enlace.

<sup>2</sup>Nótese que con este modelo *equivalente* no se precisa información como la figura de ruido y el número de EDFAs, como se puede verificar en [4, 8, 12, 25, 36, 37].

receptor, la señal se amplifica con un amplificador óptico (*optical amplifier* - OA) y se filtra ópticamente, ya sea para separar canales en transmisiones con WDM<sup>1</sup>, o bien para eliminar ruido fuera de banda. Luego, la señal se convierte al dominio eléctrico por un fotodiodo y un filtro eléctrico, donde este último modela la respuesta de etapas analógicas no mostradas en la Fig. 2.3 por simplicidad (*e.g.*, el TIA, los *track-and-hold* del conversor analógico-digital (*analog-to-digital converter* - ADC), *etc.*). En este proceso de conversión se pierde toda la información de fase y de polarización en la señal óptica, y el ruido ASE introducido por el OA se vuelve no-Gaussiano y señal-dependiente en el dominio eléctrico [8]. Entonces, se pasa la señal por una transformación no-lineal sin memoria del tipo raíz cuadrada, ya que se ha visto que, a fines prácticos, luego de esta transformación el ruido bien puede considerarse Gaussiano y señal-independiente [25, 30, 80]. Aun más, se ha visto que las no-linealidades también se reducen al usar una transformación del tipo raíz-cuadrada [81]. (*i.e.*, una gran parte de la energía se concentra en el kernel lineal).

### 2.3.4 Análisis de un Enlace de Fibra Óptica por Serie de Volterra

En esta sección se analiza la señal recibida en enlaces OOK-IM/DD de fibra óptica típicos. Para este análisis se estiman los kernels de Volterra según la nomenclatura introducida en la Sección 2.2. Se considera un sistema de comunicación como el de la Fig. 2.3. El transmisor modula la intensidad del láser con una modulación OOK sin retorno a cero (*no-return to zero* - NRZ). En este caso la PMD no se modela y, tanto la CD como las no-linealidades por efecto Kerr, se modelan resolviendo numéricamente la ecuación (2.34) [32]. Los kernels de Volterra (lineal y no-lineales) son extraídos de la señal eléctrica  $r(t)$  sin ruido resultante a la salida de la transformación raíz cuadrada por medio de estimación numérica [82] del modelo MISO presentado en la Sección 2.2.1. El factor de sobremuestreo utilizado en la resolución numérica de la ec. (2.34)<sup>2</sup> es  $T/T_s = 16$ . La tasa de transmisión de símbolos es  $1/T = 10$  Gs/s, el pulso transmitido es *unchirped* de envolvente Gaussiana  $e^{-t^2/2T_0^2}$  con  $T_0 = 36$  ps; el rango de extinción (*extinction ratio*) lógicos es 10 dB, y la potencia transmitida es  $-6$  dBm. En el receptor se usa un filtro óptico Lorentziano y un filtro eléctrico de Butterworth de cuarto orden con BWs de 15 y 10 GHz, respectivamente. La dispersión de la fibra es  $D = 17$  ps/(nm-km) y el coeficiente de no-linealidad es  $\gamma = 1.3$  W<sup>-1</sup>/km.

<sup>1</sup>En la presente Tesis no se consideran transmisiones WDM.

<sup>2</sup>Para resolver numéricamente la ec. (2.34) se usa el método “*split-step Fourier*” (ver [32]).

### Kernels de Volterra para un Enlace OOK-IM/DD Típico

En las Figs. 2.5 a 2.18 se muestran las respuestas estimadas de los kernels para distintas longitudes del enlace. Para una mejor apreciación de la dispersión del pulso y las amplitudes de los kernels no-lineales respecto al kernel lineal, las respuestas de los kernels se muestran normalizadas para que el pico del kernel lineal tenga amplitud unitaria. La longitud de los enlaces crece a pasos de 50 km. En las Figs. 2.5 a 2.18 se denota con “1000” al kernel lineal, *i.e.*, aquel cuya entrada es la secuencia  $a_k$ ; con “1100”, “1010” y “1001” se denota a los kernels no-lineales de segundo orden cuyas entradas son las secuencias  $a_k a_{k-1}$ ,  $a_k a_{k-2}$  y  $a_k a_{k-3}$ , respectivamente; finalmente se denota con “1011”, “1110” y “1111” a los kernels de tercer y cuarto orden cuyas secuencias de entrada son  $a_k a_{k-2} a_{k-3}$ ,  $a_k a_{k-1} a_{k-2}$  y  $a_k a_{k-1} a_{k-2} a_{k-3}$ , respectivamente. Las secuencias de entrada se seleccionan mediante prueba y error a partir de una lista predefinida. El criterio de selección consiste en obtener, con la menor cantidad de secuencias posibles, una relación mayor a 20 dB entre la señal original  $r(t)$  y la señal error  $r(t) - \hat{r}(t)$ , donde  $\hat{r}(t)$  es la señal resintentizada a partir del modelo de Volterra.

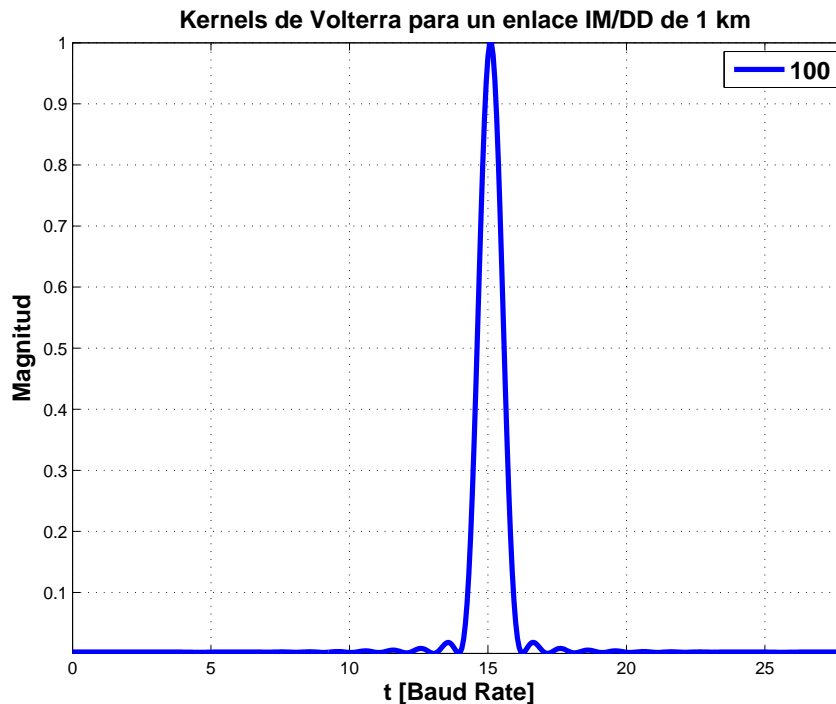


Fig. 2.4 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de B2B con transformación raíz cuadrada en el receptor.

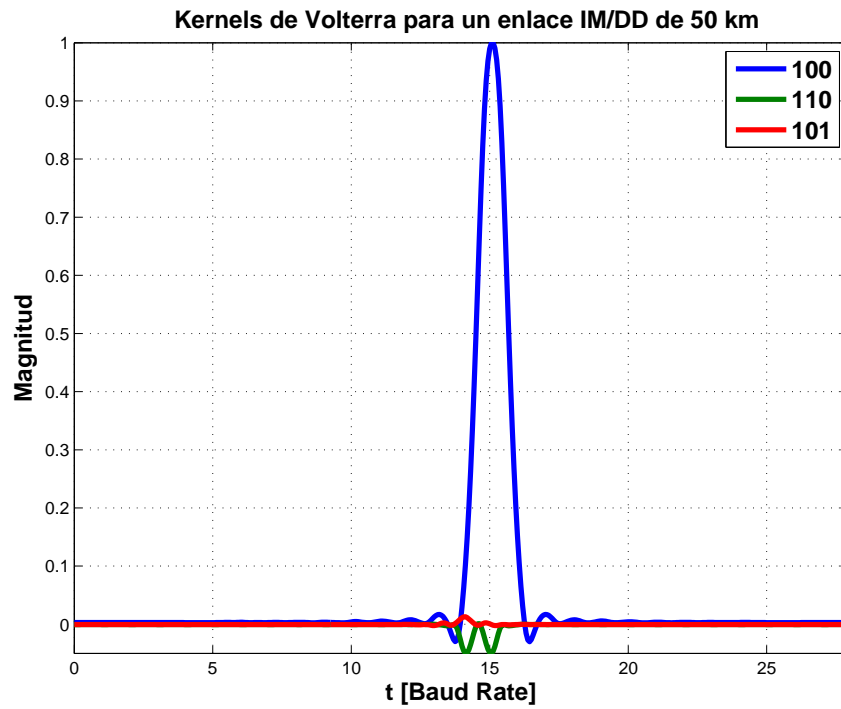


Fig. 2.5 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 50 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

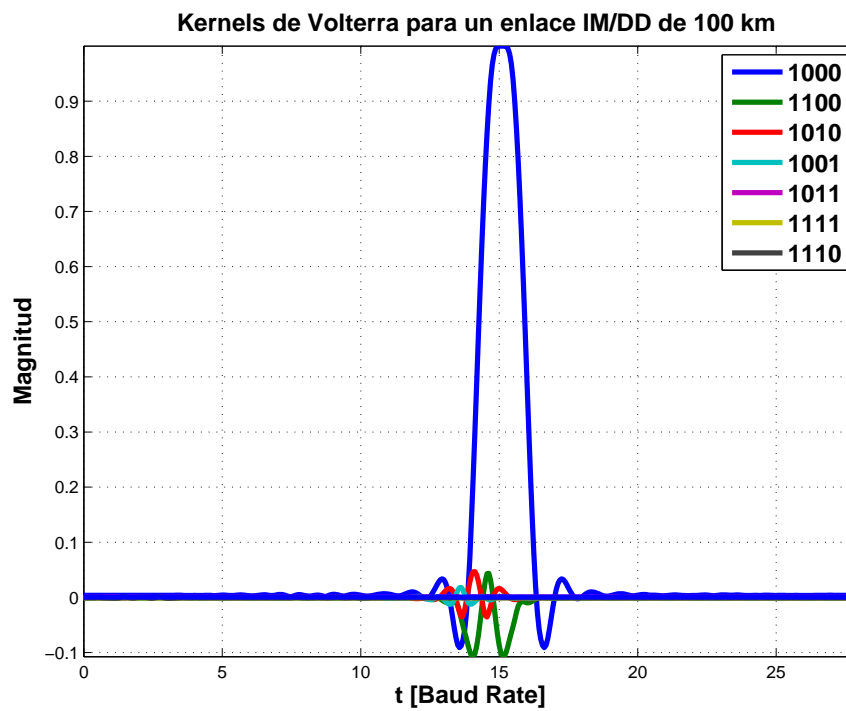


Fig. 2.6 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 100 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

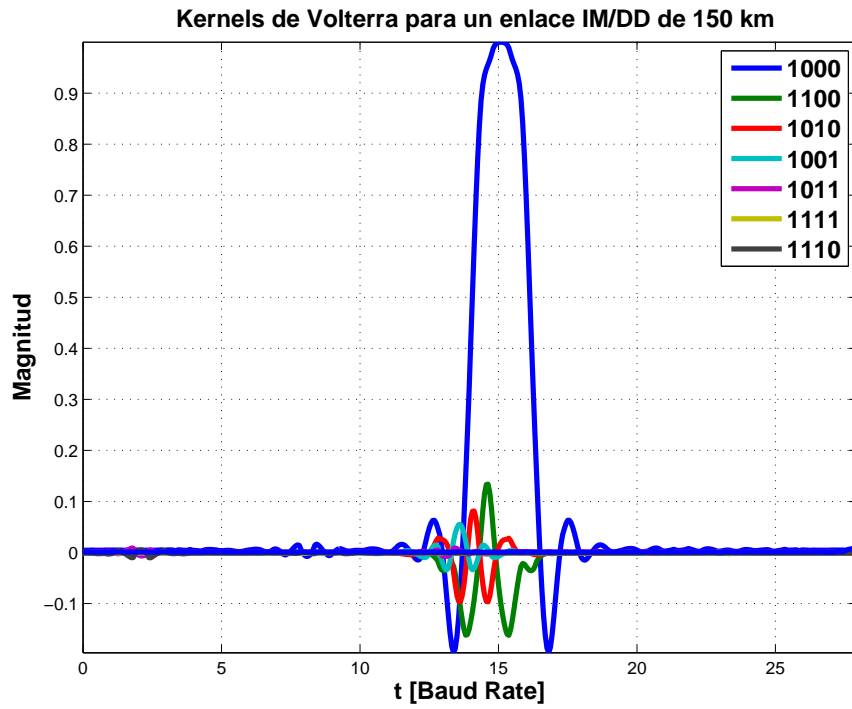


Fig. 2.7 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 150 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

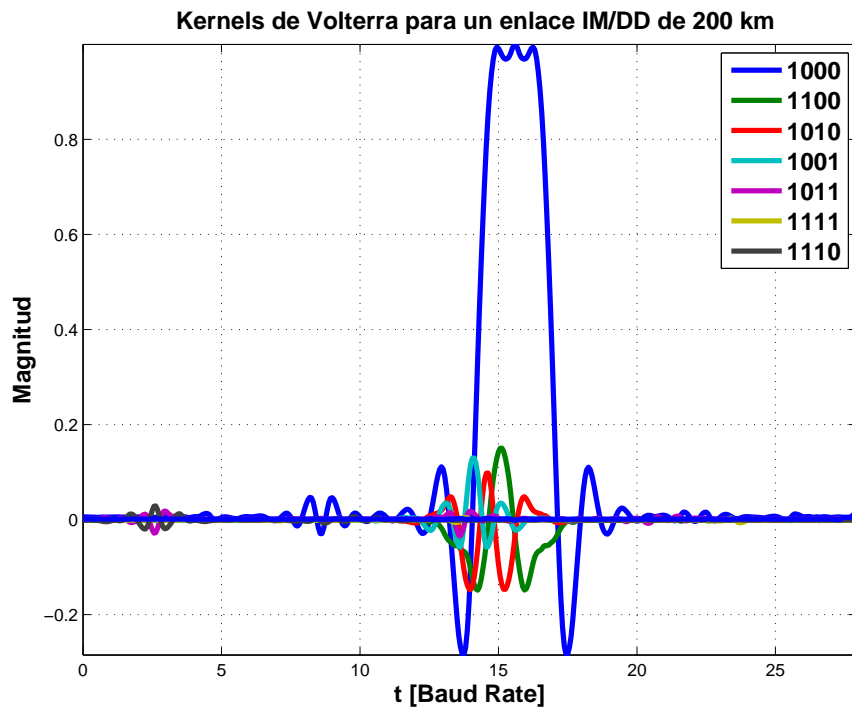


Fig. 2.8 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 200 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.



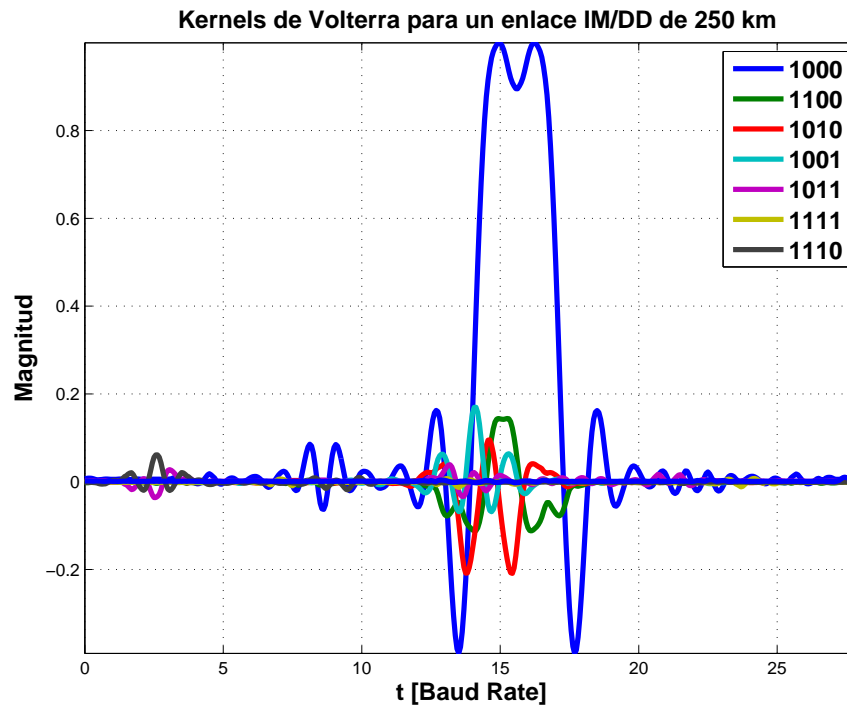


Fig. 2.9 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 250 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

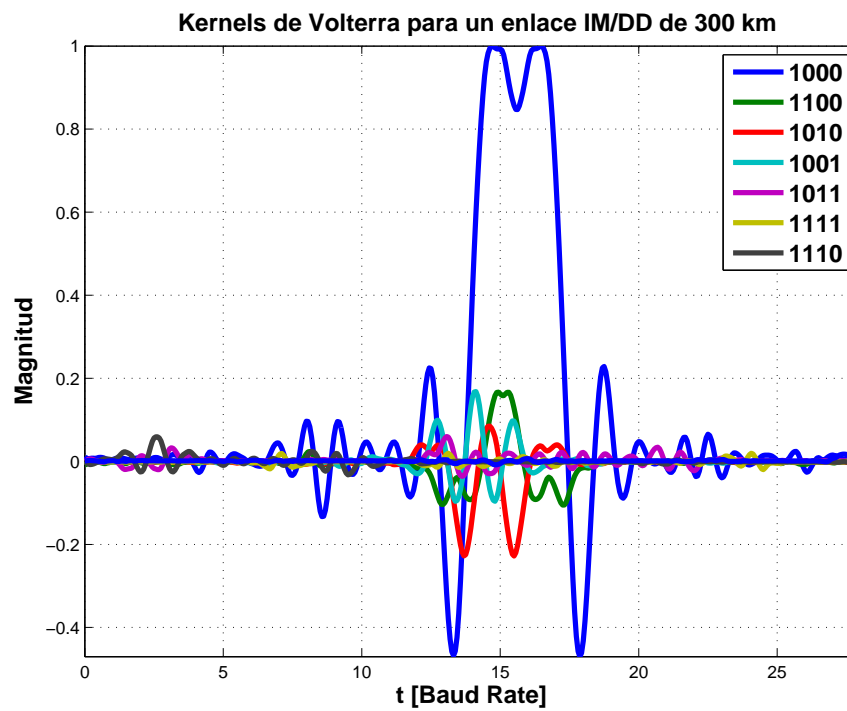


Fig. 2.10 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 300 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

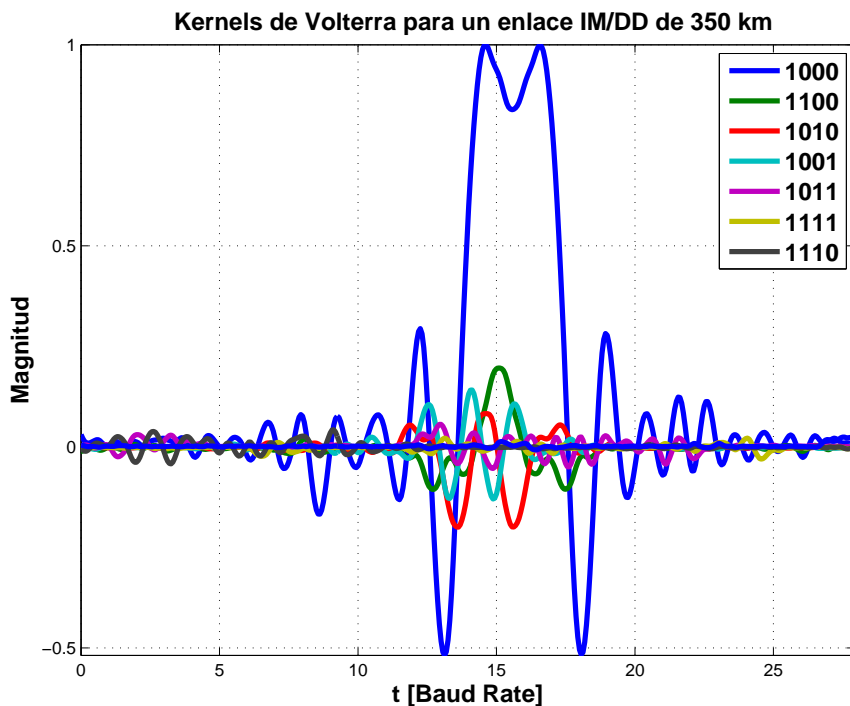


Fig. 2.11 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 350 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

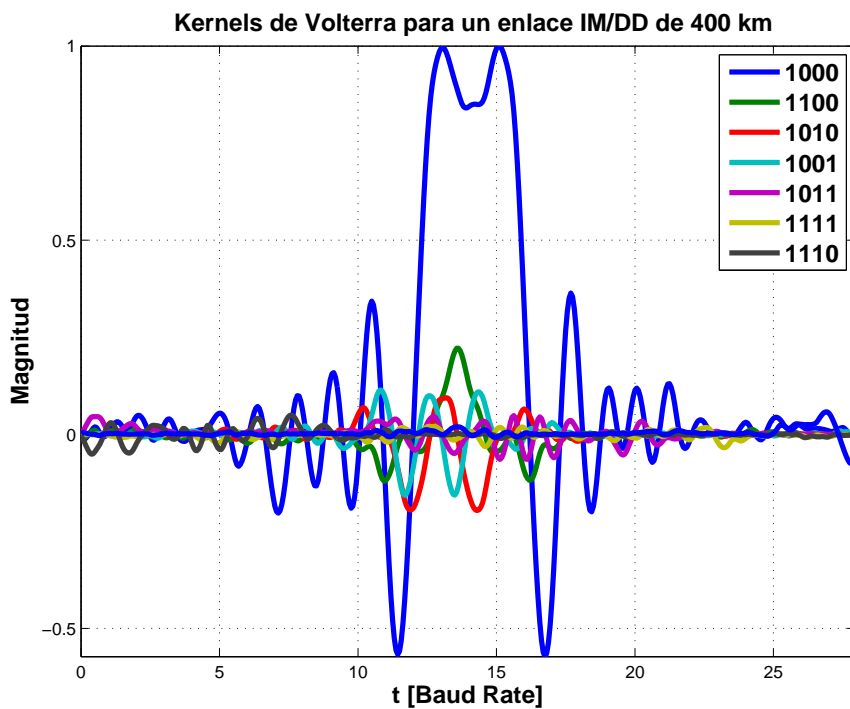


Fig. 2.12 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 400 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

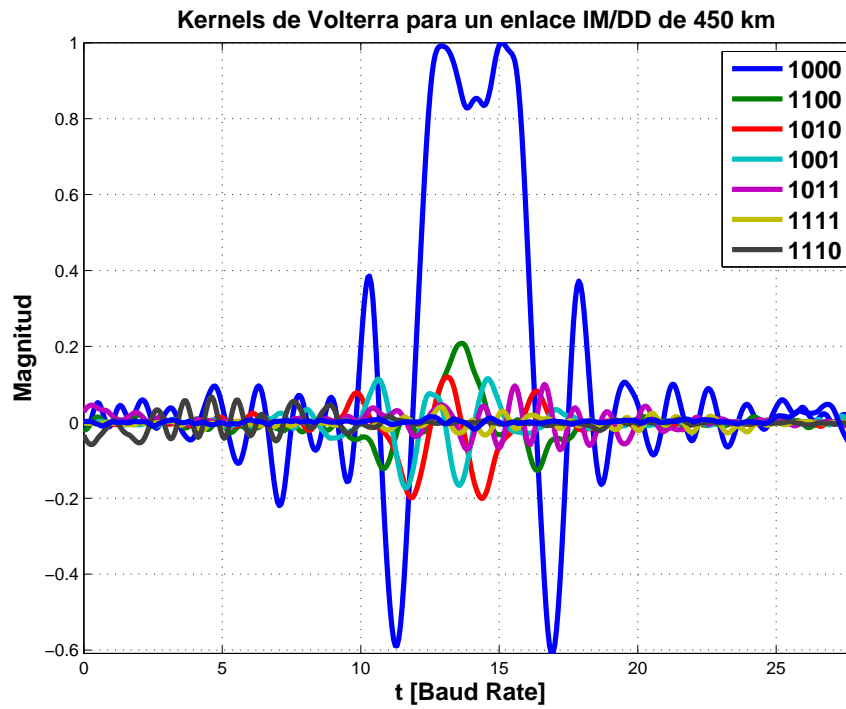


Fig. 2.13 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 450 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

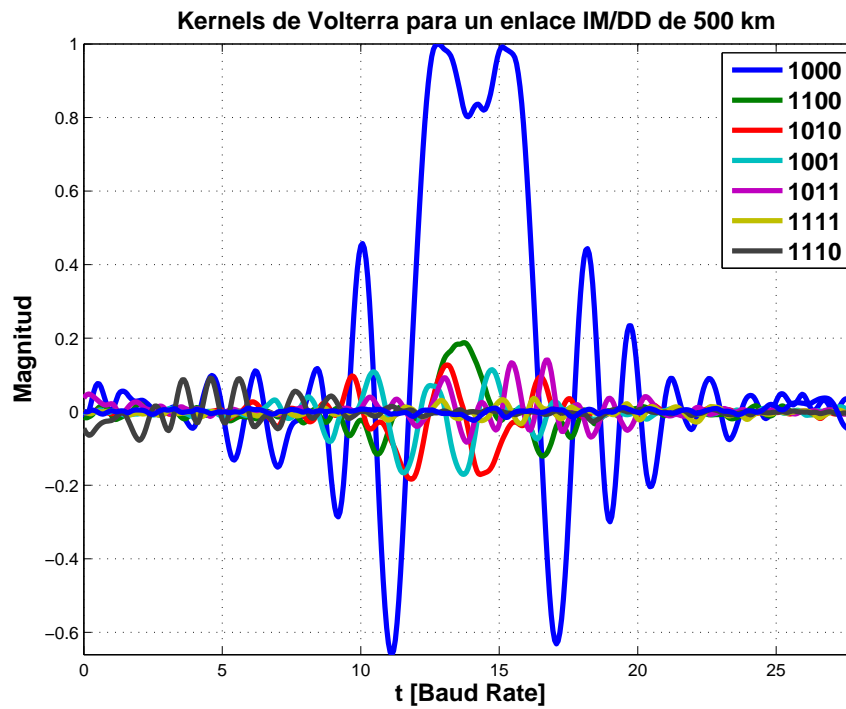


Fig. 2.14 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 500 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

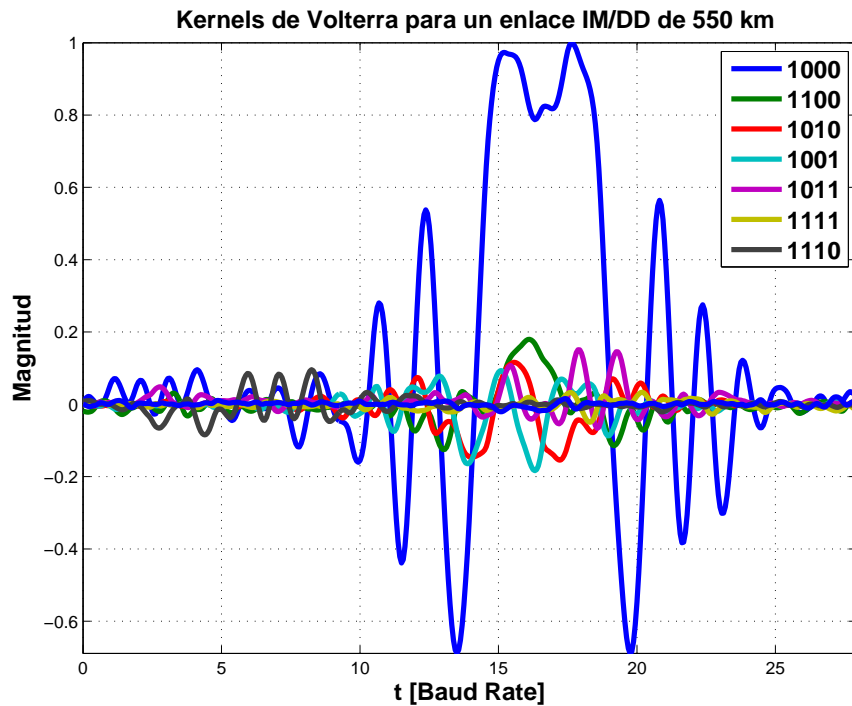


Fig. 2.15 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 550 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

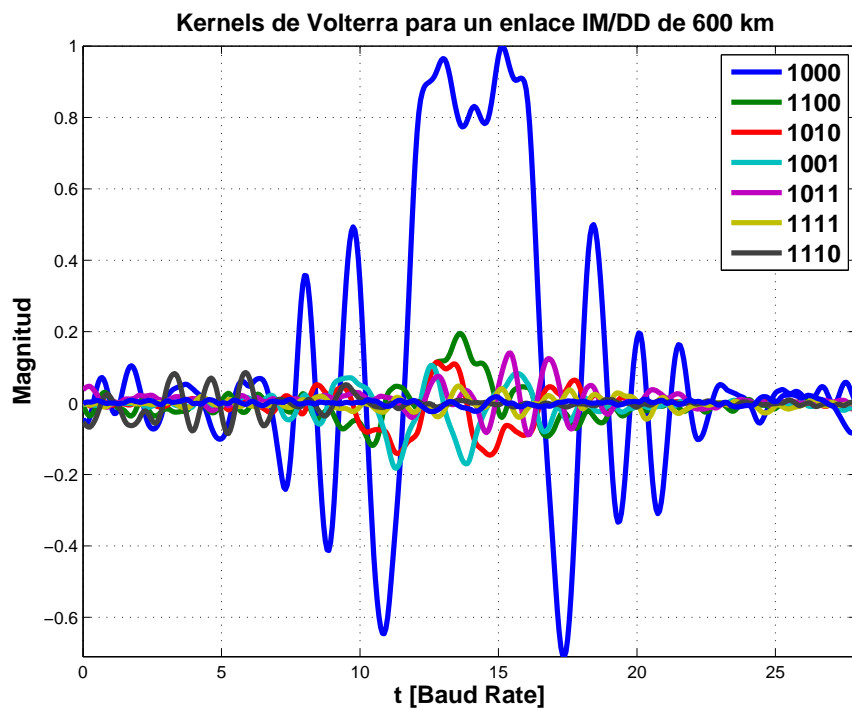


Fig. 2.16 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 600 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

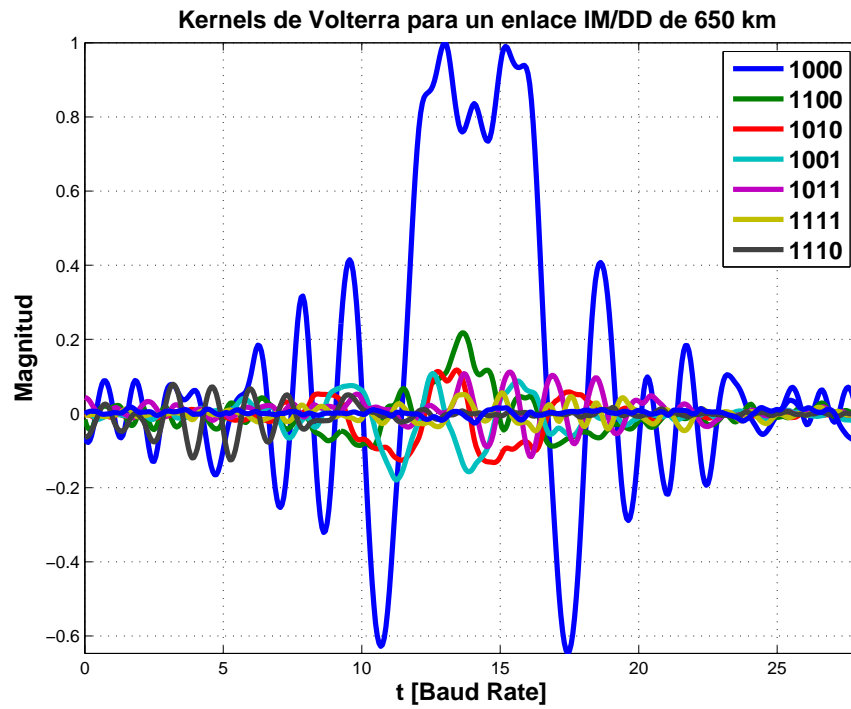


Fig. 2.17 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 650 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

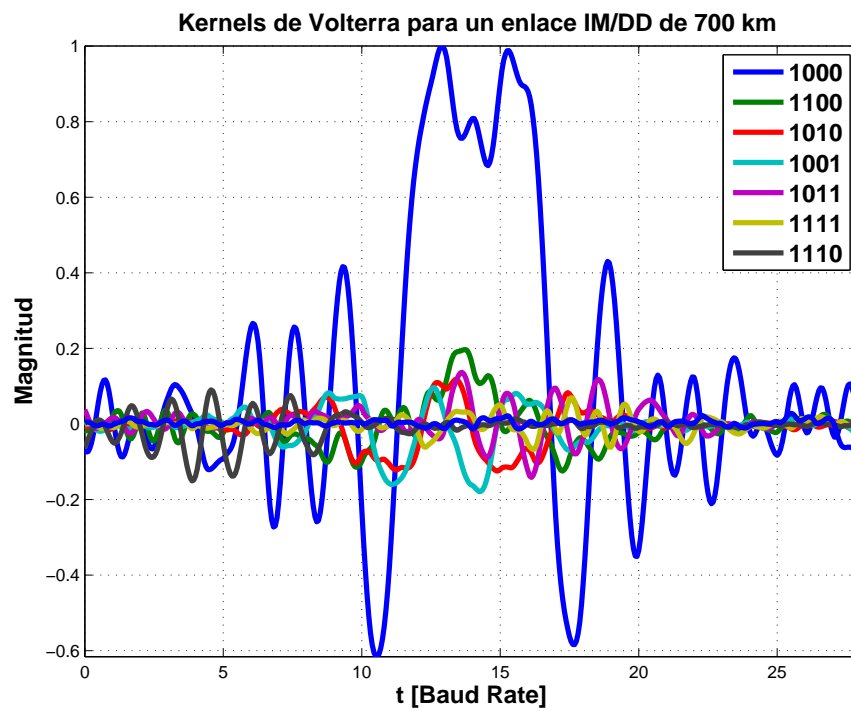


Fig. 2.18 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 700 km con transformación raíz cuadrada en el receptor.

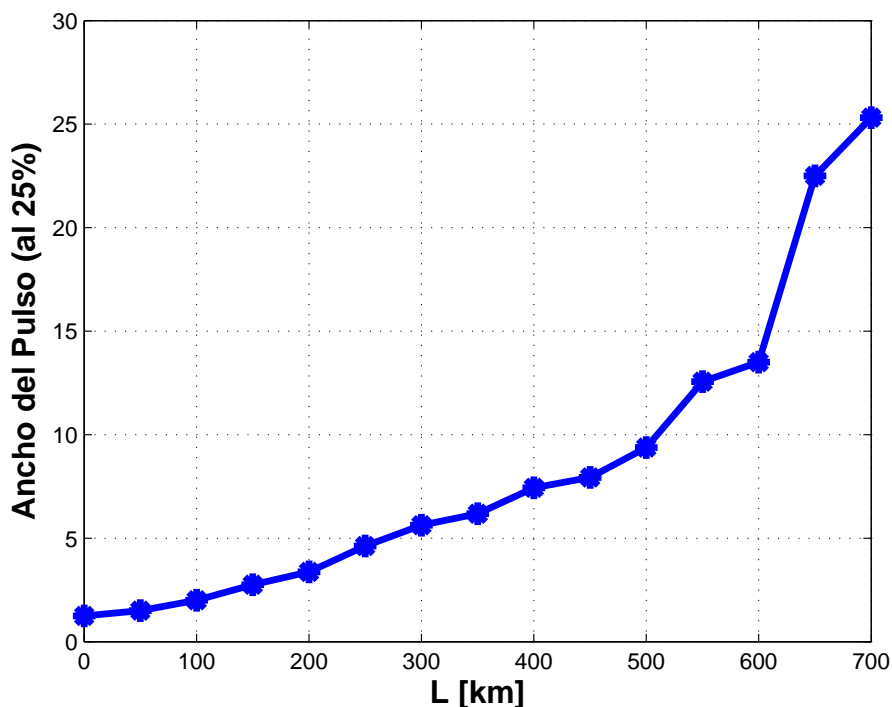


Fig. 2.19 Ancho de la respuesta (expresada en cantidad de símbolos) en función de la distancia del enlace.

### Duración de la Respuesta del Enlace de Fibra Óptica

Se observa que para una B2B la dispersión, así como la presencia de no-linealidades, son virtualmente inexistentes. A medida que aumenta la distancia del enlace aparecen kernels no-lineales y la duración de los mismos aumenta. Este incremento en la duración del pulso es un aspecto clave y muy sensible desde el punto de vista de la complejidad del ecualizador. En la Fig. 2.19 se puede apreciar cómo la duración temporal de la respuesta (expresada en cantidad de símbolos, y medida a un nivel de 25% respecto al pico máximo) crece rápidamente con la distancia. Dado que la complejidad de implementación de un MLSD crece exponencialmente con la duración temporal de la ISI, y al ver que esta duración crece aproximadamente en forma cuadrática con la distancia del enlace [4], la complejidad requerida por el MLSD en un enlace de larga distancia ( $\gtrsim 400$  km) supera largamente los límites de las tecnologías disponibles. Entonces, resulta imprescindible en este tipo de esquemas el uso de detectores cuya complejidad pueda ser reducida eficientemente, pero al mismo tiempo manteniendo un desempeño muy próximo al óptimo. El principal objetivo de esta Tesis es una arquitectura MLSD que sea capaz de mantener una performance casi óptima aún cuando por razones prácticas deba ser implementada con complejidad reducida (ver Capítulo 4). Por lo que se observa en esta sección, una arquitectura así es de gran importancia en aplicaciones

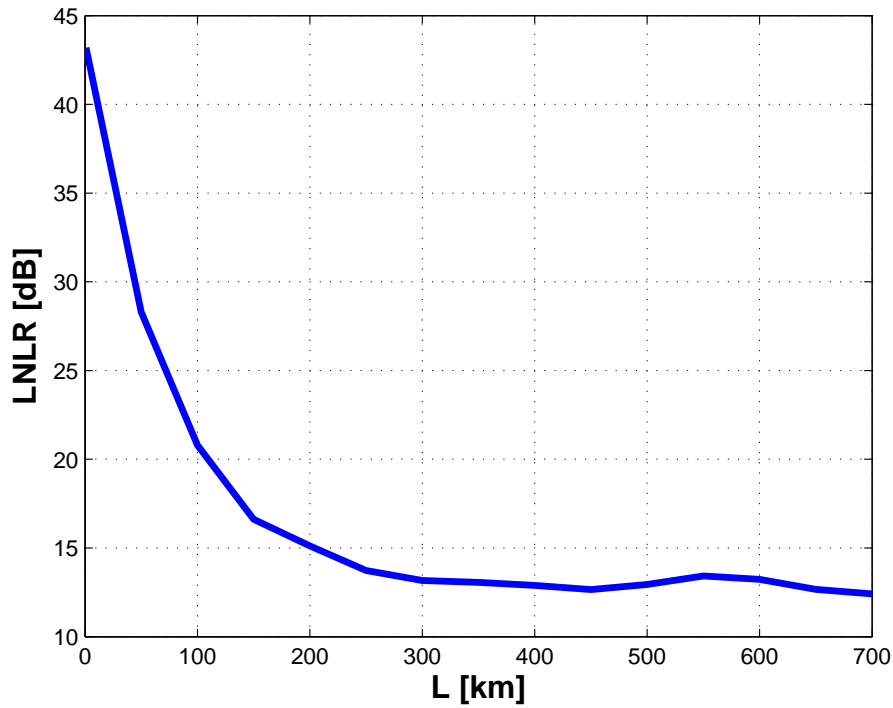


Fig. 2.20 Reducción relativa de la componente lineal con la distancia del enlace.

tales como los enlaces DU de fibra óptica con OOK-IM/DD a largas distancias.

### Aumento de las No-Linealidades con la Distancia del Enlace

En la Fig. 2.20 se muestra el aumento de energía por no-linealidades a medida que aumenta la distancia del enlace. Para cuantificar dicho efecto se define la relación energía lineal a energía no-lineal (*linear-nonlinear ratio* - LNLR) como

$$LNLR = \frac{\varepsilon_L}{\varepsilon_{NL}}, \quad (2.40)$$

donde  $\varepsilon_L$  es la energía del kernel lineal  $f_0(t)$ , computada como

$$\varepsilon_L = \int_{-\infty}^{\infty} |f_0(t)|^2 dt, \quad (2.41)$$

mientras que  $\varepsilon_{NL}$  es la energía de los kernels no-lineales, computada como

$$\varepsilon_{NL} = \sum_{n=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(t)|^2 dt. \quad (2.42)$$

Se observa que inicialmente la LNLR disminuye rápidamente con el aumento de la distancia del enlace hasta  $\sim 250$  km. A partir de ese punto parece estabilizarse en un valor de  $\sim 15$  dB. Sin embargo, la *información no-lineal* se encuentra distribuida en una cantidad cada vez mayor de kernels no-lineales de energía considerable, tal como se puede apreciar de las Figs. 2.5-2.18. Este hecho hace que, a pesar del estancamiento de la *energía no-lineal* observado en esta configuración del enlace, su compensación en general sea más compleja a medida que aumenta la distancia por la necesidad de considerar más kernels en el modelo del canal. Esto es un aspecto sensible para esquemas MFB-MLSD, como se verá en la Sección 5.1.1.

## 2.4 Conclusiones

En este capítulo, se introdujeron las herramientas básicas para el análisis de sistemas de comunicaciones no-lineales por series de Volterra. También se comentó brevemente sobre los aspectos esenciales de los sistemas de comunicaciones por fibra óptica. Usando la serie de Volterra se mostró un análisis de la ISI no-lineal presente en enlaces IM/DD de fibra óptica. Se observó cómo la duración de la respuesta temporal observada en el dominio eléctrico crece en forma aproximadamente cuadrática con la distancia del enlace. Además, también se observó que con el aumento de la distancia se incrementan la cantidad de kernels no-lineales. De estos resultados se observó claramente la gran complejidad de implementación requerida para un receptor MLSD en canales de fibra óptica de larga distancia. Diseñar un receptor MLSD capaz de aliviar este problema es el principal objetivo de la Tesis y es tratado en el Capítulo 4. Luego, en el Capítulo 5, se aplica la arquitectura MLSD propuesta en enlaces IM/DD de fibra óptica.



### DETECCIÓN DE SECUENCIAS DE MÁXIMA VEROSIMILITUD (MLSD)

---

Los esquemas MLSD son muy importantes, tanto a nivel teórico como práctico, porque permiten obtener el mejor desempeño posible de un sistema de comunicación. Su principal inconveniente es que, para ciertas aplicaciones, la complejidad de implementación puede resultar prohibitiva. Un escenario donde dicha complejidad se hace prohibitiva son las comunicaciones por fibra óptica de larga distancia. Sin embargo, hay ocasiones en que ecualizadores sub-óptimos (*e.g.*, DFE [2]) sufren una gran degradación en desempeño comparado al MLSD. Una de las soluciones a este inconveniente es usar estrategias de reducción de complejidad del MLSD, pero que no degraden significativamente su desempeño [23]. En canales no-lineales este problema parece ser particularmente difícil de resolver, y las estrategias de reducción de complejidad parecen ser menos eficientes que en canales lineales. Una hipótesis sobre la causa de la baja eficiencia de las técnicas de reducción de estados en canales no-lineales altamente dispersivos (*e.g.*, canales de fibra óptica) se presenta en la Sección 3.3. El concepto clave es que, así como la estructura MLSD de Forney presenta buenos desempeños en canales lineales [23], no existen estructuras MLSD para canales no-lineales con características equivalentes al detector de Forney. Luego, en el Capítulo 4 se propone una arquitectura MLSD para canales no-lineales que generaliza al MLSD de Forney. Esta nueva estructura presenta una suave y leve degradación de desempeño cuando es implementada con complejidad reducida.

Con el objetivo de que la Tesis sea autocontenida, se repasan en este capítulo algunos conceptos elementales en cuanto a ecualización MLSD en general. En la Sección 3.1 se presenta cómo surge este esquema de detección a partir del requerimiento de mínima probabilidad de error. En la Sección 3.2 se presenta el VD, que es un algoritmo eficiente para encontrar la secuencia de mínima probabilidad de error. En la Sección 3.3 se presentan las principales arquitecturas existentes para la implementación de esquemas MLSD, tanto en

canales con distorsión lineal como no-lineal. Finalmente se discuten las principales limitaciones de los esquemas MLSD actuales para equalización en canales no-lineales. Estas limitaciones luego se atacan en el Capítulo 4, donde se presenta un novedoso esquema MLSD para canales no-lineales.

### 3.1 Detección con Mínima Probabilidad de Error

El problema de detección de una señal de comunicaciones es en esencia un problema de test de hipótesis [83, 84]. A modo de ejemplo, supóngase que se transmite un símbolo “ $a$ ” o un símbolo “ $-a$ ” a través de un canal ruidoso. Además, supongase ruido AWGN independiente de la señal. En el receptor se observa una variable  $r$ , a partir de la cual se pretende deducir si lo que se transmitió fue “ $a$ ” o “ $-a$ ”. El problema del receptor se puede formular como el siguiente test de hipótesis:

$$H_0 : r = a + n, \quad (3.1a)$$

$$H_1 : r = -a + n. \quad (3.1b)$$

En (3.1a) se tiene que bajo la hipótesis  $H_0$  se supone que “ $a$ ” fue transmitido. Por otro lado, en (3.1b) se indica que bajo la hipótesis alternativa  $H_1$  se supone que “ $-a$ ” fue transmitido. Desde este punto de vista el problema simplemente consiste en usar la observación “ $r$ ” para decidir con la mínima probabilidad de error si se está bajo la hipótesis  $H_0$  o la  $H_1$ . El criterio de decisión será establecer un umbral “ $\gamma$ ” y decidir en favor de la hipótesis  $H_0$  si  $r > \gamma$ , o en favor de  $H_1$  en caso contrario. Para el caso particular en que el ruido “ $n$ ” es independiente de la señal, AWGN y con  $E\{|n|^2\} = \sigma^2$ , las probabilidades de elegir (erroneamente) por  $H_1$  cuando en realidad  $H_0$  es verdadera y viceversa son

$$\begin{aligned} P\{r < \gamma | H_0\} &= \int_{-\infty}^{\gamma} p_{r|H_0}(R|H_0) dR \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\gamma} \exp\left[-\frac{(R-a)^2}{2\sigma^2}\right] dR, \end{aligned} \quad (3.2)$$

y

$$\begin{aligned} P\{r > \gamma | H_1\} &= \int_{\gamma}^{\infty} p_{r|H_1}(R|H_1) dR \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\gamma}^{\infty} \exp\left[-\frac{(R+a)^2}{2\sigma^2}\right] dR, \end{aligned} \quad (3.3)$$

respectivamente. En (3.2) y (3.3),  $p_{r|H_i}(R|H_i)$  es la función densidad de probabilidad (*probability density function* - PDF) condicional de  $r$  dado que la hipótesis  $H_i$  es verdadera.

Si se le da el mismo *peso* o importancia al error debido a cualquiera de las hipótesis (algo natural en comunicaciones de datos), entonces la probabilidad de cometer *algún* error resulta

$$P_e = P\{r < \gamma|H_0\}P\{H_0\} + P\{r > \gamma|H_1\}P\{H_1\} \quad (3.4a)$$

$$= P\{H_0\} \int_{-\infty}^{\gamma} p_{r|H_0}(R|H_0)dR + P\{H_1\} \int_{\gamma}^{\infty} p_{r|H_1}(R|H_1)dR \quad (3.4b)$$

$$= P\{H_0\} + \int_{\gamma}^{\infty} [P\{H_1\}p_{r|H_1}(R|H_1) - P\{H_0\}p_{r|H_0}(R|H_0)] dR, \quad (3.4c)$$

donde  $P\{H_i\}$  es la probabilidad *a priori* de que la  $i$ -ésima hipótesis sea verdadera. Definiendo la variable

$$\Lambda(R) = \frac{p_{r|H_1}(R|H_1)}{p_{r|H_0}(R|H_0)}, \quad (3.5)$$

y reemplazándola en (3.4c), resulta que la minimización de  $P_e$  es equivalente a la minimización de

$$\tilde{P}_e = \int_{\gamma}^{\infty} \left[ \Lambda(R) - \frac{P\{H_0\}}{P\{H_1\}} \right] dR. \quad (3.6)$$

Si las características de las PDF  $p_{r|H_i}(R|H_i)$  (con  $i \in \{0, 1\}$ ) lo permiten (como en este ejemplo de ruido AWGN y en la mayoría de los casos de interés práctico) entonces es posible aplicar la regla de Leibnitz [85] en (3.6) y así obtener

$$\frac{d\tilde{P}_e}{d\gamma} = \frac{P\{H_0\}}{P\{H_1\}} - \Lambda(\gamma). \quad (3.7)$$

Suponiendo que  $\tilde{P}_e$  tiene un único punto crítico, éste correspondería al mínimo de la  $P_e$ , y reemplazando la hipótesis de ruido AWGN en (3.7) resulta

$$\Lambda(\gamma) = \exp\left[\frac{-2\gamma a}{\sigma^2}\right] = \frac{P\{H_0\}}{P\{H_1\}} \Rightarrow \gamma = \frac{\sigma^2}{2a} \ln\left(\frac{P\{H_1\}}{P\{H_0\}}\right). \quad (3.8)$$

De (3.8) se nota que si  $P\{a\} = P\{-a\}$ , entonces el nivel óptimo de decisión es  $\gamma = 0$ . En caso de tener  $P\{a\} > P\{-a\}$ , entonces el nivel óptimo de decisión es  $\gamma < 0$ , lo cual es intuitivamente correcto ya que se decide por la hipótesis más probable ( $H_0$ ) una mayor cantidad de veces.

En los sistemas de comunicaciones, es muy común suponer que los bits de información transmitidos son equiprobables, *i.e.*, todas las hipótesis son igualmente probables *a priori*.

De este modo, el proceso de detección óptimo se reduce a construir la verosimilitud para cualquier hipótesis y decidir por la hipótesis  $i$ -ésima cuya verosimilitud ( $p_{r|H_i}(R|H_i)$ ) sea máxima, con lo cual se minimiza la probabilidad de tomar decisiones erróneas [86].

### 3.1.1 Detección de Secuencias de Símbolos

Hasta el momento sólo se ha considerado el problema en que se transmite y se recibe un sólo símbolo aislado. En el caso típico de comunicaciones de alta velocidad, se transmite una sucesión muy rápida de símbolos. Esta sucesión de símbolos debe transmitirse a través de un canal con BW finito. Esto hace que la duración del símbolo transmitido no pueda ser infinitesimalmente pequeña. Entonces, la energía de cada símbolo transmitido llega al receptor distribuida en una ventana de tiempo de  $LT$  segundos, con  $L \geq 1$ , y donde  $T$  es el tiempo de símbolo. Por este motivo, en la mayoría de las comunicaciones de datos, los símbolos transmitidos en instantes pasados y futuros interfieren con el símbolo que se observa en un instante presente. Esto se conoce como ISI [6, 87], y es una de las principales causas de distorsión de la información junto con el ruido. Esto es especialmente cierto en comunicaciones de alta velocidad, *e.g.*, comunicaciones de larga distancia por fibra óptica (ver Sección 2.3.4).

Ante esta situación hay al menos dos maneras posibles de proceder. Una opción es decidir por cada símbolo de la secuencia en forma aislada en base a observaciones (aisladas) tomadas cada  $T$  segundos. Sin embargo, es una mejor opción **observar la secuencia entera** (una señal continua en el tiempo) y decidir sobre la secuencia completa de símbolos transmitidos. Esto permite entonces contemplar eficazmente toda la ISI introducida por el proceso de comunicación entre  $L - 1$  símbolos adyacentes. Esta forma de proceder es la adoptada por detectores óptimos de secuencia, *i.e.*, MLSD, que son el objetivo de estudio de esta Tesis.

Considérese la transmisión de una secuencia de  $K$  símbolos a través de un canal de comunicación, tal que la señal observada en el receptor venga dada por

$$r(t) = \sum_{k=0}^{K-1} a_k h(t - kT) + z(t) = s(\mathbf{a}; t) + z(t), \quad (3.9)$$

donde  $z(t)$  es un proceso de ruido AWGN con densidad espectral de potencia (*power spectral density* - PSD)  $\sigma_z^2$ ,  $\mathbf{a} = \{a_k\}_{k=0}^{K-1}$  es la secuencia de los  $K$  símbolos transmitidos y  $h(t)$  es la respuesta al impulso del canal equivalente (*i.e.*, contempla las respuestas del filtro transmisor y el canal). Suponiendo que el alfabeto de los símbolos tiene cardinalidad  $M$ ,

entonces habrá  $M^K$  posibles hipótesis para probar:

$$H_0(\text{obsoleta}) : r(t) = z(t) \quad (3.10a)$$

$$H_1 : r(t) = s(\mathbf{a}_1; t) + z(t) \quad (3.10b)$$

$$H_2 : r(t) = s(\mathbf{a}_2; t) + z(t) \quad (3.10c)$$

⋮

$$H_{M^K} : r(t) = s(\mathbf{a}_{M^K}; t) + z(t), \quad (3.10d)$$

donde  $\mathbf{a}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, M^K$ , es una de las  $M^K$  posibles secuencias transmitidas, y  $s(\mathbf{a}_k; t)$  es la señal (en ausencia de ruido) que se recibiría en caso de que  $\mathbf{a}_k$  haya sido transmitida. Nótese que la hipótesis  $H_0$  en (3.10a) no tiene posibilidad de ocurrir porque se supone que siempre se está transmitiendo información; sin embargo, se la introduce para simplificar futuras expresiones como se verá más adelante.

Uno de los primeros inconvenientes que se nota a partir de (3.9) y (3.10) es que, a diferencia del problema inicial de detección en base a la observación de una muestra aislada, aquí se tiene la observación de una señal  $r(t)$  que varía continuamente en el tiempo. Esto implica a primera vista la necesidad de analizar una cantidad infinita e incontable de instantes de tiempo para no perder información en  $r(t)$  relevante para el problema de detección. Para ver que esto no es así, se puede expandir la componente de señal  $s(\mathbf{a}; t)$  en una base ortonormal completa  $\{\phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ , de modo tal que

$$s_N(\mathbf{a}, t) = \sum_{n=1}^N s_n(\mathbf{a}) \phi_n(t), \quad (3.11)$$

con

$$s_n(\mathbf{a}) = \int_I s(\mathbf{a}; t) \phi_n^*(t) dt, \quad (3.12)$$

donde  $I$  es la menor ventana de tiempo durante la cual  $s(\mathbf{a}; t)$  no es idénticamente nula. Ahora bien, también se puede expandir la señal  $r(t)$  en dicha base, con lo cual queda

$$r_N(\mathbf{a}; t) = \sum_{n=1}^N r_n(\mathbf{a}) \phi_n(t) = s_N(\mathbf{a}; t) + \sum_{n=1}^N v_n \phi_n(t), \quad (3.13)$$

donde  $r_n(\mathbf{a}) = \int_I r(\mathbf{a}; t) \phi_n^*(t) dt$  y  $v_i = \int_I z(t) \phi_i^*(t) dt$  es una variable aleatoria (*random variable* - RV) con distribución Gaussiana de media cero [83] y

$$E\{v_i v_j^*\} = \sigma_z^2 \delta_{i-j}. \quad (3.14)$$

Haciendo uso de las expansiones (3.11), (3.12) y (3.13) en (3.10) resulta

$$H_0(\textit{obsoleta}) : r_n = v_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N \quad (3.15a)$$

$$H_1 : r_n = s_n(\mathbf{a}_1) + v_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N \quad (3.15b)$$

$$H_2 : r_n = s_n(\mathbf{a}_2) + v_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N \quad (3.15c)$$

⋮

$$H_{M^K} : r_n = s_n(\mathbf{a}_{M^K}) + v_n, \quad \forall n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.15d)$$

donde (3.15) es equivalente a (3.10) cuando  $N \rightarrow \infty$  [83, 86]. Algo importante a notar es que si bien todavía hace falta evaluar una cantidad infinita de valores  $r_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ) para el test de hipótesis, al menos con el modelo en (3.15) esta cantidad es contable.

En este punto todavía resta lo más importante del problema, *i.e.*, usar la regla de decisión que maximice la verosimilitud. Resulta conveniente (y equivalente) maximizar el logaritmo del cociente de verosimilitud (*log likelihood ratio* - LLR) de cada hipótesis respecto a la hipótesis obsoleta  $H_0$ , que viene dado por

$$\begin{aligned} \Lambda_j[r_N(t)] &= \ln \left[ \frac{p_{\mathbf{r}|H_j}(\mathbf{R}|H_j)}{p_{\mathbf{r}|H_0}(\mathbf{R}|H_0)} \right] \\ &= \frac{1}{2\sigma_z^2} \left[ 2\Re \left\{ \sum_{n=1}^N r_n s_n^*(\mathbf{a}_j) \right\} - \sum_{n=1}^N |s_n(\mathbf{a}_j)|^2 \right], \quad \forall j = 1, 2, \dots, M^K, \end{aligned} \quad (3.16)$$

donde,  $\Re$  denota tomar la parte real de su argumento,  $\mathbf{r} = \{r_n\}_{n=1}^N$  es el vector con las  $N$  componentes de la expansión de  $r_N(t)$ , y  $\mathbf{R}$  es cualquiera de los posibles valores observados del vector  $\mathbf{r}$ . Ahora se puede ver que tomando *límite en media* (denotado como l.i.m.) cuando  $N \rightarrow \infty$  y usando Parseval se pueden reescribir los términos en (3.16) como sigue [6, 83, 86]:

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N r_n s_n^*(\mathbf{a}) = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_I r_N(t) s_N^*(\mathbf{a}; t) dt = \int_I r(t) s^*(\mathbf{a}; t) dt \quad (3.17)$$

y

$$\text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N |s_n(\mathbf{a})|^2 = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} \int_I |s_N(\mathbf{a}; t)|^2 dt = \int_I |s(\mathbf{a}; t)|^2 dt. \quad (3.18)$$

Tomando l.i.m. para las  $\Lambda_j$  cuando  $N \rightarrow \infty$ , usando (3.17) y (3.18) y normalizando, finalmente resultan las LLRs

$$l_j = \text{l.i.m.}_{N \rightarrow \infty} 2\sigma_z^2 \Lambda_j = \int_I r(t) s^*(\mathbf{a}; t) dt - \int_I |s(\mathbf{a}; t)|^2 dt. \quad (3.19)$$

Nótese de (3.19) que la única información concerniente a la señal recibida  $r(t)$  que es necesaria para computar las  $l_j$  (y por ende establecer un procedimiento óptimo para elegir la mayor de ellas y minimizar la  $P_e$ ) viene dada por el primer término en el segundo miembro de (3.19). Por otro lado, el segundo término de (3.19) sólo depende de la hipótesis que uno esté manejando y siempre es posible generarlo en el receptor. Por ese motivo, a la información obtenida en este primer término se la llama *estadística suficiente*, y es un concepto esencial en problemas de estimación [84, 86]. Esto está diciendo que no hace falta conocer toda la información en  $r(t)$  para hacer la mejor estimación posible, sino que basta con poder conocer  $\int_I r(t)s^*(\mathbf{a},t)dt$  para cualquier secuencia de símbolos  $\mathbf{a}$ . Trabajando éste término con el uso de (3.9) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_I r(t)s^*(\mathbf{a},t)dt &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k^* \int_I r(t)h^*(t-kT)dt \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} a_k^* [r(t) \oplus h^*(-t)]_{t=kT}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde  $\oplus$  denota convolución. En ec. (3.20) se evidencia que para obtener un estadístico suficiente sólo hace falta filtrar la señal recibida  $r(t)$  con un MF apareado a la respuesta  $h(t)$  del canal equivalente, y conservar sólo las muestras a la salida de este filtro tomadas en los instantes  $t = 0, T, 2T, \dots, KT$ . Este resultado tiene un enorme valor porque lleva el problema original de detección (que en principio parecía requerir el conocimiento de toda la señal  $r(t)$  de tiempo continuo) a un problema donde sólo hacen falta “unas cuantas muestras” tomadas a una tasa de  $1/T$  Hz. Incluso, nótese que esta tasa de muestreo es menor a lo que requiere el Teorema de Nyquist para reconstruir la componente de señal  $s(\mathbf{a};t)$  [77].

## 3.2 Detector de Viterbi (VD)

En la Sección 3.1 se vio que el problema de detección óptima de secuencia sólo requiere ver cuál de las hipotéticas secuencias  $\mathbf{a}_j$  (con  $j = 1, 2, \dots, M^K$ ) transmitidas maximiza la verosimilitud. Sin embargo, este problema de maximización todavía requiere la compleja tarea de buscar el máximo entre  $M^K$  posibilidades. Esta tarea puede verse simplificada por el uso del celebrado algoritmo de Viterbi [44]. El algoritmo de Viterbi busca la trayectoria (en nuestro caso corresponde a una secuencia de símbolos) que maximiza una cierta métrica (la verosimilitud), buscando a través de un diagrama llamado *enrejado* o *trellis*. En la Sección 3.2.1 se introduce el concepto de diagrama de trellis mediante ejemplos de aplicación concretos. En la Sección 3.2.2 se repasa la esencia del algoritmo de Viterbi usando el concepto de diagramas de trellis.

### 3.2.1 Diagrama de Trellis

Un trellis es una representación *temporal* de un diagrama de estados que representa una cadena de Markov, o bien una cadena de Markov oculta [88]. Una cadena de Markov es un proceso discreto  $\Psi_k$  para el cual su estado futuro es independiente de los estados pasados, si se conoce el estado presente. De manera más precisa, una cadena de Markov se caracteriza por la siguiente propiedad:

$$P\{\Psi_k = \psi_k | \Psi_{k-1} = \psi_{k-1}, \Psi_{k-2} = \psi_{k-2}, \dots, \Psi_0 = \psi_0\} = P\{\Psi_k = \psi_k | \Psi_{k-1} = \psi_{k-1}\}. \quad (3.21)$$

Por otro lado, una cadena de Markov *oculta* es un proceso  $Y_k$  con las siguientes características: i) La observación del proceso en el instante  $k$  depende estadísticamente de un proceso  $\Psi_k$  cuyo estado no puede ser observado; ii) Este proceso oculto  $\Psi_n$ , cuyo estado no puede ser observado, es un proceso de Markov, *i.e.*, respeta la propiedad en (3.21). Se pueden exponer estas propiedades de una cadena de Markov oculta como sigue:

$$P\{Y_k = y_k | \Psi_k = \psi_k, \Psi_{k-1} = \psi_{k-1}, \dots, \Psi_0 = \psi_0\} = P\{Y_k = y_k | \Psi_k = \psi_k\}. \quad (3.22)$$

Resulta entonces que una cadena de Markov es un proceso aleatorio con memoria, pero con memoria dependiente sólo del *estado* inmediatamente anterior del proceso. Lo que se interpreta por *estado* del proceso de Markov oculto es algo que depende del problema particular que se esté modelando. A continuación, se ilustra la aplicación de este concepto para el modelado de un canal con ISI y ruido AWGN. Este ejemplo es de gran interés en el contexto de esta Tesis (para más detalles sobre cadenas de Markov, se pueden consultar [6, 83, 88] y referencias allí citadas).

#### Ejemplo de una Cadena de Markov Oculta y su Diagrama de Trellis

A continuación, se usa como ejemplo un canal sencillo para introducir el uso de cadenas de Markov y de diagramas de trellis. Supóngase un *canal equivalente en tiempo discreto*<sup>1</sup> dado por

$$y_n = \sum_{k=0}^{L-1} a_k h_{n-k} + w_n = s_n + w_n, \quad (3.23)$$

donde  $a_n$  es el  $n$ -ésimo símbolo transmitido, con  $a_n$  perteneciente a un alfabeto finito de cardinalidad  $M$ ,  $h_n$  es la respuesta al impulso que modela la ISI, que por simplicidad se

<sup>1</sup>Se denomina *canal equivalente en tiempo discreto* a la respuesta de tiempo discreto que para cada secuencia discreta de entrada devuelve la misma secuencia de muestras de señal que se obtendrían en el receptor luego de la etapa de muestreo [6].



supone causal y de duración finita, mientras que  $w_n$  es un proceso aleatorio que se supone *i.i.d.*, Gaussiano, de media cero y con  $E\{w_n w_k^*\} = \sigma_w^2 \delta_{n-k}$ . Se puede ver que al suponer  $h_n$  conocida, y condicionando respecto a la información transmitida, entonces se obtiene

$$P_{Y_n|\{a_k\}_{k=0}^n}\{y_n|a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\} = P_{Y_n|\{a_k\}_{k=n-L+1}^n}\{y_n|a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}\} \quad (3.24)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left[-\frac{(s_n(\{a_k\}_{k=n-L+1}^n) - y_n)^2}{2\sigma_w^2}\right]. \quad (3.25)$$

De (3.24) se observa que si se define al *estado oculto* de la cadena de Markov como  $\{a_n, a_{n-1}, \dots, a_{n-L+1}\}$ , entonces se cumple la condición (3.22), verificando así que  $y_n$  corresponde a una cadena de Markov oculta.

Por otro lado, con el objetivo de introducir los diagramas de trellis, nótese que sin pérdida de generalidad, se puede usar una definición alternativa de estados como

$$\Psi_k = \{a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-L+1}\} \quad (3.26)$$

y así reescribir (3.24) como

$$P\{Y_n = y_n|a_n, a_{n-1}, \dots, a_0\} = P\{Y_n = y_n|a_n, \Psi_n\} = P\{Y_n = y_n|\Psi_{n+1}, \Psi_n\}. \quad (3.27)$$

Con la definición de estado como en (3.26), se evidencia en (3.27) que  $Y_n$  depende de una *transición de estados*  $\Psi_n \rightarrow \Psi_{n+1}$ . El estado final de la transición queda unívocamente determinado por el valor que toma la RV  $a_n$  y por el estado inicial  $\Psi_n$  de la transición. La cantidad de estados posibles  $\Psi_n$  es  $M^{L-1}$ , donde  $M$  es la cardinalidad del alfabeto y  $L-1$  es la memoria del canal discreto equivalente. Todas estas transiciones se pueden representar en un diagrama de estados. En la Fig. 3.1 se muestra el diagrama de estados para el caso particular de un canal con  $M = 2$  y  $L = 3$  (*i.e.*, 4 estados). En éste diagrama los estados están codificados como  $\Psi_k = \{a_{k-1}, a_{k-2}\}$ , y las transiciones que corresponden a  $a_k = 1$

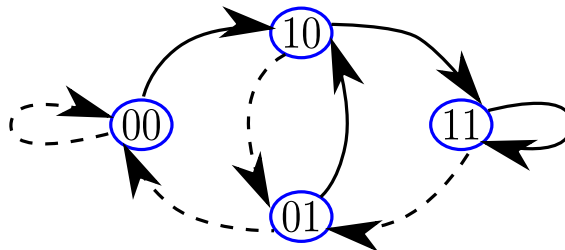


Fig. 3.1 Diagrama de Estados para un canal con 4 estados ( $a_k \in \{0, 1\}$  y  $L = 3$ ). Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por  $a_k = 0$  y  $a_k = 1$ , respectivamente.

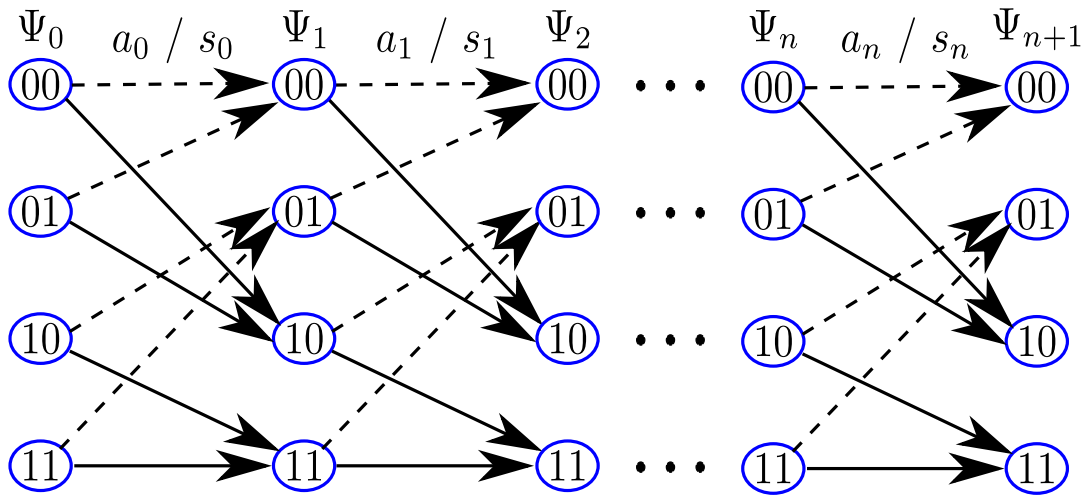


Fig. 3.2 Diagrama de trellis para un canal con 4 estados ( $a_k \in \{0, 1\}$ ,  $L = 3$ ). Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por  $a_k = 0$  y  $a_k = 1$ , respectivamente.

indicadas con flechas sólidas, y las correspondientes a  $a_k = 0$  con flechas a trazos. También se puede poner un marcador a cada flecha indicando el valor de  $s_k$  que corresponde a cada transición de estados de acuerdo a (3.23), algo que se omite en la Fig. 3.1. Nótese que el diagrama de estados en Fig. 3.1, al igual que todo diagrama de estados, no permite visualizar una *evolución temporal* del proceso, *i.e.*, no se puede ver la historia de las transiciones de estados. Una forma de introducir esta información temporal es usando el denominado diagrama de trellis, que para el caso del diagrama de estados en Fig. 3.1, le corresponde el trellis en la Fig. 3.2. El diagrama de trellis evoluciona horizontalmente y para cada instante de tiempo se muestran todas las transiciones posibles entre cada posible estado de partida y cada posible estado de llegada. En la Fig. 3.2 se han acomodado en columnas todos los posibles estados  $\Psi_n$  de la cadena de Markov. Para el instante  $n$ -ésimo, la transmisión del símbolo  $a_n$  origina una determinada transición  $\Psi_n \rightarrow \Psi_{n+1}$  que corresponde a una muestra de señal sin ruido  $s_n$ . El valor de la señal esperada  $s_n$  depende de la respuesta al impulso  $h_k$  que da origen a la cadena de Markov. En la Fig. 3.2 se grafican para cada instante todas las posibles transiciones (flechas) entre estados. Además, se ha unido con flechas sólidas los estados  $\Psi_n$  y  $\Psi_{n+1}$  que corresponden a transiciones causada por la transmisión del símbolo  $a_n = 1$ , y con flechas a trazos para las transiciones ocasionadas por el símbolo  $a_n = 0$ .

El uso de un trellis en vez de un diagrama de estados permite identificar unívocamente cada posible realización de la secuencia transmitida con un camino en el diagrama (siempre y cuando se conozca el estado inicial del sistema). Supóngase por caso que se transmite la secuencia  $\{a_0, a_1, a_2, a_3\} = \{0, 1, 1, 0\}$  a través de un canal con  $L = 3$ , usando modulación binaria ( $M = 2$ ) y partiendo del estado inicial  $\Psi_0 = 00$ . Esta transmisión corresponde al

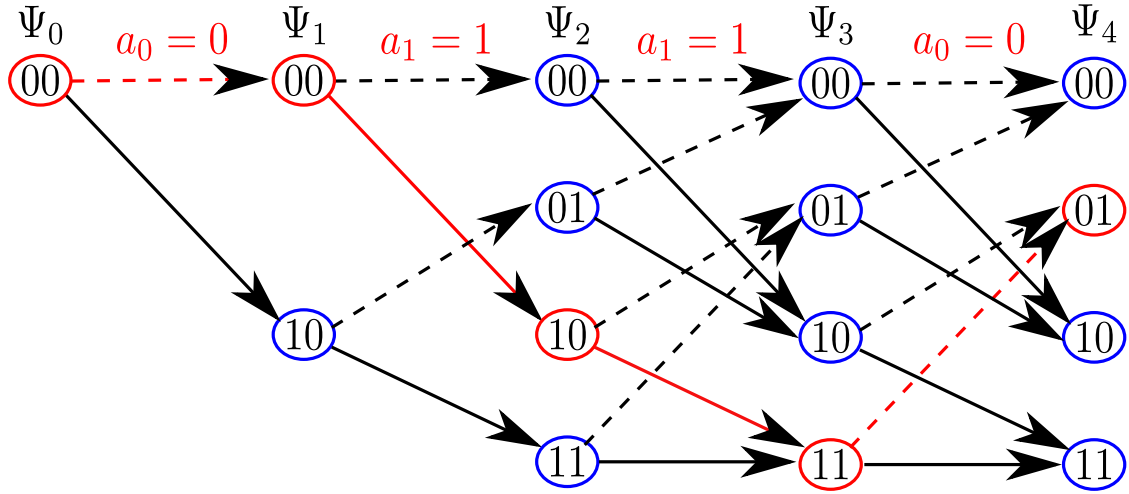


Fig. 3.3 Trellis donde se destaca en rojo (o gris claro) el camino para la secuencia  $\{0, 1, 1, 0\}$ . Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por  $a_k = 0$  y  $a_k = 1$ , respectivamente.

camino denotado por la secuencia de flechas y estados en rojo en el trellis de la Fig. 3.3.

### Métricas de Rama (para ruido AWGN)

Retomando el análisis del problema de estimación óptima de secuencia, supóngase que los símbolos transmitidos son *i.i.d.* y que la secuencia de muestras  $y_n$  observadas representa un estadístico suficiente de acuerdo a (3.23) y está afectada por ruido AWGN. Para conocer la secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$  (de  $K$  símbolos) que da la máxima verosimilitud (*maximum likelihood* - ML) de  $Y_n$  hay que buscar la secuencia que cumpla la condición

$$P\{\mathbf{y}|\hat{\mathbf{a}}\} \geq P\{\mathbf{y}|\bar{\mathbf{a}}\}, \quad (3.28)$$

donde  $\mathbf{y} = y_0, y_1, \dots, y_{K-1}$  es la secuencia observada y  $\bar{\mathbf{a}}$  es cualquier secuencia transmitida válida, pero distinta de  $\hat{\mathbf{a}}$ . Usando el hecho de que  $Y_n$  es una secuencia *i.i.d.* al condicionar respecto a  $\mathbf{a}$ , y reemplazando (3.25) en (3.28), el criterio ML para este caso resulta en

$$\prod_{n=0}^{K-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left[-\frac{(y_n - s_n(\hat{\mathbf{a}}))^2}{2\sigma_w^2}\right] \geq \prod_{n=0}^{K-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \exp\left[-\frac{(y_n - s_n(\bar{\mathbf{a}}))^2}{2\sigma_w^2}\right] \quad (3.29a)$$

$$\sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\hat{\mathbf{a}}))^2 \leq \sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\bar{\mathbf{a}}))^2 \quad (3.29b)$$

$$\sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\hat{\Psi}_n, \hat{\Psi}_{n+1}))^2 \leq \sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\bar{\Psi}_n, \bar{\Psi}_{n+1}))^2. \quad (3.29c)$$

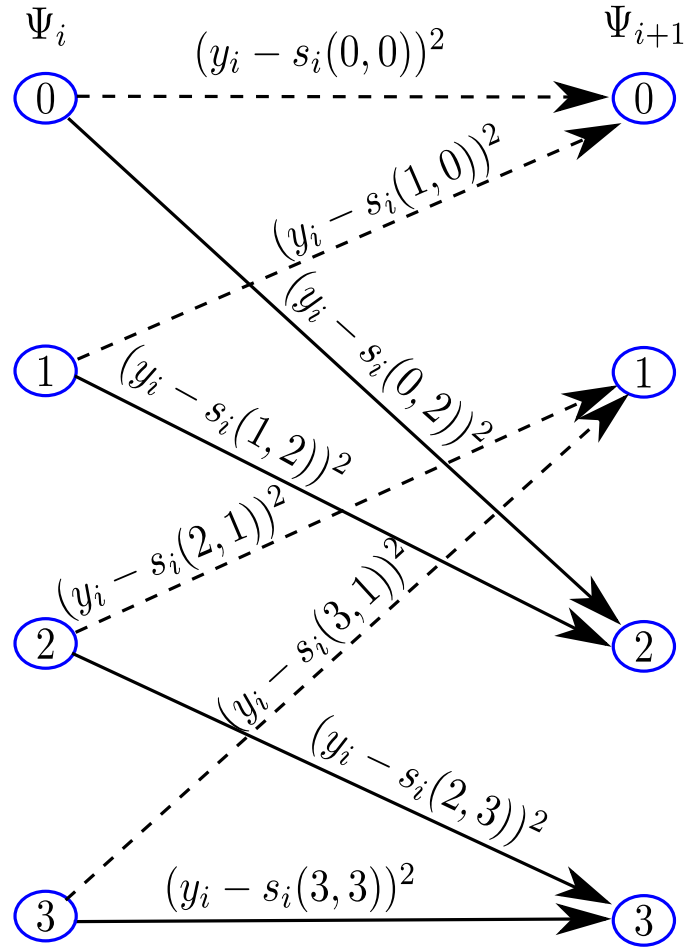


Fig. 3.4 Etapa de un trellis con métricas de rama Euclidianas. Líneas a trazos y líneas sólidas indican las transiciones ocasionadas por  $a_k = 0$  y  $a_k = 1$ , respectivamente.

En (3.29b) simplemente se hace uso de la monotonía creciente de la función logaritmo, y se desprecian constantes que no afectan la desigualdad. En (3.29c) se hace uso del modelo de cadenas de Markov, al mismo tiempo que se identifica la sub-secuencia  $\{a\}_{k=n-l+1}^n$  con la transición de estados  $\psi_n \rightarrow \psi_{n+1}$  en el trellis. Nótese la relación uno-a-uno entre un camino (o secuencia de estados) en el trellis y una secuencia de símbolos transmitidos. Esto permite ver gráficamente el problema en (3.29) como la selección del camino del trellis que minimiza la métrica en (3.29c), donde se pondera cada rama (o transición de estados en el trellis) con la *métrica de rama* (o métrica de transición)

$$\Gamma_n(\hat{\mathbf{a}}) = (y_n - s_n(\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_{n+1}))^2. \quad (3.30)$$

Este procedimiento se ilustra detalladamente en la Fig. 3.4 para la  $i$ -ésima etapa de transición del trellis, donde  $y_i$  es la observación del canal en el  $i$ -ésimo instante. Nótese de (3.30)

que las métricas de rama son una simple métrica Euclidiana entre la muestra de señal observada  $y_n$  y la correspondiente observación esperada en ausencia de ruido bajo la hipótesis de que la secuencia transmitida genera la transición  $\hat{\psi}_n \rightarrow \hat{\psi}_{n+1}$  (*i.e.*,  $s_n(\hat{\psi}_n, \hat{\psi}_{n+1})$ ). La expresión para la métrica de rama será distinta si las características del proceso observado son diferentes (*e.g.*, que el ruido sea no-Gaussiano).

En este punto, el problema se reduce a encontrar el camino del trellis con menor métrica de camino (*i.e.*, la sumatoria de las métricas de rama). Para este fin, es conveniente usar el algoritmo de Viterbi, el cual se describe a continuación.

### 3.2.2 Algoritmo de Viterbi

Hasta ahora se ha introducido el concepto de trellis y se ha visto que detectar la secuencia ML es equivalente a elegir en el trellis el camino con mínima distancia. Sin embargo, nada se ha hecho aún para resolver eficientemente el problema de optimización. Hasta el momento, parece que resolver el problema en (3.29) sigue requiriendo el procedimiento de fuerza bruta que consiste en computar todas las posibles métricas de camino para elegir el camino con mínima métrica (en el ejemplo que se viene considerando con  $L = 3$  y  $M = 2$ , la cantidad de posibles secuencias es  $(2^2)^K$ ). Ahora bien, el algoritmo de Viterbi se basa en observar la siguiente característica de nuestro problema: **En cada etapa o fase del trellis, para cada estado de llegada, se puede elegir sin pérdida de información el camino que minimiza la métrica de camino hasta ese estado y desechar los caminos restantes.** En base a esta observación, el procedimiento del algoritmo de Viterbi consiste en: (i) ir acumulando las métricas de rama en métricas de camino, y (ii) en cada fase del trellis, conservar una sola métrica de camino, *i.e.*, la mejor para cada estado de llegada. Esto significa que de las  $M$  transiciones que llegan a cada uno de los  $M^{L-1}$  estados en un determinado instante, se conserva sólo la mejor de ellas, *i.e.*, en cada instante sólo hay  $M^{L-1}$  métricas de camino a considerar, donde  $L \ll K$ .

Con este procedimiento se logra entonces una gran reducción en el uso de memoria (la cantidad de métricas de camino que hay que conservar es siempre igual a la cantidad de estados), y también en el costo computacional de comparaciones, comparado al procedimiento de fuerza bruta. Sin embargo, el costo computacional y el retardo (*delay*) de decodificación siguen siendo muy altos en general. El problema del retardo se puede aliviar fácilmente tomando decisiones de camino prematuramente, *i.e.*, antes de llegar a las  $K$  transiciones de estados [6, 88, 89]. Usualmente, la degradación es imperceptible si se toman decisiones sobre un símbolo de la secuencia con un retardo  $\gtrsim 3M^{L-1}$  [6, 87, 89]. El mayor inconveniente radica en que la complejidad computacional es proporcional al número de estados  $M^{L-1}$ , el cual crece exponencialmente con la memoria del canal. Por esto, en canales con gran

dispersión (*i.e.*, con memoria de varios símbolos), como es el caso de las comunicaciones por fibra óptica (ver Sección 2.3.4), son muy sensibles a este inconveniente. Las técnicas de reducción de estados buscan considerar en cada instante un número de métricas de camino menor a  $M^{L-1}$ . Cuantos más caminos se desafecten en la búsqueda de secuencias, mayor será el ahorro en memoria y cómputos, a costa de introducir una degradación de la performance [23]. Esta degradación es particularmente alta en ciertas aplicaciones, especialmente cuando hay ISI no-lineal (*e.g.*, enlaces IM/DD de fibra óptica). Como se verá en la próxima sección, uno de los motivos es que los esquemas existentes de recepción MLSD para canales no-lineales no comprimen eficientemente el modelo del canal. Esto los hace más susceptibles a sufrir degradación cuando se los implementa con técnicas de reducción de estados, comparado con los esquemas MLSD para canales lineales basados en el detector de Forney [23]. En el Capítulo 4, se presentará una nueva arquitectura MLSD para canales no-lineales que busca disminuir la susceptibilidad ante la implementación con reducción de estados.

### 3.3 Detectores MLSD Existentes

Esta sección se dedica a presentar brevemente las principales estrategias existentes para el diseño de receptores MLSD. En la Sección 3.3.1, se presentan 2 arquitecturas para canales con distorsión lineal, mientras que en la Sección 3.3.2 se presentan 2 esquemas muy utilizados en canales no-lineales.

#### 3.3.1 Receptores MLSD para Canales Lineales

##### MLSD de Forney

Aquí se presenta un MLSD propuesto en [43]. Allí el autor propone obtener estadística suficiente por medio de un MF  $h^*(-t)$  muestreado a la tasa de símbolo  $1/T$  (ver Sección 3.1). Luego propone filtrar la señal  $r_k$  de salida del MF con un filtro blanqueador (*whitening filter* - WF)  $M^{-*}(1/z^*)|_{z=e^{j\omega T}}$ , tal como se muestra en la Fig. 3.5-A, donde  $x^{-*}$  denota la inversa algebraica y el complejo conjugado de  $x$ . La respuesta  $M^{-*}(1/z^*)$  del WF surge de factorizar espectralmente la respuesta del canal discreto equivalente para  $r_k$ , *i.e.*,

$$S_h(z) = \mathcal{Z} \{h(t) \oplus h^*(-t)|_{t=kT}\} \quad (3.31a)$$

$$= M(z)M^*(1/z^*), \quad (3.31b)$$

donde  $S_h(z)$  es la transformada Z (*Z transform* - ZT) de la respuesta equivalente del canal en tiempo discreto obtenido a la salida del MF (*i.e.*,  $h(t) * h^*(-t)|_{t=kT}$ ). La igualdad en (3.31b)

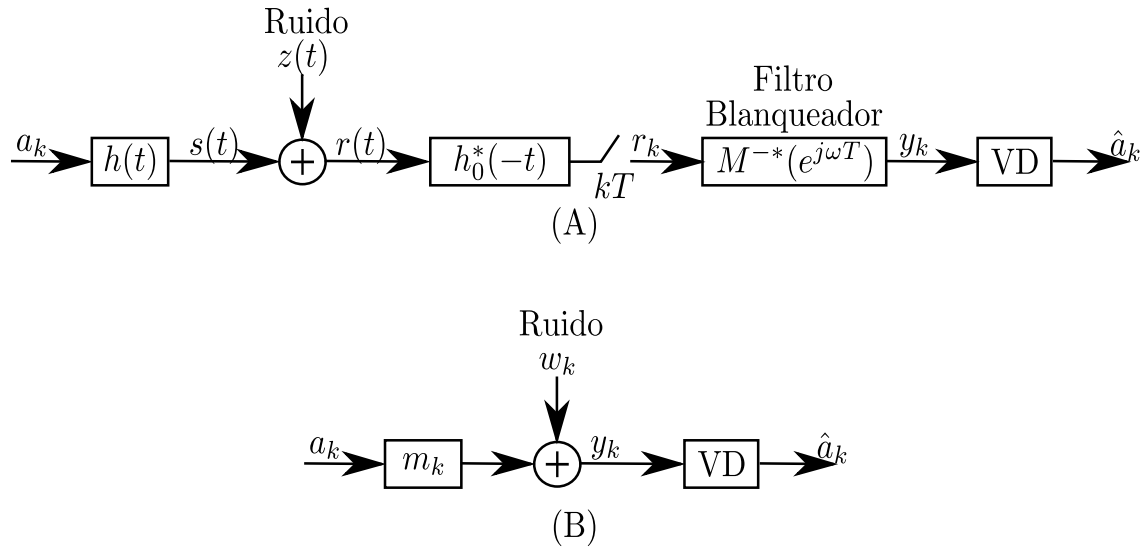


Fig. 3.5 MLSD de Forney. (A) esquema en tiempo continuo y (B) esquema con canal discreto equivalente.

surge de la factorización espectral de  $S_h(z)$  tomando  $M(z)$  como la respuesta de fase mínima (y por ende  $M^*(1/z^*)$  es de fase máxima) [6]. Nótese además que

$$\mathcal{L} \{ E [(r_k - E[r_k]) (r_{k-n} - E[r_{k-n}])^*] \} = \sigma_z^2 S_h(z), \quad (3.32)$$

por ende de (3.31) y (3.32) resulta que filtrar  $r_k$  con  $M^{-*}(1/z^*)$  dá lugar a muestras de ruido  $w_k$  con un espectro blanco. Por esto mismo se llama blanqueador al filtro  $M^{-*}(1/z^*)$ . Una propiedad que se obtiene al usar el WF es que la respuesta equivalente de la ISI (*i.e.*, la respuesta  $m_k$  resulta de aplicar la transformada Z inversa (*inverse Z transform - IZT*) a  $M(z)$ ) es causal. Otra propiedad más importante aún que se consigue con el WF es que la respuesta  $m_k$  del canal discreto equivalente (ver Fig. 3.5-B)) tiene su energía concentrada de manera óptima en los primeros coeficientes de la respuesta [6]. Este aspecto es muy importante, ya que si se implementa el VD sopuniendo una respuesta  $\hat{m}_k$  truncada para reducir complejidad (*i.e.*, usar menos estados), la ISI que no se estará modelando será mínima y así se minimizará la degradación [23]. Por otro lado, dado que el canal discreto equivalente a la entrada del VD tiene muestras de ruido  $w_k$  Gaussiano y blanco, las métricas de rama tendrán la forma

$$\Gamma_k(\hat{\mathbf{a}}) = \left( y_k - \sum_{i=0}^{\hat{L}-1} m_i \hat{a}_{k-i} \right)^2, \quad (3.33)$$

*i.e.*, una simple distancia Euclidiana, donde  $L - 1$  es la memoria en símbolos del canal discreto equivalente  $m_k$ , y  $\hat{L} - 1 \leq L - 1$  es la memoria tenida en cuenta por el VD (siendo

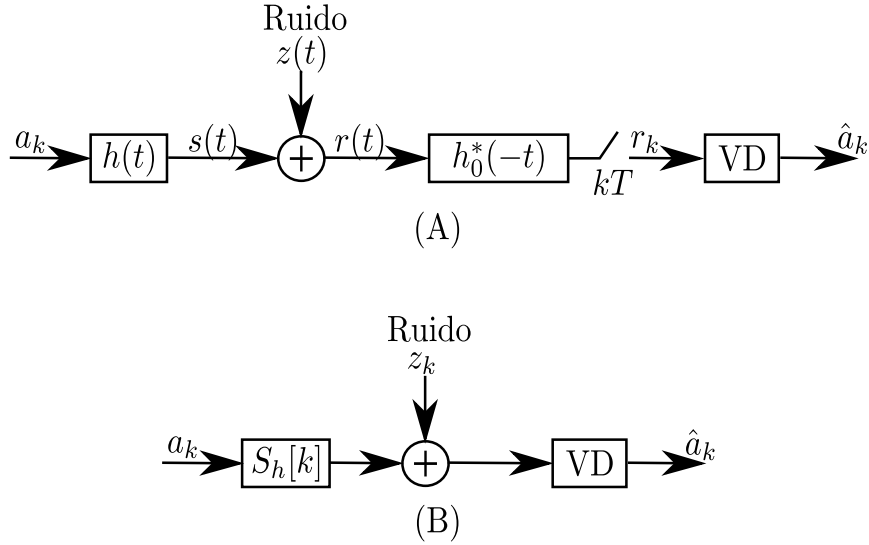


Fig. 3.6 MLSD de Ungerboeck. (A) esquema en tiempo continuo y (B) esquema con canal discreto equivalente.

$\hat{L} = L$  necesario para alcanzar el desempeño óptimo).

### MLSD de Ungerboeck

Otra estructura propuesta para implementar el receptor MLSD en canales con ISI lineal fue propuesta en [90]. Esta arquitectura se muestra en la Fig. 3.6. Como se observa en la Fig. 3.6-A, en este caso no se aplica ningún WF, y el detector de secuencia se alimenta directamente con las muestras  $r_k$  obtenidas a la salida del MF. De este modo el modelo del canal discreto equivalente resulta

$$r_k = s_k + z_k = \sum_{i=-L+1}^{L-1} S_h[i] a_{k-i} + z_k, \quad (3.34)$$

como se ve en la Fig. 3.6-B, donde la respuesta de la componente de ISI es

$$S_h[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{S_h(z)\}, \quad (3.35)$$

con  $S_h(z)$  dado por (3.31a) y donde  $\mathcal{Z}^{-1}$  indica IZT. Además, las componentes de ruido en este caso están correlacionadas, siendo su PSD discreta igual a  $\sigma_z^2 S_h(z)$  (ver (3.32)). Dado que las métricas de ruido Gaussiano  $z_k$  no son independientes, las métricas de rama del VD no son simples distancias Euclidianas como en (3.33). En este caso, la expresión de la función de costo a minimizar, *i.e.*, el negativo del LLR correspondiente a una secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$  (salvo factores de proporcionalidad independientes de la secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$  que se considere como



hipótesis), viene dada por

$$\Lambda(\hat{\mathbf{a}}) = \int |s(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 dt - 2\Re \left\{ \int r(t) s^*(\hat{\mathbf{a}}, t) dt \right\} \quad (3.36a)$$

$$= \sum_{k, k'=0}^K \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^* \int h(t - kT) h^*(t - k'T) dt - 2\Re \left\{ \sum_{k=0}^K \hat{a}_k^* r_k \right\} \quad (3.36b)$$

$$= \sum_{k, k'=0}^K \hat{a}_k \hat{a}_{k'}^* S_h[k' - k] - 2\Re \left\{ \sum_{k=0}^K \hat{a}_k^* r_k \right\} \quad (3.36c)$$

$$= \sum_{k=0}^K \hat{a}_k^* \hat{s}_k - 2\Re \left\{ \sum_{k=0}^K \hat{a}_k^* r_k \right\}. \quad (3.36d)$$

En (3.36c) se hace uso de que

$$S_h[k] = \int h(t) h^*(t - kT) dt = h(t) \oplus h^*(-t)|_{t=kT} \quad (3.37)$$

es la respuesta del canal discreto equivalente. En (3.36d) también se usa (3.37) para identificar  $\sum_k \hat{a}_k S_h[k' - k]$  como  $\hat{s}_{k'}$ . En otras palabras,  $\hat{s}_{k'}$  es la componente de señal en la muestra  $r_k$  obtenida a la salida del MF, bajo la hipótesis de que se transmitió la secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$ . Ahora bien, la diferencia de métricas de camino (LLRs), una para una secuencia de  $K + 1$  símbolos y la otra para una versión más corta de sólo  $K$  símbolos, evidentemente resultará en la métrica de rama. Entonces, utilizando (3.36d) se obtiene la métrica de rama como

$$\Gamma_K(\hat{\mathbf{a}}) = \Lambda_{K+1}(\hat{\mathbf{a}}) - \Lambda_K(\hat{\mathbf{a}}) = \hat{a}_K^* \hat{s}_K - 2\Re \{ \hat{a}_K^* r_K \}. \quad (3.38)$$

Notando que  $S_h[k] = S_h^*[-k]$  y que  $S_h[k] = 0 \forall |k| \geq L$ , se desprende que la métrica de rama en (3.38) sólo depende de  $\hat{a}_k$  y  $L - 1$  muestras pasadas (*i.e.*,  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_{k-L+1}$ ). Esto significa entonces que el VD requiere  $M^{L-1}$  estados, al igual que para el MLSD de Forney. Sin embargo, *la gran diferencia es que mientras la energía de  $m_k$  está comprimida temporalmente en forma óptima, este no es el caso con  $S_h[k]$* . Por eso, al implementar este MLSD suponiendo una memoria  $\hat{L} < L$ , en general se introduce una mayor degradación de desempeño que con el MLSD de Forney [23].

### 3.3.2 Receptores MLSD para Canales No-Lineales

#### MLSD con Sobremuestreo (OS-MLSD)

Una de las alternativas para obtener estadística suficiente es muestreando a una tasa suficientemente alta que permita recuperar la señal  $s(t)$  de tiempo continuo, y la estadística del ruido

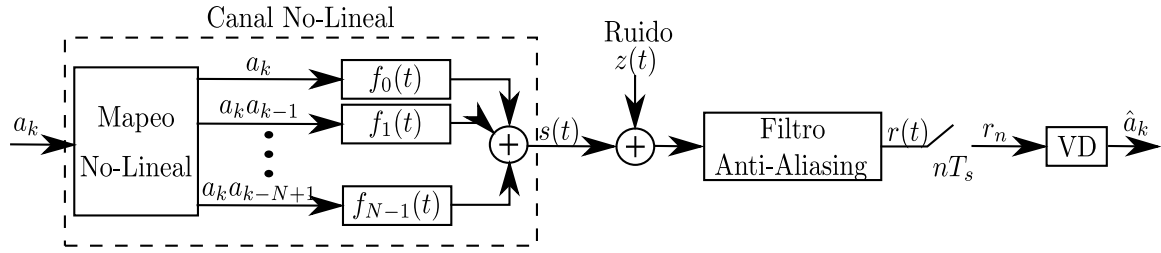


Fig. 3.7 OS-MLSD para canales no-lineales.

dentro de la banda de la señal [83, 91]. Ahora bien, la presencia de no-linealidades puede ensanchar el espectro de la señal. Entonces, una manera de obtener un receptor MLSD para un canal no-lineal es aplicando una tasa de muestreo suficientemente alta como para que el Teorema de Nyquist asegure la reconstrucción de la componente de señal [77]. Debido a las no-linealidades esta tasa de muestreo  $1/T_s$  puede ser mayor a  $2/T$  en muchas aplicaciones, lo que impone una restricción importante en aplicaciones de alta velocidad. A pesar de esto, la propuesta presentada en [42] se basa en este criterio y ha sido ampliamente utilizada en aplicaciones de fibra óptica donde se requiere compensar no-linealidades [4]. El esquema de este receptor se muestra en la Fig. 3.7 para el caso de un canal no-lineal modelado por una serie de Volterra, donde por simplicidad de notación se consideran solamente kernels de segundo orden (ver Capítulo 2):

$$s(t) = \sum_l a_l f_0(t - lT) + \sum_{m=1}^{N-1} \sum_l a_l a_{l-m} f_m(t - lT). \quad (3.39)$$

La propuesta en [42] consiste en usar una tasa de muestreo  $1/T_s = \nu/T$  suficientemente alta<sup>1</sup>. Al mismo tiempo el filtro de anti-plegamiento (*anti-aliasing*), se elige de modo que tenga simetría vestigial y que su respuesta sea plana en la banda de paso. De este modo, el modelo de las muestras recibidas con estadística suficiente responde a

$$r_n = r_{k+i/\nu} = r(t)|_{t=[k+i/\nu]T} = \sum_l a_l f_0[k-l+i/\nu] + \sum_{m=1}^N \sum_l a_l a_{l-m} f_m[k-l+i/\nu] + z_{k+i/\nu}, \quad (3.40)$$

donde  $k$  es un entero que indica muestras correspondientes a símbolos distintos, mientras que  $i = 0, 1, \dots, \nu - 1$  es un entero que indexa las distintas fases correspondientes a un mismo símbolo. Gracias a la simetría vestigial del filtro anti-aliasing se asegura que el espectro plegado de la PSD de la componente de ruido  $z_n$  sea plano, lo que para el caso de ruido Gaussiano asegura que las muestras sean independientes entre sí para distintos

<sup>1</sup>Por simplicidad se asume que el factor de sobremuestreo  $\nu$  es entero.

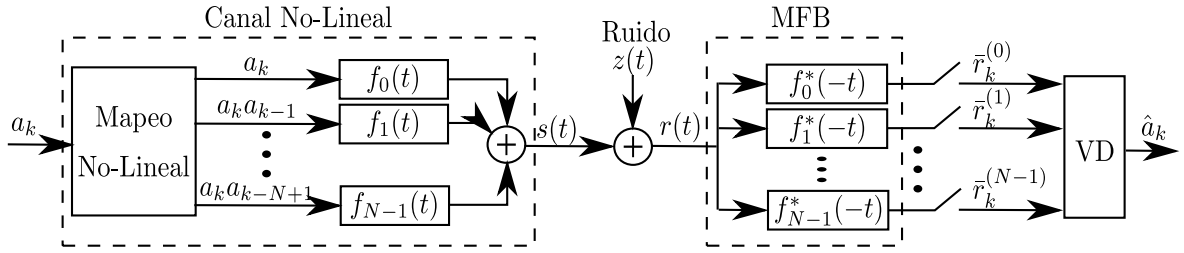


Fig. 3.8 MFB-MLSD para canales no-lineales.

instantes. De este modo la métrica de rama para el VD toma la forma de una métrica Euclidiana  $v$ -dimensional como la siguiente:

$$\Gamma_k(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{i=0}^{v-1} \left( r_{k+i/v} - \sum_l \hat{a}_l f_0[k-l+i/v] - \sum_{m=1}^N \sum_l \hat{a}_l \hat{a}_{l-m} f_m[k-l+i/v] \right)^2. \quad (3.41)$$

### MLSD por Banco de Filtros Apareados (MFB-MLSD)

Una estructura alternativa de detección MLSD para canales no-lineales consiste en usar un MFB (o simplemente MF si resulta evidente del contexto que en realidad implica un banco de varios MFs) para obtener estadística suficiente (ver [39–41] entre otros). Si se tiene un canal no-lineal modelado por una serie de Volterra como en (3.39), entonces se puede plantear el LLR como en la Sección 3.1, salvo que en (3.19) ahora se debe reemplazar  $s(\mathbf{a}; t)$  por el modelo en (3.39). De este modo, en lugar del MF de ec. (3.20), para obtener estadística suficiente en tiempo discreto hace falta conocer

$$\int_I r(t) s^*(\mathbf{a}; t) dt = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_k A_m^*[k] [r(t) \oplus f_m^*(-t)]_{t=kT}. \quad (3.42)$$

Para simplificar futuros desarrollos de esta misma sección, se ha modificado la notación en (3.42) respecto a (3.39) renombrando las secuencias de entrada a los kernels de Volterra como  $A_0[k] = a_k$ ,  $A_1[k] = a_k a_{k-1}$ ,  $\dots$ ,  $A_{N-1}[k] = a_k a_{k-N+1}$ . Nótese de (3.42) que, en el caso de un canal no-lineal, hacen falta MFs apareados a cada uno de los kernels de Volterra que generan la ISI no-lineal, todos ellos muestreados a tasa de símbolo. De este modo, el esquema de recepción del MFB-MLSD es como se muestra en la Fig. 3.8, donde las muestras a la salida del MFB en general están correlacionadas. Así, el modelo de canal discreto equivalente resulta en un vector de muestras discretas  $\bar{\mathbf{r}}[k] = [\bar{r}_0[k], \bar{r}_1[k], \dots, \bar{r}_{N-1}[k]]^T$ ,

donde cada una de estas componentes viene dada por

$$\bar{r}_i[k] = \int_I r(t) f_i^*(t - kT) dt = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_n A_m[n] \rho_{m,i}[k-n] + \int_I z(t) f_i^*(t - kT) dt = \tilde{r}_i[k] + z_i[k], \quad (3.43)$$

donde se define

$$\rho_{m,i}[k-n] = \int_I f_m(t - nT) f_i^*(t - kT) dt, \quad (3.44)$$

y  $\tilde{r}_i[k]$  y  $z_i[k]$  son respectivamente la componente de señal y la componente de ruido en  $\bar{r}_i[k]$ . Dado que las muestras de ruido Gaussiano  $z_i[k]$  no son independientes en este caso, las métricas de rama del VD ya no son simples distancias Euclidianas como en (3.41).

En este caso la métrica de camino a minimizar, *i.e.*, el negativo del LLR de una secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$  (salvo factores de proporcionalidad), viene dado por

$$\Lambda_{K+1}(\hat{\mathbf{a}}) = \int |s(\hat{\mathbf{a}}, t)|^2 dt - 2\Re \left\{ \int r(t) s^*(\hat{\mathbf{a}}, t) dt \right\} \quad (3.45a)$$

$$= \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^K [\hat{A}_m^*[k] \hat{r}_m[k] - 2\Re \{ \hat{A}_m^*[k] \bar{r}_m[k] \}], \quad (3.45b)$$

donde  $\hat{A}_0[k] = \hat{a}_k$ ,  $\hat{A}_1[k] = \hat{a}_k \hat{a}_{k-1}$ , ...,  $\hat{A}_{N-1}[k] = \hat{a}_k \hat{a}_{k-N+1}$  y  $\hat{r}_m[k]$  en la componente de señal que se obtendría en la  $m$ -ésima salida del MFB si se transmite la secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$ , *i.e.*,

$$\hat{r}_i[k] = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^k \hat{A}_m[n] \rho_{m,i}[k-n]. \quad (3.46)$$

Ahora bien, al igual que en la Sección 3.3.1, la diferencia de métricas de camino resultará en la métrica de rama buscada, que utilizando (3.45b) se puede obtener como

$$\Gamma_K(\hat{\mathbf{a}}) = \Lambda_{K+1}(\hat{\mathbf{a}}) - \Lambda_K(\hat{\mathbf{a}}) = \sum_{m=0}^{N-1} [\hat{A}_m^*[K] \hat{r}_m[K] - 2\Re \{ \hat{A}_m^*[K] \bar{r}_m[K] \}]. \quad (3.47)$$

### 3.3.3 Discusión

Un problema práctico de los receptores MLSD, tanto para canales con ISI lineal como no-lineal, es su gran complejidad. La cantidad de operaciones aritméticas, así como la cantidad de variables que deben ser guardadas en memoria, crecen proporcionalmente al número de estados posibles que tiene dicho sistema de comunicación. Esta cantidad de estados diferentes que debe considerar el MLSD ( $M^{L-1}$ ) crece en forma exponencial con la memoria de la ISI. Entonces en canales muy dispersivos (*i.e.*, ISI de gran memoria) los

receptores MLSD requieren una complejidad prohibitiva.

Este problema es muy conocido, especialmente en canales lineales, y existen varias propuestas para intentar reducir la complejidad del MLSD sin generar una gran degradación de desempeño. La esencia detrás de todas estas estrategias es hacer una búsqueda a través de un diagrama de trellis *reducido*. Esta reducción requiere esencialmente ir descartando *prematuramente* estados que se supongan *poco verosímiles*. Si bien este proceso de descarte también implica cierto procesamiento extra, generalmente se alcanza una reducción global de complejidad. El principal inconveniente de las estrategias SR es que pueden presentar un desempeño muy pobre si no se usan sobre la estructura del receptor de Forney (ver Fig. 3.5) [23]. Esto se debe esencialmente a que la etapa de filtrado propuesta por Forney resulta en un canal equivalente de tiempo discreto con su energía comprimida en forma óptima, algo que no es tenido en cuenta por la propuesta de Ungerboeck.

En canales no-lineales también se han usado este tipo de estrategias para reducir complejidad [5, 12, 18, 19, 34]. Sin embargo, los desempeños no son suficientemente buenos en general. Por ejemplo, en [5] se analiza un enlace con OOK-IM/DD ecualizado por un OS-MLSD de sobremuestreo  $v = 2$  y asistido por reducción activa de estados. Los resultados se muestran en la Fig. 3.9, donde se compara un OS-MLSD con un esquema con SR en un orden de 16 veces. Se alcanzan relativamente buenos desempeños sólo para enlaces DU de  $\sim 300$  km. Para longitudes mayores del enlace los desempeños son muy pobres, *e.g.*, en un enlace de 450 km una reducción de complejidad de  $\sim 16$  veces ( $SR = 16$ ) implica pérdidas en desempeño tan grandes como  $\sim 6$  dB comparado a un MLSD óptimo. Por otra parte, en [18] se reportan resultados donde se observa que usando un algoritmo de SR en un enlace IM/DD de 1040 km, pierden 1 dB en desempeño al reducir a la mitad la cantidad de estados (*i.e.*,  $SR = 2$ ).

La hipótesis que plantea esta Tesis es que el bajo desempeño de las técnicas SR en canales no-lineales se genera porque las arquitecturas MFB-MLSD y OS-MLSD no se ocupan de comprimir el modelo de la ISI. Entonces al reducir la complejidad de implementación se desprejará demasiada información comparado a un esquema que sea capaz de comprimir eficientemente el modelo de la ISI. Por eso, es muy importante encontrar un receptor que extienda las propiedades del MLSD de Forney a canales no-lineales. Además, otro inconveniente que surge en el caso de canales no-lineales es que la dimensionalidad *espacial* del problema crece rápidamente con la cantidad de kernels no-lineales en el modelo del canal. Esto es especialmente problemático en el MFB-MLSD (ver Fig. 3.8), dado que toda la estructura del receptor se escala con la cantidad de kernels del modelo.

Con el objetivo de aliviar esta problemática se presenta en esta Tesis (ver Capítulo 4) una nueva arquitectura MLSD para canales no-lineales con las siguientes propiedades:

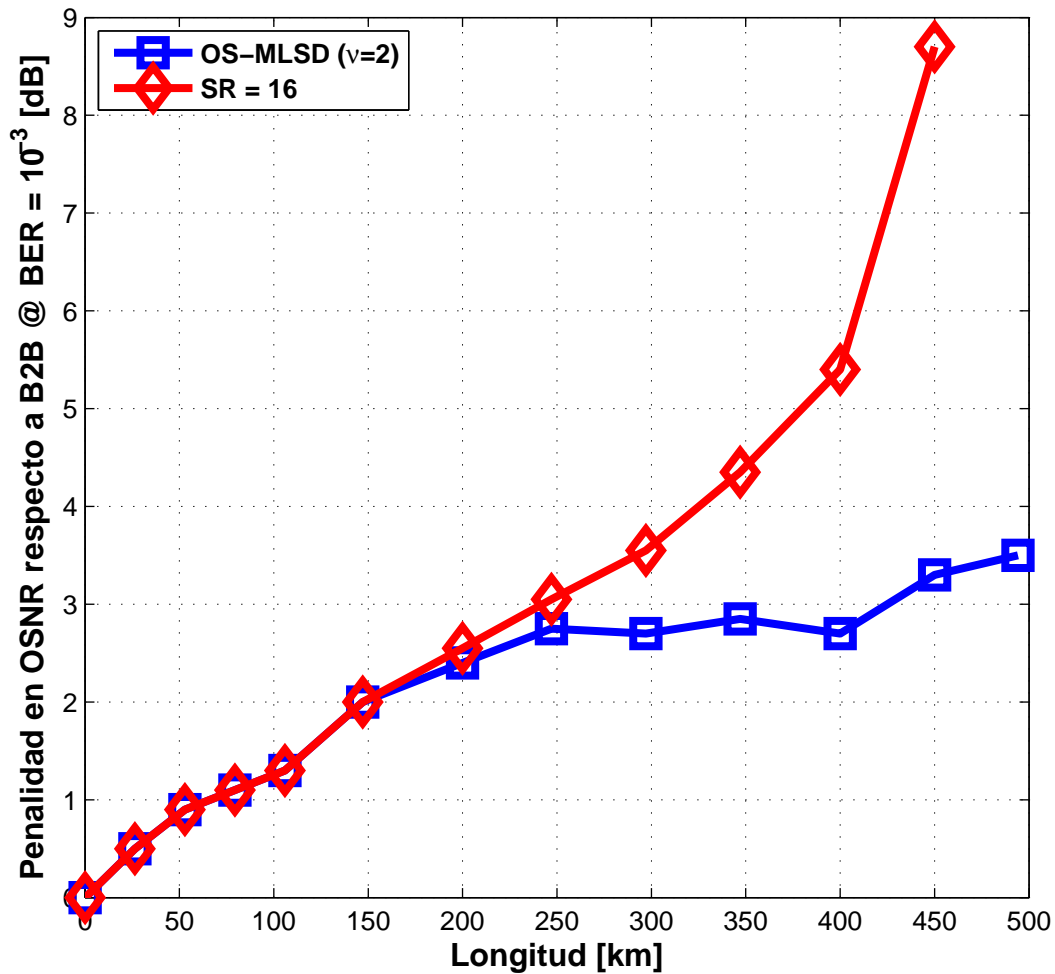


Fig. 3.9 Penalidad en OSNR respecto a B2B de un OS-MLSD con SR [5].

- Puede operar con muestras a tasa de símbolo;
- Puede operar con un sólo MF en el receptor (reducción de dimensionalidad *espacial*);
- Comprime temporalmente la respuesta del canal equivalente;
- Trabaja con muestras de ruido no correlacionadas.

Gracias a estas propiedades, la nueva arquitectura presenta una suave degradación de performance cuando se la implementa con reducción de complejidad. Esto es especialmente importante en comunicaciones IM/DD por fibra óptica a larga de distancia, donde la complejidad del MLSD óptimo se vuelve inmanejable, pero que al mismo tiempo presenta un desempeño muy superior a esquemas sub-óptimos como el LE y el DFE (ver Fig. 3.10).

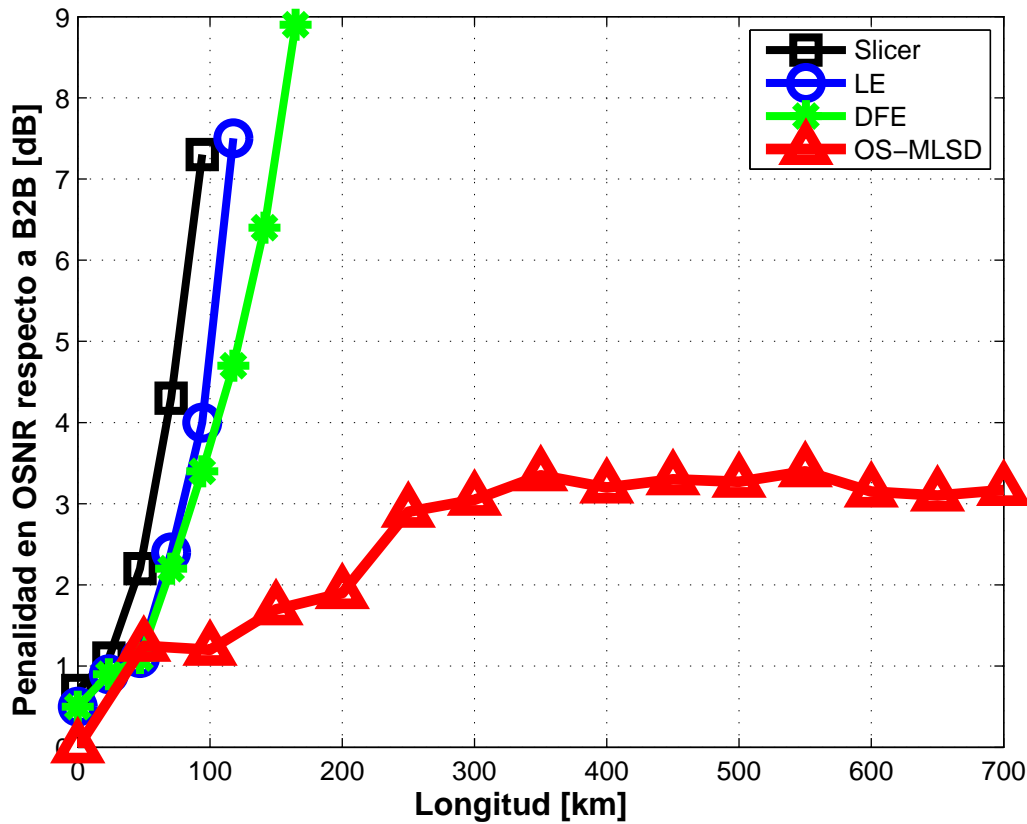


Fig. 3.10 Penalidad en OSNR respecto a B2B de distintos ecualizadores en sistemas IM/DD [2, 3].

### 3.4 Conclusiones

En este capítulo se presentó el concepto de receptor MLSD. Esencialmente, se introdujo el MLSD en canales lineales, a pesar de que el principal interés de esta Tesis es la recepción MLSD en canales no-lineales. Sin embargo, el canal lineal sirve para introducir de forma sencilla los conceptos elementales que se requieren para comprender el aporte central de la Tesis (ver Capítulos 4 y 5). Se introdujo primero el concepto de detección de secuencia de señales con mínima probabilidad de error en presencia de ISI y ruido. Luego, se presentó la recepción por MF y cómo éste permite obtener estadística suficiente para el proceso de estimación. También se introdujo el conocido VD para resolver el problema de estimación óptima de secuencia a partir de la señal en tiempo discreto con estadística suficiente. Estos conceptos se introdujeron por medio de ejemplos concretos en canales con ISI lineal. Por último, se analizaron las estructuras MLSD existentes para ecualización en canales no-

lineales y se destacaron los inconvenientes que presentan a la hora de ser implementadas con complejidad reducida. Estos aspectos son atacados en el Capítulo 4, donde se presenta un nuevo esquema óptimo de recepción MLSD en canales no-lineales. Este nuevo esquema presenta un mejor desempeño que otros esquemas al ser implementado con complejidad reducida.



NUEVO RECEPTOR MLSD PARA CANALES NO-LINEALES

---

En este capítulo se presenta una novedosa arquitectura de recepción MLSD para canales no-lineales. La misma está basada en una original ortogonalización del modelo de Volterra del canal. El proceso de ortogonalización propuesto es similar al procedimiento de Gram-Schmidt [92], en el sentido que se van proyectando sucesivamente nuevos kernels sobre el espacio de señal generado por kernels ya ortogonalizados. Sin embargo, una de las diferencias con el procedimiento de Gram-Schmidt es que en cada paso se minimiza la energía de los nuevos kernels agregados a la base ortogonal. De este modo, se logra comprimir la mayor parte de la energía en unas pocas componentes de la nueva base ortogonal. Entonces, el modelo ortogonalizado obtenido con éste procedimiento permite reducir eficientemente la dimensionalidad *espacial*<sup>1</sup> del problema, y por ende del receptor.

En base al modelo ortogonalizado del canal no-lineal se diseña un banco de filtros blanqueadores apareados al modelo ortogonalizado. A este banco de filtros se lo llama filtro apareado de blanqueamiento en espacio y tiempo (*space-time whitening matched filter - ST-WMF*). Éste, además de obtener muestras independientes a tasa de símbolo, también comprime el modelo en el dominio temporal por el uso WMFs escalares. Luego, se procesa la salida del ST-WMF (que representa estadística suficiente) mediante un VD de métricas Euclidianas, con lo cuál se alcanza el desempeño óptimo. Al receptor así formado por el ST-WMF y el VD se lo llama MLSD con blanqueamiento espacio-temporal (*MLSD based on space-time whitening matched filter - ST-WMF-MLSD*).

La propiedad de compresión espacio-temporal del ST-WMF permiten que el nuevo receptor MLSD pueda ser implementado con complejidad reducida y aún así ofrecer un buen desempeño. Específicamente, el ST-WMF-MLSD presenta una degradación lenta y suave de desempeño a medida que se reduce la complejidad de implementación. Esto lo convierte en una interesante alternativa para aplicaciones en canales dispersivos no-lineales,

---

<sup>1</sup>La terminología de dominio *espacial* se usa para indicar el dominio *no-temporal* de la señal no-lineal, *i.e.*, el espacio de señal generado por los distintos kernels del modelo de Volterra.

e.g., transmisiones IM/DD por fibra óptica DU.

## 4.1 Modelo del Canal No-Lineal

La señal recibida viene dada por

$$r(t) = s(t) + z(t), \quad (4.1)$$

donde  $s(t)$  es la componente puramente de señal y  $z(t)$  es la componente de ruido, la cual se considera como un proceso de ruido blanco y Gaussiano con PSD  $\sigma_z^2$ . La componente  $s(t)$  se puede expresar en término de su expansión por serie de Volterra [46, 93] (ver Sección 2.2). Por ejemplo, despreciando la componente de continua,

$$s(t) = \sum_k a_k f_0(t - kT) + \sum_{m=1}^{N-1} \sum_k a_k a_{k-m} f_m(t - kT), \quad (4.2)$$

donde  $f_0(t)$  representa el kernel lineal,  $f_m(t)$  con  $m > 0$  representa el  $m$ -ésimo kernel de segundo orden,  $a_k$  es el  $k$ -ésimo símbolo a la entrada del canal no-lineal,  $1/T$  es la tasa de símbolo, mientras que  $N$  es el total de kernels en el modelo<sup>1</sup>.

### 4.1.1 Modelo Ortogonal del Canal

A continuación se presenta una representación alternativa de la componente de señal  $s(t)$ . Esta representación está diseñada para presentar una propiedad de *ortogonalidad extendida* entre kernels. Supóngase primero, y sin pérdida de generalidad, que el kernel lineal  $f_0(t)$  es dominante, *i.e.*, es el de mayor energía. Entonces resulta natural elegir a  $f_0(t)$  como la primer respuesta *pivote* para el proceso de ortogonalización, lo cuál se indicará definiendo la respuesta  $h_0(t) = f_0(t)$ . Sea ahora  $\mathcal{H}_0$  el *espacio de señal* generado por el conjunto de respuestas  $\{h_0(t - kT)\}$  [6]. Se supone que los espacios de señal son espacio de Hilbert con producto interno definido por  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt$ , donde el superíndice  $*$  denota el complejo conjugado. Entonces, por el *teorema de proyección*, los kernels no-lineales  $f_m(t)$  con  $m > 0$  se pueden expresar unívocamente como

$$f_m(t) = \sum_n \lambda_n^{(0,m)} h_0(t - nT) + g_m^{(0)}(t), \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>El modelo de Volterra en (4.2) puede ser extendido para contemplar no-linealidades de orden mayor a dos como se explica en el Capítulo 2. Sin embargo, por simplicidad de notación se expone la teoría utilizando sólo un desarrollo de segundo orden.

donde  $g_m^{(0)}(t)$  es *ortogonal* al espacio de señal  $\mathcal{H}_0$ , *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m^{(0)}(t)h_0^*(t-jT)dt = 0, \quad m = 1, \dots, N-1, \forall j \in \mathbb{Z}, \quad (4.4)$$

donde  $\mathbb{Z}$  denota el conjunto de los números enteros, y  $\lambda_n^{(0,m)}$  es la secuencia de coeficientes que satisface (4.4) [6]. Nótese que la condición (4.4) sobre la respuesta  $g_m^{(0)}(t)$  es equivalente a minimizar  $\int_{-\infty}^{\infty} |g_m^{(0)}(t)|^2 dt$ , *i.e.*, la energía de la componente ortogonal [6]. Esta última propiedad será clave para la *compresión espacial* del nuevo modelo (ver Sección 4.1.2). Por otro lado, la primera sumatoria en (4.3) es la *proyección* de  $f_m(t)$  sobre  $\mathcal{H}_0$ . Ahora se define  $\mathcal{G}_m^0$  como el espacio de señal generado por  $\{g_m^{(0)}(t-kT)\}$ . Entonces para  $x(t) \in \mathcal{H}_0$  e  $y(t) \in \mathcal{G}_m^0$ , se ve de (4.4) que  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)y^*(t)dt = 0$ , *i.e.*,  $x(t)$  e  $y(t)$  son señales ortogonales [6]. Si se reemplaza (4.3) en (4.2) y se opera, se obtiene

$$s(t) = s_0(t) + \bar{s}_0(t), \quad (4.5)$$

donde

$$s_0(t) = \sum_k \left[ a_k + \sum_{m=1}^{N-1} a_k a_{k-m} \oplus \lambda_k^{(0,m)} \right] h_0(t-kT), \quad (4.6)$$

$$\bar{s}_0(t) = \sum_k \sum_{m=1}^{N-1} a_k a_{k-m} g_m^{(0)}(t-kT), \quad (4.7)$$

con el operador  $\oplus$  denotando convolución. Nótese que  $s_0(t) \in \mathcal{H}_0$  y  $\bar{s}_0(t) \in \cup_{m=1}^{N-1} \mathcal{G}_m^0$ , por ende las señales  $s_0(t)$  y  $\bar{s}_0(t)$  son ortogonales (ver (4.4)).

Ahora nos concentremos en  $\bar{s}_0(t)$ . Sin pérdida de generalidad, se selecciona como segunda respuesta pivote a  $h_1(t) = g_1^{(0)}(t)$ . Entonces (4.7) se puede reescribir como

$$\bar{s}_0(t) = \sum_k a_k \left[ a_{k-1} h_1(t-kT) + \sum_{m=2}^{N-1} a_{k-m} g_m^{(0)}(t-kT) \right]. \quad (4.8)$$

Del mismo modo que para (4.5)-(4.7),  $\bar{s}_0(t)$  se puede expresar como

$$\bar{s}_0(t) = s_1(t) + \bar{s}_1(t), \quad (4.9)$$

donde

$$s_1(t) = \sum_k \left[ a_k a_{k-1} + \sum_{m=2}^{N-1} a_k a_{k-m} \oplus \lambda_k^{(1,m)} \right] h_1(t-kT) \quad (4.10)$$

y

$$\bar{s}_1(t) = \sum_k \sum_{m=2}^{N-1} a_k a_{k-m} g_m^{(1)}(t - kT), \quad (4.11)$$

siendo los  $\lambda_n^{(1,m)}$  tales que permitan satisfacer la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_m^{(1)}(t) h_1^*(t - jT) dt = 0, \text{ para } m = 2, \dots, N-1, \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.12)$$

Entonces, resulta  $\bar{s}_1(t)$  ortogonal a los espacios de señal  $\mathcal{H}_0$  y  $\mathcal{H}_1$ , generados respectivamente por los conjuntos  $\{h_0(t - kT)\}$  y  $\{h_1(t - kT)\}$ , y se ve minimizada la energía de las respuestas  $g_m^{(1)}(t)$ , con  $m = 2, 3, \dots, N-1$  [6]. Repitiendo este procedimiento en forma análoga sobre (4.11) y generalizando se obtiene por inducción

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} s_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_k b_k^{(n)} h_n(t - kT), \quad (4.13)$$

donde  $h_n(t)$  es la respuesta de la  $n$ -ésima dimensión del canal, con  $b_k^{(n)}$  dado por

$$b_k^{(n)} = \begin{cases} a_k + \sum_{m=1}^{N-1} a_k a_{k-m} \oplus \lambda_k^{(0,m)} & \text{si } n = 0 \\ a_k a_{k-n} + \sum_{m=n+1}^{N-1} a_k a_{k-m} \oplus \lambda_k^{(n,m)} & \text{si } 0 < n < N-1 \\ a_k a_{k-N+1} & \text{si } n = N-1, \end{cases} \quad (4.14)$$

y satisfaciendo la propiedad de *ortogonalidad extendida*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h_m(t) h_n^*(t - jT) dt = 0 \quad m \neq n, \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (4.15)$$

A partir de (4.13) y (4.15) se nota que las componentes de señal de diferentes *ramas* (dimensiones) del canal son ortogonales, *i.e.*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} s_m(t) s_n^*(t) dt = 0, \quad m \neq n. \quad (4.16)$$

La Fig. 4.1 muestra dos representaciones equivalentes del tipo MISO para un mismo canal no-lineal. La Fig. 4.1-A muestra la representación basada en un modelo tradicional por serie de Volterra según (4.2), mientras que la Fig. 4.1-B muestra la representación ortogonal dada por (4.13)-(4.14).

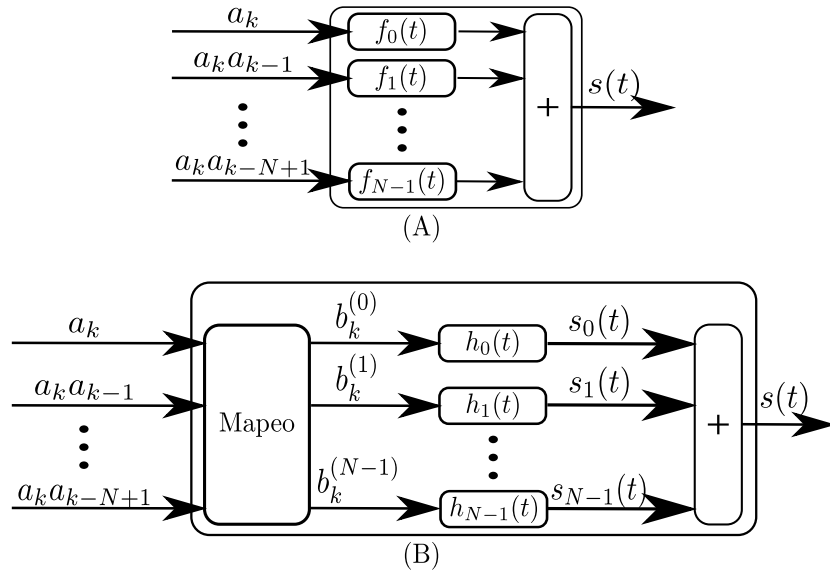
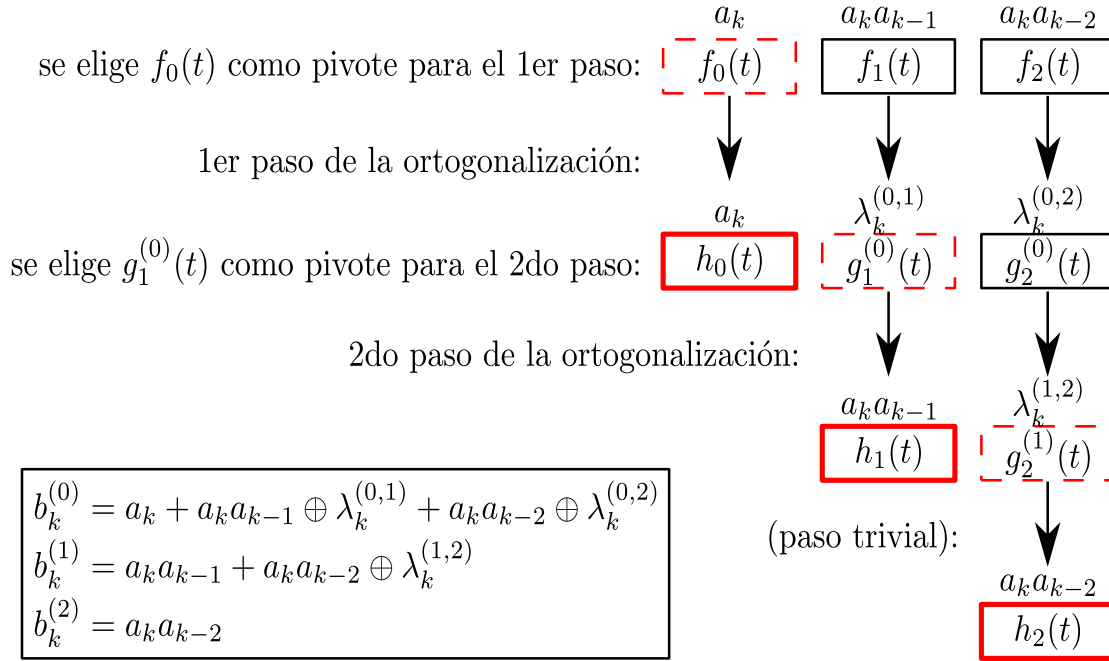
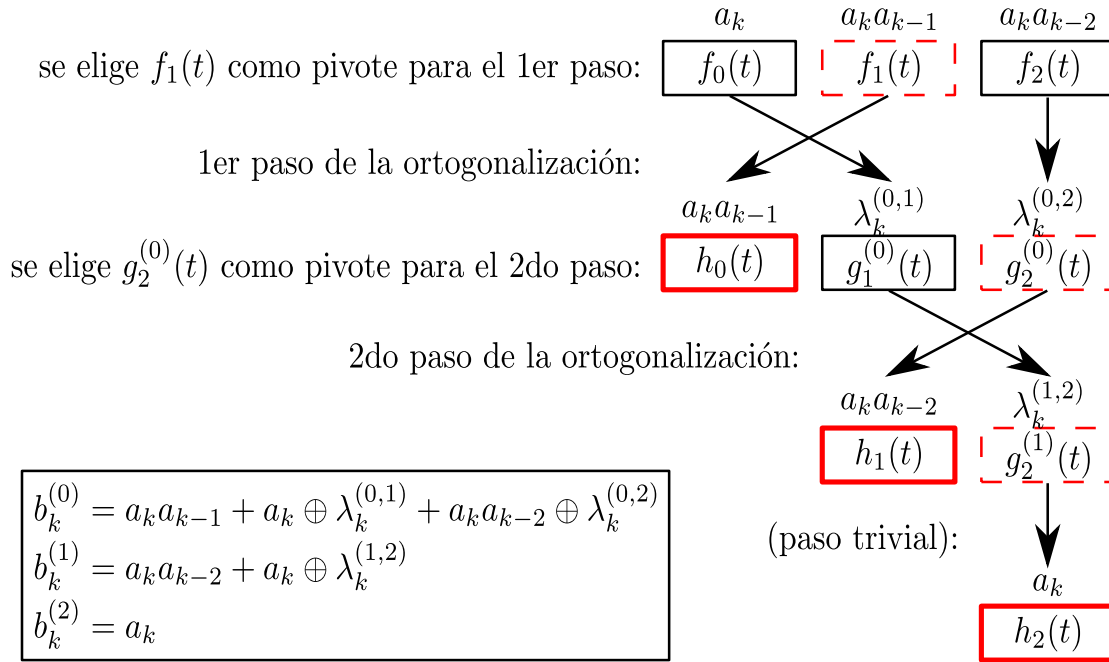


Fig. 4.1 Modelos MISO del canal no-lineal: (A) basado en una representación por VS; (B) basado en la nueva representación ortogonal con compresión espacial.

### 4.1.2 Compresión Espacial del Canal

El procedimiento descrito en la Sección 4.1.1 para obtener el modelo ortogonalizado se puede realizar de  $N!$  maneras diferentes, donde  $N$  es el número de kernels en el modelo por serie de Volterra y  $x!$  denota factorial de  $x$ . Considérese, *e.g.*, un modelo de Volterra con  $N = 3$ . Una manera de obtener el modelo ortogonalizado podría ser seleccionando los kernels pivote como se muestra en el esquema de la Fig. 4.2. En este caso, se elige la respuesta  $f_0(t)$  como el pivote  $h_0(t)$  para el primer paso del proceso de ortogonalización. Luego, se obtienen  $g_1^{(0)}$  y  $g_2^{(0)}$  como las componentes de  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$  ortogonales al espacio generado por  $h_0(t) = f_0(t)$ . Para el segundo paso se elige (arbitrariamente)  $g_1^{(0)}(t)$  como pivote, y  $g_2^{(1)}(t)$  resulta de la proyección de  $g_2^{(0)}(t)$  sobre  $h_1(t) = g_1^{(0)}(t)$ . Se puede identificar unívocamente este ordenamiento particular por el siguiente conjunto de índices  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ , donde el primer pivote está asociado al kernel  $f_0(t)$ , el segundo al kernel  $f_1(t)$  y el tercero (trivial) al kernel  $f_2(t)$ .

Un modelo diferente se obtiene al seleccionar las respuestas pivote del modo ilustrado en la Fig. 4.3. En este caso, se selecciona a  $f_1(t)$  como la respuesta pivote para el primer paso del procedimiento de ortogonalización. Entonces, las respuestas  $g_1^{(0)}(t)$  y  $g_2^{(0)}(t)$  resultan como las componentes de  $f_0(t)$  y  $f_2(t)$  ortogonales al espacio de señal expandido por el pivote  $h_0(t) = f_1(t)$ . A su vez, la Fig. 4.3 muestra que  $g_2^{(0)}(t)$  (que en general será diferente a la respuesta  $g_2^{(0)}(t)$  de la Fig. 4.2) se selecciona como respuesta pivote para el segundo paso del procedimiento. Luego se obtiene  $g_2^{(1)}(t)$  como la componente de  $g_1^{(0)}(t)$  ortogonal

Fig. 4.2 Proceso de ortogonalización siguiendo el orden  $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ .Fig. 4.3 Proceso de ortogonalización siguiendo el orden  $\mathcal{S} = \{1, 2, 0\}$ .

al espacio de señal generado por  $h_1(t) = g_2^{(0)}(t)$ . El conjunto de índices que indican el procedimiento aplicado como se muestra en la Fig. 4.3 es  $\mathcal{S} = \{1, 2, 0\}$ .

Nótese que el conjunto de respuestas  $\{h_i(t)\}_{i=0}^2$  y secuencias  $\{b_k^{(i)}\}_{i=0}^2$  que resultan de

los procedimientos esquematizados en las Figs. 4.2 y 4.3 son diferentes, pero son expansiones completamente equivalentes de la misma señal  $s(t)$ . Entonces, se puede elegir indistintamente cualquiera de las  $N!$  posibles maneras de realizar el procedimiento de ortogonalización. Sin embargo, desde el punto de vista de implementación, es deseable realizar la ortogonalización de manera tal que *la mayor cantidad posible de energía en la señal  $s(t)$  pueda ser generada con la menor cantidad posible de respuestas  $h_i(t)$* . Dicho esto de forma más precisa, el ordenamiento  $\mathcal{J}$  óptimo debería cumplir la siguiente condición:

$$\sum_{l=0}^{i-1} \mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(l)} \geq \sum_{l=0}^{i-1} \mathcal{E}_{\tilde{\mathcal{J}}}^{(l)} \quad \forall \tilde{\mathcal{J}} \neq \mathcal{J}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (4.17)$$

donde

$$\mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(n)} = E\{|b_k^{(n)}|^2\} \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(t)|^2 dt \quad (4.18)$$

es la energía en la  $n$ -ésima rama, obtenida de acuerdo al conjunto de índices  $\mathcal{J}$ , mientras que  $E\{\cdot\}$  significa tomar esperanza. La expansión óptima para el canal, *i.e.*, la que satisface (4.17), se puede encontrar mediante una búsqueda exhaustiva.

En general se ha podido observar que el término  $E\{|b_k^{(n)}|^2\}$  no tiene una gran influencia sobre (4.18), lo que permite simplificar el proceso de selección del orden de ortogonalización. En lugar de usar el criterio óptimo establecido en (4.17), se verá a continuación en la Sección 4.1.3 que igualmente se obtienen excelentes resultados si se realiza el procedimiento de ortogonalización procurando cumplir con el siguiente criterio:

$$\hat{\mathcal{E}}^{(0)} \geq \hat{\mathcal{E}}^{(1)} \geq \dots \geq \hat{\mathcal{E}}^{(N-1)}, \quad (4.19)$$

donde

$$\hat{\mathcal{E}}^{(j)} = \int_{-\infty}^{\infty} |h_n(t)|^2 dt. \quad (4.20)$$

La condición (4.19) se puede lograr simplemente seleccionando en cada paso del proceso de ortogonalización (*e.g.*, el  $i$ -ésimo paso) a la respuesta pivote ( $h_{i-1}(t)$ ) como aquella con la máxima energía entre las que *restan por ortogonalizar* (*i.e.*, la de máxima energía entre aquellas ortogonales a  $\cap_{n=0}^{i-2} \mathcal{H}_n$  para  $t = kT$  y  $\forall k$ ). Esto es, para el paso inicial se selecciona el pivote  $h_0(t)$  como el kernel de Volterra  $f_n(t)$  con mayor energía. Tras esto se proyectan los kernels de Volterra sobre el pivote y se obtienen todas las proyecciones  $g_n^{(0)}$ , con  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Para el segundo paso se selecciona como pivote  $h_1(t)$  a la respuesta con mayor energía entre las  $g_n^{(0)}$ , con  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Este procedimiento se repite de manera análoga en cada paso del proceso de ortogonalización. La propiedad de minimización de energía de las respuestas ortogonales (ver ecs. (4.3), (4.4) y la discusión asociada) asegura

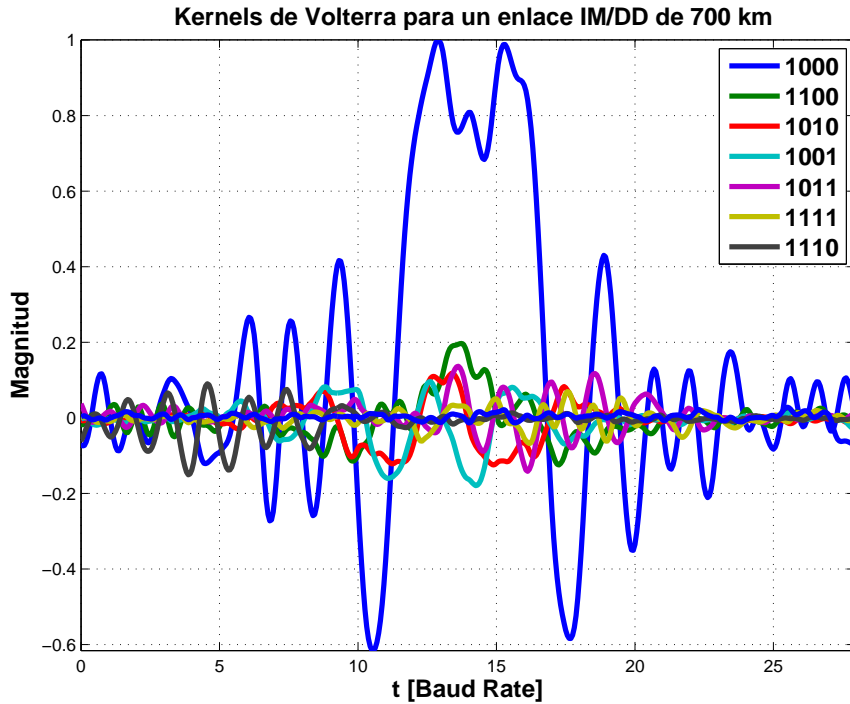


Fig. 4.4 Kernels de Volterra normalizados a pico unitario en un enlace OOK-IM/DD de 700 km.

que con este procedimiento se alcanza la condición (4.19).

La condición (4.19) da lugar a compresión *espacial* del canal, que puede usarse para reducir la complejidad del receptor. En la siguiente sección, se muestran los beneficios logrados con esta propiedad en un caso de interés práctico.

### 4.1.3 Ortogonalización de un Enlace IM/DD de Fibra Óptica

Como ejemplo, se presentan resultados para un enlace IM/DD de 700 km de fibra óptica, con una tasa de símbolo de 10 Gs/s y una potencia transmitida de -6 dBm. Los kernels de Volterra para este canal corresponden a los de la Fig. 2.18, que repetimos por comodidad en la Fig. 4.4. Para probar la efectividad de la orthogonalización para comprimir espacialmente la energía de la base ortogonal, se procede a aplicar el procedimiento propuesto en 4.1.2, cuyo objetivo es cumplir la condición (4.19). El resultado paso a paso del procedimiento se muestra en la Fig. 4.5. La  $i$ -ésima curva muestra la energía de cada respuesta  $g_m^{(i)}(t)$  tras el  $i$ -ésimo paso del procedimiento, normalizadas a la energía del pivote principal, *i.e.*,

$$P_m^{(i)} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |g_m^{(i-1)}(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h_0(t)|^2 dt}. \quad (4.21)$$

Para  $i = 0$  se observa en la curva a trazos las energías (normalizadas por la energía



de  $h_0(t)$ ) de los distintos kernels de Volterra  $f_n(t)$ , para  $n = 0, 1, \dots, N - 1 = 6$ , *i.e.*,  $g_m(-1)(t) \equiv f_m(t)$ . Resulta evidente de la Fig. 4.4 que el kernel dominante en este canal es el kernel lineal  $f_0(t)$ . Entonces, el primer pivote para el proceso de ortogonalización es  $h_0(t) = f_0(t)$ . Usando este pivote para el primer paso de ortogonalización ( $i = 1$ ) se obtiene el primer conjunto de componentes  $g_m^{(0)}(t)$  ortogonales al espacio  $\mathcal{H}_0$ . Nótese que las energías de las componentes  $\{g_m^{(0)}(t)\}_{m=1}^{N-1}$  son menores a las energías de las respuestas  $\{f_n(t)\}_{n=1}^{N-1}$ , puesto que parte de su energía es representada por el pivote  $h_0(t)$ . El procedimiento de ortogonalización requiere que para el segundo paso se use como pivote a la respuesta  $g_m^{(0)}(t)$  de mayor energía. De la Fig. 4.5 se observa que el pivote para el paso  $i = 2$  corresponde a la respuesta  $g_5^{(0)}(t)$  obtenida en el paso  $i = 1$ . Entonces, sin pérdida de generalidad se reordenan y se vuelven a numerar las respuestas ortogonales del paso  $i = 1$  dejando a  $g_5^{(0)}(t)$  como la primera, y finalmente se elige como segundo pivote a  $h_1(t) = g_5^{(0)}(t)$ . En la Fig. 4.5 se aprecia que la curva para el índice  $i = 2$  tiene la misma energía en la posición del pivote ( $m = i - 1 = 1$ ) que la curva para  $i = 1$  en la  $m = 5$ . Esto es justamente a causa del reordenamiento recién mencionado de las respuestas ortogonalizadas. Ya elegido el pivote  $h_1(t)$ , se obtienen las respuestas  $\{g_m^{(1)}(t)\}_{m=2}^{N-1}$ , que resultan de proyectar las respuestas  $\{g_m^{(0)}(t)\}_{m=2}^{N-1}$  (reordenadas) sobre  $h_1(t)$ . Tras este paso se observa que la respuesta ortogonal de mayor energía, *i.e.*, la que debe usarse como pivote para el paso  $i = 3$ , casualmente vuelve a corresponder a la posición  $m = 5$ . Entonces, las respuestas  $\{g_m^{(1)}(t)\}_{m=2}^{N-1}$  se vuelven a reordenar y se determina como pivote para el paso  $i = 3$  a  $h_2(t) = g_5^{(1)}(t)$ . Tras el paso  $i = 3$ , casualmente se encuentra que nuevamente la respuesta para  $m = 5$  (*i.e.*,  $g_5^{(2)}(t)$ ) es la que se debe usar como pivote  $h_3(t)$  del paso  $i = 4$ . Continuando de esta manera, se obtiene finalmente que la curva  $i = 5$  es monótona no creciente (de hecho es decreciente en este ejemplo) como exige el criterio en (4.19). Cabe destacar que durante el proceso de ortogonalización, se debe llevar registro de todos los reordenamientos para así reordenar consecuentemente los conjuntos  $\{a_k a_{k-m}\}_m$  y  $\{\lambda_k^{(m,n)}\}_m$  (con  $n \geq m$ ) de secuencias de información y respuestas proyectantes, respectivamente.

Por otro lado, resulta interesante también observar cuánto truncamiento espacial es suficiente para explicar un nivel dado de la energía del canal. Este aspecto requiere considerar la energía  $\mathcal{E}$  (ver ec. (4.18)) en lugar de la energía  $\hat{\mathcal{E}}$  considerada por el criterio en (4.19). Sin pérdida de generalidad se supone que  $a_k \in \{\pm 1\}$ . Sea  $\mathcal{S}_n$  la energía normalizada acumulada por dimensión espacial (*normalized cumulative path energy* - NCPE) de la expansión tradicional en serie de Volterra (ver ec. (4.2)) definida como

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{E_s} \sum_{m=0}^n \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t)|^2 dt, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1, \quad (4.22)$$

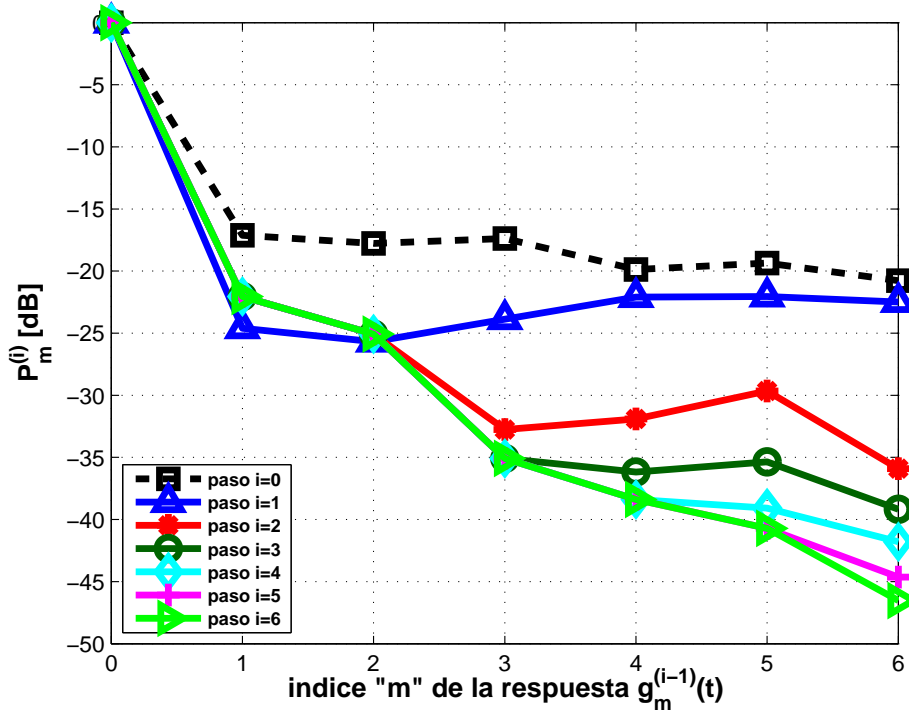


Fig. 4.5 Energía de las respuestas  $g_m^{(i-1)}(t)$  tras cada paso del proceso de ortogonalización correspondiente a un enlace OOK-IM/DD de 700 km.

donde  $E_s$  es la energía total en la componente de señal  $s(t)$

$$E_s = \sum_{m=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} |f_m(t)|^2 dt.$$

La NCPE de la expansión en serie de Volterra *ortogonalizada* se define como

$$\mathcal{S}_n = \frac{1}{E_s} \sum_{m=1}^n \mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(m)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.23)$$

donde  $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(m)}$  está dada por (4.18), y  $\mathcal{J}$  fué obtenido de acuerdo al criterio en ec. (4.19), esquematizado parcialmente en la Fig. 4.5. Nótese que en todos los casos  $\mathcal{S}_n \leq 1 \forall n$ , con  $\mathcal{S}_{N-1} = 1$ .

La Fig. 4.6 muestra la NCPE  $\mathcal{S}_n$  para la representación tradicional por serie de Volterra (4.22) y la ortogonalizada (4.23), donde  $N = 7$  para el canal considerado en este ejemplo. Para la representación ortogonal se aplicó el criterio en (4.19). Se observa que casi la totalidad de la energía de la señal no-lineal se encuentra concentrada en las primeras dos dimensiones de la representación ortogonalizada (*i.e.*,  $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(0)} + \mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(1)}$  representa  $\sim 99.4\%$  de

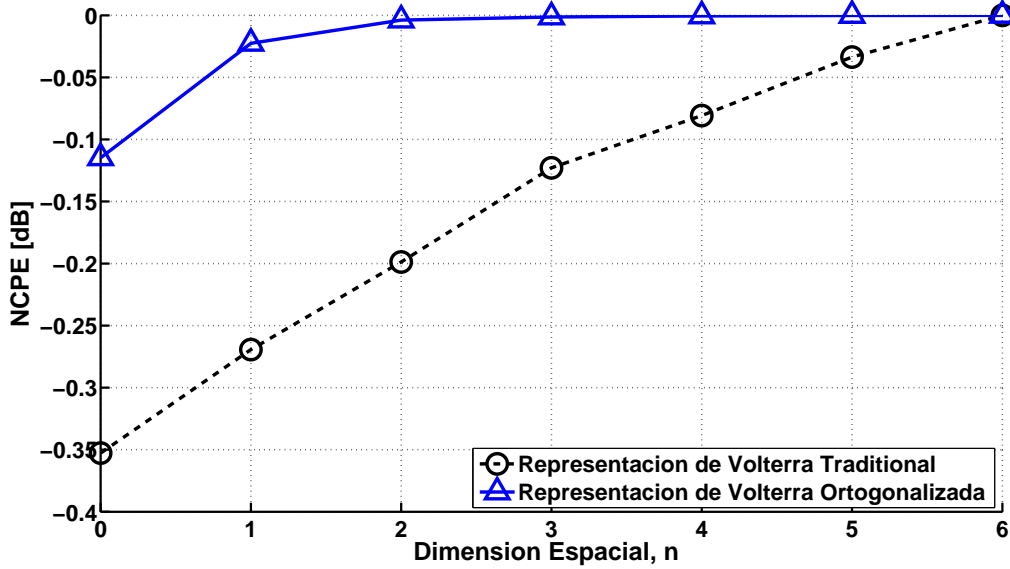


Fig. 4.6 NCPE para el canal no-lineal correspondiente a una transmisión IM/DD por fibra óptica DU con  $L = 700$  km y  $1/T = 10$  Gs/s.

la energía total). Mientras tanto, la representación tradicional por serie de Volterra requiere cinco dimensiones para capturar un nivel similar de energía. Observe que el incremento de  $\mathcal{E}_n$  de  $-0.33$  dB a  $-0.12$  dB para  $n = 0$  se debe al factor  $E\{|b_k^{(0)}|^2\} \geq 1$  en (4.18). Este factor es una medida de la correlación entre todos los kernels no-lineales  $f_m(t)$ , con  $m > 0$ , y el kernels lineal  $f_0(t)$ . Por ejemplo,  $E\{|b_k^{(0)}|^2\} = 1$  ( $N$ ) si  $f_0(t)$  y  $f_m(t)$  son respuestas ortogonales (colineales)  $\forall m$ . Entonces, del canal analizado en este ejemplo se puede concluir que:

- La mayor parte de la energía de los kernels no-lineales de la serie de Volterra tradicional está contenida en la proyección de éstos sobre el espacio de señal *lineal* expandido por  $\{h_0(t - kT)\} = \{f_0(t - kT)\}$ .
- Un modelo de señal con dos dimensiones *espaciales* captura prácticamente toda la energía de la señal.
- Dado que  $\mathcal{E}_{\mathcal{J}}^{(0)}$  es  $\sim 97.5\%$  de la energía total (ver Fig. 4.6), entonces un receptor que considere las proyecciones sobre una sola dimensión (*i.e.*, la lineal en este caso) debería ser capaz de alcanzar un buen desempeño. (Esto se verificará finalmente en la Sección 5.1).

## 4.2 Receptor MLSD para Canales No-Lineales con AWGN

El receptor MLSD elige la secuencia  $\{a_k\}$  que minimiza la métrica

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} |r(t) - s(t)|^2 dt. \quad (4.24)$$

Usando (4.13) y (4.16) en (4.24) se obtiene

$$\begin{aligned} J &\propto -2 \sum_{n=0}^{N-1} \Re \left\{ \sum_k b_k^{(n)} \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h_n^*(t - kT) dt \right\} + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} |s_n(t)|^2 dt, \\ &= -2 \sum_{n=0}^{N-1} \Re \left\{ \sum_k b_k^{(n)} \bar{r}_k^{(n)} \right\} + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} |s_n(t)|^2 dt, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde  $\Re$  significa tomar la parte real y

$$\bar{r}_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) h_n^*(t - kT) dt, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.26)$$

De (4.25) se puede notar que toda la información en la señal recibida  $r(t)$ , necesaria para estimar la secuencia  $\{a_k\}$  está contenida en las muestras a tasa de símbolo de la salida de un MFB a las respuestas ortogonales  $\{h_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ . Usando (4.1), la ec. (4.26) se puede reescribir como

$$\bar{r}_k^{(n)} = \bar{s}_k^{(n)} + \bar{z}_k^{(n)}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (4.27)$$

donde

$$\bar{s}_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) h_n^*(t - kT) dt, \quad (4.28)$$

$$\bar{z}_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} z(t) h_n^*(t - kT) dt. \quad (4.29)$$

Nótese de (4.15) que  $E \left\{ \bar{s}_l^{(n)} \left[ \bar{s}_{l-k}^{(m)} \right]^* \right\} = 0$  si  $m \neq n$ , mientras que

$$E \left\{ \bar{z}_l^{(n)} \left[ \bar{z}_{l-k}^{(m)} \right]^* \right\} = \begin{cases} N_0 \rho_k^{(n)}, & \text{si } n = m \\ 0, & \text{de otro modo,} \end{cases} \quad (4.30)$$

donde

$$\rho_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t) h_n^*(t - kT) dt. \quad (4.31)$$

Dado que se supone ruido Gaussiano, de (4.30) se desprende que las componentes de ruido en las muestras a la salida del MFB propuesto son *especialmente* independientes. Al MFB

con respuestas  $\{h_n^*(-t)\}_{n=0}^{N-1}$ , seguido por un muestreador a tasa de símbolo, se lo llama banco de filtros apareados de blanqueamiento espacial (*space-whitened matched filter - S-WMF*).

### 4.2.1 Receptor MLSD Basado en Filtros Apareados de Blanqueamiento Espacio-Temporal

Se acaba de observar que el MFB derivado de la nueva expansión ortogonal del canal no-lineal da lugar a muestras de ruido independientes a nivel *espacial*. Para continuar en el camino hacia la simplificación del detector de secuencia, se derivará un banco de filtros con la capacidad de blanquear tanto a nivel temporal como espacial.

Denótese con  $\phi_n(t)$  a la respuesta al impulso del filtro cuya FT está dada por

$$\Phi_n(\omega) = \frac{H_n(\omega)}{\gamma^{(n)} M_n(e^{j\omega T})}, \quad n = 0, \dots, N-1, \quad (4.32)$$

donde  $H_n(\omega)$  es la FT de  $h_n(t)$ ,  $\gamma^{(n)}$  y  $M_n(z)$  son definidas por la factorización espectral

$$S_n(z) = (\gamma^{(n)})^2 M_n(z) M_n^*(1/z^*), \quad (4.33)$$

con  $S_n(z)$  la ZT de la secuencia  $\rho_k^{(n)}$  en la ec. (4.31). El conjunto  $\{\phi_n(t - kT)\}$  forma una base ortonormal para el espacio de señal expandido por  $\{h_n(t - kT)\}$ .  $M_n(z)$  es elegida para que sea de mínima fase y mónica. Se define también a  $\tilde{r}_n(t)$  como la proyección de  $r(t)$  sobre el espacio de señal expandido por  $\{h_n(t - kT)\}$ , esto es,

$$\tilde{r}_n(t) = \sum_k \tilde{r}_k^{(n)} \phi_n(t - kT), \quad (4.34)$$

donde  $\tilde{r}_k^{(n)} = \int_{-\infty}^{\infty} r(t) \phi_n^*(t - kT) dt$ . A partir de (4.15), y siguiendo el procedimiento aplicado en [6, Sección 10.2.4], la métrica en (4.24) se puede expresar como

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \tilde{\mathbf{r}}(t) - \sum_k \mathbf{H}(t - kT) \mathbf{b}_k \right\|^2 dt, \quad (4.35)$$

donde  $\mathbf{H}(t)$  es la matriz diagonal  $N \times N$  dada por

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} h_0(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.36)$$

mientras que

$$\mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} b_k^{(0)} & b_k^{(1)} & \cdots & b_k^{(N-1)} \end{bmatrix}^T, \quad (4.37)$$

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_0(t) & \tilde{r}_1(t) & \cdots & \tilde{r}_{N-1}(t) \end{bmatrix}^T, \quad (4.38)$$

con  $b_k^{(n)}$  y  $\tilde{r}_n(t)$  dadas por (4.14) y (4.34), respectivamente.

Por otro lado, a partir de (4.32) se puede mostrar que

$$\sum_k \mathbf{H}(t - kT) \mathbf{b}_k = \sum_k \Phi(t - kT) [\mathbf{M}_k \oplus \mathbf{b}_k], \quad (4.39)$$

donde  $\Phi(t)$  y  $\mathbf{M}_k$  son matrices diagonales de  $N \times N$  dadas por

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi_0(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \phi_1(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \phi_{N-1}(t) \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

$$\mathbf{M}_k = \begin{pmatrix} \gamma^{(0)} m_k^{(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \gamma^{(1)} m_k^{(1)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \gamma^{(N-1)} m_k^{(N-1)} \end{pmatrix}, \quad (4.41)$$

con  $m_k^{(n)}$  como la transformada de Fourier inversa (*inverse Fourier transform - IFT*) de  $M_n(e^{j\omega T})$ . Se observa de (4.34) que (4.38) se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \sum_k \Phi(t - kT) \tilde{\mathbf{r}}_k, \quad (4.42)$$

donde  $\tilde{\mathbf{r}}_k = [\tilde{r}_k^{(0)} \dots \tilde{r}_k^{(N-1)}]^T$  (ver (4.34)). A partir de (4.35), (4.39) y (4.42) se puede mostrar que el MLSD se reduce a minimizar

$$J = \|\tilde{\mathbf{r}}_k - \mathbf{M}_k \oplus \mathbf{b}_k\|^2, \quad (4.43)$$

donde

$$\mathbf{M}_k \oplus \mathbf{b}_k = \mathbf{Q}_k \oplus \mathbf{A}_k, \quad (4.44)$$

con

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} a_k & a_k a_{k-1} & \cdots & a_k a_{k-N+1} \end{bmatrix}^T, \quad (4.45)$$

y

$$\mathbf{Q}_k = \begin{pmatrix} \gamma^{(0)} m_k^{(0)} & \gamma^{(0)} m_k^{(0)} \oplus \lambda_k^{(0,1)} & \dots & \gamma^{(0)} m_k^{(0)} \oplus \lambda_k^{(0,N-1)} \\ 0 & \gamma^{(1)} m_k^{(1)} & \dots & \gamma^{(1)} m_k^{(1)} \oplus \lambda_k^{(1,N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \gamma^{(N-1)} m_k^{(N-1)} \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Denótese por  $\tilde{\mathbf{z}}_k$  al vector  $N$ -dimensional con las componentes de ruido de las muestras a tasa de símbolo  $\tilde{\mathbf{r}}_k$ . A partir de (4.15) y (4.32), la PSD de  $\tilde{\mathbf{z}}_k$  resulta  $\mathbf{S}_{\tilde{\mathbf{z}}} = \sigma_z^2 \mathbf{I}$ , donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad (de dimensión apropiada). Entonces, la minimización de (4.43) se puede implementar fácilmente usando un VD con métricas de rama Euclidianas *multidimensionales*. La Fig. 4.7 muestra un diagrama en bloques del receptor ST-WMF-MLSD con  $P$  dimensiones (*i.e.*,  $P$  es el número de filtros en el banco). En el caso que  $P = N$ , todas las dimensiones espaciales del canal no-lineal son usadas por el receptor.

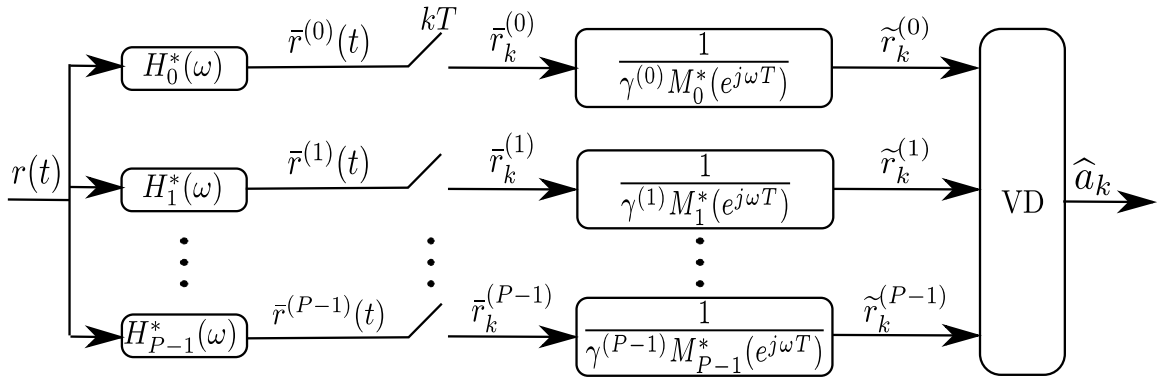


Fig. 4.7 Diagrama en bloques del nuevo receptor MLSD  $P$ -dimensional.

### 4.3 Conclusiones

En este capítulo, se desarrolló una arquitectura original para la recepción MLSD en canales no-lineales, *i.e.*, el ST-WMF-MLSD. Este receptor está basado en una novedosa representación ortogonal del canal no-lineal. Una de las ventajas logradas con esta representación es que se asegura la ortogonalidad entre las distintas dimensiones espaciales del modelo, incluso para cualquier desfase de tiempo  $kT$ . Por otro lado, también permite concentrar la energía del modelo del canal en unas pocas respuestas de la nueva base ortogonal. La ortogonalidad espacial es explotada para conseguir un blanqueamiento temporal con WFs unidimensionales, que además comprimen temporalmente el modelo. De este modo, el ST-WMF propuesto, no sólo asegura el blanqueamiento de la señal a nivel temporal y espacial, sino que también comprime el modelo del canal no-lineal en ambas dimensiones.

En este sentido, el ST-WMF-MLSD propuesto representa una generalización del receptor MLSD de Forney para canales lineales porque blanquea y comprime el modelo del canal. De esta semejanza, se infiere que el ST-WMF-MLSD permitirá una reducción de complejidad eficiente y sistemática con bajo impacto en la performance. Además, la ortogonalidad extendida y la compresión espacial aseguran que siempre se pueda encontrar el ST-WMF, incluso cuando el canal no-lineal pudiera tener kernels que en su versión original (*i.e.*, no-ortogonalizada) estén altamente correlacionados. Un canal no-lineal con kernels muy correlacionados ocasionaría un mal condicionamiento, o incluso una indeterminación, del MFB de receptores como el propuesto en [38], pero no así para el ST-WMF-MLSD.

En el próximo capítulo se analiza el desempeño del nuevo receptor MLSD sobre canales IM/DD de fibra óptica, y dicho desempeño se compara con el de otros receptores MLSD existentes. Los resultados confirman que, tal como se ha inferido en este capítulo, cuando se implementan los receptores MLSD con complejidad reducida los desempeños alcanzados con el nuevo receptor son muy superiores a los que se alcanzan con receptores MLSD existentes. La confirmación de éstos resultados en el Capítulo 5 posiciona al nuevo MLSD como un receptor con gran potencial para las aplicaciones comerciales de alto desempeño en canales no-lineales altamente dispersivos.



## ESTUDIO DE DESEMPEÑO DEL NUEVO RECEPTOR MLSD

---

En el Capítulo 4 se ha propuesto un nuevo receptor MLSD y se ha demostrado que permite un completo blanqueamiento del modelo del canal no-lineal, así también como la compresión espacio-temporal del mismo. En este capítulo se hace un estudio de desempeño de dicha arquitectura por medio de estimaciones numéricas en enlaces OOK-IM/DD de fibra óptica. El ST-WMF-MLSD se compara con arquitecturas MLSD existentes para canales no-lineales como el OS-MLSD y el MFB-MLSD (ver Sección 3.3.2). Se hace incapié en la comparación con el OS-MLSD porque esta arquitectura es ampliamente utilizada en transmisiones por fibra óptica. Además, se comparan los desempeños en un tipo de enlace sensible a la distorsión no-lineal como son los enlaces DU con OOK-IM/DD (ver Sección 2.3.3). Los resultados que aquí se presentan muestran que el ST-WMF-MLSD tiene un excelente desempeño aún cuando se lo implementa con complejidad reducida (algo esperable por sus propiedades de no-correlación y compresión), mientras que las otras arquitecturas sufren de una mayor degradación bajo condiciones similares. Este buen desempeño del ST-WMF-MLSD lo convierte en una alternativa interesante para aplicaciones donde hay una fuerte distorsión no-lineal, y donde el MLSD ofrece una sustancial mejora en desempeño frente a otras alternativas sub-óptimas.

### 5.1 Desempeño en Condiciones Ideales

En esta sección se analiza el ST-WMF-MLSD en transmisiones OOK-IM/DD sobre enlaces DU. Se enfatizan dos aspectos centrales del ST-WMF-MLSD: su desempeño (comparado a arquitecturas utilizadas actualmente como el OS-MLSD); y su habilidad para reducir complejidad (*e.g.*, número de estados del VD). La reducción de complejidad es posible gracias a: (i) La propiedad de fase mínima de la respuesta equivalente que proporciona el ST-WMF a la entrada del VD; (ii) La condición (4.19) que permite obtener un modelo con com-

presión espacial (ver Sección 4.1.2). Con (ii) se puede reducir a  $P < N$  la dimensión del ST-WMF, usando las  $P$  dimensiones *más significantes* del canal no-lineal (*i.e.*, aquellas que explican una mayor energía del canal). Mientras tanto, (i) también permite reducir estados sin generar una gran degradación en desempeño.

En esta sección se analiza el sistema OOK-NRZ mostrado en la Fig. 5.1. La SMF introduce CD y PMD. La potencia transmitida es suficientemente baja como para asegurar la operación de la fibra en régimen lineal. La potencia del ruido a la salida del enlace se ajusta para lograr la OSNR deseada<sup>1</sup>. El ruido ASE se modela como un proceso AWGN en el dominio óptico. En el receptor, la señal se filtra con un filtro óptico y luego se la convierte a una señal eléctrica por un diodo PIN o de avalancha. La señal resultante se filtra con un filtro eléctrico. La componente de ruido a la salida del filtro eléctrico es no-Gaussiana y señal-dependiente [8]. Entonces, se pasa esta corriente por una transformación no-lineal sin memoria, ya que se ha visto que luego de una transformación del tipo raíz cuadrada el ruido bien puede considerarse Gaussiano y señal-independiente [25, 80]. Aun más, se ha visto también que las no-linealidades también se ven reducidas al usar una transformación del tipo raíz-cuadrada [81], mejorando así la compresión espacial (*i.e.*, una gran parte de la energía se concentra en el kernel lineal). Se utiliza el método “split-step Fourier” [32] para resolver la ecuación no-lineal de Schrödinger (2.34) y computar la señal óptica luego de la propagación a través de la SMF. Los kernels lineal y no-lineales de Volterra se estiman de la señal eléctrica a la salida de la transformación Gaussianizadora. Luego, se computan las respuestas  $h_n(kT_s)$  y  $\lambda_k^{(n,m)}$  de acuerdo al criterio en (4.17), mientras que la matriz  $\mathbf{M}_k$  de la respuesta equivalente a tasa de símbolo puede ser obtenida a partir de (4.41). Dado que el ruido a la salida de la transformación raíz cuadrada es aproximadamente Gaussiano y señal-independiente [28], entonces la teoría propuesta en [94] es utilizada para evaluar la probabilidad de error de bit (ver también Apéndice A.1). Todos los kernels del canal no-lineal ( $N = 7$ ) son utilizados para computar la probabilidad de error, independientemente de la dimensión  $P$  utilizada en el receptor. La tasa de transmisión de símbolos es  $1/T = 10$  Gs/s y el pulso transmitido es *unchirped* de envolvente Gaussiana  $e^{-t^2/2T_0^2}$  con  $T_0 = 36$  ps. Para todos los enlaces la potencia transmitida es de  $-6$  dBm y el rango de extinción es 10 dB. En el receptor se usa un filtro óptico Lorentziano y un filtro eléctrico de Butterworth de cuarto orden con anchos de banda de 15 y 10 GHz, respectivamente. La dispersión de la fibra es de  $D = 17$  ps/(nm-km) y el coeficiente no-lineal es  $\gamma = 1.3$  W<sup>-1</sup>/km.

<sup>1</sup>Para una  $BER = 10^{-3}$ , un sistema OOK-IM/DD a 10.7 Gb/s requiere una OSNR de aproximadamente 9.5 dB [36].

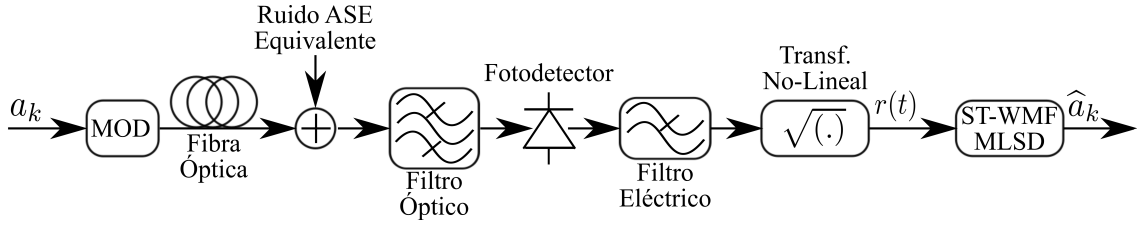


Fig. 5.1 Sistema OOK-IM/DD de fibra óptica con un receptor ST-WMF-MLSD.

### 5.1.1 Desempeño en Canales OOK-IM/DD Dominados por Dispersión Cromática

Para evaluar el desempeño del ST-WMF-MLSD se elige el enlace DU con OOK-IM/DD de  $L = 700$  km analizado en las Secciones 2.3.4 y 4.1.3. En la Sección 4.1.3, se predijo que para este canal el ST-WMF-MLSD era capaz de representar con gran exactitud la energía del mismo aún con un sustancial truncamiento espacial. Precisamente, se estimó que se podía alcanzar un desempeño casi óptimo aún usando  $P = 2 \ll N$ .

La respuesta equivalente  $\mathbf{Q}[k]$  vista por el VD en el caso del ST-WMF-MLSD es la matriz triangular superior de dimensión  $N \times N$  dada por (4.46). Sea  $\mathbf{Q}_{i,j}[k]$  el elemento  $i, j$  de la matriz  $\mathbf{Q}[k]$ , se define como  $\mathbf{Q}^{(i)}[k] = [\mathbf{Q}_{i,1}[k], \mathbf{Q}_{i,2}[k], \dots, \mathbf{Q}_{i,N}[k]]$  la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{Q}[k]$ , con  $i = 1, 2, \dots, N$ , *e.g.*,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(1)}[k] &= [\mathbf{Q}_{1,1}[k], \mathbf{Q}_{1,2}[k], \dots, \mathbf{Q}_{1,N}[k]] \\ &= \left[ \gamma^{(0)} m_k^{(0)}, \gamma^{(0)} m_k^{(0)} \oplus \lambda_k^{(0,1)}, \dots, \gamma^{(0)} m_k^{(0)} \oplus \lambda_k^{(0,N-1)} \right], \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{(2)}[k] &= [\mathbf{Q}_{2,1}[k], \mathbf{Q}_{2,2}[k], \dots, \mathbf{Q}_{2,N}[k]] \\ &= \left[ 0, \gamma^{(1)} m_k^{(1)}, \dots, \gamma^{(1)} m_k^{(1)} \oplus \lambda_k^{(1,N-1)} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

En la Fig. 5.2 se presentan las respuestas equivalentes (en valor absoluto) correspondientes a la primera ( $\mathbf{Q}^{(1)}[k]$ ) y segunda fila ( $\mathbf{Q}^{(2)}[k]$ ) de  $\mathbf{Q}[k]$ , respectivamente. Como era de esperarse, las componentes en la  $n$ -ésima fila (*i.e.*,  $\mathbf{Q}^{(n)}[k]$ ) son despreciables para  $n > 2$ , y por eso se omiten en la Fig. 5.2. Además, se puede observar en la Fig. 5.2-B que la información en  $\mathbf{Q}^{(2)}[k]$  también parece ser despreciable en comparación con  $\mathbf{Q}^{(1)}[k]$ .

A modo de referencia, se presentan en las Figs. 5.3 y 5.4 las respuestas equivalentes correspondientes a los receptores OS-MLSD y MFB-MLSD, respectivamente. En el caso del OS-MLSD las respuestas equivalentes corresponden a las versiones muestreadas (a 2 muestras/símbolo) de los kernels de Volterra  $f_n(t)$ . En el caso del MFB-MLSD las respuestas equivalentes corresponden a una matriz  $\mathbf{Q}[k]$ , donde la componente  $(i, j)$  corresponde a

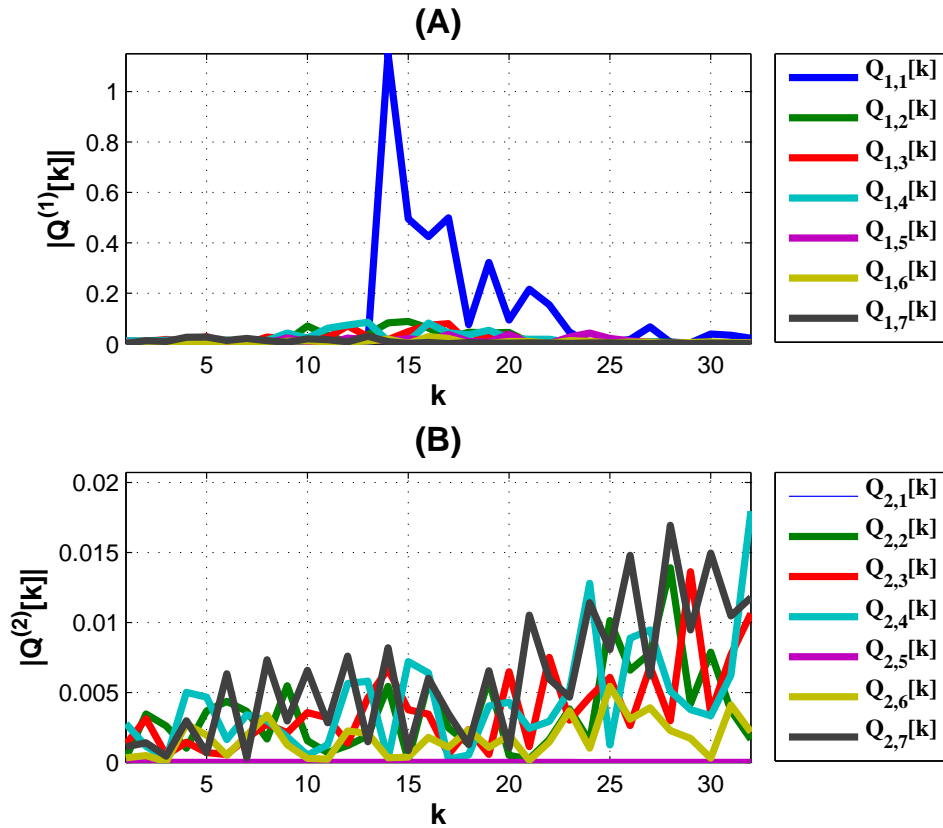


Fig. 5.2 Canal discreto equivalente para el ST-WMF-MLSD para un enlace de 700 km: (A) Respuesta  $\mathbf{Q}^{(1)}[k]$  correspondiente a la primera fila de  $\mathbf{Q}[k]$ ; (B) Respuesta  $\mathbf{Q}^{(2)}[k]$  correspondiente a la segunda fila de  $\mathbf{Q}[k]$ .

la respuesta  $\rho_{j,i}[k]$  dada por (3.44).

Se puede observar de la comparación entre las Figs. 5.2, 5.3 y 5.4 que con el nuevo receptor MLSD no sólo se logra comprimir espacialmente el modelo, sino que se aprecia también una compresión temporal de la energía. Esto se debe a la propiedad de fase mínima de las respuestas en  $\mathbf{M}_k$  (ver Sección 4.2.1). Nótese que si bien esta propiedad se ve afectada por la convolución con las respuestas  $\lambda_k^{(i,j)}$  para la obtención de  $\mathbf{Q}[k]$ , el efecto de éstas últimas sobre las componentes principales es despreciable. Esto sugiere que el desempeño del ST-WMF-MLSD puede superar a las otras alternativas cuando se use truncamiento de los modelos para reducir complejidad.

En la Fig. 5.5 se observa el desempeño de un ST-WMF-MLSD (con  $P = 2$ ) y un OS-MLSD operando a 16 muestras por símbolo sin reducción de estados<sup>1</sup>. Se puede ob-

<sup>1</sup>Se omite en esta figura el desempeño del MFB-MLSD con  $P = N$  por coincidir con el desempeño del OS-MLSD.

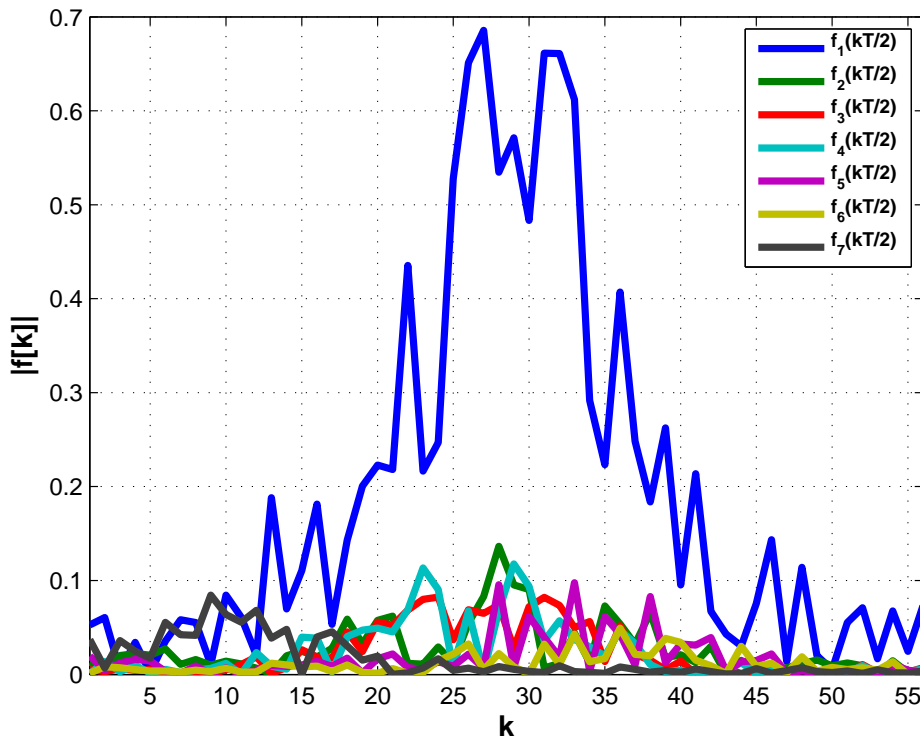


Fig. 5.3 Canal discreto equivalente para el OS-MLSD para un enlace de 700 km.

servar cómo los desempeños son virtualmente idénticos y que coinciden con los resultados ya conocidos bajo estas condiciones (ver [4, 18] entre otros). La pequeña degradación que se observa con el ST-WMF-MLSD se debe a que se usan sólo dos dimensiones en el receptor cuando idealmente el canal requiere  $N = 7$ . Sin embargo, como se pudo predecir en la Sección 4.1.3 y comprobar en los resultados de la Fig. 5.2, el desempeño es casi óptimo aún cuando se use  $P = 2 \ll N$ . De hecho, el desempeño del sistema sigue siendo bueno aún usando  $P = 1$  (*i.e.*, un sólo filtro en el banco) y en la Fig. 5.6 se muestra la penalidad en OSNR respecto a B2B para obtener una BER típica de  $10^{-3}$  en función de la cantidad de estados usados en el VD en un enlace de  $L = 700$  km. Este desempeño se compara con un OS-MLSD de 2 muestras/bit, donde la fase de muestreo se elige de modo de minimizar la BER, y un MFB-MLSD con dimensión espacial  $P = 1$ . En todos los casos la reducción de estados se obtiene por truncamiento de la respuesta del canal para mínima reducción de energía.

A partir de la Fig. 5.6 se puede verificar que el número de estados del VD para una penalidad de 4.75 dB se puede reducir de 2048 a 256 usando un ST-WMF-MLSD con  $P = 1$  en vez de un OS-MLSD con 2 muestras/bit. Nótese que este desempeño se obtiene tomando

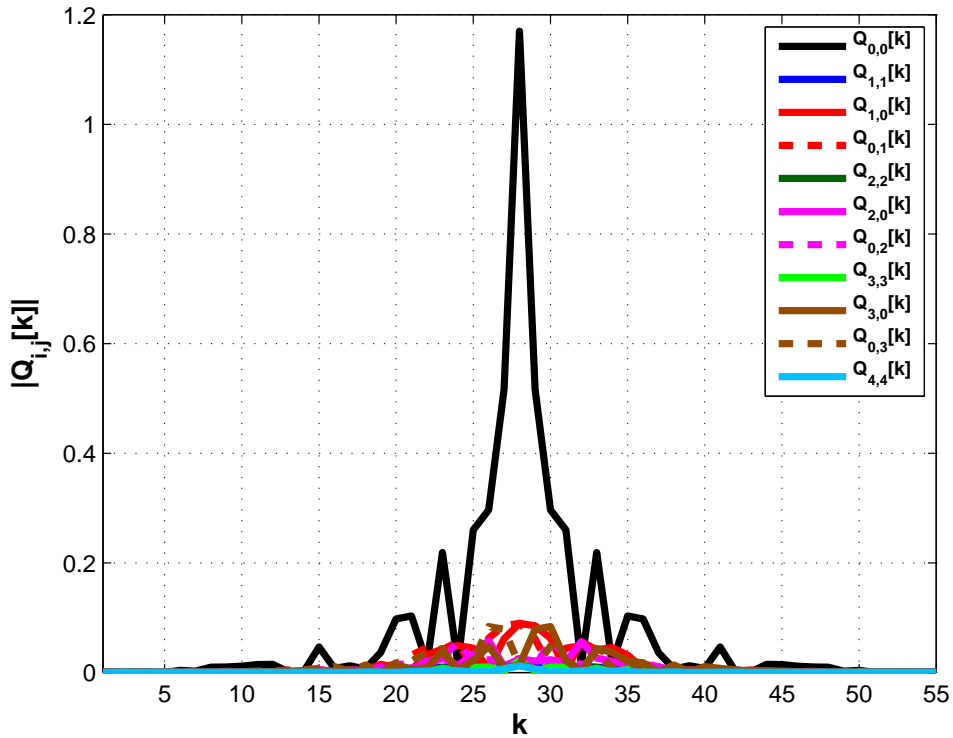


Fig. 5.4 Canal discreto equivalente para el MFB-MLSD para un enlace de 700 km.

una sola muestra por símbolo. Por otra parte, el MFB-MLSD resulta ser muy sensible al truncamiento espacial y con  $P = 1$  presenta una penalidad de  $\sim 6$  dB, incluso cuando no se utiliza reducción de estados, algo inaceptable para este tipo de aplicaciones. Posiblemente éste desempeño con  $P < N$  sea el motivo por el cuál el OS-MLSD se ha adoptado universalmente en comunicaciones ópticas no-lineales en vez de alternativas MFB-MLSD. Incluso más, aún implementando el ST-WMF-MLSD con sólo 256 estados se obtiene una mejora de desempeño de  $\sim 1$  dB respecto al MFB-MLSD.

### 5.1.2 Desempeño en Canales OOK-IM/DD con Dispersión por Modo de Polarización

En esta sección se investiga el desempeño del ST-WMF-MLSD en presencia de CD y PMD de primer orden (*i.e.*, DGD). La Fig. 5.7 presenta la penalidad en OSNR en función del número de estados del VD para un enlace de 700 km y para dos valores de DGD: 25 y 50 ps. En este caso, se comparan los desempeños de un OS-MLSD con 2 muestras/bit y un ST-WMF-MLSD con  $P = 2$ . Como es de esperarse, ambos receptores tienden al mismo

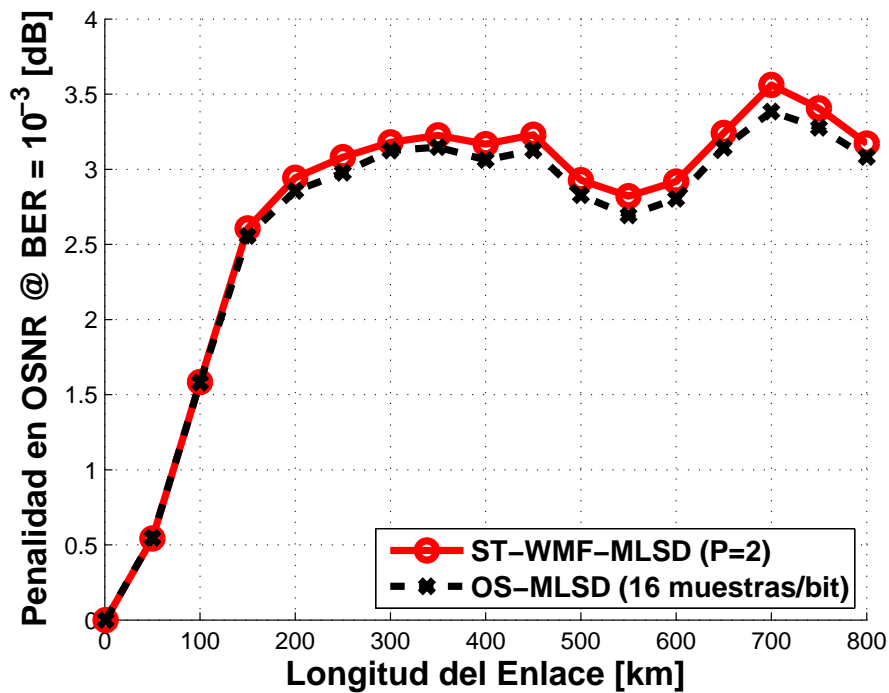


Fig. 5.5 Pérdida de desempeño de un ST-WMF-MLSD con  $P = 2$  y un OS-MLSD en función de la longitud del enlace.

desempeño (óptimo) a medida que el número de estados del VD se incrementa. También se nota que la ganancia obtenida con el ST-WMF-MLSD se reduce a medida que se incrementa la DGD<sup>1</sup>. De todas formas, se observa de la Fig. 5.7 que el número de estado del VD necesarios para alcanzar una penalidad de  $\sim 5$  dB se puede reducir 8 y 4 veces con el ST-WMF-MLSD operando a 25 y 50 ps de DGD, respectivamente. Estos resultados confirman que el ST-WMF-MLSD sigue siendo una excelente alternativa para reducir complejidad en transmisiones en canales de fibra óptica con IM/DD y en presencia de PMD.

## 5.2 Desempeño en Condiciones No Ideales

En la Sección 5.1 se ha visto que el ST-WMF-MLSD es una interesante alternativa para reducir complejidad en canales no-lineales altamente dispersivos. En esta sección se evalúa la robustez del ST-WMF-MLSD bajo condiciones reales, como ser, el conocimiento incierto de la respuesta del canal.

<sup>1</sup>Para explicar este comportamiento, considérese un canal con DGD= 100 ps y sin CD. Dado que en este caso  $DGD \sim T$ , el sistema IM/DD se comporta aproximadamente como un canal duobinario[6], y entonces la compresión temporal obtenida con el ST-WMF-MLSD será despreciable.

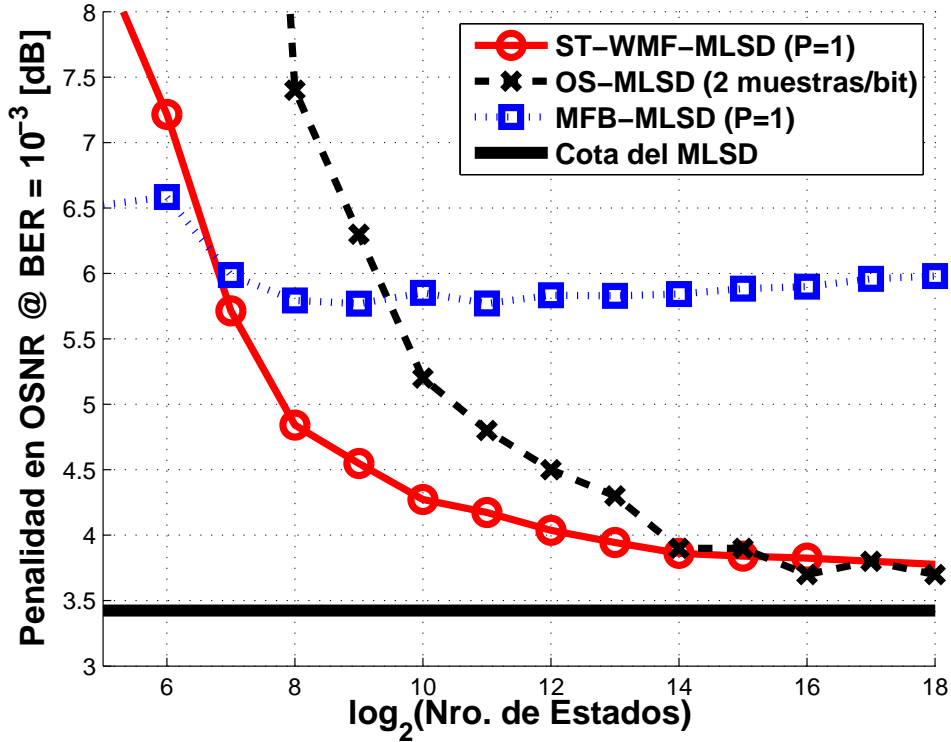


Fig. 5.6 Penalidad de OSNR respecto a B2B para un  $BER = 10^{-3}$  vs número de estados del VD para un enlace de  $L = 700$  km con  $DGD = 0$  ps.

### 5.2.1 Efecto del Desconocimiento del Canal

El estudio de esta sección mostrará que en enlaces DU con OOK-IM/DD la degradación en desempeño del ST-WMF-MLSD con  $P = 1$ , causada por un conocimiento imperfecto del canal es baja ( $\sim 0.2$  dB), y similar a la de un OS-MLSD.

La estimación de los kernels sobremuestreados es necesaria para implementar los receptores. Sea  $R = T/T_s$  el factor de sobremuestreo. Entonces, adoptando una representación por medio de un filtro de fase múltiple (ver Fig. 5.8) se puede expresar la secuencia de muestras recibidas como

$$r_n^{(i)} = \sum_k a_k f_0^{(i)}[n-k] + \sum_k \sum_{m=1}^{N-1} a_k a_{k-m} f_m^{(i)}[n-k] + z_n^{(i)}, \quad (5.3)$$

donde  $r_n^{(i)} = r(nT + iT_s)$ ,  $z_n^{(i)} = z(nT + iT_s)$ , y  $f_m^{(i)}[n] = f_m(nT + iT_s)$  con  $i = 0, \dots, R-1$ . Nótese que hay  $R$  secuencias a tasa de símbolo  $r_n^{(i)}$  diferentes.



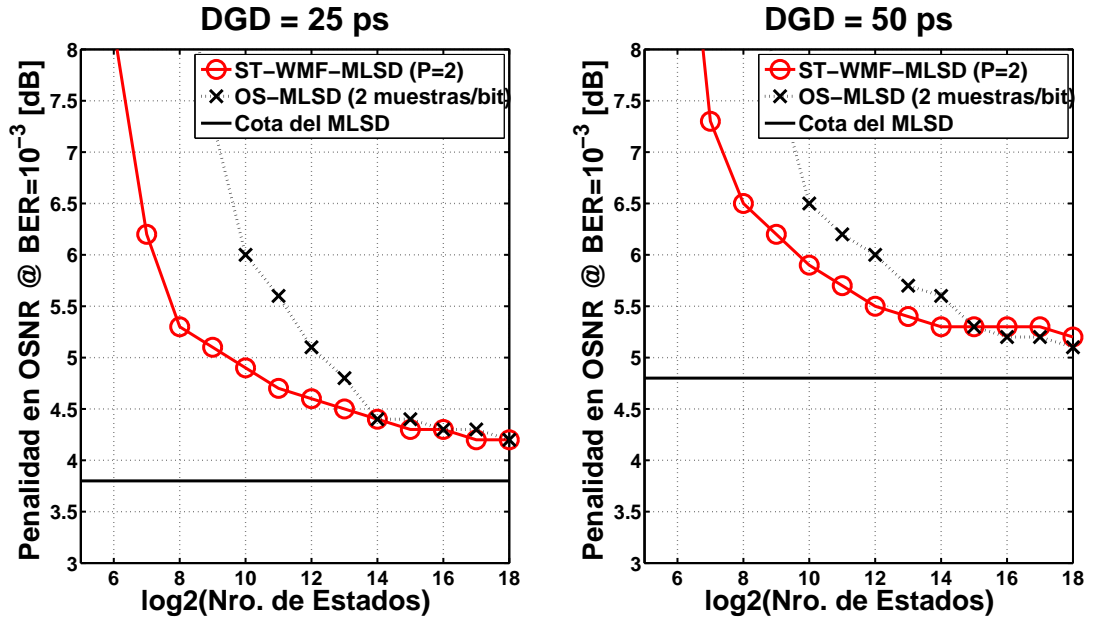


Fig. 5.7 Penalidad en OSNR respecto a B2B para una  $BER = 10^{-3}$  versus número de estados del VD en un enlace de  $L = 700$  km. DGD = 25 ps (izquierda) y 50 ps (derecha).

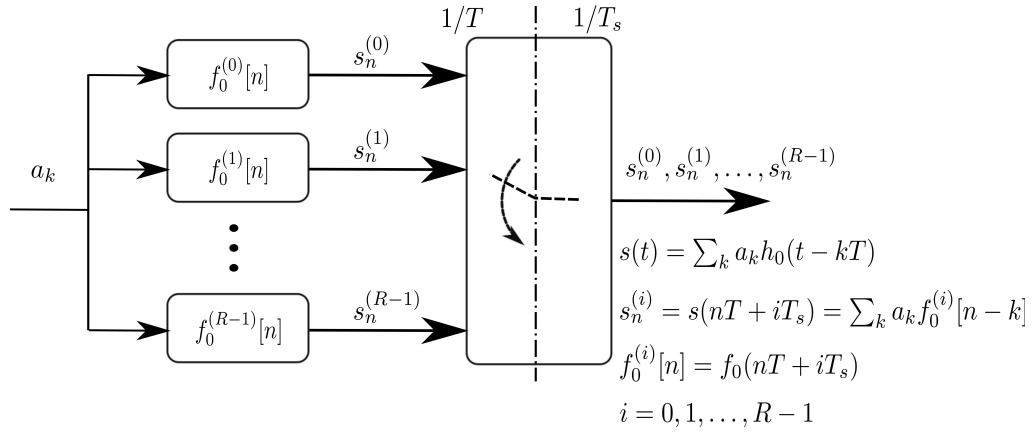


Fig. 5.8 Ejemplo de representación de un canal lineal sobremuestreado, con  $R = T/T_s$ , por medio de un filtro de fase múltiple.

La ec. (5.3) se puede reescribir como

$$r_n^{(i)} = \sum_k a_{n-k} f_0^{(i)}[k] + \sum_k \sum_{m=1}^{N-1} a_{n-k} a_{n-k-m} f_m^{(i)}[k] + z_n^{(i)}. \quad (5.4)$$

Dado que se suponen los símbolos  $a_k$  como RVs reales *i.i.d.* de media nula y con

$\sigma_a^2 = E \{|a_k|^2\}$ , se verifica que

$$\begin{aligned} f_0^{(i)}[k] &= \frac{1}{\sigma_a^2} E \{r_n^{(i)} a_{n-k}\}, \\ f_m^{(i)}[k] &= \frac{1}{\sigma_a^4} E \{r_n^{(i)} a_{n-k} a_{n-k-m}\}, \end{aligned} \quad i = 0, \dots, R-1. \quad (5.5)$$

A partir de (5.5), se ve que un muy simple estimador de los kernels de Volterra se puede implementar usando un filtro promediador como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{f}_0^{(i)}[k] &= \frac{1}{\sigma_a^2 L_A} \sum_{n=n_0}^{n_0+L_A-1} r_n^{(i)} \hat{a}_{n-k}, \\ \hat{f}_m^{(i)}[k] &= \frac{1}{\sigma_a^4 L_A} \sum_{n=n_0}^{n_0+L_A-1} r_n^{(i)} \hat{a}_{n-k} \hat{a}_{n-k-m}, \end{aligned} \quad (5.6)$$

donde  $L_A$  es la longitud del filtro promediador,  $n_0$  es un índice de tiempo arbitrario y  $\hat{a}_k$  es el símbolo detectado<sup>1</sup>. La precisión del estimador de canal dado por (5.6) depende de la verosimilitud de las decisiones  $\hat{a}_k$ , la longitud  $L_A$  del filtro promediador y la potencia de ruido presente en el canal. Considerando que se dispone de decisiones posteriores a la etapa de decodificación de errores, entonces el efecto de la imprecisión de las decisiones puede despreciarse (*i.e.*,  $\hat{a}_k = a_k$ ). De todas formas, hay que destacar que esta suposición todavía es válida si sólo se dispone de decisiones previas a la corrección de errores dado las bajas tasas de error experimentadas en estos enlaces (*e.g.*,  $\sim 10^{-3}$ ). De lo anterior, resulta que la bondad de la estimación obtenida con (5.6) va a depender principalmente de la longitud  $L_A$  del filtro y de la potencia de ruido en el canal de comunicación.

Ahora bien, la precisión de (5.6) mejora a medida que el valor de  $L_A$  aumenta. Aunque por otra parte, el máximo valor para  $L_A$  estará impuesto por la rapidez de las variaciones temporales del enlace óptico. Como resultado de su dependencia con estrés mecánico y vibraciones (ver Sección 2.3.2), así también como cambios aleatorios en el estado de polarización del láser, la PMD es no estacionaria. Fluctuaciones en el orden de los microsegundos han sido consideradas en algunos trabajos (*e.g.*, [96]). Por esto, el tiempo de respuesta del estimador de canal en presencia de PMD debe ser menor a 1 ms (aunque en la práctica se requieren respuestas menores a 100  $\mu$ s [28]). Esto impone, *e.g.*, que el ancho de banda del filtro promediador ( $\sim 1/(4L_A T)$ ) deba ser  $\gtrsim 20$  kHz para poder seguir eficientemente las

<sup>1</sup>De manera de mejorar la capacidad de seguimiento (*tracking*) puede ser preferible una implementación más eficiente usando los conocidos algoritmos LMS o RLS [95]. Sin embargo, el objetivo es entender el impacto que tiene el desconocimiento del canal sobre el desempeño del ST-WMF-MLSD. Por eso aspectos prácticos más particulares de la estructura del receptor (*e.g.*, buffers, número de coeficientes del front-end, efectos de aritmética con precisión finita, *etc.*) no son analizados.

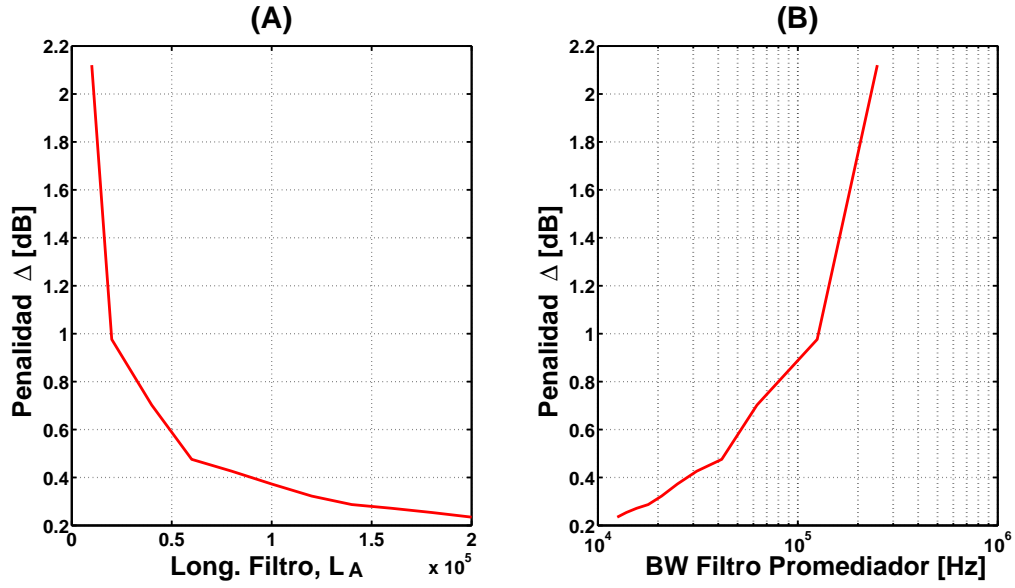


Fig. 5.9 Penalidad a causa de una estimación imperfecta del canal versus la longitud (A) y el ancho de banda (B) del filtro promediador.

variaciones del canal.

La señal recibida *vista* por un receptor OS-MLSD en presencia de un canal conocido en forma imperfecta se puede expresar como

$$\begin{aligned} \tilde{r}_n^{(i)} &= \sum_k a_{n-k} \left( f_0^{(i)}[k] + \sum_{m=1}^{N-1} a_{n-k-m} f_m^{(i)}[k] \right) + z_n^{(i)} + \hat{z}_n^{(i)} \\ &= s_n^{(i)} + z_n^{(i)} + \hat{z}_n^{(i)}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $s_n^{(i)} = s(nT + iT_s)$ ,  $\hat{z}_n^{(i)} = \hat{s}(nT + iT_s) - s(nT + iT_s)$  es la componente de *error de estimación* y  $\hat{s}(nT + iT_s)$  es la señal sintetizada usando los kernels estimados.

La Fig. 5.9-A muestra la penalidad originada por estimación imperfecta del canal, en función de la longitud  $L_A$  del filtro. Esta penalidad en la Fig. 5.9 se obtiene en forma aproximada por medio de simulaciones. Se considera un canal con  $1/T = 10$  GHz,  $R = 16$  y  $L = 700$  km, tal como el considerado en la Sección 5.1.1. Para obtener la Fig. 5.9 se estimó en forma aproximada la penalidad de la siguiente manera:

$$\Delta = \frac{\sigma_z^2 + \sigma_{\hat{z}}^2}{\sigma_s^2}, \quad (5.8)$$

donde  $\sigma_z^2$  es la potencia de ruido requerida en el canal para obtener una  $BER = 10^{-3}$  usando

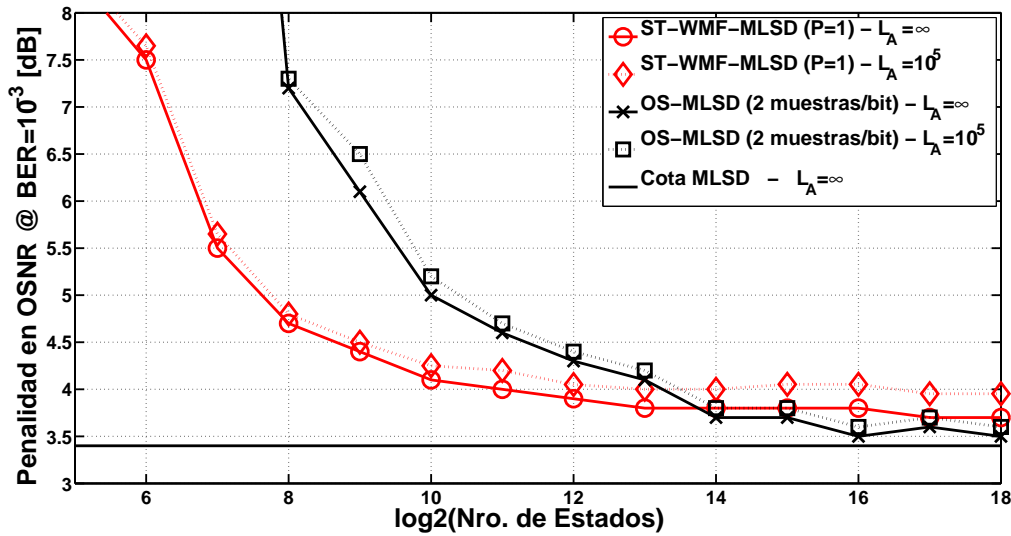


Fig. 5.10 Penalidad en OSNR a una  $BER = 10^{-3}$  versus número de estados del VD en un enlace de 700 km.

un OS-MLSD sin restricciones de complejidad, y  $\sigma_z^2$  por su parte corresponde a la varianza de la componente de error<sup>1</sup>  $\hat{z}_n$  originada por la estimación imperfecta del canal. En una primera aproximación se asume  $\hat{z}_n$  como una proceso Gaussiano de media cero, lo cuál es de esperarse que resulte en una sobreestimación de la penalidad. Nótese que de esta primera aproximación se obtiene una penalidad de  $\approx 0.4$  dB con  $L_A = 10^5$  (ver Fig. 5.9-A). Este valor de  $L_A$  representa un BW de  $\sim 1/(4L_A T) = 25$  kHz (ver Fig. 5.9-B). Como se ha usado un modelo poco ajustado para la estimación de penalidad en la Fig. 5.9, es de esperarse que la penalidad real que cause una estimación imperfecta de canal con  $L_A = 10^5$  sea  $\lesssim \Delta \approx 0.4$  dB para un OS-MLSD.

En la Fig. 5.10 se presenta la penalidad, para una tasa de error de  $10^{-3}$ , en un enlace de 700 km, en función del número de estados del VD. A diferencia de los resultados de la Fig. 5.9, para este caso se ha usado un modelo exacto, tanto para el canal como para la ISI residual en el receptor causada por una estimación imperfecta. Se presentan resultados con conocimiento perfecto del canal (denotado con  $L_A = \infty$ ) y con una estimación imperfecta del canal. Para el caso con estimación imperfecta de canal los kernels de Volterra sobremuestreados  $\{\hat{f}_n(kT_s)\}_{n=0}^{N-1}$  para un enlace de 700 km se estimaron con el filtro promediador de  $L_A = 10^5$ . El nivel de ruido del canal usado durante la estimación fue el requerido para alcanzar una  $BER = 10^{-3}$  con una penalidad de  $\sim 3.4$  dB respecto a B2B (*i.e.*, la penali-

<sup>1</sup>Se presenta la penalidad media obtenida tras 20 corridas del estimador con diferentes semillas del generador de números aleatorios.

dad mínima alcanzable con un MLSD sin restricción de complejidad). Luego estos kernels fueron usados para estimar el desempeño del OS-MLSD y del ST-WMF-MLSD en presencia de un canal con desajuste aplicando la teoría presentada en [94]. De este modo el desempeño en la Fig. 5.10 representa una estimación casi exacta del desempeño que se obtiene en presencia de un canal erróneamente estimado. La principal fuente de error en la predicción de desempeño de la Fig. 5.10 es el hecho de que por simplicidad se han usado los mismos kernels  $\{\hat{f}_n(kT_s)\}_{n=0}^{N-1}$  para todos los números de estados. Esto implica una sobreestimación del ruido requerido para alcanzar una  $\text{BER} = 10^{-3}$  cuando hay truncamiento, traduciéndose finalmente en una sobreestimación de la penalidad causada por la estimación de canal a altos niveles de truncamiento de estados. Sin embargo, se puede observar de la Fig. 5.10 que la penalidad para el OS-MLSD concuerda con la primera estimación (menos precisa) presentada en la Fig. 5.9 (*i.e.*,  $\approx 0.14 \text{ dB} < \Delta \approx 0.4 \text{ dB}$ ). Más aún, se observa que la penalidad causada por el conocimiento imperfecto del canal es similar en ambos receptores (*i.e.*,  $\approx 0.14 \text{ dB}$  y  $\approx 0.18 \text{ dB}$  para el OS-MLSD y el ST-WMF-MLSD, respectivamente).

### 5.3 Conclusiones

En este capítulo se analizó el desempeño del nuevo receptor MLSD en distintos escenarios de interés práctico. Se observó que las propiedades de compresión espacio-temporal propias del ST-WMF-MLSD permiten obtener una mejora de desempeño en comparación a otras arquitecturas MLSD existentes. Particularmente, se observó que se pueden lograr reducciones de complejidad en el orden de  $\sim 8$  veces en comparación al receptor OS-MLSD universalmente adoptado en aplicaciones de fibra óptica de larga distancia. Incluso en presencia de PMD se observaron sustanciales ganancias en desempeño bajo condiciones sub-óptimas (*i.e.*, con reducción de complejidad). Además, se verificó que aún en presencia de desajuste del canal la degradación experimentada por el ST-WMF-MLSD es mínima. De esta forma, se concluye que el ST-WMF-MLSD no es sólo una nueva formalización del problema de detección óptima en canales no-lineales, sino que puede resultar en considerables ahorros de complejidad en canales altamente dispersivos. Así se consigue relajar el elevado requerimiento de complejidad del MLSD, el cuál puede ser reducido aún más utilizando técnicas de reducción activa de estados.



## CONCLUSIONES

---

### 6.1 Discusión Final

En los últimos años las crecientes demandas de velocidad y desempeño están llevando al límite los sistemas de comunicación. Esto requiere del uso de sofisticados algoritmos que elevan considerablemente la complejidad de implementación. En la mayoría de las aplicaciones de alto desempeño estas complejidades resultan prohibitivas y se hace indispensable encontrar maneras de reducir la complejidad de los receptores óptimos sin introducir una gran degradación en la performance.

Los receptores MLSD son conocidos por alcanzar el desempeño óptimo de un sistema de comunicación, pero el problema es que requieren una elevada complejidad de implementación en canales altamente dispersivos [6]. Esto hace prohibitivo su uso en aplicaciones como los sistemas de fibra óptica de larga distancia, donde la memoria del canal puede alcanzar fácilmente niveles de 20 símbolos o más (*e.g.*, ver Sección 2.3.4). Sin embargo, hay aplicaciones donde el desempeño obtenido con alternativas sub-óptimas es inaceptable, *e.g.*, comunicaciones IM/DD por fibra óptica [2]. Entonces se hace necesario recurrir a técnicas de reducción de complejidad del MLSD para así obtener un buen compromiso entre complejidad y desempeño. El problema es que en comunicaciones por canales no-lineales altamente dispersivos, estas técnicas de reducción de complejidad del MLSD por lo general resultan en beneficios muy modestos [5, 12, 18, 19, 34]. Esto se debe principalmente a que en canales no-lineales, las técnicas de SR operan en base a receptores MLSD que no comprimen eficientemente el modelo de la ISI no-lineal. La presente Tesis propone una solución a este inconveniente por medio del uso de un receptor MLSD óptimo para canales no-lineales que permite una sistemática reducción de complejidad del MLSD con una lenta y suave degradación en performance.

La arquitectura MLSD propuesta está basada una novedosa expansión del canal no-lineal

en respuestas ortogonales. Estas respuestas ortogonales están comprimidas espacialmente en forma óptima y permiten diseñar un MFB especial (*i.e.*, el ST-WMF) con muestras incorreladas en espacio y tiempo. Además, el modelo del canal que se obtiene también está comprimido en espacio y tiempo. Estas propiedades han mostrado que con simples esquemas de truncamiento de estados el ST-WMF-MLSD lograr reducciones de complejidad de hasta  $\sim 8$  veces en comparación con otras arquitecturas MLSD para canales no-lineales existentes. Esto representa un gran paso en el camino hacia lograr desempeños óptimos con tecnologías actuales, o bien aquellas que estarán disponibles en unos años.

## 6.2 Pasos a Seguir

Un aspecto interesante que queda por abordar es el diseño de una arquitectura para la implementación eficiente en *hardware* del nuevo receptor MLSD propuesto en el Capítulo 4. Dicha arquitectura debe ser adaptiva y paralelizable, pero esencialmente debe ser robusta y eficiente en una amplia variedad de escenarios, especialmente en canales no-lineales altamente dispersivos. Actualmente esta arquitectura de implementación está en proceso de investigación. De estos estudios la arquitectura que hoy parece más promisoría se presenta brevemente en la Sección 6.2.1. Sin embargo, todavía resta un importante trabajo de evaluación de desempeño en diferentes escenarios para verificar que se alcanza la robustez deseada. Esto representa el motivo por el que no se ha intentado publicarla aún, ni se la ha incluido tampoco en el cuerpo principal de la presente Tesis.

Otro aspecto de gran interés es la evaluación de estrategias de reducción de complejidad más elaboradas que un simple truncamiento de la memoria del canal no-lineal (*e.g.*, [5, 12, 18, 19, 23, 34, 97]). La propuesta de estrategias innovadoras para la reducción de complejidad que se deriven del nuevo MLSD, o bien del modelo ortogonalizado del canal, también es un paso muy significativo hacia la optimización de los sistemas de comunicación de alto desempeño. Por las propiedades del ST-WMF-MLSD y lo que se ha visto en el Capítulo 5, es de esperar que con esquemas de SR más sofisticados este nuevo MLSD alcance reducciones de complejidad muy superiores en comparación con otros esquemas MLSD.

Tanto la propuesta de una arquitectura de implementación robusta y la utilización de estrategias más sofisticadas de SR posibilitarían alcanzar con receptores comerciales las crecientes exigencias de velocidad y desempeño del mercado.

### 6.2.1 Una Posible Arquitectura de Implementación en Hardware

La implementación práctica de la arquitectura del nuevo MLSD propuesto en el Capítulo 4 debe ser capaz de identificar el canal no-lineal y obtener las respuestas del ST-WMF (*i.e.*,



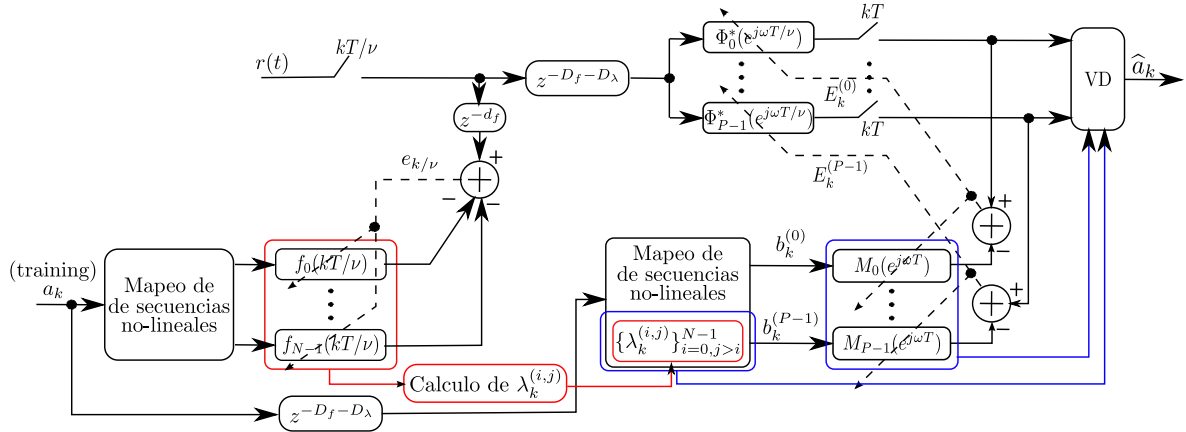


Fig. 6.1 Arquitectura de implementación del ST-WMF-MLSD.

$\{\Phi_n^*(-t)\}_{n=0}^{P-1}$ ) y la respuesta del canal discreto equivalente (*i.e.*,  $\{m_k^{(n)}\}_{n=0}^{P-1}$ ,  $\{\lambda_k^{(i,j)}\}_{i=0,j>i}^{P-1}$ ). En la Fig. 6.1 se presenta el diagrama en bloques de una arquitectura de implementación que se encuentra en estudio. Esta arquitectura está basada en una estimación<sup>1</sup> de los kernels de Volterra sobremuestreados  $\{f_n(kT/\nu)\}_{n=0}^{N-1}$ , donde  $\nu$  es el factor de sobremuestreo y  $d_f$  es el retardo introducido por el canal. Para este fin se utiliza una secuencia de entrenamiento  $a_k$  que luego es mapeada en el conjunto de secuencias no-lineales  $a_k, a_k a_{k-1}, a_k a_{k-2}, \dots, a_k a_{k-N+1}$ <sup>2</sup> (ver el bloque “Mapeo de secuencias no-lineales” (Volterra) en la parte izquierda inferior de la Fig. 6.1). Una vez que la estimación de los kernels de Volterra alcanza la convergencia (luego de un tiempo  $D_f$ ) éstos son usados para calcular el ST-WMF y la respuesta del canal equivalente usada por el VD. Este proceso se puede dividir en dos etapas:

1. cómputo de las respuestas  $\{\lambda_k^{(i,j)}\}_{i=0,j>i}^{P-1}$  (no mostrado en la Fig. 6.1);
2. cómputo de las respuestas  $\{\Phi_n^*(-t)\}_{n=0}^{P-1}$  y  $\{m_k^{(n)}\}_{n=0}^{P-1}$ .

Todas estas respuestas se pueden calcular en forma directa según la teoría expuesta en el Capítulo 4. Sin embargo, en la arquitectura de implementación considerada en la Fig. 6.1 se ha optado por computar mediante cálculos directos sólo a las respuestas  $\{\lambda_k^{(i,j)}\}_{i=0,j>i}^{P-1}$  (el cálculo se puede resolver eficientemente con los algoritmos de Levinson-Durbin o de Schur (paralelizable) [84].). En cambio, se opta por calcular las respuestas  $\{\Phi_n^*(-t)\}_{n=0}^{P-1}$  y  $\{m_k^{(n)}\}_{n=0}^{P-1}$  en forma adaptativa y no en forma directa. Esta elección tiene

<sup>1</sup>Para las estimaciones se puede usar el algoritmo de gradiente estocástico (*stochastic gradient - SG*), o bien el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos (*recursive least squares - RLS*) si se requiere mayor velocidad de convergencia.

<sup>2</sup>Nuevamente se supone sin pérdida de generalidad un canal no-lineal con no-linealidades de segunda orden. El objetivo, al igual que en el Capítulo 4, es simplificar la notación.

dos motivos: i) evitar el costo computacional requerido por una factorización espectral; ii) aprovechar las propiedades de *ortogonalidad extendida* y *compresión espacial* de las respuestas  $\{\Phi_n^*(-t)\}_{n=0}^{P-1}$  para lograr una eficiente convergencia del método adaptivo [74, 98]. Nótese que la propiedad de compresión espacial asegura un excelente desempeño con un número muy reducido de dimensiones (*i.e.*, se ha visto que  $P = 2$  es más que suficiente en todos los escenarios considerados, incluso otros no incluidos en esta Tesis).

Por último, se destaca que este desarrollo de una arquitectura para la implementación eficiente en hardware está en proceso de estudio e investigación. Si bien algunos estudios y pruebas preliminares de simulación son alentadoras respecto a la eficiencia del esquema presentado en esta sección, todavía restan muchas pruebas para ser concluyentes respecto a su robustez en una gran variedad de escenarios prácticos de interés. Estos aspectos inconclusos son el motivo por el cuál no se ha incluido este estudio como parte de la Tesis, pero se considera importante destacarlos como posible extensión.

## PUBLICACIONES

---

### 7.1 Descripción de las Publicaciones

A continuación se incluyen en orden cronológico copias de las publicaciones derivadas del presente trabajo de Tesis. Dichas publicaciones se pueden dividir en dos grupos:

1. Aquellas publicaciones directamente relacionadas al trabajo descrito en el presente informe. Este grupo se compone de los siguientes papers:
  - G. N. Maggio, M. R. Hueda and O. E. Agazzi, “*Reduced Complexity MLSD Receivers for Nonlinear Optical Channels*”, IEEE Photonics Technology Letters, vol. 26, no. 4, pp. 398-401, Feb. 2014.
  - G. N. Maggio and C. E. Rodríguez, “*A novel MLSD receiver architecture for nonlinear channels*”, XLIII Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa (43JAIIO)-XV Argentine Symposium on Technology (AST), pp. 72-83, Sep. 2014.
  - G. N. Maggio, M. R. Hueda and O. E. Agazzi, “*Maximum Likelihood Sequence Detection Receivers for Nonlinear Optical Channels*”, Journal of Electrical and Computer Engineering, vol. 2015, no. 736267, Jan. 2015.
2. Una publicación que forma parte de la investigación llevada a cabo durante el proceso de elaboración de la presente Tesis, pero que no ha sido incluida en este informe de Tesis. Esta publicación estudia la causa de la distorsión por desplazamiento de la línea base (*baseline wander* - BLW) en comunicaciones ópticas coherentes y propone la primera arquitectura de compensador de BLW (*BLW compensator* - BLWC) para receptores intradinos de alto corrimiento de frecuencia (*frequency offset* - FO):

- Gabriel N. Maggio and Mario R. Hueda, “*Design and Parallel Implementation of an Adaptive Baseline Wander Compensator for High-Speed Optical Coherent Receivers*”, 2011 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), pp. 969-972, 15-18 May 2011.

## REFERENCIAS

---

- [1] A. A. M. Saleh, "Frequency-independent and frequency-dependent nonlinear models of TWT amplifiers," *IEEE Trans. Commun.*, vol. COM-29, no. 11, pp. 1715–1720, Nov. 1981.
- [2] O. Agazzi and V. Gopinathan, "The impact of nonlinearity on electronic dispersion compensation of optical channels," *Proc. of OFC*, vol. TuG6, Feb. 2004.
- [3] Q. Yu and A. Shanbhag, "Electronic data processing for error and dispersion compensation," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 24, no. 12, pp. 4514–4525, Jan. 2007.
- [4] G. Bosco and P. Poggiolini, "Long-distance effectiveness of MLSE IMDD receivers," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 18, no. 9, pp. 1037–1039, May 2006.
- [5] M. Franceschini *et al.*, "State-complexity reduction in MLSD receivers for optical communications with direct photodetection," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 26, no. 21, pp. 3497–3507, Nov. 2008.
- [6] J. R. Barry, E. A. Lee, and D. G. Messerschmitt, *Digital Communications*, 3rd ed. KAP, 2004.
- [7] S. Lin and D. J. C. Jr., *Error Control Coding*, 2nd ed. Pearson Prentice Hall, 2004.
- [8] O. E. Agazzi, M. R. Hueda, D. E. Crivelli, and H. S. Carrer, "Maximum-likelihood sequence estimation in dispersive optical channels," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 23, no. 2, pp. 749–763, Feb. 2005.
- [9] T. Freckmann and J. Speidel, "Viterbi equalizer with analytically calculated branch metrics for optical ASK and DBPSK," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 18, no. 1, pp. 277–279, 2006.
- [10] E. Biglieri *et al.*, "Adaptive cancellation of non-linear intersymbol interference for voice-band data transmission," *IEEE J. Select. Areas Commun.*, vol. SAC-2, no. 5, pp. 765–777, 1984.
- [11] M. Chen and O. M. Collins, "Multilevel coding for nonlinear ISI channels," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 55, no. 5, pp. 2292–2303, May 2009.
- [12] D. E. Crivelli, H. S. Carrer, and M. R. Hueda, "On the performance of reduced-state Viterbi receivers in IM/DD optical transmission systems," *Proc. of ECOC*, Sep. 2004.
- [13] M. Franceschini *et al.*, "Fundamental limits of electronic signal processing in direct-detection optical communications," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 25, no. 7, pp. 1742–1752, Jul. 2007.

- [14] M. Yasin, S. W. Harun, and H. Arof, *Optical Fiber Communications and Devices*. InTech, 2012.
- [15] T. Kupfer and C. Schulien, "Maximum likelihood sequence estimation at 10 Gb/s from concept to implementation," *The 18th Annual Meeting of the IEEE Lasers and Electro-Optics Society*, pp. 896–897, Oct. 2005.
- [16] T. Kupfer, J. Whiteaway, and S. Langenbach, "PMD compensation using electronic equalization particular maximum likelihood sequence estimation," *Proc. of OFC*, p. OMH1, Mar. 2007.
- [17] R. A. Griffin *et al*, "Combination of inp mzm transmitter and monolithic cmos 8-state mlse receiver for dispersion tolerant 10 gb/s transmission," *Proc. of OFC*, p. OTh02, 2008.
- [18] S. Savory *et al*, "IMDD transmission over 1,040 km of standard single-mode fiber at 10Gbit/s using a one-sample-per-bit reduced-complexity MLSE receiver," *Proc. of OFC*, Mar. 2007.
- [19] P. Poggiolini *et al*, "Long-haul 10 Gbit/s linear and non-linear IMDD transmission over uncompensated standard fiber using a SQRT-metric MLSE receiver," *Opt Express*, vol. 16, no. 17, pp. 12 919–12 936, Aug. 2008.
- [20] D. van den Borne, *Robust Optical Transmission Systems: Modulation and Equalization*. Technische Universiteit Eindhoven, 2008.
- [21] G. P. Agrawal, *Fiber Optic Communication Systems*, 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [22] P. Poggiolini, G. Bosco, and M. Visintin, "Mlse receivers and their applications in optical transmission systems," in *Proc. LEOS*, pp. 216–217, 2007.
- [23] N. Benvenuto and G. Cherubini, *Algorithms for Communications Systems and their Applications*. John Wiley & Sons, 2002.
- [24] A. C. Singer, N. R. Shanbhag, and H. M. Bae, "Electronic dispersion compensation. an overview of optical communication systems," *IEEE Signal Processing Mag.*, vol. 25, no. 6, pp. 110–130, Nov. 2008.
- [25] M. R. Hueda, D. E. Crivelli, and H. S. Carrer, "Performance of MLSE-based receivers in lightwave systems with nonlinear dispersion and ASE noise," *Proc. IEEE GLOBECOM*, vol. 1, pp. 299–303, Nov. 2004.
- [26] D. Fritzsche *et al*, "Experimental investigation of real time 10 Gbit/s MLSE equalizer using 4-states and 16-states Viterbi detector," in *Proc. Global Telecommunications Conference*, pp. 1–5, Nov. 2009.
- [27] —, "Field trial investigation of 16-states MLSE equalizer for simultaneous compensation of CD, PMD and SPM," *Proc. of OFC*, p. OWE4, 2009.
- [28] M. R. Hueda *et al*, "Parametric estimation of IM/DD optical channels using new closed-form approximations of the signal PDF," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 25, no. 3, pp. 957–975, Mar. 2007.

- [29] M. R. Hueda, D. E. Crivelli, and H. S. Carrer, "Analysis of SISO front-end decoders in IMDD optical channels with application to turbo code decoding," *Proc. of ICCS*, pp. 552–558, Sep. 2004.
- [30] M. Franceschini *et al*, "Post-detection nonlinear distortion for efficient MLSD in optical links," *Optics Express*, vol. 15, no. 18, pp. 11 750–11 755, Sep. 2007.
- [31] P. Serena and A. Bononi, "On the accuracy of the gaussian nonlinear model for dispersion-unmanaged coherent links," *ECOC*, pp. 1–3, Sep. 2013.
- [32] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 2007.
- [33] P. Poggiolini, G. Bosco, J. Prat, R. Killey, and S. Savory, "Branch metrics for effective long-haul MLSE IMDD receivers," *Proc. of ECOC*, vol. We2.5, Sep. 2006.
- [34] G. Bosco, V. Curri, E. Roffè, and P. Poggiolini, "Joint effect of MLSE and receiver filters optimization on dispersion robustness of IMDD, DPSK, DQPSK, and duobinary modulation," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 19, no. 24, pp. 2003–2005, Dec. 2007.
- [35] H. S. Carrer, D. E. Crivelli, and M. R. Hueda, "Reduced complexity maximum likelihood sequence estimator for high-speed fiber optic communication systems," *Lat. Am. appl. res. [online]*, vol. 35, no. 2, pp. 99–104, Jun. 2005.
- [36] G. Bosco, P. Poggiolini, and M. Visintin, "Performance analysis of MLSE receivers based on the square-root metric," *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 26, no. 14, pp. 2098–2109, Jul. 2008.
- [37] G. Bosco *et al*, "Optimization of branch metric exponent and quantization range in mlse receivers for duobinary systems," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 20, no. 11, pp. 924–926, Jun. 2008.
- [38] T. E. Stern, "Viterbi algorithm receivers for nonlinear satellite channels," *11th Asilomar Conference on Circuits, Systems and Computers. Conference Record.*, pp. 219–224, Nov. 1977.
- [39] S. Benedetto and E. Biglieri, *Principles of Digital Transmission with wireless applications*. Kluwer Academic, 1999.
- [40] M. F. Mesyia, P. J. M. Lane, and L. L. Campbell, "Maximum likelihood sequence estimation of binary sequences transmitted over bandlimited nonlinear channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 25, no. 7, pp. 633–643, Jul. 1977.
- [41] V. K. Dubey and D. Taylor, "Maximum likelihood sequence detection for QPSK on nonlinear, band-limited channels," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 34, no. 12, pp. 1225–1235, Dec. 1986.
- [42] A. Vannucci and R. Raheli, "Sequence detection in nonlinear channels: A convenient alternative to analog predistortion," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 9, pp. 1515–1524, Sep. 2002.
- [43] J. G. D. Forney, "Maximum likelihood sequence detection in the presence of inter-symbol interference," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 18, pp. 363–378, May 1972.

- [44] ———, “The viterbi algorithm,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 61, no. 3, Mar. 1973.
- [45] M. V. Eyuboglu and S. U. H. Qureshi, “Reduced-state sequence estimator with set partitioning and decision feedback,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 36, no. 1, pp. 13–20, Jan. 1988.
- [46] O. Agazzi, D. Messerschmitt, and D. Hodges, “Nonlinear echo cancellation of data signals,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 30, no. 11, pp. 2421–2433, Nov. 1982.
- [47] D. Chakraborty, “Maximum likelihood sequence detection in nonlinear satellite channels,” *IEEE Commun. Mag.*, pp. 47–52, Nov. 1981.
- [48] X. Zhou *et al*, “32Tb/s (320x114Gb/s) PDM-RZ-8QAM transmission over 580km of SMF-28 ultra-low-loss fiber,” *Proc. of OFC*, p. PDPB4, Mar. 2009.
- [49] A. Sano *et al*, “69.1-Tb/s (432 x 171-Gb/s) C- and extended L-band transmission over 240 km using PDM-16-QAM modulation and digital coherent detection,” *Proc. of OFC*, p. PDPB7, Mar. 2010.
- [50] ———, “DWDM transmission with 7.0-bit/s/Hz spectral efficiency using 8x65.1-Gbit/s coherent PDM-OFDM signals,” *Proc. of OFC*, p. PDPB7, Mar. 2009.
- [51] R. P. Giddings *et al*, “Experimental demonstration of a record high 11.25Gb/s real-time optical OFDM transceiver supporting 25km SMF end-to-end transmission in simple IMDD systems,” *Opt. Express*, vol. 18, no. 6, pp. 5541–5555, Mar. 2010.
- [52] C. Schmidt-Langhorst *et al*, “Generation and coherent time-division demultiplexing of up to 5.1 Tb/s single-channel 8-PSK and 16-QAM signals,” *Proc. of OFC*, p. PDPC6, Mar. 2009.
- [53] M. Salsi *et al*, “155x100Gbit/s coherent PDM-QPSK transmission over 7200km,” *Proc. of ECOC*, p. PD2.5, Sep. 2009.
- [54] Clariphy, “CL20010 LightSpeed-II™ 200G Coherent SoC,” <http://www.clariphy.com/products/cl20010.php>.
- [55] E. Pincemin *et al*, “Performance comparison of 40 gb/s ulh transmissions using csrz-ask or csrz-dpsk modulation formats on ultrawavetm fiber,” *Opt. Express*, vol. 15, no. 18, pp. 11 142–11 153, 2007.
- [56] E. Ip and J. Kahn, “Compensation of dispersion and nonlinear effects using digital backpropagation,” *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 26, no. 20, pp. 3416–2425, Oct. 2008.
- [57] M. Forzati *et al*, “Non-linear compensation techniques for coherent fibre transmission,” *Communications and Photonics Conference and Exhibition, 2011. ACP. Asia*, vol. 19, no. 10, pp. 1–8, Nov. 2011.
- [58] M. Malekiha, D. Yang, and S. Kumar, “Comparison of optical back propagation schemes for-optic communications,” *Optical Fiber Technology*, vol. 19, no. 1, pp. 4–9, Jan. 2013.



- [59] M. Secondini, D. Marsella, and E. Forestieri, “Enhanced split-step fourier method for digital backpropagation,” *Proc. of ECOC*, p. paper We.3.3.5, 2014.
- [60] D. Marsella, M. Secondini, and E. Forestieri, “Maximum likelihood sequence detection for mitigating nonlinear effects,” *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 32, no. 5, pp. 908–916, Mar. 2014.
- [61] M. Seimetz, *Higher-Order Modulation for Optical Fiber Transmission*. Springer, 2009.
- [62] N. Alic *et al*, “Experimental demonstration of 10 gb/s NRZ extended dispersion-limited reach over 600km-SMF link without optical dispersion compensation,” *Proc. of OFC*, Mar. 2006.
- [63] J. H. Winters *et al*, “Electrical signal processing techniques in long-haul fiber-optic systems,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 38, no. 9, pp. 1439–1453, 1990.
- [64] H. F. Haunstein *et al*, “Design of near optimum electrical equalizers for optical transmission in the presence of PMD,” *Proc. of OFC*, pp. WAA4–1, 2001.
- [65] J. M. Gené *et al*, “Simultaneous compensation of polarization mode dispersion and chromatic dispersion using electronic signal processing,” *IEEE J. Lightwave Technol.*, vol. 25, no. 7, pp. 1735–1741, Jul. 2007.
- [66] G. J. Foschini, “A reduced-state variant of maximum-likelihood sequence detection attaining optimum performance for high signal-to-noise ratio performance,” *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 24, pp. 505–509, Sep. 1977.
- [67] J. B. Anderson and S. Mohan, “Sequential coding algorithms: a survey and cost analysis,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 32, pp. 169–176, Feb. 1984.
- [68] M. V. Eyuboglu, “Reduced-state sequence estimator for coded modulation on intersymbol interference channels,” *IEEE Trans. Commun.*, vol. 7, pp. 989–995, Aug. 1989.
- [69] G. N. Maggio, M. R. Hueda, and O. E. Agazzi, “Reduced complexity MLSD receivers for nonlinear optical channels,” *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 26, no. 4, pp. 398–401, Feb. 2014.
- [70] G. N. Maggio and C. E. Rodríguez, “A novel MLSD receiver architecture for nonlinear channels,” *XLIII Jornadas Argentinas de Informática e Investigación Operativa (43JAIIO)-XV Argentine Symposium on Technology (AST) (Buenos Aires)*, pp. 72–83, Sep. 2014, issn: 1850-2806.
- [71] G. N. Maggio, M. R. Hueda, and O. E. Agazzi, “Maximum likelihood sequence detection receivers for nonlinear optical channels,” *Journal of Electrical and Computer Engineering*, vol. 2015, no. 736267, Jan. 2015.
- [72] M. Schetzen, *The Volterra and Wiener Theories of Nonlinear Systems*. Krieger Publishing Company, 2006.
- [73] W. J. Rugh, *Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach*. The Johns Hopkins University Press, 2002.

- [74] T. Ogunfunmi, *Adaptive Nonlinear System Identification: The Volterra and Wiener Model Approaches*. Springer, 2007.
- [75] N. Wiener, "Generalized harmonic analysis," *Acta Mathematica, Uppsala*, vol. 55, pp. 117–258, 1930.
- [76] ———, *Nonlinear Problems in Random Theory*. The Technology Press M.I.T. and John Wiley & Sons, Inc., New York, 1958.
- [77] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky, *Signals and Systems*, 2nd ed. Prentice Hall, 2014.
- [78] V. Volterra, "Sopra le funzioni che dipendono de altre funzioni," *Rend. R. Accademia dei Lincei 2° Sem*, pp. 97–105, 141–146, 153–158, 1887.
- [79] M. Frèchet, "Su les fonctionelles continues," *Annales Scientifiques de L'Ecole Normale Supérieure*, vol. 27, no. 3, pp. 193–216, may 1910.
- [80] H. S. Carrer, D. E. Crivelli, and M. R. Hueda, "Long-distance effectiveness of MLSE IMDD receivers," *Latin American Applied research*, vol. 35, pp. 99–104, Jan. 2005.
- [81] J. Prat *et al*, "Square root strategy: a novel method to linearize an optical communication system with electronic equalizers," *Proc. of ECOC*, vol. 3, pp. 713–714, Sep. 2005.
- [82] "Matlab and optimization toolbox release 2011a, the mathworks, inc., natick, massachusetts, united states."
- [83] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 1991.
- [84] L. L. Scharf, *Statistical Signal Processing. Detection, Estimation, and Time Series Analysis*. Addison-Wesley, 1991.
- [85] R. Courant, *Differential and Integral Calculus*. Interscience Publishers, Inc., New York, 1950, vol. II.
- [86] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory*. John Wiley & Sons, Inc., 2001, vol. I.
- [87] J. G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1995.
- [88] L. R. Rabiner, "A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition," *Proceedings of the IEEE*, vol. 77, no. 2, pp. 257–286, Feb. 1989.
- [89] M. I. del Barco *et al*, "FPGA implementation of high-speed parallel maximum a posteriori (MAP) decoders," *Micro-Nanoelectronics, Technology and Applications, 2009. EAMTA 2009. Argentine School of*, vol., no., pp.98-102, Oct 2009.
- [90] G. Ungerboeck, "Adaptive maximum-likelihood receiver for carrier-modulated data-transmission systems," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 22, no. 5, pp. 624–636, May 1974.

- [91] H. Meyr, M. Moeneclaey, and S. A. Fechtel, *Digital Communication Receivers. Synchronization, Channel Estimation and Signal Processing*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [92] M. Embree, *Numerical Analysis I. Lecture Notes*. Rice University, 2009.
- [93] W. Chung, "Channel estimation methods based on Volterra kernels for MLSD in optical communication systems," *IEEE Photon. Technol. Lett.*, vol. 22, no. 4, pp. 224–226, Feb. 2010.
- [94] O. E. Agazzi and N. Seshadri, "On the use of tentative decisions to cancel intersymbol interference and nonlinear distortion (with application to magnetic channels)," *IEEE Trans. Inform. Theory*, vol. 43, no. 2, pp. 394–408, Mar. 1997.
- [95] O. E. Agazzi *et al.*, "A 90 nm CMOS DSP MLSD transceiver with integrated AFE for electronic dispersion compensation of multimode optical fibers at 10 Gb/s," *IEEE J. Solid-State Circuits*, vol. 43, no. 12, pp. 2939–2957, Dec. 2008.
- [96] R. Motaghian, J. Cho, D. Tauber, M. Hueda, D. Crivelli, O. Agazzi, and N. Swenson, "Single chip 46 Gb/s DP-QPSK digital clock recovery and channel equalization performance in the presence of CD, PMD, and ultra-fast SOP rotation rates exceeding 20 krad/s," *Proc. of OFC*, 2013.
- [97] N. Seshadri and C.-E. W. Sundberg, "List Viterbi decoding algorithms with applications," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 42, no. 2/3/4, pp. 313–323, Feb. 1994.
- [98] S. O. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed. Prentice Hall, 1995.
- [99] A. Kavcic and J. Moura, "The viterbi algorithm and markov noise memory," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, no. 1, pp. 291–301, Jan. 2008.
- [100] D. A. Morero and M. R. Hueda, "Performance of euclidean-metric mlzd receiver in the presence of channel mismatch caused by nongaussian noise," *ICC*, pp. 1–5, May 2010.
- [101] A. J. Viterbi and J. K. Omura, *Principles of Digital Communication and Coding*. Dover Publications Inc., 2009.



## PROBABILIDAD DE ERROR DEL MLSD

---

El objetivo de este Apéndice, es introducir con cierto detalle una forma eficiente de calcular la probabilidad de error para un receptor MLSD. El procedimiento que se presenta es (semi)-analítico<sup>1</sup> y permite estimar la probabilidad de error de cualquier VD. Para mayor claridad, se presenta el análisis usando el ejemplo de un canal lineal con ruido AWGN de la Sección 3.2.1 [6]. Su extensión a casos más generales, como desajuste del canal y ruido distinto del AWGN, es conceptualmente sencilla y será mencionada brevemente en la Sección A.3. El lector interesado puede encontrar más detalles y aplicaciones en publicaciones como [8, 43, 94, 99, 100], donde se extiende la utilización del procedimientos a otras condiciones.

### A.1 Método de Estimación de la Probabilidad de Error

Para el ejemplo de la Sección 3.2.1 se vio que la recepción por MF asegura estadística suficiente, y por ende se puede alcanzar el desempeño óptimo si se utiliza el post-procesamiento óptimo, como es el caso del VD. Entonces, una vez que se tiene el canal equivalente en tiempo discreto, obtenido *sin pérdida de información*, determinar la probabilidad de error del MLSD es en definitiva determinar la probabilidad de error del VD. Por ese motivo se considerará que en todos los casos se dispone del canal discreto equivalente obtenido con estadística suficiente. Luego, se calculará la probabilidad de que el VD elija una secuencia ( $\hat{\mathbf{a}}$ ) distinta de la transmitida realmente ( $\mathbf{a}$ ).

Si se conoce la probabilidad  $P\{\hat{\mathbf{a}}|\mathbf{a}\}$  de que el receptor decida (erroneamente) por alguna secuencia  $\hat{\mathbf{a}}$  cuando  $\mathbf{a}$  es transmitida, entonces resta promediar para todos los distintos errores y obtener finalmente la probabilidad de error de secuencia. Sin embargo, es evi-

---

<sup>1</sup>El carácter de *semi*-analítico radica en que el procedimiento requiere buscar ciertos eventos (infinitos idealmente), y que usualmente esta búsqueda se hace en forma acotada dentro de un subconjunto finito de eventos con asistencia de una computadora. Salvando ese detalle sobre su modo de aplicación, el método en sí mismo bien puede considerarse *analítico*[6, 87].

dente que la probabilidad de que ocurra un error de secuencia generalmente tenderá a 1 con  $K \rightarrow \infty$ . Pero lo que interesa realmente es la cantidad de errores de símbolo (o de bit) que ocurren a causa de un error de secuencia. Para poder responder a esta cuestión, una alternativa ingeniosa consiste en analizar por separado los *semi-eventos* que hacen que el camino en el trellis elegido por el VD se separe del camino correcto y vuelva a converger al camino correcto tras un cierto tiempo. A cada uno de estos semi-eventos se los denomina *evento-error* [43, 87]. En la Fig. A.1 se ilustran 2 eventos-error en un trellis. El trellis de la Fig. A.1 corresponde al ejemplo de un canal discreto equivalente dado por

$$y_n = \sum_{k=0}^{L-1} a_k h_{n-k} + w_n = s_n + w_n, \tag{A.1}$$

donde  $a_n$  es el  $n$ -ésimo símbolo transmitido, con  $a_n$  perteneciente a un alfabeto finito de cardinalidad  $M$ ,  $h_n$  es la respuesta al impulso o ISI, que por simplicidad se supone causal y de duración finita, mientras que  $w_n$  es un proceso aleatorio que se supone *i.i.d.*, Gaussiano, de media cero y con  $E\{w_n w_k^*\} = \sigma_w^2 \delta_{n-k}$ . En este caso, se considera  $M = 2$  con  $a_k \in \{-1, 1\}$ . En el trellis se indican con flechas sólidas (a trazos) las transiciones que se originan a causa del evento  $a_k = 1$  ( $a_k = -1$ ). Por su parte, para la memoria de la ISI, en este ejemplo se considera  $L - 1 = 2$ , por lo tanto hay  $2^2$  estados posibles. La *duración* de los eventos-error se define como la cantidad de ramas del trellis en que se diferencian los dos caminos a comparar<sup>1</sup>. A lo largo del evento-error puede ser que en un determinado instante los

<sup>1</sup>Esta definición de duración no es única, y definiciones alternativas pueden considerarse, e.g., la cantidad de estados en que difieren los 2 caminos [87].

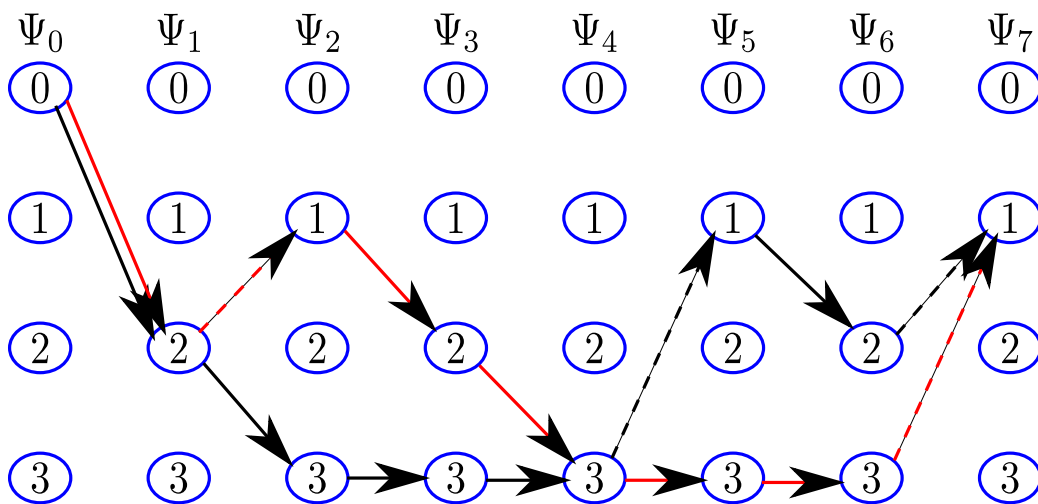


Fig. A.1 Trellis donde se destacan 2 caminos, el correcto (negro) y el elegido erróneamente (rojo), los cuales originan 2 eventos-error.

símbolos estimados para los dos caminos coincidan o no. El inicio del evento-error se considera a partir del estado en que las ramas se separan, y finaliza cuando los caminos vuelven a unirse en otro estado. En la Fig. A.1, se observa que el primer evento-error nace en el estado  $\Psi_1 = 2$  y termina en el estado  $\Psi_4 = 3$ , donde los caminos vuelven a unirse. En el instante siguiente los caminos se separan nuevamente, indicando así el comienzo de un nuevo evento-error, que termina cuando vuelven a unirse los caminos en el estado  $\Psi_7 = 1$ . Nótese, que si bien los eventos-error son distintos, ambos tienen en común que implican un sólo símbolo erróneo (cuando no hay coincidencia en el trazo de las ramas para un mismo instante), a pesar de que tienen una duración de 3 ramas. En lo que sigue, siempre se asociarán los eventos-error con una secuencia de estados  $\Psi$  para el camino correcto y otra secuencia de estados  $\hat{\Psi}$  para el camino incorrecto.

Para calcular la probabilidad de error de símbolo, se agrupan en el conjunto  $E_i$  los eventos-error  $e$  que comienzan en el instante  $i$  (i.e.,  $\Psi_i = \hat{\Psi}_i$  y  $\hat{a}_i \neq a_i$ ). Además, se define la función indicadora

$$c_n(e) = \begin{cases} 1 & \text{si el evento-error } e \text{ implica un error de símbolo en la } n\text{-ésima transición} \\ 0 & \text{de lo contrario.} \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Entonces, la probabilidad de que en una transmisión ocurra un error de símbolo en el  $n$ -ésimo instante será

$$P\{\text{error en el instante } n\} = \sum_{i=-\infty}^n \sum_{e \in E_i} c_{n-i} P\{e\} \quad (\text{A.3a})$$

$$= \sum_{e \in E} P\{e\} \sum_{i=-\infty}^n c_{n-i} \quad (\text{A.3b})$$

$$= \sum_{e \in E} P\{e\} H(e), \quad (\text{A.3c})$$

donde en (A.3a) se ha usado el hecho de que, en una transmisión dada, los eventos-error en el conjunto  $E_i$  son disjuntos, y se ha supuesto también que la transmisión comienza en un pasado muy lejano (para despreciar efectos de cola [6]); en (A.3b) simplemente se ha cambiado la notación de  $E_i$  por  $E$  para enfatizar la independencia de (A.3) respecto al instante de inicio de los eventos-error<sup>1</sup>; y finalmente, en (A.3c) se ha definido el número total de errores en cualquier evento  $e$  como

$$H(e) = \sum_{i=-\infty}^n c_{n-i}(e), \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>1</sup>La independencia respecto al instante de inicio es posible por una suposición de estacionariedad para el problema.

donde  $c_k(e) = 0 \forall k < 0$ . De (A.3) queda claro que para conocer la probabilidad de error de símbolo es necesario conocer la probabilidad  $P\{e\}$  de ocurrencia de cualquier evento error  $e$ , donde

$$P\{e\} = P\{\Psi, \hat{\Psi}\} = P\{\Psi\}P\{\hat{\Psi}|\Psi\}. \quad (\text{A.5})$$

La solución del problema requiere la compleja tarea de calcular la probabilidad condicional  $P\{\hat{\Psi}|\Psi\}$ . A continuación se presenta un modo de aproximar este valor.

## A.2 Aproximación de la Probabilidad de Evento-Error

En (A.5) se ve que el cálculo de la probabilidad de evento-error requiere calcular  $P\{\hat{\Psi}|\Psi\}$ . El cálculo de  $P\{\hat{\Psi}|\Psi\}$  es difícil en general, debido a la complejidad de las regiones de decisión implicadas. Sin embargo, es fácil acotarla suponiendo que los únicos caminos válidos en el trellis son  $\Psi$  y  $\hat{\Psi}$  (despreciando todos los otros caminos). De este modo, se reduce a un simple hiper-plano la frontera de las regiones de decisión [6]. Usando esta simplificación, entonces se puede estimar

$$P\{\hat{\Psi}|\Psi\} \leq P\{\hat{\Psi}|\Psi, \text{ con } \hat{\Psi} \text{ el único camino erróneo posible}\} = F(d(\hat{\Psi}, \Psi)/NP), \quad (\text{A.6})$$

donde  $F$  es una función de distribución (*cumulative distribution function* - CDF) que depende de la distribución del ruido,  $NP$  es un factor relacionado a la potencia de ruido, y  $d(\hat{\Psi}, \Psi)$  es la *distancia del evento-error*, que no es más que una *distancia*<sup>1</sup> entre las métricas de camino de las secuencias de estados correcta ( $\Psi$ ) y errónea ( $\hat{\Psi}$ ).

Con la aproximación en (A.6), la probabilidad de error de símbolo se puede acotar como sigue:

$$\begin{aligned} P_e &\leq \sum_{e \in E} H(e)P\{\Psi\}F(d(\hat{\Psi}, \Psi)/NP) = \sum_d \sum_{e \in E(d)} H(e)P\{\Psi(d)\}F(d/NP) \\ &= \sum_d R(d)F(d/NP), \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

donde  $E(d)$  es el conjunto de los eventos-error que comienzan en un mismo instante y que tienen una distancia  $d$  respecto al camino verdadero  $\Psi(d)$ , y  $R(d) = \sum_{e \in E(d)} H(e)P\{\Psi(d)\}$ . Usualmente la CDF decae muy rápidamente con  $d$ , por lo que la cota en (A.7) está dominada por el evento de distancia  $d(\hat{\Psi}, \Psi)$  mínima, *i.e.*, el primer término de la sumatoria [6]. A su vez, los eventos-error con distancia mínima *normalmente* están asociados a eventos de

<sup>1</sup>Dependiendo del modelo del canal y el receptor la distancia  $d(\hat{\Psi}, \Psi)$  puede no ser una distancia propiamente dicha. Sin embargo se la sigue denominando de la misma manera aún en esos casos [8].



duración corta. Entonces, una forma sencilla de proceder en la práctica es probar todos los eventos-error posibles hasta una duración  $D_{max}$  de diseño, y para cada evento-error computar  $d(e)$ ,  $H(e)$ , para finalmente estimar  $P\{\Psi(d)\}$  como la proporción de eventos-error  $e$  con una misma distancia  $d$  obtenidos sobre la cantidad total de eventos-error probados<sup>1</sup>. De ese modo, se puede computar una buena estimación de  $P_e$  utilizando una versión truncada de la serie en (A.7).

### A.2.1 Probabilidad de Evento-Error para un Canal con AWGN

Para aclarar el procedimiento mediante el cuál se obtiene la expresión en (A.6) resulta conveniente considerar un caso de aplicación, *e.g.*, un canal con AWGN como el de la Sección 3.2.1. Para dicho canal, se ve que el VD comete el error de elegir la secuencia de símbolos  $\hat{\mathbf{a}}$  (asociada a la secuencia de estados  $\hat{\Psi}$  del evento-error) por sobre la secuencia  $\mathbf{a}$  (asociada a la secuencia de estados  $\Psi$ ), si la métrica de camino asociada con  $\hat{\mathbf{a}}$  es menor que la métrica de camino asociada con  $\mathbf{a}$ . Usando (3.29c) ésto simplemente corresponde al evento dado por

$$\sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\hat{\mathbf{a}}))^2 \leq \sum_{n=0}^{K-1} (y_n - s_n(\mathbf{a}))^2, \quad (\text{A.8})$$

donde se supone, sin pérdida de generalidad, que el evento-error en cuestión comienza en el instante 0 y tiene una duración de  $K$  ramas<sup>2</sup>. Reemplazando (3.23) en (A.8) y operando algebraicamente, se puede ver que dicho evento equivale a

$$|\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})|^2 \leq 2\Delta^T(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})W = \zeta, \quad (\text{A.9})$$

donde

$$\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = [\Delta_0(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}), \Delta_1(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}), \dots, \Delta_{K-1}(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})]^T, \quad (\text{A.10})$$

$$\Delta_n(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = s_n(\hat{\mathbf{a}}) - s_n(\mathbf{a}), \quad (\text{A.11})$$

y

$$W = [w_0, w_1, \dots, w_{K-1}]^T. \quad (\text{A.12})$$

Notando que  $\zeta$  es una RV con distribución Gaussiana de media nula y varianza

<sup>1</sup>En el caso de un canal lineal con ruido independiente de la señal, se puede evitar probar todos los pares posibles de  $\Psi$  y  $\hat{\Psi}$ , puesto que algunos originan eventos-error idénticos [6]. Sin embargo, esto no es el caso para canales no-lineales, que es el principal interés de esta Tesis, por lo que no se profundiza en este aspecto.

<sup>2</sup>Nótese que en realidad, extender los índices de la sumatoria en (A.8) no afectaría el resultado porque los caminos coinciden exactamente, salvo durante el evento-error, y los términos extra sólo sumarían cero.

$\sigma_w^2 |\Delta(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})|^2$ , entonces la probabilidad del evento en (A.9) es

$$Q\left(\frac{|\Delta(\mathbf{a}, \hat{\mathbf{a}})|}{2\sigma_w^2}\right), \quad (\text{A.13})$$

donde  $Q(\cdot)$  es la CDF de la distribución normal. Comparando (A.13) con (A.6) se nota que, para este ejemplo en particular, la *distancia del evento-error* viene dada por

$$d(\hat{\Psi}, \Psi) \equiv d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = |\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})|, \quad (\text{A.14})$$

$NP = 2\sigma_w^2$ , y la función  $F(\cdot)$  resulta ser la función  $Q(\cdot)$ , *i.e.*, la CDF de la distribución normal.

### A.2.2 Ejemplo

Para ilustrar mejor el procedimiento, se propone un ejemplo sencillo tomado de [87]. Específicamente, considérese que el canal discreto equivalente viene dado por el ejemplo en la Sección 3.2.1, con  $h_0 = 0.36$ ,  $h_1 = 0.86$  y  $h_2 = 0.36$ . Una etapa de transición del trellis para este canal y con alfabeto binario de modulación antipodal, *i.e.*,  $a_k \in \{-1, 1\}$ , se muestra en la Fig. A.2. Nótese que se han indicado, tanto la interpretación de los estados en base a los símbolos pasados ( $\Psi_k = \{a_{k-1}, a_{k-2}\}$ ), como así también el valor esperado por la componente de señal  $s_n$  para cada métrica de rama.

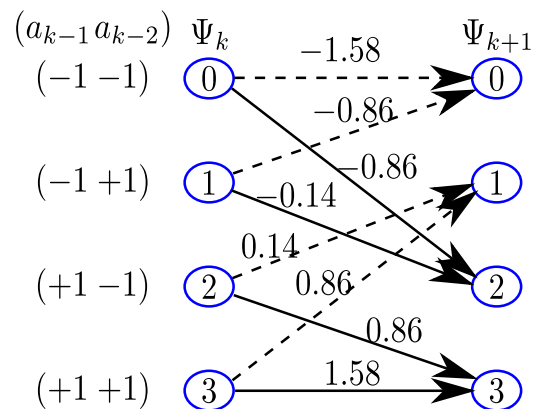


Fig. A.2 Trellis para el canal  $h_k = [0.36; 0.86; 0.36]$ . Se indica el alfabeto de símbolos y los valores esperados en cada métrica de rama.

El evento-error de menor duración para el trellis en la Fig. A.2 tiene duración 3, como se puede observar de la Fig. A.1. Analizando todas las secuencias de estados verdaderas y erróneas que dan lugar a eventos de duración 3, se encuentra que todos estos eventos-error tienen una distancia  $d_1 = 1.9988$  y un peso de Hamming  $H(e) = 1$ . Además, como

toda secuencia (de 3 o más ramas) puede generar este evento-error resulta  $P\{\Psi\} = 2^{-4}$ . Finalmente, esto implica que  $R(d_1) = 1$ .

Si ahora se analizan los eventos-error de duración 4 se encuentran dos tipos de eventos-error posibles, dando lugar a distancias  $d_2 = 3.5978$  y  $d_3 = 1.7426$ , respectivamente, y ambos con  $H(e) = 2$ . Como la mitad de las transmisiones (de 4 o más símbolos) pueden generar cada uno de estos eventos-error, entonces resulta  $P\{\Psi\} = 2^{-5}$ , y por ende  $R(d_2) = R(d_3) = 1$ . Al analizar eventos-error de mayor duración se puede ver que resultan distancias mayores, de donde se infiere que  $d_{min} = d_3$  (ver [101] para un estudio analítico más detallado). Entonces, de (A.7) se concluye que una buena estimación de la probabilidad de error es

$$P_s \lesssim R(d_1)Q\left(\frac{d_1}{2\sigma_w}\right) + R(d_2)Q\left(\frac{d_2}{2\sigma_w}\right) + R(d_3)Q\left(\frac{d_3}{2\sigma_w}\right) \simeq Q\left(\frac{1.7426}{2\sigma_w}\right). \quad (\text{A.15})$$

En la Fig. A.3 se compara la estimación numérica por Monte Carlo de la BER para este canal y la estimación de la  $P_e$  por medio de la ec. (A.15). Nótese que (A.15) no es necesariamente una cota superior en este caso, sino mas bien una cota inferior. Además, el ajuste suele mejorar a medida que se aumenta la relación señal-a-ruido (*signal-to-noise ratio* - SNR) (o equivalentemente, la relación entre energía de símbolo y energía de ruido,  $E_s/N_0$ ). Para mejorar el ajuste en la zona de baja SNR puede ser necesario agregar más términos en (A.15). §

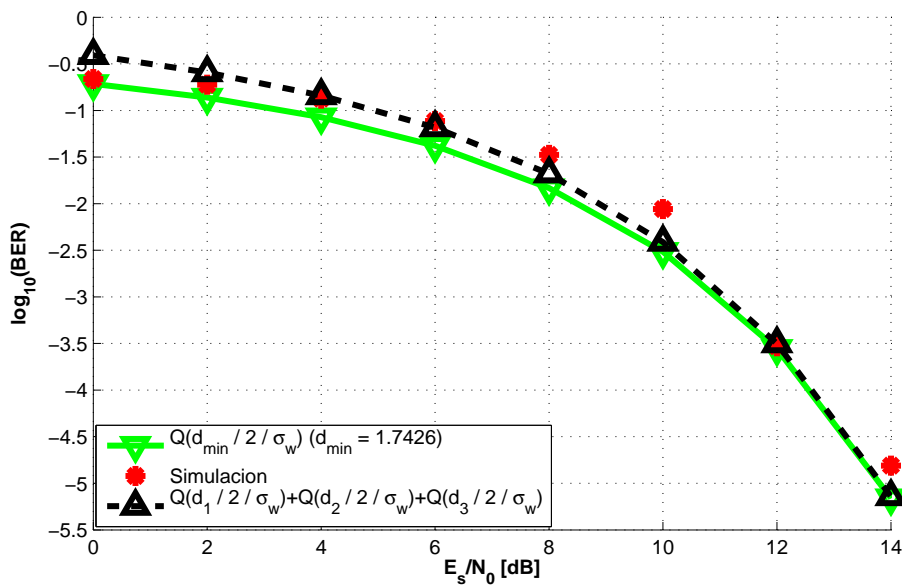


Fig. A.3 BER vs SNR para el canal  $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ .

### A.3 Probabilidad de Error de un VD Desajustado

En las secciones anteriores se ha mostrado una forma de estimar eficientemente la probabilidad de error de símbolo  $P_e$  de un VD. Esta  $P_e$  está ligada directamente a la de un receptor MLSD si se utiliza una conversión al dominio discreto que conserve una estadística suficiente. Hasta ahora se ha supuesto el canal conocido por el VD (*i.e.*, el VD conoce la respuesta al impulso  $h_n$  del canal discreto equivalente y puede calcular perfectamente la señal  $s_n$  que se observaría para cualquier secuencia hipotética  $\mathbf{a}$ ). En muchas aplicaciones esto no resulta en un buen modelo de la realidad. Un motivo es que el canal discreto equivalente debe ser estimado por el receptor, y esa estimación puede ser imperfecta. Otra razón es que el VD esté diseñado intencionalmente para trabajar con una respuesta  $\hat{h}_n$  de duración más corta que  $h_n$ . Este último caso se da frecuentemente en la práctica con el objetivo de reducir la cantidad de estados y, por ende, el costo computacional del receptor. En esta sección, se aborda el cálculo de  $P_e$  bajo la condición en que el VD estima una señal sin ruido  $\hat{s}_n(\mathbf{a})$ , diferente de la correcta ( $s_n(\mathbf{a})$ ), a causa de suponer un canal erróneo (desajustado).

Asumiendo ruido independiente de la señal, el procedimiento es en esencia el mismo que se ha presentado en la Sección A.1, con una pequeña diferencia en el cálculo de  $P\{\hat{\Psi}|\Psi$ , con  $\hat{\Psi}$  el único camino erróneo posible}. Al desarrollar (A.8) suponiendo que para una secuencia  $\mathbf{a}$  hipotética el VD estima  $\hat{s}_n(\mathbf{a}) \neq s_n(\mathbf{a})$ , resulta la condición

$$|\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})|^2 - 2\Delta^T(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})\Lambda(\mathbf{a}) \leq 2\Delta^T(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})W, \quad (\text{A.16})$$

donde  $\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  y  $W$  siguen correspondiendo a las ecs. (A.10) y (A.12), salvo que ahora las componentes  $\Delta_n(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  están dadas por

$$\Delta_n(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \hat{s}_n(\hat{\mathbf{a}}) - \hat{s}_n(\mathbf{a}). \quad (\text{A.17})$$

Por otra parte, el nuevo vector  $\Lambda(\mathbf{a})$  en (A.16), que toma en cuenta el efecto de desconocimiento del canal, viene dado por

$$\Lambda(\mathbf{a}) = [s_0(\mathbf{a}) - \hat{s}_0(\mathbf{a}), s_1(\mathbf{a}) - \hat{s}_1(\mathbf{a}), \dots, s_{K-1}(\mathbf{a}) - \hat{s}_{K-1}(\mathbf{a})]^T. \quad (\text{A.18})$$

Asumiendo nuevamente el canal discreto equivalente con ruido AWGN independiente de la señal, la expresión para la probabilidad del evento en (A.16) viene dada entonces por la ec. (A.13), salvo que ahora  $d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  está dada por (A.19) y no por (A.14)

$$d(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = \frac{|\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})|^2 - 2\Delta^T(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})\Lambda(\mathbf{a})}{|\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})|}. \quad (\text{A.19})$$

Nótese que para el caso en que el conocimiento del canal es perfecto, *i.e.*,  $\hat{s}_n(\mathbf{a}) = s_n(\mathbf{a})$ , (A.19) se reduce a (A.14), como es de esperarse.

### A.3.1 Ejemplo

Considérese el mismo canal que en el Ejemplo de la Sección A.2.2, pero con un VD que usa el canal trancado  $\hat{h}_k$ , con  $\hat{h}_0 = 0.36$ ,  $\hat{h}_1 = 0.86$  para estimar  $\hat{s}_n(\mathbf{a})$ . Una etapa de transición del trellis para este canal desajustado se muestra en la Fig. A.4. El evento-error de menor

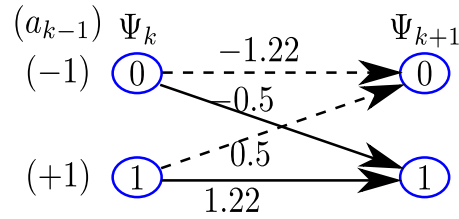


Fig. A.4 Trellis para el canal  $\hat{h}_k = [0.36; 0.86]$ . Se indica el alfabeto de símbolos y los valores esperados en cada métrica de rama.

duración para el trellis en la Fig. A.4 tiene duración 2; sin embargo, esto no es cierto para el canal  $h_k$  verdadero. Resulta que, aunque el VD trabaje sobre el trellis de la Fig. A.4, la ISI real del canal responde al trellis de la Fig. A.2. Esto implica que se debe usar la ec. (A.19) para calcular la distancia para el evento-error y que, a pesar de que  $\hat{s}_k(\mathbf{a})$  no depende de  $a_{k-2}$ , en realidad  $s_k(\mathbf{a})$  sí depende de  $a_{k-2}$ . Esto hace que, para el cálculo de  $P\{\Psi\}$ , y obviamente de  $d$ , se deban considerar valores *hipotéticos* de  $a_{k-2}$ . Este detalle es probablemente el aspecto más relevante a considerar para aplicar el procedimiento al caso de un canal desajustado. Con esto en consideración, se puede empezar calculando los términos de  $P_e$  en (A.7) para eventos de una longitud 2, comenzando por el evento en el trellis de Fig. A.4. Este evento está conformado por las secuencias de estados  $\Psi = \{S_0, S_0, S_0\}$  y  $\hat{\Psi} = \{S_0, S_1, S_0\}$ . A estas secuencias de estados les corresponden las secuencias de símbolos  $\{a_{k-1}, a_k, a_{k+1}\} = \{-1, -1, -1\}$  y  $\{\hat{a}_{k-1}, \hat{a}_k, \hat{a}_{k+1}\} = \{-1, +1, -1\}$ , respectivamente. Con ésto se puede calcular el factor  $\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a})$  en (A.19), que para este evento-error viene dado por  $\Delta(\hat{\mathbf{a}}, \mathbf{a}) = [0.72, 1.72]$ , y la distancia de Hamming es  $H(e) = 1$ . Sin embargo, para calcular el vector  $\Lambda(\mathbf{a})$  en (A.19) es necesario conocer el valor de  $a_{k-2}$ . En este caso hay dos hipótesis posibles para probar, *i.e.*,  $a_{k-2} = -1$  y  $a_{k-2} = +1$ . Bajo la hipótesis de  $a_{k-2} = -1$  resulta  $\Lambda(\mathbf{a}) = [(-1.58 + 1.22), (-1.58 + 1.22)] = [-0.36, -0.36]$ , mientras que bajo la hipótesis de  $a_{k-2} = +1$  resulta  $\Lambda(\mathbf{a}) = [(-0.86 + 1.22), (-1.58 + 1.22)] = [0.36, -0.36]$ . Si ahora se analizan los eventos con  $\Psi = \{S_0, S_1, S_0\}$  y  $\hat{\Psi} = \{S_0, S_0, S_0\}$ , para las hipótesis  $a_{k-2} = +1$  y  $a_{k-2} = -1$  se encuentran las distancias  $d_3 = 1.4785$  y  $d_4 = 0.9224$ , respectivamente. Completando en forma análoga el análisis para los demás eventos-error de duración 2, se

puede ver que una cuarta parte de ellos tiene una distancia  $d_1 = 2.8068$ , otra cuarta parte una distancia  $d_2 = 2.2508$ , otra cuarta parte una distancia  $d_3 = 1.4785$ , y finalmente otra cuarta parte tiene una distancia  $d_4 = 0.9224$  (ver Fig. A.6). De este modo, se puede estimar  $R(d_1) = R(d_2) = R(d_3) = R(d_4) = 0.25$ . En este caso, se puede verificar que al analizar eventos-

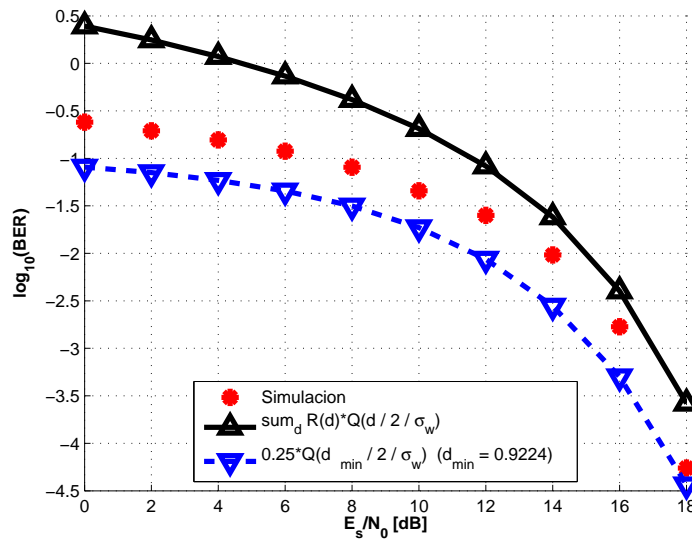


Fig. A.5 BER vs SNR para el canal  $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ , cuando el VD supone el canal  $\hat{h}_k = [0.36 ; 0.86]$ .

error de mayor duración se encuentran distancias mayores, de donde resulta que  $d_{\min} = 0.9224$ . Sin embargo, cuando hay desajuste de canal resulta menos usual que los eventos con distancia mínima tengan duración corta. Por eso puede resultar necesario usar un  $D_{\max}$  más grande en tales casos, para lo cuál resulta muy útil recurrir a cálculos computacionales.

En la Fig. A.5 se compara la estimación de la BER por Monte Carlo y la estimación de la  $P_e$  por medio de la ec. (A.7) usando distintos niveles de truncamiento en la serie. Se nota nuevamente que usando sólo el primer término de la serie (curva azul) se alcanza un buen ajuste por debajo, y usando los diez primeros términos se obtiene una cota superior (curva negra). Ambas cotas se hacen cada vez más precisas a medida que aumenta la SNR (o equivalentemente la  $E_s/N_0$ ). Este ejemplo muestra que el uso de demasiados términos en la serie de (A.7) puede ser contraproducente a baja SNR.

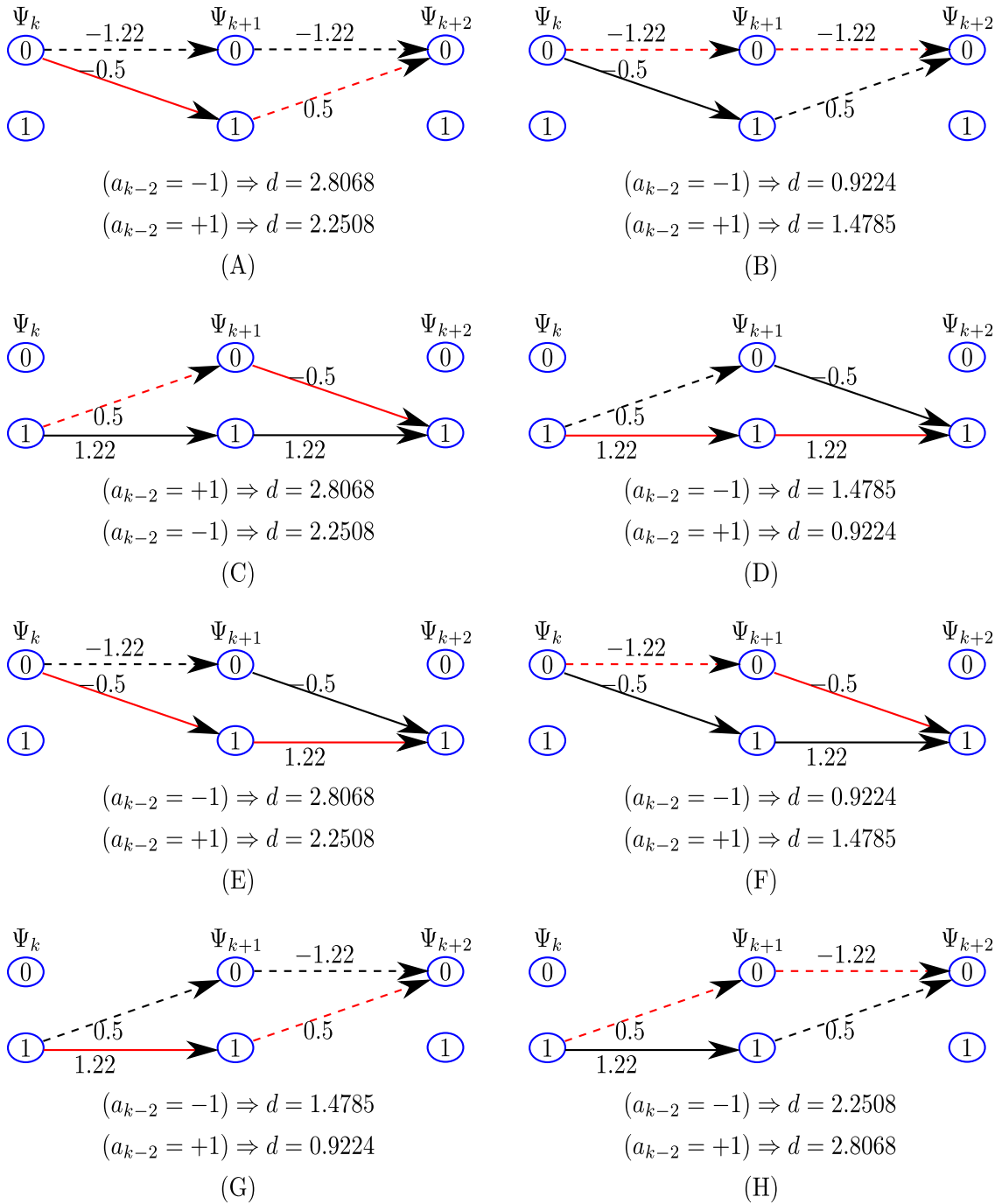


Fig. A.6 Eventos-error de un VD suponiendo el canal  $\hat{h}_k = [0.36 ; 0.86]$ , cuando el canal verdadero es  $h_k = [0.36 ; 0.86 ; 0.36]$ . En negro se indica la secuencia correcta y en rojo la secuencia seleccionada en forma errónea.