

Universidad Nacional de Córdoba

Facultad de Matemática, Astronomía, Física y Computación

Trabajo Especial de Licenciatura

---

Detección de exoplanetas con la técnica:  
Variación de tiempos de eclipse (ETV)

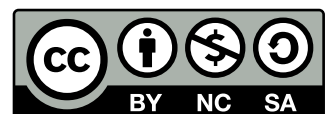
---

Matías Nahuel Ramos

Dirección: Dr. Giuppone C. y Dra. Gramajo L.

Agosto 2022

This work is licensed under a [Creative Commons “Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International”](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/) license.





## Resumen

Se han descubierto miles de exoplanetas alrededor de estrellas aisladas, aunque sólo una pequeña fracción de ellos se sabe que poseen órbitas circumbinarias. Existe un grupo de planetas circumbinarios que se encuentran alrededor de estrellas evolucionadas con períodos de pocas horas, que aún se encuentran en debate. La evolución de las estrellas binarias puede provocar grandes cambios en las formas de las órbitas, masas, radios estelares y otras propiedades físicas que afectan a los sistemas planetarios a su alrededor. Estos sistemas son detectados indirectamente con la técnica de Variaciones en los Tiempos de Eclipse (ETVs) y muchas veces se presentan soluciones orbitales que varían entre los observadores.

Nuestro objetivo es analizar la dispersión de los ajustes orbitales que poseen residuos compatibles con la mejor solución, y discutir la sensibilidad de los ajustes con respecto al conjunto de datos y a la distribución de los errores en los mismos. Realizamos nuestro estudio sobre el sistema QS Vir diseñando una estrategia de minimización para los ajustes con la técnica de ETV. Además modelamos algunos procesos astrofísicos que podrían explicar las variaciones en los tiempos de eclipse de la binaria que se observan en la literatura.

Respecto de los ajustes orbitales para identificar la presencia de un exoplaneta, encontramos que la mayoría de los parámetros orbitales no resultan estables al realizar el análisis de cómo varía el mejor ajuste en función del conjunto de datos disponibles. Además, notamos la presencia de un punto crítico de discontinuidad de la función residuo WRMS y concluimos que es debido a la discontinuidad en las incertezas asociadas a los tiempos de eclipse publicados por diferentes autores.

**Clasificación:** Gravitation, Cosmology & Astrophysics | Extrasolar planets | Binary stars | Numerical techniques.

**Palabras clave:** Planetas extrasolares | Métodos Monte Carlo en teoría de probabilidad y estadística | Métodos numéricos | Estrellas binarias | Enana blanca.

---

## Abstract

Thousands of exoplanets have been discovered around isolated stars, although only a small fraction are known to have circumbinary orbits. There is a group of circumbinary planets that are found around evolved stars with periods of a few hours, which are still under debate. The evolution of binary stars can lead to large changes in orbital shapes, masses, stellar radii, and other physical properties that affect the planetary systems around them. These systems are indirectly detected with the Eclipse Time Variations technique (ETV) and often present solutions that change with the number of observations.

Our objective is to analyze the dispersion of the orbital fits that possess the best fit solution, and to discuss the sensitivity of the fits with respect to the dataset and the distribution of errors in them. We performed our study on the QS Vir system by designing a minimization strategy for the fits with the ETV technique. We also model some astrophysical processes that could explain the variations in the eclipse times of the binary observed in the literature.

We identify the presence of an exoplanet and we found that most of the orbital parameters are not the same changing the available data set. In addition, we note the presence of a critical point of discontinuity of the WRMS residual function and conclude that it is due to the discontinuity in the uncertainties associated with the eclipse times published by different authors.

**Classification:** Gravitation, Cosmology & Astrophysics | Extrasolar planets | Binary stars | Numerical techniques.

**Keywords:** Extrasolar planets | Monte Carlo methods in probability theory and statistics | Numerical methods | Binary stars | White dwarf.

# Índice

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Sistemas binarios . . . . .	1
1.2	Binarias post evolvente común: PCEB . . . . .	3
1.3	Determinación de parámetros de una estrella binaria con tránsitos . . . . .	7
1.4	Determinación del período de una estrella binaria con tránsitos y tiempo medio de eclipse . . . . .	8
1.5	QS Virginis . . . . .	12
1.6	La población de exoplanetas alrededor de estrellas binarias . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Orígenes del cambio en el período de una binaria</b>	<b>22</b>
2.1	Efecto Applegate . . . . .	22
2.1.1	Aplicación de Mecanismo de Applegate a QS Virginis . . . . .	26
2.2	Frenado magnético . . . . .	28
2.2.1	Frenado magnético en QS Virginis . . . . .	30
2.3	Ondas gravitacionales . . . . .	32
2.4	Transferencia de masa . . . . .	34
2.5	Técnica ETV: el modelado para exoplanetas alrededor de PCEBs . . . . .	35
2.5.1	Creación de curvas sintéticas generadas por un exoplaneta . . . . .	40
2.5.2	Determinaciones previas de exoplanetas en QS Virginis . . . . .	43
<b>3</b>	<b>Problema de minimización</b>	<b>47</b>
3.1	Algoritmo genético . . . . .	48
3.1.1	Aplicación de la selección natural . . . . .	49
3.1.2	Un algoritmo genético básico . . . . .	51
3.1.3	Algoritmo elegido. <i>Scipy: Differential evolution</i> . . . . .	54
3.1.4	Criterio de convergencia . . . . .	56
3.2	Algoritmo Simplex - <i>Nelder-Mead</i> . . . . .	57
3.2.1	Simplex inicial . . . . .	57
3.2.2	Evolución y convergencia . . . . .	58
3.3	Cadenas de Markov . . . . .	59
<b>4</b>	<b>Modelado de un planeta alrededor de QS Virginis</b>	<b>64</b>
4.1	Construcción del diagrama (O-C) . . . . .	64
4.2	Obtención del mejor ajuste . . . . .	65
4.3	Estimación de incertezas . . . . .	67
4.3.1	Cadenas de Markov . . . . .	67
4.3.2	Método de grillado . . . . .	70
4.3.3	Mejor ajuste en función del conjunto de datos . . . . .	73

5 Conclusiones

77

# 1 Introducción

En abril de 2022 existían catalogados más de 5000 planetas alrededor de otras estrellas<sup>1</sup>. La mayoría orbitan a una estrella aislada, mientras que sólo una pequeña fracción orbita sistemas estelares múltiples, totalizando  $\sim 269$  exoplanetas ( $\sim 5\%$ , *catalogue of exoplanets in binary star systems*<sup>2</sup>).

En este capítulo se realiza una descripción de los sistemas binarios en general y sus clasificaciones, y en particular, se discute acerca de las binarias post-envolvente común. Adicionalmente se discute sobre la determinación de los parámetros de la binaria, en particular su período orbital. Luego se introduce la binaria estudiada en este trabajo: QS Virginis. Finalmente, se cierra el capítulo presentando los exoplanetas descubiertos alrededor de sistemas binarios.

## 1.1 Sistemas binarios

La técnica de detección de exoplanetas que se analizará en este trabajo es la técnica de variaciones de tiempo de eclipse (*Eclipsing Timings Variations: ETV*, por sus siglas en inglés). Esta requiere la observación de un tipo particular de estrella variable: las binarias eclipsantes.

Una estrella se dice variable cuando se observa una variación en brillo o luminosidad en escalas de tiempo menores a las escalas evolutivas (Sterken & Jaschek, 1996). Las binarias eclipsantes son estrellas variables cuya variabilidad es causada por el eclipse de una de las estrellas del sistema. Éstas, tienen la ventaja de ser sistemas en los cuales la inclinación con respecto al plano del cielo es uno de los parámetros que se puede determinar a partir de la curva de luz (siendo  $\sim 90^\circ$  un sistema aproximadamente de canto).

Como la inclinación es tal que se observan los eventos de ocultación entre componentes en la curva de luz, nos permite observar una variabilidad en el flujo normalizado respecto al tiempo del sistema (las curvas de luz en fase), con un período proporcional al período orbital de la binaria causado por la ocurrencia de eclipses entre las componentes.

Dentro de las posibles clasificaciones de las binarias eclipsantes que se encuentran en la literatura, se adopta aquella en la que se han clasificado a partir de los lóbulos de Roche: separadas, semi-separadas y de contacto (ver el panel derecho de la Fig. 1). Para comprender la diferencia entre estas clases es necesario introducir el concepto del lóbulo de Roche y los puntos lagrangianos. Para ello, se puede ver en el panel izquierdo de la Fig. 1 donde se muestran las superficies de igual potencial gravitacional (o equipotenciales) para un sistema binario en órbita circular descrito desde un referencial que rota junto con el sistema (sistema de coordenadas co-móvil). Esta geometría responde al problema restringido de tres cuerpos, en donde la masa de unos de los cuerpos es despreciable (ver

<sup>1</sup>[http://exoplanet.eu/planets\\_binary/](http://exoplanet.eu/planets_binary/)

<sup>2</sup><https://www.univie.ac.at/adg/schwarz/multiple.html>

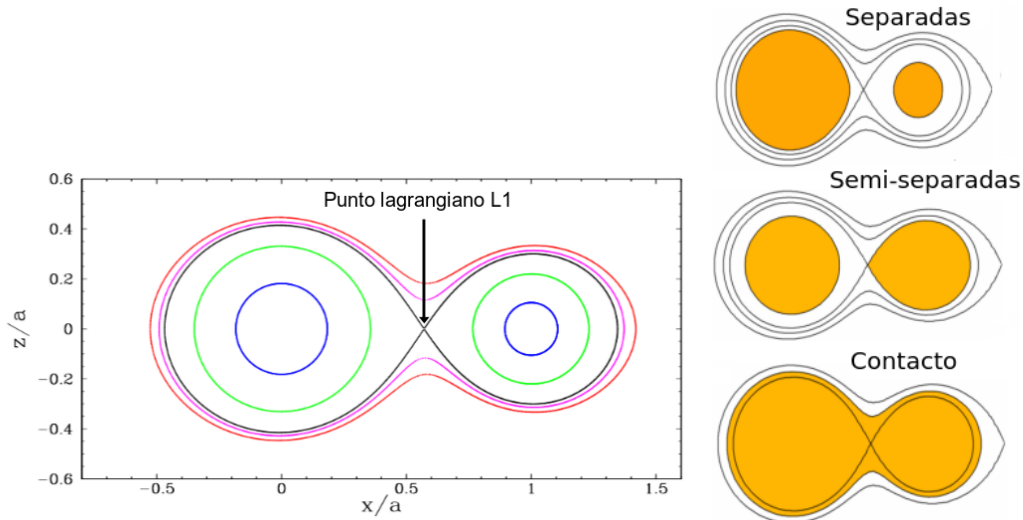


Figura 1: *Panel izquierdo*: Líneas de equipotencial para una binaria con cociente de masa  $q = M_2/M_1 = 0.5$  y separación  $a$ . Se muestran 5 valores de equipotenciales. *Panel derecho*: Esquemas de los tres tipos de clasificación de binarias. Figuras adaptadas de Prsa et al. (2011) y Terrell (2001), respectivamente.

Murray & Dermott, 1999). En primera aproximación, la superficie de las estrellas debe tomar la forma de una de esas equipotenciales. La superficie equipotencial que contiene al punto lagrangeano L1 es la llamada lóbulo crítico de Roche (Paczynski, 1971). Cuando una de las estrellas llena ese volumen puede transferir masa a través de L1. Según como llenan los lóbulos se las puede clasificar en:

**Binarias separadas** (o *detached*, por su expresión en inglés) son sistemas en los que las estrellas tienen un volumen inferior a su asociado lóbulo. La superficie de las estrellas pueden mostrar apartamientos de la esfericidad pero no existe transferencia de masa.

**Binarias semi-separadas** (o *semi-detached*) poseen una componente que llena su lóbulo de Roche. Puede haber transferencia de masa desde la estrella que llena su lóbulo hacia la compañera.

**Binarias de contacto** (o *contact binaries*) son sistemas en donde ambas estrellas llenan su lóbulo de Roche y por lo tanto puede haber transferencia de masa y energía a través del  *cuello*  que une ambas estrellas.

Las características de las curvas de luz en función del tipo de sistema se pueden observar en la Fig. 2. La forma de las curvas varía considerablemente, se puede ver que la curva a medida que las estrellas llenan sus lóbulos de Roche se vuelven semejantes a una señal sinusoidal. Esto es esperable ya que, en el caso de envoltente común por ejemplo, la temperatura superficial de la envoltente se uniformiza y la morfología de la binaria resulta en una señal sinusoidal en las que apenas se pueden distinguir los mínimos primarios y secundarios.

Todos los sistemas planetarios propuestos alrededor de binarias eclipsantes que han sido analizados mediante la técnica ETV orbitan a binarias de corto período orbital (del



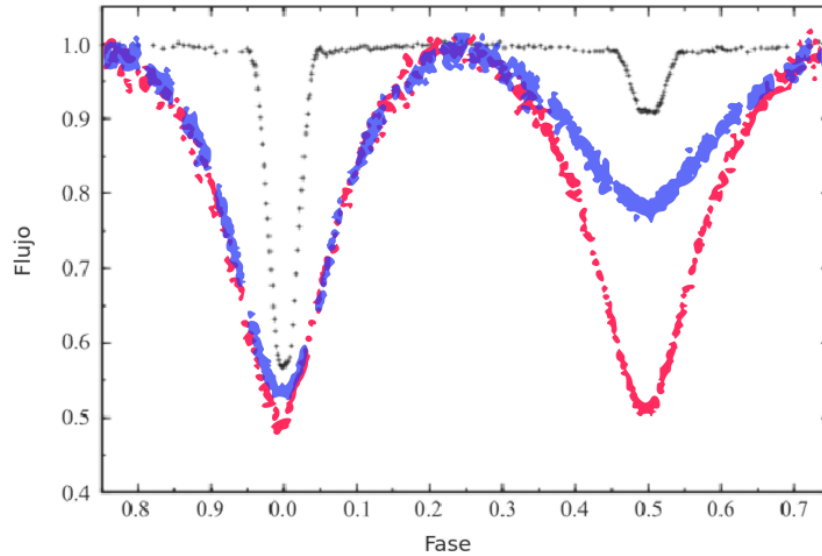


Figura 2: Curvas de luz representativas en función del tipo de binaria. Los puntos negros muestran la curva de luz de una binaria separada, los azules de una semi-separada y los puntos rojos de una binaria de contacto. Figura adaptada de [Skelton & Smits \(2009\)](#).

orden de horas), esto es el resultado del sesgo observacional intrínseco de la técnica, como se discute en la Secc. 2.5.

La teoría de evolución estelar que intenta explicar el origen de estos sistemas binarios cercanos introduce al subconjunto de sistemas binarios post-envolvente común (o *Post-Common envelope binaries*: PCEB, por sus siglas en inglés). Su origen y características se discutirán en la siguiente sección.

## 1.2 Binarias post envolvente común: PCEB

Las binarias post envolvente común consisten en una estrella primaria que puede ser una enana blanca o una sub-enana de tipo espectral B/O y una estrella secundaria de baja masa o una enana marrón. Estas binarias poseen períodos del orden días/horas y por lo tanto separaciones de algunas milésimas de unidades astronómicas ([Zorotovic & Schreiber, 2013](#)).

Para poder entender los mecanismos de su formación, actualmente existen varias teorías propuestas por diferentes autores.

[Willems & Kolb \(2004\)](#) presentan un esquema que describe el origen de las binarias PCEB como se puede ver en la Fig. 3. En la misma, se pueden observar 4 etapas: primero un estado en que las estrellas se encuentran en secuencia principal formadas en el mismo momento, aunque con distinta masa. En el segundo panel se muestra como la estrella más masiva evoluciona más rápido y sale de su estadio en la secuencia principal y comienza a expandirse. En el tercer panel se muestra como se llega a un estado de envolvente común y finalmente, en el panel inferior, el remanente es una binaria de corto período.

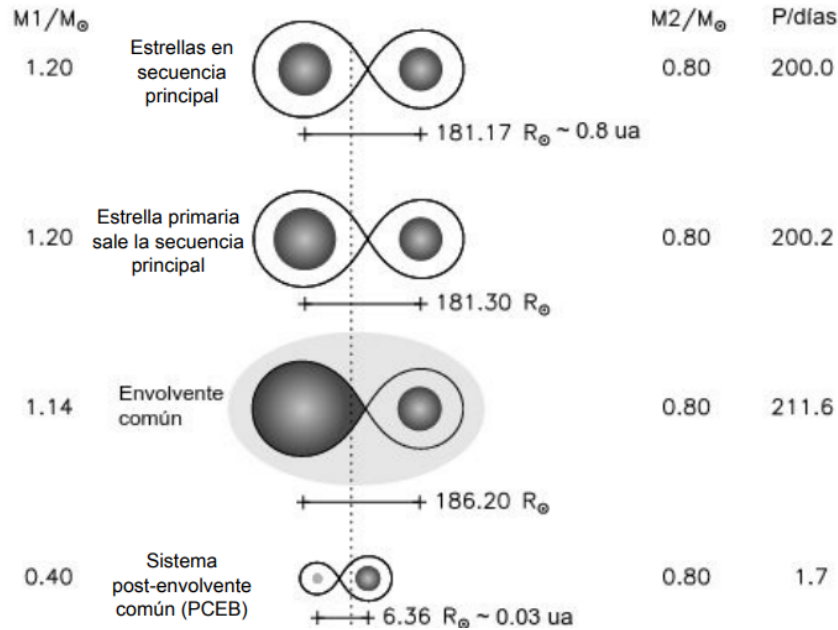


Figura 3: Esquema evolutivo para una binaria que pasa por un estado de envolvente común y el remanente es una enana blanca y una estrella de secuencia principal. Se señalan la masas estelares, la separación del sistema y el período orbital de la binaria. Figura adaptada de [Willems & Kolb \(2004\)](#).

Siguiendo el esquema de [Willems & Kolb \(2004\)](#), al considerar un sistema estelar binario donde ambas estrellas se encuentran en secuencia principal (llevan a cabo la fusión de hidrógeno en su núcleo) y donde las masas de las estrellas difieren sustancialmente, implica que la estrella más masiva evolucionará fuera de la secuencia principal primero y por lo tanto comenzará a expandirse. Si la separación del sistema es lo suficientemente cercana, esto llevará a una fase de envolvente común (*Common Envelope: CE*, por sus siglas en inglés). Esta etapa se caracteriza porque ambas componentes están sumergidas en el material expulsado por la primaria. Luego, debido a la fricción con la envolvente común, el sistema pierde momento angular orbital y la separación de las estrellas disminuye ([Maxted et al., 2001](#); [Copperwheat et al., 2011](#)). La mayoría de la masa de la primaria es eyectada por la transferencia de momento angular y de energía hacia la envolvente en escalas de tiempo de semanas o meses ([Ivanova et al., 2013](#)).

Eventualmente la envolvente común es expulsada del sistema y como resultado se tiene un sistema estelar binario compacto. Por ejemplo, un sistema que inicialmente tenía una separación de 1 ua (unidad astronómica) ahora tiene una separación de 1 o 2 radios solares (1 radio solar  $\sim 0.005$  ua) y esto es relevante dado que si la separación de la binaria era mayor antes de que una de las componentes evolucionase, entonces, la zona en la que podrían haber sobrevivido planetas serían orbitas más alejadas del par binario ([Mustill et al., 2013](#)). La posible formación de un disco circumbinario constituido por material de la envolvente común que fue eyectado a finales de la fase de envolvente común y que no fue desligado gravitacionalmente del par binario podría dar lugar a la formación de los

Tabla 1: Tabla recortada de [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#) donde se muestran algunos parámetros de las PCEB conocidas en ese momento.

Nombre	Nombre alt.	$P_{bin}[d]$	$M_1[M_\odot]$	$M_2[M_\odot]$
NNSer	2MJ1552+1254	0.13008014	$0.535 \pm 0.012$	$0.111 \pm 0.004$
V471 Tau	2MJ0350+1714	0.52118343	$0.84 \pm 0.05$	$0.93 \pm 0.07$
RR Cae	2MJ0421-4839	0.30370363	$0.440 \pm 0.022$	$0.183 \pm 0.013$
GK Vir	SDSS J1415+0117	0.344330833	$0.564 \pm 0.014$	$0.116 \pm 0.003$
HU Aqr	2MJ2107-0517	0.08682041	$0.80 \pm 0.04$	$0.18 \pm 0.06$
<b>QS Vir</b>	EC13471-1258	0.1507575	$0.78 \pm 0.04$	$0.430 \pm 0.04$
RXJ2130.6+4710	2MJ2130+4710	0.52103562	$0.554 \pm 0.017$	$0.555 \pm 0.023$
SDSS J0857+0342	CSS03170	0.06509654	$0.51 \pm 0.05$	$0.09 \pm 0.01$

llamados *planetas de segunda generación*, a partir del material del disco ([Kashi & Soker, 2011](#); [Schleicher & Dreizler, 2014](#); [Völschow et al., 2014](#)).

El subconjunto de PCEB que son binarias eclipsantes permiten medir con mucha precisión los tiempos de eclipse por la gran diferencia de radio y brillo entre las dos componentes ([Parsons et al., 2010](#)). Esto facilita analizar los cambios en tiempos de eclipse con precisión y, de esta forma, es posible estudiar la evolución de estos sistemas como así también la presencia de planetas circumbinarios. Se ha visto que la mayoría de PCEB con bases temporales de observación de más de 5 años poseen variaciones en los tiempos de eclipse ([Zorotovic & Schreiber, 2013](#)).

En el trabajo de [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#) analizan los posibles escenarios de formación para planetas circumbinarios alrededor de PCEB. Para ello utilizaron el conocimiento que tenían sobre formación planetaria, estadísticas de planetas gigantes alrededor de binarias (evolucionadas y primordiales) y la teoría de la evolución de las estrellas binarias compactas cercanas. El método de análisis que utilizaron consistió en la recopilación de una lista completa de PCEBs eclipsantes observadas (ver Tabla 1, para un subconjunto), luego estimaron la fracción de sistemas que muestran variaciones de los periodos aparentes en los tiempos de eclipse. Finalmente, reconstruyeron la historia evolutiva de las PCEB y se realizaron modelos de población de PCEBs para caracterizar sus progenitores binarios de secuencia principal.

En la Fig. 4 se muestra la población inicial de binarias de secuencia principal (identificadas como tipo MS+MS) que poseen una distribución de masa de acuerdo a la presentada por [Kroupa et al. \(1993\)](#) y una distribución de separaciones inicial de acuerdo a [Davis et al. \(2008\)](#). Una vez que [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#) construyeron la población inicial, la evolucionaron mediante el código presentado por [Hurley et al. \(2002\)](#). Los sistemas fueron evolucionados por un tiempo  $t = t_{gal} - t_{born}$ , donde  $t_{gal}$  representa la edad de la galaxia  $\sim 13.5Gyr$  y  $t_{born}$  representa la edad de la galaxia al momento de origen de la binaria. Estos sistemas que evolucionaron por una fase de envoltente común pueden clasificarse en 4 sub-tipos de PCEB. Los histogramas de colores en la Fig. 4 señalan a qué tipo de binaria evolucionan luego de la simulación. A continuación se describen los tipos de PCEB brevemente (para más detalle ver [Zorotovic & Schreiber 2013](#)).

**He WD:** Si la primaria llena su lóbulo de Roche durante su salida de la secuencia principal, el núcleo estará principalmente compuesto por helio. Luego de que la envoltente sea expulsada, el núcleo no será lo suficientemente masivo para iniciar la fusión de helio y el remanente es una enana blanca de helio (*Helium White Dwarf*: He WD, por sus siglas en inglés).

**sbBs:** Si el núcleo de la primaria crece lo suficiente podría iniciar la fusión de helio luego de la expulsión de la envoltente común. Cuando esto ocurre la estrella es de tipo sdB (*Subdwarf B Star* por sus siglas en inglés).

**post-sbBs:** Luego de que transcurran  $\sim 10^8$  años en una etapa de estrella tipo sdB, finaliza la fusión de helio y el remanente se denomina post-sdB.

**C/O WD:** En el caso de que la fase de envoltente común ocurra luego de que la primaria inicia la fusión de helio, cuando la envoltente sea expulsada el remanente será una enana blanca conformada por carbono y oxígeno (*Carbon/Oxygen White Dwarf*: C/O WD, por sus siglas en inglés).

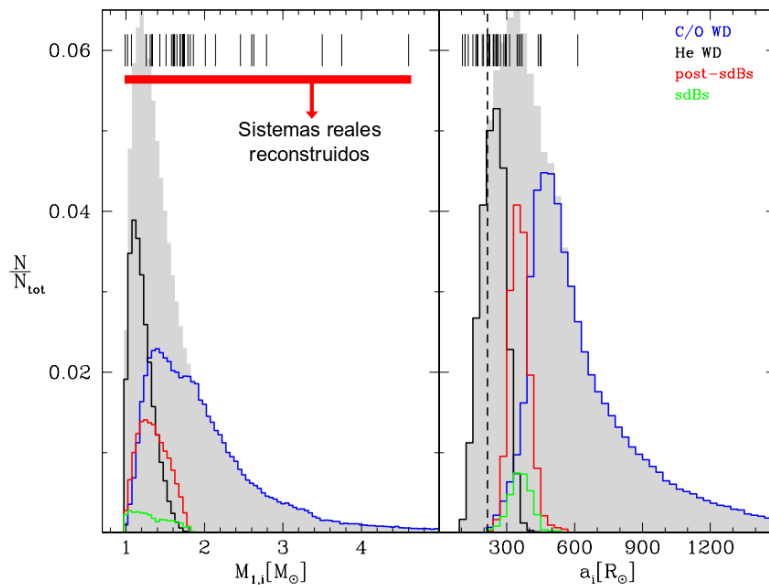


Figura 4: Distribución inicial de masa (izquierda) y distribución inicial de separaciones (derecha) para las simulaciones realizadas por [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#). La línea discontinua vertical corresponde a 1 ua. Las líneas verticales cortas en la parte superior de cada panel representan el valor reconstruido para las PCEB consideradas en ese trabajo. Ver texto para más detalles. Figura adaptada de [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#).

Los resultados finales de las simulaciones de [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#) se pueden observar en la Fig. 5. Los períodos orbitales resultantes indican que estos sistemas poseen períodos típicos de horas o pocos días.

Del conjunto de PCEBs conocidos y presentados en [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#) se elige a QS Virginis para nuestro análisis, la principal motivación siendo la falta de consenso en las explicaciones de su señal ETV en la literatura (ver sección 2.5.2).

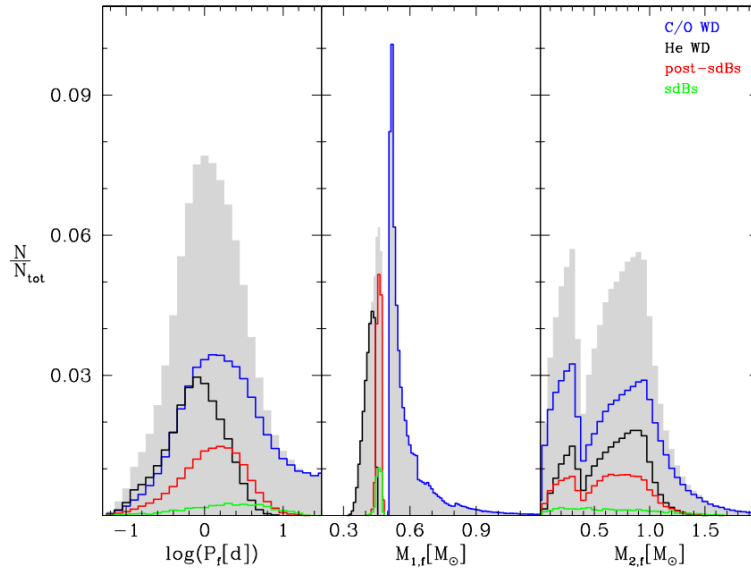


Figura 5: Período orbital (izquierda), masa de la primaria (medio) y masa de la secundaria (derecha) para los sistemas evolucionados. Separados según qué tipo de primaria contienen, el histograma gris representa toda la población. Figura adaptada de [Zorotovic & Schreiber \(2013\)](#).

### 1.3 Determinación de parámetros de una estrella binaria con tránsitos

El primer paso para el análisis del sistema estelar binario consiste en caracterizarlo. Una estrella binaria eclipsante posee una curva de luz que puede ser modelada para obtener parámetros físicos y geométricos del sistema como el período orbital, la excentricidad, los radios, etc.

Generalmente, el modelado de las curvas de luz para la obtención de los parámetros de la binaria se lleva a cabo mediante un código informático que sintetiza una curva de luz teórica, utilizando leyes físicas correctas y completas (en lugar de simplificaciones) y la compara con la curva de luz observada. El algoritmo modifica las estimaciones de los parámetros físicos y geométricos hasta que las curvas de luz teórica y observada coincidan. Los métodos de síntesis más utilizados han sido el programa LIGHT ([Hill, 1979](#)), el método WINK ([Wood, 1972](#)) y el método Wilson-Devinney ([Wilson & Devinney, 1971](#)). Estos métodos se han vuelto cada vez más elegantes, incorporando modelos de atmósferas estelares y otros refinamientos técnicos y físicos (ver [Wilson 1994](#) y [Kallrath 1999](#) para más detalles). Una herramienta que facilita el modelado es el paquete desarrollado para python: *PHOEBE* ([Conroy et al., 2020](#)).

Si se considera una binaria aislada, se tiene que su período orbital es un parámetro constante (problema de dos cuerpos ligado). Entonces el observar una variación en éste implica que el sistema no es aislado o que existen otros efectos físicos que faltan ser modelados.

La construcción de las curvas de luz implica determinar parámetros como los radios  $R_1$  y  $R_2$ , la excentricidad, el período de la binaria y el tiempo medio de eclipse. Tal como mencionamos, el tiempo medio entre eclipses no debería cambiar si no hay efectos adicionales que perturben a la binaria, no obstante se discute esto más adelante. Un ejemplo de curva de luz sintética se muestra en la Fig. 6 donde se pueden observar los datos y la curva de luz modelada como línea continua negra. También se observa el mínimo principal en azul y el secundario en naranja. Entre los parámetros de la curva de luz se destacan  $e = 0.194$ ,  $P_{bin} = 19$  años,  $T_1 = 7000K$  (temperatura efectiva),  $T_2 = 6000K$ ,  $i = 80^\circ$ ,  $q = M_2/M_1 = 0.3$ . En particular se remarca la posibilidad de ajustar el parámetro *tiempo medio de eclipse*, el cual será esencial para el eventual análisis de la señal ETV.

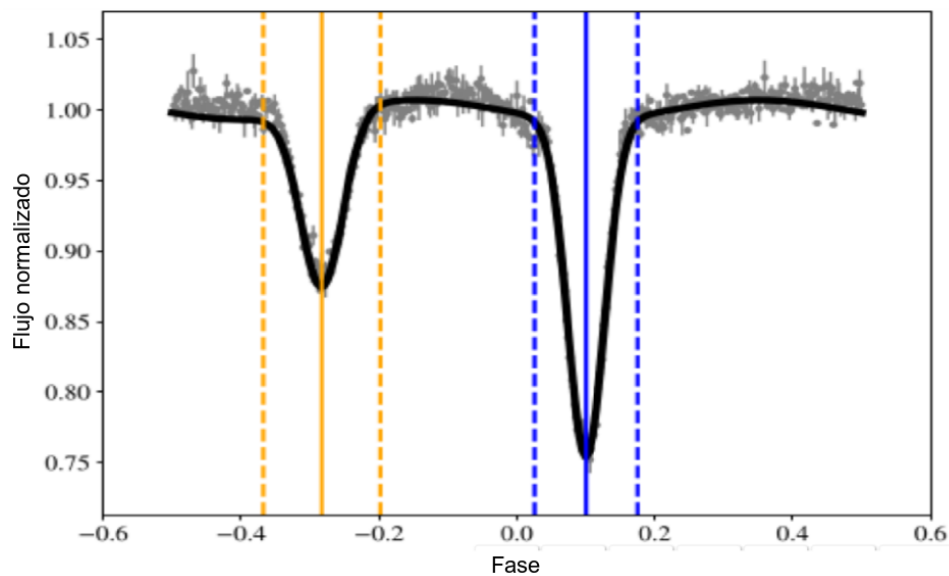


Figura 6: Esquema del ajuste de una curva de luz sintética usando un modelo de dos gaussianas. Figura reproducida de [Conroy et al. \(2020\)](#).

A continuación se describe el proceso para la determinación del período orbital de la binaria  $P_{bin}$ .

#### 1.4 Determinación del período de una estrella binaria con tránsitos y tiempo medio de eclipse

La forma de determinar el período de la binaria es utilizando los modelos de efemérides ([Sterken, 2005](#)). Estos consisten en la predicción de cuándo ocurrirán los **tiempos medios de eclipses** en función del ciclo asociado.

El modelo más simple es el de la efeméride lineal, que se muestra en la siguiente ecuación:

$$T_{ecl} = t_0 + P_{bin}l \quad (1)$$

donde  $T_{ecl}$ ,  $t_0$ ,  $P_{bin}$  y  $l$  representan el tiempo de eclipse medio, el tiempo asociado al eclipse con ciclo cero, el período orbital de la binaria y el ciclo asociado respectivamente. La interpretación de este modelo parte de considerar un problema de dos cuerpos que, dada una órbita ligada, posee un período orbital constante.

El siguiente modelo en complejidad es el de una efeméride cuadrática, la cual incluye un factor cuadrático en el ciclo  $l$ .

$$T_{ecl} = t_0 + P_{bin}l + \beta l^2 \quad (2)$$

El factor  $\beta$  representa la pérdida/ganancia de período orbital del sistema de forma constante y esto puede ser debido a distintos efectos físicos (transferencia de masa, frenado magnético, emisión de ondas gravitacionales, etc). Los orígenes de variaciones del período orbital (y por lo tanto los tiempos de eclipse) serán desarrollados en el Capítulo 2.

Otro aspecto a tener en cuenta son las escalas de tiempo utilizadas para la medición de  $T_{ecl}$ . Debido al movimiento de la Tierra alrededor del Sol y la velocidad finita de la luz, medir tiempos relacionados a estrellas, binarias u otros objetos fuera del sistema solar es un desafío que debe ser tratado cuidadosamente. El tiempo exacto en el que cierto evento es observado depende de la posición de la Tierra con respecto al Sol y del reloj utilizado para medir el tiempo. Para ser capaces de comparar observaciones de diferentes épocas el tiempo de observación puede ser convertido a un conjunto de marcas de tiempo (Eastman et al., 2010).

En astronomía no se utiliza el calendario estándar civil Gregoriano, sino el calendario Juliano. Las fechas julianas se miden en decimales, con el origen  $JD = 0$  coincidente con el mediodía en Greenwich del 24 de noviembre del año 4714 a.C. en el calendario Gregoriano. Dado que las fechas julianas hoy en día son números muy largos, se define la fecha juliana modificada o *Modified Julian Date* (MJD). La cual comienza su conteo a medianoche del 17 de noviembre de 1858, entonces  $MJD = JD - 2400000.5$ . Para independizarse del movimiento de la Tierra con respecto al Sol se pueden utilizar las fechas julianas heliocéntricas (*Heliocentric Julian Date*: HJD). Para ser incluso más precisos, se puede corregir el movimiento del sol con respecto al baricentro del sistema solar y usar fechas julianas baricéntricas (*Barycentric Julian Date*: BJD), estas últimas también pueden ser expresadas con respecto a las fechas julianas modificadas y así obtener *Heliocentric Modified Julian Date*: HMJD y *Barycentric Modified Julian Date*: BMJD, respectivamente.

El segundo aspecto importante es al asignado de marcas de tiempo al tiempo estándar utilizado, esto se refiere a la forma de, por ejemplo, los ticks de un reloj (Eastman et al., 2010). Un estándar de tiempo comúnmente utilizado es el tiempo universal coordinado (*Universal Time Coordinated*: UTC), este sistema incluye segundos bisiestos (*leap seconds*) que se acumulan durante los años y llevan a saltos en la escala temporal. Lo cual puede dificultar las comparaciones temporales. Cuando se utilizan marcos de referencias

heliocéntricos y baricéntricos usualmente se requiere más precisión. Existen varias alternativas a UTC las cuales incluyen, en orden de precisión creciente, el tiempo internacional atómico TAI (TAI por *Temps Atomique International*), Tiempo Terrestre (*Terrestrial Time*: TT, por sus siglas en inglés) y tiempo dinámico baricentrico (*Temps Dynamique Barycentrique*: TDB, por sus siglas en francés). TAI corre casi al mismo ritmo que UTC pero no incluye segundos bisiestos y actualmente  $TAI = UTC + N$  donde  $N = 37$  s. TT incluye un desplazamiento con respecto a TAI, que se introdujo para mantener la continuidad con su predecesor *Ephemeris Time*, entonces aproximadamente se tiene  $TT = TAI + 32.184$  s. El TDB es un estándar de tiempo relativista en el marco de referencia del baricentro del sistema solar, y es igual al TT corregido por la dilatación del tiempo y el redshift gravitacional causado por los cuerpos del sistema solar. TDB difiere del TT en un máximo de 3.4 ms. Entonces:

$$TDB = UTC + N + 32.184 + (TDB - TT) \quad (3)$$

Para obtener la máxima precisión en las mediciones temporales se suele utilizar BMJD (TDB).

Regresando a los modelos de efemérides, en la Fig. 7 se puede observar el ajuste de ambas efemérides al sistema QS Virginis (datos observacionales de [Bours 2015](#)). El ajuste permite entonces determinar con mucha precisión el período de la binaria  $P_{bin}$ , que puede cambiar según los datos que se tenga para realizar el ajuste.

Se puede concluir que los modelos son cualitativamente indistinguibles dado el pequeño factor que acompaña al término cuadrático. No obstante, pueden revelarse diferencias al calcular la diferencia entre el tiempo de eclipse medio observado y el calculado. Esto da origen al **diagrama (O-C)**, el cual básicamente es una herramienta que permite la evaluación e interpretación de la diferencia entre la medición de un observable y su valor predicho por un modelo ([Sterken, 2005](#)).

El diagrama (O-C) o diagrama de valor O[bservado] menos C[alculado] es una herramienta que permite la evaluación e interpretación de la discordancia entre la medida de un acontecimiento observable y su valor previsto o pronosticado. Esta herramienta se utiliza cuando se discuten fenómenos cíclicos en los que los tiempos de ocurrencia de un determinado evento están sujetos a irregularidades. El diagrama (O-C) se construye, entonces, trazando la cantidad O-C en función del tiempo, y cuando las desviaciones trazadas son sistemáticas y superan los errores experimentales, la interpretación correcta de estas desviaciones conduce a un mejor modelo ([Sterken, 2005](#)).

En la Fig. 8 se muestran los diagramas (O-C) construidos mediante los datos de la Fig. 7. En esta figura se puede notar la diferencia entre los diagramas construidos mediante la efeméride lineal y cuadrática.

Para clarificar la construcción de los diagramas, a continuación se muestran las ecua-



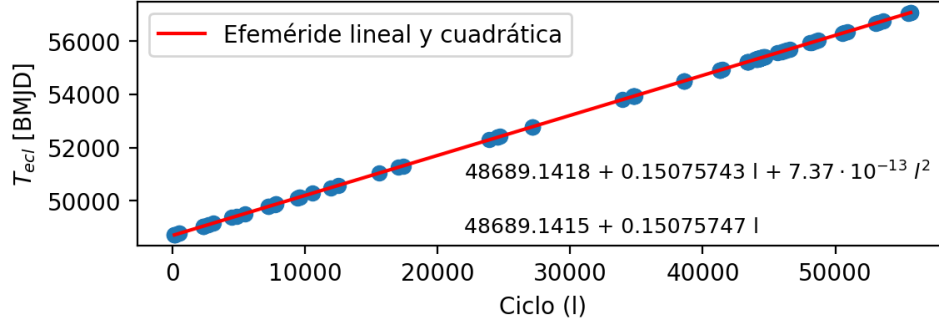


Figura 7: Ajuste de modelos de efemérides para QS Virginis. Se muestran los parámetros ajustados para las ecuaciones de efemérides según 1 y 2. Ver texto para más detalles. Datos observacionales de Bours (2015).

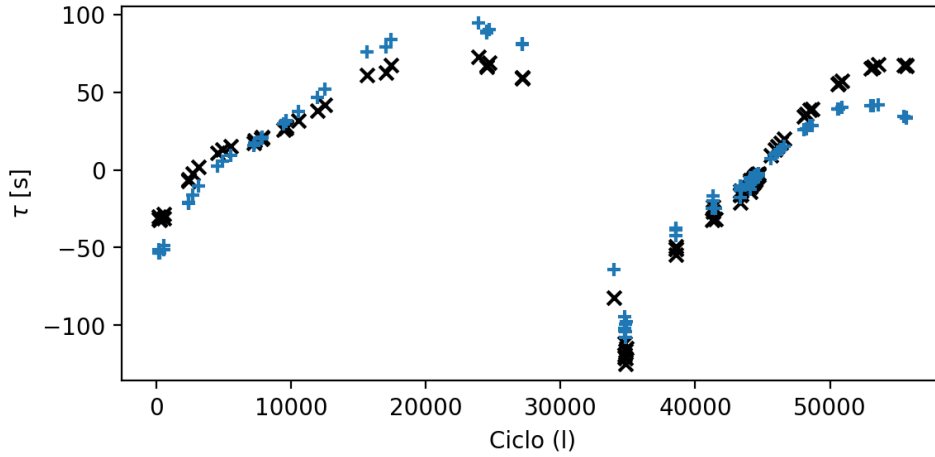


Figura 8: Diagramas (O-C) construidos mediante el modelo de efeméride lineal (x) y efeméride cuadrática (+).

ciones utilizando los modelos de efeméride lineal y cuadrática, respectivamente:

$$(O-C) = T_{ec}(l) - (t_0 + lP_{bin}) \quad (4)$$

$$(O-C) = T_{ec}(l) - (t_0 + lP_{bin} + \beta l^2) \quad (5)$$

Donde  $P_{bin}$ ,  $l$  y  $t_0$  representan el período orbital de la binaria, el ciclo y el tiempo asociado al eclipse con  $l = 0$ , respectivamente. El parámetro  $\beta$  es un factor que indica cómo es el cambio del período de la binaria (por ejemplo: el período de la binaria disminuye 10 segundos por año) y esto puede ser debido a transferencia de masa, frenado magnético, emisión de ondas gravitacionales y/o la señal causada por una compañera lejana. Como se mencionó anteriormente, estos escenarios serán desarrollados en el Capítulo 2.

Finalmente, en un sistema binario típico el período de la binaria se mantiene constante, mientras que si se consideran efectos físicos adicionales, se pueden explicar los cambios de período observados.

## 1.5 QS Virginis

QS Virginis es una de las PCEBs que llaman su atención por la variación de período que presenta.

El descubrimiento de QS Virginis (QS Vir) fue realizado por el survey [Stobie et al. \(1997\)](#), cuyo objetivo fue observar el hemisferio sur en busca de fuentes con magnitudes hasta  $B \sim 18$ . Las coordenadas obtenidas fueron:  $\alpha = 13^h 49^m 51.95^s$  (J2000.0) y  $\delta = -13^\circ 13' 3.4''$  (J2000.0). En la Fig. 9 se puede observar un esquema que muestra una representación del sistema y algunos parámetros físicos de interés.

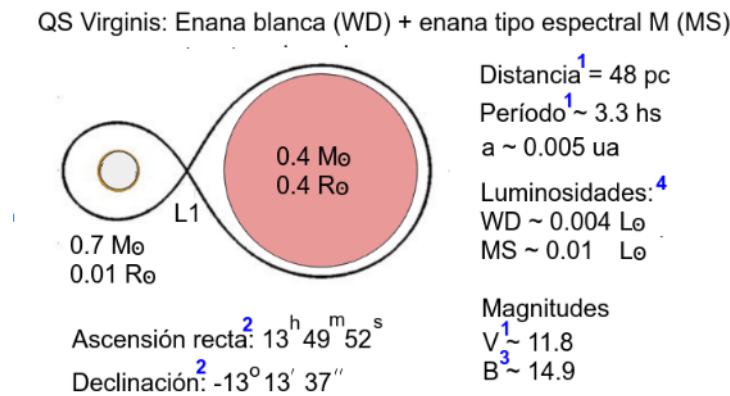


Figura 9: Esquema de QS Virginis. <sup>1</sup>: [O'Donoghue et al. \(2003\)](#), <sup>2</sup>: [Gaia Collaboration \(2018\)](#), <sup>3</sup>: [Zacharias et al. \(2013\)](#), <sup>4</sup>: calculada con el radio y temperatura de 1.

Un punto ampliamente discutido a lo largo de los años es si el sistema posee o no transferencia de materia desde la estrella secundaria hacia la primaria.

En el trabajo de [Kawka et al. \(2002\)](#) se realizaron observaciones fotométricas y espectroscópicas del sistema y se pudo determinar el radio de la estrella secundaria (utilizando la medición del ancho a mitad de altura de la línea de emisión  $H\alpha$  y suponiendo sincronización tidal) en  $0.42 \pm 0.08 R_{\odot}$ , siendo menor al radio del lóbulo de Roche determinado en  $0.47 \pm 0.01 R_{\odot}$ . Lo que indica que la secundaria está cerca de llenar su lóbulo de Roche. La ausencia de acreción por el punto lagrangiano L1 y el hecho de que la secundaria está a punto de llenar su lóbulo de Roche indica que se trata de una nova hibernante ó también conocida como binaria cataclísmica hibernante ([Livio & Shara, 1987](#)). Adicionalmente, mediante el análisis de la curva de luz, los autores estimaron la duración de los eclipses en  $\sim 15$  minutos. Utilizaron este valor para calcular la inclinación de la binaria que resultó en:  $i = 73^\circ.5 \pm 1^\circ.1$ .

[O'Donoghue et al. \(2003\)](#) clasificaron al sistema como una binaria cataclísmica hibernante teniendo en cuenta los siguientes puntos:

- La velocidad rotacional de la primaria es de  $400 \pm 100$  km/s y la estrella rota en 120s. Tal rotación rápida indica que el sistema estuvo en una fase de *spin-up* ocasionada

por la transferencia de masa. Se puede notar entonces que la enana blanca no está actualmente acoplada tidalmente<sup>3</sup>.

- El comportamiento del perfil de la línea de emisión  $H\alpha$  posee una variabilidad en función de la fase orbital de la binaria. Esto indica que las regiones de absorción están fijas con respecto a un sistema de coordenadas rotante fijo a la binaria y, por lo tanto existe una transferencia de masa débil.

Adicionalmente, O'Donoghue et al. (2003) realizaron un análisis espectroscópico de líneas de emisión del hidrógeno del sistema y determinaron que las fuentes de emisión se ubican en interior de ambos lóbulos de Roche. Para explicar la presencia de material orbitando a la enana blanca se propone el escenario de acreción de material de bajo nivel mediante vientos estelares por parte de la estrella secundaria (es decir, no por transferencia de masa a través del punto L1).

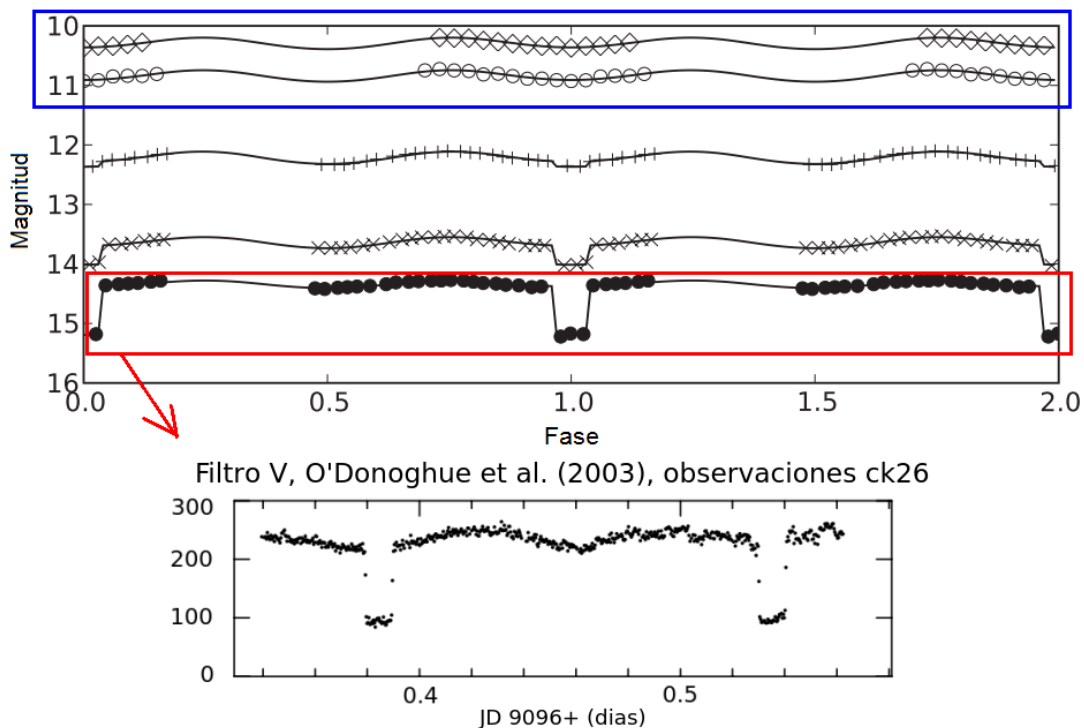


Figura 10: *Panel superior* : Curvas de luz de QS Virginis. Los datos en el rectángulo azul son los presentados por Ribeiro et al. (2010) y el resto por O'Donoghue et al. (2003), las líneas continuas representan los modelos ajustados por Ribeiro et al. (2010). *Panel inferior*: observaciones de O'Donoghue et al. (2003) en el filtro V y la integración de una noche a la cual se denomina ck26 (ver Tabla 5 de O'Donoghue et al. (2003)), el eje Y representa el número de cuentas corregidas por extinción [ $s^{-1}$ ]. Figuras adaptadas de O'Donoghue et al. (2003) y Ribeiro et al. (2010).

En el trabajo de Ribeiro et al. (2010) se presentan nuevas observaciones fotométricas

<sup>3</sup>Al estimar el período rotacional de la estrella secundaria con la velocidad rotacional  $V_{rot} = 140\text{km/s}$  y el radio  $R = 0.42R_{\odot}$  dados en Kawka et al. (2002), se tiene que el período rotacional es de  $\approx 3.6h.s$ . Es decir, que la estrella secundaria si está bajo acople tidal.

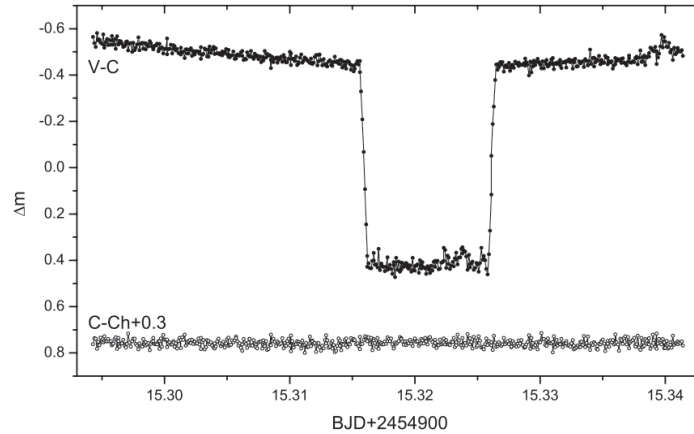


Figura 11: Curva de luz de QS Virginis. Figura adaptada de [Qian et al. \(2009b\)](#).

en el infrarrojo cercano y, junto a la combinación con las observaciones realizadas por [Kawka et al. \(2002\)](#) y [O'Donoghue et al. \(2003\)](#), realizan un modelado de las curvas de luz. En la Fig. 10 se muestran 5 curvas de luz, desde arriba hacia abajo se tienen las dos curvas de luz resaltadas en el rectángulo azul como las observaciones de [Ribeiro et al. \(2010\)](#) y el resto son las observaciones publicadas en [O'Donoghue et al. \(2003\)](#). No obstante, las curvas de [O'Donoghue et al. \(2003\)](#) presentan una mejor resolución temporal que la mostrada en el panel superior de dicha figura, por ello se incluye un ejemplo de una noche de observación del trabajo de [O'Donoghue et al. \(2003\)](#) en la parte inferior de la misma.

Mediante un ajuste simultáneo de las curvas de luz, [Ribeiro et al. \(2010\)](#) concluyen que el radio de la estrella secundaria es más pequeño que su radio de Roche a un nivel de confianza de  $2\sigma$  y, por lo tanto, no puede existir transferencia de materia por acreción mediante el punto lagrangiano L1, coincidiendo con lo predicho por [O'Donoghue et al. \(2003\)](#).

En el trabajo de [Ribeiro et al. \(2010\)](#) también se presentaron observaciones espectroscópicas y observaron la presencia de una estructura en el interior del lóbulo de Roche de la enana blanca, consistente con las anteriores determinaciones de [O'Donoghue et al. \(2003\)](#). Los autores sugirieron que el material en el lóbulo de Roche de la primaria es el remanente de una anterior acreción y que el sistema ahora se encuentra en un estado hibernante.

En el trabajo de [Qian et al. \(2010\)](#) también se presentan nuevas observaciones fotométricas y se realizan los ajustes de la curva de luz. Estos pueden observarse en la Fig. 11, donde se muestra la curva de luz de QS Virginis presentada en ese trabajo. Se observa que la cantidad de mediciones durante el eclipse primario son suficientes para determinar con buena precisión el tiempo medio de eclipse. El eclipse primario tiene una duración de  $\sim 15m$ . Adicionalmente, en el trabajo de [Latković et al. \(2019\)](#) se presentaron observaciones (ver Fig. 12) en los filtros Bessell (B,V R, I con  $\lambda = 359.2$  nm, 540nm, 640

nm y 890 nm, respectivamente) en las que se puede observar que, en el filtro B, la curva de luz tiene un mínimo principal mucho más profundo que el secundario que es casi imperceptible, aunque sólo posee una observación durante el eclipse primario. En los filtros más rojos (V,R,I) puede observarse como la cantidad de observaciones durante el eclipse primario aumenta y la profundidad del mínimo primario disminuye. En líneas continuas se representan las curvas de luz ajustadas utilizando sólo las observaciones específicas al filtro (individual) y la realizada con todo el conjunto de observaciones de esa temporada (estacional).

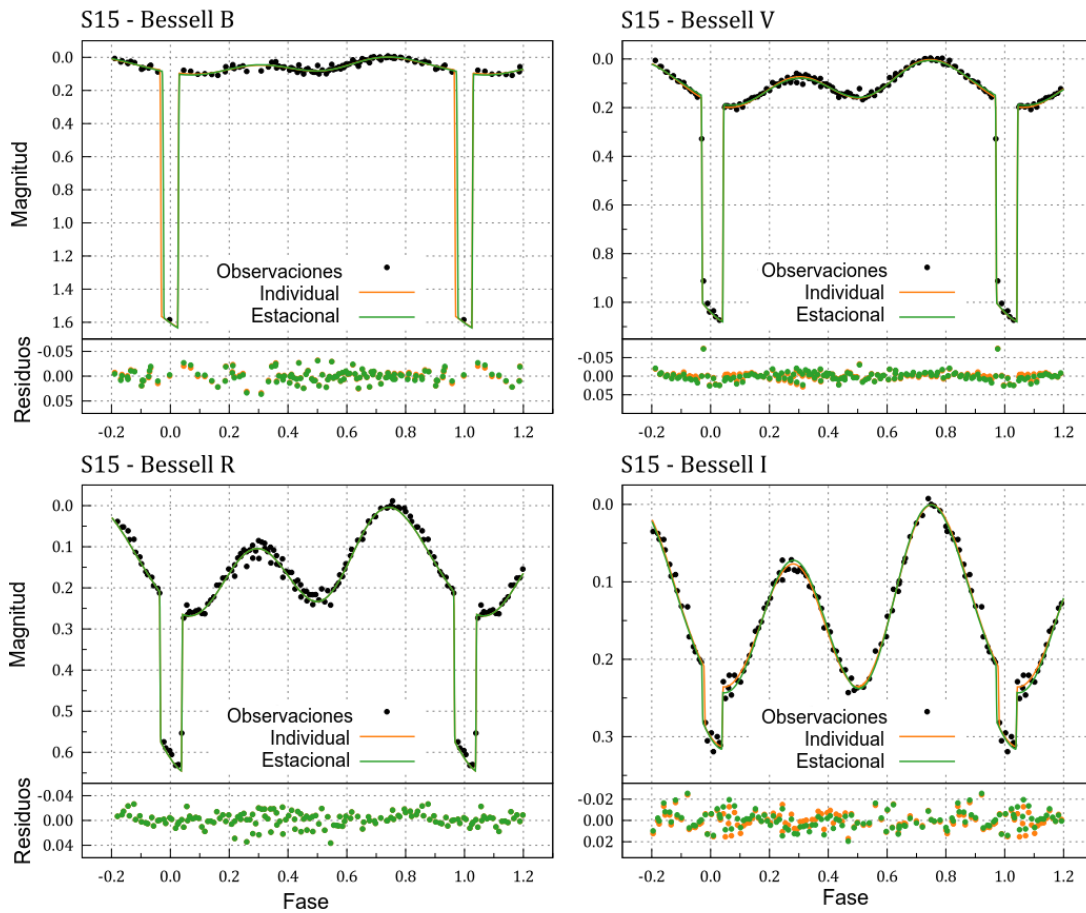


Figura 12: Observaciones fotométricas y curvas de luz de QS Virginis para distintos filtros en los diferentes paneles. Figura adaptada de [Latković et al. \(2019\)](#), ver texto para más detalles.

En el trabajo de [Parsons et al. \(2011\)](#) se interpretaron las variaciones en las líneas de absorción en función de la fase orbital como la consecuencia de una prominencia que se origina de la estrella de tipo espectral M (en vez de una acreción a bajo nivel como planteaba [O'Donoghue et al. 2003](#)). También se encontró que la enana blanca posee una rotación lenta mediante el análisis del ancho de la línea de absorción Mg II (ver Fig. 13), presente en su atmósfera.

De todos estos estudios es remarcable la diferencia que existe en las observaciones

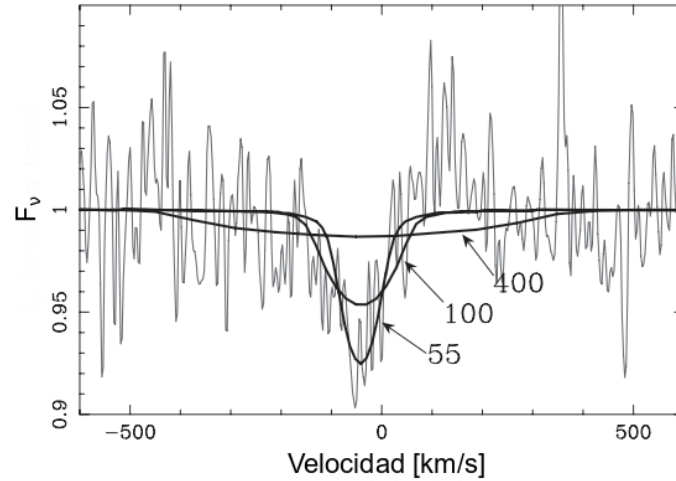


Figura 13: Línea de absorción Mg II 4481Å de la enana blanca del sistema QS Virginis, vista en 2007 con condiciones desfavorables. En líneas se muestran tres modelos con distintos valores de  $v \sin(i)$ . La calidad de los datos no es suficiente para delimitar los valores de 55 o 100  $s^{-1}$ . El valor 55  $km s^{-1}$  es el mejor ajuste. De todas formas, la naturaleza angosta de la línea confirma que la enana blanca no es un rotador rápido. Figura adaptada de [Parsons et al. \(2011\)](#).

fotométricas en cuanto a la resolución temporal. Este es un parámetro muy sensible que nos puede cambiar el período de la binaria si no se lo calcula correctamente o se subestiman los errores de los tiempos medios de eclipse.

## 1.6 La población de exoplanetas alrededor de estrellas binarias

Dado que el 50% de las estrellas tipo solar (masas estelares en el rango  $1 - 1.3M_{\odot}$ ) se encuentran en sistemas binarios (Duchêne & Kraus, 2013), la aparente diferencia en frecuencias de planetas circumbinarios detectados con respecto a los circunestelares ha sido atribuida a sesgos observacionales o procesos dinámicos, por ejemplo la formación planetaria (Marzari & Thebault, 2019). Con respecto a los sesgos observacionales se tiene que existe una dificultad intrínseca para la detección por el método de velocidad radial debido a los problemas de observar espectros de dos estrellas a la vez (Eggenberger & Udry, 2007; Eggenberger et al., 2008; Wright et al., 2012), mientras que el método de tránsito favorecía estudiar también estrellas aisladas restringiendo sólo sistemas con inclinaciones respecto al plano del cielo de aproximadamente  $90^{\circ}$  (Martin & Triaud, 2014).

Existe un catálogo de planetas en sistemas binarios y sistemas múltiples mantenido por Richard Schwarz (Schwarz et al., 2016). Actualmente se cuenta con una lista de 217 planetas en sistemas binarios y 51 planetas en sistemas estelares múltiples. 36 planetas son candidatos en 28 sistemas.

Según Dvorak (1986), los planetas asociados a un sistema estelar binario se han detectado en dos posibles configuraciones: circunestelares (tipo S, *tipo satélite*) y circumbinarios (tipo P, *tipo planeta*). En la Fig. 14 se puede observar un esquema de estas dos configuraciones. Los circunestelares se refieren a planetas que orbitan individualmente a

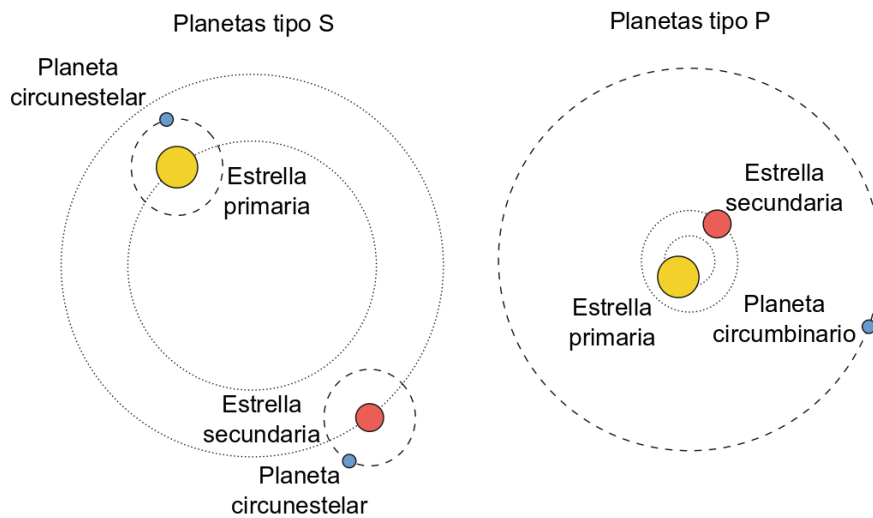


Figura 14: Esquema de planetas tipo P y tipo S. Figura adaptada de Martin (2018).

una componente del sistema binario, es decir que poseen una órbita menor que la binaria. Esto se traduce a que el semieje-mayor del planeta  $a_p$  es menor que el semieje-mayor de la binaria  $a_{bin}$ . Los planetas circumbinarios orbitan alrededor de ambas estrellas, es decir que poseen una órbita más extendida que la binaria ( $a_p > a_{bin}$ ).

Los planetas circumbinarios orbitando PCEB son particularmente interesantes porque ese sistema estelar ha evolucionado más allá de su fase de envoltente común. Reciente-

mente varios autores han detectado, usando el método de variaciones de tiempo de eclipse, planetas en sistemas PCEB como por ejemplo NN Ser (Marsh et al., 2014), HU Aqr (Qian et al., 2011; Goździewski et al., 2015), QS Vir (Qian et al., 2009a; Parsons et al., 2010; Almeida & Jablonski, 2011) entre otros. A algunos de estos sistemas se les han hecho estudios de estabilidad dinámica y se ha encontrado que la mayoría son inestables (por ejemplo en Hinse et al. (2012); Horner et al. (2012, 2013)). Aunque en el trabajo de Marsh et al. (2014) se ha puesto en evidencia una falencia del método en los estudios de estabilidad y sugieren una revisión de éstos. De forma breve, el mayor problema del análisis propuesto en Horner et al. (2013) es el hecho de que para analizar la estabilidad estudian el tiempo de vida del sistema (*lifetime*) vs. 3 parámetros del modelo: semieje-mayor, excentricidad y argumento del periastro. Dejando fijos el resto de los parámetros en su valor del mejor ajuste. Esto no representa las observaciones dado que **no se ajustan todos los parámetros** y se pueden observar, mediante análisis con cadenas de Markov, grandes correlaciones entre ellos. Lo que debería ser analizado es el tiempo de vida del sistema sobre las proyecciones de los mejores ajustes.

Tal como se expresa en Marsh (2018), es importante tener en cuenta ciertas características sobre planetas circumbinarios en sistemas evolucionados. Principalmente el hecho de que, durante su evolución, las estrellas crecen de tamaño. En el trabajo de Schröder & Smith (2008) se analizó la posible supervivencia de la Tierra a las futuras fases evolutivas del Sol y se concluyó que esto resultaba improbable ya que, la Tierra, sería engullida en la atmósfera estelar. Por lo tanto, se piensa que los planetas cercanos a la estrella no sobrevivirían la evolución estelar. Además, los planetas con órbitas mayores se alejarían de la estrella debido a la pérdida de masa estelar. Esto implica que las estrellas evolucionadas deberían tener una zona extensa libre de planetas, alrededor de un radio de 1 ua.

La evidencia de contaminación con material planetario en las atmósferas de las enanas blancas (Zuckerman et al., 2003; Klein et al., 2010; Girven et al., 2012) podría indicar también que existen mecanismos de dispersión, los cuales posibilitarían que los planetas con órbitas extensas evolucionen a órbitas más compactas (Veras et al., 2013). En general, se podría anticipar que los planetas en estos sistemas tendrían orbitas más extensas que 1 ua de radio.

Varios de estos escenarios de inestabilidades planetarias se mantienen aún cuando se consideran sistemas estelares binarios. En éstos, la estrella (o una de las estrellas del sistema binario) crecerá de tamaño y atentará en contra de la supervivencia de los planetas cercanos, inclusive de su compañera estelar (dado que las binarias podrían colisionar y ocurrir una fusión o *merger*). En el caso de que no ocurra un *merger*, la evolución de la estrella más masiva resultará en los sistemas binarios de interés en este trabajo: las PCEB.

Ambas configuraciones poseen un límite en cuanto a los valores de sus separaciones asociadas ( $a_p$  y  $a_{bin}$ ). Por ejemplo, un planeta circunestelar tiene un límite superior al



valor de  $a_p$  porque para un valor suficientemente alto de  $a_p$  se tiene que la interacción gravitatoria de la compañera estelar puede desestabilizar su órbita. Para la deducción de los límites de estabilidad ver [Holman & Wiegert \(1999\)](#).

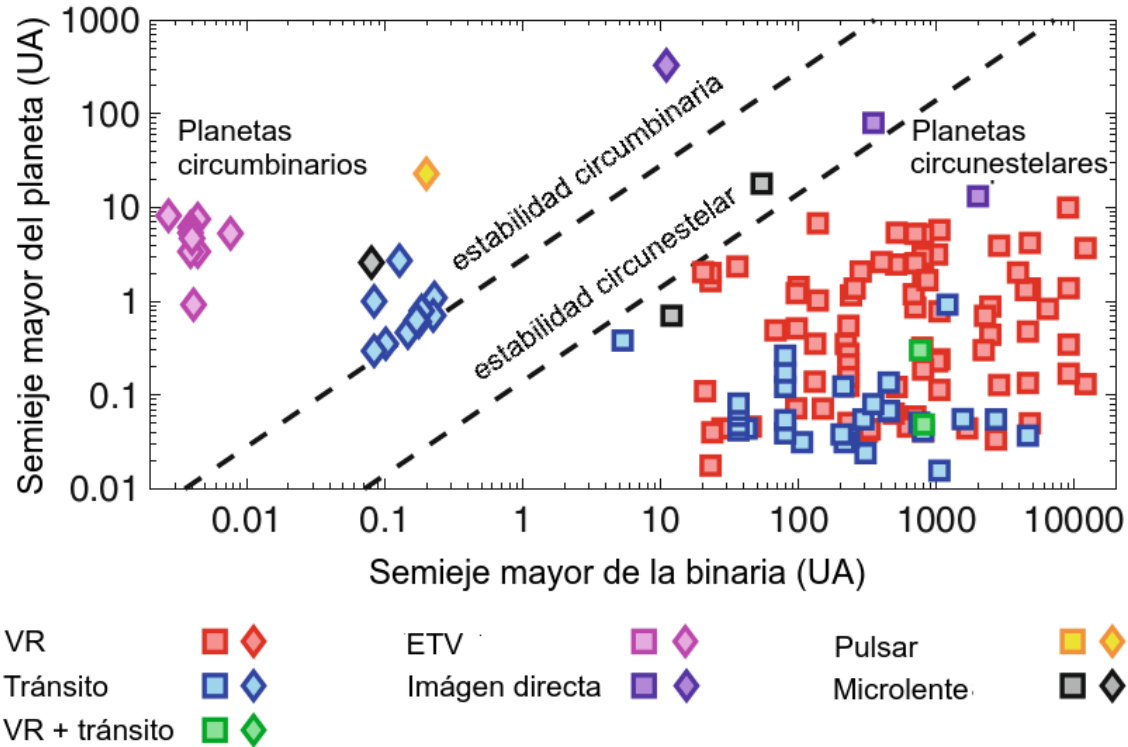


Figura 15: Exoplanetas en sistemas estelares múltiples. En cuadrados los circunestelares y en rombos los circumbinarios. Los diferentes colores indican la técnica de detección del planeta. Con  $M_A = 1M_\odot$ ,  $M_B = 0.5M_\odot$ . Para los circumbinarios se usó  $e_{\text{bin}} = 0.15$  (la media de los descubrimientos por tránsito) y para circunestelares  $e_{\text{bin}} = 0.5$  (un valor representativo de binarias separadas [Tokovinin & Kiyaveva 2016](#)). Figura adaptada de [Martin \(2018\)](#).

Es interesante poder estudiar los sistemas que poseen estrellas binarias con planetas asociados tal como se muestra en la Fig. 15. Esta figura muestra en el eje X la separación entre las binarias y la separación del planeta hacia una estrella o la binaria en el eje Y. Los distintos símbolos/colores representan cada técnica de observación. Sobre la línea de estabilidad circumbinaria se encuentran los sistemas Kepler detectados por tránsito. Por debajo de la línea de estabilidad circunestelar se encuentran los sistemas detectados por velocidad radial y tránsito (Planetas tipo P y tipo S).

Si se considera el sub-cconjunto de rombos celestes de la Fig. 15, se puede observar en la Fig. 16 la distribución de periodos de las binarias, donde se señala el período asociado para sistemas binarios con un planeta detectado por tránsitos.

En particular nos interesan los rombos rosa, ya que son los detectados por la técnica de ETV (descrita en la sección 2.5). Se construyó una lista de las estrellas binarias a las que se les propusieron la presencia de planetas circumbinarios, como explicaciones para las

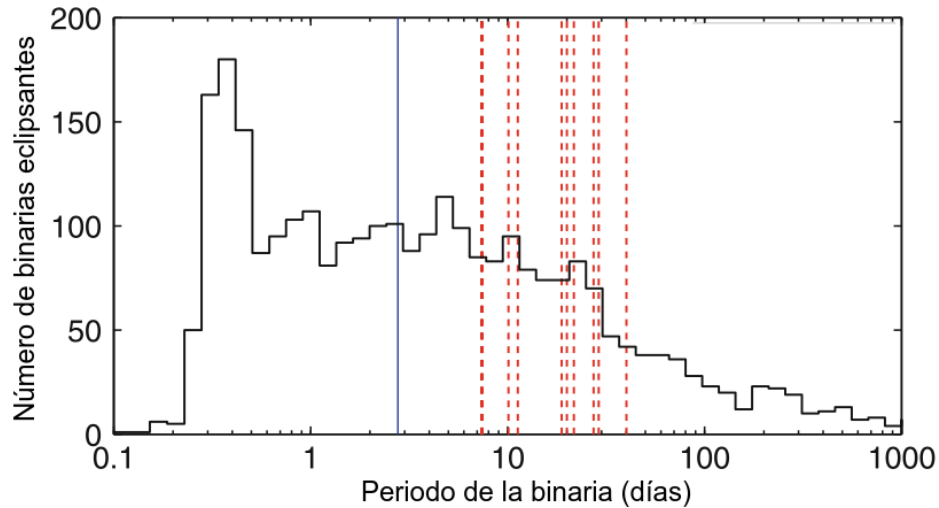


Figura 16: Histograma de las 2862 binarias eclipsantes de Kepler (obtenido de <http://keplerebs.villanova.edu/>). La mediana en 2.8 días es representada por una línea azul vertical. Los periodos de las binarias que se conocen poseen planetas están marcados con líneas verticales discontinuas rojas. Figura adaptada de [Martin \(2018\)](#).

variaciones en el diagrama (O-C). Ésta se puede observar en la Tabla 2, donde se muestra el nombre de la binaria, la amplitud de la señal  $\Delta T$ , el semieje mayor, las masas, los periodos orbitales y excentricidades de los planetas propuestos. Las masas propuestas corresponden a planetas muy masivos e inclusive a enanas marrones. Los periodos propuestos para los planetas son generalmente mayores a 10 años, con excentricidades extremas en algunos casos que puede complicar la estabilidad para sistemas multiplanetarios. Estos sistemas no pueden ser observados por ninguna técnica complementaria (velocidad radial o tránsitos), por lo tanto existe un sesgo observacional en los datos. Todos estos sistemas binarios están compuestos por binarias evolucionadas, esto se refiere que al menos una de las estrellas haya evolucionado más allá de la secuencia principal (para más detalle ver la Secc. 1.2)

Tabla 2: Sistemas binarios a los cuales se les ha propuesto la existencia de planetas circumbinarios. Todos fueron detectados con ETV. Tabla adaptada de ([Marsh, 2018](#)).

Sistema	$\Delta T$ [s]	Semieje [au]	Masas [ $M_J$ ]	Periodos [años]	Excentricidad	Refs
HU Aqr	250	3.6, 6.6, 13	4.7, 20, 80	6.9, 17, 47	0.02, 0.1, 0.01	<a href="#">Goździewski et al. (2015)</a>
RR Cae	28	5.3	4.2	11.9	0.0	<a href="#">Qian et al. (2012)</a>
V470 Cam	190	3.5	32	8.9	0.19	<a href="#">Qian et al. (2013)</a>
UZ For	60	2.8, 5.9	7.7, 6.3	5.2, 16	0.05, 0.04	<a href="#">Potter et al. (2011)</a>
DP Leo	65	8.2	6.0	28	0.39	<a href="#">Beuermann et al. (2011)</a>
NN Ser	60	3.4, 5.3	2.3, 7.3	7.9, 15.3	0.19, 0.08	<a href="#">Marsh et al. (2014)</a>
V471 Tau	350	12.0	36.6	30.1	0.39	<a href="#">Vaccaro et al. (2015)</a>
HW Vir	100	4.7, 12.8	14.3, 65	12.7, 55	0.4, 0.05	<a href="#">Beuermann et al. (2012)</a>
NY Vir	50	3.4, 7.5	2.8, 4.5	8.2, 27	0.61, 0.17	<a href="#">Lee et al. (2014)</a>
QS Vir	190	6.0, 7.0	9.0, 56.5	14.4, 17.0	0.62, 0.92	<a href="#">Almeida &amp; Jablonski (2011)</a>

De los planetas en la Fig. 15 se considera el subconjunto correspondiente a planetas circumbinarios y se estudiará la técnica de variaciones de tiempos de eclipse (ETV). Esta técnica consiste en detectar indirectamente un exoplaneta al observar las variaciones que

éste produciría en los tiempos de eclipse de la binaria, en las secciones 1.1 y 2.5 se describe con más detalle este método.

Como ya dijimos, de estos sistemas se particularizará el estudio de la binaria **QS Virginis**, el cual es un sistema que tiene una base temporal de observaciones larga (comparada con las demás binaria eclipsantes [Bours et al. 2016](#)) y además, tiene observaciones recientes que no han sido analizadas.

## 2 Orígenes del cambio en el período de una binaria

Existen varios mecanismos que pueden producir una variación en los tiempos de eclipse, que resultan del cambio del período de la binaria, entre ellos se pueden encontrar el mecanismo Applegate (Sec.2.1), Frenado magnético (Sec. 2.2), Ondas Gravitacionales (Sec. 2.3) y Exoplanetas (Sec.2.5). Adicionalmente, existen mecanismos más débiles como precesión de spín y de la línea de los apsidés (ver Chavez et al., 2012; Tovmassian et al., 2007) y Depresión de Wilson (Watson & Dhillon, 2004) que quedarán fuera de nuestro estudio. A continuación se describen lo primeros mecanismos mencionados.

### 2.1 Efecto Applegate

Este mecanismo propuesto por Applegate (1992), consiste en estudiar las variaciones cíclicas producidas en el período de un sistema binario, en el cual al menos una de las estrellas es de tipo tardía, y además como una de las estrellas es activa magnéticamente (generalmente la secundaria) ésta produce un intercambio de momento angular entre las partes más internas y externas de las zonas de convección causando un cambio en el achatamiento de la estrella (ver Fig. 17).

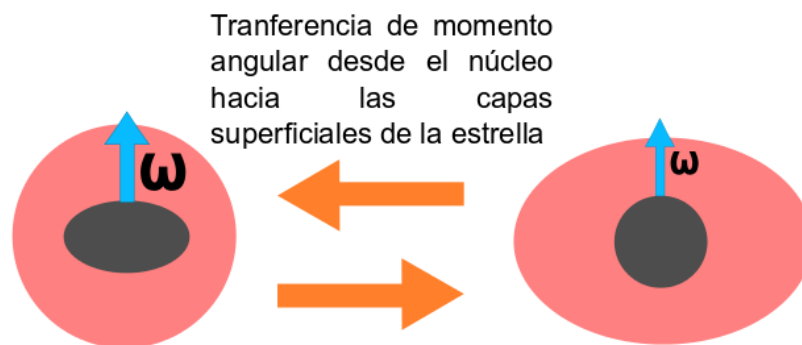


Figura 17: Esquema del ciclo magnético de una estrella activa y como éste afecta al achatamiento de la estrella. Los elipsoides gris y rojo representan al núcleo estelar y las capas superficiales, respectivamente. La velocidad angular del núcleo estelar está representada por  $\omega$ .

El momento cuadrupolar de una estrella en rotación depende de la distribución del momento angular dentro de la estrella (Applegate, 1992). En particular, el momento cuadrupolar está determinado en gran medida por el momento angular que transportan las capas exteriores de la estrella. La variación cíclica propuesta por este mecanismo implica la variación cíclica en el momento cuadrupolar gravitacional y esto causa un cambio en los parámetros orbitales del sistema.

Dado un momento angular orbital constante, un incremento del momento cuadrupolar resulta en un campo gravitacional más fuerte que se traduce en reducir en radio orbital y

por lo tanto reduce el período orbital de la binaria (Völschow et al., 2018). Para calcular la energía y los cambios de momento angular requeridos Applegate (1992) modeló el interior y exterior de la zona de convección de la estrella como sigue: una cáscara (*shell* por su denominación en inglés) rotando en un potencial puntual central (ver Fig. 18).

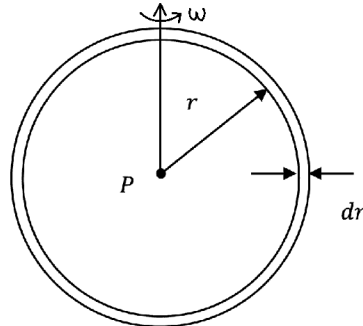


Figura 18: Esquema de una masa puntual localizada en el centro de un cascarón esférico de radio  $r$ , que rota con velocidad angular  $\omega$ .

Applegate (1992) dedujo que, dado un cambio en el período orbital de la binaria  $\Delta P$ , es requerido un intercambio de momento angular de magnitud  $\Delta J$  dado por la ecuación

$$\Delta J = -\frac{GM^2}{R} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\Delta P}{6\pi} \quad (6)$$

donde  $M$ ,  $R$ ,  $a$  y  $G$  representan la masa y el radio de la estrella activa, el semieje mayor de la binaria y la constante de gravitación universal, respectivamente. La energía necesaria para producir este intercambio de momento angular está dada por la ecuación

$$\Delta E = \Omega_{dr} \Delta J + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{I_n} + \frac{1}{I_s} \right) (\Delta J)^2 \quad (7)$$

donde  $\Omega_{dr} = \Omega_s - \Omega_n$  representa la diferencia entre velocidades angulares entre el núcleo estelar y la capa superficial (*shell*).  $I_s$  y  $I_n$  representan el momento de inercia del cascarón y el núcleo, respectivamente. El momento de inercia de la cáscara es  $I_s = (2/3)M_s R_s^2$  y el del núcleo se asume como el de una esfera sólida  $I_n = (2/5)M_n R_n^2$  donde  $M_s$ ,  $M_n$ ,  $R_s$  y  $R_n$  son las masas y radios asociados al cascarón y al núcleo. En el trabajo de Applegate (1992) se realiza la aproximación del momento de inercia efectivo  $I_{eff} = I_n I_s / (I_n + I_s)$  por  $I_{eff} \sim I_s / 2$  y la Ec. 7 queda de la forma  $\Delta E = \Omega_{dr} \Delta J + (\Delta J)^2 / I_s$ . En el presente trabajo no se realiza dicha aproximación sino que se calculan los valores del momento de inercia del cascarón y del núcleo (ver Sección 2.1.1).

Según Applegate (1992), suponiendo que la energía necesaria para llevar a cabo estos intercambios de momento angular es proporcionada por la luminosidad estelar, entonces la estrella será variable con magnitud  $\Delta L_{RMS}$  dada por la ecuación:

$$\Delta L_{RMS} = \pi \frac{\Delta E}{P_{mod}}, \quad (8)$$

donde  $P_{mod}$  representa el período asociado a este intercambio de momento angular. Estas variaciones pueden ser observadas estudiando temperaturas fotométricas (ver por ejemplo [Gray & Baliunas 1994](#); [Völschow et al. 2018](#)).

El torque requerido para lograr estos intercambios periódicos de momento angular entre la parte interna y externa de la estrella está dado por la ecuación:

$$N = \pi \frac{\Delta J}{P_{mod}} = \frac{\pi}{3} \frac{GM^2}{R} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\Delta P}{P_{mod}} \quad (9)$$

[Applegate \(1992\)](#) supone que la energía es proporcionada por campos magnéticos internos (*subsurface magnetic field*) y que la magnitud al cuadrado de éste es dada por:

$$B^2 \sim 10 \frac{GM^2}{R^4} \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{\Delta P}{P_{mod}} \quad (10)$$

Finalmente, si se mide la amplitud en el diagrama (O-C), la forma de analizar si este mecanismo puede o no explicar estas desviaciones es como sigue:

[Applegate \(1992\)](#) deduce que dada una señal cíclica con período  $P_{mod}$  y semi-amplitud (O-C) se relaciona al cambio en el período orbital de la binaria  $\Delta P_{bin}$  de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta P_{bin}}{P_{bin}} = 2\pi \frac{O - C}{P_{mod}} \quad (11)$$

Suponiendo  $M_s \sim 0.1M$ , se puede analizar el caso general considerando distintos valores para la masa del cascarón. Una análisis como este se realizó en [Qian et al. \(2010\)](#) para QS Virginis y se puede observar en la Fig. 19 como para ningún valor de masa del cascarón se puede llevar a cabo el mecanismo. Para la construcción de esa figura se usa el modelo generalizado de [Brinkworth et al. \(2006\)](#), el cual consiste en modelar a la estrella como una serie de cascarones esféricos.

En los trabajos de [Lanza et al. \(1998\)](#); [Lanza & Rodonò \(1999\)](#) se incluyen los efectos de las fuerzas de Lorentz y centrifuga, lo que resulta en una reducción del requerimiento energético del modelo de [Applegate \(1992\)](#) en un factor  $\sim 2$ .

En el trabajo de [Brinkworth et al. \(2006\)](#) se propone un modelo generalizado de Applegate en donde la conclusión más importante para este trabajo es que para una señal con semi-amplitud  $K$  este mecanismo generalizado requiere más energía para llevarse a cabo, en comparación con el modelo de [Applegate \(1992\)](#). Esto puede observarse en la Fig. 20 donde se muestra la energía requerida para producir la señal observada en el sistema NN Ser en función de la masa asociada al cascarón  $M_s$ . Las líneas continua y discontinua representan los valores energéticos dados en el nuevo modelo y una aproximación del mismo, respectivamente, y la línea punteada representa el cálculo dada las ecuaciones de [Applegate \(1992\)](#). Se puede notar que esta generalización es la más demandante energicamente de los tres modelos.

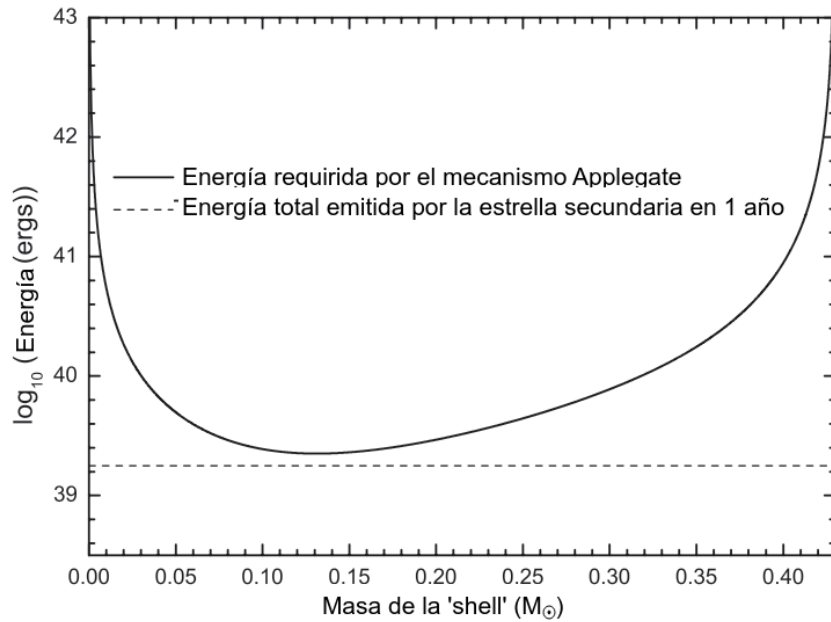


Figura 19: Energía requerida para llevar a cabo el mecanismo Applegate que explique las observaciones en función de la masa del cascarón (línea continua) de QS Virginis. La línea discontinua representa la energía total producida por la estrella secundaria en 1 año. Imagen modificada de [Qian et al. \(2010\)](#).

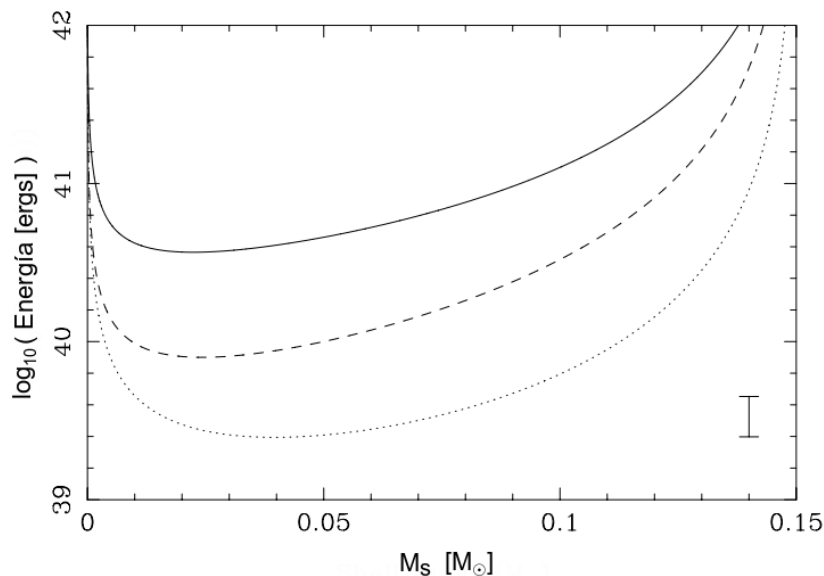


Figura 20: Energía requerida vs. masa del cascarón ( $M_s$ ) para el sistema NN Ser, considerando tres modelos. La línea continua corresponde al modelo de [Brinkworth et al. \(2006\)](#) donde se modela al interior estelar como una serie de cascarones esféricos. La línea discontinua representa el modelo anterior sólo que se ignora el cambio del cuadrupolo del núcleo y, por último, la línea punteada representa el modelo de [Applegate \(1992\)](#). En la parte inferior derecha se muestra una barra de error que representa la energía producida por la estrella en el intervalo de 15 años. Figura adaptada de [Brinkworth et al. \(2006\)](#).

El modelo propuesto por [Lanza \(2020\)](#) extendió el modelo presentado por [Applegate \(1992\)](#) asumiendo la presencia de un campo magnético no axi-simétrico dentro de la

zona convectiva de la estrella de secuencia principal. El campo magnético fue modelado como un sólo tubo de flujo sobre el plano ecuatorial. La densidad es menor dentro de la región magnética comparada con el resto de la zona convectiva. Además, asumieron que el sistema no está tidalmente bloqueado. El resultado de este modelo mejorado es de reducir el requerimiento energético en un factor de  $\sim 10^2$  ó  $10^3$  en comparación con el modelo de Applegate (1992).

Este mecanismo no sólo fue estudiado para sistemas estelares binarios si no que también se analizó la posibilidad de que fuese responsable por las variaciones de tiempo de tránsito de hot-jupiters en sistemas estelares aislados (Watson & Marsh, 2010).

### 2.1.1 Aplicación de Mecanismo de Applegate a QS Virginis

En los trabajos de Qian et al. (2010) y Parsons et al. (2010) analizaron la factibilidad de que el mecanismo Applegate explique la señal observada de QS Virginis, dados los datos observacionales disponibles en ese momento. Por un lado Qian et al. (2010) analizaron si la señal observada en el diagrama (O-C) puede ser debida únicamente al mecanismo Applegate y concluyeron que tiene dificultades explicando la señal (ver Fig. 19), por ello propusieron un modelo alternativo (discutido en las secciones siguientes). En el trabajo de Parsons et al. (2010) se introdujeron nuevas observaciones de QS Virginis (ver Fig. 21) y los autores, entre otros modelos, estudiaron la factibilidad del mecanismo Applegate para explicar las observaciones. Concluyeron que el mecanismo falla por un orden de magnitud en satisfacer los requerimientos energéticos.

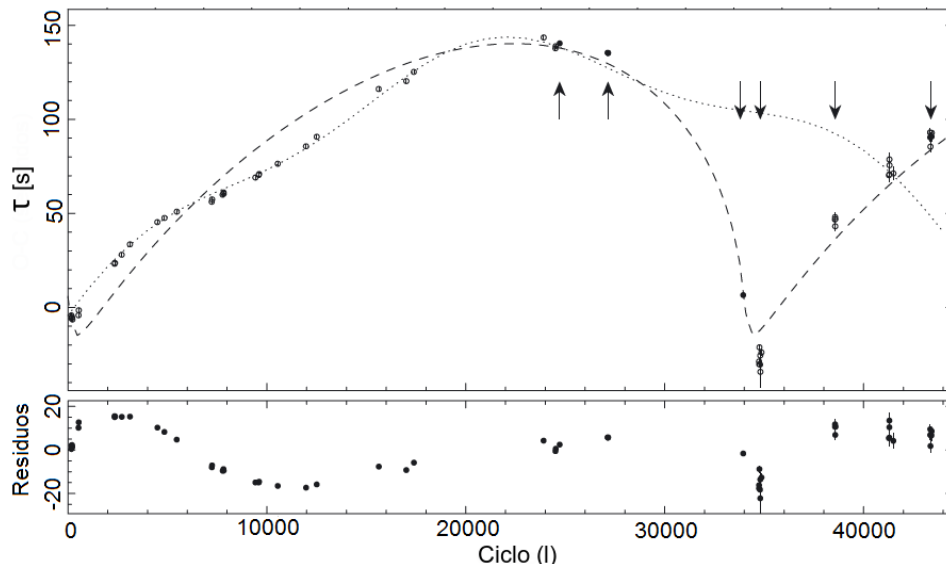


Figura 21: El diagrama (O-C) de QS Virginis construido por Parsons et al. (2010). Modelo de un exoplaneta propuesto por Parsons et al. (2010) (línea discontinua) y modelo de dos exoplanetas propuesto por Qian et al. (2009b) (línea punteada). Las nuevas observaciones de Parsons et al. (2010) están señaladas por las flechas. Imagen modificada de Parsons et al. (2010).



A continuación se presenta nuestro análisis sobre los datos de [Bours \(2015\)](#). Una primera prueba que indicaría si el mecanismo puede explicar las observaciones es asumir el caso de que el 100% de la luminosidad estelar de la secundaria es utilizada para llevar a cabo este mecanismo. La luminosidad es dada por  $L_2 = 4\pi(R^*)^2\sigma T_{eff}^4$ , los valores del radio estelar  $R^*$  y de la temperatura efectiva  $T_{eff}$  que se utilizan son los publicados en [O'Donoghue et al. \(2003\)](#) para la estrella secundaria. Utilizando las ecuaciones del modelo de [Applegate \(1992\)](#) se estudia cuánta es la energía necesaria para producir una señal con semi-amplitud de 138s (resultado obtenido en la Secc. 4.2) a lo largo del tiempo que el sistema fue observado, aproximadamente de 22 años.

Primero se calcula la energía que la estrella produce a lo largo de los  $t = 22$  años que resulta de  $E = L_2 t = (4\pi(R^*)^2\sigma T_{eff}^4)t = 3.8 \cdot 10^{40}$ ergs. Si se considera un tiempo menor, entonces la energía disponible disminuye. Este caso es el más ideal, si el mecanismo falla al explicar las observaciones bajo estas hipótesis entonces hipótesis más razonables como que sólo se utilice el 10% de la luminosidad estelar quedarían descartadas.

Luego, se modela la energía necesaria para el mecanismo en función de la masa asociada al cascarón y al radio del núcleo estelar. A diferencia de los resultados mostrados en [Applegate \(1992\)](#), no se supone  $I_{eff} \sim I_s/2$ , sino que  $I_{eff}$  e  $I_s$  representan el momento de inercia efectivo y del cascarón externo, respectivamente.

Se modela al núcleo de la estrella como una esfera sólida con momento de inercia  $I_n = (2/5)M_n R_n^2$ , donde  $M_n = M_* - M_s$  y  $R_n$  representan la masa y el radio asociado al núcleo estelar.  $R_n$  resulta ser un parámetro libre y por eso se analiza el modelo tomando varios valores de éste. Se supone que la cáscara es muy fina y por lo tanto que  $I_s = \frac{2}{3}M_s(R^*)^2$ .

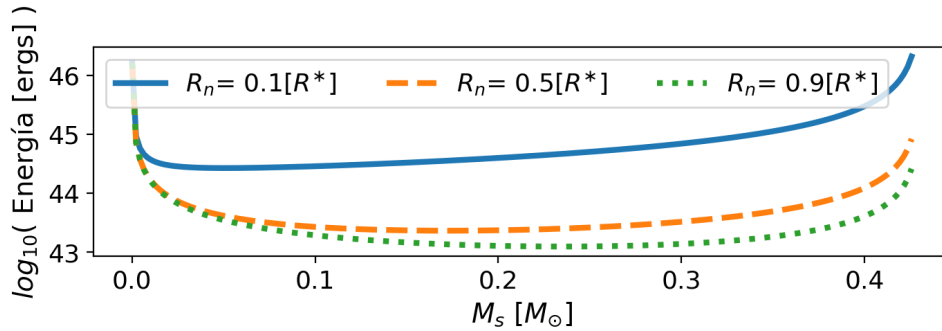


Figura 22: Energía requerida para llevar a cabo el mecanismo Applegate dada la señal observada en función de la masa del cascarón  $M_s$ . La curva continua, discontinua y punteada representan los modelos en donde se evalúan distintos valores para el radio asociado al núcleo estelar  $R_n$ , en unidades del radio estelar  $R^*$ .

Para analizar cuánta energía es requerida para producir la señal observada se grafican las curvas de  $\text{Log}_{10}(\text{Energía})$  vs.  $M_s$  para distintos valores asignados al núcleo estelar  $R_n$  (ver Fig. 22). Se puede concluir que, en el mejor de los casos, se requieren energías del orden de  $10^{43}$ ergs, 3 ordenes de magnitud superior a la energía producida por la estrella

en  $t = 22$  años. Se puede concluir entonces que el modelo propuesto por Applegate (1992) no puede explicar las observaciones.

El modelo generalizado del mecanismo Applegate hecho por Brinkworth et al. (2006) requiere que la estrella proporcione más energía con respecto al modelo de Applegate (1992) para llevar a cabo el mecanismo (Brinkworth et al., 2006; Parsons et al., 2010). Esto implica que, de la misma forma, el modelo es incompatible con las observaciones. Con respecto al modelo más eficiente propuesto por Lanza (2020), se tiene que reduce el gasto energético entre  $10^2$  y  $10^3$  ordenes de magnitud (este último implica un gasto del orden de  $10^{40}$  ergs). Esto implica que el mecanismo Applegate puede explicar las observaciones dado que el 100 % de la luminosidad estelar sea utilizada para llevarlo a cabo. No obstante, utilizando valores más razonables para el porcentaje de luminosidad estelar dedicado al mecanismo se tiene que éste falla al explicar las observaciones. Por ejemplo, si se utiliza el 10 % de la luminosidad estelar, se tiene que la energía asociada es  $E = 3.8 \cdot 10^{39}$  ergs y esto implica que tampoco el mecanismo propuesto por Lanza (2020) puede explicar las observaciones.

## 2.2 Frenado magnético

El mecanismo de frenado magnético (o *magnetic braking*) consiste en que una de las estrellas emite viento estelar que se acopla al campo magnético de ésta (Bours, 2015). Asumiendo un modelo de campo magnético di-polar, el viento es principalmente emitido desde los polos, porque las líneas de campo magnético cerca del ecuador son cerradas. El viento está formado por partículas ionizadas y es forzado a co-rotar con el campo magnético de la estrella y eventualmente se desacopla del sistema, llevándose momento angular rotacional de esta estrella. La eficiencia de éste mecanismo depende de la presencia y fuerza del campo magnético de la estrella de baja masa de secuencia principal (Schreiber et al., 2010), resultando ser eficiente para períodos orbitales de la binaria mayores a 3 horas (Huang, 1966; Mestel, 1968; Verbunt & Zwaan, 1981).

El frenado magnético fue por primera vez discutido por Schatzman (1962) y Mestel (1968) en el contexto de estrellas aisladas y su importancia hacia la evolución de sistemas binarios fue remarcada en Huang (1966); Mestel (1968); Eggleton (1983).

Este fenómeno ha sido medido indirectamente por su efecto en la velocidad de rotación de estrellas aisladas (Schatzman, 1962; Kraft, 1967; Staff et al., 2012). En binarias cercanas el período orbital es igual al período de rotación de las componentes debido a efectos tidales. Entonces, si una estrella pierde momento angular rotacional esto se traduce en una pérdida de momento angular orbital de la binaria y su órbita disminuye. Este mecanismo es particularmente importante para las binarias de corto período (en particular las PCEB) las cuales tienen separaciones tan pequeñas que el mecanismo de *magnetic braking* actúa afectando la evolución de la binaria. (Rappaport et al., 1983; Knigge et al., 2011).

Se piensa que los campos magnéticos estelares son originados en la zona de transición del núcleo radiativo a una envolvente convectiva (Bours, 2015). Como las estrellas de secuencia principal más allá del tipo espectral M3 son totalmente convectivas, las PCEB con estrellas secundarias con tales características presentarían un *magnetic braking* mucho menos eficiente (Rebassa-Mansergas et al., 2013).

Una ecuación general para el decremento de periodo orbital debido al *magnetic braking*, de acuerdo a Guinan & Bradstreet (1988), se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = -1.1 \cdot 10^{-8} q^{-1} (1+q)^2 (M_1 + M_2)^{-\frac{5}{3}} k^2 (M_1 R_1^4 + M_2 R_2^4) P^{-\frac{7}{3}} \quad (12)$$

$$\gamma = -1.1 \cdot 10^{-8} q^{-1} (1+q)^2 (M_1 + M_2)^{-\frac{5}{3}} k^2 (M_1 R_1^4 + M_2 R_2^4) \quad (13)$$

$$\frac{dP}{dt} = \gamma P^{-\frac{7}{3}} \quad (14)$$

donde  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $R_1$  y  $R_2$  son las masas y radios de la estrella primaria y secundaria respectivamente, expresados en unidades solares.  $q = M_2/M_1$ ,  $k$  representa la constante de *gyration* que para estrellas tipo solares tiene valores en el rango de 0.07 a 0.15 (Guinan & Bradstreet, 1988) y  $P$  es el período orbital de la binaria expresado en días.

Integrando la Ec. 14 respecto al tiempo, se puede calcular cual es el período de la binaria como

$$P_{bin}^{10/3} - P_{bin0}^{10/3} = \frac{10}{3} \gamma (t - t_0) \quad (15)$$

Luego podemos utilizar esta ecuación para calcular la evolución del período orbital de una binaria en función de sus parámetros físicos y su periodo inicial como

$$P_{bin}^{10/3} = \frac{10}{3} \gamma (t - t_0) + P_{bin0}^{10/3} \quad (16)$$

$$P_{bin} = \left( \frac{10}{3} \gamma (t - t_0) + P_{bin0}^{10/3} \right)^{3/10} \quad (17)$$

Utilizando los valores del sistema QS Virginis con los valores de las constantes (unidades solares)  $M_1 = 0.78$ ,  $M_2 = 0.43$ ,  $R_1 = 0.011$ ,  $R_2 = 0.42$ ,  $k = 0.07$ , seleccionamos tres valores distintos de período de la binaria. Se puede ver el comportamiento de  $P_{bin}$  en función del tiempo en la Fig. 23. Según se puede ver en dicha figura, al sistema QS Virginis le llevarían  $4 \cdot 10^4$  años para colisionar, partiendo de su período actual. Esto último sería cierto si el frenado magnético mantuviese su eficiencia durante todo el proceso pero, tal como se expresa en Bours (2015), para períodos orbitales  $\lesssim 2$ hs el mecanismo de emisión de ondas gravitacionales se vuelve más eficiente ya que la fuente del frenado magnético, la intensidad del campo magnético, disminuye debido a la transición de una estrella parcialmente convectiva a totalmente convectiva que ocurre cuando la estrella ha

perdido suficiente masa (Bours, 2015).

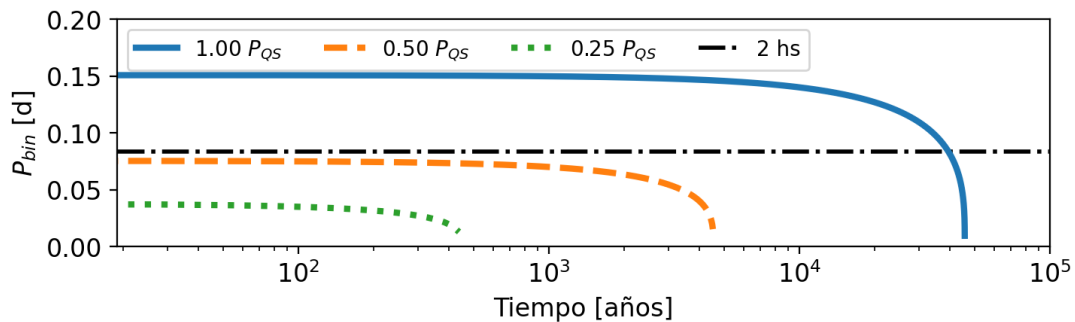


Figura 23: Evolución del período orbital de la binaria en función de sus valores iniciales de período. El período de referencia es el medido actualmente para QS Virginis,  $P_{QS}$ , de aproximadamente 3.6181 hs o 0.1507 d. En la línea horizontal se muestra un período de 2 horas, en donde el mecanismo deja de ser eficiente.

Como ejemplificación del estudio de este mecanismo en un sistema estelar real se menciona el trabajo de Tian et al. (2009), en el cual estudiaron a WY Cangry (WY Cnc). En esta binaria se ha medido la tasa de decremento del periodo orbital como:  $-1.44 \cdot 10^{-8} \text{ d } y^{-1}$  (Hall & Kreiner, 1980). En la Fig. 24 se puede observar el diagrama (O-C) asociado a los tiempos de eclipse de WY Cnc y su modelo de efemérides cuadrática representado como la línea roja continua. La razón por la cual se utiliza este modelo es porque el factor que acompaña al término cuadrático permite determinar la tasa de decremento del período orbital (Sterken, 2005; Goździewski et al., 2012) (ver Ec. 2). El análisis concluyó que el modelo de *magnetic braking* puede explicar las variaciones observadas en WY Cnc.

Si  $\beta$  es el factor que acompaña a  $l^2$  en la ecuación de efeméride cuadrática (Ec. 2) entonces se tiene que  $\beta = (1/2)P_{bin}\dot{P}_{bin}$  y de esta ecuación se puede despejar  $\dot{P}_{bin}$  para comparar con el valor calculado mediante la Ec. 12.

### 2.2.1 Frenado magnético en QS Virginis

Para analizar si este mecanismo puede explicar las observaciones se calcula el valor teórico de la tasa de variación del período orbital de la binaria  $\dot{P}_{bin}$  y se la compara con la tasa de variación observada.

El valor teórico de  $\dot{P}_{bin}$  predicho por el modelo de frenado magnético según la Ec. 14, depende de los parámetros de la binaria y de la constante de *gyration*  $k^2$ . Se utilizan los parámetros propuestos por O'Donoghue et al. (2003) y se hace un barrido para el rango de valores de  $k^2$  propuesto por Guinan & Bradstreet (1988) de  $k^2 : [0.07, 0.15]$ . Se obtiene que el rango de valores para la tasa de variación de  $P_{bin}$  es de  $\dot{P}_{bin} : [-2.7, -5.7] \cdot 10^{-9} dy^{-1}$  (ver Fig. 25).

Para obtener el valor de  $\dot{P}_{bin}$  dado las observaciones, se construye el diagrama (O-C) dada una efeméride cuadrática ( $T_{ecl} = T_0 + P_{bin}l + \beta l^2$ ). La relación entre  $\dot{P}_{bin}$  y

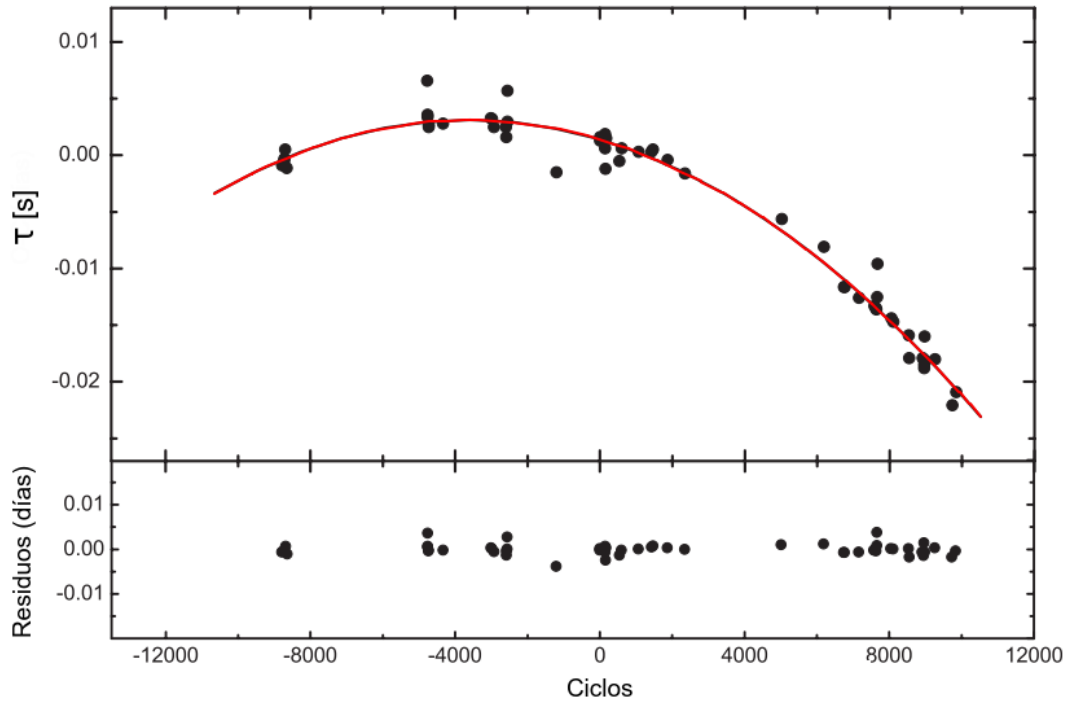


Figura 24: Diagrama (O-C) de WY Cnc. En la curva roja está representada la efemérides cuadrática. En la parte inferior se representan los residuos. Sólo se utilizan datos fotoeléctricos y CCD. Figura adaptada de [Tian et al. \(2009\)](#).

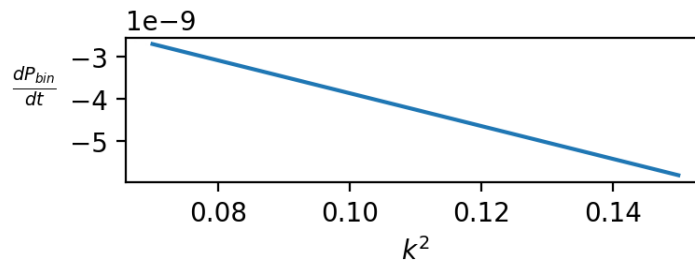


Figura 25: Variación de  $dP_{bin}/dt$  en función de la constante de *gyration* elegida.

$\beta$  es dada por:  $\beta = (1/2)P_{bin}\dot{P}_{bin}$  ([Goździewski et al., 2012](#)). El análisis resulta en un valor de  $\sim 3.5 \cdot 10^{-9}$  para  $\dot{P}_{bin}$  lo cual indica que el período orbital de la binaria se está incrementando (notar el signo), lo cual es incompatible con el modelo de *magnetic braking*.

## 2.3 Ondas gravitacionales

Para estrellas binarias con periodos más cortos ( $\lesssim 2$ hs) el mecanismo de pérdida de momento angular por emisión de ondas gravitacionales se vuelve eficiente (Paczynski, 1967; Faulkner, 1971; Landau & Lifshitz, 1975). Este mecanismo se encargará de disminuir el período orbital de la binaria hasta que, eventualmente, se fusionen (o que ocurra el *merger*).

La escala temporal  $\tau_m$  en la cual este *merger* sucederá se puede estimar mediante la ecuación

$$\tau_m = 10^7 \frac{(M_1 + M_2)^{1/3}}{M_1 M_2} P_{bin}^{8/3} \text{ años} \quad (18)$$

donde  $P_{bin}$  es el periodo orbital de la binaria expresado en horas y las masas de las componentes de la binaria,  $M_1$  y  $M_2$ , en masas solares (Landau & Lifshitz 1975; Marsh et al. 1995, ver sección 4.3). Se puede inferir que la fusión ocurre más rápidamente para binarias masivas o para binarias que tengan un período orbital corto.

La necesidad de binarias de alta masa o de corto período implica que este efecto sólo sería significativo para binarias cercanas que, al menos, contengan un objeto compacto. El conjunto de estrellas compactas contiene al colectivo de enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros (Nelemans et al., 2001; Knigge et al., 2011).

El efecto acumulativo de pérdida de energía se puede cuantificar para poder modelar cómo serían las variaciones intrínsecas del período orbital de la binaria que se observarían en el diagrama (O-C), construido mediante una efeméride lineal. Este modelo se expresa de acuerdo a Paczynski (1967) mediante las siguientes ecuaciones:

$$\frac{dP_{bin}}{dt} = -3.68 \cdot 10^{-6} \frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^{1/3}} \left( \frac{P_{bin}}{\text{s}} \right)^{-5/3} \quad (19)$$

donde las unidades de  $M_1$  y  $M_2$  son masas solares. La señal  $\tau$  producida en el diagrama (O-C) es dada por:

$$\tau(t) = \frac{1}{2P_{bin}} \frac{dP_{bin}}{dt} (\Delta T)^2 \quad (20)$$

donde se usan unidades en el sistema c.g.s y  $\Delta T$  está definido como la diferencia del tiempo de observación con la época inicial de la efemérides lineal  $t_0$ . Por lo tanto:

$$\tau(t) = \frac{1}{2P_{bin}} \frac{dP_{bin}}{dt} (t - t_0)^2 \quad (21)$$

Para cuantificar con un ejemplo las variaciones en el diagrama (O-C) producidas por este mecanismo, se genera un sistema sintético y se analiza qué efecto tiene variar los dos parámetros relevantes  $M_1$  y  $P_{bin}$ , ya que variar  $M_2$  se produce el mismo efecto que variar  $M_1$  según la dependencia que se observa en la Ec. 18. En el panel izquierdo de la Fig. 26

se puede observar el efecto de este mecanismo para un sistema con parámetros nominales  $M_1 = 0.7M_\odot$ ,  $M_2 = 0.5M_\odot$  y  $P_{bin} = 3.6hs$ . Estos parámetros elegidos son similares a los de QS Virginis (O'Donoghue et al., 2003) porque se quiere investigar este mecanismo en este tipo de sistemas. Básicamente se pueden ver tres curvas, la de color negro (línea continua) representa la variación en el diagrama (O-C) para los parámetros nominales, la de color rojo (línea discontinua) posee un valor superior de  $M_1$  y, por último, la curva de color azul (línea punteada) tiene un valor más chico de  $P_{bin}$ . Se puede ver que este efecto es significativo, en este sistema, para escalas de tiempo superiores a  $10^8$  años y que aumentar la masa de una de las estrellas o disminuir su distancia (disminuir el periodo orbital) causa que este efecto sea significativo a una menor escala de tiempo. Aunque esa escala de tiempo sigue siendo superior a  $10^8$  años.

Adicionalmente, se puede estimar la escala temporal  $\tau_m$  mediante la Ec. 18. En el panel derecho de la Fig. 26 se calcula  $\tau_m$  para el sistema sintético propuesto variando su período orbital. Se observa que para el período de QS Virginis ( $\sim 3.6hs$ ) la escala temporal es de  $\sim 10^9$  años. Dado que el mecanismo se vuelve eficiente para períodos menores a 2 hs, se puede observar en la figura que para cuando QS Vir alcance ese período, le tomará aproximadamente  $10^8$  años para colisionar.

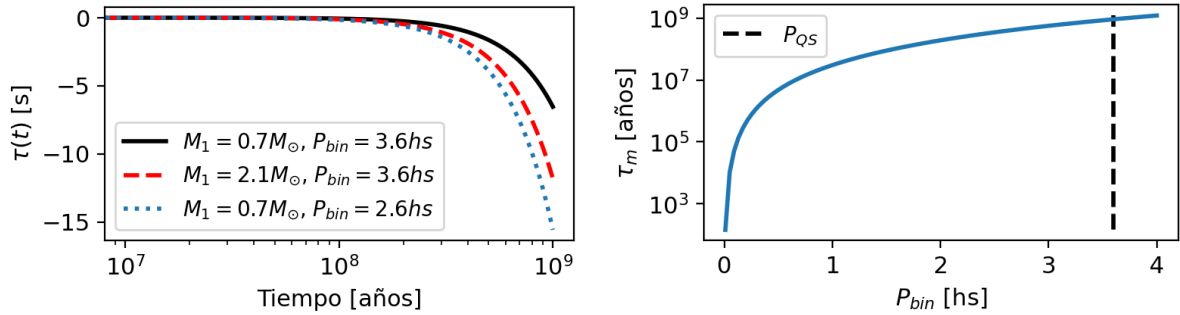


Figura 26: *Panel izquierdo*: Diagrama (O-C) producido por el mecanismo de ondas gravitacionales para un sistema sintético. La curva de color negro (continua) representa la variación en el diagrama (O-C) para los parámetros nominales, la de color rojo (discontinua) posee un valor superior de  $M_1$  y la curva de color azul (punteada) tiene un valor más chico de  $P_{bin}$ . *Panel derecho*: Variación de la escala temporal en función del período orbital de la binaria, se señala el período actual de QS Virginis como  $P_{QS}$ .

Se puede concluir de este análisis que se espera que este mecanismo no sea significativo en QS virginis. Dado los resultados obtenidos en la Secc. 2.2.1, se confirma que este mecanismo tampoco explica las observaciones. La emisión de ondas gravitacionales, al igual que el proceso de *magnetic braking*, implica una disminución secular del período orbital de la binaria pero los datos observacionales predicen un incremento del mismo.

## 2.4 Transferencia de masa

En 1973 se propuso un modelo que pudiese explicar las variaciones en el diagrama (O-C) en particular para binarias que son remanentes de post-secuencia principal con transferencia de masa (Biermann & Hall, 1973). Este modelo involucra la transferencia de momento angular de forma no estacionaria (ida y vuelta) entre la órbita y la estrella primaria, en forma de momento angular rotacional (ver Fig. 27). Esto puede explicar las variaciones alternas del período orbital de las binarias consideradas en el trabajo de Biermann & Hall (1973).

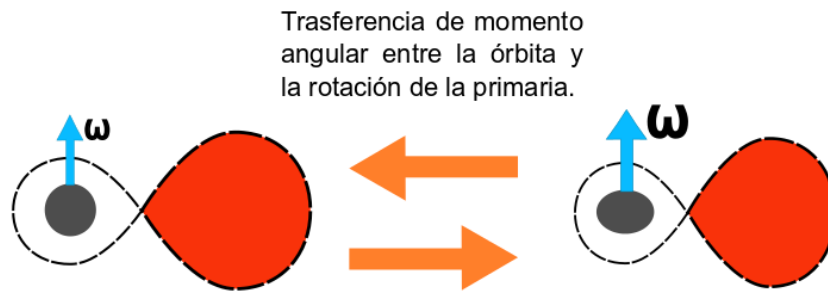


Figura 27: Esquema del mecanismo de transferencia de masa propuesto por Biermann & Hall (1973), el cual resulta en un cambio cíclico intrínseco del período orbital de la binaria. El elipsoide gris representa a la primaria, la secundaria está representada llenando su lóbulo de Roche (en rojo). La velocidad angular rotacional de la primaria está representada por  $\omega$ .

En el modelo (Biermann & Hall, 1973), se supone que las binarias son del tipo *semi-detached* (semi-separadas), esto quiere decir que están en una configuración tal que existe transferencia de masa sólo por el punto lagrangiano L1. Los autores proponen que la secuencia de intercambio de momento angular es precipitada por un repentino evento en el cual la transferencia de masa aumenta, esto causa que el sistema no pueda responder a escalas de tiempo similares y este resulta en un almacenamiento de momento angular en las capas superficiales de la primaria en forma de momento rotacional. De esta forma la órbita pierde momento angular y el período orbital de la binaria se reduce. Dado que la órbita se reduce, el volumen de los lóbulos de Roche también lo hace (Eggleton, 1983). Esto se traduce en un incremento de la transferencia de masa y cuando suficiente masa haya sido transferida tal que las capas externas de la estrella se vuelvan turbulentas, entonces la fricción alcanza a la transferencia de masa y el momento angular es devuelto a la órbita. De esta forma incrementando el período orbital del sistema y relajando la transferencia de masa por el incremento del volumen de los lóbulos de Roche (Biermann & Hall, 1973).

El cambio en  $\Delta P$  con la pérdida de masa  $\Delta M$  de la secundaria donde una fracción  $f\Delta M$  deja el sistema está dado por la siguiente ecuación:



$$\frac{\Delta P}{P} = 3 \frac{\Delta J}{J} + 3 \frac{\Delta M}{M} \left[ \frac{q^2 - 1}{q} + f \frac{2q + 3}{3q} \right] \quad (22)$$

donde  $M$ ,  $q$ ,  $\Delta J$  representan la masa total del sistema, la razón de masas  $q = M_1/M_2$  y el cambio neto de momento angular  $J$ , respectivamente.

Finalmente, el mecanismo de transferencia de masa podría producir variaciones cíclicas a  $P_{bin}$  pero, en el trabajo de [Ribeiro et al. \(2010\)](#) se demuestra que el radio de la estrella secundaria de QS Virginis es menor que su asociado radio de Roche (radio de una esfera que contenga el mismo volumen que el lóbulo), lo que implica que no existe acreción de materia a través del punto Lagrangiano L1. De esto se concluye que el mecanismo de transferencia de masa no puede explicar las observaciones de QS Virginis.

## 2.5 Técnica ETV: el modelado para exoplanetas alrededor de PCEBs

La presencia de exoplanetas orbitando a sistemas binarios compactos causarían un cambio aparente en el período de la binaria ([Woltjer, 1922](#)). Esto se debe a que la distancia del observador hasta el sistema binario en sí cambiará de forma cíclica por la interacción gravitatoria de los planetas. En la Fig. 28 se muestra la geometría del problema de tres cuerpos de forma esquemática.

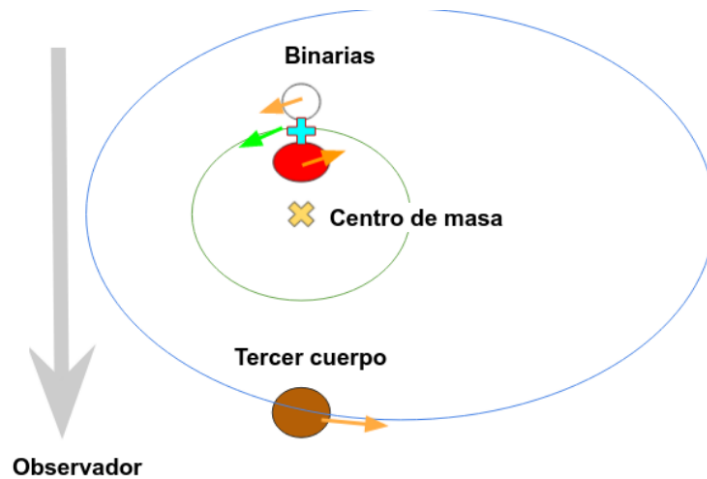


Figura 28: Esquema del problema de tres cuerpos en donde se tiene una binaria en una órbita circular y un planeta circumbinario.

El modelo utilizado en la técnica ETV consiste en asumir que a la binaria se la puede aproximar por un sólo cuerpo ubicado en el centro de masa de las estrellas y con su masa igual a la suma de las masas estelares. El modelo más simple a considerar es de un sólo planeta orbitando la binaria, esto se traduce a tratar el problema de 2 cuerpos (P2C) aislado (cuerpo ficticio que sustituye la binaria + planeta).

En la literatura existen varias formulaciones equivalentes para una función  $\tau(t)$  que

representa el efecto, en el diagrama (O-C), de la presencia de un tercer cuerpo orbitando la binaria (Woltjer, 1922; Irwin, 1952; Goździewski et al., 2012).

El primer modelado de la señal ETV que produciría un planeta orbitando una binaria fue hecho por Woltjer (1922), éste se esquematiza en la Fig. 29. El autor modela la distancia de la binaria proyectada en la línea de la visual  $z$ , la cual oscila debido a la interacción gravitacional de un cuerpo orbitándola. La forma que toma  $z$  es dada la siguiente ecuación (notar que  $\tau = z/c$ , donde  $c$ : velocidad de la luz):

$$z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) - 2 \left[ \frac{1}{T} \int_0^T z dt - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right] \quad (23)$$

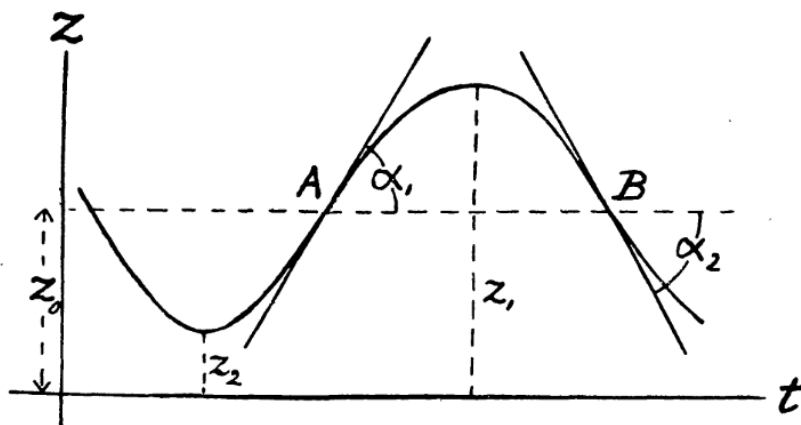


Figura 29: Esquema de la señal  $\tau$  propuesto por Woltjer (1922). Figura adaptada de Woltjer (1922).

Los parámetros del modelo de Woltjer (1922) son:  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\frac{1}{T} \int_0^T z dt$  y  $z_0$ . Éstos pueden ser interpretados como:  $z_1$  y  $z_2$  representan la posición en  $z$  del mínimo y máximo de la señal, respectivamente;  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  como el ángulo que forma la tangente a la señal en los puntos A y B (ver Fig. 29),  $Z_0$  como la posición en  $z$  del baricentro del sistema y  $\frac{1}{T} \int_0^T z dt$  como la integral de la curva en un período normalizada al período de la binaria  $T$ .

En este trabajo se consideró el formalismo desarrollado por Goździewski et al. (2012) el cual posee parámetros principales similares a los utilizado el la técnica de detección de exoplanetas de velocidad radial. A continuación se detalla el modelo siguiendo las ideas planteadas en ese trabajo.

Uno de los marcos bien conocidos que proporciona una descripción adecuada de órbitas cinemáticas en sistemas múltiples es el de las coordenadas de Jacobi. Supongamos que  $m_*$ ,  $m_1$  y  $m_2$  representan las masas de la binaria compacta  $m_*$  y de dos planetas, respectivamente. Suponiendo también que las coordenadas cartesianas de estos objetos con respecto al baricentro de los tres cuerpos son  $\mathbf{R}_*$ ,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  y sus coordenadas de Jacobi se denotan por  $\mathbf{r}_* \equiv \mathbf{R}_*$ ,  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  (ver Fig. 30).  $\mathbf{R}_*$  es la posición del centro de masa de la binaria (CMB) en el marco baricéntrico y  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$  son los vectores de posición de los

compañeros planetarios en el marco Jacobi.

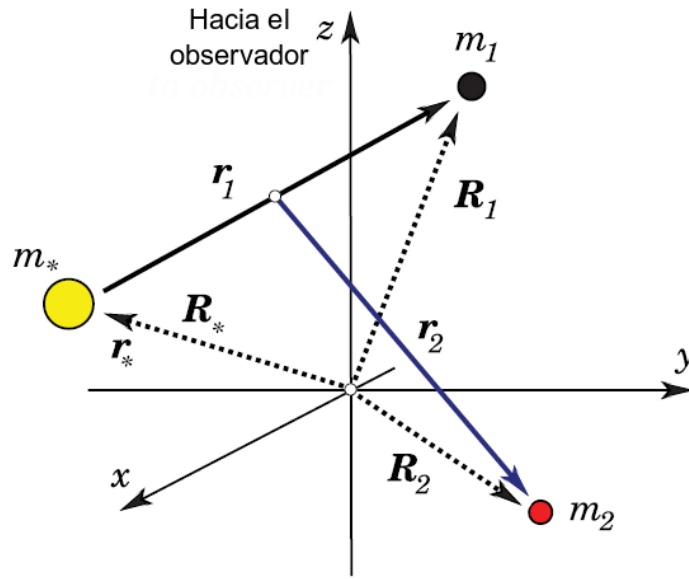


Figura 30: La geometría del sistema. La binaria tiene una masa total  $m_*$  y debido a su corto período orbital puede considerarse como un objeto puntual acompañado de planetas como masas puntuales. El origen del sistema de coordenadas se fija en el baricentro del sistema de tres cuerpos. La línea de visión es a lo largo del eje  $z$ . Para más detalles, véase el texto. Figura adaptada de [Goździewski et al. \(2012\)](#).

En este formalismo, la posición baricéntrica de la binaria es:

$$\mathbf{R}_* = -\kappa_1 \mathbf{r}_1 - \kappa_2 \mathbf{r}_2, \quad (24)$$

donde los factores de masa  $\kappa_1 \geq 0$ ,  $\kappa_2 \geq 0$  son dados por:

$$\kappa_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_*}, \quad \kappa_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_*}. \quad (25)$$

La transformación de coordenadas  $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{r}$  es tomada de [Malhotra \(1993\)](#):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_* &\equiv \mathbf{R}_*, \\ \mathbf{r}_1 &= \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_*, \\ \mathbf{r}_2 &= \mathbf{R}_2 - \frac{m_* \mathbf{R}_* + m_1 \mathbf{R}_1}{m_1 + m_*}, \end{aligned} \quad (26)$$

y la transformación inversa se deriva de la integral del baricentro:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_* &= -\kappa_1 \mathbf{r}_1 - \kappa_2 \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{R}_1 &= (1 - \kappa_1) \mathbf{r}_1 - \kappa_2 \mathbf{r}_2, \\ \mathbf{R}_2 &= (1 - \kappa_2) \mathbf{r}_2. \end{aligned} \quad (27)$$

Hasta el primer orden en el cociente de masas ( $\sim m_{1,2}/m_*$ ), la órbita verdadera del cuerpo  $i$  ( $i = 1, 2$ ) se describe mediante elementos geométricos keplerianos como sigue:

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{P}_i [\cos E_i(t) - e_i] + \mathbf{Q}_i \sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i(t),$$

donde

$$\mathbf{P}_i = a_i (\mathbf{l}_i \cos \omega_i + \mathbf{k}_i \sin \omega_i), \quad \mathbf{Q}_i = a_i (-\mathbf{l}_i \sin \omega_i + \mathbf{k}_i \cos \omega_i),$$

y los elementos geométricos se definen a través de:

$$\mathbf{l}_i = \begin{bmatrix} + \sin \Omega_i \\ + \cos \Omega_i \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} + \cos i_i \cos \Omega_i \\ - \cos i_i \sin \Omega_i \\ \sin i_i \end{bmatrix}.$$

Aquí,  $E_i(t)$  es la anomalía excéntrica derivada de la ecuación de Kepler

$$n_i(t - T_i) = E_i(t) - e_i \sin E_i(t),$$

donde  $n_i = 2\pi/P_i$  es el movimiento medio, de acuerdo con la tercera ley de Kepler,  $n_i^2 a_i^3 = \mu_i$ , donde  $P_i$  es el período orbital de un objeto dado.

La ecuación de Kepler no puede ser resuelta analíticamente ya que es trascendental en  $E$ . Un método utilizado para derivar el valor de  $E$  en función de  $M$  es el método iterativo expresado en la siguiente ecuación:

$$E_{i+1} = M - e \sin(E_i) \quad i = 0, 1, \dots, \quad (28)$$

donde se toma  $E_0 = M$  como primera aproximación y se itera hasta que la diferencia  $|E_{i+1} - E_i| < tol$ , donde  $tol$  da cuenta de la tolerancia que se desea alcanzar. En este trabajo se utiliza  $tol = 10^4$ .

Dos tuplas  $(a_i, e_i, i_i, \Omega_i, \omega_i, T_i)$ ,  $i = 1, 2$ , que consisten en el semieje mayor, la excentricidad, la inclinación, la longitud del nodo, el argumento del pericentro, y el tiempo de pasaje del pericentro, respectivamente, son para los elementos keplerianos. Se relacionan con las coordenadas cartesianas en el marco de Jacobi mediante las fórmulas habituales de dos cuerpos (véase, por ejemplo [Morbidelli, 2002](#)), con un parámetro de masa apropiado  $\mu_i$  (véase más adelante).

A partir de la Ec. 24, la componente  $Z_*$  del CMB (Centro de Masa de la Binaria) con respecto al baricentro del sistema es

$$Z_*(t) \equiv \mathbf{R}_* \cdot \mathbf{e}_z = -\kappa_1 z_1(t) - \kappa_2 z_2(t), \quad (29)$$

donde  $\mathbf{e}_z$  es el vector unitario a lo largo del eje  $z$  del marco de referencia, dirigido hacia

el observador. La contribución de la señal debida a un dado compañero es:

$$z_i(t) = a_i \sin i_i \left[ \sin \omega_i (\cos E_i(t) - e_i) + \cos \omega_i \sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i(t) \right] \quad (30)$$

(para los planetas  $i = 1, 2$ ). Los  $z_i(t)$  se combinan entonces para obtener la componente  $Z_*(t)$  del vector de posición del CMB con respecto al el baricentro del sistema. La señal LTT (*Light Time Travel*, o ETV) se expresa entonces como

$$\tau(t) = -\frac{1}{c} Z_* \equiv +\frac{1}{c} \left( \frac{m_1}{m_1 + m_*} z_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_*} z_2 \right),$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz. Nótese que se utiliza la versión planetaria de sistema de tres cuerpos, con *una* masa dominante ( $m_*$ ), por lo que los parámetros gravitacionales keplerianos son:

$$\mu_1 = k^2(m_1 + m_*), \quad \mu_2 = k^2 \frac{m_*(m_1 + m_2 + m_*)}{m_1 + m_*},$$

consistentes con la expansión de la perturbación hamiltoniana para la versión planetaria del problema (véase, por ejemplo [Malhotra, 1993](#)), y la cantidad  $k$  denota la constante de Gauss.

Se introducen los factores de semiamplitud de la señal,  $K_1$  y  $K_2$  como:

$$K_1 = \left( \frac{1}{c} \right) \frac{m_1}{m_1 + m_*} a_1 \sin i_1, \quad (31)$$

$$K_2 = \left( \frac{1}{c} \right) \frac{m_2}{m_1 + m_2 + m_*} a_2 \sin i_2. \quad (32)$$

Usando la Ec. 30, las contribuciones de la señal de un solo planeta  $\zeta_i$  están dadas entonces por:

$$\zeta_i(t) = K_i \left[ \sin \omega_i (\cos E_i(t) - e_i) + \cos \omega_i \sqrt{1 - e_i^2} \sin E_i(t) \right]. \quad (33)$$

En esta ecuación, el conjunto de parámetros orbitales libres es  $(K_i, P_i, e_i, \omega_i, T_i)$ ,  $i = 1, 2$ , similar al modelo común de modelo cinemático de velocidad radial. El período orbital  $P_i$  y el tiempo de pasaje por el pericentro se introducen indirectamente a través de la dependencia del tiempo expresada por  $E_i(t)$ .

Al simplificar el modelo anteriormente descrito a un problema donde sólo un planeta orbita a la binaria. Se tiene que la señal  $\tau$  toma la forma:

$$\tau(t, K, P, e, \omega, T_0, Z) = K \left( \sin \omega (\cos E(t) - e) + \cos \omega \sqrt{1 - e^2} \sin E(t) \right) + Z \quad (34)$$

donde el conjunto de parámetro libres resulta  $K, P, e, \omega, T_0, Z$ , donde  $Z$  representa el valor del origen para el movimiento del baricentro. En este trabajo  $Z$  tiene unidad de

tiempo porque se lo redefine por  $Z = Z/c$  ya que resulta más fácil de interpretar en el diagrama (O-C), como un parámetro que produce un corrimiento en el eje-Y. Para ver esto último se presenta la Fig. 31 en donde se muestran las curva sintéticas para un sistema al sólo variar el parámetro  $Z$ , una discusión detallada sobre la generación e interpretación de estas curvas se muestra en la sección 2.5.1. Por notación se define a  $T_0$  como el tiempo de pasaje por el pericentro del planeta.

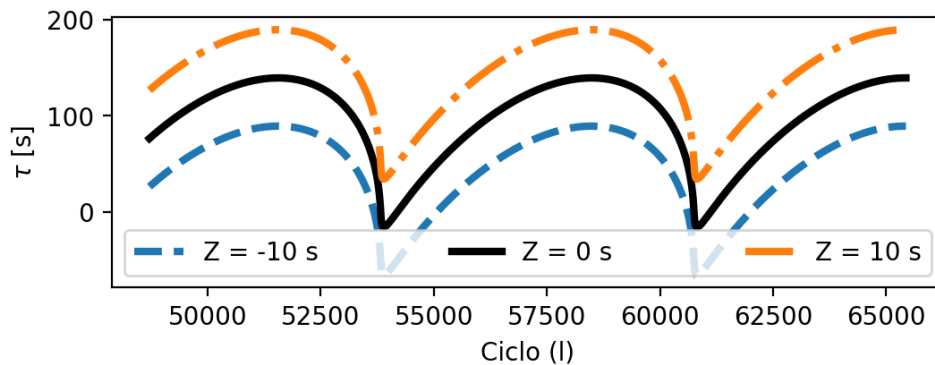


Figura 31: Curvas del modelo  $\tau$  para un planeta orbitando la binaria en donde sólo se varía el parámetro orbital  $Z$ .

### 2.5.1 Creación de curvas sintéticas generadas por un exoplaneta

La construcción del modelo de  $\tau$  permite entender la forma que producirán las curvas en el diagrama (O-C).

Para poder comprender cómo las curvas sintéticas generadas por este modelo cambian en función de sus parámetros, se creó un sistema sintético y se varía cada parámetro de forma individual. Los rangos de variación fueron elegidos tal que pertenezcan a la vecindad cercana al parámetro nominal. A este estudio se lo realizó bajo dos condiciones para la excentricidad.

- Curvas con  $e = 0.00$
- Curvas con  $e = 0.95$

Esto es para poder comprender con una visión más amplia como se comporta el modelo ante dos valores de la excentricidad tan diferentes. En particular el valor  $e = 0.95$  es similar al eventualmente determinado para tercer cuerpo de QS Virginis y se quiere ver si los cambios en los parámetros resultan en fenómenos similares en las curvas sintéticas.

En primer lugar se tiene un sistema con parámetros nominales:  $K[s]=148$ ,  $e=0$ ,  $\omega[\text{grados}]=206$ ,  $T_0[\text{BMJD}]=53831$ ,  $Z[s]=0$ ,  $P[\text{años}]=18.9$ . Los parámetros de la binaria:  $M_1[M_\odot] = 0.78$ ,  $M_2[M_\odot] = 0.43$  y la masa del planeta de  $M[M_J] = 52.7$ , estos parámetros son similares al sistema que eventualmente se determinan para QS Virginis (Tabla 5).

En la Fig. 32 se representan seis paneles que muestran las curvas  $\tau$  generadas sintéticamente por los parámetros nominales excepto el asociado a ese panel (remarcado en la leyenda). En cada panel se tienen tres curvas, la curva fiduciaria (o creada a partir de los parámetros nominales) que es representada en la línea continua negra, línea punteada naranja tiene asociado el valor del parámetro aumentado y la línea azul discontinua posee el valor del parámetro disminuido (excepto el caso especial de  $e$  donde tengo dos valores superiores a  $e = 0$ ).

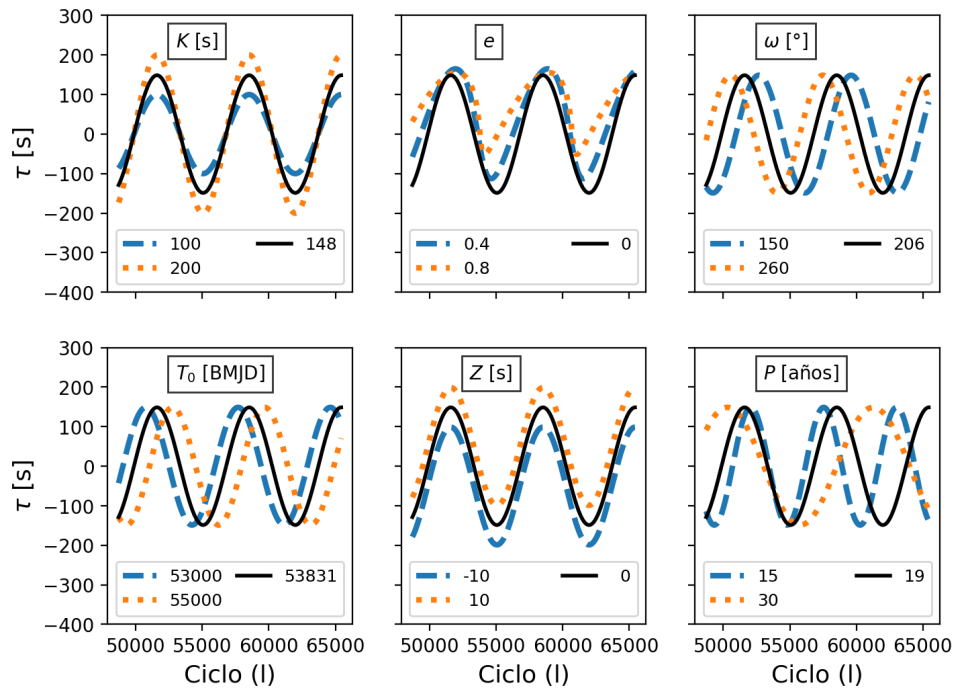


Figura 32: Primera comparación de curvas sintéticas en el diagrama (O-C) basadas en el modelo de [Goździewski et al. \(2012\)](#) donde se tiene  $e$  fiduciaria  $e = 0$ . En cada panel se muestra, en el eje-X el ciclo correspondiente y en el eje-Y el valor de  $\tau$ . En cada panel se muestran tres curvas sintéticas; la curva negra (continua) representa la generada por todos los parámetros fiduciaros, las curvas naranja (línea discontinua) y azul (punteada) son construidas mediante una variación en el parámetro asociado al panel (remarcado en la leyenda, dentro del rectángulo).

Un análisis nos permite observar en qué afecta la variación de cada parámetro a la curva generada:

- Cambio en  $K$ : Se observa un cambio en la amplitud de la señal.
- Cambio en  $e$ : Muestra que, a medida que  $e$  crece, se ve una disminución en la semi-amplitud de la señal y la suavidad de la curva. Este aparente cambio en la semi-amplitud parecería variar, en promedio, el valor de  $Z$ .
- Cambio en  $\omega$ : Se observa sólo un corrimiento de fase.
- Cambio en  $T_0$ : Se observa sólo un corrimiento de fase.

- Cambio en  $Z$ : Se observa sólo un desplazamiento de la curva en  $Z$ .
- Cambio en  $P$ : Se observa un cambio en el período de la señal y un corrimiento de fase.

Analizando los items anteriormente descritos se puede concluir que existen posibles correlaciones entre parámetros. En particular, la excentricidad  $e$  con la semi-amplitud  $K$  y  $Z$ .

Ahora considerando los parámetros nominales donde  $e = 0.95$  se realiza el mismo análisis (ver Fig. 33). Se observa que, en general, el comportamiento es similar al caso de  $e = 0$  salvo los siguientes detalles:

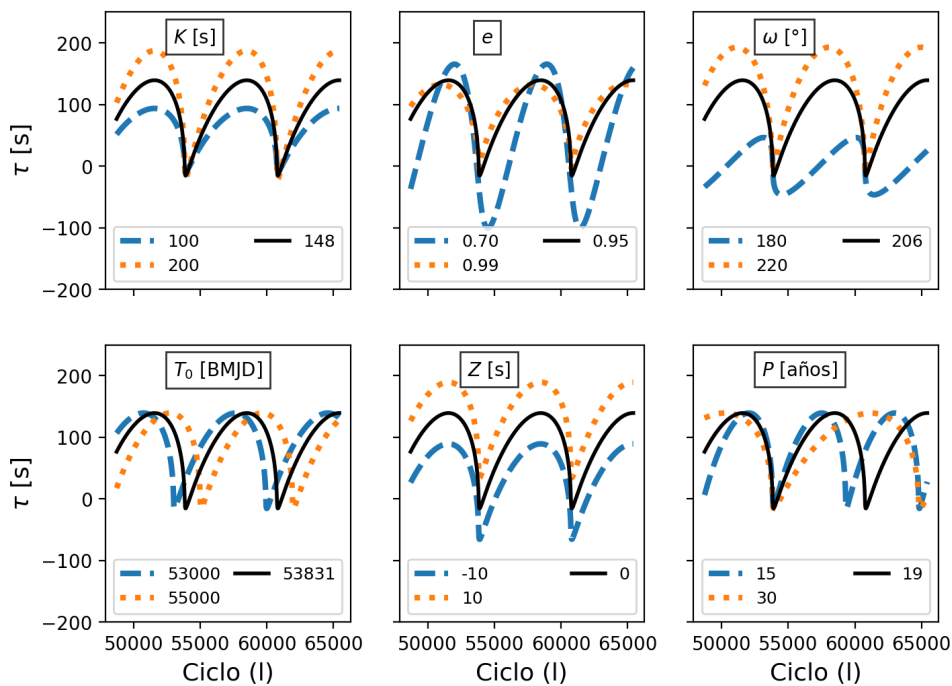


Figura 33: Segunda comparación de curvas sintéticas en el diagrama (O-C) basadas en el modelo de [Goździewski et al. \(2012\)](#) donde se tiene  $e$  fiduciaria  $e=0.95$ . En cada panel se muestra, en el eje-X el ciclo correspondiente y en el eje-Y el valor de  $\tau$ . En cada panel se muestran tres curvas sintéticas; la curva negra (continua) representa la generada por todos los parámetros fiduciaros, las curvas naranja (línea discontinua) y azul (punteada) son construidas mediante una variación en el parámetro asociado al panel (remarcado en la leyenda, dentro del rectángulo).

A partir de lo discutido para la Fig. 32, se puede observar que el comportamiento en la Fig. 33 es similar, salvo por unas cuantas excepciones.

Se puede observar como el cambio en semi-amplitud  $K$  posee la particularidad de que las tres curvas sintéticas comparten la posición de sus mínimos, a diferencia de las tres curvas cuando  $e=0$ . La variación en la excentricidad  $e$  causa un aparente cambio en la amplitud y fase de la señal (lo que da señales de una posible degeneración) y también hace que la curva sea más o menos *suave* dependiendo de si el valor es mayor o menor,



respectivamente. El cambio en  $\omega$  también produce un cambio en la semi-amplitud y fase de la curva.

Existe un parámetro en particular que produce una variación diferente lejos de la vecindad del valor nominal. Este parámetro es el argumento de peri-centro  $\omega$ , en la Fig. 34 se puede observar cómo afecta el cambio de  $\omega$  dependiendo del cuadrante en el que se encuentre. Se puede observar como las curvas para  $\omega$  igual a  $0^\circ$  y  $180^\circ$  son una reflejada de la otra con respecto al eje temporal (eje-X) y las curvas para  $\omega$  igual a  $90^\circ$  y  $270^\circ$  son espejadas con respecto al eje-Y. Durante las transiciones se ve que las curvas aumentan/descienden sus valores en el eje-Y manteniendo una asimetría hacia un lado hasta que se elimina en los valores  $90^\circ$  y  $270^\circ$ .

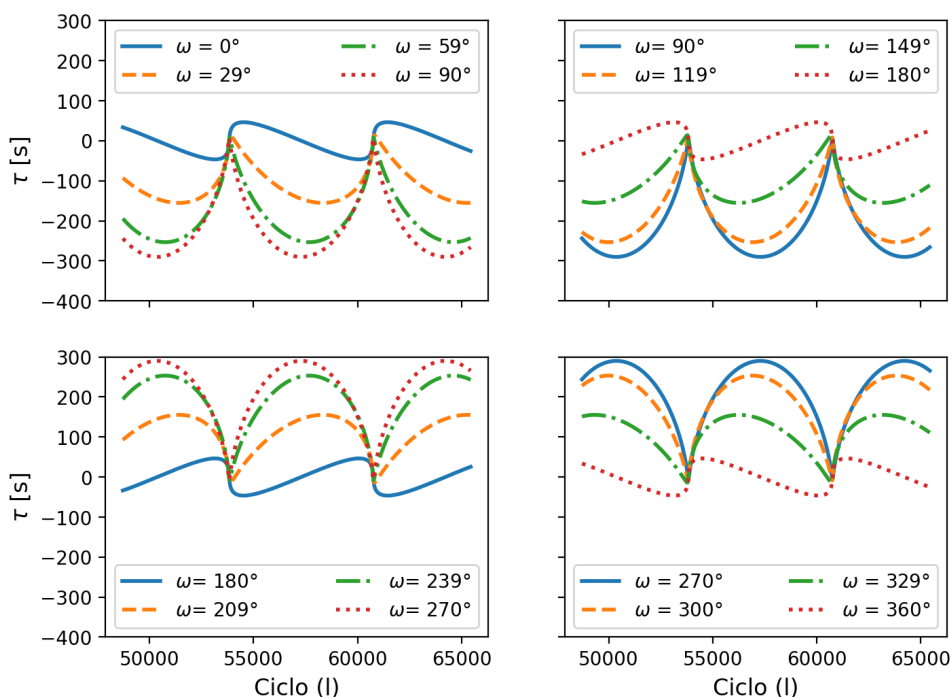


Figura 34: Comparación de curvas sintéticas en el diagrama (O-C) basadas en el modelo de [Goździewski et al. \(2012\)](#) donde se tiene con  $e$  fiduciaria  $e = 0.95$ . Se muestran las variaciones de la curva al considerar los cuatro posibles cuadrantes para  $\omega$ .

### 2.5.2 Determinaciones previas de exoplanetas en QS Virginis

El sistema QS Virginis ha tenido varias propuestas de sistemas planetarios a lo largo de los años. La primera construcción del diagrama (O-C) fue realizada por [O'Donoghue et al. \(2003\)](#) en donde observaron los tiempos medios de ingreso y egreso de eclipse, a diferencia de los trabajos posteriores donde utilizan el tiempo medio de eclipse. Sin embargo, los autores concluyeron que la señal observada, la cual tenía amplitudes hasta 12s, era a causa de ruido.

Los siguientes trabajos publicados han añadido observaciones progresivamente y han propuesto que las explicaciones para la señal  $\tau$  contiene, al menos, un planeta.

En el trabajo de Qian et al. (2010) se publicaron nuevas observaciones de los tiempos de eclipse y se reportó el descubrimiento de un planeta gigante tipo Júpiter en QS Vir con un período de 7.86 años y masa de  $M_p = 6.65M_J$ . Los autores analizaron la variación del período orbital y encontraron que se compone de una variación cíclica de corto período superpuesta a una variación de decaimiento de largo período. En la Fig. 35 se muestra el diagrama (O-C); los autores analizaron el decaimiento de  $P_{bin}$  y concluyeron que el mecanismo causante es el *magnetic braking*, descartando la emisión de ondas gravitacionales por producir un  $dP_{bin}/dt$  de ordenes de magnitud menor al observado. La variación cíclica es producida por la presencia del planeta circumbinario.

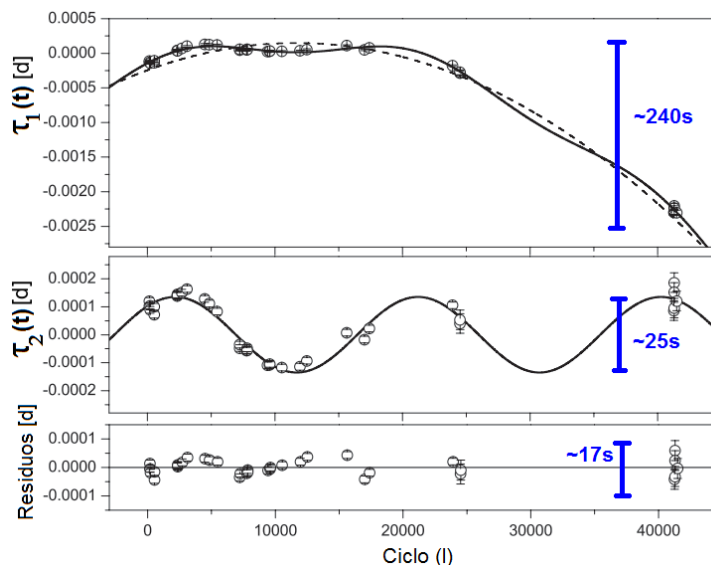


Figura 35: *Panel superior*. Diagrama (O-C) de QS Vir hecho usando la efemérides lineal de O'Donoghue et al. (2003). La línea sólida corresponde al modelo planteado como contribución de *magnetic braking* y un exoplaneta. La línea a trazos representa el decremento del período orbital. *Panel medio*: se muestra un segundo diagrama (O-C) construido con la diferencia entre la señal  $\tau_1$  y el modelo de línea a trazos. *Panel inferior*: Residuos originados al remover la contribución por magnetic braking y por el planeta a la señal  $\tau_1$ . Imagen adaptada de Qian et al. (2010).

Cabe destacar que en el trabajo de Qian et al. (2010) utilizan la misma ecuación de efeméride lineal que en O'Donoghue et al. (2003) para construir el diagrama (O-C). En el posterior trabajo de Parsons et al. (2010) se presentaron nuevas mediciones de tiempos medios de eclipse de QS Vir. Los autores construyeron el diagrama (O-C) variando la efeméride lineal propuesta por O'Donoghue et al. (2003). Cabe destacar que la variación de efeméride produce un cambio significativo en la forma de la señal  $\tau$  en el diagrama (O-C). En la Fig. 21 se muestran las nuevas observaciones (señaladas con flechas) y se observa que el modelo cíclico predicho por Qian et al. (2010) no es compatible con las nuevas observaciones. Los autores concluyeron que el planeta propuesto por Qian et al. (2010) no debería existir y propusieron un modelo que se ajusta mejor a las observaciones e implica la presencia de un exoplaneta con parámetros  $M = 54M_J$ ,  $a = 6.4\text{ua}$  y  $e = 0.9$ .

Adicionalmente, en el trabajo de [Parsons et al. \(2010\)](#), realizaron un estudio sobre la **evolución** de la binaria para comprobar qué tan factible es la presencia del planeta determinado. Los autores encontraron que la separación **inicial** de la binaria era de 4.4ua (previo a la formación de la enana blanca) y la separación inicial del planeta fue de  $\sim 3.4$ ua. Este resultado indica que el planeta estuvo sumergido en la envoltura común de la binaria. Los autores también analizan la posibilidad de que el planeta sea de **segunda generación**, es decir que sea formado a partir del el material expulsado por la primaria y concluyen que no es favorecida por la alta excentricidad y masa del mismo. De todas formas, por la alta incerteza de la dinámica de planetas sumergidos en la envoltura común de la binaria, no descartan del todo esta idea.

En el siguiente año, [Almeida & Jablonski \(2011\)](#) publicaron nuevas observaciones y un nuevo análisis del diagrama (O-C). El nuevo modelo propuesto para explicar las observaciones implica la presencia de 2 planetas circumbinarios. En la Fig. 36 se muestra el diagrama (O-C) obtenido y el modelo resultante. Se puede notar como la forma del diagrama (O-C) ha cambiado significativamente comparado al diagrama determinado por [Parsons et al. \(2010\)](#), esto debido al hecho de que los autores ajustaron nuevos coeficientes para la efeméride lineal.

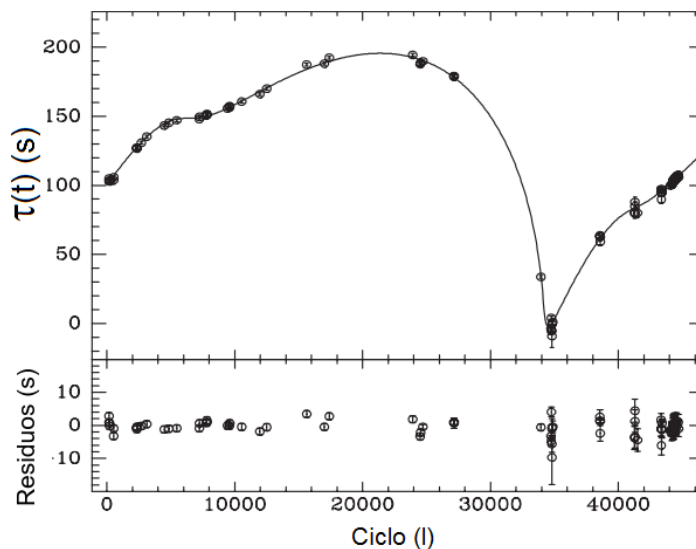


Figura 36: *Panel superior*: se muestra el diagrama (O-C) de QS Vir construido con la efemérides obtenida en el trabajo de [Almeida & Jablonski \(2011\)](#). La línea continua representa el ajuste de dos exoplanetas propuesto. *Panel inferior*: se muestra el residuo con respecto al ajuste. Figura adaptada de [Almeida & Jablonski \(2011\)](#).

[Horner et al. \(2013\)](#) realizó un estudio de estabilidad dinámica usando simulaciones para analizar los exoplanetas propuestos por [Almeida & Jablonski \(2011\)](#) y encontró que éstos son inestables, en el mejor de los casos la estabilidad dura hasta  $\sim 28500$  años.

[Bours \(2015\)](#) publicó nuevas observaciones pero no realizó un ajuste de parámetros orbitales. [Bours et al. \(2016\)](#) presentó la construcción de un nuevo diagrama (O-C) pero

Tabla 3: Parámetros para los planetas propuestos para QS Virginis

Parámetro	$a$	$b$	$c$	$d$
K [s]	-	-	-	-
P [años]	7.8	14	14.40, 16.99	4.78, 18.96
$e$	0.37	0.9	0.62, 0.92	0.10, 0.96
$\omega$ [°]	38	-	180, 219	337, 206
$T_0$ [BJMD]	48687.5	-	-	-
Z [s]	-	-	-	-
$M\sin(i)$ [ $M_J$ ]	6.4	54	8.04, 52.3	6.3, 52.7

Ref.: <sup>a</sup> Qian et al. (2010), <sup>b</sup> Parsons et al. (2010), <sup>c</sup> Almeida & Jablonski (2011), <sup>d</sup> Pereira & Ferraz-Mello (2019).

no se publicaron los nuevos tiempos de eclipse. Latković et al. (2019) publicaron nuevos tiempos de eclipse pero la fotometría utilizada, como se puede observar en la Fig. 12, posee pocos puntos durante el eclipse primario. Esto resulta en poca precisión a la hora de determinar el tiempo medio de eclipse.

Pereira & Ferraz-Mello (2019) analizaron nuevas observaciones y determinaron los parámetros de dos planetas orbitando a la binaria. Los nuevos tiempos de eclipse no han sido publicados en la literatura.

En la Tabla 3 se resumen los parámetros determinados para el planeta/s determinados a QS Vir a los largo de los años.

Como puede verse, existe amplio debate sobre cuál es el planeta o planetas que giran en torno a QS Virginis y en este trabajo se intentan indagar las causas.

### 3 Problema de minimización

En el capítulo 2 se discutieron varios posibles orígenes para la señal  $\tau$  contenida en el diagrama (O-C). Uno de estos orígenes es la presencia de exoplanetas orbitando a la binaria (Sección 2.5). Dado el modelo, se quiere encontrar el conjunto de parámetro orbitales que mejor represente las observaciones.

La determinación de los parámetros orbitales es un proceso complejo dada la no-linealidad del modelo (ver Ec. 34), además de que la mayoría de los sistemas observados en la literatura no poseen bases temporales de observación que cubran varios períodos de la señal (Bours et al., 2016).

Para llevar a cabo la búsqueda del conjunto de parámetros orbitales que mejor represente las observaciones se recurre a utilizar el método de *cuadrados mínimos* sumado a la utilización de una estrategia de exploración del espacio de parámetros.

El **método de cuadrados mínimos** consiste en utilizar como criterio de optimización la minimización de una función residuo  $R$  que es dependiente de la diferencia cuadrática media de los valores observados y los predichos por el modelo. En la literatura se mencionan dos funciones residuo en particular (asumiendo una distribución gaussiana para los errores): la WRMS (*Weighted Root Mean Square*, o raíz cuadrada media pesada por su traducción a español) y  $\chi^2$  dadas en las siguientes ecuaciones.

$$(WRMS)^2 = \frac{1}{S(N-1)} \sum_{i=1}^N \frac{(OC - \tau)_{t_i}^2}{\sigma_{t_i}^2} \quad \text{con} \quad \frac{1}{S} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_{t_i}^2} \quad (35)$$

$$\chi_\nu^2 = \frac{1}{N-M} \sum_{i=1}^N \frac{(OC - \tau)_{t_i}^2}{\sigma_{t_i}^2}$$

donde,  $OC_{t_i}$ ,  $\tau_{t_i}$  y  $\sigma_{t_i}$  representan el valor de la señal en el diagrama (O-C) al tiempo de observación  $t_i$ , el valor predicho por el modelo (Ec. 34) al tiempo  $t_i$  y la incertidumbre de la medición al tiempo  $t_i$ , respectivamente.  $N$  representa la cantidad de datos observacionales y  $M$  es el número de parámetros del modelo,  $\nu = M - N$  es comúnmente referido como el número de grados de libertad de la regresión. En este trabajo se eligió trabajar con la función residuo WRMS.

Dada la no-linealidad del modelo existen dos enfoques para la minimización: los métodos deterministas y los métodos estocásticos. Un método determinístico consiste en un método que comienza con una solución perteneciente al espacio de parámetros elegida de forma aleatoria, luego se realizan cambios a la solución que llevan a mejores soluciones. En otras palabras, los métodos determinísticos buscan moverse en la dirección en la que la función residuo decrece. Mediante el uso de evaluaciones de la función o sus derivadas. Estos métodos son muy sensibles a las condiciones iniciales consideradas, pudiendo quedar atrapado en mínimos locales y nunca converger al mínimo global de la función residuo. En la Fig. 37 se muestra un esquema que ejemplifica la definición de mínimo local y mínimo global.

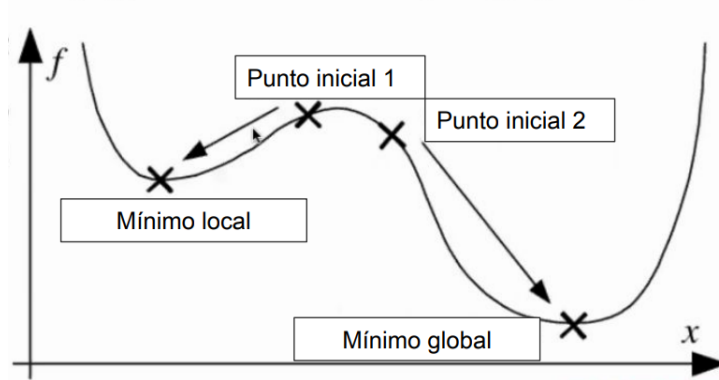


Figura 37: Esquema de un mínimo local y global de una función.

En la Fig. 37 se muestran, además, dos posibles condiciones iniciales y la dirección para la cual la función decrece, si se considera a esta función como analogía a la función residuo WRMS y, por ejemplo, se usa un método de minimización que depende de la derivada primera: se observa que el **punto inicial 1** converge al mínimo local y el **punto inicial 2** converge al mínimo global.

Los algoritmos estocásticos poseen la selección probabilística (aleatoria) en el proceso de minimizado. Esta aleatoriedad introduce una forma de posicionarse lejos de la solución local cuando se busca el mínimo global.

Siguiendo ideas de [Giuppone et al. \(2011\)](#), se elige como estrategia la utilización de un algoritmo estocástico para realizar una exploración global del espacio de parámetros (Algoritmo genético) y, consecuentemente se aplica un algoritmo determinístico (algoritmo simplex) para refinar la solución. Esto último se realiza mediante el fijado de la condición inicial para el algoritmo simplex a la solución encontrada mediante el algoritmo genético, que está cerca del mínimo global.

### 3.1 Algoritmo genético

Este algoritmo, tal como se expresa en [Charbonneau \(1995, 2002\)](#), se basa en las ideas generales sobre evolución y adaptación presentadas por Charles Darwin en *On the Origin of Species* (1859) y, por esto se utiliza terminología específica de la biología para describirlo.

El mecanismo que rige la evolución es la selección natural, que es el proceso a través del cual los individuos mejor adaptados a su ambiente tienden a producir, en promedio, más descendencia que sus competidores menos adaptados. Darwin observó que para que la selección natural lleve a cabo evolución a grandes escalas se requieren dos ingredientes clave.

- **Herencia.** O algún mecanismo por el cual los progenitores puedan transferir sus características a sus descendientes.

- **Variación.** O la existencia de una población con características dispersas en un espectro de valores de adaptación. En otras palabras, si la población es similar, la selección natural no puede operar.

Tal como se expresa en [Charbonneau \(1995, 2002\)](#), básicamente se sabe que cada célula de cada individuo (denominadas fenotipos) contiene información codificada en una secuencia que constituye el genotipo. Sin embargo, debido a que fenotipos de alta adaptación se traducen, en promedio en altas probabilidades de reproducción, el fenotipo tiene influencia directa en el *pool* de genes (conjunto de genotipos) en la próxima generación. Los fenotipos con mejor adaptación **copian** su fenotipo más frecuentemente en la próxima generación, lo que lleva a una porción creciente de fenotipos con buen ajuste en la población. Para condiciones de medio ambiente fijas, la población naturalmente converge como un todo hacia los individuos mejor adaptados.

La reproducción involucra la combinación del genotipo de los progenitores, esta es la parte de **herencia**. Durante esta combinación ocurren errores de copia y eventos totalmente aleatorios que otorgan el ingrediente de **variabilidad** en los valores de los genes.

### 3.1.1 Aplicación de la selección natural

Existe un ejemplo que muestra cómo el actuar de la selección natural durante generaciones consecutivas pueden acelerar, lo que en su ausencia sería una exploración aleatoria en el espacio de los parámetros. Este fue dado en el libro de Richard Dawkins *The blind watchmaker* (1986).

Considerando la siguiente oración, como ejemplo de [Charbonneau \(2002\)](#):

JEG SNAKKER BARE LITT NORSK

Esta oración posee 27 caracteres, incluyendo espacios en blanco. Estos caracteres pueden tomar 30 valores (27 letras del alfabeto inglés + espacio en blanco + 3 famosas letras escandinavas: Å, Ø y Æ)

Si ahora se piensa en el acto de producir una oración de 27 caracteres de largo seleccionando letras al azar del pool de los 30 caracteres anteriormente descritos podemos tener como ejemplo la siguiente oración:

ZEBYENÆTUV P QÅODEMI FVGHDOO

Si se toma como criterio de comparación cuántos caracteres coinciden en nuestra oración generada al azar y la original se puede ver que 3 letras coinciden. Se puede idear entonces un procedimiento para acercarnos a la oración original de la siguiente manera:

- (1) Generar 10 oraciones con 27 caracteres seleccionados de forma aleatoria;
- (2) Seleccionar la oración que tiene la mayor cantidad de letras correctas;

- (3) Duplicar esta oración 10 veces;
- (4) Para cada duplicado se reemplazan de forma aleatoria algunas letras;
- (5) Se repiten los pasos (2) hasta (4) hasta que la oración coincida.

Este algoritmo incorpora los tres ingredientes anteriormente mencionados para llevar a cabo el proceso evolutivo. El paso (2) es la selección natural en una forma bastante extrema ya que sólo el mejor de la población actúa como progenitor para la siguiente. El paso (3) es la herencia, nuevamente de una forma extrema porque los descendientes, en un comienzo, son copias exactas de su progenitor y, por último, el paso (4) contiene la variabilidad. Tal como se menciona en [Charbonneau \(2002\)](#) hay que notar que este algoritmo opera sólo con la información del valor del **fitness** o **adaptación** de la solución (cuántas letras coinciden con la oración original) pero no retiene, por ejemplo la información de qué letras son correctas. Lo que le falta es alguna forma de intercambio de información entre soluciones, pero es bastante útil para dar una idea del poder de la selección natural aplicada de forma acumulada.

En la Fig. 38 se puede observar este mecanismo aplicado; la tasa de mutación fue definida a 0.01 lo que significa que cada carácter de la oración tiene una probabilidad de 0.01 % de cambiar a una letra al azar. La primera columna lista el número de iteración y el **error** es listado en la última columna. El **error** es definido como la cantidad de letras en la que la oración difiere de la oración objetivo. Notar como el algoritmo reduce el error rápidamente al comienzo pero su rapidez disminuye significativamente al final. Por ejemplo: se usan 200 iteraciones para tener las primeras 15 letras correctas (error de 12) y luego se usan otras 200 iteraciones para obtener la última letra correcta. Eventualmente, luego de 918 iteraciones se completa el algoritmo siendo el caso de que se han evaluado 9180 soluciones posibles vs. la oración objetivo. Comparando este número con el número de intentos que se tendrían que hacer de forma aleatoria  $\sim 10^{40}$  iteraciones queda clara la ventaja de utilizar este algoritmo.

El efecto de cambiar la tasa de mutación en el algoritmo se puede observar en la Fig. 39 donde se grafican las curvas de convergencia para tres valores distintos, comenzando con la misma oración inicial. La línea sólida es la solución mostrada en la Fig. 38. Podemos notar que la solución con una tasa mayor converge más rápidamente pero no converge a un error de cero, sino a un valor superior. Este fenómeno ocurre porque la tasa de mutación supera el **valor crítico** y ocurre que se crean buenas soluciones al mismo tiempo que se las destruye ([Charbonneau, 2002](#)).

Los autores concluyen que la variabilidad dada por la mutación trae consigo beneficios y problemas. Nuestro objetivo sería acercarnos al valor crítico de la tasa de mutación para obtener un algoritmo más eficiente.



Objetivo	J E G	S N A K K E R	B A R E	L I T T	N O R S K	
1	Z E B Y E N Æ T U V P	Q Å O D E M I	F V G H D O O	23		
50	V E G Æ E N Æ R O E O	Q Å B D E M I	F V N Å D O K	19		
100	V E G Æ E N Æ K C E O	Ø P H Z E M I	F V N Å Ø O K	18		
150	V E G W X N Æ K C E O	N A H A D M I	C F N N E R O K	16		
200	J E G W X N P K K E O	B A H A	R I C E Å N E R O K	12		
250	J E G W V N R K K E	B A E A	R I Å E Å N R T K	12		
300	J E G R N R K K E	B A E T	U I Ø Ø N Q R K K	10		
350	J E G K N K K K E	B A R	U I Ø Ø N Q R M K	9		
400	J E G K N V K K E	B A R	P I H Ø N Q R S K	8		
450	J E G K N V K K E R	B A R	L I D Ø N Å R S K	6		
500	J E G Ø N V K K E R	B A R	L I S Ø N K R S K	6		
550	J E G Ø N F K K E R	B A R E	L I S I N B R S K	5		
600	J E G S N F K K E R	B A R E	L I A W N B R S K	4		
650	J E G S N A K K E R	B A R E	L I A W N O R S K	2		
700	J E G S N A K K E R	B A R E	L I A T N O R S K	1		
750	J E G S N A K K E R	B A R E	L I A T N O R S K	1		
800	J E G S N A K K E R	B A R E	L I A T N O R S K	1		
850	J E G S N A K K E R	B A R E	L I A T N O R S K	1		
900	J E G S N A K K E R	B A R E	L I Y T N O R S K	1		
950	J E G S N A K K E R	B A R E	L I T T N O R S K	0		

Figura 38: Evolución del algoritmo propuesto en la sección 3.1.1 para demostrar la efectividad de la selección acumulada. En la columna de la izquierda se lista el número de iteración y en la última a la derecha el error, definido por cuántas letras la oración difiere de la oración objetivo. Figura adaptada de Charbonneau (1995).

### 3.1.2 Un algoritmo genético básico

Tal como se expresa en Charbonneau (1995) y Giuppone et al. (2011), el *pool* de genes (población inicial) evoluciona en respuesta a los siguientes eventos: (1) El éxito de la reproducción diferencial en la población; (2) La cruce (recombinación genética) ocurrida en los descendientes; (3) Las Mutaciones aleatorias que afectan a la descendencia.

Un esquema básico de un algoritmo genético dado por Charbonneau (1995) es como sigue; dado un fenotipo objetivo y un criterio de tolerancia:

- (1) Construir una población inicial y evaluar su **adaptación**;
- (2) Crear una nueva población mediante la **reproducción selectiva** de individuos de la población;
- (3) Evaluar la **adaptación** de la nueva población;
- (4) Reemplazar la vieja población por la nueva ;
- (5) Test de convergencia: A menos que el mejor fenotipo de la nueva población esté dentro de la tolerancia definida, volver al paso (2).

La **reproducción selectiva** hace referencia a aplicar un criterio de selección para seleccionar un par de individuos de la población y luego crear dos descendientes mediante la cruce y mutación. Una forma de selección posible es mediante el método *Roulette wheel*

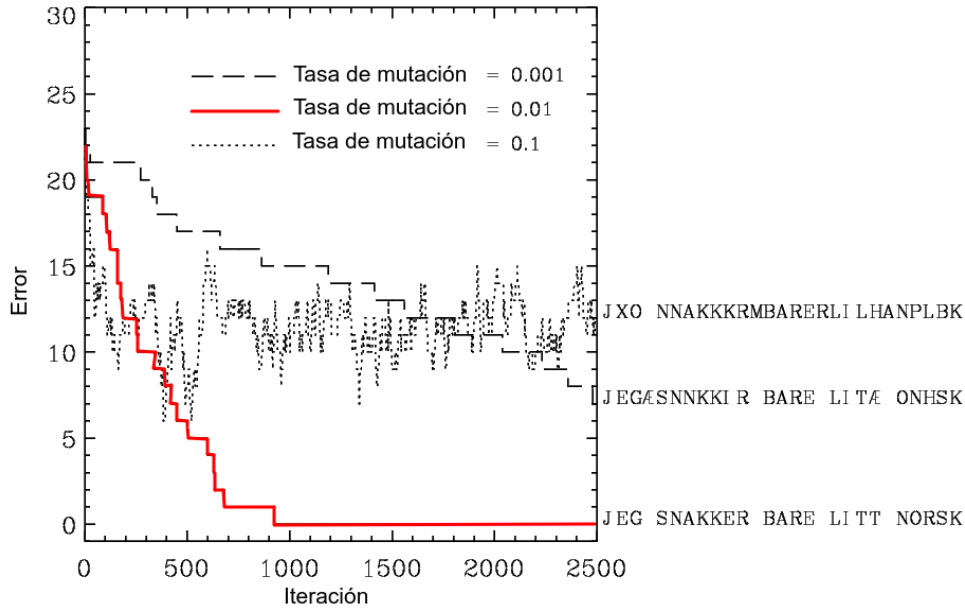


Figura 39: Curvas de convergencia para el problema de búsqueda de la oración, para tres diferentes valores de la tasa de mutación. Las curvas muestran el error asociado con la oración objetivo en cada iteración. La línea roja representa la solución mostrada en la Fig. 38. Figura adaptada de Charbonneau (1995).

*algorithm* que, básicamente, se basa en que la probabilidad  $P_i$  de selección del individuo  $i$  es proporcional al valor de su **fitness** o **adaptación**, su valor es calculado mediante la ecuación:

$$P_i = \frac{f_i}{\sum_{j=1}^N f_j} \quad (36)$$

donde  $f_i$  es la **adaptación** del individuo  $i$  y  $N$  es el tamaño de la población.

Un ejemplo ilustrativo es dado en la Fig. 40, la cual muestra el proceso de reproducción para un ejemplo dado en la sección 1.1 de Charbonneau (1995), el cual básicamente es un problema bidimensional (se intentan encontrar 2 parámetros,  $x$  e  $y$ ).

- Se genera aleatoriamente la población inicial donde el dominio para cada parámetro ha sido transformado al rango  $[0,1]$ . En nuestros cálculos el tamaño de la población oscila entre 600 a 1200 individuos;
- Líneas [01 - 02]: Se seleccionan un par de individuos de la población inicial P(P1) y P(P2), usando por ejemplo el método de *Roulette wheel* descrito anteriormente, para que sean los progenitores;
- Línea [03]: **Codificación**. Se codifican los individuos transformándolos a un escalar quitando el cero y el punto y ordenando de forma consecutiva, se los denomina S(P1) y S(P2);
- Línea [04 - 12]: **Reproducción**. Se mezclan los progenitores para formar dos des-

endientes. En este caso la cruce se da en el  $gen=4$ ;

- Línea [13 - 16]: **Mutación**. Se especifica una tasa de mutación que introduce el factor de aleatoriedad a la descendencia en un cierto gen elegido aleatorio, en el ejemplo la mutación actúa sobre el descendiente 02 y el  $gen=10$  cambiando el valor 2 por 8;
- Línea [17 - 20]: **Decodificación**. Cada información de individuo es decodificada para obtener los  $(x, y)$  en el rango  $[0,1]$ ;
- Se realiza este proceso hasta que se haya creado una nueva población igual de grande que la inicial. Se renueva parte del *pool* de individuos (la  $i$ -ésima generación) dejando solo algún porcentaje de aquellos que sean los mejor adaptados;
- Se repite el proceso volviendo al inicio a lo largo de  $10^4$  a  $10^5$  generaciones.

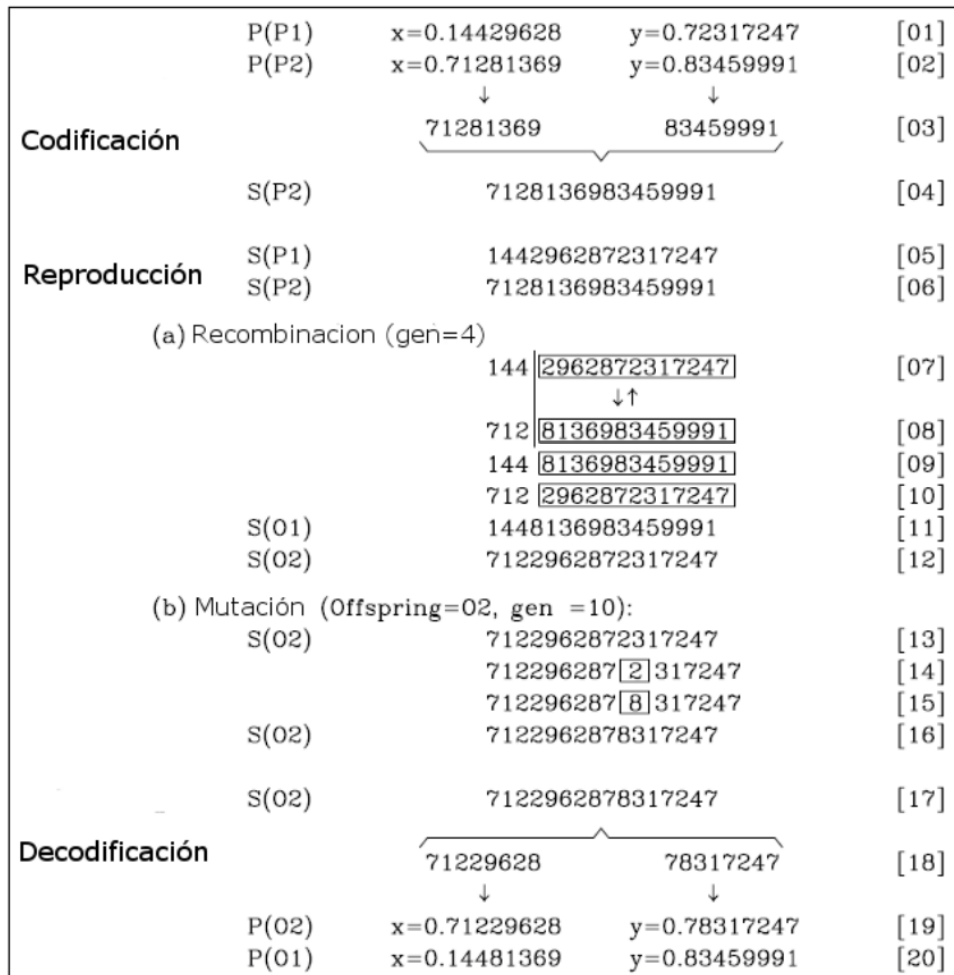


Figura 40: Esquema de operaciones básicas que realiza el algoritmo genético, en un problema de minimización 2D. Un individuo es dado por un punto  $(x,y)$  y dos individuos que se denominan padres son necesarios para la reproducción denominados P(P1) y P(P2). El operador recombinación actúa sobre las cadenas que representan los padres (ver texto para más detalle). Figura adaptada de Charbonneau (1995).

### 3.1.3 Algoritmo elegido. *Scipy: Differential evolution*

El algoritmo genético que se elije aplicar está contenido en el paquete `optimize` de *Scipy* (Virtanen et al., 2020; Storm & Price, 1997). Se trata de un algoritmo el cual su estrategia de reproducción difiere en algunos puntos a lo explicado anteriormente.

La estrategia utilizada es la de *best1bin*. Para clarificar el proceso se elige un **ejemplo simple** al cual se le aplicará el proceso descrito en la documentación de *Scipy*. Cabe aclarar que en el eventual ajuste la población utilizada es de mínimamente 600 individuos y que se los evoluciona hasta que el algoritmo converja (normalmente cerca de  $\sim 200$  generaciones), en este ejemplo se muestra una población de 4 individuos y un sólo paso dentro de lo que sería la construcción de una nueva generación.

En la Fig. 41 se observa el esquema de minimización aplicado al ejemplo. Se considera un población inicial de cuatro integrantes denominados P1, P2, P3 y P4, respectivamente. También, para claridad en la explicación, se han ordenado los miembros de la población en función de su **adaptación**. P1 es el integrante más adaptado y le siguen el resto en orden descendiente.

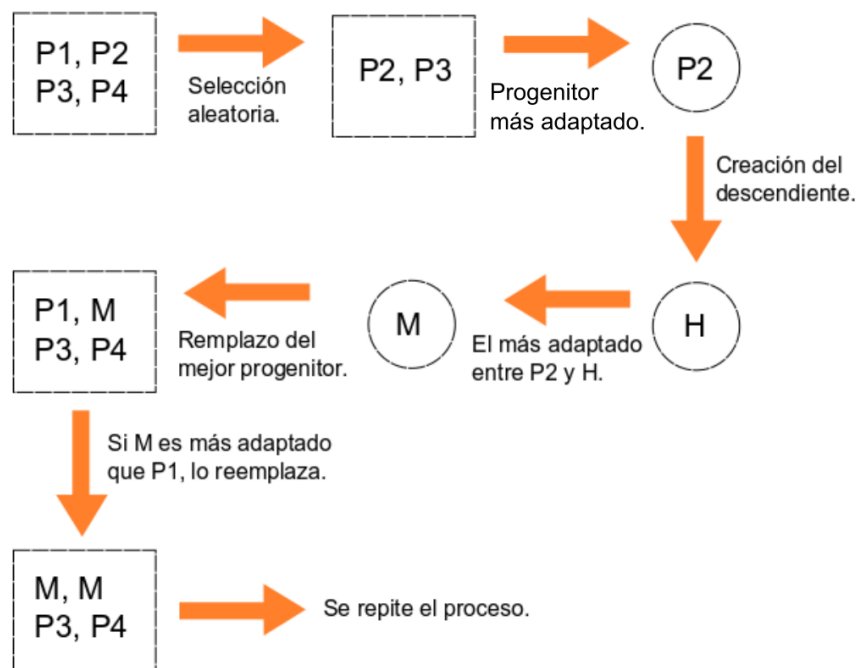


Figura 41: Esquema del algoritmo utilizado por `scipy` con la estrategia `best1bin`. Ver texto para más detalles.

Primero se seleccionan de forma aleatoria dos miembros de la población inicial (en el caso del ejemplo son P2 y P3), luego se evalúa su **adaptación** y se determina cuál es el más adaptado (en el ejemplo es P2). A continuación se genera el descendiente de los progenitores, el proceso consiste en mutar el mejor progenitor. En este paso es donde se

aplica la técnica *best1bin*, dado que se elige **al mejor** (*best1*) de los dos progenitores y se utiliza una distribución binomial (*bin*) para construir el descendiente.

Creación del descendiente: Primero se construye una solución auxiliar  $P'$  (componente a componente) como se expresa en la siguiente ecuación:

$$P'_i = P2_i + m[P3_i - P2_i] \quad (37)$$

donde  $m$  es la **constante de mutación** (definida más adelante).

Una vez generado  $P'$ , el descendiente  $H$  se construye también componente a componente. Para decidir la componente  $i$ -ésima del  $H$  se genera un número aleatorio en el intervalo  $[0,1)$ , dada una distribución de probabilidad binomial. Si este escalar es menor que la **constante de recombinación** (definida más adelante) entonces la componente  $i$ -ésima del descendiente  $H$  es elegida de  $P'$ , sino se elige la del mejor progenitor (o P2 en este ejemplo). La componente final siempre es elegida de  $P'$ .

Una vez se tiene el descendente  $H$  se verifica si su adaptación es más alta que su progenitor mejor adaptado (P2). Si esto ocurre  $H$  pasa a llamarse  $M$  (por solución mutada) y reemplazará a P2 en la población (si no ocurre entonces no lo reemplaza). Además, si la adaptación de  $M$  supera a la mejor solución de la población (P1),  $M$  también lo sustituirá. Para construir una nueva generación se deberán seleccionar todos los miembros de la población inicial  $P_i$  (en este ejemplo se estudió P2) y construir su descendiente ( $H_i$ ). Algunas veces el individuo mutará ( $H_i$  reemplaza a  $P_i$ ) y otras quedará igual. Este proceso se repite hasta que se cumpla algún criterio de convergencia.

Este algoritmo necesita como entrada inicial determinar qué función se desea minimizar, en nuestro caso el la función WRMS definida en la Ec. 35. También requiere dar el dominio para cada uno de los parámetros de la función.

En nuestro caso se tienen 6 parámetros, los cuales son listados a continuación con el rango propuesto. Para la obtención de estos rangos se realizó una exploración del modelo hasta llegar al punto en que los parámetros ajustados no converjan al borde del rango propuesto.

- $K[s] \in [50, 500]$
- $e \in [0, 0.99]$
- $\omega[\text{rad}] \in [0, 2\pi]$
- $T_0[\text{BMDJ}] \in [\max(T), \max(T)]$
- $Z[s] \in [-500, 0]$
- $P[\text{años}] \in [10, \frac{\max(T) - \min(T)}{\text{años}}]$

donde T representa la lista de valores para los tiempos medios de eclipse observados.

El algoritmo tiene otros parámetros de entrada, a continuación se menciona la idea de los más relevantes:

*func*: La función objetivo a ser minimizada (en este trabajo es la función WRMS (ec. 35). Es de la forma  $f(x, *args)$  donde  $x$  es el argumento dado en la forma de un arreglo 1D y  $*args$  representa parámetros adicionales para definir la función. En nuestro caso  $x=(K,e,\omega,T_0,Z,P)$ .

*bounds*: El dominio para cada uno de las variables que componen a  $x$ .

*maxiter*: Número máximo de iteraciones/generaciones utilizado para evolucionar la población inicial. Normalmente se utilizará un valor cercano a 1000 y, de forma consistente, el algoritmo converge antes de alcanzar este valor.

*popsize*: Un multiplicador para determinar la cantidad de individuos en la población inicial. La población tiene ( $popsize \cdot N$ ) individuos, donde  $N$  es la dimensión del problema que en nuestro caso es 6. Mínimamente se usa  $popsize=100$ , es decir al menos 600 individuos.

*strategy*: La estrategia para la evolución diferencial. Existen varias opciones para elegir, por ejemplo *best1bin*, *best1exp*, *rand1exp*, *randtobest1exp*, etc. Para este trabajo se elige la opción por defecto: *best1bin*.

*init*: Especifica cómo crear la población inicial. El valor por defecto que se usa es *latinhypercube* el cual es un método que intenta maximizar la cobertura del espacio de parámetros, definido por los 6 parámetros orbitales a determinar y sus asociados dominios.

*mutation*: Constante de mutación, puede ser dada como un número en el rango  $[0,2)$  o una tupla (min, max). Cuando se brinda la tupla, el algoritmo elige un número en el rango (min, max) para cada generación. Se hicieron varias pruebas y se concluyó que valores muy chicos o muy grandes: (0.001, 0.1) ó (1, 1.99) no minimizan significativamente la WRMS. Valores intermedios convergen en  $< 10$  min. El rango elegido es  $[0.5,1]$ .

*recombination*: Constante de recombinación. Un escalar en el rango  $[0,1]$ . En la literatura también es conocida como la probabilidad de cruce (*crossover probability*). Utilizamos el valor 0.7.

*tol*: Tolerancia relativa para la convergencia. Se utiliza el valor por defecto 0.01.

*atol*: Tolerancia absoluta para convergencia. Se utiliza el valor por defecto 0.

### 3.1.4 Criterio de convergencia

El criterio de convergencia utilizado consiste básicamente en pedir que la dispersión de valores de WRMS sea menor que el valor absoluto de la media de valores de WRMS de la población. Dado que se utilizaron los valores por defecto de *tol* y *atol* (es decir:  $atol=0$ ,  $tol=0.01$ ), el criterio se reduce a la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_{WRMS}}{abs(WRMS)} \leq 0.01 \quad (38)$$

donde  $\sigma_{WRMS}$  y  $abs(\overline{WRMS})$  representan la desviación estándar del WRMS de la población y el valor absoluto de la media de valores de WRMS, respectivamente.

La Ec. 38 permite interpretar que el criterio de convergencia se cumple cuando la desviación estándar de la población, normalizada por la media de la población sea menor o igual a la tolerancia relativa dada. Osea que se espera que todos los individuos tengan, aproximadamente, el mismo valor de WRMS y por lo tanto las soluciones están cerca entre ellas en el espacio de parámetros. Finalmente, no se esperaría una mejor solución en iteraciones futuras.

### 3.2 Algoritmo Simplex - *Nelder-Mead*

Una vez se encuentra la región del mínimo global utilizando el algoritmo genético, se procede a mejorar la misma aplicando el método Simplex (Nelder & Mead, 1965). Este algoritmo se basa en construir una figura geométrica en un espacio de N dimensiones llamada simplex, de N + 1 vértices. Todos ellos interconectándose con segmentos de líneas. Cada vértice es un conjunto de parámetros (K,e, $\omega$ ,T<sub>0</sub>,Z,P) al cual se le puede calcular su valor asociado de la función residuo R (en nuestro caso WRMS). Luego de esto se intenta reemplazar el vértice con el valor más **alto** de WRMS (solución menos adaptada) por otro punto, obtenido mediante alguna transformación geométrica.

Al igual que el algoritmo genético, se utiliza el paquete `optimize` de *Scipy* (Virtanen et al. 2020 y Storm & Price 1997) el cual tiene programado este método con parámetros adaptativos (Gao & Han, 2012).

Como se expresa en Gao & Han (2012), aunque este algoritmo carece de una teoría satisfactoria de convergencia, en general es efectivo al resolver problemas de dimensión baja y continúa siendo uno de los métodos más populares para buscar el mínimo de una función (Kolda et al., 2003; Lagarias et al., 1998; Wright, 1996)

Antes de describir algunos parámetros de interés se muestra cómo se inicializa y evoluciona este algoritmo.

#### 3.2.1 Simplex inicial

El simplex inicial es usualmente construido mediante generación de N+1 vértices  $V_0, \dots, V_N$  alrededor de un valor de entrada  $V_{entrada} \in \mathbb{R}^N$ . La elección más frecuente es  $V_0 = V_{entrada}$  y el resto de vértices son construidos mediante la siguiente ecuación:

$$V_i = V_0 + \delta_i \hat{e}_i \tag{39}$$

donde  $\delta_i$  corresponde a la magnitud del paso en la dirección definida por  $\hat{e}_i$  los cuales son los vectores unidades y tienen todas las direcciones posibles del espacio de parámetros.

Un forma alternativa de construir el simplex inicial es explícitamente definir los vértices que lo componen.

La construcción del simplex inicial consiste en formarlo a partir del vértice inicial  $V_0$ .  $\delta_i$  es elegido como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\delta_i = \begin{cases} 0.05 & V_i \neq 0 \\ 0.00025 & V_i = 0 \end{cases} \quad (40)$$

Se puede observar que en general la forma del simplex por ejemplo para 2 dimensiones es de un triángulo rectángulo con la magnitud de los catetos igual. (ver Fig. 42).

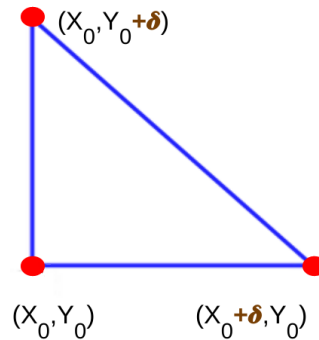


Figura 42: Esquema de un siplex inicial en 2 dimensiones, donde el vértice inicial cumple que sus componentes  $(X_0, Y_0)$  no son nulas.

### 3.2.2 Evolución y convergencia

El método simplex evalúa la función residuo en cada vértice y encuentra el **peor vértice**, es decir el que posee mayor valor de la función residuo (WRMS). Si se tienen múltiples peores vértices se usan reglas para romper el empate, como por ejemplo la brindada por [Lagarias et al. \(1998\)](#).

Luego, este método realiza una transformación geométrica sobre el simplex actual considerando cuál es el peor vértice, esta transformación puede ser: **reflexión**, **expansión**, **expansión** o **contracción**. Cada una tiene asociado un parámetro escalar  $\alpha$  (reflexión),  $\beta$  (expansión),  $\gamma$  (contracción) y  $\delta$  (contracción). En el trabajo de [Gao & Han \(2012\)](#) se propuso un método en el cual los parámetros  $\beta$ ,  $\gamma$  y  $\delta$  son **adaptados** a la dimensionalidad del problema. En la Fig. 43 se pueden observar esquemáticamente las transformaciones geométricas donde el peor vértice siempre está ubicado abajo a la izquierda. Se muestra la reflexión pura, la reflexión y posterior aplicación de una contracción/expansión y, por último, el encogimiento.

Como se expresa en [Giuppone et al. \(2011\)](#), la mayoría de las transformaciones geométricas hechas son reflexiones. Esto ocurre hasta que se llega a una región donde todos los vértices tiene un valor similar de la WRMS. En este caso, las transformaciones de **contracción/encogimiento** se aplican hasta que se cumpla el criterio de parada definido por el algoritmo.



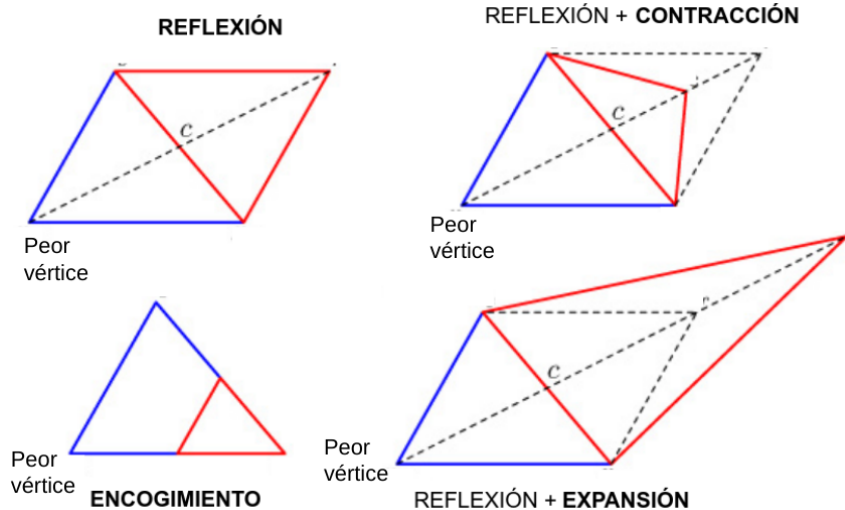


Figura 43: Esquema de transformaciones geométricas que realiza el algoritmo simplex. Adaptado de [Singer & Nelder \(2009\)](#).

A continuación se describen algunos parámetros de la implementación:

*fun*: Este es un parámetro equivalente al parámetro **func** descrito en la sección 3.1.3.

*bounds*: Es un vector multiparámetro que define los valores extremos posibles.

*maxiter*: Número máximo de iteraciones. Se utiliza el valor 200000 y se observa que el algoritmo siempre finaliza antes de alcanzar este número de iteraciones.

*fatol*: Error absoluto que es aceptable para la convergencia en la función a minimizar entre iteraciones. Se utiliza el valor  $10^{-5}$ .

Con esto se tiene un algoritmo que en el orden de minutos puede mejorar la solución brindada por el algoritmo genético. Lo que resta aún es obtener una estimación de las incertidumbres asociadas a estos parámetros.

### 3.3 Cadenas de Markov

Luego de aplicar la estrategia de ajuste propuesta (AG + simplex) se obtienen los parámetros orbitales que se denominan **mejor ajuste**. Sin embargo, aún se requiere la estimación de incertidumbres de estos parámetros. La primera estrategia elegida es utilizar las cadenas de Markov MonteCarlo (MCMC), entonces el **esquema** de minimización y estimación de incertidumbres se puede representar como se muestra en la Fig. 44.

Siguiendo los lineamientos de [Giuppone \(2011\)](#) y sus referencias de la sección 3.3, se procede a explicar la relevancia de las cadenas de Markov MonteCarlo para la estimación de incertezas.

Los métodos MonteCarlo directamente toman muestras a partir de la función de distribución *likelihood* ( $L$ ), es decir, suponen valores de los parámetros del ajuste y los aceptan con la probabilidad definida por el valor correspondiente de la función  $L$ . A pesar que parezca complicado, en primera aproximación el muestreo MonteCarlo es la aproximación

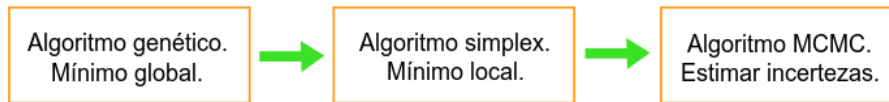


Figura 44: Esquema de estrategia inicial para ajustar los parámetros orbitales y estimar sus incertidumbres. En el texto se especifica el algoritmo y el objetivo a llevar a cabo con el mismo.

más intuitiva para la estimación de errores. La razón es su similitud con medir errores en los datos, repitiendo el proceso de medición y monitorizando los resultados. La fortaleza de los métodos MonteCarlo es que usan la mínima cantidad de suposiciones. La única suposición es que la distribución de los errores en los datos se conoce correctamente, sin requerir específicamente que sean Gaussianos, lo que hace general su aplicación.

Hay distintos tipos de métodos MonteCarlo dependiendo, por ejemplo, del número de parámetros del modelo  $\mathbf{M}$ . Cuando  $\mathbf{M}$  es bajo ( $<3$ ) se usan: muestreo uniforme, muestreo de importancia y muestreo de eliminación. Sin embargo estos métodos se hacen ineficientes o computacionalmente intensivos para modelos con muchos parámetros, donde se utilizan las **Cadenas de Markov con MonteCarlo**.

Los métodos MCMC son una clase de algoritmos que muestrean distribuciones a partir de una probabilidad, basándose en construir una **cadena de iteraciones** (denominada cadena Markov) que tiene una distribución de equilibrio deseada. El análisis de esta distribución de equilibrio permite estimar las cantidades de interés como la media, varianza, correlaciones, etc. El estado de la cadena de iteraciones después de un largo número de pasos es usado para tomar muestras de la distribución deseada y la calidad de la muestra mejora en función del número de pasos tomados. Es sencillo construir un algoritmo MCMC con las propiedades deseadas, el problema reside en determinar cuantos pasos son necesarios para la convergencia a la distribución estacionaria dentro de un error aceptable.

El muestreo MCMC solo puede llegar a ser próximo a la distribución deseada, debido a que siempre queda un efecto residual dependiendo de la posición inicial. Los métodos MCMC se mueven alrededor de la posición de la distribución de equilibrio en pasos relativamente pequeños, sin tendencia a ir en una dada dirección. El problema es que demandan mucho tiempo de cómputo debido al aspecto MonteCarlo que involucra técnicas de Camino Aleatorio (*Random Walk*). Existen 2 tipos de camino aleatorios utilizados en MCMC:

- Algoritmo **Metropolis-Hastings**: genera el camino aleatorio utilizando una densi-

dad de probabilidad, con el objetivo de descartar algunos movimientos en el espacio de parámetros. La elección natural para esta densidad de probabilidad se basa en una distribución uniforme.

- **Muestreo Gibbs:** es requerido para que la distribución condicional de la distribución deseada sea muestreada exactamente. Al considerar el vector  $A$  cuyas componentes son los  $M$  parámetros del modelo en nuestro ajuste. El Muestreo Gibbs genera un estado de prueba  $A'$  alterando un subconjunto de parámetros de  $A$  en cada paso. Luego se combina el muestreo con una función de transición de candidatos que es Gaussiana. La función de probabilidad definida bajo estas condiciones es:

$$q(A'_\mu|A_\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\beta_\mu^2}} \exp \left[ -\frac{(A'_\mu - A_\mu)^2}{2\beta_\mu^2} \right] \quad (41)$$

donde se utiliza el índice  $\mu$  para distinguir los elementos del vector de parámetros, y se utilizará el índice  $n$  para indicar el número de paso de la cadena Markov. Cada  $\beta_\mu$  es un parámetro que controla el tamaño de los pasos para el parámetro  $\mu$ .

La probabilidad de transición entre dos configuraciones subsecuentes  $A_n$  y  $A_{n+1}$  es dada por la expresión:

$$\alpha(A_{n+1}|A_n) = \begin{cases} \min \left( \exp \left[ -\frac{\chi_n^2 - \chi_{n+1}^2}{2} \right], 1 \right) & \text{Valores de parámetros válidos} \\ 0 & \text{Valores de parámetros inválidos} \end{cases} \quad (42)$$

donde  $\chi_{n+1}^2$  es el valor del residuo calculado con el vector  $A_{n+1}$  y  $\chi_n^2$  es el residuo calculado con el vector  $A_n$ . Asumiendo que los errores observacionales son exactamente conocidos y aproximadamente gaussianos, esta transición entre estados asegura que (después de descartar una porción inicial de la cadena, llamada *burn* o quemado) la distribución de las configuraciones generadas va a muestrear la distribución desconocida de errores.

Una vez que se obtiene convergencia de la cadena (arbitrariamente determinada), se pueden representar los valores de  $\chi_\nu^2$  en superficies de nivel. Estas superficies muestran la distribución real de errores en los parámetros seleccionados.

Esquemáticamente el algoritmo MCMC con su base Metropolis-Hasting es definido por los siguientes pasos:

- Inicializar la cadena en algún  $A_0$  en  $n = 0$ . Si se inicia el algoritmo con las componentes del vector  $A$  en el **mejor ajuste**, se tiene la ventaja de no necesitar un diagnóstico de convergencia.
- Generar un estado de prueba,  $A'$ , de acuerdo a  $q(A'|A_n)$ .
- Calcular el residuo del estado de prueba  $\chi^2(A')$  y el residuo  $\chi^2(A_n)$  para el estado actual.

- Determinar  $\alpha(A'|A_n)$ .
- Escoger un número aleatorio,  $\mu$ , de una distribución uniforme entre 0 y 1.
- Si  $\mu \leq \alpha(A'|A_n)$ , como se define en la Ec. 42, entonces el nuevo valor del vector (nuevo eslabón de la cadena) es:  $A_{n+1} = A'$ .  
Si  $\mu > \alpha(A'|A_n)$ , entonces el nuevo valor es igual que el anterior (es decir no se actualiza el vector):  $A_{n+1} = A_n$ .
- Avanzar un paso en la iteración,  $n = n + 1$ .
- Ir al paso #2.

En la Fig. 45 se muestra en esquema de una cadena, que sirve para ilustrar las dos posibilidades al proponer un eslabón y no caer en parámetros inválidos. La solución  $A_0$  representa la condición inicial, en la primera iteración se propone una solución  $A_1$  donde  $\chi_{A_1}^2 < \chi_{A_0}^2$ . Entonces el valor de  $\alpha(A'|A_0)$  resulta en 1 y por lo tanto este eslabón propuesto es aceptado como parte de la cadena. En el caso de la segunda iteración se tiene que  $\chi_{A_2}^2 > \chi_{A_1}^2$ , por lo tanto se debe calcular la relación entre  $\mu$  y  $\alpha(A'|A_1)$  para determinar si se acepta este eslabón o no. En en caso de que  $A_2$  se rechace  $A_1$  será el eslabón en la iteración #2.

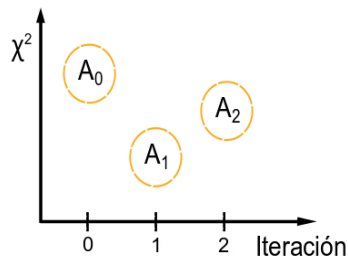


Figura 45: Esquema de la construcción de una cadena para el método MCMC dado el método de Metropolis-Hastings. Ver texto para más detalles.

El monitoreo de la fracción de estados de prueba que son aceptados es una manera de verificar que la escala elegida para  $q(A'|A)$  no sea demasiado ineficiente. Los valores óptimos para la tasa de aceptación pueden ser determinados para los casos más simples. Por ejemplo cuando  $A$  tiene una sola dimensión, la tasa de aceptación de  $\sim 0.44$  es óptima. Para parámetros de espacios con varias dimensiones una tasa de aceptación óptima es de  $\sim 0.25$ .

Si después de varios pasos de la cadena de Markov se calcula que la tasa de aceptación es distinta que la mencionada arriba, entonces los parámetros de escala deben ser reajustados y reinicializarla. Puede ser necesario repetir este procedimiento varias veces para determinar un conjunto aceptable de parámetros de escala.

Se pueden representar los resultados de la exploración de las cadenas de Markov analizando la distribución posterior de los parámetros. Si se toman pares de parámetros se

pueden estudiar las correlaciones entre ellos. En la Fig. 46 se muestran las proyecciones comúnmente utilizadas.

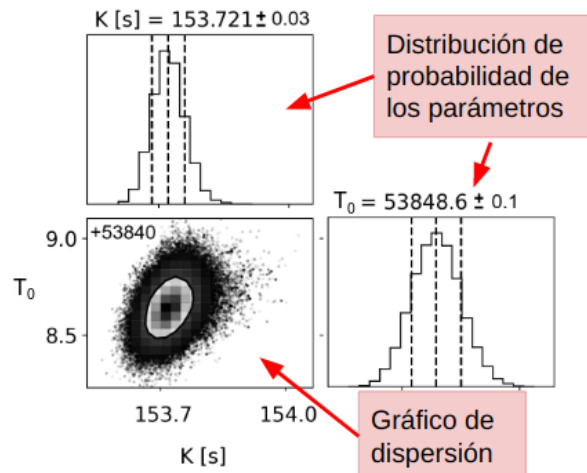


Figura 46: Ejemplo de la proyección de la distribución de probabilidad obtenida mediante el método MCMC. En los paneles diagonales se muestra la proyección en una dimensión, la cual se utiliza para determinar las incertidumbres de los parámetros del modelo y el panel que muestra una distribución 2D es utilizado para analizar las posibles correlaciones entre dos parámetros.

Para nuestro análisis, se utiliza una implementación de MCMC en Python desarrollada por MIT (Foreman-Mackey et al., 2013) y se expresa gráficamente los resultados mediante el paquete `corner` (Foreman-Mackey, 2016).

## 4 Modelado de un planeta alrededor de QS Virginis

El análisis de la señal ETV de QS Vir comienza entonces con la construcción del diagrama (O-C), el cual es función de qué modelo de efeméride se elija usar. Se realiza un ajuste de los modelos lineal y cuadrático. Luego, se aplica la estrategia de minimización descrita en el capítulo 3 para obtener el mejor ajuste. Luego se realiza una estimación de las incertezas de los parámetros obtenidos mediante las cadenas MCMC.

Se encuentra que para obtener la convergencia de las cadenas hace falta filtrarlas a una región muy local cerca del mínimo global y por esto se propone un método alternativo para la estimación de las incertidumbres. Finalmente, nos preguntamos qué tan confiable es nuestro ajuste al analizar cómo varía el ajuste en función del conjunto de datos.

### 4.1 Construcción del diagrama (O-C)

Utilizando las observaciones publicadas por Bours (2015) las cuales consisten en 105 tiempos medios de eclipse y sus ciclos asociados, se construyeron los diagramas (O-C) asociados a una efeméride lineal y el de una efeméride cuadrática. A continuación se muestran los ajustes de efeméride lineal y cuadrática.

$$\begin{aligned} T_{\text{lineal}} &= 48689.1415(1) + 0.150757475(3)l \\ T_{\text{cuadrática}} &= 48689.1418(1) + 0.150757436(13)l + 7.4(2.5)10^{-13}l^2 \end{aligned} \quad (43)$$

En la Fig. 47 se pueden observar los diagramas (O-C) construidos mediante ambas efemérides.

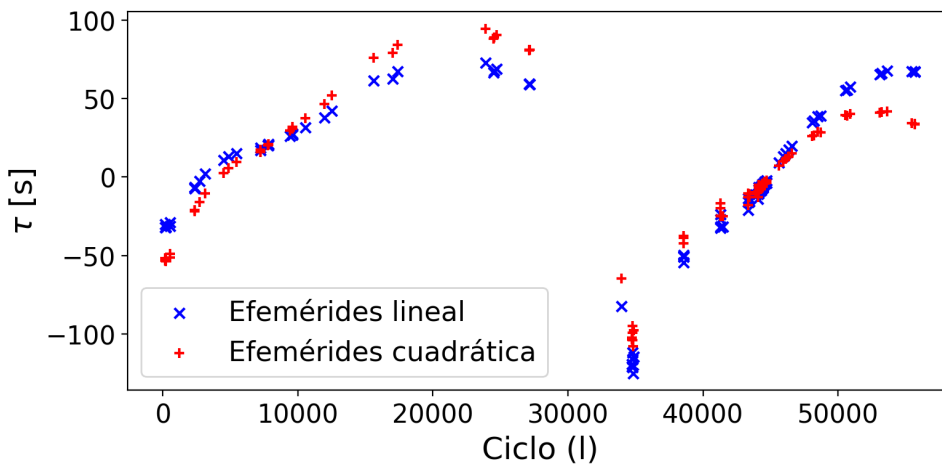


Figura 47: Diagramas (O-C) de QS Virginis construidos usando los datos publicados en Bours (2015). En color azul, las cruces  $\times$  representan el diagrama (O-C) construido mediante el uso de la efeméride lineal. En rojo, los símbolos  $+$  representan el diagrama (O-C) construido usando la efeméride cuadrática.

Un estudio que demuestra la sensibilidad de la forma de la curva en el diagrama (O-C) en función del conjunto de datos se puede ver en la Fig. 48, donde se muestra el diagrama (O-C) para el conjunto de datos truncado a distintos valores. Se observa una gran variabilidad cualitativa y es uno de los motivos por el cual, en este trabajo, se analiza la determinación de los parámetros de un exoplaneta en función del conjunto de datos (ver sección 4.3.3).

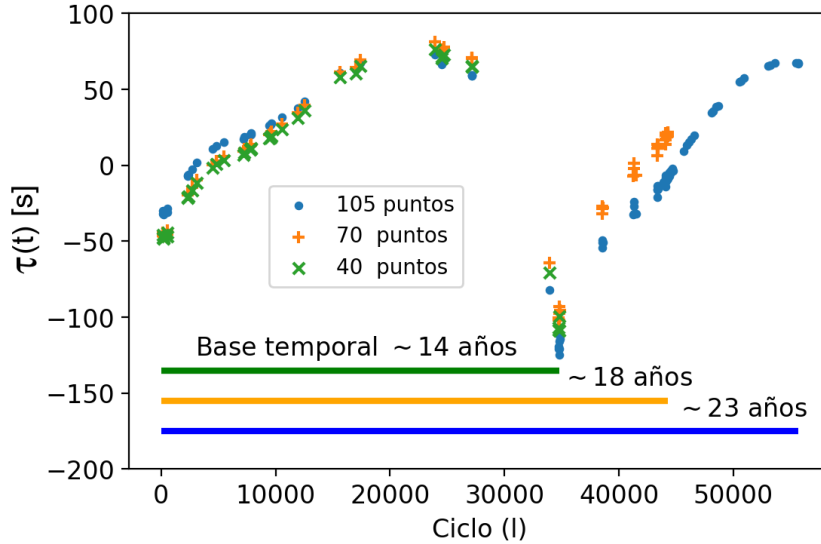


Figura 48: Diagrama (O-C) de QS Virginis construido con una efeméride lineal para un mismo conjunto de datos truncado a 3 valores.

## 4.2 Obtención del mejor ajuste

Una vez obtenido el diagrama (O-C) se procede a analizar si la presencia de exoplanetas puede explicar la señal. Para ello se utiliza el modelo propuesto por [Goździewski et al. \(2012\)](#) considerando sólo la presencia de un exoplaneta (ver Secc. 2.5) y la estrategia de minimización presentada que, básicamente consiste en aplicar un algoritmo genético y luego el algoritmo simplex para encontrar el conjunto de parámetros orbitales del planeta que mejor ajusten el modelo.

El primer algoritmo (algoritmo genético) requiere de entrada el dominio de los 6 parámetros. éstos son:  $K[s]$ :  $[50,500]$ ,  $e$ :  $[0,0.99]$ ,  $\omega$ :  $[0,2\pi]$ ,  $T_0$ :  $[\min(T),\max(T)]$ ,  $Z[s]$ :  $[-500,0]$  y  $P[\text{años}]$ :  $[10,\max(T)-\min(T)]$ , donde  $T$  es el conjunto de valores de tiempos de eclipse. Estos valores se han obtenido luego de hacer variar pruebas preliminares y confirmar que los ajustes no convergen a los bordes de los dominios.

En primer lugar se trabaja con el ajuste a la señal presente en el diagrama (O-C) construido mediante una efeméride cuadrática. Se consideraron varios valores del parámetro  $tol$  del algoritmo genético y se obtuvieron resultados con parámetros orbitales

Tabla 4: Mejores resultados de los ajustes para los parámetros de un cuerpo orbitando a una estrella central con masa igual a la masa total de QS Virginis  $M_T[M_\odot] = M_0 + M_1 = 0.78 + 0.43 = 1.21$

	K	$\omega$	e	$t_0$	P	Z	$\nu$	WRMS	$a^1$	Masa <sup>1</sup>
	[s]	[°]		[BJMD]	[años]	[s]		[s]	[au]	[ $M_J$ ]
Lineal	138	218	0.89	53850	16.7	-94	99	52.9	7.1	53.5
Cuadrática	390	184	0.98	53545	17.4	-18	99	115.6	7.4	154.8

<sup>1</sup> Asumiendo la misma inclinación que la binaria 75.5° dada en [O'Donoghue et al. \(2003\)](#).

significativamente distintos, pero que generan una curva similar. Por ejemplo, para el par semi-amplitud  $K$  y excentricidad  $e$  se ajustó  $(K, e) \approx (590, 0.993)$  para  $tol = 0.001$  y  $(K, e) \approx (390, 0.985)$  para  $tol = 0.01$ . Como se discutió en la sección 2.5.1, mayores valores de  $e$  implica que la señal reduce su semi-amplitud aparente, entonces si  $e$  aumenta  $K$  debe aumentar para mantener una señal  $\tau$  similar. Al calcular la masa del planeta se observa que para todos los ajustes en donde se varía  $tol$  se obtienen masas **estelares** y la presencia de una tercera estrella en el sistema no ha sido observada, lo que no favorece a estos ajustes. Por esto se descarta esta solución.

La Tabla 4 muestra el mejor ajuste para la efemérides cuadrática y lineal (discutido a continuación), adoptando  $tol=0.01$ .

En segundo lugar se trabaja con el ajuste a la señal presente en el diagrama (O-C) construido mediante una efeméride lineal. Los parámetros orbitales obtenidos al aplicar el algoritmo genético y luego el algoritmo simplex se pueden ver en la Tabla 5 donde se muestran los parámetros de la binaria en el primer bloque, los parámetros primarios en el segundo bloque y, por último, los parámetros secundarios del planeta. Notar que la ausencia de valores para los trabajos anteriores se debe a que utilizaron otro modelo analítico y por lo tanto no ajustaron por ejemplo la semi-amplitud  $K$ . Los valores tomados del semieje-mayor de los planetas propuestos por [Almeida & Jablonski \(2011\)](#) fueron obtenidos del trabajo de [Horner et al. \(2013\)](#) (6.03ua y 7.04ua para el primer y segundo planeta, respectivamente), los cuales los calcularon suponiendo la masa mínima para cada planeta y la masa de la binaria dada en [O'Donoghue et al. \(2003\)](#). La razón por la cual se utiliza ésta determinación es porque los valores dados de  $asin(i)$  en el trabajo de [Almeida & Jablonski \(2011\)](#) (0.04ua y 0.03ua) no son muy creíbles para el período determinado.

En la Fig. 49 se pueden observar los diagramas (O-C) construidos mediante ambas efemérides y sus correspondientes curvas sintéticas, dadas por los parámetros ajustados mediante la aplicación del algoritmo genético y simplex de forma consecutiva. Notamos que en la señal del residuo parecería haber una componente periódica que posiblemente se pueda modelar como otro compañero adicional.



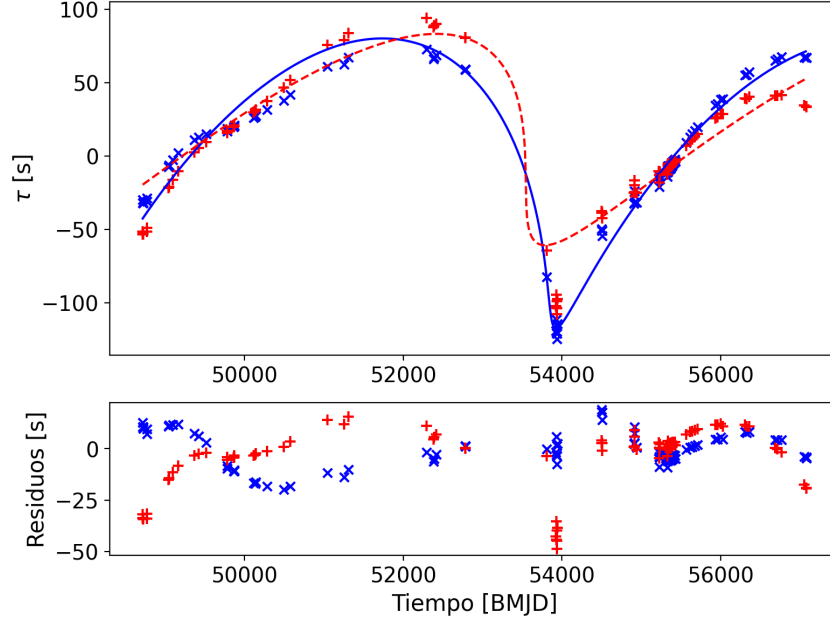


Figura 49: *Panel superior*: Diagrama (O-C) de QS Virginis construido usando los datos publicados en Bours (2015). En color azul, las cruces  $\times$  y línea continua representan el diagrama (O-C) construido mediante el uso de la efeméride lineal y la curva sintética generada por un tercer cuerpo con parámetros correspondientes al mejor ajuste. En rojo, los símbolos  $+$  y línea discontinua representan lo análogo para el diagrama (O-C) construido usando la efeméride cuadrática. *Panel inferior*: Residuos.

### 4.3 Estimación de incertezas

Se aplican varios enfoques para determinar las incertezas alrededor del **mejor ajuste** al diagrama (O-C) construido mediante la efeméride lineal, según se explora nuestro trabajo.

#### 4.3.1 Cadenas de Markov

El primer método utilizado para estimar las incertezas consiste en el muestreo de distribuciones de probabilidad utilizando cadenas de Markov MonteCarlo y su adaptación al paquete `emcee` de python (Foreman-Mackey et al., 2013). Para comenzar el muestreo se requiere una condición inicial la cual consiste de la solución encontrada del **mejor ajuste**. Alrededor de esta condición inicial se distribuyen los caminantes con una máxima **dispersión** dada por  $\bar{\beta}$ .

Cada cadena de Markov es mapeada por un caminante, cuya ubicación inicial en el espacio de parámetros se distribuye en torno al **mejor ajuste**. La distribución de los caminantes en el espacio n-dimensional se realiza con la ecuación

$$\bar{X} = \bar{X}_0 \bar{\beta} \bar{\epsilon}, \quad (44)$$

donde  $\bar{X}_0$  representa el valor inicial de los parámetros,  $\bar{\beta}$  es la máxima dispersión de

Tabla 5: Comparación de parámetros ajustados con trabajos anteriores

	a	b	c	d	e
$P_{bin}$ [hs]	3.6181794	3.618180	3.6181795	3.6181797	3.6181794
$t_0$ [BJMD]	47689.1420	48689.1406	48688.6399	48689.1399	47689.1421
$M_{bin}$ [ $M_{\odot}$ ]	1.21	1.21	1.21	1.21	1.21
K [s]	-	-	-	-	132.26
P [Años]	7.8	14	14.40, 16.99	4.78, 18.96	16.692
e	0.37	0.9	0.62, 0.92	0.1, 0.96	0.891
$\omega$ [°]	38	-	180, 219	337, 206	218.3
$T_0$ [BJMD]	48687.5	-	-	-	53850.2
Z [s] -	-	-	-	-	-94.92
$M_p \sin(i)$ [ $M_J$ ]	6.4	54	8.04, 52.3	6.3, 52.7	53.6

Comparación de nuestro mejor ajuste, con los obtenidos por otros autores. En las primeras tres filas (primer bloque) se pueden observar los parámetros estelares usados, en el segundo bloque se muestran los parámetros principales del modelo analítico de [Goździewski et al. \(2012\)](#) y en último bloque los parámetros secundarios. Ref.: a: [Qian et al. \(2010\)](#), b: [Parsons et al. \(2010\)](#), c: [Almeida & Jablonski \(2011\)](#), d: [Pereira & Ferraz-Mello \(2019\)](#), e: Este trabajo.

los caminantes y  $\epsilon$  un vector que contiene como componentes a números aleatorios entre 0 y 1.

Por ejemplo, cuando se toma el parámetro  $K$  se tiene que los caminantes estarán inicialmente distribuidos con valores de  $K$  en el rango  $[K_0, K_0 + K_0\beta_K]$ , donde  $K_0$  representa la condición obtenida del **mejor ajuste** y  $\beta_K$  es la máxima dispersión de  $K$ . De igual manera,  $\beta_e$  será la máxima dispersión para la excentricidad  $e$ ,  $\beta_\omega$  para  $\omega$ , etc. Nuestros caminantes estarán distribuidos en una nube n-dimensional alrededor de la mejor solución y cada uno se moverá de acuerdo a los algoritmos descritos.

Los valores que se han decidido probar para  $\bar{\beta}$  han sido variaciones menores al 10% del valor del parámetro. Esto significa que el rango que poseerán los caminantes para, por ejemplo,  $K$  será de  $[K_0 \pm 0.1K_0]$ .

$T_0$  posee valores numéricos con órdenes de magnitud superiores que los otros. Esto implica que asociarle una dispersión del %10, al igual que el resto, resulta en una dispersión muy extensa alrededor de este parámetro. En consecuencia, es necesario escalar la componente de  $\bar{\beta}$  de forma acorde, para evitar que la exploración ocurra en una región muy amplia.

Se realizaron varias pruebas variando los valores de  $\bar{\beta}$  y del número de caminantes hasta concluir que el comportamiento de estas cadenas es multimodal. Esto significa que al observar por ejemplo la evolución del parámetro  $K$  en función del paso, los caminantes no se mezclan alrededor de un único valor. En cambio, se alejan de la condición inicial dada durante la fase de quemado y se mezclan en distintos modos. Esto motivó la creación

Tabla 6: Compilación de las distintas posiciones iniciales usadas en las cadenas de Markov, para más detalle ver el texto.

Posición inicial	K [s]	e	$\omega$ [rad]	$t_0$ [BMJD]	Z [s]	P [años]	WRMS [s]
Mejor ajuste	138	0.89	3.81	53850	-95	16.69	52.9
Media	147	0.91	3.75	53849	-99	18.69	148.3
Mínimo global	153	0.91	3.75	53849	-101	16.69	52.8

de una nueva condición inicial como la *Media* de estos mezclados con valores dados en la Tabla 6.

Dada esta nueva posición inicial, se hicieron varias pruebas del algoritmo MCMC variando los siguientes parámetros:  $\bar{\beta}$ , el número de caminantes y de pasos. El objetivo de este estudio fue ver si la no convergencia del algoritmo persiste. El resultado fue que el comportamiento multimodal sigue presente independientemente de los valores elegidos para los parámetros anteriormente mencionados. Un resumen de las pruebas realizadas se puede observar en la Tabla 7.

La Fig. 50 muestra este comportamiento en detalle para unas cadenas de Markov con la posición inicial **Media**. Se puede observar que para los parámetros K, e,  $\omega$  y Z los caminantes se mezclan en tres modos distintos, en cambio  $T_0$  y P poseen un mezclado satisfactorio. En el último panel se muestra la evolución de la función residuo WRMS y ésta también posee tres modos distinguibles.

Para continuar, se decidió **filtrar** sólo las cadenas que convergen al mínimo de estos modos y mediante un análisis estadístico determinar una nueva y última condición inicial. Las cadenas elegidas para este proceso son las que contienen 128 caminantes y 10000 pasos porque son las que mayores caminantes y pasos contiene.

En el panel izquierdo de la Fig. 51 se puede la variación de la WRMS en función del muestreo, en esta parte se ignoró la fase de quemado ( $\sim 4000$  pasos) para hacer una mejor estadística. Se filtraron sólo las cadenas que convergen al mínimo valor de WRMS ( $\sim 52.85$  s) y se analiza la evolución de los parámetros en éstas. Esto permite una estimación cualitativa del valor medio del parámetro y de su dispersión. Para poder distinguir estas estimaciones en particular se las denomina  $\bar{X}_{mg}$  y  $\bar{\beta}_{mg}$ , respectivamente (*mg* por mínimo global).

En el panel derecho de la Fig. 51 se muestra la proyección de las cadenas filtradas al sub-espacio asociado a  $K$ . De estas cadenas se estima el valor medio de  $K$  junto a una medida del ancho del mezclado en  $K[s] = 152.9 \pm 0.2$  (error relativo de  $\sim 0.001$ , que será el valor adoptado para la primera componente de  $\bar{\beta}_{mg}$ ). Los valores estimados para los parámetros y  $\bar{\beta}_{mg}$  son:

$$\begin{aligned}\bar{X}_{mg} &= (153, 0.91, 3.75, 53848, -101, 16.69) \\ \bar{\beta}_{mg} &= (0.0001, 0.0003, 0.003, 0.00001, 0.002, 0.001)\end{aligned}$$

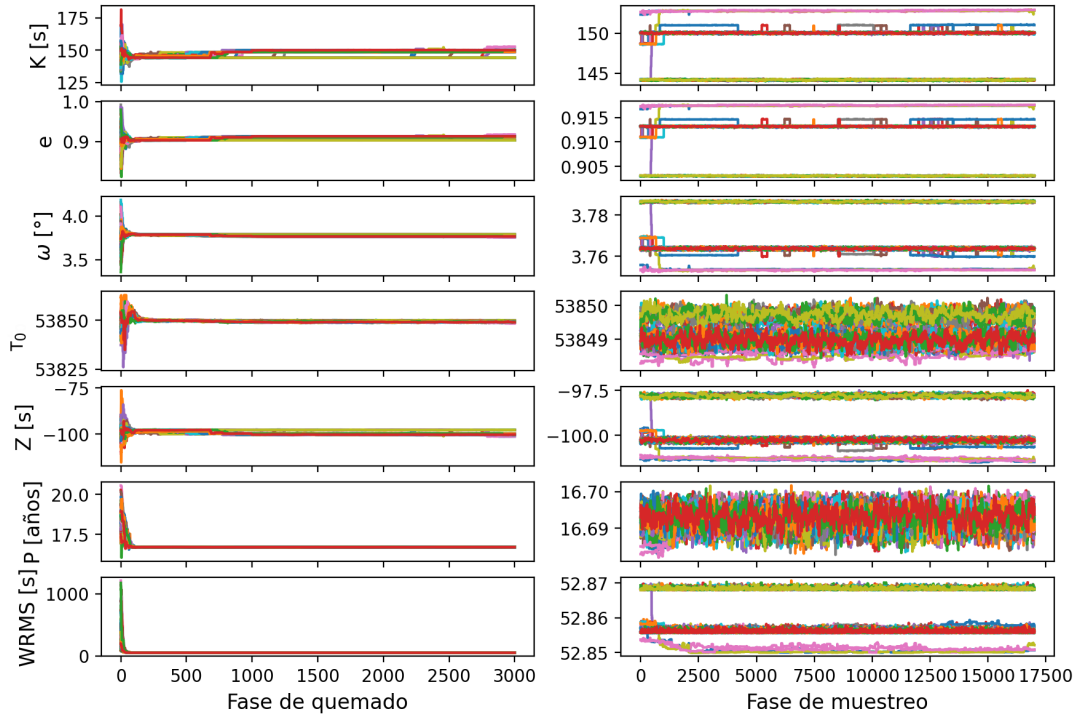


Figura 50: Gráficos de las cadenas de Markov dados los parámetros para la posición inicial *Media* (ver texto para más detalles). En la columna de la izquierda se muestra la evolución de los seis parámetros a ajustar más la evolución de la WRMS asociada para el estadio de quemado en las cadenas, en la columna derecha se muestra la evolución para la fase de muestreo.

En la Fig. 52 se puede observar la fase de quemado y de muestreo de esta últimas cadenas y se observa que no existen comportamientos multimodales en los parámetros ni en la función WRMS. En la Fig. 53 se observan los gráficos de dispersión y los histogramas de la cadena, se puede notar que tanto la excentricidad como el período poseen gráficos de dispersión con más de un mínimo.

La estimación de los parámetros con sus errores resultó en  $K = 152.9 \pm 0.1$ ,  $e = 0.9174 \pm 0.0001$ ,  $\omega = 3.7574 \pm 0.0001$ ,  $T_0 = 53848.6 \pm 0.1$ ,  $Z = -101.3 \pm 0.1$ ,  $P = 16.693 \pm 0.001$  (con sus respectivas unidades) lo cual implica un error relativo porcentual menor al 1% para todos los parámetros. Esta estimación de las incertidumbres, en parte originada por el análisis fino y subsecuente restricción manual a una condición inicial muy local hacia el modo mínimo de las cadenas, parece indicar que éste método no es muy efectivo para determinar la incertidumbres. Por esto se utiliza una aproximación independiente para la estimación de incertezas: un método de grillado.

### 4.3.2 Método de grillado

Este método para estimar incertezas consiste en fijar el valor de uno de los parámetros y dejar libre el resto al hacer los ajustes, utilizando sólo el algoritmo simplex. Suponemos que si el valor del parámetro está en una vecindad de la mejor solución entonces se está

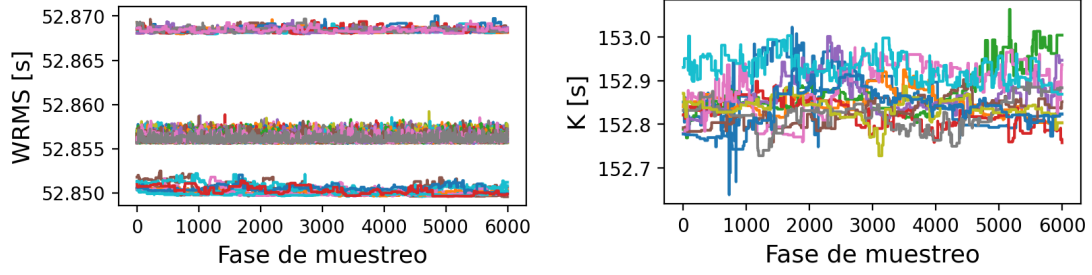


Figura 51: *Panel izquierdo*: Evolución del valor de WRMS en función del paso, durante la fase de muestreo. Se pueden notar tres conjuntos de cadenas. *Panel derecho*: Evolución del parámetro  $K$  durante la fase de muestreo sólo con las cadenas pertenecientes al conjunto inferior del panel izquierdo.

Tabla 7: Resultados de las pruebas con las cadenas de Markov

Posición inicial	Caminantes	$\beta_i \forall i \neq 3$	$\beta_3$	Pasos	Comportamiento de WRMS
AG + Simplex	128	0.1	0.001	5000	Multi-modal
Media	64	0.01	0.0001	5000	Multi-modal
Media	128	0.01	0.0001	5000	Multi-modal
Media	128	0.01	0.0001	10000	Multi-modal
Media	64	0.05	0.0001	20000	Multi-modal
Mínimo global	350	$\beta_i$	$\beta_3$	5000	Uni-modal

$\beta_i$  y  $\beta_3$  representan los valores estimados cualitativamente mediante la cadena con posición inicial *Media*, 128 caminantes y 10000 pasos (para más detalles ver el texto).

cerca del mínimo global. Se considera que no hace falta aplicar el algoritmo genético (ya que su función principal es de buscar en el espacio de parámetros delimitado por los bordes, el mínimo global), así que sólo se utiliza el método simplex para encontrar la mejor solución.

Sumado a la exploración de soluciones se calcula el valor  $WRMS_{1\sigma}$  para así poder estimar las incertezas asociadas a cada parámetro, siguiendo ideas de [Beaugé et al. \(2008\)](#).

El método consiste en calcular el valor de la función WRMS para un conjunto de valores específico de los parámetros orbitales. Por ejemplo, si se desea estimar la incerteza del parámetro orbital arbitrario  $\theta$  entonces se genera una lista de  $N$  valores discretos de  $\theta$  en la vecindad del valor de  $\theta$  para el mejor ajuste. De esta forma se realizan  $N$  ajustes mediante el algoritmo simplex donde se  **fija**  el valor de  $\theta$  y se dejan libres para ajustar el resto de los 5 parámetros orbitales. Con esto se obtiene el gráfico de WRMS vs.  $\theta$  y con la introducción del valor de la función  $WRMS_{1\sigma}$ , definida en la siguiente ecuación, se puede estimar el intervalo de confianza del parámetro  $\theta$ .

$$(WRMS_{1\sigma})^2 \simeq (WRMS_{min})^2 \left( 1 + \sqrt{\frac{2}{\nu}} \right) \quad (45)$$

Donde  $\nu$  representa los grados de libertad del problema,  $\nu = N - M$ . En este caso  $M = 6$  (los 6 parámetros del modelo) y  $N = 105$  (el número total de datos). El valor de

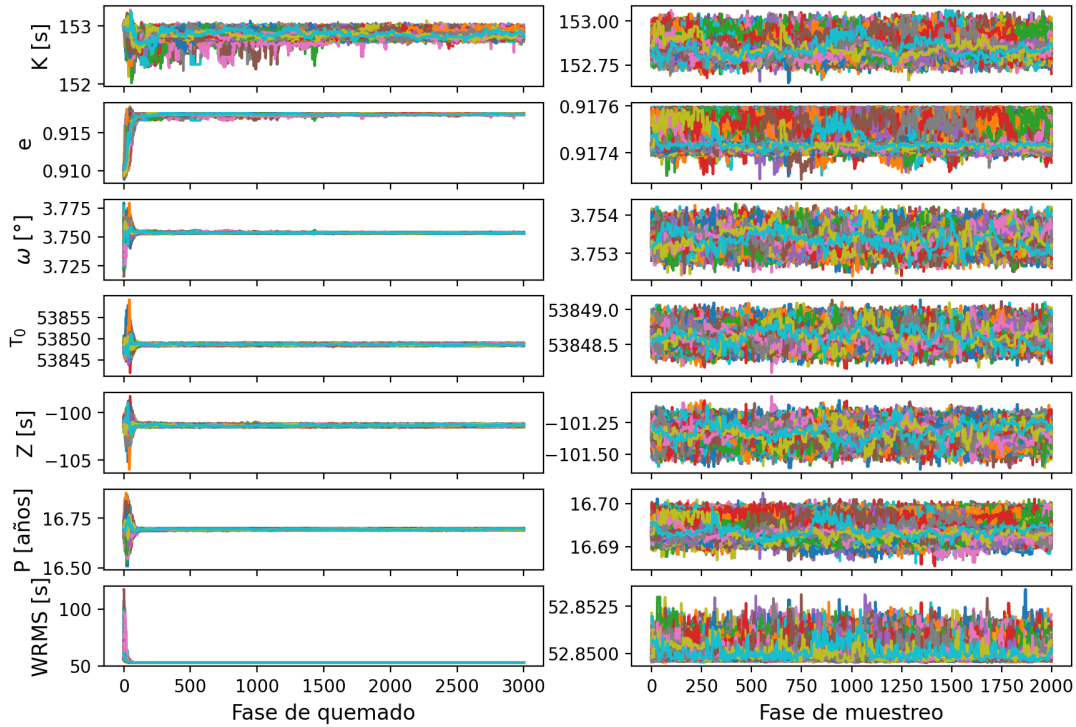


Figura 52: Gráficos de las cadenas de Markov dados los parámetros para la posición inicial y dispersión asociada al mínimo global de WRMS (ver texto para más detalles). En la columna de la izquierda se muestra la evolución de los seis parámetros a ajustar más la evolución de la WRMS asociada para el estadio de quemado en las cadenas, en la columna derecha se muestra la evolución para la fase de muestreo.

$WRMS_{min}$  obtenido en el mejor ajuste es de  $\sim 52.9s$ . Entonces el valor determinado de  $WRMS_{1\sigma}$  resulta en  $\sim 56.7s$ .

Realizando este estudio se obtiene la Fig. 54 en donde se muestra en cada panel los valores tomados para cada parámetro (eje-X) y el valor correspondiente de la función residuo WRMS en el eje-Y. En la línea horizontal a trazos se muestra el valor de  $WRMS_{1\sigma}$ . Con la intersección de las curvas WRMS vs parámetro y  $WRMS_{1\sigma}$  se pueden estimar las regiones a  $1\sigma$  de confianza para cada parámetro. En los rangos representados entre corchetes en cada panel se muestra la estimación. Se puede notar rápidamente que esta estimación de incertezas es de órdenes superiores a la obtenida por las cadenas de Markov.

Finalmente, se obtuvo el valor de los parámetros orbitales del tercer cuerpo y una estimación de sus incertezas. La pregunta que sigue es qué tan confiable es este resultado. Una forma de dar solidez al resultado es estudiar si se mantiene a medida que se agregan nuevas observaciones al sistema, es decir que posea buen poder predictivo. Para emular el agregado de nuevas observaciones se realizará el proceso inverso: remover observaciones de forma cronológica.

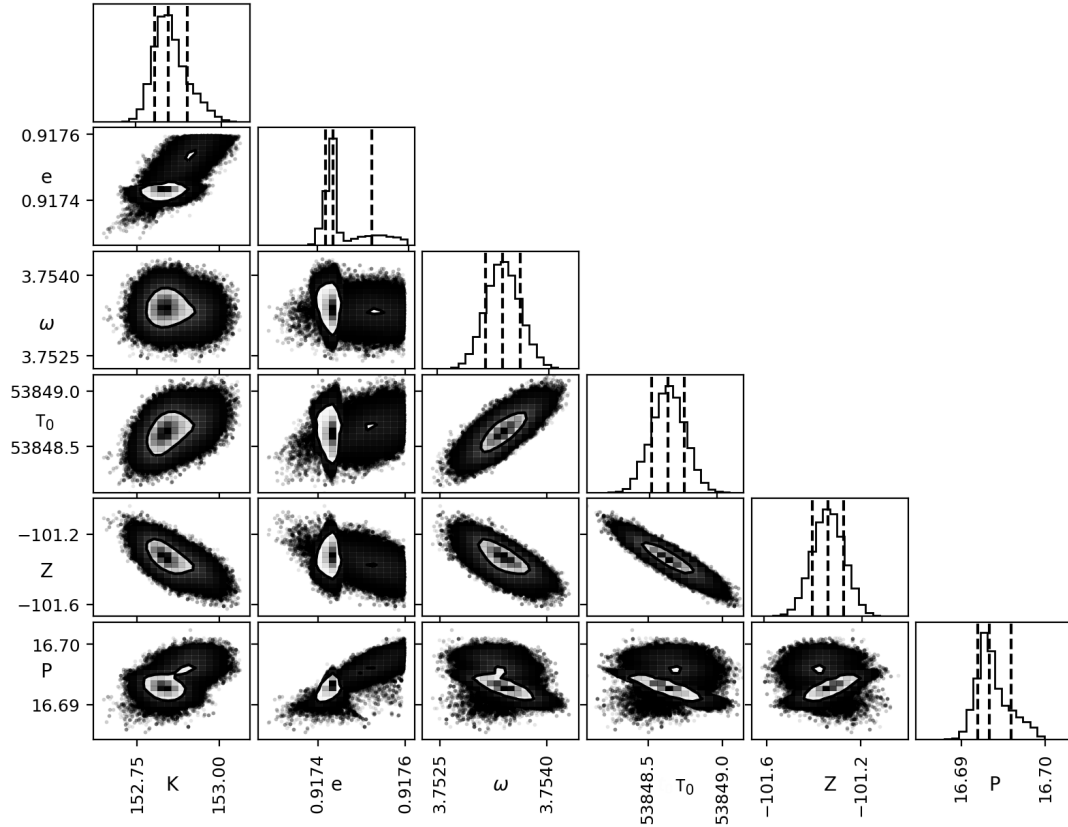


Figura 53: Estimación de las incertezas y sus correlaciones mediante el método bayesiano MCMC. Las regiones grises en los paneles de dispersión representan las regiones  $1\sigma$ ,  $2\sigma$  y  $3\sigma$  respectivamente de la función WRMS del mejor ajuste.

### 4.3.3 Mejor ajuste en función del conjunto de datos

Al observar la señal  $\tau$  (ver Fig. 47) se puede ver que no se ha llegado a completar un segundo período. Una estudio interesante puede ser analizar qué tan invariante es la solución encontrada en función del conjunto de datos (ver Fig. 48). Como se vio en la sección 4.1, la forma del diagrama (O-C) cambia en función del conjunto de datos. Esto alza la interrogante de si los parámetros orbitales también poseen una variación apreciable. Analizar esta posibilidad nos permitirá concluir si existe suficiente cantidad de observaciones para determinar de forma confiable los parámetros orbitales de QS Vir.

El método para analizar las variaciones en los ajustes orbitales en función del conjunto de datos consiste en la modificación del método conocido como *Jackknife*. Éste consiste en realizar una serie de ajustes orbitales donde cada uno utiliza un conjunto de datos reducido donde el último punto del conjunto de datos es eliminado. Es decir, primero se realiza el ajuste de la efemérides lineal para obtener el diagrama (O-C) y luego el mejor ajuste de  $\tau$  con el conjunto completo de 105 datos. Seguidamente, se realiza un segundo ajuste de la efemérides lineal con sólo 104 puntos considerados y así se obtiene el nuevo diagrama (O-C) con sólo 104 puntos (eliminando el último punto, de forma cronológica).

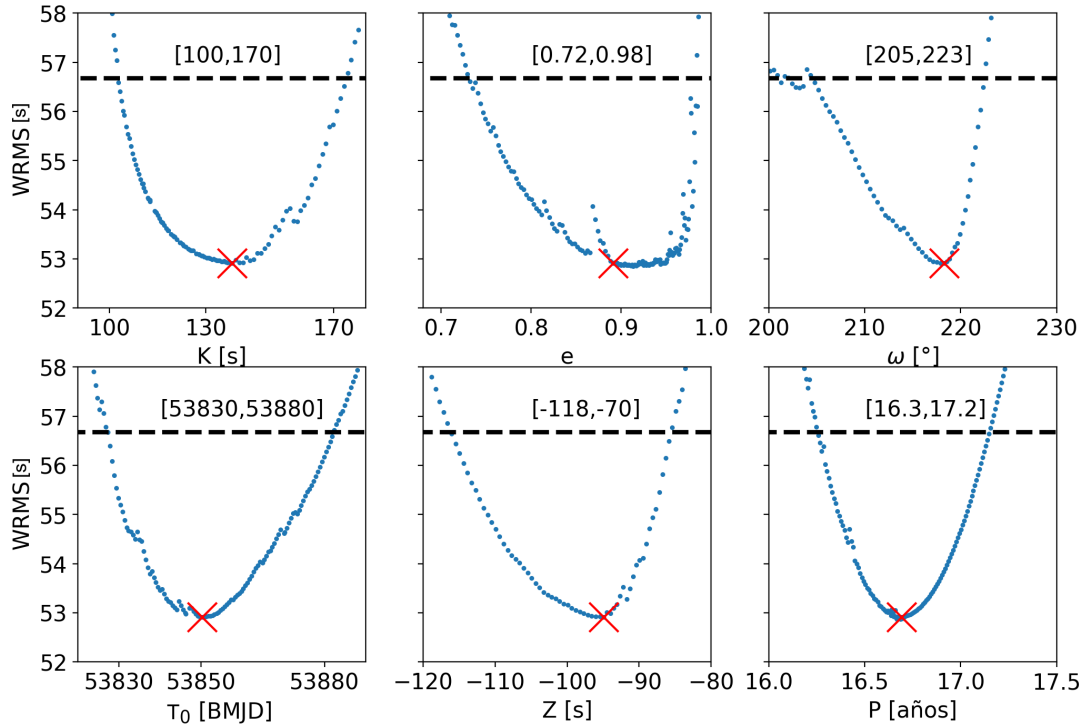


Figura 54: Valor de la función residuo WRMS en función de varios ajustes en los cuales solo se fijó el parámetro en cada panel, dejando los otros cinco parámetros libres. Las cruces rojas representan el valor del mejor ajuste (algoritmo genético + simplex). La línea a trazos representa el valor de la función residuo asociado a un grado de confianza de  $1\sigma$ . Los valores entre corchetes representan el rango de parámetros dentro de  $1\sigma$ .

Este proceso se repite hasta llegar a un límite elegido, que en nuestro caso es de 60 puntos por ser aproximadamente la mitad del conjunto de datos. Si la solución actual es robusta sería esperable sólo observar pequeños y suaves cambios en los parámetros como función del conjunto de datos. Más relevante aún, se puede esperar que la adición de futuras observaciones no cambiarán significativamente nuestro conocimiento del sistema. Utilizando el mismo argumento que en la sección 4.3.2, se usa el algoritmo simplex para realizar los ajustes tal que la condición inicial para este varía de forma suave junto al cambio de conjunto de datos. Es decir, al considerar 104 puntos se usa la como condición inicial al ajuste para 105 puntos, al considerar 103 puntos se usa el mejor ajuste para 104, etc.

En la Fig. 55 se pueden observar en cada panel la evolución del mejor ajuste en función del número de datos considerados. Se pueden notar dos características interesantes.

1. Existe un punto de discontinuidad donde la mayoría de los parámetros parecen tener un salto ( $N^\circ$  de eclipses equivale a  $N^\circ$  de datos)
2. No existe una aparente convergencia en ninguno de los 6 parámetros. Esto quiere decir que, hasta la fecha, no hay suficientes observaciones publicadas como para poder tener certidumbre de la presencia de un compañero adicional de forma confiable.



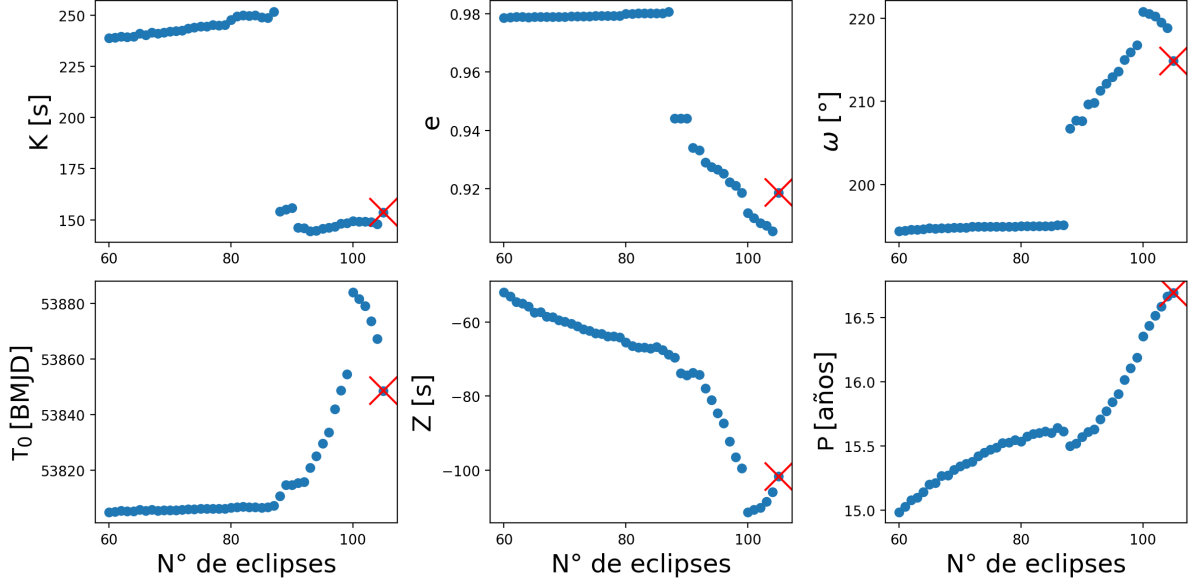


Figura 55: Evolución de los parámetros ajustados en función de la cantidad de datos considerados. En los distintos paneles se muestra el valor de los mejores ajustes de los parámetros del tercer cuerpo. Las cruces rojas representan el valor del parámetro con el **mejor ajuste**.

Se decidió indagar sobre la discontinuidad observada alrededor de la observación  $N^\circ \sim 90$ . La explicación encontrada para la discontinuidad reside en el conjunto de datos utilizado. En la Fig. 56 se muestran las incertezas de los tiempos de eclipse  $\sigma_i$  y el valor de WRMS en función del número de datos (o  $n^\circ$  de eclipse). Se puede observar que en el punto  $\sim 86$  existe una discontinuidad que se traduce en una discontinuidad en el WRMS por su misma definición (ver panel central).

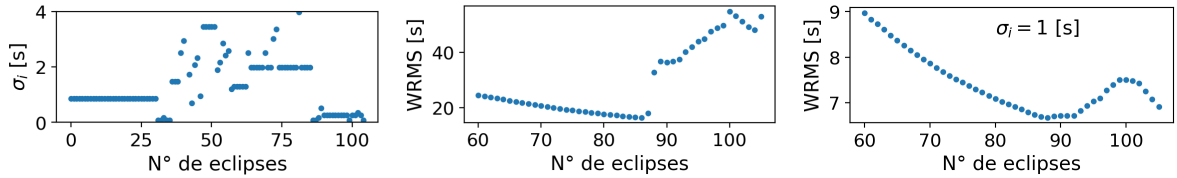


Figura 56: *Panel izquierdo*: Incertezas de los tiempos de eclipse publicados en Bours (2015), se puede distinguir la discontinuidad cerca del dato número  $\sim 86$ . *Panel central*: Evolución de la función residuo WRMS para el mejor ajuste en función del número de eclipses considerado. *Panel derecho*: Evolución de WRMS cuando las incertidumbres de los datos son igualadas a 1 s.

Para demostrar que el causante de la discontinuidad son las incertidumbres en los tiempos de eclipse  $\sigma_i$ , se las uniformizaron (en particular se igualaron todas a 1s) e hicimos el mismo estudio previamente descrito. El resultado se puede observar en el panel derecho de la Fig. 56 y se puede ver que la discontinuidad en la WRMS desaparece.

Adicionalmente, sumada a la variabilidad observada en los parámetros orbitales del planeta, se tiene que el período orbital de la binaria  $P_{bin}$  también posee una variación

en función del conjunto de datos. En la Fig. 57 se puede observar su comportamiento creciente y se señalan los dos valores propuestos por los trabajos de Bours (2015) y Bours et al. (2016). Al igual que los parámetros orbitales, se espera que  $P_{bin}$  sea estable en el tiempo si sólo la presencia de un exoplaneta produce la señal  $\tau$  (ya que no produce un cambio secular en  $P_{bin}$ ). No obstante, la variación de  $P_{bin}$  observada es del orden de  $10^{-4}$ s a lo largo de los 22 años de observaciones.

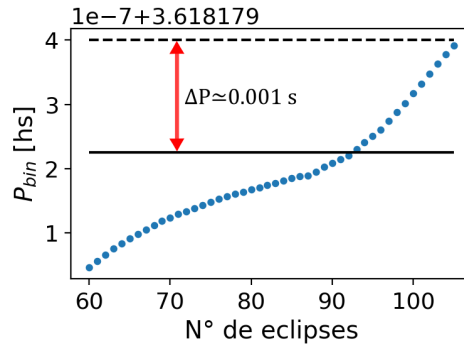


Figura 57: Evolución del período de la binaria en función del conjunto de datos. En la línea continua se señala el período propuesto por Bours (2015) (0.150757467717 d) y en la línea discontinua el propuesto por Bours et al. (2016) (0.150757475 d).

Como nota final se puede argumentar que un análisis de estabilidad dinámica del tercer cuerpo alrededor de la binaria (por ejemplo de forma numérica, con un código de N-cuerpos) resulta difícil de argumentar dada la naturaleza cambiante de los ajustes en función del conjunto de datos. Sin embargo, cuando se tengan suficientes observaciones de QS Virginis tal que los parámetros ajustados converjan en función del conjunto de datos, entonces dicho análisis será factible.

## 5 Conclusiones

En este trabajo de licenciatura se estudió la técnica de detección de planetas de Variaciones de Tiempos de Eclipse (o ETV por sus siglas en inglés) aplicada a un sistema estelar binario en particular, QS Virginis, el cual posee observaciones publicadas que no han sido analizadas aún.

Primero se construyó un algoritmo que permite construir el diagrama (O-C) y determinar el período de la binaria. Este algoritmo es función de un modelo de efeméride lineal o cuadrática. Luego, se diseñó un algoritmo que modela la señal del diagrama (O-C) y obtiene los parámetros orbitales de un tercer cuerpo orbitando a la binaria. Además, se diseñaron diferentes estrategias para estimar las incertidumbres de los parámetros del mejor ajuste. Finalmente, se examinó cuán robusta es la solución al analizar como ésta cambia en función del conjunto de datos considerado, simulando de esta forma el añadido de nuevas observaciones al sistema.

Alternativamente se analizaron las posibilidades de que la señal observada sea producto de mecanismos físicos alternativos al tercer cuerpo, como mecanismos magnéticos y relativistas.

Con respecto a QS Virginis, se construyó la señal O-C utilizando una efeméride lineal. El análisis de la señal O-C mediante el mecanismo Applegate no logró reproducir las observaciones por un orden de magnitud, si se considera el modelo más eficiente hasta la fecha. No existe transferencia de masa en el sistema y por lo tanto éste mecanismo no puede explicar las observaciones y, por último, los mecanismos de variación secular como el *magnetic braking* y la emisión de ondas gravitacionales fallan al explicar las observaciones ya que éstas muestran un incremento secular del período orbital de la binaria. Finalmente, cuando se analizó con el modelo de un tercer cuerpo, implicó un planeta con alta masa ( $M_p = 53.5M_J$ ) y excentricidad ( $e = 0.89$ ). La utilización del método de cadenas de Markov para estimar las incertidumbres resultó en una falta de convergencia de las cadenas a un mínimo único y el filtrado de los caminantes que se mezclan en el mínimo global resulta en una sub-estimación de las incertidumbres de los parámetros. Por esto, se concluye que esta estrategia no es robusta en este caso particular. Alternativamente, se estimaron las incertidumbres mediante un método de grillado y éste determinó incertezas compatibles con previas determinaciones de planetas en la literatura.

La mayoría de los parámetros orbitales no resultan invariantes al realizar el análisis de cómo varía el mejor ajuste en función del conjunto de datos, lo que indica que aún no hay suficientes observaciones para determinar de forma confiable el sistema. Además se notó la presencia de un punto crítico de discontinuidad de la función residuo WRMS y se concluye que es debido a la discontinuidad en las incertezas asociadas a los tiempos de eclipse publicados por diferentes autores.

Como conclusión final, se puede decir que un estudio con observaciones al día de QS

Virginis es necesario para entender la naturaleza de las variaciones del período orbital de la binaria y todas las estrategias presentes en este trabajo pueden ser utilizadas en cualquier otro sistema.

## Referencias

- Almeida, L. A., & Jablonski, F. 2011, in *The Astrophysics of Planetary Systems: Formation, Structure, and Dynamical Evolution*, ed. A. Sozzetti, M. G. Lattanzi, & A. P. Boss, Vol. 276, 495–496, doi: [10.1017/S1743921311020941](https://doi.org/10.1017/S1743921311020941)
- Applegate, J. H. 1992, *ApJ*, 385, 621, doi: [10.1086/170967](https://doi.org/10.1086/170967)
- Beaugé, C., Giuppone, C. A., Ferraz-Mello, S., & Michtchenko, T. A. 2008, *MNRAS*, 385, 2151, doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.12979.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.12979.x)
- Beuermann, K., Dreizler, S., Hessman, F. V., & Deller, J. 2012, *A&A*, 543, A138, doi: [10.1051/0004-6361/201219391](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201219391)
- Beuermann, K., Buhmann, J., Diese, J., et al. 2011, *A&A*, 526, A53, doi: [10.1051/0004-6361/201015942](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201015942)
- Biermann, P., & Hall, D. S. 1973, *A&A*, 27, 249
- Bours, M. C. P. 2015, PhD thesis, University of Warwick
- Bours, M. C. P., Marsh, T. R., Parsons, S. G., et al. 2016, *MNRAS*, 460, 3873, doi: [10.1093/mnras/stw1203](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1203)
- Brinkworth, C. S., Marsh, T. R., Dhillon, V. S., & Knigge, C. 2006, *MNRAS*, 365, 287, doi: [10.1111/j.1365-2966.2005.09718.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09718.x)
- Charbonneau, P. 1995, *ApJS*, 101, 309, doi: [10.1086/192242](https://doi.org/10.1086/192242)
- Charbonneau, P. 2002, *An Introduction to Genetic Algorithms for Numerical Optimization*, Tech. rep.
- Chavez, C. E., Tovmassian, G., Aguilar, L. A., Zharikov, S., & Henden, A. A. 2012, *A&A*, 538, A122, doi: [10.1051/0004-6361/201117209](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201117209)
- Conroy, K. E., Kochoska, A., Hey, D., et al. 2020, *ApJS*, 250, 34, doi: [10.3847/1538-4365/abb4e2](https://doi.org/10.3847/1538-4365/abb4e2)
- Copperwheat, C. M., Morales-Rueda, L., Marsh, T. R., Maxted, P. F. L., & Heber, U. 2011, *MNRAS*, 415, 1381, doi: [10.1111/j.1365-2966.2011.18786.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.18786.x)
- Davis, P. J., Kolb, U., Willems, B., & Gänsicke, B. T. 2008, *MNRAS*, 389, 1563, doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.13675.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13675.x)
- Duchêne, G., & Kraus, A. 2013, *ARA&A*, 51, 269, doi: [10.1146/annurev-astro-081710-102602](https://doi.org/10.1146/annurev-astro-081710-102602)
- Dvorak, R. 1986, *A&A*, 167, 379
- Eastman, J., Siverd, R., & Gaudi, B. S. 2010, *PASP*, 122, 935, doi: [10.1086/655938](https://doi.org/10.1086/655938)
- Eggenberger, A., & Udry, S. 2007, arXiv e-prints, arXiv:0705.3173. <https://arxiv.org/abs/0705.3173>
- Eggenberger, A., Udry, S., Chauvin, G., et al. 2008, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 398, *Extreme Solar Systems*, ed. D. Fischer, F. A. Rasio, S. E. Thorsett, & A. Wolszczan, 179. <https://arxiv.org/abs/0907.0864>
- Eggleton, P. P. 1983, *ApJ*, 268, 368, doi: [10.1086/160960](https://doi.org/10.1086/160960)
- Faulkner, J. 1971, *ApJL*, 170, L99, doi: [10.1086/180848](https://doi.org/10.1086/180848)
- Foreman-Mackey, D. 2016, *The Journal of Open Source Software*, 1, 24, doi: [10.21105/joss.00024](https://doi.org/10.21105/joss.00024)

- Foreman-Mackey, D., Hogg, D. W., Lang, D., & Goodman, J. 2013, *PASP*, 125, 306, doi: [10.1086/670067](https://doi.org/10.1086/670067)
- Gaia Collaboration. 2018, *VizieR Online Data Catalog*, I/345
- Gao, F., & Han, L. 2012, *Computational Optimization and Applications*, 51, 259, doi: [10.1007/s10589-010-9329-3](https://doi.org/10.1007/s10589-010-9329-3)
- Girven, J., Brinkworth, C. S., Farihi, J., et al. 2012, *ApJ*, 749, 154, doi: [10.1088/0004-637X/749/2/154](https://doi.org/10.1088/0004-637X/749/2/154)
- Giuppone, C. A. 2011, PhD thesis, National University of Córdoba, Argentina
- Giuppone, C. A., Leiva, A. M., Correa-Otto, J., & Beaugé, C. 2011, *A&A*, 530, A103, doi: [10.1051/0004-6361/201016375](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201016375)
- Goździewski, K., Nasiroglu, I., Słowikowska, A., et al. 2012, *MNRAS*, 425, 930, doi: [10.1111/j.1365-2966.2012.21341.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21341.x)
- Goździewski, K., Słowikowska, A., Dimitrov, D., et al. 2015, *MNRAS*, 448, 1118, doi: [10.1093/mnras/stu2728](https://doi.org/10.1093/mnras/stu2728)
- Gray, D. F., & Baliunas, S. L. 1994, *ApJ*, 427, 1042, doi: [10.1086/174210](https://doi.org/10.1086/174210)
- Guinan, E. F., & Bradstreet, D. H. 1988, in *NATO Advanced Study Institute (ASI) Series C, Vol. 241, Formation and Evolution of Low Mass Stars*, ed. A. K. Dupree & M. T. V. T. Lago, 345
- Hall, D. S., & Kreiner, J. M. 1980, *Acta Astronomica*, 30, 387
- Hill, G. 1979, *Publications of the Dominion Astrophysical Observatory Victoria*, 15, 298
- Hinse, T. C., Lee, J. W., Goździewski, K., et al. 2012, *MNRAS*, 420, 3609, doi: [10.1111/j.1365-2966.2011.20283.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.20283.x)
- Holman, M. J., & Wiegert, P. A. 1999, *AJ*, 117, 621, doi: [10.1086/300695](https://doi.org/10.1086/300695)
- Horner, J., Wittenmyer, R. A., Hinse, T. C., et al. 2013, *MNRAS*, 435, 2033, doi: [10.1093/mnras/stt1420](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1420)
- Horner, J., Wittenmyer, R. A., Hinse, T. C., & Tinney, C. G. 2012, *MNRAS*, 425, 749, doi: [10.1111/j.1365-2966.2012.21620.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21620.x)
- Huang, S.-S. 1966, *Annales d'Astrophysique*, 29, 331
- Hurley, J. R., Tout, C. A., & Pols, O. R. 2002, *MNRAS*, 329, 897, doi: [10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2002.05038.x)
- Irwin, J. B. 1952, *ApJ*, 116, 211, doi: [10.1086/145604](https://doi.org/10.1086/145604)
- Ivanova, N., Justham, S., Chen, X., et al. 2013, *A&ARv*, 21, 59, doi: [10.1007/s00159-013-0059-2](https://doi.org/10.1007/s00159-013-0059-2)
- Kallrath, J.; Milone, E. F. 1999 (Springer New York, NY)
- Kashi, A., & Soker, N. 2011, *MNRAS*, 417, 1466, doi: [10.1111/j.1365-2966.2011.19361.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19361.x)
- Kawka, A., Vennes, S., Koch, R., & Williams, A. 2002, *AJ*, 124, 2853, doi: [10.1086/343836](https://doi.org/10.1086/343836)
- Klein, B., Jura, M., Koester, D., Zuckerman, B., & Melis, C. 2010, *ApJ*, 709, 950, doi: [10.1088/0004-637X/709/2/950](https://doi.org/10.1088/0004-637X/709/2/950)

- Knigge, C., Baraffe, I., & Patterson, J. 2011, *ApJS*, 194, 28, doi: [10.1088/0067-0049/194/2/28](https://doi.org/10.1088/0067-0049/194/2/28)
- Kolda, T. G., Lewis, R. M., & Torczon, V. 2003, *SIAM Review*, 45, 385, doi: [10.1137/S003614450242889](https://doi.org/10.1137/S003614450242889)
- Kraft, R. P. 1967, *ApJ*, 150, 551, doi: [10.1086/149359](https://doi.org/10.1086/149359)
- Kroupa, P., Tout, C. A., & Gilmore, G. 1993, *MNRAS*, 262, 545, doi: [10.1093/mnras/262.3.545](https://doi.org/10.1093/mnras/262.3.545)
- Lagarias, J., Reeds, J., Wright, M., & Wright, P. 1998, *SIAM Journal on Optimization*, 9, 112, doi: [10.1137/S1052623496303470](https://doi.org/10.1137/S1052623496303470)
- Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. 1975, *The classical theory of fields*
- Lanza, A. F. 2020, *MNRAS*, 491, 1820, doi: [10.1093/mnras/stz3135](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3135)
- Lanza, A. F., & Rodonò, M. 1999, *A&A*, 349, 887
- Lanza, A. F., Rodono, M., & Rosner, R. 1998, *MNRAS*, 296, 893, doi: [10.1046/j.1365-8711.1998.01446.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.01446.x)
- Latković, O., Cséki, A., Djurasević, G., et al. 2019, *AJ*, 157, 3, doi: [10.3847/1538-3881/aaeff1](https://doi.org/10.3847/1538-3881/aaeff1)
- Lee, J. W., Hinse, T. C., Youn, J.-H., & Han, W. 2014, *MNRAS*, 445, 2331, doi: [10.1093/mnras/stu1937](https://doi.org/10.1093/mnras/stu1937)
- Livio, M., & Shara, M. M. 1987, *ApJ*, 319, 819, doi: [10.1086/165499](https://doi.org/10.1086/165499)
- Malhotra, R. 1993, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 36, *Planets Around Pulsars*, ed. J. A. Phillips, S. E. Thorsett, & S. R. Kulkarni, 89–106
- Marsh, T. R. 2018, *Circumbinary Planets Around Evolved Stars*, 96, doi: [10.1007/978-3-319-55333-7\\_96](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55333-7_96)
- Marsh, T. R., Dhillon, V. S., & Duck, S. R. 1995, *MNRAS*, 275, 828, doi: [10.1093/mnras/275.3.828](https://doi.org/10.1093/mnras/275.3.828)
- Marsh, T. R., Parsons, S. G., Bours, M. C. P., et al. 2014, *MNRAS*, 437, 475, doi: [10.1093/mnras/stt1903](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1903)
- Martin, D. V. 2018, *Populations of Planets in Multiple Star Systems*, 156, doi: [10.1007/978-3-319-55333-7\\_156](https://doi.org/10.1007/978-3-319-55333-7_156)
- Martin, D. V., & Triaud, A. H. M. J. 2014, *A&A*, 570, doi: [10.1051/0004-6361/201323112](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201323112)
- Marzari, F., & Thebault, P. 2019, *Galaxies*, 7, 84, doi: [10.3390/galaxies7040084](https://doi.org/10.3390/galaxies7040084)
- Maxted, P. F. L., Heber, U., Marsh, T. R., & North, R. C. 2001, *MNRAS*, 326, 1391, doi: [10.1111/j.1365-2966.2001.04714.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2001.04714.x)
- Mestel, L. 1968, *MNRAS*, 138, 359, doi: [10.1093/mnras/138.3.359](https://doi.org/10.1093/mnras/138.3.359)
- Morbidelli, A. 2002, *Modern celestial mechanics : aspects of solar system dynamics*
- Murray, C. D., & Dermott, S. F. 1999, *Solar System Dynamics* (Cambridge University Press)
- Mustill, A. J., Marshall, J. P., Villaver, E., et al. 2013, *MNRAS*, 436, 2515, doi: [10.1093/mnras/stt1754](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1754)
- Nelder, J. A., & Mead, R. 1965, *The Computer Journal*, 7, 308, doi: [10.1093/comjnl/7.4.308](https://doi.org/10.1093/comjnl/7.4.308)

- Nelemans, G., Yungelson, L. R., & Portegies Zwart, S. F. 2001, *A&A*, 375, 890, doi: [10.1051/0004-6361:20010683](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20010683)
- O'Donoghue, D., Koen, C., Kilkenny, D., et al. 2003, *MNRAS*, 345, 506, doi: [10.1046/j.1365-8711.2003.06973.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.2003.06973.x)
- Paczynski, B. 1967, *Acta Astronomica*, 17, 287
- . 1971, *ARA&A*, 9, 183, doi: [10.1146/annurev.aa.09.090171.001151](https://doi.org/10.1146/annurev.aa.09.090171.001151)
- Parsons, S. G., Marsh, T. R., Gänsicke, B. T., & Tappert, C. 2011, *MNRAS*, 412, 2563, doi: [10.1111/j.1365-2966.2010.18073.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.18073.x)
- Parsons, S. G., Marsh, T. R., Copperwheat, C. M., et al. 2010, *MNRAS*, 407, 2362, doi: [10.1111/j.1365-2966.2010.17063.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.17063.x)
- Pereira, E. S., & Ferraz-Mello, S. 2019, *Boletim da Sociedade Astronômica Brasileira*, 31
- Potter, S. B., Romero-Colmenero, E., Ramsay, G., et al. 2011, *MNRAS*, 416, 2202, doi: [10.1111/j.1365-2966.2011.19198.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19198.x)
- Prsa, A., Matijevic, G., Latkovic, O., Vilardell, F., & Wils, P. 2011, PHOEBE: PHysics Of Eclipsing BinariEs, Astrophysics Source Code Library, record ascl:1106.002. <http://ascl.net/1106.002>
- Qian, S. B., Dai, Z. B., Liao, W. P., et al. 2009a, *ApJL*, 706, L96, doi: [10.1088/0004-637X/706/1/L96](https://doi.org/10.1088/0004-637X/706/1/L96)
- Qian, S. B., Liao, W. P., Zhu, L. Y., et al. 2010, *MNRAS*, 401, L34, doi: [10.1111/j.1745-3933.2009.00780.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2009.00780.x)
- Qian, S. B., Liu, L., Zhu, L. Y., et al. 2012, *MNRAS*, 422, L24, doi: [10.1111/j.1745-3933.2012.01228.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2012.01228.x)
- Qian, S. B., Zhu, L. Y., Zola, S., et al. 2009b, *ApJL*, 695, L163, doi: [10.1088/0004-637X/695/2/L163](https://doi.org/10.1088/0004-637X/695/2/L163)
- Qian, S. B., Liu, L., Liao, W. P., et al. 2011, *MNRAS*, 414, L16, doi: [10.1111/j.1745-3933.2011.01045.x](https://doi.org/10.1111/j.1745-3933.2011.01045.x)
- Qian, S. B., Shi, G., Zola, S., et al. 2013, *MNRAS*, 436, 1408, doi: [10.1093/mnras/stt1659](https://doi.org/10.1093/mnras/stt1659)
- Rappaport, S., Verbunt, F., & Joss, P. C. 1983, *ApJ*, 275, 713, doi: [10.1086/161569](https://doi.org/10.1086/161569)
- Rebassa-Mansergas, A., Schreiber, M. R., & Gänsicke, B. T. 2013, *MNRAS*, 429, 3570, doi: [10.1093/mnras/sts630](https://doi.org/10.1093/mnras/sts630)
- Ribeiro, T., Kafka, S., Baptista, R., & Tappert, C. 2010, *AJ*, 139, 1106, doi: [10.1088/0004-6256/139/3/1106](https://doi.org/10.1088/0004-6256/139/3/1106)
- Schatzman, E. 1962, *Annales d'Astrophysique*, 25, 18
- Schleicher, D. R. G., & Dreizler, S. 2014, *A&A*, 563, A61, doi: [10.1051/0004-6361/201322860](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322860)
- Schreiber, M. R., Gänsicke, B. T., Rebassa-Mansergas, A., et al. 2010, *A&A*, 513, L7, doi: [10.1051/0004-6361/201013990](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201013990)
- Schröder, K. P., & Smith, R. C. 2008, *MNRAS*, 386, 155, doi: [10.1111/j.1365-2966.2008.13022.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.13022.x)
- Schwarz, R., Funk, B., Zechner, R., & Bazsó, Á. 2016, *MNRAS*, 460, 3598, doi: [10.1093/mnras/stw1218](https://doi.org/10.1093/mnras/stw1218)
- Singer, S., & Nelder, J. 2009, *Scholarpedia*, 4, 2928, doi: [10.4249/scholarpedia.2928](https://doi.org/10.4249/scholarpedia.2928)



- Skelton, P., & Smits, D. 2009, South African Journal of Science, 105, 120, doi: [10.4102/sajs.v105i3/4.62](https://doi.org/10.4102/sajs.v105i3/4.62)
- Staff, J. E., Jaikumar, P., Chan, V., & Ouyed, R. 2012, ApJ, 751, 24, doi: [10.1088/0004-637X/751/1/24](https://doi.org/10.1088/0004-637X/751/1/24)
- Sterken, C. 2005, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 335, The Light-Time Effect in Astrophysics: Causes and cures of the O-C diagram, ed. C. Sterken, 3
- Sterken, C., & Jaschek, C. 1996, Light Curves of Variable Stars, A Pictorial Atlas
- Stobie, R. S., Kilkenny, D., O'Donoghue, D., et al. 1997, MNRAS, 287, 848, doi: [10.1093/mnras/287.4.848](https://doi.org/10.1093/mnras/287.4.848)
- Storm, R., & Price, K. 1997, Journal of Global Optimization, 11, 341
- Terrell, D. 2001, Journal of the American Association of Variable Star Observers (JAAVSO)
- Tian, Y., Xiang, F., Xie, W., & Tao, X. 2009, PASJ, 61, 675, doi: [10.1093/pasj/61.4.675](https://doi.org/10.1093/pasj/61.4.675)
- Tokovinin, A., & Kiyaeva, O. 2016, MNRAS, 456, 2070, doi: [10.1093/mnras/stv2825](https://doi.org/10.1093/mnras/stv2825)
- Tovmassian, G. H., Zharikov, S. V., & Neustroev, V. V. 2007, ApJ, 655, 466, doi: [10.1086/509864](https://doi.org/10.1086/509864)
- Vaccaro, T. R., Wilson, R. E., Van Hamme, W., & Terrell, D. 2015, ApJ, 810, 157, doi: [10.1088/0004-637X/810/2/157](https://doi.org/10.1088/0004-637X/810/2/157)
- Veras, D., Mustill, A. J., Bonsor, A., & Wyatt, M. C. 2013, MNRAS, 431, 1686, doi: [10.1093/mnras/stt289](https://doi.org/10.1093/mnras/stt289)
- Verbunt, F., & Zwaan, C. 1981, A&A, 100, L7
- Virtanen, P., Gommers, R., Oliphant, T. E., et al. 2020, Nature Methods, 17, 261, doi: [10.1038/s41592-019-0686-2](https://doi.org/10.1038/s41592-019-0686-2)
- Völschow, M., Banerjee, R., & Hessman, F. V. 2014, A&A, 562, A19, doi: [10.1051/0004-6361/201322111](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201322111)
- Völschow, M., Schleicher, D. R. G., Banerjee, R., & Schmitt, J. H. M. M. 2018, A&A, 620, A42, doi: [10.1051/0004-6361/201833506](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833506)
- Watson, C. A., & Dhillon, V. S. 2004, MNRAS, 351, 110, doi: [10.1111/j.1365-2966.2004.07763.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07763.x)
- Watson, C. A., & Marsh, T. R. 2010, MNRAS, 405, 2037, doi: [10.1111/j.1365-2966.2010.16602.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2010.16602.x)
- Willems, B., & Kolb, U. 2004, A&A, 419, 1057, doi: [10.1051/0004-6361:20040085](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20040085)
- Wilson, R. E. 1994, PASP, 106, 921, doi: [10.1086/133464](https://doi.org/10.1086/133464)
- Wilson, R. E., & Devinney, E. J. 1971, The Astrophysical Journal, 166, 605
- Woltjer, J., J. 1922, Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands, 1, 93
- Wood, D. B. 1972, A computer program for modeling non-spherical eclipsing binary star systems, Tech. rep.
- Wright, J. T., Marcy, G. W., Howard, A. W., et al. 2012, ApJ, 753, 160, doi: [10.1088/0004-637X/753/2/160](https://doi.org/10.1088/0004-637X/753/2/160)

- Wright, M. 1996, Direct search methods: Once scorned, now respectable, ed. D. Griffiths & G. Watson (Addison-Wesley), 191–208
- Zacharias, N., Finch, C. T., Girard, T. M., et al. 2013, *AJ*, 145, 44, doi: [10.1088/0004-6256/145/2/44](https://doi.org/10.1088/0004-6256/145/2/44)
- Zorotovic, M., & Schreiber, M. R. 2013, *A&A*, 549, A95, doi: [10.1051/0004-6361/201220321](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220321)
- Zuckerman, B., Koester, D., Reid, I. N., & Hüensch, M. 2003, *ApJ*, 596, 477, doi: [10.1086/377492](https://doi.org/10.1086/377492)

Los abajo firmantes, miembros del Tribunal de evaluación de tesis, damos fe que el presente ejemplar impreso se corresponde con el aprobado por este Tribunal.