FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA:

TEORÍA GENERAL DE REFLEXIVIDAD

Trabajo final realizado por Agustin Nicolas, Martinez Capdevila para obtener el título de Licenciado en Matemática en la Universidad Nacional de Córdoba

---

Supervisado por:
Andrés Alberto, Barrea

Teoría General de Reflexividad por Agustin Nicolas Martinez Capdevila se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribucin 2.5 Argentina.
`http://creativecommons.org/licenses/by/2.5/ar/`

Resumen

En el presente trabajo se estudian los problemas de Keynes, Dow-Jones y Smith, los cuales representan 3 de los 4 grandes problemas en economía, al punto que economistas de varias partes del mundo han sido galardonados con el Premio Nobel por solo dar aproximaciones a posibles soluciones de estos problemas. Para ello se construye una nueva teoría que generaliza a la Teoría de Juegos y nos permite resolver estos tres problemas, junto con las paradojas del Ahorro, de Gibson, de Kalecki, de Leontief y proponemos una nueva paradoja a la que llamamos Paradoja del Crecimiento.
La conclusión principal de este trabajo no es solo la resolución de estos grandes problemas, sino además la creación de un paradigma capaz de unificar la Macroeconomía, creando así una teoría del todo.
Palabras clave: Paradigma Neoclásico, paradigma NKM, topología algebráica, crisis subprime, teoría de juegos.
Código de clasificación: 91B69

Índice general

Prefacio

Luego de la crisis de 2008 economistas de varias partes del mundo han comenzado a preguntarse sobre la validez del modelo actual, y las razones para este tipo de preguntas son completamente válidas, dado que dentro del paradigma actual las crisis financieras jamás ocurren. La razón de este peculiar evento es simple. El paradigma actual se basa en los axiomas de utilidad y producción, pero además toma como axioma al Teorema de Walrrass, el cual garantiza que los mercados se vacían cuando las funciones de oferta y demanda se intersecan, dando lugar así, dentro de un contexto de equilibrio general, un único vector de precios, P, donde todas sus componentes son positivas. A su vez, el paradigma actual asume perfecta movilidad de factores entre industrias (algunos modelos pueden incluir movilidad con un grado de deterioro, pero los modelos que colocan fricciones al movimiento o regiones de factores cautivos, no han podido explicar las crisis en sus sectores tampoco). Esto implica que frente a la quiebra de una región, todos los factores se movilizan hacia la región no quebrada, la cual está garantizada de existir por el Teorema de Walrrass, por lo que los nuevos factores que integran esta región económica reactivan la economía y el PBI (Producto Bruto Interno) nunca declina. Lo interesante, es que esta misma discusión apareció durante la Gran Depresión de 1930, cuando el paradigma actual se puso en tela de juicio, y nació el estado interventor de la mano de la Teoría Keynesiana, lo que posteriormente dió lugar a una división de teorías entre la Keynesiana y la Monetarista. Hoy en día, lo que los economistas llamamos "El Paradigma Actual", no es ninguna de ambas en concreto, sino la utilización de ambas en términos del PBI potencial, y esto, además de la utilización del Teorema de Walrrass como axioma es el error más grande de este paradigma, y que le ha costado a la historia vivir en continuas crisis, al punto de que hoy en día se habla de super-burbujas como acumulación de burbujas pasadas. La razón de esta opinión es sencilla. Por definición, el PBI potencial es el PBI al cual crecería la economía si todos los factores estuviesen en pleno empleo, es decir, es el PBI de largo plazo. Esta noción tiene implícito que los fundamentals, i.e. el flujo futuro de beneficios, es inmutable por los agentes en condiciones óptimas, por lo que es posible combinar una política Keynesiana con una Monetaria o Clásica dependiendo dónde se encuentre la economía respecto del PBI potencial, o en otras palabras más técnicas, el signo del output gap.

En el presente trabajo estudiaremos lo que se conoce como la Teoría de Reflexividad, la cual será definida en el primer capítulo. Esta teoría es inconsistente con el paradigma actual, y carece de una demostración formal, pero posee evidencia empírica, algo que el paradigma actual no posee, por lo que daré una demostración formal de esta teoría, pero para ello se deberán estudiar 3 de los 4 grandes problemas abiertos de la economía moderna: el problema de Dow-Jones (1886) sobre explosión de burbujas financieras, el problema de Keynes (1930) sobre el estado interventor y el modelo detrás de quizás el libro de mayor influencia en la historia económica, "La Teoría General del interés, el dinero y el empleo" de J.M. Keynes y, por último, el problema

de Smith (1776) sobre qué gobierna a los agentes en la toma de las decisiones.
El presente trabajo está conformado por 5 capítulos. En el primer capítulo se introduce al lector en los conceptos básicos sobre los que se basa el trabajo, los tres siguientes están destinados a la resolución de los tres problemas anteriormente mencionados, el quinto se destina a demostrar la Teoría de Reflexividad, y se mostrará como puede utilizarse la Teoría de Reflexividad para unificar la Macroeconomía.

Capítulo 1

Conceptos introductorios

Dado que se utilizarán tanto conceptos matemáticos como económicos, en la presente sección se presentarán brevemente los conceptos básicos a utilizar. Dado el carácter introductorio de este capítulo, no se darán demostraciones, sino que se ahondará en la parte intuitiva y aplicaciones de los conceptos.

1.1. Introducción a la Teoría de Juegos Bayesianos

Comensaremos familiarizando al lector con el concepto de juego tradicional y estático estudiado por el Premio Nobel John Nash en su tesis doctoral[14], para luego analizar brevemente los juegos Bayesianos[1].
La teoría tradicional de juegos se basa en los juegos estáticos. En ella existe un conjunto N de jugadores, un conjunto A_i de estrategias posibles para el jugador i y frente a cada estrategia se tiene un conjunto de pagos $U_i(A_i|A_{-i})$[2] que está condicionado a las estrategias de los demás. En resumen, un juego es un conjunto $G = \{N, \{A_i\}_{i\in N}, \{U_i(A_i|A_{-i})\}_{i\in N}\}$, donde los jugadores deben escoger la mejor estrategia posible dadas las posibles estrategias de los demás. Veamos un ejemplo para aclarar el concepto:
Una forma común de expresar un juego es en su forma normal, es decir, vía una matriz de pagos, donde se observen tanto las posibles estrategias como los posibles pagos. Supongamos dos jugadores que deben escoger su jugada en un juego de azar simultáneamente, con matriz de pagos,

	Jugador 2 elige A	Jugador 2 elige B
Jugador 1 elige A	4,1	-1,-2
Jugador 1 elige B	-1,3	1,4

En este juego, si J1 elige jugar A y J2 juega B entonces J1 obtiene una ganancia de 4 y J2 una ganancia de 1. Las demás componentes de la matriz pueden interpretarse de manera análoga.
Un equilibrio de Nash para este juego es un conjunto de estrategias donde ninguno de los jugadores tengan incentivos a desviarse[3], en este caso se tiene que (J1=A,J2=A) es equilibrio

[1]Para un análisis detallado se recomienda al lector leer Perez, J. y otros[21] para un análisis matemático y Mas-Colell, A.[19] para su aplicación económica.

[2]A_{-i} denota las estrategias posibles de los jugadores distintos de i.

[3]Es posible probar que un equilibrio de Nash es el punto fijo de un operador que proviene de un principio de extremo.

de Nash, al igual que (J1=B,J2=B).
Estudiemos ahora los juegos Bayesianos. Este tipo de juegos fueron desarrollados por el Premio Nobel John Charles Harsanyi[21][11], quien fué empresario y profesor de economía en los Estados Unidos. Las ideas propuestas por Harsanyi no se alejan demasiado de las ideas de Nash, dado que él propone un juego, pero donde los agentes no conocen los pagos de sus rivales con exactitud, dado que depende del tipo que sean sus rivales. Más especificamente, un juego Bayesiano se define como:

$$G = \{N, \Omega, \{A_i, u_i, T_i, t_i, \mathbb{P}_i, C_i\}_{i \in N}\} \tag{1.1}$$

donde,
1) N es el conjunto de jugadores.
2) Ω es el conjunto de estados de la naturaleza. Por ejemplo en un juego de dados sería todos los posibles resultados de tirar los dados.
3) A_i es el conjunto de estrategias que puede realizar el jugador i, y $A = \times_{i \in N} A_i$ es el conjunto de estrategias totales. En nuestro caso será cuantas acciones comprar o vender de un tipo particular de empresa considerando todas las empresas.
4) T_i es el tipo del jugador i, y hay una función $t_i : \Omega \to T_i$ que para cada estado de la naturaleza el juego tiene diferentes tipos de jugadores. Por ejemplo en un juego de guerra $T_i = \{$débil (D), fuerte (F)$\}$. y si $\Omega = \{$costa sur (S), costa este (E)$\}$, entonces una función t_i podría ser

$$t_i(\omega) = \begin{cases} D & \omega = S \\ F & \omega = E \end{cases} \tag{1.2}$$

5) $u_i : \Omega \times A \to \mathbb{R}$ es la función de utilidad del agente i.
6) $\mathbb{P}_i$ es la medida de probabilidad del agente i sobre Ω conjunto $\mathbb{P}_i - medible$.
7) $C_i \subseteq A_i \times T_i$ es el conjunto de estrategias disponibles para un agente i de tipo T_i.
Con esta definición, los equilibrios de G son los equilibrios de Nash de G considerando toda la información disponible (tipos diferentes, probabilidades sobre Ω, etc.), y se denota como $\Sigma(G)$. Sin embargo, el conjunto de soluciones puede ser "demasiado grande" para cuestiones prácticas, o contener soluciones que no se observan en la realidad, es por ello que Harsanyi[11] definió el concepto de selector de equilibrios, como cualquier operador, endógeno o no, de la forma $S : \Sigma(G) \to \{*\}$, es decir que seleccione solo uno de los posibles equilibrios de Nash[4].

1.2. Introducción a la economía

Quizás una de las ramas que más utiliza la teoría de juegos sea la economía[5]. Toda decisión económica es tomada como en un juego. Si una empresa está actualmente produciendo en una región y el gobierno establece una política de promoción de dicha región, por ejemplo, dando un subsidio a cualquier empresa que se instale allí, entonces la empresa a la hora de decidir cuánto va a producir considerará la posibilidad de que el gobierno realice esta acción y que la misma

[4]Se recomienda que el lector lea Harsanyi[11] antes de continuar, dado que la noción de selector de equilibrios es fundamental en el trabajo.

[5]El lector que no esté familiarizado con los conceptos económicos macro, micro y financieros se recomienda la lectura de Jehle, G. & Reny, P. J.[13] sobre microeconomía, Frenkel, J. A. y otros[10] sobre macroeconomía y Degryse y otros[9] sobre los aspectos financieros del sector bancario.

sea o no efectiva, lo que es un juego Bayesiano. Sin embargo, los macroeconomistas no utilizan o lo hacen solo de ser extremadamente necesario, la teoría de juegos, y esto no es casual. Para poder aplicar esta teoría debe ser posible establecer las acciones de los demás, pero hoy en día la macro no esta unificada, por lo que las acciones de los demás agentes no pueden establecerse. En el presente trabajo mostraremos cómo la teoría de la reflexividad resuelve este problema.
Algunos conceptos básicos que nos servirán durante todo el trabajo son,
1) Inflación.
2) Fundamentals.
3) Burbuja financiera.
4) Desempleo voluntario e involuntario.
5) Crisis económica real y crisis económica financiera.
La inflación es un tema que casi ni merece introducción pues todos tenemos al menos una noción de qué es, pero no todos conocemos la fórmula de la misma.

Definición 1 (Tasa de Inflación)**.** *Dados dos precios en dos momentos de tiempo consecutivos, P_t, P_{t-1}, se tiene que la tasa de inflación entre los momentos de tiempo t y $t-1$ es de,*

$$\pi_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} 100 \tag{1.3}$$

En el caso de inflación del precio de las acciones o instrumentos financieros se denota rm^t y se llama rendimiento del mercado.

Notar que la tasa de inflación es una tasa de cambio relativo de los precios, y nos muestra cuál fué la variación de precios entre dos momentos de tiempo en términos porcentuales. El uso más importante de la tasa de inflación es el patrón de evolución de precios que dice que $P_t = (1 + \pi_t)P_{t-1}$, por lo que es posible tener una secuencia de precios crecientes con tasa de inflación constante o decreciente. En general los creadores de política (policy makers) observan tanto la tasa de inflación como el nivel general de precios, dado que altos niveles de inflación repercuten en el salario real (poder adquisitivo de las personas), y altos niveles de precios pueden general la necesidad de modificar la moneda (un billete de $100 hoy en unos años puede no comprar nada, y es necesario sacarlo de circulación).
Los fundamentals son principalmente utilizados en finanzas, pero cualquier bien al cual pueda computarsele un precio y poseea capacidad para generar beneficios de algun tipo (no necesariamente monetarios) posee un precio de fundamentals.

Definición 2 (Fundamentals)**.** *Dado un bien x, con flujo futuro de beneficios $\{FB_t\}_{t=1}^{\infty}$ el precio de fundamentals de x es,*

$$PF(x) = \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t FB_t \tag{1.4}$$

donde β es un parámetro de descuento, que es en general la tasa de interés.

La definición de fundamentals tambien puede modificarse para parámetros de descuentos móviles, pero la idea central es la misma. Conocer el valor de fundamentals es esencial en economía, pues si el precio de mercado es mayor a su valor de fundamentals hay que vender y si es menor hay que comprar, pues en el primer caso el mercado nunca me va a dar tantos

beneficios, y en el segundo caso, si mantengo mi activo hasta el final habré ganado más que lo que el mercado me ofrece. Por desgracia, conocer el valor de fundamentals es imposible, pues para poder conocerlo, debería conocer el flujo futuro de beneficios descontados, pero para que eso ocurra uno hoy ya debería haber tomado la decisión de compra-venta.
Respecto al paradigma actual, este afirma que los fundamentals son inmutables y que los agentes no pueden modificarlos, sin embargo, esa noción es errónea, dado que si todos los agentes decidieran vender masivamente las acciones por alguna razón, el precio de la misma caería a cero, al igual que su precio de fundamentals; mientras que si no deciden realizar esta acción, la empresa no quiebra y continua generando flujos de fondos.
La noción de fundamentals está estrechamente ligada a la de burbuja financiera.

Definición 3 (Burbuja Financiera)**.** *Se dice que un instrumento financiero está en una burbuja si su precio de mercado es superior a su precio de fundamental.*

Como el lector podrá observar, la definición de burbuja se basa en la de fundamental, y como los fundamentals son inestimables, uno estaría tentado a comenter el error de que las mismas son inestimables o, en palabras de Alan Greenspan (el chairman de la Federal Reserve Board),

"Clearly, sustained low inflation implies less uncertainty about the future, and lower risk premiums imply higher prices of stocks and other earning assets. We can see that in the inverse relationship exhibited by price/earnings ratios and the rate of inflation in the past. But how do we know when irrational exuberance has unduly escalated asset values, which then become subject to unexpected and prolonged contractions as they have in Japan over the past decade?[...]"

"Claramente, una inflación sostenidamente baja implica menos incertidumbre sobre el futuro, y menores primas de riesgo implican mayores precios de las acciones y otros activos. Podemos verlo en la relación inversa exhibida por los ratios precios/ganancias y la tasa de inflación pasada. Pero, ¿cómo sabemos que la exuberancia irracional ha hecho que los precios de los activos escalen, lo que luego genera inesperadas y prolongadas contracciones como las de Japón en la última década?[...]"

mencionado durante su discurso en The American Enterprise Institute durante la dot-com Bubble en 1990, donde da a interpretar que las burbujas son irracionales.
No todo lo anterior es falso, es cierto que la definición de burbuja financiera no permite determinar si existen o no, o si estamos o no en una en estos momentos, pero la historia se ha encargado de mostrar que las mismas existen, como por ejemplo:

1) La crisis de 1929, también llamada la Gran Depresión,

[Fuente: acting-man.com]

2) La burbuja dot-com de 2000,

[Fuente: ecomonitor.com]

3) La burbuja sub prime de 2008,

[Fuente: St. Louis FED]
Por lo que las burbujas aparecen en la historia económica, y estas son solo algunas de las muchas que pueden encontrarse. Esto parecería afirmar que Alan Greenspan no estaba en lo cierto sobre la irracionalidad de las burbujas. Sobre este punto se pronunció George Soros, autor principal de la Teoría de Reflexividad, con el siguiente análisis que muestra que el chairman de la FED no estaba en lo cierto en su discurso.

"Si yo veo una burbuja, me apresuro a comprar, arrojando leña al fuego [...]"

Queriendo decir con esto que las burbujas son racionales, y lo son, pues operan como una lotería, donde el máximo premio está en vender en la cima, y la mayor pérdida es vender en el valle o perder todo lo que se invirtió.
El estallido de una burbuja es lo que se conoce como crisis financiera, donde la gente se desespera por vender aceptando precios cada vez menores. Esto tiene un efecto directo sobre la economía real formada por las empresas[6], haciendo que las empresas quiebren y generando desempleo (que las personas pierdan su trabajo). Esto último se conoce como crisis económica real, pues son la empresas las que quiebran.

Definición 4 (Desempleo)**.** *El desempleo significa que hay personas que no poseen trabajo. Esa cantidad de personas se llaman desempleados, y puede ocurrir por dos razones:*
1) Desempleo voluntario: voluntariamente el agente decide no trabajar.

[6]Este resultado de contagio es desconocido por el paradigma actual y configura el problema de Keynes en su mayor parte que se demostrará más adelante.

2) Desempleo involuntario: por causa de una crisis financiera, real o ambas el agente pierde su empleo y desea trabajar.

Ejemplos de ambos tipos de desempleo existen, pero igualmente daremos algunos para aclarar la definición, dado que el resultado principal del problema de Keynes se basa en esta distinción.
Desempleo Voluntario:
1) Una persona gana una lotería de U$100 millones y decide dejar de trabajar.
2) Frente a una aparente crisis en el horizonte, el trabajador, como cree que la empresa para la que trabaja es probable que quiebre y no pague los salarios, decide dejar de trabajar para quedarse en su casa y hacer la limpieza del hogar que antes hacía su ama de llaves, a la que tuvo que despedir por no poder mantenerla.
Desempleo Involuntario:
El ama de llaves del ejemplo 2 anterior es una desempleada involuntaria, pues ella no deseaba quedarse sin trabajo, y probablemente lo necesite para mantener a su familia, pero por una situación económica inestable perdió su trabajo.
Es probable que el lector ya lo haya notado, y si no es importante notarlo, que en todos los ejemplos anteriores de desempleo, hubo un efecto de expectativas involucrado. El ganador de la lotería tiene una creencia de que dejando de trabajar será más feliz, el operario cree que la empresa no le va a pagar, y la ama de llaves es víctima de una creencia por parte de su empleador. Tambien podemos encontrar creencias en el mismo discurso de Alan Greenspan y en el comentario de George Soros, y esto no es coincidencia, dado que la economía constantemente busca predecir el futuro. De esta forma, y para concluir el capítulo, remarcamos nuestra afirmación al inicio de que la teoría de juegos Bayesianos es muy utilizada en economía, incluso quizás por gente que desconoce la misma.

Apéndice

Definición 5 (Región)**.** *Un subconjunto Ω de $\mathbb{R}^n$ se dice una región si es conexo y con interior no vacío.*

De esta manera, si se tiene una región Ω compacta y convexa, y F es un subconjunto propio cerrado de Ω entonces existe $V \subset \Omega \cap F^c$ de medida de Lebesgue positiva, pues como F es cerrado en Ω, entonces su complemento es abierto, y como F es propio, entonces $int(\Omega) \cap F^c \neq \emptyset$, de donde se deduce el resultado.

Definición 6 (Hemi continuidad superior)**.** *Una correspondencia $\Gamma : X \longrightarrow Y$ es hemi continua superiormente en $x_0 \in X$ si para cada A entorno abierto de $\Gamma(x_0)$, la preimagen superior de A, $\Gamma[A]^+ = \{x \in X : \Gamma(x) \subset A\}$, contiene un entorno de x_0. Γ es hemi continua superiormente si lo es para todo $x \in X$.*

Teorema 1 (Teorema de Existencia del Equilibrio General)**.** *[17]Dado un modelo de economía competitiva, con funciones de utilidad estríctamente cóncavas respecto de la riqueza, y conjunto presupuestario $R(P)$ para cada vector de precios P, entonces si las funciones de exceso de demanda son continuas y $R(P)$ es compacto, convexo y $0 \in R(P)$, entonces existe al menos una solución del problema de equilibrio general competitivo.*

Recomendaciones para la lectura del trabajo

Durante el trabajo se usará indistintamente los símbolos $\times$ y Π para denotar productos cartesianos, salvo que el contexto implique lo contrario.
El símbolo $\times_d$ denota el producto componente a componente de vectores.
A lo largo del trabajo todos los cocientes de vectores son componente a componente.
$\mathbb{R}^n_+$ denota el hortante no negativo de $\mathbb{R}^n$.
Los símbolos int, Fr, denotan el interior y la frontera de conjuntos respectivamente.
Si μ es una medida, se define $\mathbb{E}_\mu[f] = \int_{sop(\mu)} f d\mu$.
Si $\mu_i^t = \mu_i(x_i)$, entonces se define $\mathbb{E}_{\mu_i^t}[f|x_i = x_i^0] = \int_{sop(\mu_i)} f d\mu_i(x_i^0)$.
Si x e y son vectores en $\mathbb{R}^n$, diremos que $x << y$ sí y solo sí $x(i) < y(i), \forall i$.
Por otro lado, se recomienda leer los pies de página, dado que ellos son comentarios que ayudarán a comprender los modelos, y se sugiere revisar la bibliografía cuando la terminología no se entienda. Por último, no salteé las explicaciones conceptuales, dado que no todo está escrito en fórmulas.
En los capítulos 2 y 3 se estudiarán los dos problemas mencionados anteriormente, por lo que no puede leerse el capítulo 3 sin antes haberse leído el 2. El capítulo 4 es la justificación de la validez de los supuestos utilizados, y su relación con el problema de Smith. Por último, el capítulo 5 muestra que nuestra teoría es reflexiva, y como pueden estudiarse distintas paradojas dentro de la misma.

Capítulo 2

El problema de Dow-Jones (1886)

2.1. Introducción

El problema de Dow-Jones fué formulado por primera vez por Charles H. Dow y Edward Jones en 1886 cuando crean el primer índice bursátil en "The Customer Afternoon Letter", que era una revista que luego se convirtió en "The Wall Street Journal", una de las revistas bursátiles más influyentes del mundo. En ella, ellos plantean su teoría de ciclos para construir el índice Dow-Jones, pero no consiguen dar una explicación formal de porqué las burbujas estallan. Afirman que eventualmente los agentes se dan cuenta que el precio sobre el que están transando, ya no solo no es representativo de su valor de fundamentals, sino que además si el mismo declina las pérdidas en las que incurrirían serían tales que quizás no podrían soportar la caída, por lo que la burbuja estalla. Sin embargo, uno podría anlizar esta situación:

"Si sé que estoy en una burbuja insostenible, pero solo yo poseo esa información, salir no es óptimo, pues podría aprovecharme de la situación para continuar ganando más dinero".

Los autores tampoco dan una noción de cómo los agentes notan esta diferencia con los valores de fundamentals, dado que los fundamentals no son observables; y por otro lado tampoco esta teoría permite explicar las abruptas caidas de la bolsa, pues los precios caen por debajo de los fundamentals y sin una intervención estatal no parecieran recuperarse.
Por estas razones, yo no creo en la imutabilidad de los fundamentals. Considero que los mismos agentes con sus acciones pueden modificar los fundamentals, al punto que si el valor de fundamentals es positivo, los agentes pueden volverlo óptimamente cero, y ese será el resultado principal de este capítulo.
En el presente capítulo se comenzará con los supuestos de partida para la creación del modelo y poder probar el teorema principal. A su vez, al final, se dará una comparación entre las predicciones de esta teoría con lo efectivamente ocurrido en la crisis de sub prime de 2008.

2.2. Supuestos de base

Comenzaremos con un modelo simplificador, que posea un conjunto finito de agentes, $\mathcal{N}$, con N agentes que realizan transacciones en el mercado de valores formado por $\mathcal{K} = \{1, ..., K\}$ el conjunto de índices de instrumentos financieros y, para ello, como no poseerá una dotación inicial salvo en $t = 0$, deberán pedir préstamos a los bancos.

2.2.1. Función de Utilidad

Consideraremos al conjunto de agentes $\mathcal{N}$ indexado por la letra i. Cada agente i maximizará su función de utilidad, $\mathcal{U}_i$, considerando el valor esperado de su riqueza futura tomando decisiones en el momento anterior, considerando la información pasada. Para poder llevar adelante esto, los agentes buscarán un portfolio de instrumentos financieros construido a partir del conjunto $\mathcal{K}$, y financiado con préstamos bancarios y ventas de instrumentos pasados. Esto quiere decir que si el agente i desea poseer una cantidad $\alpha_i^t(j)$ del instrumento j en el momento t, entonces la cantidad $\alpha_i^t(j) - \alpha_i^{t-1}(j)$ puede ser financiada con nuevos préstamos, o vendiendo acciones de las demás $\mathcal{K} - \{j\}$ restantes. Respecto de posibles pérdidas, se considerará que la función de utilidad satisface las condiciones de Tversky & Kahneman[27], por lo que frente al mismo valor x, la utilidad de ganar x es menor que el valor absoluto de la utilidad de perder x.

Consideraremos además que la función de utilidad satisface los axiomas de utilidad, a saber,
U1) Los agentes son maximizadores considerando sus decisiones pasadas, actuales y futuras.
U2) $\mathcal{U}_i \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^K_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^K_+)^c$.
U3) $\mathcal{U}_i(0) = 0$, y es una función estrictamente cóncava y monótona[1].
Notar que los supuestos de utilidad son no restrictivos, pues se basan en los axiomas de utilidad y la condición de Tversky & Kahneman[27], la cual ha mostrado ser consistente con la realidad y no puede deducirse a partir de los axiomas.

2.2.2. Préstamos bancarios

En cada momento de tiempo, los agentes pueden pedir una cantidad no negativa de crédito al sector bancario, el cual les establecerá una tasa de interés τ_t a pagar en el próximo período, pero la misma puede verse modificada por la acción del banco central (este tema lo abordaremos más delante). De esta forma, el consumidor que solicita una cantidad d de préstamos, deberá devolver en el siguiente período una cantidad $d(1 + \tau_t)$. Se asumirá que en cada t hay una cantidad máxima que se puede prestar, la cual puede interpretarse como la cantidad de dinero en la economía, denotada por $\bar{D}^t$,[2] pero que la cantidad a prestar genera una secuencia no acotada, por lo que,
BL1) En el tiempo t, el agente i elige $0 \leq D^t_i \leq \bar{D}^t$, donde D^t_i es la cantidad de dinero que el agente i pide prestado en el momento t y satisface $\sum_{i\in\mathcal{N}} D^t_i \leq \bar{D}^t$.
BL2) Considerando la función, $D(t) = \bar{D}^t$. Entonces, $D \notin l^\infty(\mathbb{N})$.
Notar que estos supuestos, si bien la acotación puntual pareciera ser restrictiva, al no estar acotado como una secuencia el supuesto, se debilita, pues la cantidad de dinero que el agente hoy no pudo pedir, la puede pedir mañana. De todas formas probaremos que si bien se va a solicitar toda la cantidad de dinero, la burbuja estallará y en el momento anterior al estallido no todas las restricciones serán de igualdad, por lo que la burbuja estalla por decisiones de los agentes no porque la cantidad de dinero estuviese acotada, por lo que este supuesto no es condicionante en el resultado final.

2.2.3. Tasa de interés

La tasa de interés será utilizada tanto por parte de los agentes como por parte del gobierno. Los agentes la utilizarán para tomar préstamos y poder invertir en la bolsa, mientras que el gobierno, frente a que las acciones de los agentes generarán una burbuja, utilizará la tasa de interés para frenar dicha burbuja y tratar de evitar que se produzca motivando a los agentes a realizar inversiones fuera del sistema bursátil. Esto puede expresarse como que la tasa de interés sigue una regla de Taylor débil, es decir,
IR1) $\tau_t = \tau(rm^t, P_t)$[3], donde τ es una función suave y creciente en ambos argumentos, y $\tau_t = 0$ sii $P_t = 0$.
IR2) $\exists \bar{P} \in \mathbb{R}^K_+$ tal que si $P_t << \bar{P}$, entonces $\tau_t - rm^t(j) < 0$. Si $P_t(j) > \bar{P}(j)$ para algún $j \in \mathcal{K}$,

[1] Este supuesto puede ser relajado a cuasiconcavidad estricta.
[2] $\bar{D}^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \bar{D}^t_i$, con $\bar{D}^t_i = \kappa_i\omega^{t-1}_i$ donde $\omega^{t-1}_i = \langle P_{t-1}|\alpha^{t-1}_i\rangle$ es la riqueza del individuo en $t-1$ (la notación $\langle *|*\rangle$ denota el producto interno de vectores), y κ_i es la cantidad que los bancos están dispuesto a prestarle como proporción de sus activos. El parámetro κ_i puede endogeneizarse considerando que los bancos minimizan riesgo al mismo tiempo que maximizan préstamos como se muestra en Degryse, H. y otros [9].
[3] τ_t es la tasa de interés que el agente i acepta en t a pagar en $t+1$.

entonces $\frac{\partial \tau_t}{\partial rm^t(j)} > 1$.
En la actualidad no existen axiomas sobre tasas de interés, sino que existen distintas reglas de determinación de la misma. La más común y utilizada es la regla de Taylor, pero tiene problemas al hacerse 0, por lo que han existido distintas modificaciones, pero todas aún poseen las mismas características básicas, que son las dos ya enunciadas, por lo que las consideramos axiomas, no de la teoría económica, sino del capitalismo actual.

2.3. Teorema de Dow-Jones

Como mencionamos en el capítulo 1, los problemas en economía suelen considerarse utilizando el instrumental provisto por la Teoría de Juegos, sin embargo, esta teoría no permite que las burbujas estallen como se muestra en Tirole, J.[26], pues la inducción hacia atrás arroja como resultado que la única solución del juego es el cero. Por esta razón, generalizaremos la teoría actual para incorporar este tipo de eventos, y la llamaremos Juegos Bayesianos con Foliaciones Walrassianas (BGWF)[4]. La idea de esta nueva teoría es simple, y se remite a la anterior, pero la generaliza y no posee el problema de la inducción hacia atrás.
Sea G un juego, y sea Θ el conjunto de señales sobre G. Considere que para cada $\theta \in \Theta$ existe t_θ tal que la señal θ se revela en ese momento. De esta forma, se posee un conjunto de señales sobre G de la forma $\Theta(G) = \{(\theta, t_\theta) : \theta \in \Theta\}$. Es claro que ahora $(G, \Theta(G))$ no es un juego Bayesiano puro, salvo que $t_\theta = 1, \forall \theta \in \Theta$, sin embargo, no son tan diferentes, pues el desenvolvimiento del juego es como en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G_1^{\theta_1} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & G^{\theta_1}_{t_{\theta_2}-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_{\theta_1}"] & G^{\theta_1,\theta_2}_{t_{\theta_2}} \arrow[r] & \dots \arrow[r] & G^{\theta_1,\theta_2}_{t_{\theta_3}-1} \arrow[r] \arrow[d, "\mathcal{H}_{\theta_2}"] & G^{\theta_1,\theta_2,\theta_3}_{t_{\theta_3}} \arrow[r] & \dots \\
 & & \bigoplus\limits_{t \geq t_{\theta_1}} G_t^{\theta_1} & & & \bigoplus\limits_{t \geq t_{\theta_3}} G_t^{\theta_1,\theta_2} & &
\end{tikzcd}$$

donde $G_t^{\theta_1,\dots,\theta_s}$ representa el juego Bayesiano G en el momento t donde la/s señales conocidas son $\theta_1, \dots, \theta_s$[5], y la suma de juegos es la suma dinámica de los mismos. De esta forma, un juego G puede descomponerse como sus "ramas", que son los momentos de tiempo donde no hay nuevas señales, y sus "foliaciones" donde hay un cambio de señal, $\mathcal{H}_{\theta_s}$.
Antes de continuar analizaremos el diagrama anterior. El juego comienza con un solo agente Bayesiano, pero ese agente no sabe cuando el segundo agente recibirá su señal, por lo que optimiza a lo largo del tiempo como si él fuese el único. Cuando el segundo agente recibe la señal el agente 1 se entera, por lo que su estrategia cambia y ahora para escoger la estrategia óptima considera que hay otro jugador con información privilegiada. Como ninguno de ellos sabe cuando el jugador 3 pasará a ser un informado más, optimizan a lo largo del tiempo como si fueran los únicos, y el juego continúa de esta manera.
Los agentes Bayesianos serán aquellos que posean señales no nulas, y los Walrassianos, aquellos que posean señales nulas. Más adelante probaremos que este tipo de juegos puede descomponerse sobre equilibrios de Nash como suma directa de equilibrios sobre cada rama de G menos la

[4] Por sus siglas en inglés.
[5] Recordar que en teoría de juegos las señales son las distribuciones de probabilidad

foliación anterior, por lo que la inducción hacia atrás solo opera hasta que hay un cambio de señal.
Nuestro juego comienza con el conjunto de agentes $\mathcal{N}$, y el conjunto de instrumentos financieros, $\mathcal{K}$, disponibles a la compra con vector de precios inicial P_0[6]. Por los axiomas de utilidad, el agente escogerá un vector de instrumentos α_i^t y una cantidad de crédito que tomará D_i^t, sin embargo, los instrumentos serán comercializados en un mercado, por lo que la condición de vaciacimiento deberá ocurrir. Recordar que esta condición de vaciamiento no es la condición de Walrass, sino su forma general, es decir, que el operador de excesos sea nulo[7]. De esta condición se obtendrá el vector de precios, por lo que el vector de precios, P_t, satisface:

$$\sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i^t(j|P_t) = 1, \forall j \in \mathcal{K} \tag{2.1}$$

donde $\alpha_i^t(j|P)$ es la cantidad de acciones que el agente i desea poseer de la empresa j en el momento t dados los precios P, es decir, $\alpha_i^t(j|*) : \mathbb{R}_+^K \longrightarrow [0,1]$.
Como los agentes no poseen una dotación inicial, deberán solicitar créditos para poder invertir, por lo que la restricción presupuestaria resulta,

$$\langle P_t|\alpha_i^t - \alpha_i^{t-1}\rangle \leq D_i^t - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1} \tag{2.2}$$

El conjunto de restricción presupuestaria para un vector de precios fijo P y un agente i, se denotará por $R_i^t(P)$, la cual puede expresarse como:

$$R_i^t(P_t, \alpha_i^{t-1}, D_i^{t-1}) = \{[\alpha_i^t, D_i^t] \in [0,1]^K \times [0, \bar{D}^t] : \langle P_t|\alpha_i^t - \alpha_i^{t-1}\rangle \leq D_i^t - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1}\} \tag{2.3}$$

Los agentes son concientes que sus acciones hoy tienen un impacto en el futuro, por lo que deben optimizar considerando todos los posibles escenarios que ellos puedan distinguir, es decir, forman una creencia sobre los posibles movimientos de precios en $t+1$, a la que denotaremos como μ_i^t para el agente i, i.e.,

$$\mu_i^t : \bigotimes_{j\in\mathcal{K}} L^2[sop(\mu_{-i,j}^t), \mathbb{P}_j] \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \bigotimes_{j\in\mathcal{K}} L^2[sop(\mu_{i,j}^t), \mathbb{P}_j] \tag{2.4}$$

$$(\mu_{-i}^t, \tau_t) \longrightarrow \mu_i^t = \mu_i(\mu_{-i}^t, \tau_t) \tag{2.5}$$

donde el sub índice $-i$ denota las creencias de los demás agentes que hayan recibido la señal antes o en t, y μ_i es una función que depende de las creencias de los demás, μ_{-i}^t, y la tasa de interés, τ_t. El índice j implica las creencias por el activo financiero j. Notar que aquí las señales son las mismas funciones de creencias. Esta metodología te permite descomponer el conjunto de agentes en cada momento de tiempo de la forma, $\mathcal{N} = \mathcal{B}_t \cup \mathcal{W}_t$, donde $\mathcal{B}_t$ es el conjunto de agentes Bayesianos. Esta descomposición es consistente con la realidad, dado que la información que manejan los funds a la hora de estimar la evolución de los fundamentals en el tiempo es mucho mayor que los agentes especulativos que solo buscan ganancias marginales y en cortos períodos de tiempos. Consideraremos que los agentes Walrassianos, $\mathcal{W}_t$, poseen una creencia sobre los precios futuros y la misma es que el patrón actual continuará con una tasa ρ de probabilidad, por lo que si el precio aumentó ellos redoblan la apuesta. En este

[6]Este vector de precios será endógeno cuando demostremos el problema de Keynes.
[7]Esto implica que el exceso de demanda sea igual al exceso de oferta, lo que se resume en (2.1).

momento podemos definir el conjunto de información del juego en t, al que denotaremos como $\mathcal{I}nf(G|t) = \{(\theta, t_\theta) \in \Theta(G)|t_\theta \leq t\}$, por lo que si i_θ representa los agentes cuyas creencias estan en $\mathcal{I}nf(G|t)$, entonces $\mathcal{B}_t = \{i_\theta \in \mathcal{N}|(\theta, t_\theta) \in \mathcal{I}nf(G|t)\}$. Este tipo de representaciones serán muy útiles para comprender los teoremas posteriores y la descomposición del juego.
De esta manera, y considerando la notación utilizada en $\boxed{1.1}$, se tiene que cada foliación es un juego Bayesiano considerandolo en cada momento de tiempo t, con:
1) $N = \mathcal{N}$.
2) $\Omega = \mathbb{R}_+^K$.
3) $A_i = [0,1]^K \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^K$.
4) $T_i = sop(\mu_i^t)$, donde $t_i(\omega) = \omega \chi_{T_i}$[8].
5) Las acciones C_i son las compras o ventas de acciones, y préstamos tomados.
6) Los pagos U_i provienen de las funciones $\mathcal{U}_i$.
7) Las distribuciones de probabilidad son las μ_i^t para los Bayesianos y ρ para los walrassianos.
Dadas las condiciones establecidas hasta ahora, podemos definir nuestro juego como sigue,

Definición 7 (Economía Financiera Pura). *Un BGWF, $\mathcal{E}$, se dirá una economía financiera pura si,*
1) Los espacios de estrategia son; $\mathcal{S}_i^t = \{[\alpha_i^t, D_i^t, P_t] \in [0,1]^K \times [0, D(t)] \times \mathbb{R}_+^K | R_i^t(P_t, \alpha_i^{t-1}, D_i^{t-1}) - admisible\}$.
2) $\mu_i^t(\mu_{-i}^t, \tau_t) \in \bigotimes_{j \in \mathcal{K}} L^2[sop(\mu_{i,j}^t), \mathbb{P}_j]$.
3) $A_{t+1} = sop(\mu_i^t)$ *es una región compacta y convexa de* $\mathbb{R}_+^K$, *y* $A_t \subset A_{t+1}$.
4) Los agentes maximizan su función de utilidad considerando la información disponible y las estrategias de los demás.

De esta manera el problema a resolver por parte del agente i es:

$$\max_{\{[\alpha_i^t, D_i^t, P_t] \in \mathcal{S}_i^t\}_{t=1}^\infty} \sum_{t=1}^{\infty} \mathcal{U}_i(\mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_{t+1}|\mathcal{I}nf(G|t)] \times_d \alpha_i^{t+1}) \tag{2.6}$$

y dicho problema debe resolverse para todo t e i en forma simultánea. Notar que las variables de elección son correctas, dado que en $\mathcal{S}_i^t$ la tasa de interés depende de P_t y al variar la cantidad D_i^t eso afecta a α_i^t. La existencia de soluciones de este tipo de problemas (cuando el conjunto de información es fijo), fué estudiado por Stokey, Lucas y Prescott en [25], probando que bajo los axiomas utilizados el problema es equivalente a calcular el punto fijo de una ecuación tipo Bellman.
Para demostrar el Teorema de Dow-Jones, requeriremos de varios Lemas, los cuales se enunciarán y demostrarán a continuación. De ahora en más nuestro juego, $\mathcal{E}$, será una economía financiera pura, con creencias $C^1(A_{t+1})$ y las medidas de probabilidad $\mathbb{P}_j$ serán la medida de Lebesgue, por lo que las creencias resultan funciones de distribución.

Lema 1. *τ_t selecciona equilibrios sobre $\mathcal{E}$ que excluyen al 0.*

Demostración. Sea $\sigma \in \Sigma(\mathcal{E})$ no nulo. Es claro que el 0 es equilibrio[9], y $\mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_{t+1}|P_{t-1} = 0] = 0$, y por $\boxed{U3}$, $\mathcal{U}(0) = 0$. Entonces existe j tal que $rm_j^t > \tau^t$[10], entonces si j no es explosivo,

[8] Función característica de T_i.
[9] Esto es claro, pues si los precios son 0 no hay activos donde invertir.
[10] Dicho j existe pues $\sigma \neq 0$.

$\mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_\sigma^{t+1}] \neq 0$[11], por lo que σ domina estrictamente a 0, y el selector es τ^t. $\square$

Lema 2. *Sea $f \in (C^1(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ tal que $f' \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$ con λ la medida de Lebesgue, entonces*

$$L^1(\mathbb{R}, df) = L^1(\mathbb{R}, |f'|d\lambda) \tag{2.7}$$

Demostración. Como $\mathbb{R}$ es N2 y $f \in C^1(\mathbb{R})$, se tiene que todo E medible Lebesgue puede cubrirse por una cantidad numerable de intervalos I_j con la propiedad de $f(I_j) = (f(a_j), f(b_j))$ p.c.t.p, por lo que por el $\boxed{\text{Teorema del Valor Medio}}$ tenemos,

$$\lambda(f(I_j)) = |f'(\xi_j)|\lambda(I_j) \tag{2.8}$$

Luego se tiene,

$$\int_E df = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(f(I_j)) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\} \tag{2.9}$$

$$= \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |f'(\xi_j)|\lambda(I_j) : E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j\right\} \tag{2.10}$$

$$= \int_E |f'|d\lambda \tag{2.11}$$

Donde la última igualdad vale pues $f' \in L^1(\mathbb{R}, d\lambda)$.
Sea s una functión simple y E un conjunto medible, entonces,

$$\int_E sdf = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \int_{E\cap E_j} df \tag{2.12}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \int_{E\cap E_j} |f'|d\lambda \tag{2.13}$$

$$= \int_E s|f'|d\lambda \tag{2.14}$$

Luego, dada $g \in L^1(\mathbb{R}, df)$ existe una suceción de funciones simples $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $s_n \to g$, entonces por el $\boxed{\text{Teorema de la Convergencia Dominada}}$

$$\int_E gdf = \lim_{n\to\infty} \int_E s_n df \tag{2.15}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_E s_n|f'|d\lambda \tag{2.16}$$

$$= \int_E g|f'|d\lambda \tag{2.17}$$

$\square$

[11] P_σ^t es el precio en el momento t asociado a la estrategia σ.

Lema 3. *Sea g_i^t la derivada de Radon-Nikodym de μ_i^t, y suponga $P_t = \mathbb{E}_{\mu_i^{t-1}}[P_t]$ restringido a $\mathcal{B}_t$[12]. Si vale que $-\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial rm^t}\frac{P_t}{P_{t-1}^2} + \langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle \geq \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}} - \frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_t}\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}}$ en $sop(g_i^{t-1})$, entonces hay inflación.*

Demostración. Notar que la derivada de Radon-Nikodym existe por el Lema 2.
Sabemos que $A_t \subset A_{t+1}$, por lo que A_t es cerrado en A_{t+1}. Como A_{t+1} es una región, existe $x \in A_{t+1} - A_t$, tal que $\exists V$ entorno abierto de x tal que $\lambda(V) > 0$. Esto vale pues, dado $x \in A_{t+1} - A_t$ existe V entorno abierto de x tal que $V \subset A_{t+1} - A_t$[13], pero $d(x, A_t) > 0$ por compacidad de A_t en A_{t+1}. Como A_{t+1} es una región existe $x \in A_{t+1} - A_t$ tal que $d(x, Fr(A_{t+1})) > 0$, por lo que existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A_{t+1} - A_t$ por lo que el V buscado es esta bola.
Por el Lema 2 se tiene,

$$P_{t+1} - P_t = \int_{A_{t+1}} s d\mu_i^t(s) - \int_{A_t} s d\mu_i^{t-1}(s) \tag{2.18}$$

$$= \int_{A_{t+1}} s g_i^t(s) d\lambda(s) - \int_{A_t} s g_i^{t-1}(s) d\lambda(s) \tag{2.19}$$

$$= \int_{A_{t+1} - A_t} s g_i^t(s) d\lambda(s) + \int_{A_t} s(g_i^t(s) - g_i^{t-1}(s)) d\lambda(s) \tag{2.20}$$

$$= I + II \tag{2.21}$$

Paso 1: $I > 0$

$$I = \int_{A_{t+1} - A_t} s g_i^t(s) d\lambda(s) \geq \int_V s g_i^t(s) d\lambda(s) > 0 \tag{2.22}$$

, donde el V proviene de la observación del comienzo, y la desigualdad es estricta pues V es un abierto en A_{t+1}
Paso 2: $II \geq 0$
Sea $h(P_{t-1}) = \int_{A_t} s(g_i^t(s, P_{t-1}) - g_i^{t-1}(s, P_{t-1})) d\lambda(s)$, h es una función diferenciable, por lo que,

$$\frac{\partial h}{\partial P_{t-1}} = \int_{A_t} s(\frac{\partial g_i^t}{\partial P_{t-1}} - \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}}) d\lambda \tag{2.23}$$

$$= \int_{A_t} s(\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_{t-1}} + \langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle - \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}}) d\lambda \tag{2.24}$$

$$= \int_{A_t} s(\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_t}\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}} - \frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial rm^t}\frac{s}{P_{t-1}^2} + \langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle - \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}}) d\lambda \tag{2.25}$$

que es no negativo por hipótesis.
Como $h(0) = 0$[14], se tiene que h es no decreciente y $h \geq 0$, por lo que $II \geq 0$.
Luego $P_{t+1} - P_t > 0$. □

[12] Se considera solo el caso donde los precios son números reales y λ es la medida de Lebesgue.

[13] Aquí usamos que como A_t cerrado, su complemento es abierto con la topología relativa A_{t+1}.

[14] Esto es consecuencia que si todos los precios son cero, como una acción es la mínima parte en la que se divide el capital de una entidad, entonces no hay firmas donde invertir, dado que todas han quebrado.

El hecho de que los precios y las expectativas de precios coincidan es lo que se conoce como Teoría de Expectativas Racionales[22], y fué impuesta por el Premio Nobel Robert Lucas, y es una condición que siempre debe verificarse en Teoría de Juegos, pues de no ser así existirían incentivos para desviarse lo que haría que los agentes modifiquen sus estrategias pasadas.
El $\boxed{\text{Lema 3}}$ tiene una interpretación económica interesante, pues la condición puede descomponerse de la forma,
1) $-\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial rm^t}\frac{P_t}{P_{t-1}^2}$ muestra la capacidad que posee el mercado de compenzar al inversor generando rendimientos positivos.
2) $-\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_t}\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}}$ es la contrapartida de la generación de rendimientos, dado que el aumento de rendimientos genera inflación, lo que hace que el Banco Central suba las tasas, deprimiendo los rendimientos netos de intereses, desincentivando a seguir en el mercado. Entre ambos se muestra la compensación que demandará el inversor para ingresar al mercado, es decir, responde a la pregunta, ¿el gobierno permitirá que la situación actual se sostenga?.
3) $\langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle$ muestra los volúmenes con los que opera el mercado, es decir, si las demás personas creen que el precio va a subir, por lo que desean comprar (garantizandole a i la posibilidad de vender), o viceversa. Responde a la pregunta, ¿los agentes permitirán que la situación actual se sostenga?.
4) $\frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}}$ muestra la tendencia pasada del mercado y como es la tendencia hoy. Responde a la pregunta, ¿cuál es la tendencia del mercado?

Lema 4. *$R_i^t(P_t)$ es compacto y convexo.*

Demostración. Notar que de la restricción presupuestaria se tiene que si P_t está acotado, entonces $R_i^t(P_t)$ es compacto, pues,

$$-\|P_t\|_1 \leq \langle P_t | \Delta \alpha_i^t \rangle \leq D_i^t - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1} \leq \bar{D}^t \tag{2.26}$$

donde $\Delta_t x = x_t - x_{t-1}$. P_t es acotado, pues por $\boxed{\text{I2}}$, si $P_t(j) > \bar{P}(j)$ entonces τ_t crece más rápido que $rm^t(j)$, entonces eventualmente ocurre que $\tau_t > rm^t(j)$, como $\mathcal{K}$ es finito, entonces el mercado eventualmente se torna inviable para precios altos, por lo que los agentes óptimamente eligen 0, entonces los precios están acotados.
Sea $x, y \in R_i^t(P_t)$ y $s \in (0,1)$.

$$\langle P_t | \Delta_t s\alpha_i^t(x) + (1-s)\alpha_i^t(y) \rangle = s\langle P_t | \Delta_t \alpha_i^t(x) \rangle + (1-s)\langle P_t | \Delta_t \alpha_i^t(y) \rangle \tag{2.27}$$
$$\leq sD_i^t(x) - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1}(x) + (1-s)D_i^t(y) - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1}(y) \tag{2.28}$$

por otro lado se tiene que,

$$\sum_{-i} D_{-i}^t + sD_i^t(x) + (1-s)D_i^t(y) \leq \sum_{-i} D_{-i}^t + \text{máx}\{sD_i^t(x), (1-s)D_i^t(y)\} \tag{2.29}$$
$$\leq \bar{D}^t \tag{2.30}$$

Luego $R_i^t(P_t)$ es compacto y convexo. □

Al vector de precios que acota a P_t lo denotaremos por P^*.

Lema 5. *Sea $\{(\theta, t_\theta) : \theta \in \Theta\}$ el conjunto de señales con su respectivo momento de tiempo de emisión hacia el juego. Dada $\mathcal{E}$ existen sub-juegos $\mathcal{H}_{t_\theta}$ tal que*

$$\Sigma(\mathcal{E}) = \Sigma(\mathcal{W}_0) \bigoplus_{\theta \in \Theta} \Sigma(\mathcal{H}_{t_\theta}) \tag{2.31}$$

Con $\Sigma(\mathcal{W}_0)$ las soluciones de un juego Walrassiano puro (este conjunto puede ser vacío).

Demostración. Sea $t \in \mathbb{N}$ y defina $\Theta(G|t) = \{\theta_i \in \Theta : t_\theta \leq t\}$. Tome t tal que $\mathcal{W}_t \neq \emptyset$.

$$\mathcal{H}_{\Theta(G|t)} = \mathcal{E}^{\theta_1,\dots,\theta_s}(k_1 + \dots + k_{s-1} + \mathbb{N}) \tag{2.32}$$

$$\mathcal{E}^{\theta_1,\dots,\theta_s}(k_1 + \dots + k_{s-1} + \mathbb{N}) = \bigoplus_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{E}^{\theta_1,\dots,\theta_s}(k_1 + \dots + k_{s-1} + l) \tag{2.33}$$

con la convención $G_i \bigoplus G_j \doteq G_i \to G_j$, y $\mathcal{E}_n^{\theta_1,\dots,\theta_s}(k_1 + \dots + k_{s-1})$ es la economía en en el momento $k_1 + \dots + k_{s-1}$ con $\theta_1, \dots, \theta_s$ señales recibidas. Notar que si bien cada foliación no es óptima sobre equilibrios de Nash, pero por el principio de optimización bajo máxima información, dado $\theta_1, \dots, \theta_s$ los equilibrios de Nash se dan sobre $\mathcal{H}_{\Theta(G|t)}$ con $|\Theta(G|t)| = s$, hasta $t = k_1 + \dots + k_{s-1} + 1$ donde los equilibrios de Nash se dan sobre la foliación siguiente. De esta forma se tiene,

$$\Sigma(\mathcal{E}) = \bigoplus_{i \in \mathcal{N}} \Sigma(\mathcal{H}_{\Theta(G|t):|\Theta(G|t)|=i}) \tag{2.34}$$

Siempre que $\mathcal{I}nf(\mathcal{E}|1) \neq \emptyset$, en caso contrario, el juego será inicialmente Walrassiano puro, y luego valdrá la representación anterior, por lo que se tiene el resultado. Notar que por el resultado obtenido por Tirole, J.[26] si consideramos Θ_s tal que $|\Theta_s| = N$, entonces $\Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s}) = \{0\}$, por lo que no se pierden equilibrios con esta descomposición. □

Lema 6. *Sea $(X, \mathbb{P}_\mu)$ un espacio de probabilidad compacto con $X \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$. Entonces $\mathbb{E}_\mu[id] = 0$ sii $\mu = \delta$[15].*

Demostración. Sea $f(s) = s^n$, entonces

$$|\mathbb{E}_\mu[f]| = |\int_X f d\mu| \tag{2.35}$$

$$\leq \int_X |f| d\mu \tag{2.36}$$

$$\leq \sup_{s \in X}\{s^{n-1}\} \mathbb{E}_\mu[id] = 0 \tag{2.37}$$

Luego, para todo polinomio p, se tiene que,

$$\mathbb{E}_\mu[p] = \sum_{n=0}^{l} c_n \mathbb{E}_\mu[s^n] \tag{2.38}$$

$$= c_0 \mathbb{P}_\mu(X) \tag{2.39}$$

$$= p(0) \tag{2.40}$$

[15]Recordar que en teoría de probabilidad $d\mu$ se interpreta como dF con F función de distribución.

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra de polinomios, entonces por el $\boxed{\text{Teorema de Weierstrass}}$, $\forall f \in C(X)$, $\exists \{p_n\}_n$ tal que $p_n \to f$. Como $\mathbb{E}_\mu \in C(X)'$, se tiene que dada $f \in C(X)$,

$$\mathbb{E}_\mu[f] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_\mu[p_n] = \lim_{n\to\infty} p_n(0) = f(0) = \mathbb{E}_\delta[f] \tag{2.41}$$

pero por el $\boxed{\text{Teorema de Representación de Riesz}}$,

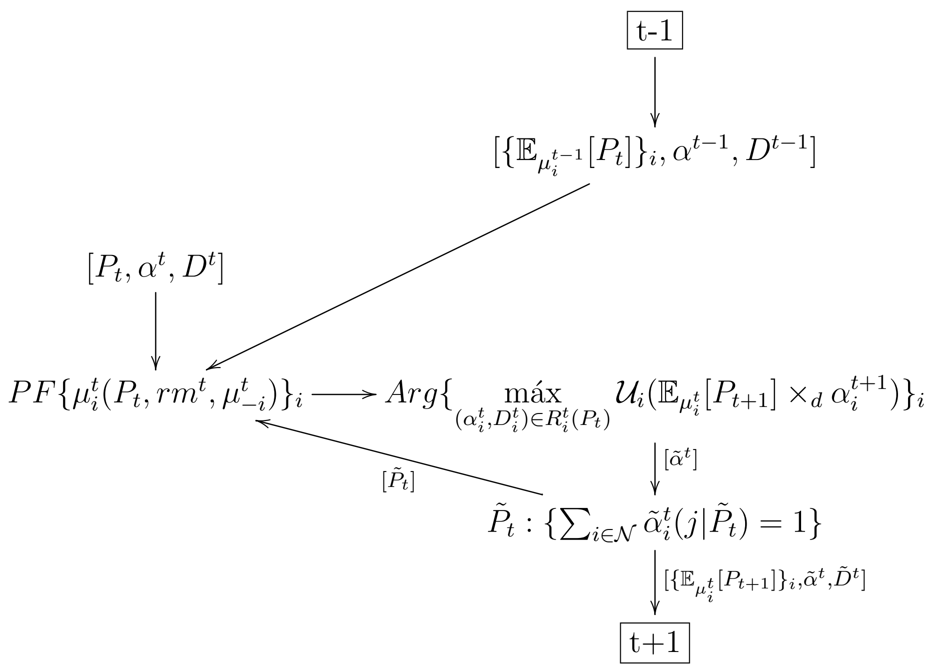
$$\|\mu - \delta\| = \|\mathbb{E}_\mu - \mathbb{E}_\delta\|_{op} = 0 \tag{2.42}$$

$\square$

A continuación demostraremos el resultado principal del capítulo. Las hipótesis sobre las que se probará son relativamente débiles, salvo $\boxed{\text{H4}}$ que es estandar en economía para garantizar Expectativas Racionales tomando $Z_j^t = \{P_j^t \in [0, P^*(j)] : \sum_{i\in\mathcal{N}} \alpha_i^t(j|P^t) = 1\}$. Estas hipótesis pueden debilitarse aún más, pero sobre ello se avanzará en breve.

Teorema 2 (Teorema de Dow-Jones)**.** *Sea $\mathcal{E}$ una economía financiera pura, con $\Theta(\mathcal{E})$ nuestro conjunto de señales. Asuma que:*
H1) $F_{\mu_{i,j}^T} = F_\delta$[16] sí y solo sí $rm_j^{t+1} - \tau_i^t \leq 0, \forall t \geq T$.
H2) $-\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial rm^t}\frac{P_t}{P_{t-1}^2} + \langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle \geq \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}} - \frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_t}\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}}$ en $sop(g_i^{t-1})$.
H3) El sistema $\{\mu_i^t = \mu_i(\mu_{-i}^t, \tau_i^{t+1}) : i \in \mathcal{N}\}$ tiene diferencial sobreyectivo (ó inyectivo) respecto de μ_{-i}^t.
H4) Sí $Z_j^{t+1} \neq \emptyset$ $\forall t \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces las expectativas son racionales en $\mathcal{B}_t$.
Entonces para toda $\sigma \in \Sigma(\mathcal{E})$ existe $0 < T^* < \infty$[17] y $\Omega \subset \mathcal{K}$ no vacío tal que $P_\sigma^{T^*}(\Omega) = \{0\}$.

Demostración. Para demostar el teorema, estudiaremos el siguiente algoritmo:



[16]F_μ es la representación de Riesz de la medida finita μ.
[17]Siempre que P_0 sea no explosivo.

Este algoritmo muestra cómo evoluciona la toma de decisiones de los agentes en función de la información que poseen, y nos permitirá construir el operador que caracterice a los equilibrios de Nash del juego. El mismo opera como sigue,
1) De $t-1$ ingresan las variables determinadas en $t-1$, y el agente realiza una apuesta inicial para las variables en t generando un input $[P_t, \alpha^t, D^t]$.
2) Los inputs de $t-1$ y t son utilizados para calcular un punto fijo en creencias entre los distintos agentes que poseen información.
3) Las creencias en punto fijo son utilizadas para buscar el nivel de crédito y el tamaño del portafolio que maximiza la utilidad de cada uno de los agentes obteniendo $\tilde{\alpha}^t$ y $\tilde{D}^t$.
4) Con los distintos valores de los portafolios se analiza la condición de vaciamiento, buscando el precio que equilibre la oferta con la demanda y obtenemos $\tilde{P}$.
5) Ahora este nuevo input, $[\tilde{P}_t, \tilde{\alpha}^t, \tilde{D}^t]$, regresa al paso (1) como input de t y el algoritmo comienza de nuevo.
Por el $\boxed{\text{Lema 5}}$ basta resolver el juego sobre cada foliación y luego proyectar. Por $\boxed{\text{H1}}$ y el $\boxed{\text{Lema 6}}$, la burbuja solo estalla si el retorno neto es negativo y persiste en el tiempo. Sea t tal que $\mathcal{B}_t \subset \mathcal{N}$, y $1 < |\mathcal{B}_t| < N$, y sea la folicación $\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})}$ generada por las primeras s señales recividas solamente.
Por $\boxed{\text{H3}}$, $\partial[\mu_i^t - \mu_i]_{i=1}^s$, tiene una representación dada por una matriz cuadrada, y por ser una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita de igual dimensión, ambas de las condiciones dadas por $\boxed{\text{H3}}$ implica que es un isomorfismo entre espacios vectoriales, entonces por el $\boxed{\text{Teorema de la Función Inversa}}$, el sistema es un difeomorfismo.Esto implica que las creencias poseen función de densidad g_i^t por el $\boxed{\text{Lema 2}}$, y la misma al tener soporte compacto resulta continua por el $\boxed{\text{Teorema de Egorov}}$, de donde se deduce que el operador esperanza es continuo.
Por $\boxed{\text{Lema 4}}$, $R_i^t(P)$ es un subconjunto compacto y convexo, y por estricta concavidad de la función de utilidad el problema de maximización del agente posee solución única en $R_i^t(P)$ con P fijo. Lo primero que haremos será construir nuestra multifunción,

$$F : [0, P^*]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, P^*]^{\mathbb{N}} \tag{2.43}$$

tal que todo equilibrio de Nash provenga de un punto fijo del operador.
Considere la aplicación[18],

$$\Gamma_t : [0, P^*] \longrightarrow \bigcup_{p \in [0,P^*]} R^t(p) \qquad\qquad R^t(P) = \Pi_{i\in\mathcal{N}} R_i^t(P) \tag{2.44}$$

$$P \longrightarrow R^t(P) \tag{2.45}$$

Dotando a la imagen de Γ_t con la topología generada por la métrica de Hausdorff, resulta una asignación compacta y hemi continua superiormente, pues para ver hemi continuidad superior, solo debemos ver que dado un entorno abierto, A, de $\Gamma_t(P_0)$, $\Gamma_t[A]^+$ contenga una vecindad de P_0. Pero esto ocurre, pues dado $P \neq P_0$, se tiene que $d_H(R^t(P), R^t(P_0)) = N\|P - P_0\|$. Por ser los espacios paralelos, se tiene que dado A entorno abierto de $\Gamma_t(P_0)$, $c = d_H(\Gamma_t(P_0), \partial A) > 0$. Por lo tanto, si $\epsilon < c/N$, $B_\epsilon(P_0) \subset \Gamma_t[P_0]^+$.
Definiendo π_i como la proyección tal que $\pi_i \circ \Gamma_t(P) = R_i^t(P)$, y considerando,

$$\Omega_i^t(P) = arg \max_{[\alpha_i^t, D_i^t] \in \pi_i \circ \Gamma_t(P)} \mathcal{U}_i(\mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_{t+1}] \times_d \alpha_i^{t+1}) \tag{2.46}$$

[18]Omitiremos la dependencia de α_i^{t-1} y D_i^{t-1} en esta definición para no sobrecargar la notación.

Por la estricta concavidad de la función de utilidad, se tiene que el problema $\boxed{2.46}$ posee solución única, y por ser Γ_t una asignación compacta y hemi continua superiormente, estamos bajo las hipótesis del $\boxed{\text{Teorema de Berge}}$, de donde se deduce que Ω_i^t es una función continua. Ahora estamos en condiciones de definir nuestra multifunción F. Considere $\pi_{\mathcal{K}|j}$ la proyección tal que $\pi_{\mathcal{K}|j} \circ \Omega_i^t(P) = \alpha_i^t(j|P)$, entonces

$$F : [0, P^*]^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0, P^*]^{\mathbb{N}} \tag{2.47}$$

$$F(\{P_t\}_{t=1}^{\infty}) = \{\{g_O^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d F_t(P_t) + \{g_D^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (P^* - F_t(P_t))\}_{t=1}^{\infty} \tag{2.48}$$

$$F_t(P_t) = arg \max_{P_t\in[0,P^*]} (-\sum_{j\in\mathcal{K}}(\sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{\mathcal{K}|j} \circ \Omega_i^t(P_t) - 1)^2) \tag{2.49}$$

$$g_O^j(P) = \begin{cases} \varphi_j(d_j^t) & P \notin \Delta_{i,j}^t \\ 1 & P \in \Delta_{i,j}^t \end{cases} \tag{2.50}$$

$$g_D^j(P) = \begin{cases} 0 & P \notin \Delta_{i,j}^t \\ \psi_j(d_j^t) & P \in \Delta_{i,j}^t \end{cases} \tag{2.51}$$

$$d_j^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{\mathcal{K}|j} \circ \Omega_i^t(P) - 1 \tag{2.52}$$

$$\Delta_{i,j}^t = \{\{d_j^t\}_{j\in\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_+\} \tag{2.53}$$

donde φ_j y ψ_j son funciones continuas no decrecientes con las siguientes propiedades: $\varphi_j > 0$, $\lim_{x\to-\infty} \varphi_j(x) = 0$, $\varphi_j(0) = 1$, estrictamente creciente en $(-\infty, 0)$ y constante a partir de 0 con valor 1; $\psi_j < 1$, $\lim_{x\to\infty} \psi_j(x) = 1$, $\psi_j(0) = 0$, estrictamente creciente en $(0, \infty)$ y constante para valores menores a 0 e igual a 0[19]. Dado que g_O^j y g_D^j son continuas, por ser composicón de funciones continuas, y como por el $\boxed{\text{Teorema de Berge}}$ F_t también es hemi continua superiormente, se deduce que dotando al dominio de F con la topología de Tijonov, el $\boxed{\text{Teorema de Tijonov}}$ implica que F es hemi continua superiormente, pues cada proyección lo es. Luego, tenemos una aplicación hemi continua superiormente, donde su dominio e imagen son espacios compactos y convexos y el dominio es un subconjunto de la imagen, entonces por el $\boxed{\text{Teorema de Kakutani}}$, $\exists P \in F(P)$.
A continuación veremos que,

$$\Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})}) = \{P \in F(P)\} \tag{2.54}$$

Notar que dado $P \in F(P)$ entonces,

$$P_t = g_O^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d \tilde{F}_t(P_t) + \{g_D^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (P^* - \tilde{F}_t(P_t)) \tag{2.55}$$

Notar que no puede ocurrir que $P_t \neq \tilde{F}_t(P_t)$, pues dado P se tiene que $R_i^t(P)$ es un conjunto compacto y convexo, las funciones de utilidad son estríctamente cóncavas respecto de la

[19]Estas funciones son funciones de peso.

riqueza, y las funciones de demanda y oferta son continuas, por lo que las funciones de exceso de demanda son continuas. De esta manera, se tiene que se cumplen las hipótesis del Teorema de Existencia del Equilibrio General[20], implicando que existe un vector de precios que vacía los mercados. Dicho vector de precios, por definición de las funciones g_O^j y g_D^j, satisface $g_O^j(P_t) = 1$ y $g_D^j(P_t) = 0$.
Por lo tanto $g_O^j(P_t) = 1$ y $g_D^j(P_t) = 0$, $\forall j \in \mathcal{K}$, por lo que se tiene que vale lo siguiente:
1) $d_j^t = 0$.
2) Expectativas racionales sobre $\mathcal{B}_t$.
La condición 1 implica que el equilibrio entre las relaciones de oferta y demanda se satisface, por lo que no hay incentivos a desviarse en t. La condición 2 implica que el precio que los Bayesianos esperan es igual entre sí, en tanto sus creencias son internamente consistentes, por lo que vale la Teoría de Expectativas Racionales [22] sobre los agentes Bayesianos, es decir no hay incentivos a desviarse en $t+1$. Como los argumentos maximizadores son únicos, entonces no hay incentivos a desviarse en las elecciones restringidas a $R_i^t(P_t)$. De esta forma queda probado que, $\{P \in F(P)\} \subseteq \Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})})$. Veamos la otra contención. Sea $\sigma \in \Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})})$, entonces sea P_σ^t el vector de precios en t asociado a la estrategia σ. Por ser equilibrio del juego, 1 y 2 deben valer. Pero si 1 vale, entonces es solución de 2.49, y las funciones de peso son 1 y 0 respectivamente, por lo que es punto fijo de F.
Luego, $\Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})}) = \{P \in F(P)\}$.
Por H2 y el Lema 3, la tasa de inflación es positiva, por lo que los precios son una secuencia creciente, entonces consideramos dos casos. Si los precios alcanzan P^* la burbuja estalla[21]. Si los precios convergen a un vector $\tilde{P}$, entonces se tiene que el rendimiento del mercado, $rm_j^t = \frac{P_t(j)-P_{t-1}(j)}{P_{t-1}(j)} \to 0$. Como la tasa de interés es creciente por IR1, se tiene que por IR2, $\exists 0 < \tilde{t} < \infty : rm_j^{\tilde{t}} - \tau^{\tilde{t}} < 0$ para $j \in \Omega \subset \mathcal{K}$. Por lo que la burbuja estalla en la foliación en,

$$T = \text{ínf}\{\tilde{t} : rm^{\tilde{t}}(j) - \tau_{\tilde{t}} < 0\} \tag{2.56}$$

Sea T_s el momento de explosión de la burbuja bajo la foliación $|\Theta_s(G|\mathbb{N})| = s$, entonces si denotamos por t_{θ_i} el momento de tiempo donde el agente i recibe la señal, entonces si $T_s \leq \sum_{i=1}^s t_{\theta_i}$ quiere decir que cuando ingresa el agente Bayesiano número s la burbuja debe estallar, pero si esto no ocurre, entonces se esperará hasta T_s para hacer estallar la burbuja. Cuando todos los agentes sean Bayesianos, la inducción hacia atrás implica que la burbuja estallaría en $T = \sum_{i=1}^N t_{\theta_i}$. De aquí se deduce que la burbuja estalla en,

$$\phi_T^*(s) = \begin{cases} \sum_{i=1}^s t_{\theta_i} & T_s \leq \sum_{i=1}^s t_{\theta_i} \\ T_s & T_s > \sum_{i=1}^s t_{\theta_i} \end{cases} \tag{2.57}$$

$$T^* = \text{mín}(\text{ínf}\{\phi_T^*(s) : s \in \mathcal{N}\}; \sum_{i=1}^N t_{\theta_i}) \tag{2.58}$$

y los Bayesianos salen del juego en $T^* - 1$.
La unicidad de la propiedad proviene de la imposibilidad de realizar un acuerdo de cooperación con los Walrassianos. □

[20] El lector puede ver dicha demostración en [18], pero antes deberá leer [17] y [3] para poder comprender la misma. Aquí tambien se utiliza lo mencionado en el pié de página número 2 sobre los préstamos bancarios y los desarrollos obtenidos por Degrise, H y otros en [9] sobre las constantes κ_i.

[21] Con que solo uno alcance la burbuja ya estalla en ese mercado, y obtenemos el resultado.

El teorema anterior tiene un resultado muy interesante. Notar que en $T^* - 1$ los agentes deben tomar una decisión, se quedan en la burbuja, o salen de la burbuja, pero esta decisión debe tomarse con un valor de fundamentals positivo, pues el valor de fundamentals en este modelo es P_0, las acciones no pagan dividendos y no hay empresas, y a pesar de ello, los agentes deciden salir. Esto genera que en T^* la burbuja estalle, generando el quiebre de un conjunto Ω de firmas. Esto concluye que los agentes pueden modificar los fundamentals, pues incluso con una promesa de beneficios positivo, si la misma no es creíble, los agentes no la tomarán, lo que hará que dicha promesa deje de ser cierta, por más que lo haya sido en un primer momento. Este resultado no puede encontrarse en la teoría tradicional, ni en muchos de los mejores papers escritos sobre burbujas financieras publicados en las mejores revistas del mundo, como es el caso de "Bubble and Crashes"[1] publicado en la prestigiosa revista del M.I.T, pues este resultado no pertenece al paradigma actual, pero es observable en la realidad. Del teorema también pueden obtenerse algunos corolarios, como por ejemplo,

Corolario 1. *Bajo las hipótesis del* $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$*, existe* $\gamma_t > 1$ *tal que,*

$$P_{t+1} = \gamma_t P_t \tag{2.59}$$

El número γ_t *se llama multiplicador financiero.*

Hasta ahora hemos considerado agentes que invierten en todos los instrumentos del mercado, pero esto es en general irreal en grandes mercados como es Wall Street, dado que invertir en todos los instrumentos será sustancialmente costoso en términos de las comisiones que se deberán pagar a los corredores de bolsa, al igual que en términos de tiempo, pues el agente debería observar todo el mercado en cada segundo. Por esta razón uno podría pensar que el agente lo que busca es minimizar la volatilidad de los activos, buscando minimizar el riesgo de su portfolio. Sin embargo, un agente no buscará riesgo cero, pues eso es imposible, por lo que el agente buscará un portfolio que no supere su aversión al riesgo, la cual puede ser calculada a la Arrow-Pratt, y se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 2 (Portfolios finitos)**.** *Si los agentes solo consideran inversiones en un subconjunto de* $\mathcal{A}$*, con participaciones* $c_{i,j}^t$ *de la persona* i *en el instrumento* j *en el momento* t*, entonces existe* $\gamma_t(j) > 1$*,* $\forall j \in \mathcal{K}$ *tal que,*

$$P_{t+1}(j) = \gamma_t(j) P_t(j) \tag{2.60}$$

Corolario 3. $\boxed{\text{H3}}$ *puede reemplazarse por la condición siguiente:*
H3') μ_i^t *es absolutamente continua respecto de* λ*, y su derivada de Radon-Nikodym,* g_i^t *es continua respecto de* P_{t-1}*, y debe agregarse alguna condición que garantice la existencia de un punto fijo en creencias.*
Bajo $\boxed{\text{H3'}}$ *el* $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$ *sigue siendo válido.*

En la actualidad, los problemas de precios, como ya mencionamos en el capítulo 1, están más ligados a los problemas de inflación, dado que en un contexto inflacionario, si se tiene una tasa de inflación no decreciente, i.e. $\pi_t > \pi_{t-1}, \forall t > 0$, entonces $P_{t+1} = (1+\pi_t)P_t > (1+\pi_0)^t P_0 \to \infty$ si $t \to \infty$, por lo que contextos con elevados niveles de inflación son altamente problemáticos en términos monetarios, y es por ello que los gobiernos intervienen en la economía[22]. Sin embargo,

[22]Por esta razón τ dependía de dos argumentos.

puede ocurrir que se tengan precios crecientes, pero no una tasa de inflación creciente. En estos casos, si los precios son convergentes, y el valor al cual converge no genera problemas políticos, es posible dejar que el mercado ajuste, pero esto no parece ser el caso de las burbujas, por ello a continuación daré condiciones para probar inflación creciente. Estas condiciones nos permitirán construir nuestro oscilador financiero para detectar burbujas (en realidad detectará si el mercado compensa por riesgo, pero con una transformación puede hablarse de burbujas), y lo pondremos a prueba con la crisis de sub prime de 2008.
Antes de enunciar el Lema, daremos una definición:

Definición 8. *Sea $f \in L^1(\Omega, d\lambda)$ entonces $B \subset \Omega$ es signo integral dominante sobre Ω si,*

$$sgn(\int_\Omega f d\lambda) = sgn(\int_B f d\lambda) \tag{2.61}$$

Lema 7. *Dadas nuestras hipótesis anteriores en el $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$, si alguna de las siguientes condiciones se cumple, la tasa de inflación es creciente, y la burbuja estalla:*
1) $2\frac{\partial g_i^{t-2}}{\partial \tau^{t-2}} \frac{\partial \tau^{t-2}}{\partial P_{t-2}} \frac{\partial P_{t-2}}{\partial P_{t-3}} - \frac{1}{\lambda(A_{t-1})}$ tiene signo negativo integral dominante sobre A_{t-1}.
2) $\pi_{t-1} > 2\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - 1$.

Demostración.

$$\pi_t - \pi_{t-1} = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} - \frac{P_{t-1} - P_{t-2}}{P_{t-2}} \tag{2.62}$$

$$= \frac{P_{t-2}P_t - P_{t-1}^2}{P_{t-1}P_{t-2}} \tag{2.63}$$

Considere la función $H(P_{t-3}) = P_{t-2}P_t - P_{t-1}^2$. Es claro que $H(0) = 0$ sobre equilibrios de Nash. Defina $D_3(f) = \frac{\partial f}{\partial P_{t-3}}$, entonces

$$D_3(H) = D_3(P_{t-2})P_t + P_{t-2}\int_{A_t} D_3(g_i^{t-1}) - 2P_{t-1}D_3(P_{t-1}) \tag{2.64}$$

$$= (P_t - 2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}})D_3(P_{t-2}) + P_{t-2}\int_{A_t} D_3(g_i^{t-1}) \tag{2.65}$$

Veamos que ambas de nuestras suposiciones implican $P_t - 2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} > 0$.

$$P_t > 2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} \tag{2.66}$$

$$\frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 > 2\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - 1 \tag{2.67}$$

$$\pi_t > 2\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - 1 \tag{2.68}$$

Por lo que $\boxed{2}$ implica el resultado, pero por otro lado,

$$2\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - 1 = 2\int_{A_{t-1}} \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial \tau^{t-1}} \frac{\partial \tau^{t-1}}{\partial P_{t-1}} \frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - 1 \tag{2.69}$$

$$= 2\int_{A_{t-1}} \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial \tau^{t-1}} \frac{\partial \tau^{t-1}}{\partial P_{t-1}} \frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} - \frac{1}{\lambda(A_{t-1})} \tag{2.70}$$

Por lo que $\boxed{1}$ también implica el resultado, pues de lo contrario implicaria $\pi_t < 0$, y esto no ocurre por $\boxed{\text{H2}}$ del $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$. $\square$

En el corolario anterior demostramos que si $P_t > 2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}}$, entonces una burbuja se genera y eventualmente estalla. Esta condición en general puede no satisfacerse y aún así que sepuede generar una burbuja, pero si la misma resulta significativa, se debe prestar atención al mercado. Sobre esta ecuación se abordará más adelante, en la sección donde construiremos el oscilador financiero.

2.4. Teoría de Reflexividad

Como discutimos al inicio, el paradigma actual no es consistente con la realidad, pero la Teoría de Juegos actual tampoco parece serlo, pues bajo ninguno de ellos una burbuja puede formarse, y es por esta razón que construimos una teoría que posea las ventajas de ambas. Nuestra Teoría no es consistente con el paradigma actual, pero no es la única que está en esta situación. La otra teoría se conoce como Teoría de Reflexividad, y su gran promotor e impulsor siempre ha sido el magnate financiero George Soros[15], chairman del Soros Managment Fund LLC, uno de los funds más grandes del mundo. La Teoría de Reflexividad propone la existencia de una relación reflexiva o bidireccional entre las variables económicas, por lo que las decisiones sobre una variable finalmente afectan las decisiones sobre otra variable. Veamos un ejemplo antes de continuar:

Consideremos dos agentes, un banco y una empresa, que desean hacer un negocio. La empresa para poder llevar adelante el negocio debe solicitarle dinero al banco, pero para saber cuanto invertirá (si es que finalmente lo hace) debe conocer la tasa de interés que el banco va a cobrarle. El banco, por otro lado, para poder fijar la tasa de interés, como sabe que el negocio es riesgoso necesita conocer cuánto la empresa va a invertir y su tasa de ganancia. Esto puede representarse en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} Banco \arrow[r, "\$"] & Empresa \arrow[d, "f(\$,\tau)"] \\ Resultado \arrow[u, "\$(1+\tau)"] \arrow[ur, "ganancia"'] & Negocio \arrow[l] \end{tikzcd}$$

De esta forma, el problema entre el banco y la empresa es reflexivo, pues sin dinero la empresa no puede invertir, pero sin resultados el banco no puede decidir.

La Teoría de Reflexividad propone como solución de los problemas a un punto fijo de las relaciones bidireccionales de los agentes, eliminando la posibilidad de la existencia de un Equilibrio General en el sentido Walrassiano, y proponiendo como Equilibrio General a nuestra noción de equilibrio. Soros ha comentado mucho sobre esta teoría, de la cual es padre, y afirma que existen dos tipos de soluciones en la vida real. Soluciones cerca del equilibrio (las dadas por el paradigma actual) y soluciones alejadas del equilibrio (donde aparecen las burbujas), por lo que la economía sería un constante alejamiento del equilibrio. Mi teoría, sin bien concuerda con muchas nociones básicas, no concuerda con esta última, dado que las burbujas son un equilibrio de Nash, sin embargo, considero que cuando Soros hizo esas afirmaciones comparaba la Teoría de Reflexividad con el paradigma actual, dado que las burbujas son reflexivas.

En esta sección nos preocuparemos por demostrar que la Teoría de Reflexividad, para una economía puramente financiera, es nuestra Teoría, por lo que se le daría por primera vez un sustento matemático a dicha teoría. Como mencionamos, dadas x, y variables, debería existir una relación reflexiva entre ellas, es decir, deberían existir f y g tal que,

$$\begin{cases} x = g(y) \\ y = f(x) \end{cases} \tag{2.71}$$

Por lo que se obtiene una relación bidireccional entre las variables. Como los agentes deben tomar decisiones, la condición de reflexividad genera un algoritmo a partir de cualquier valor x_0, y considerando,

$$\begin{tikzcd} x_t \arrow[r, "f"'] & f(x_t) \arrow[d, "id"] \\ g(y_{t+1}) \arrow[u, "id"] & y_{t+1} \arrow[l, "g"'] \end{tikzcd}$$

donde la decisión óptima se encuentra en el punto donde dicho algoritmo frene con error cero. Note que la relación de reflexividad puede ser interpretada como una condición de oferta-demanda generalizada, dado que los agentes realizan una apuesta para y_{t+1} considerando x_t^E, pero el mercado fija $y_{t+1} = f(x_t^E)$, entonces a menos que la relación de reflexividad se encuentre en un punto fijo, el agente inicial tendrá un incentivo a romper su apuesta por un valor de $x_t^E - g \circ f(x_t^E)$. En nuestra teoría poseemos reflexividad, dado que el operador principal del $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$ que guía a los agentes hacia el equilibrio es claramente reflexivo, pues,

$$F(\{P_t\}_{t=1}^{\infty}) = \{\{g_O^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d F_t(P_t) + \{g_D^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (P^* - F_t(P_t))\}_{t=1}^{\infty} \tag{2.72}$$

y posee las siguiente propiedades:
1) Si el mercado presenta un exceso de demanda, el precio aumentará.
2) Si el mercado presenta un exceso de oferta, el precio disminuirá.
3) Si no hay excesos de ningún tipo, ni incentivos a desviarse futuros, la estrategia es de equilibrio.

Aquí se considera oferta y demanda en su forma reflexiva no Walrassiana. Ahora buscaremos hallar nuestro operador de reflexividad para la burbuja financiera. Dado P_t, considere $\pi_{<t>}$ la proyección sobre la t-ésima copia de $[0, P^*]$ en $[0, P^*]^{\mathbb{N}}$, por lo que $\pi_{<t>} \circ F(\{P_t\}_{t=1}^{\infty})$ es un subconjunto de un espacio K dimensional, y cada componente de la proyección representa un nuevo precio para el mercado del instrumento financiero j. Sea M_j^t el mercado financiero del instrumento j en el momento t. Como los movimientos en los precios generan nuevas expectativas, lo que lleva a nuevas acciones, es posible que frente a diferentes precios poseamos diferentes estrategias, en tanto,

$$\mathcal{E}^t = \bigoplus_{j\in\mathcal{K}} \hat{H}_j^t(M_j^t) \tag{2.73}$$

donde el operador $\hat{H}_j^t$ toma el conjunto de instrumentos financieros, sus precios y retorna la componente j de $\pi_{<t>} \circ F(\{P_t\}_{t=1}^{\infty})$, y las nuevas decisiones óptimas de los agentes en ese mercado. Definiendo $(a \otimes_H b) = (a, H(b))$, y dado que el modelo posee un equilibrio, entonces se tiene que existe una Transformación de Galileo a partir del mercado a, dada por:

$$\mathcal{E}^t = \bigotimes_{j\in\mathcal{K}-\{a\}|\hat{H}_j^t} M_j^t \tag{2.74}$$

con función de reflexividad,

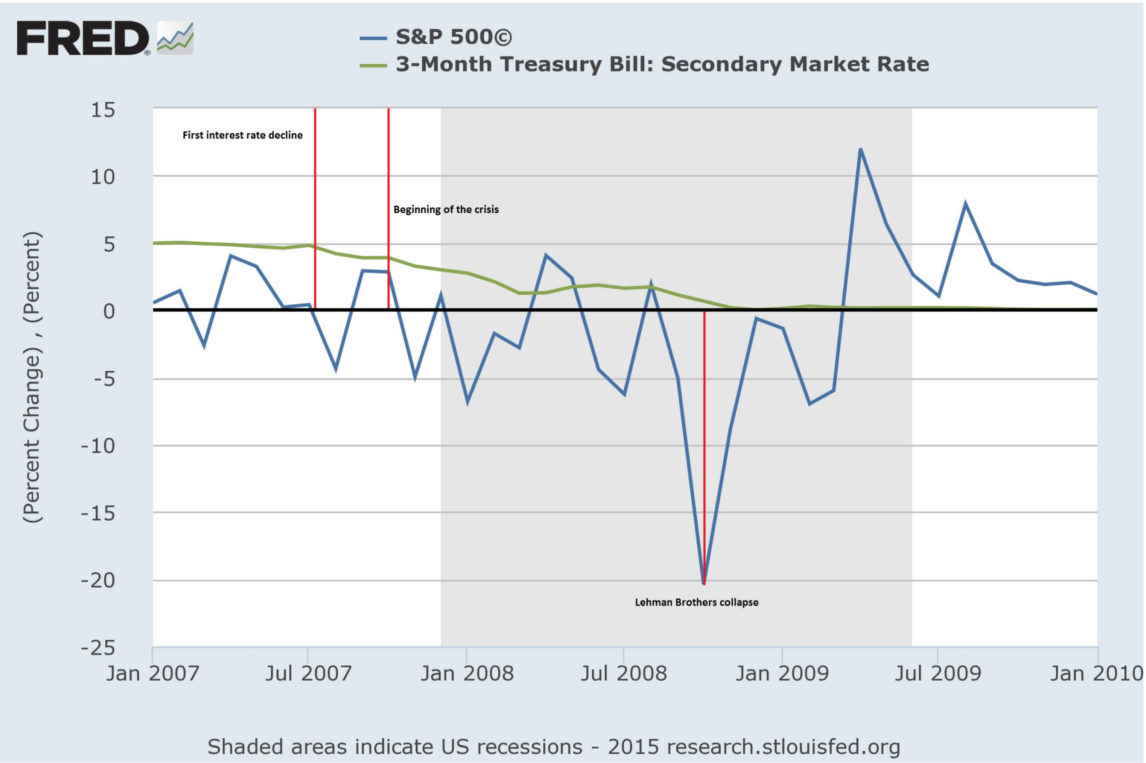
$$\mathfrak{RF}_{M_a^t}(x_a^t) = \otimes_{j\in\mathcal{K}-\{a\}}\hat{H}_j(M_j^t|x_a^t) \tag{2.75}$$

En conclusión, el $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$ es la justificación matemática de la Teoría de Reflexividad para el caso de una economía financiera pura. En el próximo capítulo, cuando se trabaje el problema de Keynes (1929), se verá que la función de reflexividad se descompone sobre $\mathcal{N} = \mathcal{B}_t \cup \mathcal{W}_t$, por lo que hay reflexividad directa e indirecta.

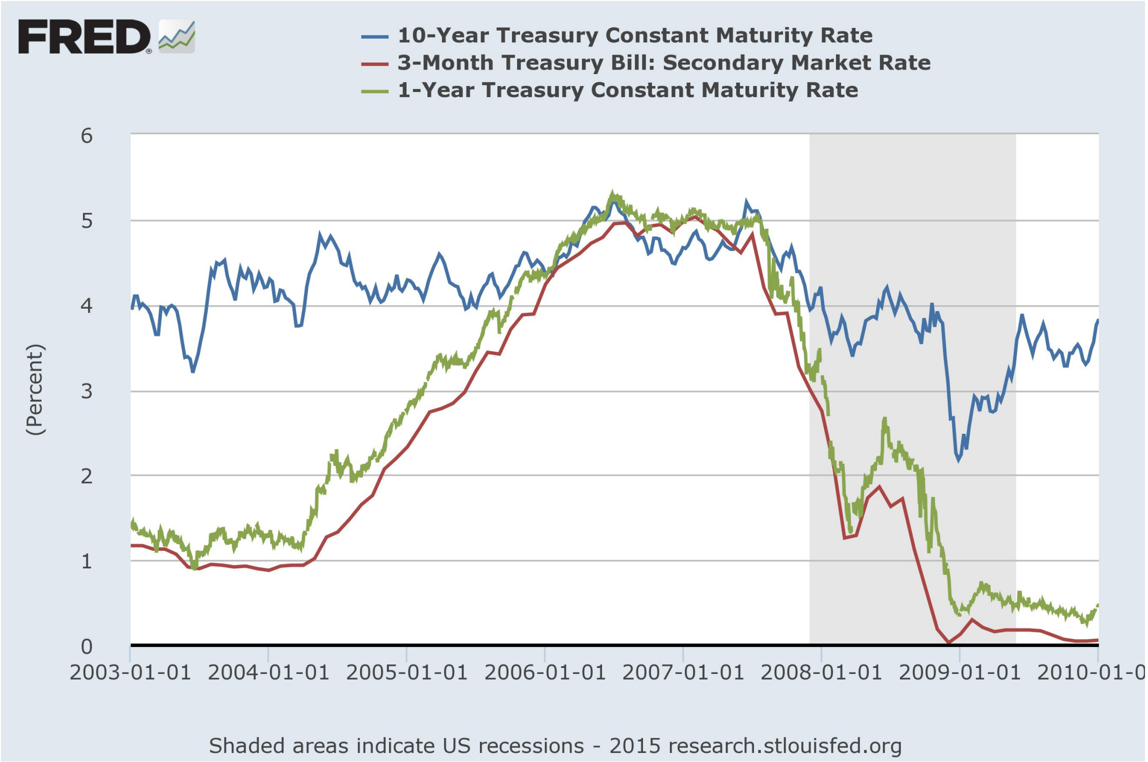
2.5. Crisis sub prime (2008). Oscilador financiero

2.5.1. Crisis sub prime (2008)

En la presente sección estudiaremos nuestro teorema en la realidad, y para ello comenzamos con una gráfica del S&P 500 visto como cambio portcentual, dado que representa a las 500 empresas más importantes de los Estados Unidos, vs el T-Bill a 3 meses que representa una aproximación de la tasa de interés.



[Fuente: St. Louis FED]
Como podemos ver, pareciera que nuestro teorema no aplica a la crisis financiera de 2008, dado que la tasa de interés tiene un declive antes que el mercado lo haga, pero si se realiza un estudio más detallado, podemos ver en la siguiente gráfica un S&P 500 creciente junto con una tasa de interés creciente.



[Fuente: St. Louis FED]
Luego de la crisis dot-com de 2000, las tasas de interés cayeron cerca de cero, por lo que el vector de precios $S\&P500_{2000}$ actuó como condición inicial en el teorema. Como lo predice nuestra teoría, el crédito barato y un mercado con posibilidades para especular generó una suba de precios, lo cual activó una conducta sobre la tasa de interés. Eventualmente, como esta intervención estatal no puede derrumbar la burbuja tenemos que un conjunto Ω de firmas colapsan, entonces $P_{2008}(\Omega) = \{0\}$, lo que da origen a una crisis financiera. Note que aunque el gobierno baje a cerca de 0 la tasa de interés, la economía no se reactivará, pues el colapso es por una desconfianza en el sistema no por crédito "caro", por lo que es imposible evitar el quiebre de firmas. En la realidad lo que ocurrió fué que el gobierno comenzó a bajar la tasa de interés, pero la economía no reacciona y entra en un proceso recesivo, pero, a diferencia de las predicciones de nuestro teorema, la tasa de interés nunca llega a 0. La razón de ello es que para que nuestro teorema sea aplicable debe valer la Teoría de Expectativas Racionales, la cual nunca se verifica totalmente en economía por el simple hecho que los agentes no pueden iterar infinitas veces su sistema de creencias. Por otro lado, también está la hipótesis "Too big To fail", donde las grandes empresas históricas, como el Lehman Brother's Bank consideran que como su quiebra generaría efectos negativos demasiado grandes, el estado siempre los salvará independientemente de cuan riesgosas sean sus carteras. Sin embargo, cuando el gobierno anuncia el no salvataje del Lehman Brother's Bank, las expectativas fueron que el mercado estaba en baja y que el mismo no estaba garantizado por el gobierno, por lo que el $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$ tuvo lugar y ocurrió el mayor colapso, haciendo que la economía se aproxime al 0. Frente a esto, el gobierno salvó la economía una vez más. Muchos economistas afirmaron abiertamente que se debería haber dejado que el mercado limpie, pues eso les enseñaría a los bancos y fondos de inversión la importancia de tomar posiciones menos riesgosas, pero como he probado anteriormente, dejar que el mercado limpie significa que una crisis debe ocurrir, y como probaré

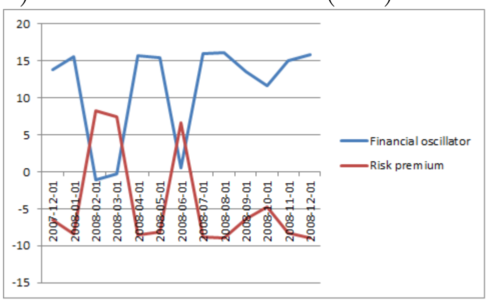
más adelante, esto puede significar el 0 absoluto, i.e. 100 % de desempleo, 0 % producción, 0 % inversiones rentables, concluyendo que dejar que el mercado limpie no es una opción.
Como podemos ver, en el capitalismo moderno, las burbujas son naturales, incluso se han realizado experimentos con estudiantes de grado y MBA y brokers en la Universidad de Berkeley en Estados Unidos realizado por Andrae, Odean y otros[4], y a pesar de que los sujetos conocían o podían calcular el valor de fundamentals de los instrumentos que transaban, generaban burbujas. Las burbujas generan efectos negativos sobre la economía, pues operan como un juego de suma negativa, sin embargo, sus efectos perversos pueden disminuirse si, por ejemplo:
1) Se regula el crédito con parámetros de solvencia.
2) Se regula el riesgo que toman las grandes compañias sobre las que pueda aplicar la cláusula "Too big To fall".
Así muchas otras políticas pueden establecerse.

2.5.2. Oscilador financiero

De las secciones anteriores tenemos, $P_t - 2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}} > 0$, entonces $ln(P_t) > ln(2P_{t-1}\frac{\partial P_{t-1}}{\partial P_{t-2}})$. Como los precios no suelen ser crecientes y quizás ni siquiera continuos, podemos definir el oscilador financiero como,[23]

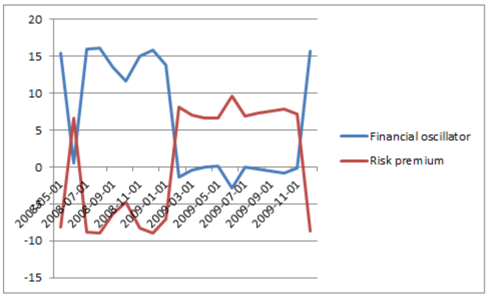
$$\mathfrak{FO}_t = ln(P_t) - sgn(P_t - P_{t-1})ln(2P_{t-1}\frac{\Delta P_{t-1}}{\Delta P_{t-2}}) \tag{2.76}$$

El operador $\mathfrak{FO}_t$ puede ser descompuesto como la suma de dos retornos, el retorno de mercado, $ln(P_t) - sgn(P_t - P_{t-1})ln(P_{t-1})$, y el premio por riesgo, $sgn(P_t - P_{t-1})ln(2\frac{\Delta P_{t-1}}{\Delta P_{t-2}})$. El retorno de mercado mide los incentivos a permanecer en el mercado, mientras que el premio por riesgo mide los incentivos a redoblar la apuesta, i.e. si el precio creció apuesto a que volverá a crecer. Este mecanismo hace que una burbuja sea muy similar a una lotería, donde el premio es vender en la cima, y la pérdida es perder todo el capital invertido fruto del estallido de la burbuja.
Usando los datos obtenidos de la FED de St Louis para el período Mayo 2005 a Octubre 2014 del S&P 500, computamos los valores de nuestro operador $\mathfrak{FO}_t$ para cada momento de tiempo considerando intervalos de decisión mensual, y pude distinguir 3 tipos de patrones en la serie de datos, a saber:
1) Upward rhombus (UR).
2) Downward rhombus (DR).

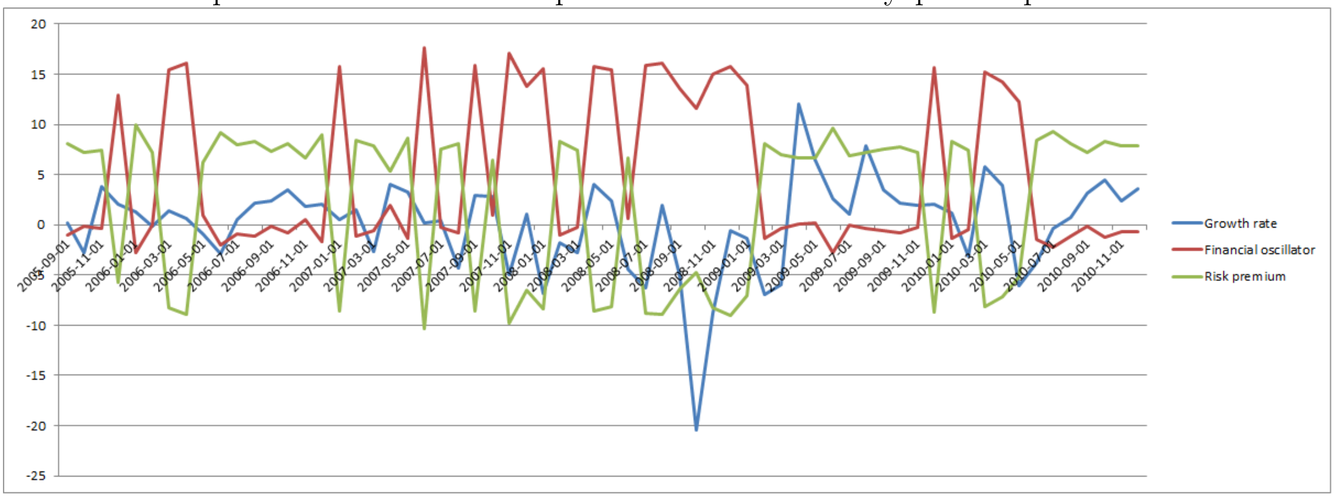


3) Equilibrium Indicator (EI).
4) Recession Indicator (RI).

[23] $\Delta P_t = P_t - P_{t-1}$.



Los UR ocurren cuando el premio por riesgo es positivo, pero $\mathfrak{FO}_t < 0$, por lo que los agentes demandan una prima de riesgo positiva, pero el mercado no está creciendo a una tasa tal que pueda garantizarlo. Frente a la no compensación por parte del mercado los agentes optan por cambiar su estrategia. Algo similar ocurre con los DR, donde el premio por riesgo es negativo, pero $\mathfrak{FO}_t > 0$, lo que implica que el mercado está reforzando tendencias futuras. Los rombos en general muestran cambios de patrones con distintas intensidades, en general, luego de un UR uno puede esperar una suba de precios y luego de un DR uno puede esperar una baja de precios. Las otras figuras son EI, que ocurre cuando la prima de riesgo es positiva y $\mathfrak{FO}_t = 0$ por un tiempo sostenido formando una caja, lo que implica que los agentes demandan un nivel de riesgo y los aumentos de precio logran compensarlo, por lo que refuerza tendencias alcistas o, las genera. En general si uno predice un EI, puede esperar una suba de precios no estable, dado que una suba de precios por efecto burbuja. El último patrón es el RI, que es un indicador de crisis o recesión. Este patrón puede verse cuando la prima de riesgo es negativa y $\mathfrak{FO}_t > 0$ por un tiempo sostenido formando una caja, lo que implica una caída de precios en general abrupta, dado que las apuestas de las personas a bajas de precio son confirmadas reforzando tendencias bajistas.
A continuación graficamos la salida de $\mathfrak{FO}_t$ para el período de tiempo considerado, donde puede verse claramente las figuras. Nótese, además, que utilizando este enfoque es posible predecir la crisis de 2008 en Junio de 2007, por lo que a partir de Junio de 2007 se debería haber tomado posiciones de cobertura para salvar los activos y poder aprovechar la caída.



Capítulo 3

El Problema de Keynes (1929)

3.1. Introducción

El problema de Keynes fué planteado en 1929 bajo la sombra de la Gran Depresión, y se pregunta por qué quiebran los paises, cual es la razón o el link entre el mercado financiero y la economía real, y si es realmente o no necesaria la intervención estatal. Han habido diversos estudios sobre el tema, quizás el más interesante y bien enfocado ha sido el trabajo de Acemoglu y Robinson[2] donde distinguen entre instituciones inclusivas, e instituciones extractivas, y condenan a las extractivas. Sin embargo, si bien el trabajo es interesante y posee ideas inovadoras, no justifica realmente el por qué quiebran las economías.
Por ejemplo onsideremos un país con plenitud de derhechos de propiedad, donde se respete la ley y no haya favoritismos políticos. Donde el poder esté controlado, etc. Esto es básicamente lo que Acemoglu y Robinson definen como institución inclusiva, sobre la que siempre se crece. Esta institución posee un mercado de capitales, donde pueden transarse instrumentos financieros, y como no hay información oculta, se conocen las políticas de tasa de interés, implicando que se cumplen las hipótesis del $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$, por lo que se generará una burbuja, la misma estallará y eso, como provaremos a continuación, evitará el crecimiento. Lo que está plasmado en dicho trabajo es cierto solo para instituciones extractivas, pero nada implica que las inclusivas no estén sujetas a burbujas.

3.2. Supuestos de Base

Los supuestos para resolver el problema de Keynes serán los mismos que los ya establecidos para el problema de Dow-Jones, con algunos agregados, por ejemplo, en Dow-Jones no existían empresas y en la economía real sí existen. Por otro lado, las empresas también pueden realizar inversiones en la bolsa, por lo que son un agente más dentro del sistema. El tipo de juego a desarrollar será un BGWF, donde las foliaciones están dadas por las señales. Las funciones de creencias no cambian, pero solo actúan sobre el sector financiero (no hay especulación sobre el lado real). También asumiremos que por cada período los trabajadores pueden operar solo una cantidad finita de tiempo $\bar{L}$ (24hs por ejemplo), y que las innovaciones de capital no son instantáneas, por lo que el capital disponible para la compra en cada momento de tiempo está acotado, pero la secuencia que genera no lo está.

3.2.1. Función de producción

Consideraremos firmas tradicionales con 2 etapas de la producción, la primera donde la producción, Y_j^t, crece con el aumento de la mano de obra a una tasa decreciente, y la segunda donde, fruto del exceso de trabajadores la producción declina. Asumiremos que una firma no puede expandir su producción infinitamente solo con factor trabajo, sino que requiere de capital para ello, pero asumiremos que el capital le permite expandir la producción a la firma tanto como lo desee, es decir, si Y_j denota la función de producción de la firma j,
1) $\sup_{L\in[0,\bar{L}]} Y_j(L, k_0) \leq C(k_0)$.
2) $\sup_{k>0} Y_j(L, k) = \infty$, $\forall L \in [0, \bar{L}]$.
3) Y_j posee 2 etapas de producción.
4) $Y_j \in C^2([0, \bar{L}] \times \mathbb{R})$ es estrictamente cóncava en la segunda y tercera etapa[1].

[1]Esta condición puede relajarse al igual que en Dow-Jones.

5) $Y_j(0,k) = 0, \forall k \geq 0$.
Las 5 propiedades anteriores son los axiomas de producción, por lo que no constituyen restricción alguna a la teoría.

3.2.2. Préstamos a empresas

Las empresas tienen objetivos empresariales, por lo que buscan obtener beneficios. Estos beneficios pueden ser obtenidos de dos formas,
1) Mediante la actividad principal de la firma.
2) Mediante la inversión en instrumentos financieros.
Ningún empresario racional dejaría pasar un negocio al cual él pudiese acceder y manejar, y le retornara una ganancia aceptable para él, por lo que las actividades especulativas serán consideradas como posibles en la maximización del beneficio. Para ello las firmas deberán pedir prestado dinero. Estos préstamos pueden provenir de dos sectores,
1) De ganancias no distribuidas entre los propietarios.
2) De préstamos del sector bancario.
Las ganancias no distribuidas no generarán costo alguno, pero sí los préstamos bancarios, y la tasa de interés se determinará con oferta y demanda generalizada como se explicará más adelante.

3.2.3. Expectativas

Las expectativas financieras serán las mismas que en Dow-Jones, pero ahora se considerará lo siguiente. En el caso de una crisis financiera, como las empresas han comprado acciones, entonces están expuestas a la quiebra, por lo que el consumidor, como debe tomar la decisión de volver a prestarle capital a las empresas, considerará una creencia $\mathbb{P}^t_{C,i}$ de que las empresas estén contagiadas[2]. Esta medida de probabilidad solo se activará en el caso de que las empresas quiebren, siendo de la forma

$$\mathbb{P}^t_{C,i} = \mathbb{P}_{C,i}(\rho_t) \qquad\qquad \rho_t = \frac{\sum_{s\in\Omega} P_{t-1}Y_s^{t-1}}{\sum_{s\in\mathcal{K}} P_{t-1}Y_s^{t-1}} \tag{3.1}$$

y será una función creciente en ρ_t, dado que este parámetro es la proporción de firmas quebradas en términos del PBI. Esta creencia será de que las empresas estén contagiadas, pero no lo suficiente como para quebrar, por lo tanto, que puedan devolver el capital en caso de que se les preste.
Una vez que haya ocurrido el quiebre los consumidores y empresas tomarán sus decisiones en términos de la reflexividad que hay entre sus decisiones. Las creencias del consumidor sobre la producción es $\mathbb{P}^t_{U,i} = \mathbb{P}_{U,i}(\rho_t, \{\mathbb{P}^t_{Y,j}\}_{j\in\mathcal{K}})$, y las creencias que poseen las empresas sobre las compras de los consumidores es $\mathbb{P}^t_{Y,j} = \mathbb{P}_{Y,j}(\{\mathbb{P}^t_{U,i}\}_{i\mathcal{N}}, \pi^t_j)$

[2]Al igual que antes, esta es una medida vectorial, por lo que está considerando cada empresa por separado. Una posible extensión más realista sería considerar una medida por economía regional o industria.

3.3. Teorema de Keynes

La economía ahora posee tanto un sector real como un sector financiero, y hay interacciones entre ellos. Para poder entender mejor la dinámica detrás de cada sector, comenzaremos el estudio distinguiendo entre agentes y firmas, y estudiando cada uno de sus problemas por separado.

3.3.1. Problema del consumidor

El problema del consumidor es similar al ya tratado, es un agente que desea maximizar su bienestar dada la información pasada y sus expectativas futuras. Ahora como hay bienes producidos por las firmas, la utilidad del consumidor dependerá tanto del dinero que posee, dado que le permite comprar futuros bienes, como de los bienes que efectivamente consume. Denotaremos por b_i^t al vector de bienes que consume el agente i en el momento t. Lo que ocurre es lo siguiente: el agente i desea consumir b_i^t luego de obtservar un precio de mercado P_Y^t. Este agente va al mercado a buscar esa cantidad de bienes, y demanda b_i^t unidades, pero todos los otros agentes también han colocado sus demandas de b_{-i}^t, por lo que el agente i efectivamente se lleva, dado que no hay favoritismos en el mercado, es $\frac{b_i^t(j)}{\sum_{i\in\mathcal{N}} b_i^t(j)}$, y el gasto en el bien j resulta $P_Y^t(j)\frac{b_i^t(j)}{\sum_{i\in\mathcal{N}} b_i^t(j)}$, por lo que el agente en realidad escogerá una proporción de la producción total de la firma, $\delta_{b_i^t(j)}$. Notar que esto no es una demanda Walrassiana, sino reflexiva.
Algo similar ocurre en el mercado del trabajo, donde las empresas anuncian que requieren de trabajadores y están dispuestas a abonar un salario w_j^t, por lo que el consumidor ofrece una cantidad $L_i(j)^t$ de trabajo, pero al igual que él, los demás también ofrecieron su fuerza laboral, por lo que el agente i es contratado solo por $\frac{L_i^t(j)}{\sum_{i\in\mathcal{N}} L_i^t(j)}$ horas laborales, y su remuneración es de $w_j^t\frac{L_i^t(j)}{\sum_{i\in\mathcal{N}} L_i^t(j)}$, por lo que al igual que en el caso de los bienes, se escogerá una proporción del total $\delta_{L_i^t(j)}$.
Esto da origen a la restricción presupuestaria del agente, la cual resulta ser,

$$\langle P_A^t|\Delta_t\alpha_i\rangle + \langle 1|\Delta_t K_i\rangle + \sum_{j\in\mathcal{K}} P_Y^t(j)Y_j^t\delta_{b_i^t(j)} \leq \Delta_t^\tau D_i + \sum_{j\in\mathcal{K}} w_j^t\delta_{L_i^t(j)} + \langle r^t|K_i^t\rangle + \langle \alpha_i^t|\pi^t\rangle \qquad (3.2)$$

donde π^t denota el vector de beneficios de las firmas, y r^t es la tasa a la cual los agentes le prestan dinero a las empresas.
La ecuación anterior es la restricción presupuestaria del agente, donde en el lado izquierdo tenemos los gastos que realiza el agente,
1) $\langle P_A^t|\Delta_t\alpha_i\rangle$, representa el gasto por compra de nuevas acciones.
2) $\langle 1|\Delta_t K_i\rangle$, representa los nuevos préstamos de capital de los agentes a las firmas.
3) $\sum_{j\in\mathcal{K}} P_Y^t(j)Y_j^t\delta_{b_i^t(j)}$, representa el gasto en bienes de consumo.
En el lado derecho, tenemos las fuentes de ingresos, o fuentes de financiación para los gastos anteriores,
1) $\Delta_t^\tau D_i = D_i^t - (1+\tau_{t-1})D_i^{t-1}$, son los nuevos préstamos solicitados netos de devoluciones.
2) $\sum_{j\in\mathcal{K}} w_j^t\delta_{L_i^t(j)}$, son los ingresos por prestar sus servicios en el mercado laboral.
3) $\langle r^t|K_i^t\rangle$, es el interés a cobrar por los prestamos de capital en t.
4) $\langle\alpha_i^t|\pi^t\rangle$, son los dividendos por tenencia de acciones.

3.3.2. Problema de la firma

Las firmas pueden invertir tanto en su actividad principal Y_j^t como en el mercado financiero, por lo que el beneficio de la firma deberá ser la suma de ambos beneficios,

$$\pi^t(j) = \pi_Y^t(j) + \pi_A^t(j) \tag{3.3}$$
$$\pi_Y^t(j) = P_Y^t(j) Y_j^t(L_j^t, K_j^t) - w_j^t L_j^t - r_j^t K_j^t \tag{3.4}$$
$$\pi_A^t(j) = \Delta_t^\tau D_j - \langle P_A^t | \Delta_t \alpha_j \rangle \tag{3.5}$$

Aquí las fuentes de financiación son dos, los agentes, a una tasa r_j^t y los bancos a una tasa τ^t. Para poder resolver el problema de Keynes, necesitamos el siguiente Lema.

Lema 8. *$R_i^t(P^t, w^t, r^t)$ es compacto y convexo.*

Demostración. Es cerrado por la continuidad del producto interno y de las funciones involucradas. La convexidad es inmediata por una cuenta análoga a la realizada en el $\boxed{\text{Lema 4}}$, por lo que solo probaremos acotado.
Sea $\partial_x^s(f) = \frac{\partial^s f}{\partial x^s}$ y $\partial_{x,y}^2(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Del problema de la firma se obtiene,

$$\begin{bmatrix} w_j^t \\ r_j^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_Y^t(j)\partial_{L_j^t} Y_j^t \\ P_Y^t(j)\partial_{K_j^t} Y_j^t \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Considere ahora el operador,

$$G : \mathbb{R}_+^2 \otimes \mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}^2 \tag{3.7}$$
$$[L_j^t, K_j^t] \otimes [P_Y^t(j), w_j^t, r_j^t] \to \begin{bmatrix} P_Y^t(j)\partial_{L_j^t} Y_j^t \\ P_Y^t(j)\partial_{K_j^t} Y_j^t \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_j^t \\ r_j^t \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

Llamando $x_j^t = [L_j^t, K_j^t]$ y $y_j^t = [w_j^t, r_j^t, P_Y^t(j)]$, se tiene que $\partial G = \partial_{x_j^t} G \oplus \partial_{y_j^t} G$. Por el $\boxed{\text{Lema de Young}}$ $\partial^2_{L_j^t, K_j^t} = \partial^2_{K_j^t, L_j^t}$, entonces,

$$\partial_{x_j^t} G = P_Y^t(j)^2 \begin{bmatrix} \partial^2_{L_j^t} & \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \\ \partial^2_{K_j^t, L_j^t} & \partial^2_{K_j^t} \end{bmatrix} Y_j^t \tag{3.9}$$

El determinante de $\partial_{x_j^t} G$ es negativo, pues Y_j^t es estrictamente cóncava en el óptimo, por lo que es inversible, entonces por el $\boxed{\text{Teorema de la Función Implícita}}$, se tiene que:

$$\partial_{P_Y^t(j)} \begin{bmatrix} L_j^t \\ K_j^t \end{bmatrix} = -[\partial_{x_j^t} G]^{-1} \partial_{y_j^t} G(e_1) \tag{3.10}$$
$$= \frac{-1}{(\partial^2_{L_j^t}\partial^2_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t}) Y_j^t} \begin{bmatrix} \partial^2_{K_j^t} & -\partial^2_{K_j^t, L_j^t} \\ -\partial^2_{K_j^t, L_j^t} & \partial^2_{L_j^t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{L_j^t} & -1 & 0 \\ \partial_{K_j^t} & 0 & -1 \end{bmatrix} Y_j^t(e_1) \tag{3.11}$$
$$= \frac{-1}{(\partial^2_{L_j^t}\partial^2_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t}) Y_j^t} \begin{bmatrix} \partial^2_{K_j^t}\partial_{L_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t}\partial_{K_j^t} \\ \partial^2_{L_j^t}\partial_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t}\partial_{L_j^t} \end{bmatrix} Y_j^t \tag{3.12}$$

Considere el tensor entre operadores diferenciales dado por $L \otimes U(f,g) = L(f)U(g)$ y defina $f1_n = f\sum_{s=1}^{n} e_s$,

$$\partial_{P_Y^t(j)} r_j^t = \partial_{K_j^t} Y_j^t + P_Y^t(j)\partial^2_{K_j^t, P_Y^t(j)} Y_j^t \tag{3.13}$$

$$\partial^2_{K_j^t, P_Y^t(j)} Y_j^t = \partial^2_{K_j^t} Y_j^t \partial_{P_Y^t(j)} K_j^t + \partial^2_{K_j^t, L_j^t} Y_j^t \partial_{P_Y^t(j)} L_j^t \tag{3.14}$$

definiendo $\phi_j^t = \frac{-1}{(\partial^2_{L_j^t}\partial^2_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t})Y_j^t}$,

$$\partial_{P_Y^t(j)} r_j^t = \phi_j^t \left[\partial^2_{K_j^t} \otimes (\partial^2_{L_j^t} \otimes \partial_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \otimes \partial_{L_j^t}) + \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \otimes (\partial^2_{K_j^t} \otimes \partial_{L_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \otimes \partial_{K_j^t}) \right] Y_j^t 1_3 \tag{3.15}$$

$$= \phi_j^t (\partial^2_{K_j^t} \otimes \partial^2_{L_j^t} \otimes \partial_{K_j^t} - \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \otimes \partial^2_{K_j^t, L_j^t} \otimes \partial_{K_j^t}) Y_j^t 1_3 \tag{3.16}$$

$$= \phi_j^t \frac{-1}{\phi_j^t} \partial_{K_j^t} Y_j^t \tag{3.17}$$

$$= -\partial_{K_j^t} Y_j^t \tag{3.18}$$

Reemplazando en $\boxed{3.13}$,

$$\partial_{P_Y^t(j)} r_j^t = \partial_{K_j^t}(Y_j^t)(1 - P_Y^t(j)) \tag{3.19}$$

Por Las hipótesis sobre tasa de interés, P_A^t está acotado. L_j^t y K_j^t están acotados por hipótesis. Supongamos P_Y^t no acotado. Como $\partial_{K_j^t} Y_j^t$ es continua sobre un compacto, entonces está acotada, pero por las hipótesis de función de producción se tiene que $\exists P_Y(j) : \partial_{P_Y^t(j)} r_j^t < 0, \forall P_Y^t(j) > P_Y(j)$, entonces r_j^t está acotado, pero $r_j^t = P_Y^t(j)\partial_{K_j^t} Y_j^t \to \infty$ si $P_Y^t(j) \to \infty$. Absurdo, luego P_Y^t acotado, lo que implica r_j^t acotada, y por lo tanto w_j^t acotada, por lo que $R_i^t(P^t, w^t, r^t)$ compacto. $\square$

Teorema 3 (Teorema de Keynes)**.** *Sea $\mathcal{E}$ nuestro juego con economía financiera y real, entonces si:*
H1) Se satisfacen las hipótesis del Teorema de Dow-Jones o sus generalizaciones.
H2) Si T^* denota el momento de explosión de la burbuja, entonces

$$\mathbb{P}^{T^*}_{C,i}(j) < \frac{1}{1 + r_j^{T^*}} \qquad \forall j \in \mathcal{K} \tag{3.20}$$

.

H3) Sean $\mathbb{P}^{T^*}_{U,i}$, $\mathbb{P}^{T^*}_{Y,j}$ las fricciones de reflexividad del consumidor contra la firma y la firma contra el consumidor respectivamente, entonces[3],

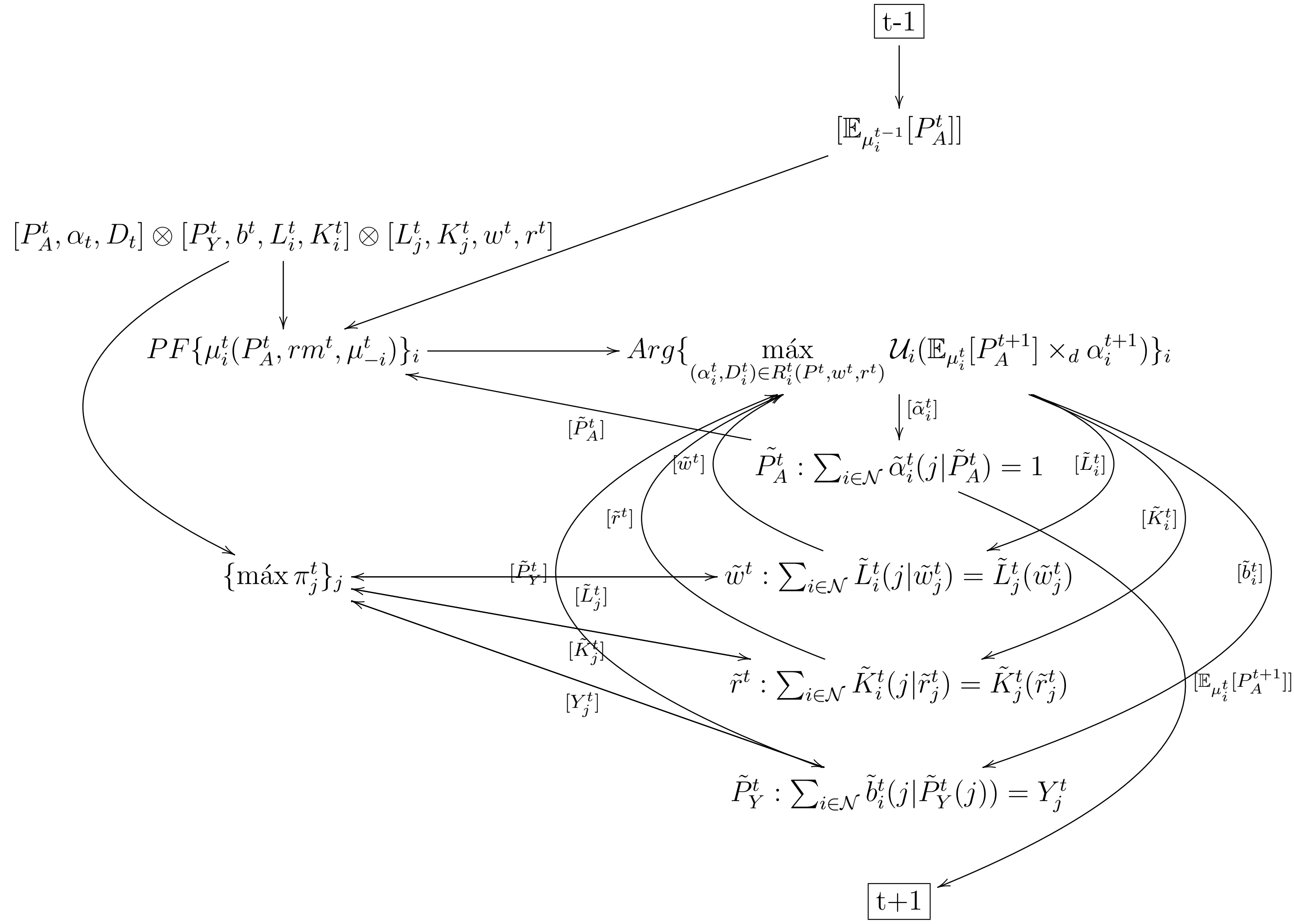
$$\mathbb{P}^{T^*}_{U,i} < \frac{1}{1 + \phi_U(T^*, i)} \qquad \phi_U(T^*, i) = \frac{\mathcal{U}(\sigma_i^+(T^*))}{-\mathcal{U}(0, L_i^{T^*})} \tag{3.21}$$

$$\mathbb{P}^{T^*}_{Y,j} < \frac{1}{\phi_Y(T^*, j)} \qquad \phi_Y(T^*, j) = \frac{P_Y^{T^*}(j) Y_j^{T^*}(L_j^{T^*}, 0)}{w_j^{T^*} L_j^{T^*}} \tag{3.22}$$

Entonces, si el estado es el último garante de la economía, en T^* la economía colapsa al 0 absoluto.

[3] σ^+ denota la estrategia de haber trabajado para las empresas creyendo que le iban a remunerar.

Demostración. Al igual que en el $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$, construiremos un algoritmo que representará el mecanismo que utilizan las personas para tomar las decisiones en el juego, y probaremos que dicho algoritmo posee un punto fijo, y que el conjunto de puntos fijos son los equilibrios de Nash. Al igual que en el Capítulo 2, tenemos el algoritmo:



Sea $\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})}$ la foliación con s agentes Bayesianos.

El juego comienza siendo Walrassiano, y el vector de precios de acciones es $P_A^1 = \pi^1$. Por $\boxed{\text{H1}}$ sabemos que el operador esperanza es continuo, la burbuja solo estalla si el rendimiento neto de permanecer en el mercado es negativo, y que de existir equilibrio se genera una burbuja financiera y la misma estalla. Además, realizando mínimas modificaciones en la primera parte del $\boxed{\text{Teorema de Dow-Jones}}$ es posible probar que la asignación,

$$\Gamma_t : [0, P_t^*] \times [0, \bar{w}^t] \times [0, \bar{r}^t] \longrightarrow \bigcup_{(P,w,r)\in[0,P_t^*]\times[0,\bar{w}^t]\times[0,\bar{r}^t]} R^t(P, w, r) \quad R^t(P, w, r) = \Pi_{i\in\mathcal{N}} R_i^t(P, w, r) \tag{3.23}$$

$$(P, w, r) \longrightarrow R^t(P, w, r) \tag{3.24}$$

es una asignación compacta por el $\boxed{\text{Lema 8}}$, y hemi continua superiormente, si dotamos a la imagen de Γ_t con la topología inducida por la métrica de Hausdorff. De esta forma, podemos definir lo siguiente,

$$\Omega_i^t(P,w,r) = arg \max_{[\alpha_i^t, D_i^t, b_i^t, L_i^t, K_i^t] \in \pi_i \circ \Gamma_t(P,w,r)} \mathcal{U}_i(b_i^t, \mathbb{E}_{\mu_i^t}[m_i^{t+1}]) \tag{3.25}$$

, donde $\mathbb{E}_{\mu_i^t}[m_i^{t+1}]$ es la riqueza esperada del siguiente perído que proviene de la revalorización de las acciones, $\mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_{t+1}] \times_d \alpha_i^{t+1}$, la renta proveniente del capital prestado a las firmas, $\langle 1+r^t | K_i^t \rangle$, y el ahorro, s_i^{t+1}.

$$\Lambda_j^t(P,w,r) = arg \max_{(L_j^t, K_j^t) \in [0,\bar{L}] \times [0,\bar{K}^t]} \pi_j^t \tag{3.26}$$

Por las propiedades de la función de utilidad y los axiomas de producción, se deduce que por el $\boxed{\text{Teorema de Berge}}$, Ω_i^t y Λ_j^t son funciones continuas. Si $\pi_{x|j}$ denota la proyección sobre el elemnto de desción x y luego proyectado en la coordenada j, podemos definir nuestra multi función como sigue:

$$F : \Pi_{t\in\mathbb{N}}[0,P^*] \times [0,\bar{w}^t] \times [0,\bar{r}^t] \longrightarrow \Pi_{t\in\mathbb{N}}[0,P^*] \times [0,\bar{w}^t] \times [0,\bar{r}^t] \tag{3.27}$$

$$\{P^t, w^t, r^r\}_{t=1}^{\infty} \longrightarrow \{F_A^t(P_A^t), F_Y^t(P_Y^t), F_w^t(w^t), F_r^t(r^t)\}_{t=1}^{\infty} \tag{3.28}$$

$$F_A^t(P_A^t) = \{g_{O,A}^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d A_t(P_A^t) + \{g_{D,A}^j(\{\alpha_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (P_A^* - A_t(P_A^t)) \tag{3.29}$$

$$A_t(P_A^t) = arg \max_{P_A^t \in [0,P_A^*]} (-\sum_{j\in\mathcal{K}} (\sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{\alpha|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t) - 1)^2) \tag{3.30}$$

$$g_{O,A}^j(\{\pi_{\alpha|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} \varphi_j^A(d_j^t) & (P^t,w^t,r^t) \notin \Delta_{i,j}^t \\ 1 & (P^t,w^t,r^t) \in \Delta_{i,j}^t \end{cases} \tag{3.31}$$

$$g_{D,A}^j(\{\pi_{\alpha|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} 0 & (P^t,w^t,r^t) \notin \Delta_{i,j}^t \\ \psi_j^A(d_j^t) & (P^t,w^t,r^t) \in \Delta_{i,j}^t \end{cases} \tag{3.32}$$

$$d_j^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{\alpha|j} \circ \Omega_i^t(P,w,r) - 1 \tag{3.33}$$

$$\Delta_{i,j}^t = \{\{d_j^t\}_{j\in\mathcal{K}} \in \mathbb{R}_+\} \tag{3.34}$$

$$F_Y^t(P_Y^t) = \{g_{O,Y}^j(\{b_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d Y_t(P_Y^t) + \{g_{D,Y}^j(\{b_i^t(j)\}_{i\in\mathcal{N}})\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (P_Y^* - Y_t(P_Y^t)) \tag{3.35}$$

$$Y_t(P_Y^t) = arg \max_{P_Y^t \in [0,P_Y^*]} (-\sum_{j\in\mathcal{K}} (\sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{b|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t) - Y_j^t)^2) \tag{3.36}$$

$$g_{O,Y}^j(\{\pi_{b|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} \varphi_j^Y(d_j^t) & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ 1 & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.37}$$

$$g_{D,A}^j(\{\pi_{\mathcal{K}|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} 0 & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ \psi_j^Y(d_j^t) & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.38}$$

$$d_j^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{b|j} \circ \Omega_i^t(P^t,w^t,r^t) - Y_j^t \tag{3.39}$$

$$F_w^t(w^t) = \{g_{O,w}^j(w_j^t)\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d W_t(w^t) + \{g_{D,r}^j(w_j^t)\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (\bar{w}^t - W_t(w^t)) \tag{3.40}$$

$$W_t(w^t) = arg \max_{w^t\in[0,\bar{w}^t]} (-\sum_{j\in\mathcal{K}}(\sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{l|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t) - \pi_{l|j} \circ \Lambda_j^t(P^t, w^t, r^t))^2) \tag{3.41}$$

$$g_{O,w}^j(\{\pi_{l|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\pi_{l|j} \circ \Lambda_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} \varphi_j^w(d_j^t) & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ 1 & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.42}$$

$$g_{D,w}^j(\{\pi_{l|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\pi_{l|j} \circ \Lambda_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} 0 & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ \psi_j^w(d_j^t) & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.43}$$

$$d_j^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{l|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t) - \pi_{l|j} \circ \Lambda_j^t(P^t, w^t, r^t) \tag{3.44}$$

$$F_r^t(r^t) = \{g_{O,r}^j(r_j^t)\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d R_t(r^t) + \{g_{D,r}^j(r_j^t)\}_{j\in\mathcal{K}} \times_d (\bar{r}^t - R_t(r^t)) \tag{3.45}$$

$$R_t(r^t) = arg \max_{r^t\in[0,\bar{r}^t]} (-\sum_{j\in\mathcal{K}}(\sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{k|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t) - \pi_{k|j} \circ \Lambda_j^t(P^t, w^t, r^t))^2) \tag{3.46}$$

$$g_{O,r}^j(\{\pi_{k|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\pi_{k|j} \circ \Lambda_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} \varphi_j^r(d_j^t) & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ 1 & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.47}$$

$$g_{D,r}^j(\{\pi_{k|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}, \{\pi_{lk|j} \circ \Lambda_i^t(P^t, w^t, r^t)\}_{i\in\mathcal{N}}) = \begin{cases} 0 & d_j^t \notin \mathbb{R}_+ \\ \psi_j^r(d_j^t) & d_j^t \in \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{3.48}$$

$$d_j^t = \sum_{i\in\mathcal{N}} \pi_{k|j} \circ \Omega_i^t(P^t, w^t, r^t) - \pi_{k|j} \circ \Lambda_j^t(P^t, w^t, r^t) \tag{3.49}$$

con funciones de peso con las mismas propiedades que en el Teorema de Dow-Jones.
Al igual que en el Teorema de Dow-Jones resulta que F es hemi continuo superiormente, y satisface las hipóstesis del Teorema de Kakutani, por lo que $\exists x \in F(x)$, y

$$\Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_s(G|\mathbb{N})}) = \{x \in F(x)\} \tag{3.50}$$

Por el Teorema de Dow-Jones, $\exists\Omega \subset A$ y T^* tal que $P_A^{T^*}(\Omega) = \{0\}$, por lo que $\rho_{T^*} > 0$ y se activa $\mathbb{P}_{C,i}^{T^*}$. Notar que por H2 no habrá inversión en capital, dado que,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{C,i}^{T^*}}[r_j^{T^*} K_j^{T^*}] = \mathbb{P}_{C,i}^{T^*} r_j^{T^*} K_i^{T^*} - (1 - \mathbb{P}_{C,i}^{T^*}) K_i^{T^*} < 0 \tag{3.51}$$

, lo que genera un aumento de ρ_{T^*}, pues pueden existir firmas que al haber tomado tanto capital prestado, con su producción actual no puedan devolver los préstamos, por lo que quiebran.
Las fricciones de reflexividad se interpretan de la siguiente manera: $\mathbb{P}_{U,i}^{T^*}$ representa la creencia que posee el consumidor de que si presta su fuerza laboral a la firma, entonces la firma producirá y le pagará un salario, con el cual podrá consumir, representando así una apuesta al equilibrio positivo. $\mathbb{P}_{Y,i}^{T^*}$ representa la creencia que posee la firma sobre las creencias del consumidor. Por lo que si la firma cree que el consumidor está convencido de que ella está quebrada y no va a comprar nada, ni brindar su fuerza laboral, la firma no producirá. Veamos que bajo H3

el único equilibrio es el 0 absoluto. Supongamos que no es así, y es posible continuar con un equilibrio positivo. Denotaremos por $(0, >, 0)$ al equilibrio que posee precios 0, trabajo positivo y capital 0, y demas posibles combinaciones de este vector tendrán la misma interpretación.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T^*}_{U,i}}[\mathcal{U}_i] = \mathbb{P}^{T^*}_{U,i}\mathcal{U}_i(>, >, 0) + (1 - \mathbb{P}^{T^*}_{U,i})\mathcal{U}_i(0, >, 0) < 0 \tag{3.52}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T^*}_{Y,j}}[\pi^t_j] = \mathbb{P}^{T^*}_{Y,j}\pi^t_j(>, >, 0) + (1 - \mathbb{P}^{T^*}_{Y,j})\pi^t_j(0, >, 0) < 0 \tag{3.53}$$

Por lo que los consumidores creen que las firmas restantes están quebradas, y las firmas creen que los consumidores creen que ellas están quebradas, entonces no producen. Al no poder las firmas pagar sus deudas, deben declararse en quiebra, por lo que el precio de sus acciones es 0, lo que genera el 0 absoluto en la foliación. Al igual que antes, el 0 absoluto se dará en,

$$T^* = T^* = \text{mín}(\text{ínf}\{\phi^*_T(s) : s \in \mathcal{N}\}; \sum_{i=1}^{N} t_{\theta_i}) \tag{3.54}$$

Notar que frente a esto, los agentes Bayesianos decidieron ahorrar el 100 %, eso genera utilidad positiva pues al ser el estado el último garante de la economía, al llegar al 0 absoluto hay una promesa de que el estado salve las empresas, por lo que ese dinero ahorrado servirá para comprar más bienes en el futuro, implicando que el equilibrio de Nash donde los agentes ahorran domina estríctamente al equilibrio donde no lo hacen. □

Corolario 4. *Bajo las hipótesis del* $\boxed{\textit{Teorema de Keynes}}$*, toda economía con sector financiero y real es un juego de suma negativa.*

Corolario 5. *Sin intervención del estado en la economía una burbuja se crea, y su estallido puede derivar en el colapso de la economía.*

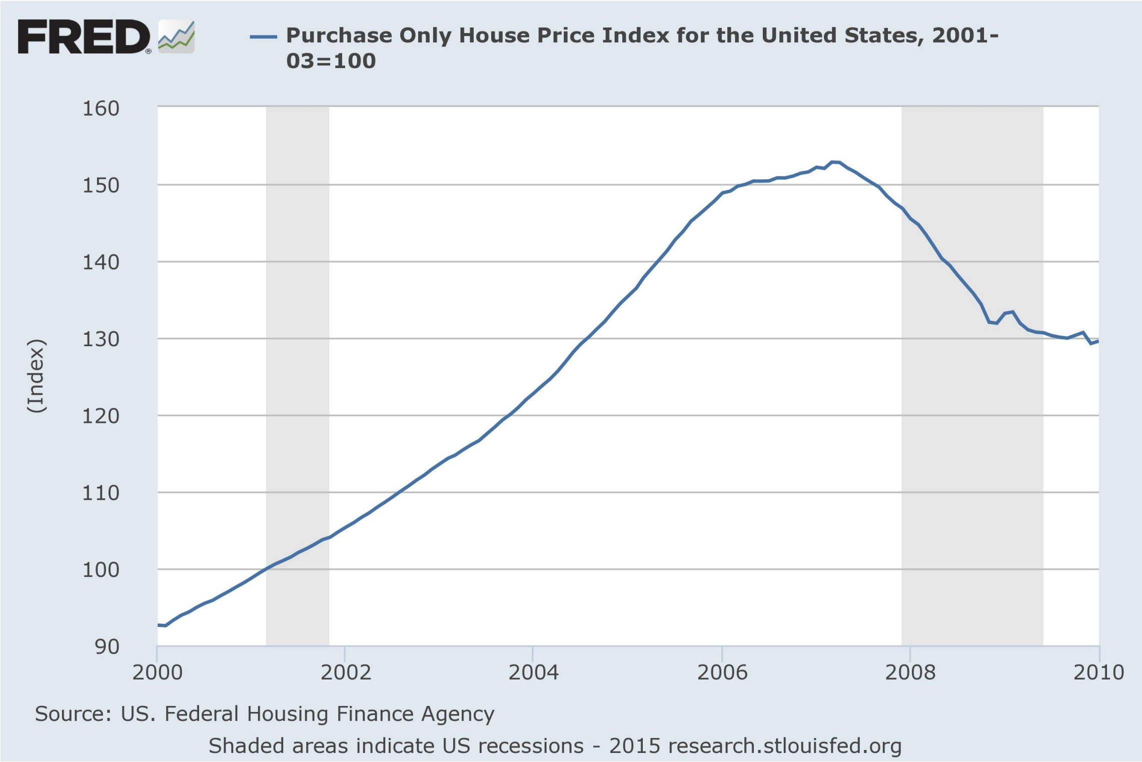
Corolario 6. *Bajo las hipótesis del* $\boxed{\textit{Teorema de Keynes}}$ *el desempleo aumenta antes de una crisis.*

Demostración. Esto es una consecuencia de que en $T^* - 1$ los Bayesianos dejan de trabajar, por lo que aparece desempleo voluntario. □

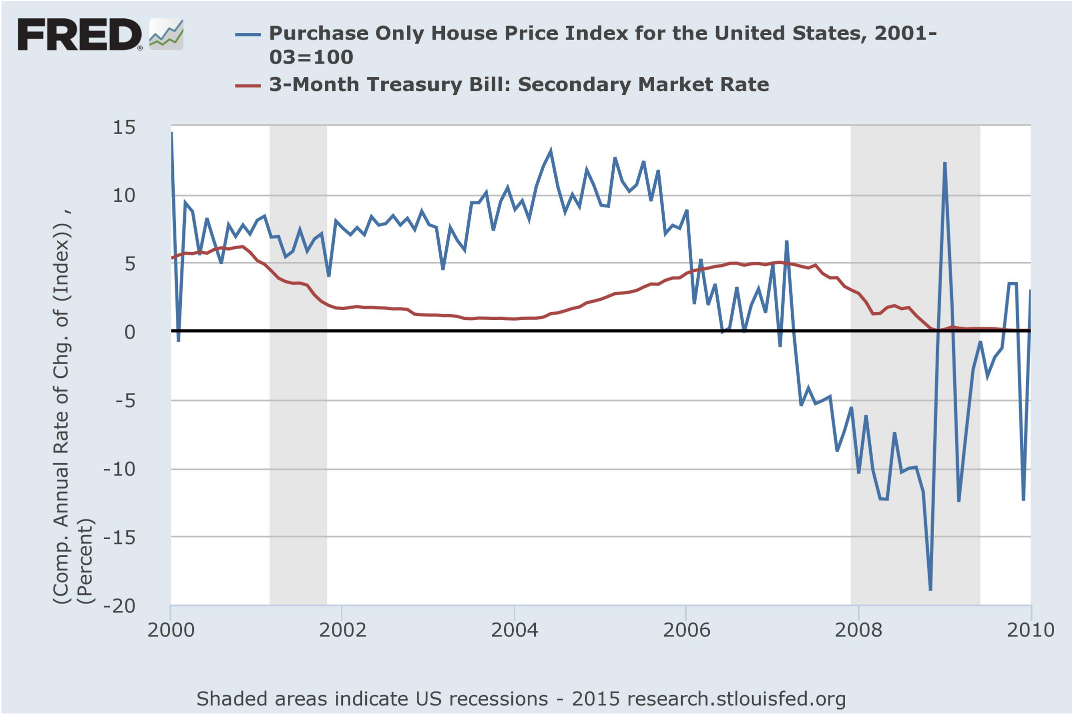
El corolario anterior puede interpretarse como una disminución de las inversiones antes de la crisis.

3.4. Crisis sub prime (2008)

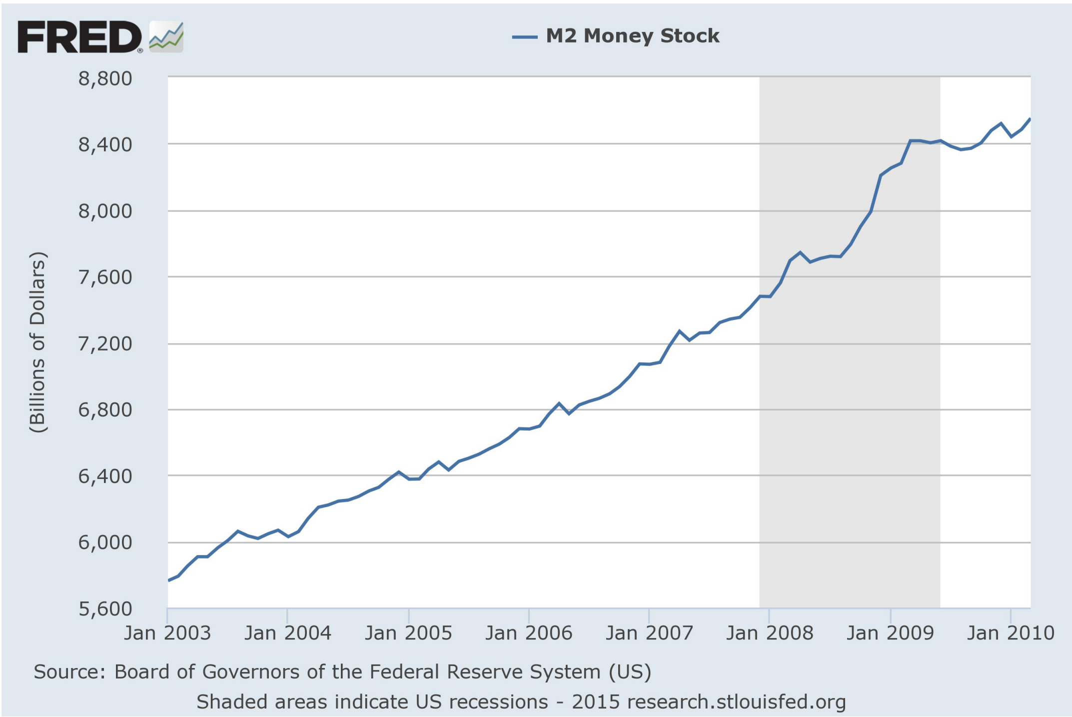
En los inicios de 2008 se desató una de las más grandes crisis financieras de la historia, solo superada por la Gran Depresıón de 1929. Esta crisis comienza con el estallido de la burbuja dot-com, tras la cual, la FED debe disminuir drásticamente la tasa de interés para reactivar la economía luego de garantizar el sistema una vez más. Tras el estallido de una burbuja tecnológica, los inversores buscaron inversiones más seguras, y se fueron a las inversiones en real estate. La baja tasa de interés generó muchas facilidades para el crédito, volviendolo barato y accesible. Frente a esto, las personas comenzaron a utilizar las facilidades de crédito, lo que reactivó la economía. Frente a las demandas de viviendas, se genera un exceso de demanda, lo que hace aumentar el precio de los viviendas, como puede observarse en la siguiente gráfica



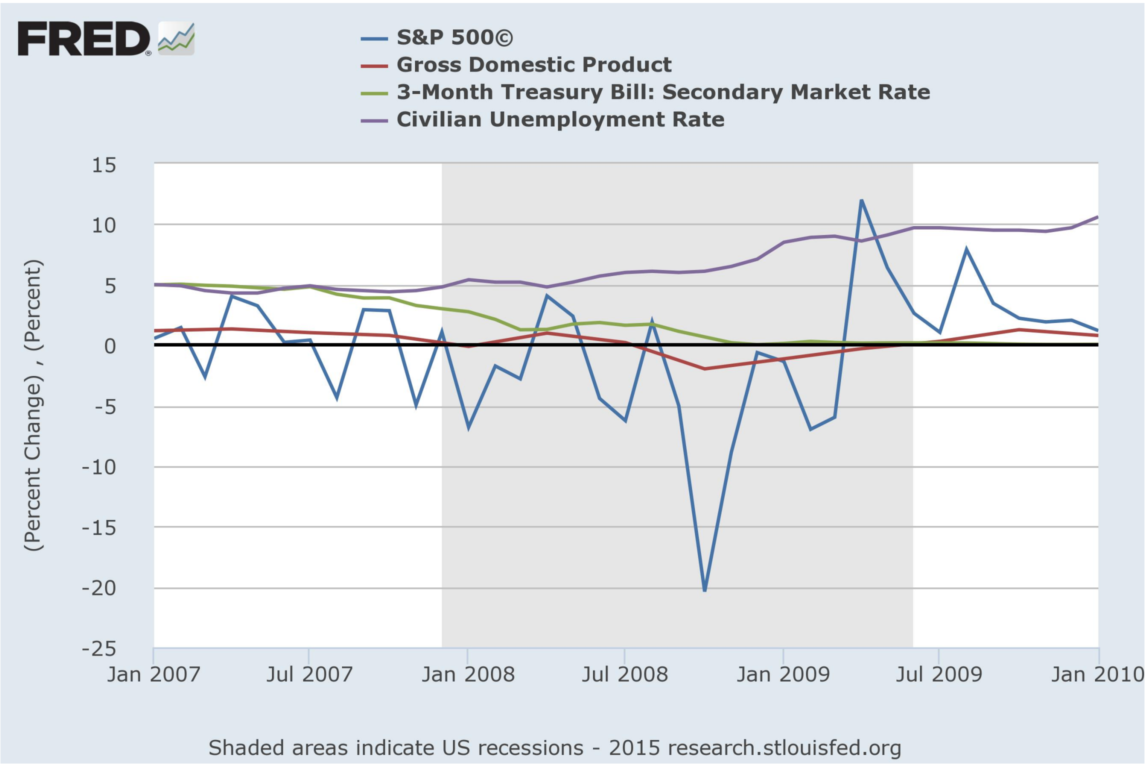
[Fuente: St. Louis FED]
Este aumento de precios generado por un aumento del crédito hizo que los bancos comenzaran a tomar posiciones riesgosas y a privilegiar las actividades expeculativas sin considerar los riesgos en los que se incurría, y aparecen los créditos NINJA (No Income, No Job at All), otorgados a personas sin posibilidad de pagarlos. Frente a este nivel de especulación, los bancos, como cualquier entidad financiera que buscara maximizar sus beneficios futuros, deciden eliminar el riesgo de esas operaciones. Para poder hacer esto crean los conocidos CDO's. Un CDO 1 consiste en tomar un conjunto de préstamos emitidos sobre los que se tiene derhecho a cobrar, y venderlos en el mercado bursátil. De esta forma, el banco obtiene un monto inferior a lo que cobraría si todos los créditos fueran efectivizados por los agentes, pero traspasa el riesgo de incobrabilidad a un tercero. Este tercero puede construir un CDO 2, que consiste en tomar un conjunto de CDO 1, y venderlos todos como un bloque en el mercado bursátil. De esta forma, lo que terminó ocurriendo es que los CDO comenzaron a llegar a niveles de alta agregación donde ya era imposible evaluar efectivamente los niveles de riesgo, por lo que sus precios eran especulación de alto nivel.
Como habíamos notado en la sección de Dow-Jones, la tasa de interés comienza a subir, lo que presiona sobre los precios del sistema bursátil, pero como vimos, el oscilador financiero garantizaba las primas de riesgo antes del estallido, lo que convalidó las creencias alcistas. Por otro lado, la gente fijaba sus expectativas en función de la tasa que el banco les cobraba, por lo que se satisfacían las hipóstesis del Teorema de Dow-Jones, y la burbuja financiera se crea sobre los CDO's de todos los niveles de agregación.



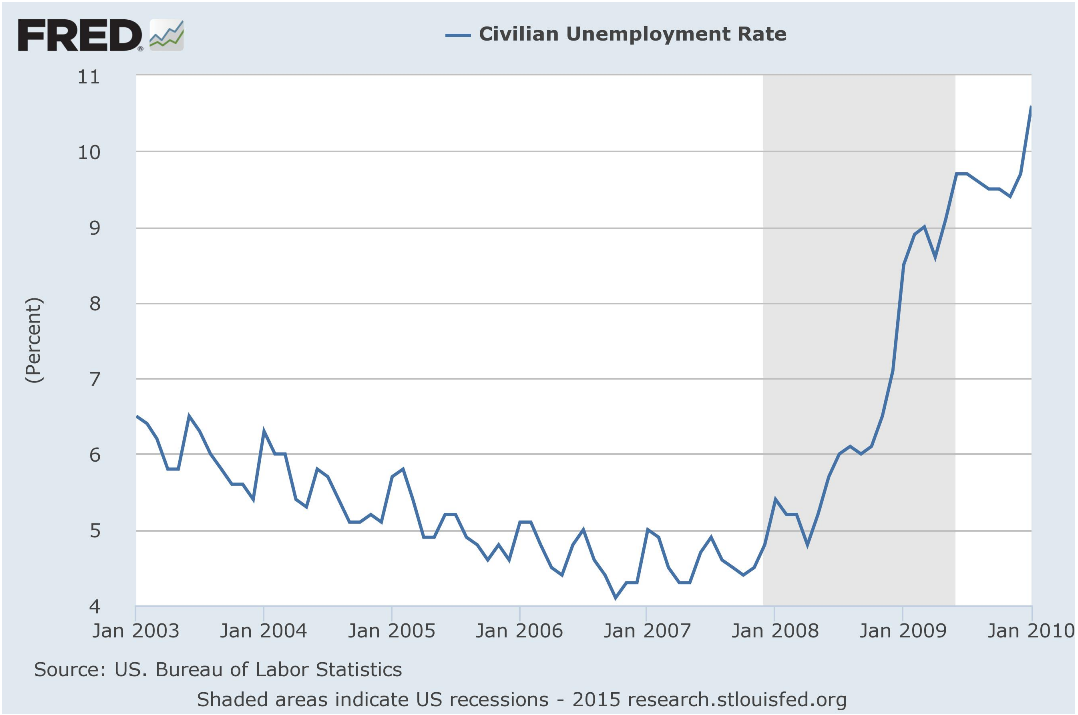
[Fuente: St. Louis FED]
Como puede verse, el rendimiento de los CDO's superaba ámpliamente al rendimiento de los instrumentos AAA (con mayor probabilidad de repago). Estos aumentos de precios presionaban las demandas por saldos monetarios, por lo que la demanda de dinero aumentaba, como puede verse en el gráfico siguiente. Por otro lado, como puede apreciarse, los aumentos de la tasa de interés comenzaron a presionar sobre el rendimiento de los CDO's, haciendolo caer, y la crisis comienza con una caida del rendimiento neto sostenida en el tiempo como lo predice el Teorema de Dow-Jones,



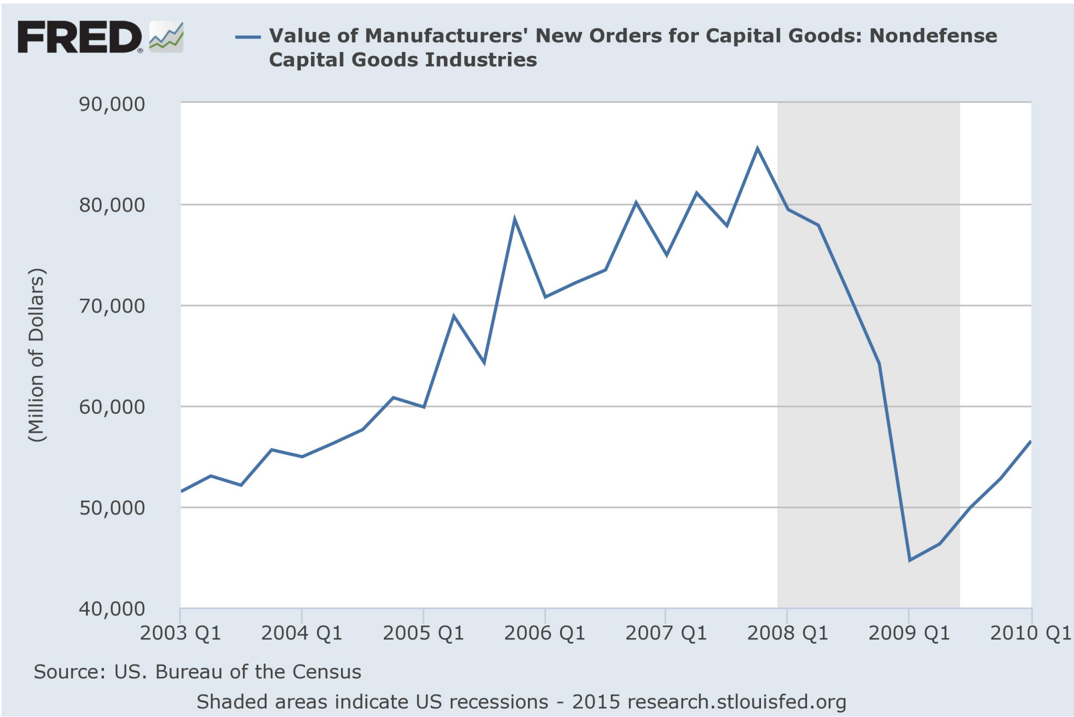
[Fuente: St. Louis FED]
Notar que la hipótesis de que los saldos monetarios para realizar transacciones no estén acotados pareciera verificarse, dado que la cantidad M2 parece ser I(1). Con un PBI creciente, y una economía reactivada, pareciera que la crisis de 2000 había terminado, pero la economía crecía por efecto burbuja, por lo que cuando la tasa de interés se volvió insostenible, la burbuja estalló,



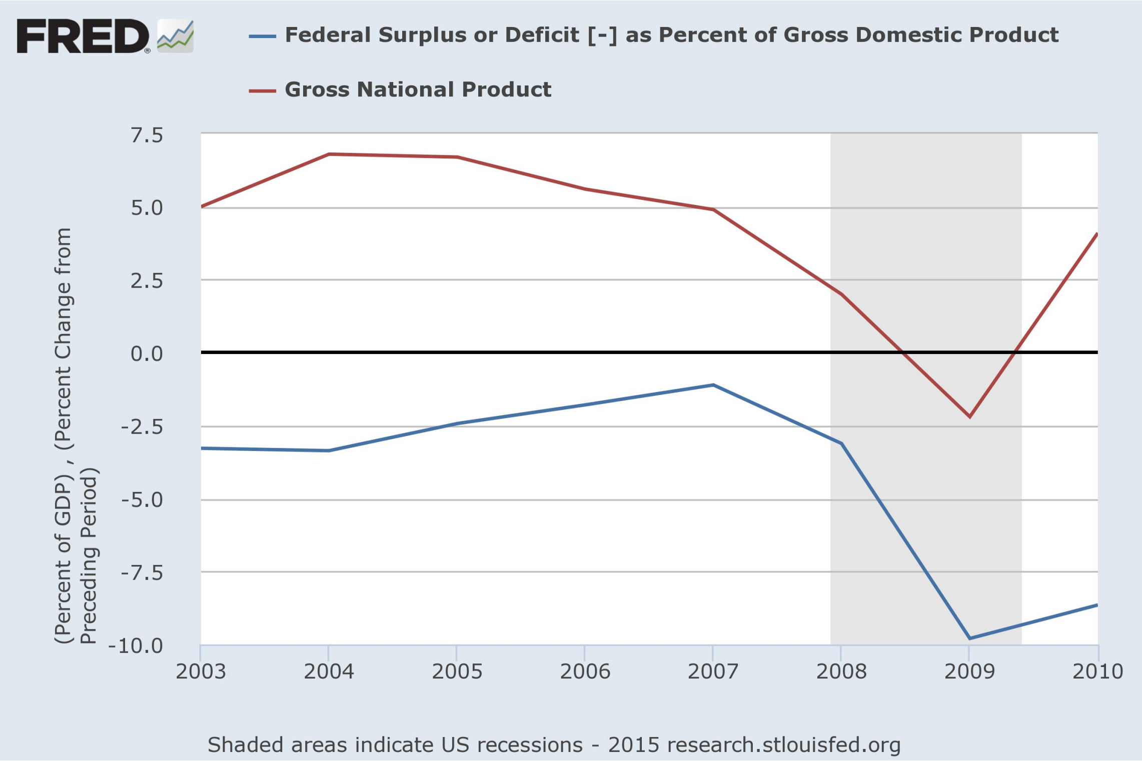
[Fuente: St. Louis FED]
La economía creció, hasta mediados de 2007, donde podemos ver una desaceleración de la economía, lo cual es consistente con la acción de los agentes Bayesianos de disminuir las inversiones en la economía (esto podremos verlo con el gráfico de evolución de inversiones en bienes de capital). Con la desaceleración de la economía, y una tasa de interés insostenible, se desata la crisis como lo predecía nuestro oscilador financiero, y vemos la caída inicial de S&P 500, sin embargo, es recién hasta la quiebra del Lehman Brother's Bank que tenemos la gran caída, dado que como explicamos anteriormente, esto generó expectativas de que el mercado era libre y sin garantía estatal, por lo que es posible aplicar el Teorema de Keynes y la economía se dirige al 0 absoluto. Como lo predice el teorema, la tasa de desempleo aumentó, fruto de la quiebra de firmas.



[Fuente: St. Louis FED]
El razonamiento realizado en la demostración del teorema principal de este capítulo puede aplicarse a esta crisis. Frente al desempleo, se genera fricción entre los consumidores y empresas, y tenemos la caída del PBI. Frente a la caída del PBI, y la inminente crisis (la irreversibilidad está garantizada por el $\boxed{\text{Teorema de Keynes}}$), tenemos una caída de la inversión en bienes de capital.



[Fuente: St. Louis FED]
Esta caida en la inversión de bienes de capital genera limitaciones en la producción por parte de las empresas, por lo que refuerza las expectativas recesivas.
Frente a este panorama, el gobierno debe intervenir para salvar la economía. Si bien el hhecho que el gobierno realizó salvatajes es mundialmente conocido, pero podemos observarlo mediante un aumento del déficit fiscal en este período,

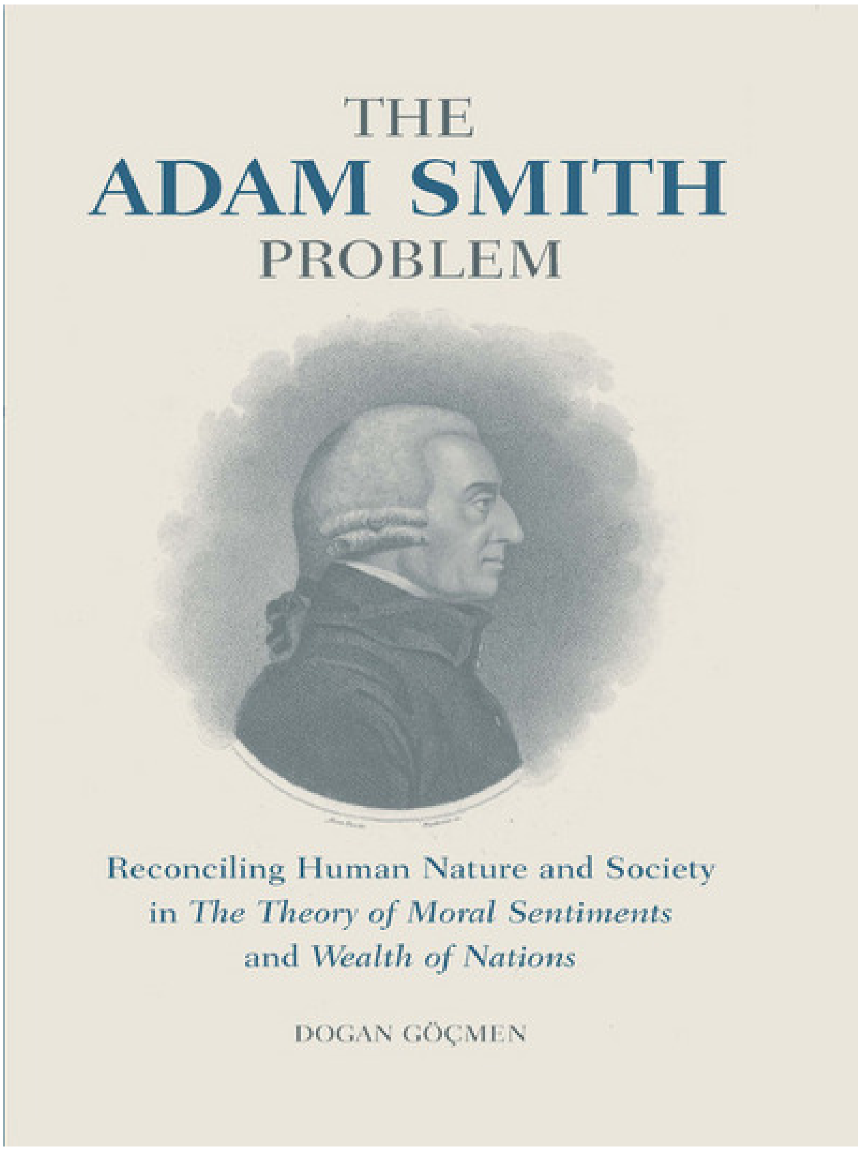


[Fuente: St. Louis FED]
Este salvatage, garantizó los precios del sistema, y evitó que la economía colapse al 0 absoluto. Observando los gráficos, puede inferirse que de no haber sido así, la economía colapsaba[4].
Como podemos ver, las predicciones realizadas por el teorema son consistentes con las observaciones en la realidad, y si se realiza el mismo análisis en las crisis como la Gran Depresión o la crisis de 2000, o las demás recesiones en las que es posible determinar el instrumento generador de la burbuja, las conclusiones serán las mismas.

[4]Sería interesante que se realice un extudio empírico sobre este tema, para poder darle sustento empírico a esta teoría.

Capítulo 4

El problema de Smith (1776)



4.1. Introducción

En su obra "La riqueza de las Naciones"[24], Adam Smith propone que las decisiones que toman los agentes tienen un carácter global, donde se promueve el crecimiento economíco a través de la división del trabajo, y las correcciones se realizan mediante una "Mano Invisible". El estudio de la mano invisible de Adam Smith fue abordado por varios economistas, y Walrass concluyó que la ley de oferta y demanda está determinada por el operador,

$$P_{t+1} = \max(0, P_t + f(P_t)) \tag{4.1}$$

donde f posee el mismo signo que el exceso de demanda del mercado. Sin embargo, este operador requiere ser diagonalmente dominando en su Jacobiano para estar bien definido, lo que va en contra de lo que uno observa en la realidad, dado que las variaciones en los mercados generan impactos en otros. Esta es la base para afirmar que la Ley de Walrass no es correcta, además que bajo esta ley una burbuja jamás estalla. Por lo que surge el problema de quién es entonces este operador, y qué leyes rigen su evolución.
Si recordamos las demostraciones de los teoremas anteriores, principalmente el último, demostramos que, si F es el operador construido en los teoremas anteriores,

$$\Sigma(\mathcal{H}_{\Theta_t(G|\mathbb{N})}) = \{x \in F(x)\} \tag{4.2}$$

Por lo que las decisiones del juego están regidas por los puntos fijos de F. Por otro lado, como se notó anteriormente, F satisface la Ley de Oferta y Demanda, por lo que es un proceso de ajuste, sin embargo, puede estancarse. La posibilidad del estancamiento del operador de ajuste F fué considerada por los Keynesianos, lo que nos acerca más a poder afirmar que F es una aproximación de la mano invisible. Por otro lado, se afirma que los agentes no pueden tomar decisiones observando a la economía como un todo, dado que hay información que ellos no poseen, y la teoría de la mano invisible afirma que el operador guiará a los agentes hacia el equilibrio, incluso en condiciones de ausencia de información. Como probamos en el Teorema de Keynes el operador F realiza esta acción, y es fácil de ver en el algoritmo al comienzo de la prueba. Entonces se concluye que el operador F es una aproximación de la mano invisible, y solo podrá afirmarse que el mismo es efectivamente la mano, si puede probarse empíricamente que F aproxima los equilibrios observados[1].
Lamentablemente este operador tiene efectos no considerados en los trabajos de Smith, como por ejemplo, que el juego es de suma negativa. La razón de ello es que, en la actualidad, los agentes no pueden operar por sí mismos, y requieren de la ayuda de los demás, ya sea de forma directa o indirecta. Esto los lleva a colocarse en la posición del otro, y frente a esto tomar una decisión, pero esta decisión tiene como fundamento último su bienestar personal y el incremento de su riqueza. Este egoísmo es lo que genera los altos niveles de especulación, dado que si un agente conoce el verdadero valor de fundamentals, pero es el único que lo sabe, entonces por más que se sobrepase dicho valor, él no querrá vender, dado que se aprovechará de su información privilegiada para tener ganancias por encima del valor de fundamentals, y el costo de la caida será absorbido por los no informados.
Esto lleva a un sistema económico, donde los agentes tratan de emitir señales confusas o falsas, y los que realmente poseen información se aprovechan de ella como vimos que los Bayesianos

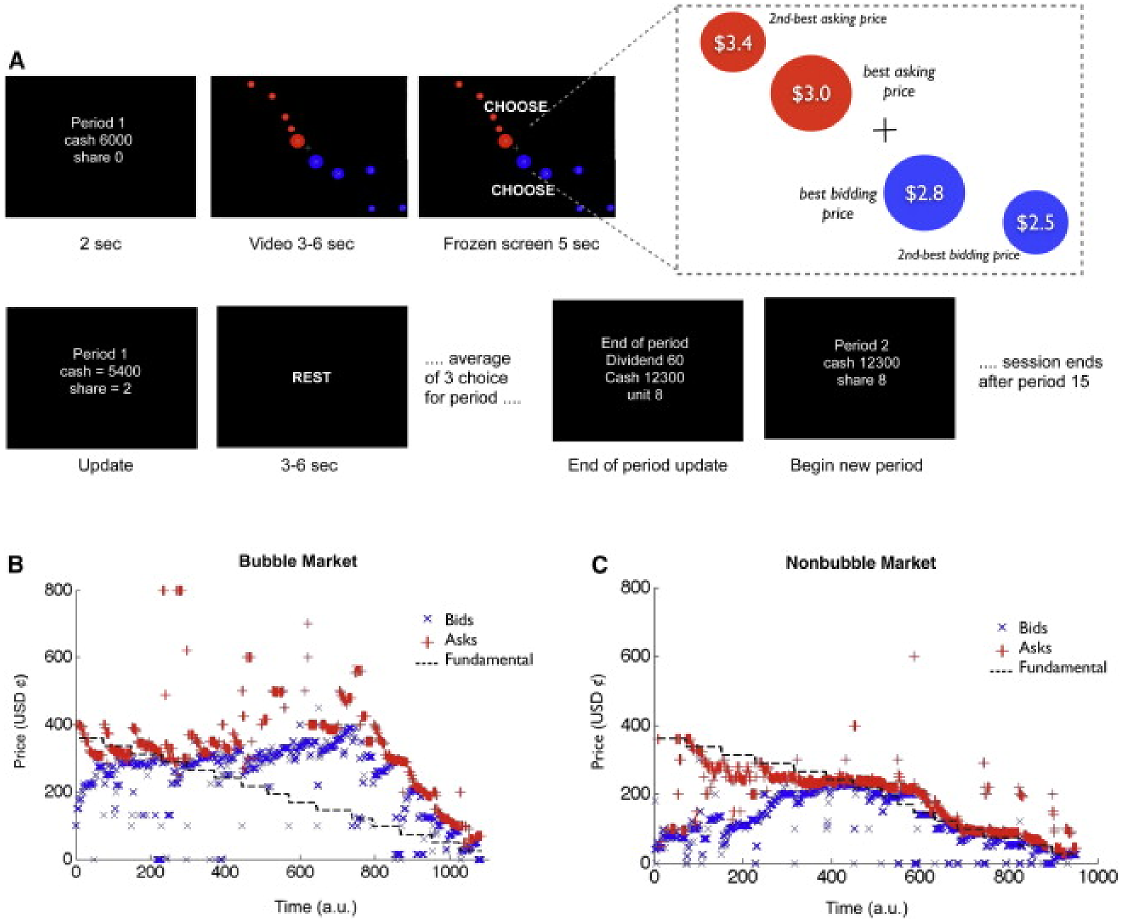
[1] Realizar este estudio sería muy interesante, dado que de verificarse, F sería la mano invisible de Adam Smith, y podría realizarse política económica mucho más prescisa que la de ahora.

se aprovechan de los Walrassianos para crear la burbuja y quedarse con todo el beneficio del mercado, mientras que los desinformados absorben todo el costo de la crisis. Esto dice que los agentes se mueven por su ego y avaricia, más que por decisiones óptimas que provienen de una maximización ciega como propone el paradigma actual. Tanto en “La Riqueza de las Naciones”, como en la “Teoría de los Sentimientos Morales”[23], Adam Smith muestra su visión del mundo y toca estos temas, y muchas de las conclusiones obtenidas en los trabajos son resultados de lo probado hasta ahora, como por ejemplo:
1) Los agentes están dispuestos a jugar una lotería donde la probabilidad de ganar es alta y las pérdidas pueden ser totales (ride the bubble), muchas veces guiados por la codicia y no considerar su aversión al riesgo si el premio es lo suficientemente alto.
2) Los agentes cooperan entre sí para poder lograr sus objetivos, pero los más informados utilizan a los menos informados para ganar a costa de ellos.
La pregunta ahora es la siguiente: En caso que F sea realmente la mano invisible, las economías, ¿están condenadas por la codicia y avaricia de las personas?, ¿la falta de altruismo de los agentes, y el siempre actuar teniendo como fin último nuestro propio beneficio realmente generará crisis capaces de destruir paises? La respuesta a estos interrogantes no es tan sencilla como muchos se han atrevido a responder durante la historia, responsabilizando a los agentes por sus propias acciones, pero la verdad es que si una acción es de equilibrio, ¿por qué ignorarla? Desde mi perspectiva, y considerando los resultados anteriores, las relaciones personales generarán crisis sistemáticas como las que han ocurrido durante toda la historia, pero las mismas pueden evitarse si se realizan intervenciones adecuadas. En el Teorema de Dow-Jones y en el Teorema de Keynes se dan condiciones para la explosión de las burbujas y los quiebres que pueden ser evitadas por una política de revelación de preferencias y una creíble política de lucha contra la especulación, mediante controles de riesgo y limitación de créditos. Un control integral es necesario, dado que una burbuja puede generarse en cualquier instrumento lo suficientemente atractivo. En experimentos realizados con personas reales en la Universidad de Berkeley, donde los agentes podían calcular los fundamentals, las burbujas se generaban de la misma forma, y las pérdidas económicas eran grandes, por lo que una política para combatir la especulación debe estar en la agenda de todo policy maker.
Para terminar este capítulo, consideramos la siguiente pregunta: Desde el gran quiebre en 1929, hubo un cambio de paradigma, y se consideró la intervención de los gobiernos en la economía, pero no se han eliminado las burbujas, y los índices siempre se han recuperado a pesar de las grandes caídas. El S&P 500 hoy ya superó con creces la burbuja de 2007, y todas las anteriores. ¿Será acaso que la intervención del estado, al no ser suficiente para detener las burbujas, lo único que ha hhecho es retrasar un estallido mayor?. ¿Será que en realidad estamos en una super burbuja generada por la acumulación de todas las anteriores?.

4.2. Análisis empírico

En economía ha habido una tradición de no contrastar las teorías con la realidad, quizás por el miedo que ello puede generar. En esta sección se contrastará nuestra teoría con la realidad, recurriendo a un estudio reciente sobre neuroeconomía, dado que los estudios de psicología de la Universidad de Berkeley ya fueron citados, al igual que las series de tiempo extraídas de la FED donde se observan los resultados de nuestra teoría. Como el lector ya habrá notado, nuestra teoría no tiene una validez universal, en el sentido que no todas las crisis serán exactamente

como planteamos en este trabajo, dada la complejidad de los instrumentos financieros que pueden construirse, pero sin embargo, puede verificarse en la crisis sub prime, dot com y la Gran Depresión, entre otras, que el Teorema de Dow-Jones es válido para el instrumento generador de la burbuja, mietras que Teorema de Keynes, es válido para estudiar la evolución de la recesión y justificar la intervención estatal.
El trabajo de neuroeconomía sobre el que nos basamos fue realizado por Benedetto De Martino, John P. O'Doherty y otros [8], donde se busca comprender las reacciones de los agentes frente a situaciones de burbuja, donde su hipótesis es que los incrementos de precios observados en un mercado que se encuentra en una burbuja están asociados a la representación neuronal de incrementos de valores en la corteza prefrontal ventromedial (vmPFC) que produce una mayor susceptibilidad a la compra de activos cuyos precios exceden sus valores de fundamentals. En particular, proponen que la parte más dorsal de la corteza prefonrtal (dmPFC), región que según la teoría ToM representa el estado mental de los individuos, está relacionada en la actualización de datos en la vmPFC, estimulando la formación de burbujas.
La metodología del experimento es la usual en estudios de neurociencia aplicada a las finanzas, donde los agentes comienzan con un portfolio y ganan dinero según sus acciones. A continuación presentamos los resultados de las transacciones, los cuales son similares a los ya obtenidos en los experimentos de la Universidad de Berkeley.

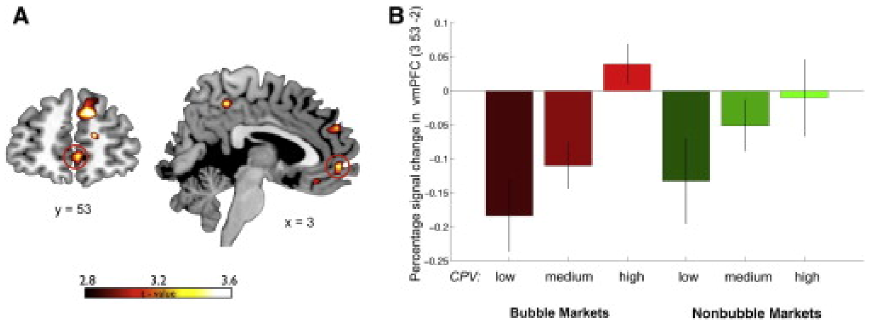


[Fuente: cell.com]
Como puede verse, tenemos una situación donde los agentes generan una burbuja, y una situación donde los agentes operan solo sobre fundamentals. Para poder testear la hipótesis crean

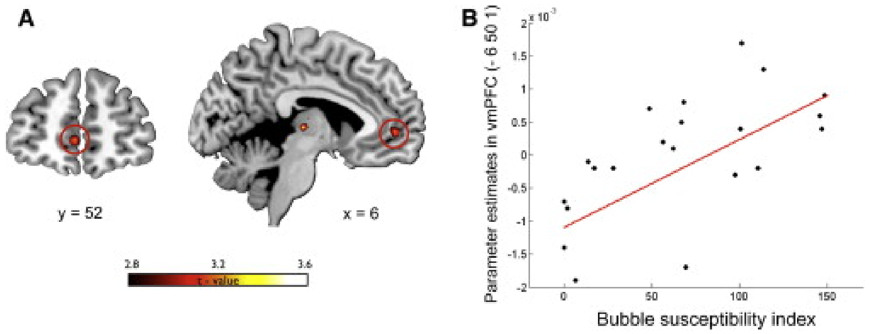
una variable llamada valor actual del portfolio (CVP), donde

$$CVP_t = dinero_t + acciones_t \times fundamental - value_t \tag{4.3}$$

Esta variable se utilizó como regresor para estudiar los cambios en la vmPFC en situaciones de burbuja y no burbuja, logrando un resultado significativo con diferentes picos de interacción y estadísticamente significativos, como puede verse en la siguiente gráfica,

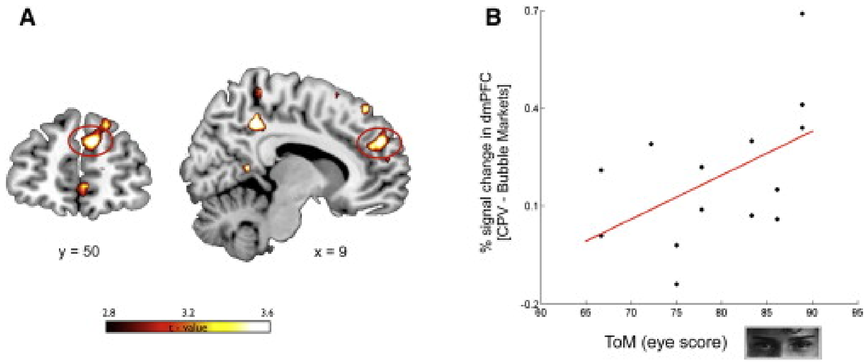


[Fuente: cell.com]
y los autores logran mostrar que la actividad en la vmPFC también está correlacionada con las decisiones de comprar acciones por debajo de su valor de fundamentals, lo que se conoce como riding the bubble si dicho comportamiento continúa luego de pasado el valor de fundamental. De los estudios también llegan a la conclusión que dejarse llevar por la burbuja es un comportamiento sub óptimo. Este resultado también lo hemos obtenido dentro de nuestra teoría cuando afirmamos que las burbujas son un juego de suma negativa.



[Fuente: cell.com]
Sin embargo, es importante notar que en la imagen anterior, el sistema límbico se activó durante el estudio, por lo que seguir las burbujas tiene un efecto emocional.
Inmediatamente luego de esto, estudian la ToM, donde hipotetizan que durante una burbuja los agentes infieren sobre las intenciones y estados mentales de sus contrincantes para actualizar los valores de la representación neuronal. De poder verificar esto, tendríamos evidencia de que el supuesto sobre las creencias de los agentes, donde las μ_i dependían tanto de los datos observados como sobre las creencias que ellos poseían sobre las posibles acciones de los demás agentes tratando de adelantarse al equilibrio (Teoría de Expectativas Racionales) y al mismo tiempo ganar dinero. Para verificar esto, los autores estudiaron la dmPFC, por la existencia de evidencia empírica de que esta región juega un rol principal en la habilidad para realizar inferencias sobre otros agentes y el pensamiento estratégico.
Utilizando rangos de Spearman los autores lograron hallar evidencia de correlación entre el

cambio porcentual de la dmPFC y el CPV en situaciones de burbuja, al igual que correlación con el índice de ToM,



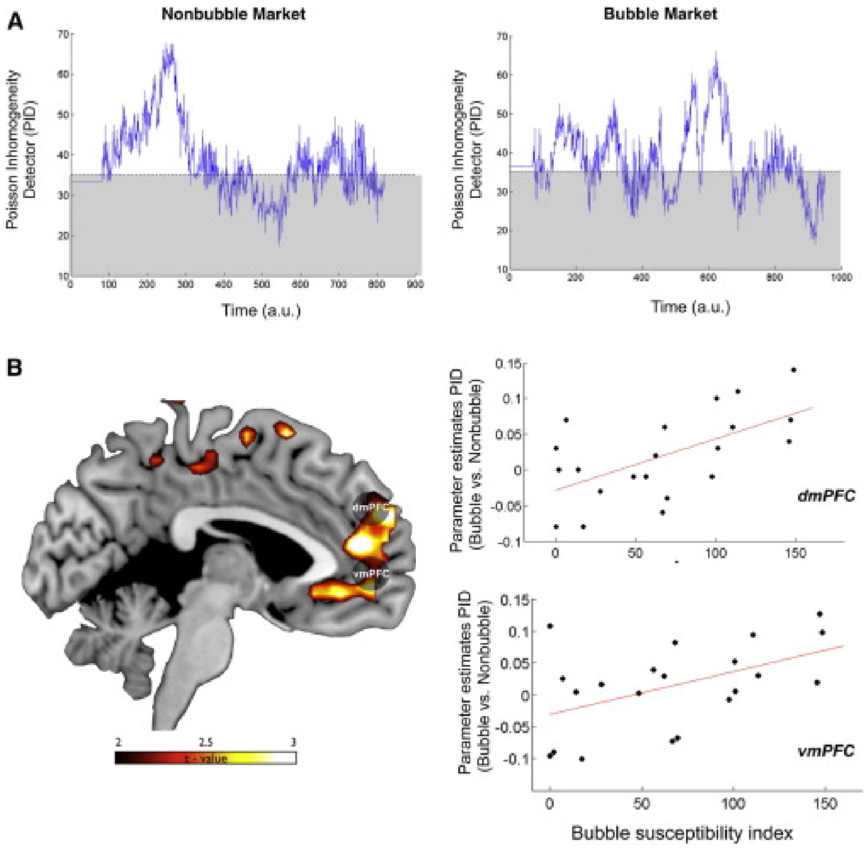
[Fuente: cell.com]
mientras que no se logró hallar esta correlación en situaciones de no burbuja, por lo que los autores concluyeron que los resultados refuerzan su hipótesis inicial, lo que valida nuestro supuesto de la relación funcional entre las creencias de los agentes.
Luego se estudian los cambios en la información que poseen los sujetos de prueba, lo que en términos de nuestra teoría sería la validez del supuesto sobre $\Theta(G)$. Para verificar esta hipótesis construyen un estadístico que mide cambios estructurales en la homogeneidad de Poisson durante el intercambio, asumiendo que si hay nueva información disponible, entonces las distribuciones no pueden quedar invariantes[2]. Llamaron a esto, la métrica de detección de inhomogeneidad de Poisson (PID),

$$y_i = \left(x_i + \frac{3}{8}\right)^{0,5} \tag{4.4}$$

$$PID = 4\sum_{i=1}^{m}(y_i - \bar{Y})^2 \tag{4.5}$$

Los autores utilizaron la PID dentro de un modelo lineal general para estudiar si la actividad en el vmPFC y dmPFC se relacionaba con la métrica en situaciones de burbuja y no burbuja. Los resultados fueron estadísticamente significativos para ambas regiones,

[2]En nuestro caso, cuando un nuevo agente Bayesiano se incorpora, el conjunto $\mathcal{B}_t$ cambia, al igual que las creencias de los agentes, generando un cambio estructural.



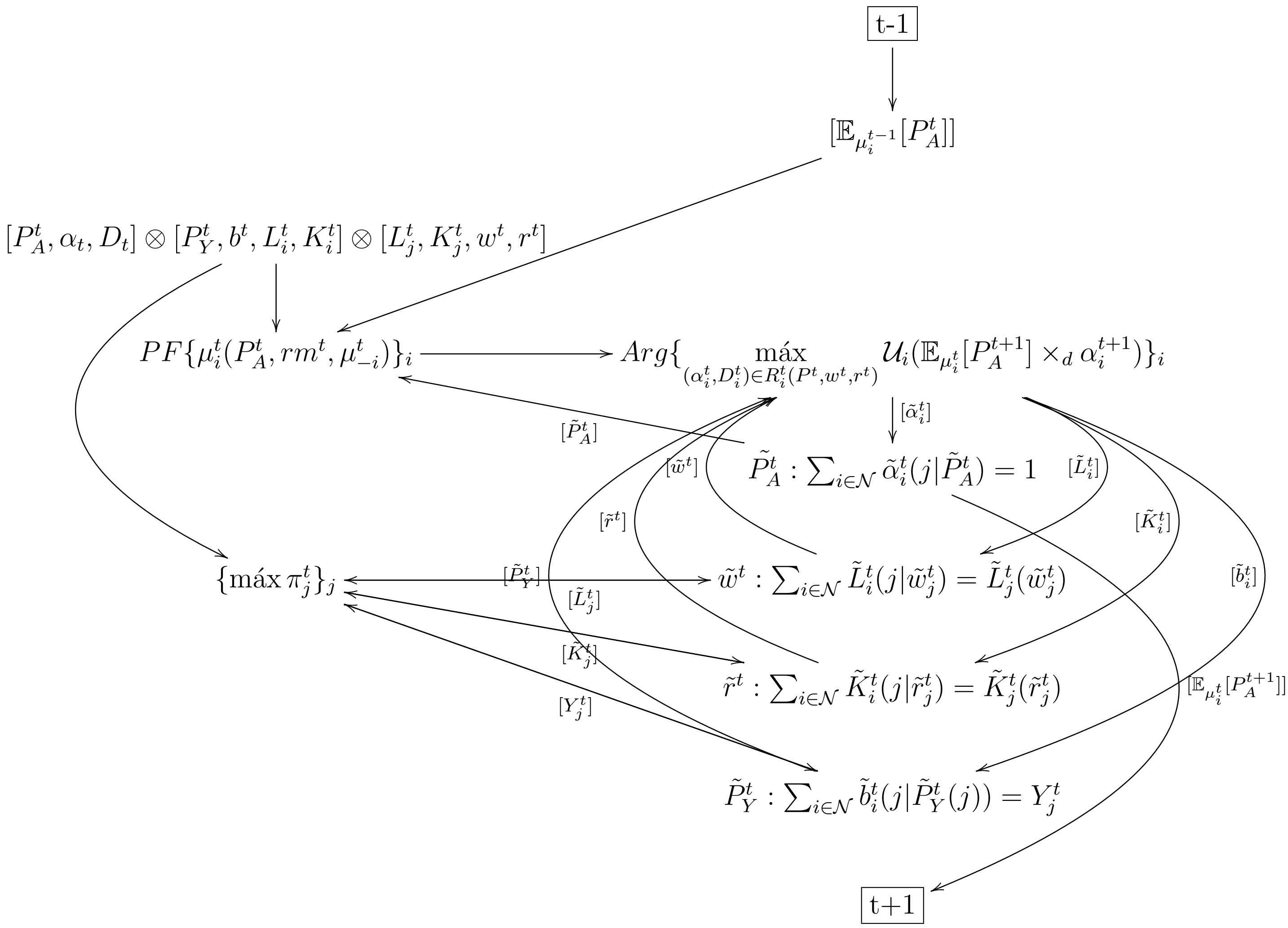
[Fuente: cell.com]
lo que aparenta ser evidencia empírica de la existencia del impacto de $\Theta(G)$ sobre las decisiones de los agentes.
Con este estudio, y los anteriores ya mencionados, se muestra evidencia empírica que sugiere que las relaciones planteadas, tanto en los supuestos de nuestra teoría como en los resultados que obtuvimos de ella fueran aplicables a la realidad económica, y reflejasen parte de ella. Como el lector ya habrá notado, no se mostró evidencia empírica de la relación de reflexividad entre los consumidores y las empresas. Esto no se realizó por la falta de un estudio sobre la misma.

Capítulo 5

Teoría de Reflexividad y paradojas de la economía

5.1. Teoría de Reflexividad

Consideremos el algoritmo del $\boxed{\text{Teorema de Keynes}}$,



La teoría de reflexividad afirma la existencia de una relación bidireccional entre las variables, por lo que lo que se busca es un punto fijo entre las funciones de enlace o de reflexividad. Las relaciones de reflexividad fueron probadas por George Soros para una economía financiera pura, pero nunca se han estudiado reflexividad en una economía con sector financiero y real. En la presente sección se presentará una propuesta para relaciones de reflexividad en una economía integral (con sector real y financiero), y se mostrará como puede utilizarse esta teoría para unifcar la macroeconomía, pero la validez final de todo el presente trabajo estará en la posibilidad de probar que las relaciones entre los agentes poseen reflexividad.
En el sector financiero, la reflexividad es esperable, dado que el precio de las acciones y bonos está influenciado por las noticias nuevas y las estimaciones a futuro que realicen los agentes en función de la información actual, pero en el sector real la reflexividad es más dificil de ver. La información que posee y que utiliza un trabajador de lase media en una empresa es mucho más limitada que la información que utiliza el dueño de un banco para tomar su decisión. El operario tomará el salario y el precio de los bienes como un dato y tomará su decisión, o a lo sumo proyectará inflación futura, para saber cuándo compra los bienes de primera necesidad. El

dueño del banco debe estimar las decisiones de las empresas sobre inversiones para determinar la prima de riesgo en la tasa de interés, y para ello debe considerar la posibilidad de que dicha inversión no se realice fruto que el mercado no la perciba como "interesante", pero para ello se debe estimar los niveles de ingreso y poder adquisitivo de las personas para saber si la inversión será o no rentable. Por otro lado, también debe considerarse las posibles futuras fluctuaciones de política pública, por lo que el espectro de información que requiere el dueño del banco es mayor, pero su decisión influirá en las del operario, solo que no de forma directa. Al banquero no le interesa el operario y viceversa, pero sus decisiones están relacionadas. Por esta razón nuestra propuesta es que existen dos tipos de reflexividad,
1) Reflexividad directa.
2) Reflexividad indirecta.
La reflexividad directa es la dada entre la empresa y el banco por ejemplo, como se explicó ya en un ejemplo en el capítulo 2. Ambos agentes deben tomar decisiones en función de la decisión de su contraparte, lo que lleva a realizar una mesa de negociación, y el resultado de la misma dependerá del peso de cada una de las partes. Por otro lado, tenemos la reflexividad indirecta, como la del banquero y el operario, donde no hay reflexividad directa, pero las decisiones de uno impactan en las del otro. Si el banco niega el préstamo, la empresa quizás no pueda aumentarle el sueldo al operario, y la inflación le disminuiría el poder de compra, mientras que si el operario pide aumento de precios considerando la inflación, el resultado neto del negocio se verá disminuido, al igual que la capacidad de la empresa para devolverle el dinero al banco. Esto puede verse en el siguiente diagrama:

$\boxed{\text{Reflexividad Directa}}$

$$
\begin{tikzcd}
x_t \arrow[r, "f"'] & f(x_t) \arrow[d, "id"] \\
g(y_{t+1}) \arrow[u, "id"'] & y_{t+1} \arrow[l, "g"']
\end{tikzcd}
$$

$\boxed{\text{Reflexividad Indirecta}}$

$$
\begin{tikzcd}
x_t^1 \arrow[r, "f"'] & f(x_t^1) \arrow[d, "id"] \\
g(y_{t+1}^1) \arrow[u, "id"'] & y_{t+1}^1 \arrow[l, "g"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
h(y_{t+1}^2) \arrow[d, "id"'] & y_{t+1}^2 \arrow[l, "h"'] \\
x_t^2 \arrow[r, "s"'] & s(x_t^2) \arrow[u, "id"]
\end{tikzcd}
$$

La reflexividad directa es observable (en su mayor parte) por los agentes que participan en ella, pero la indirecta no lo es, y a pesar de que no sea observable, los agentes deben tomar decisiones, y las mismas deben ser óptimas para que su nivel de vida no decaiga. A continuación,

veremos como puede utilizarse la presente teoría para unificar la Macroeconomía.
El principio de unificación establece que una teoría sería unificadora, si los agregados macroeconómicos pudieran obtenerse a partir de la misma. Como observamos anteriormente, las predicciones de los teoremas se reflejaron en la realidad y en los agreados macro, al punto donde se pudo distinguir entre los dos tipos de desempleo, voluntario e involuntario, y la razón de ello fué la reflexividad.

Teorema 4 (Teorema de Reflexividad)**.** *Nuestra teoría es unificadora*

Demostración. Lo que probaremos es que nuestra teoría es reflexiva en el sentido recién expuesto, por lo que al valer la hipótesis de reflexividad, existen relaciones entre todas las variables económicas, por lo que el impacto en cualquier variable micro (decisión de agente o firma) genera un impacto medible en los agregados macro. Para ello probaremos la siguiente descomposición:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_f \otimes_{\hat{H}_f} \mathcal{E}_r \tag{5.1}$$

Por el $\boxed{\text{Teorema de Keynes}}$ existe el operador $\hat{H}_f$, dado que el conjunto de equilibrios de Nash es no vacío. Por Dow-Jones, se tiene que la función de reflexividad en el sector financiero proviene de una Trasformación de Galileo fijando un mercado, y puede expresarse como:

$$\mathfrak{RF}_{\mathcal{E}^t_{f,a}}(x^t_a) = \otimes_{j\in\mathcal{K}-\{a\}} \hat{H}^f_j(\mathcal{E}^t_{f,j}|x^t_a) \tag{5.2}$$

Como el sistema posee solución, entonces existe una Transformación de Galileo del sistema, y la misma está dada por,

$$\mathfrak{TRF}_{\mathcal{E}^t_{f,a}}(x^t_a) = (\otimes_{j\in\mathcal{K}-\{a\}} \hat{H}^f_j(\mathcal{E}^t_{f,j}|x^t_a)) \otimes_{\hat{H}_f} (\mathcal{E}^t_Y(x^t_a) \otimes_{\hat{H}_w} \mathcal{E}^t_w(x^t_a) \otimes_{\hat{H}_r} \mathcal{E}^t_r(x^t_a)) \tag{5.3}$$

Esta función es la función de reflexividad total del sistema a partir de la economía financiera, donde la primera parte es la función de reflexividad directa total sobre la economía financiera, y la segunda parte del producto tensorial es la función de reflexividad indirecta total sobre la economía real a partir de un cambio en la economía financiera. Como solo se utilizó la hipótesis de que el sistema posee solución, entonces existe función de reflexividad total a partir de cualquiera de las 4 economías, por lo que nuestra teoría es reflexiva, por lo que es unificadora. □

5.2. Paradojas de la economía

En economía existen diversas paradojas, algunas ya han sido resueltas, mientras que otras no. Las que no han sido resueltas han causado grandes dolores de cabeza entre la comunidad científica, dado que algunas muestran inconsistencias entre lo predicho por el paradigma actual y lo que se observa en la realidad. A continuación mostraremos cómo puede utilizarse nuestra teoría para resolver algunas de estas paradojas.

5.2.1. Paradoja del ahorro

"Si todo el mundo trata de ahorrar durante una recesión, la demanda agregada caerá y los ahorros totales de la población serán más bajos"

La explicación actual de esta paradoja se basa en la teoría Keynesiana, donde se establece que si los ingresos pueden destinarse al consumo o al ahorro, se tiene la siguiente ecuación:

$$Y_t = C_t + S_t \tag{5.4}$$

Donde Y_t es el ingreso en t, C_t el consumo en t, y S_t el ahorro en t. Los keynesianos asumen que $S_t = S_0$ constante, por lo que si el ingreso cae y las personas decidieran ahorrar más (razonando por el absurdo la paradoja), entonces deberían consumir menos, lo que haría caer nuevamente el ingreso y este ciclo termina cuando las personas deban comenzar a utilizar sus ahorros para consumir.
El razonamiento anterior es claramente inconsistente, dado que los niveles de ahorro no son constantes, y menos aún en las recesiones, dado que es un simple problema de expectativas. El consumidor tiene dos posibilidades para colocar sus ahorros:
1) Inversiones en el sistema que genera rentabilidad.
2) Ahorro en dinero que no genera rentabilidad.
Las inversiones en el sistema económico generan un grado de exposición a las fluctuaciones del mismo, por lo que si la economía crece mis inversiones también lo harán[1]. Pero si la economía está en recesión mis inversiones estarán expuestas a la misma. Nuestra teoría plantea que las inversiones son en participación en los dividendos de las firmas, $\{\alpha_i^t(j)\}_j \times_d \{\pi_j^t\}_j$, y en depósitos en el sistema financiero ganando una tasa r_j^t. Por el Teorema de Keynes los Bayesianos en una recesión solo tendrán ahorros en dinero, mientras que los demás verán una pérdida total de sus ahorros. Como el juego en T^* es de suma negativa, se tiene que los ahorros a nivel agregado caen fruto que los agentes que aun invertían en la burbuja ahora quieren ahorrar para evitar pérdidas, lo que genera un exceso de demanda haciendo que el operador F_{T^*} converja al cero absoluto.

5.2.2. Paradoja de Gibson

"¿Por qué están los tipos de interés y los precios positivamente correlacionados?"

La paradoja de Gibson es un término acuñado por John Maynard Keynes en A Treatise on Money (1930), mostrando una aparente contradicción en la teoría neoclásica, la cual, la teoría Keynesiana tampoco pudo resolver y aun es un problema abierto.
Si bien dentro del paradigma actual esta paradoja no posee solución, en nuestra teoría si la posee. El paradigma actual propone una relación negativa entre precios y tasa de interés, dado que no pueden garantizar existencia de soluciones en el otro caso. En nuestra teoría si pudimos probar existencia de soluciones para este problema, dado que por el Teorema de Dow-Jones, se tiene que

$$P_{t+1} = \mathbb{E}_{\mu_i^t}[P_{t+1}|\mathcal{F}_{t-1}] \tag{5.5}$$

con $\mathcal{F}_{t-1}$ la filtración de $t-1$. Y hallamos que la condición de precios crecientes es que

$$-\frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial rm^t}\frac{P_t}{P_{t-1}^2} + \langle \frac{\partial g_i^t}{\partial \mu_{-i}^t} | \frac{\partial \mu_{-i}^t}{\partial P_{t-1}} \rangle \geq \frac{\partial g_i^{t-1}}{\partial P_{t-1}} - \frac{\partial g_i^t}{\partial \tau^t}\frac{\partial \tau^t}{\partial P_t}\frac{\partial P_t}{\partial P_{t-1}} \tag{5.6}$$

[1]En el caso que mis inversiones estén positivamente correlacionadas con la tasa de crecimiento del país, como la inversin en comodities

De esta manera se deduce que la razón por la que existe esta relación observada en la realidad es por especulación en el sistema financiero. En el sistema financiero existen agentes informados que pueden comprender cómo funciona la economía[2], que poseen grandes ganancias estimando evoluciones futuras de los precios. Pero así como están ellos, hay una masa de agentes no informados que tratan de obtener ganancias de corto plazo con las pequeñas oscilaciones de los precios. Los informados se aprovechan de esto para generar la burbuja, y los precios del sistema financiero comienzan a subir. Frente a esto, el gobierno conoce los efectos nocivos que tiene la especulación, por lo que sube la tasa de interés para presionar sobre el costo del capital de las firmas, entonces la menor posibilidad de obtener capital por parte de las firmas hace que sus beneficios sientan una presión a la baja (lo cual no implica que disminuyan). Por otro lado, la suba de la tasa de interés presiona sobre el rendimiento del mercado. Frente al crédito barato obtenido en periodos de tasa de interés baja, a las personas cada vez les cuesta más afrontar sus cuotas, por lo que demandan un mayor rendimiento en el mercado y comienza una carrera entre tasa de interés y rendimiento del mercado. Dado que los informados conocen el sistema y lo entienden, cuando creen que ya no pueden seguir obteniendo rendimientos salen del mercado dejando a los no informados que sufren el aumento de la tasa de interés que torna inviable al sistema. En este punto T^* la burbuja estalla, y el $\boxed{\text{Teorema de Keynes}}$ da las condiciones para el contagio masivo, por lo que frente al contagio masivo todo el sistema está en jaque, y para evitar el colapso el gobierno debe intervenir inicialmente bajando las tasas de interés para evitar el quiebre de firmas por pagos de deudas o insostenibilidad de las mismas, pero al no ser suficiente debe realizar salvatajes garantizando un piso para los precios de las acciones. De esta manera la tasa de interés y los precios están positivamente correlacionados.

5.2.3. Paradoja de Kalecki

"Un descenso generalizado de los salarios (reducción de costes) y precios fijos lejos en lugar de aumentar los beneficios reducen las ventas por una caída de la demanda agregada"

Esta paradoja es un resultado inmediato de nuestra teoría, dado que ni siquiera es un punto de equilibrio, y las propiedades mencionadas en la paradoja son inmediadas del operador $\mathfrak{TRF}$.

5.2.4. Paradoja de Leontief

"¿Por qué el Modelo Hecksher-Ohlin no explica las relaciones de comercio internacional?"

La paradoja de Leontief debe su nombre a su autor, Wassily Leontief (1906-1999), según el cual, si se concibe a la mano de obra no como una mercancía homogénea sino por categorías, los países industrializados disponen de una oferta más abundante de mano de obra bastante educada o de fuerza de trabajo calificada (en la que se ha realizado una elevada inversión de capital) que de otros tipos.

La paradoja fue formulada al investigar el Modelo Hecksher-Ohlin, según el cual en las exportaciones de los países desarrollados predominan los bienes intensivos en capital, en cambio, los países menos desarrollados exportan especialmente bienes intensivos en mano de obra. Sin embargo, Leontief observó que las exportaciones de Estados Unidos son más intensivas en fuerza de trabajo calificada que en capital.

[2]Los agentes Bayesianos en nuestra teoría, los Hedge Funds serían un ejemplo de la realidad

Esta paradoja, al igual que las anteriores no posee solución en el paradigma actual, dado que el modelo de Hecksher-Ohlin es consistente con el paradigma actual, de hhecho se formula y demuestra utilizando todo el paradigma actual.
En el caso de Estados Unidos, y el mismo razonamiento puede extrapolarse a los demás países industrializados, proviene del hhecho que al estar la mano de obra más especializada su productividad marginal es mayor, por lo que las firmas buscarán obtener dicha mano de obra, dado que les permite aumentar su producción. En nuestra teoría los agentes deben escoger una cantidad $\delta_{L_i^t}$ de participaciones en las firmas y tendrán una remuneración $\langle w^t|\delta_{L_i^t} \times_d L_f^t\rangle$. Si las firmas remuneran a los agentes en función de la productividad que poseen y las posibilidades de venta en el mercado, esto haría que la remuneración sea mayor en estos países generando incentivos a que más personas entren al sistema de trabajo, y como la mano de obra calificada es mayor, el nivel de producto es mayor, por lo que las exportaciones serán en bienes con un grado mayor de intensidad en mano de obra que lo propuesto por el Teorema de Hecksher-Ohlin.

5.2.5. Paradoja del crecimiento

A pesar de las nuevas explicaciones e interpretaciones que trae nuestra teoría, surgen nuevos problemas, y el más importante pretendemos plantearlo aquí.
En la mayoría de los libros de texto sobre política macroeconómica se habla de la tasa de crecimiento de largo plazo, $g_{LP} > 0$, y se establece como objetivo alcanzar el equilibrio de largo plazo para poder crecer sostenidamente a dicha tasa. Por otro lado, en el presente trabajo se muestra que incluso en instituciones inclusivas existen burbujas financieras, cuyos efectos recesivos se contagian al lado real generando crisis económicas y en ausencia de una intervención el sistema podría colapsar, por lo que el equilibrio de largo plazo nunca se alcanzaría. Pero como las burbujas son racionales y equilibrios, esto implicaría que el largo plazo no existe sin intervención estatal, por lo que el crecimiento hoy está influenciado por la burbuja en la que hoy estemos, lo que plantea la siguiente paradoja:

"¿Existe realmente una tasa de crecimiento sostenida como plantea el paradigma actual?. De existir, ¿cuál es la relación entre la tasa de crecimiento hoy y la de burbuja?, es decir, hallar f tal que $g_t = f(g_{LP}, g_t^B)$[3]."

[3] g_t es la tasa de crecimiento en t, y g_t^B es la tasa de crecimiento en t generada por efecto burbuja.

Capítulo 6

Conclusiones

En el presente trabajo se propuso utilizar la Teoría de la Reflexividad (base de la antropología) como una visión alternativa de la economía, lo que genera un nuevo paradigma en la teoría económica, el cual resulta inconsistente con el paradigma actual. Nuestra teoría admite tanto un desarrollo matemático como conceptual, tomando como base no solo el análisis económico, sino también estudios antropológicos, psicológicos y apoyándonos en la neurociencia pudimos dar evidencia empírica de nuestra teoría. A diferencia del paradigma actual, nosotros logramos dar una explicación racional de las crisis económicas y del desempleo, desconociendo totalmente la Ley de Walrass, lo que nos permitió resolver el problema de Dow-Jones, y lograr una mejor aproximación a la solución del problema de Keynes y de Smith.
El resultado principal del trabajo es que las burbujas, a diferencia de la opinión de muchos, son racionales y provienen de un equilibrio como puede observarse en los estudios de la Universidad de Berkeley y en las demostraciones de nuestros teoremas. Además, nuestra teoría, al poder generar el desempleo que es el único agregado macroeconómico que el paradigma actual no puede generar, resultó ser unificadora, dando una justificación micro a los agregados macro por primera vez en economía. Sin embargo, al haber sido el modelo creado bajo los supuestos capitalistas del mundo actual, surgen nuevas dudas respecto de las políticas llevadas adelante por los policy makers, dado que la tasa de interés es más un detonante de burbuja que un freno a la misma. Por esta razón, se considera que una preocupación en la agenda de todo policy maker debe ser detener las burbujas, dado que resultan en un juego de suma negativa, y para ello las políticas actuales son ineficientes, dado que satisfacen las hipótesis de nuestros teoremas, por lo que políticas interesantes serían restricciones del crédito y controles de riesgo a las empresas más grandes susceptibles a problemas de riesgo moral.
Sin embargo, aún queda mucho por hacer. La economía no es tan simple como fue descripta en los teoremas, las burbujas pueden crearse casi sobre cualquier activo suficientemente atractivo, y el teorema de Keynes afirma que los efectos de contagio dependen de las fricciones de expectativas entre consumidores y empresas, lo cual es difícil de estimar. También quedan detalles técnicos, como dar condiciones mínimas para que valga la Teoría de Expectativas Racionales, y el mismo Teorema de Keynes y el de Dow-Jones, pueden generalizarse para reflejar distintas economías si se consideran economías regionales e instrumentos financieros diferentes, junto con mecanismos de toma de decisiones más realistas, como considerar que el consumidor, frente a una crisis, escoge reducir sus horarios de trabajo y las empresas deciden reducir las horas de los trabajadores, generando reflexividad entre ellos. También puede considerarse el caso de empresas que no coticen en bolsa ni compren acciones del mercado, lo que generaría una caida

del PBI, pero no llevaría la economía al colapso, sino muy cerca del mismo.
Para cerrar el trabajo recordamos una de las preguntas planteadas en el trabajo. Durante años las políticas de todo el mundo han apoyado al paradigma actual, y las burbujas se han generado por todo el mundo, pero nunca hemos llegado a una crisis como la de 1929, y grandes financistas como George Soros creen que la crisis de 2008 fue la explosión de una super burbuja donde el instrumento generador no fue financiero, sino las malas políticas por no seguir la Teoría de Reflexividad y considerar cláusulas tipo céteris páribus. Sin embargo, hoy en día el S&P 500 y el Dow-Jones index están por encima de valores históricos de burbuja, entonces, ¿realmente estalló la super burbuja, o el gobierno de los Estados Unidos logró alargar la vida del sistema un tiempo más? ¿qué le espera al sistema y al mundo cuando estalle la super burbuja?.

Bibliografía

[1] Abreu, D., & Brunnermeier, M. K., *Bubbles and crashes.* Econometrica, 71(1), 173-204, 2003.

[2] Acemoglu, D., Robinson, J. A., & Woren, D., *Why nations fail: the origins of power, prosperity and poverty (Vol. 4).* New York: Crown Business, 2012

[3] Accinelli, Elvio., *Elementos de topología y de la Teoría de Conjuntos en Economía. Parte II.* Notas docentes. Universidad de la República.

[4] Andrade, E. B., Odean, T., & Lin, S., *Bubbling with excitement: an experiment.* 2012.

[5] Ashraf, N., Camerer, C. F., & Loewenstein, G., *Adam Smith, behavioral economist.* Journal of Economic Perspectives, 131-145, 2005.

[6] Bikhchandani, S., Hirshleifer, D., & Welch, I, *A theory of fads, fashion, custom, and cultural change as informational cascades.* Journal of political Economy, 992-1026, 1992.

[7] Bonnans, J. F., & Shapiro, A., *Optimization problems with perturbations: A guided tour.* SIAM review, 40(2), 228-264, 1998.

[8] De Martino, B., ODoherty, J. P., Ray, D., Bossaerts, P., & Camerer, C., *In the mind of the market: Theory of mind biases value computation during financial bubbles.* Neuron, 79(6), 1222-1231. 2013.

[9] Degryse, H., Kim, M., & Ongena, S., *Microeconometrics of banking: methods, applications, and results.* Oxford University Press, USA. 2009.

[10] Frenkel, J. A., Razin, A., & Yuen, C. W. , *Fiscal policies and growth in the world economy.* MIT press. 1996.

[11] Harsanyi, J. C., *A new theory of equilibrium selection for games with complete information.* Games and Economic Behavior, 8(1), 91-122, 1995.

[12] Huettel, S. A., & Lockhead, G., *Psychologically rational choice: selection between alternatives in a multiple-equilibrium game.* Cognitive Systems Research, 1(3), 143-160, 2000.

[13] Jehle, G. A., & Reny, P. J., *Advanced microeconomic theory.* Pearson Education India. 2006.

[14] JOHN NASH, *Equilibrium points in n-person games.* Proceedings of the National Academy of the USA 36(1):48-49. 1950.

[15] KWONG, C. P., *Mathematical analysis of Soros's theory of reflexivity.* arXiv preprint arXiv:0901.4447, 2009.

[16] MANKIW, N. G., *The macroeconomist as scientist and engineer.* (No. w12349). National Bureau of Economic Research. 2006.

[17] MANTEL, R. R., *Equilibrio de una economía competitiva: una prueba de su existencia.* Económica, 45. 1999.

[18] MARTINEZ-GIRALT, X., *Microeconomía avanzada.* Lulu. com. 2008.

[19] MAS-COLELL, A., *The Cournotian foundations of Walrasian equilibrium theory: an exposition of recent theory.* University of California. 1981.

[20] PECK, J., & SHELL, K., *Market uncertainty: correlated and sunspot equilibria in imperfectly competitive economies.* The Review of Economic Studies, 58(5), 1011-1029. 1991.

[21] PÉREZ, J., JIMENO, J. L., & TENA, E. C., *Teoría de juegos.* Pearson Educación. 2003.

[22] RADNER, R., *Rational expectations equilibrium: Generic existence and the information revealed by prices.* Econometrica: Journal of the Econometric Society, 655-678. 1979.

[23] SMITH, ADAM, *The theory of moral sentiments.* na, 1759.

[24] SMITH, ADAM, *The wealth of nations.* na, 1776.

[25] STOKEY, N., & LUCAS, R. WITH E. PRESCOTT, *Recursive Methods in Economic Dynamics.* na, 1989.

[26] TIROLE, J., *On the possibility of speculation under rational expectations.* Econometrica: Journal of the Econometric Society, 1163-1181, 1982.

[27] TVERSKY, A., & KAHNEMAN, D, *Loss aversion in riskless choice: A reference-dependent model.* The quarterly journal of economics, 1039-1061, 1991.

Capítulo 7

Agradecimientos

Agradecimientos académicos

Se agradece el apoyo de mi director Dr. Andrés Barrea durante la conformación del trabajo y los teoremas principales, los comentarios realizados por el Lic. Jorge M. Oviedo (U.N.C) sobre conceptos económicos durante los inicios del trabajo, a PhD. Esteban Tabak (M.I.T), Dr. Cristina Turner (U.N.C) y la médica Cristina Masini (U.N.C) por sus comentarios sobre la versión final del trabajo. Se agradecen también los comentarios de PhD. Luis Reyna (CalTech), y los seminarios y el tiempo de dedicación de PhD. Greg LaBlanc (Berkeley University).
También se agradece el apoyo de las empresas Portico S.A., Banco Julio S.A. y Brasil Distressed Ltda.

Agradecimientos personales

Se agradece a mis amigos, en especial a Julieta Vazquez, Florencia Fissore, y Julian Gurgo, por el apoyo moral durante mis años de estudio, a mi familia, y profesores de la carrera, en especial a Dr. Maria Silvina Riveros (U.N.C), Dr. Linda Saal (U.N.C) por el apoyo moral en tiempos de necesidad, del Lic. Luis Marcelo Florensa (U.N.C) por incursionarme en los estudios formales de la economía, y la Dr. Cristina Turner (U.N.C) por su predisposición frente a incontables asuntos.