Monadicidad de procesos probabilistas y no deterministas

Autor: **Martín Santiago Moroni**

Director: **Pedro Sánchez Terraf**

Córdoba, Marzo de 2015

Resumen En este trabajo se estudian algunas nociones de teoría de categorías, fundamentalmente adjunciones y mónadas, en un intento de entender en sentido categórico construcciones algebraicas como semireticulados o conos reales. Las mónadas asociadas a las teorías ecuacionales que dan origen a tales estructuras sirven en computación teórica para modelar ciertos efectos computacionales como probabilidad y no determinismo. La posibilidad de combinar tales nociones de computabilidad a partir de las mónadas correspondientes se enfrenta a la dificultad categórica de inexistencia de una ley distributiva entre ellas.

Clasificación (Math. Subject Classification)

18C20: Algebras and Kleisli categories associated with monads
68Q10: Modes of computation

Palabras Claves

-Mónada.
-Probabilidad.
-No determinismo.

Índice

1. Algunas nociones de categorías

1.1. Tres definiciones básicas. En esta sección introducimos algunos de los conceptos primordiales de la teoría de categorías.

Definición 1.1. Una *categoría* C consiste de una colección $ob(C)$ de objetos y para cada par a, b de objetos, un conjunto $C(a,b) = hom(a,b) = hom_C(a,b)$ de *morfismos* o *flechas.* Si $f \in C(a,b)$, el *dominio* de f es $dom(f) = a$ y el *codominio* de f es $cod(f) = b$, denotamos esto como $f : a \to b$. Para objetos a, b, c se tienen dos flechas, una identidad y una composición,

$$\begin{aligned} ob(C) &\to C(a,a) & \qquad C(b,c) \times C(a,b) &\to C(a,c) \\ a &\mapsto 1_a & (g,f) &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

tales que valen las igualdades

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
$$1_b \circ f = f = f \circ 1_a.$$

En general escribiremos $c \in C$ y "f flecha en C" para decir que c es objeto de C y que f es morfismo.

Dada una categoría C, se tiene otra categoría C^{op}, *opuesta* o *dual*, cuyos objetos son los mismos que los de C pero sus flechas son $C^{op}(a,b) = C(b,a)$. Entonces $f : a \to b$ en C^{op} sii $f : b \to a$ en C; escribimos $f^{op} : a \to b$ para enfatizar la categoría de la flecha f. La composición en C^{op} es $g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}$.

Un *objeto inicial* en una categoría C es un objeto c tal que para todo elemento $b \in C$ existe una única flecha $f : c \to b$. Un *objeto final* se define de manera similar o, usando la definición anterior, como un objeto inicial en la categoría C^{op}. Siguiendo esta tendencia, la dualidad en categorías se referirá al proceso de "invertir la dirección de las flechas", así cada defición o afirmación da lugar a una correspondiente *dual* que se obtiene reemplazando dominio por codominio, codominio por dominio y "la composición de g con f" por "la composición de f con g". La categoría dual nos permite interpretar el dual de una afirmación como la afirmación orginal aplicada a esta nueva categoría.

El siguiente concepto fundamental dará una noción de morfismo de categorías.

Definición 1.2. Dadas dos categorías C y B, un *funtor* $T : C \to B$ con dominio C y codominio B consiste de dos funciones: una *función objeto* T que asigna a cada objeto $c \in C$ un objeto Tc en B, y una *función flecha* (también denotada T) que asigna a cada flecha $f : c \to c'$ en C una flecha $Tf : Tc \to Tc'$ en B de modo tal que se cumplen las igualdades

$$T(1_c) = 1_{T_c} \qquad T(g \circ f) = Tg \circ Tf.$$

Podemos definir una composición entre funtores de la manera obvia. Un *isomorfismo* $T : B \to C$ de categorías es un funtor T biyectivo, tanto en objetos como en flechas. Equivalentemente, $T : B \to C$ es isomorfismo sii existe otro funtor $S : C \to B$ para el que las composiciones $T \circ S$ y $S \circ T$ son el funtor identidad.

La definición 1.2 corresponde a la noción de funtor *covariante*. Diremos que un funtor T es *contravariante* si $T : C^{op} \to B$, es decir T aplicado a una flecha $f : a \to b$ en C da una flecha $Tf : Tb \to Ta$ en B (invierte la dirección) y vale que $T(g \circ f) = Tf \circ Tg$.

Definimos aquí también un concepto que utilizaremos más adelante. Un *álgebra* para un endofuntor $T : C \to C$ será un objeto A (llamado el objeto *base* del álgebra) junto con una flecha $k : TA \to A$ (llamada *estructura*). Estas álgebras forman una categoría C^T, donde un morfismo $h : (A, k) \to (A', k')$ es una flecha $h : A \to A'$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} TA \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "k"'] & TA' \arrow[d, "k'"] \\ A \arrow[r, "h"] & A'. \end{tikzcd}$$

La conmutatividad se refiere a que todo camino a través de las flechas en el diagrama lleva a una igualdad de composición de morfismos, en este caso significa que $k' \circ Th = h \circ k$. Un objeto incial en esta categoría, cuando existe, es llamado álgebra inicial. El concepto dual al de álgebra es el de *coálgebra*, que si bien no será desarrollado en este trabajo, resulta muy útil en teoría de la computación como se ve en el siguiente

Ejemplo 1.3. Una bisimulación entre dos coálgebras (X, k) y (X', k') en la categoría C es un objeto R junto con flechas $R \xrightarrow{p} X$,$R \xrightarrow{p'} X'$ tal que existe una estructura de coálgebra r en R que hace que p y p' sean morfismos de coálgebras. Dos coálgebras son bisimilares si existe una bisimulación entre ellas. Si por ejemplo consideramos el funtor $X \mapsto \{Y \mid Y \subseteq A \times X\}$ en la categoría **Set** de conjuntos y funciones, una coálgebra para este funtor es un "sistema de transición A-etiquetado".

Tener claro el siguiente ejemplo será muy útil al momento de hablar de adjunciones.

Ejemplo 1.4. Los morfismos entre objetos de una categoría C, es decir los "hom-sets"

$$hom_C(a, b) = \{f \mid f \text{ es una flecha } f : a \to b \text{ en C}\},$$

proveen dos importantes ejemplos de funtores covariantes y contravariantes. Para cada objeto $a \in C$ el *hom-funtor covariante*

$$C(a, -) = hom(a, -) : C \to \mathbf{Set};$$

su función objeto envía cada objeto b al conjunto $hom(a, b)$; su función flecha envía cada flecha $k : b \to b'$ de C a la función

$$hom(a, k) : hom(a, b) \to hom(a, b')$$

definida por la asignación $f \mapsto k \circ f$ para cada $f : a \to b$. Para simplificar la notación escribiremos la función $hom(a, k)$ como k_* y la llamaremos "composición a izquierda con k". De forma similar, para cada $b \in C$ escribiremos al *hom-funtor contravariante* de manera covariante como

$$C(-, b) = hom(-, b) : C^{op} \to \mathbf{Set};$$

su función objeto envía cada objeto a al conjunto $hom(a, b)$; su función flecha envía cada flecha $g : a \to a'$ de C a la función

$$hom(g, b) : hom(a', b) \to hom(a, b)$$

definida por la asignación $f \mapsto f \circ g$ para cada $f : a' \to b$. Para simplificar la notación escribiremos la función $hom(g, b)$ como g^* y la llamaremos "composición a derecha con g". Se tiene entonces que, para cada $f : a' \to b$

$$k_* f = k \circ f, \qquad g^* f = f \circ g$$

y se puede verificar que el siguiente diagrama en **Set** es conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
hom(a',b) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "k_*"'] & hom(a,b) \arrow[d, "k_*"] \\
hom(a',b') \arrow[r, "g^*"'] & hom(a,b').
\end{tikzcd}
\tag{1.5}
$$

En efecto, ambos caminos mandan $f \in hom(a',b)$ a kfg.

Así como "funtor" da una noción de morfismo entre categorías, el siguiente concepto da una noción de morfismo de funtores.

Definición 1.6. Dadas dos categorías C y B y dos funtores $S,T : C \to B$, una *transformación natural* $\tau : S \dot{\to} T$ es una función que asigna a cada objeto c de C una flecha $\tau_c : Sc \to Tc$ de B de tal modo que toda flecha $f : c \to c'$ en C da lugar a un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
c \arrow[d, "f"'] & Sc \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\
c' & Sc' \arrow[r, "\tau'_c"] & Tc'.
\end{tikzcd}
$$

Llamaremos a $\tau_a, \tau_b, \tau_c, ...$ las *componentes* de la transformación natural τ. Una transformación natural con cada componente τ_c invertible en B es llamada *isomorfismo natural*, en símbolos, $\tau : S \cong T$.

Observación 1.7. Notamos los siguientes hechos:

- Si $\tau : S \dot{\to} T$ es isomorfismo natural, las inversas $(\tau_c)^{-1}$ en B son las componentes de un isomorfismo natural $\tau^{-1} : T \dot{\to} S$.
- Si se tienen funtores

  $$D \xrightarrow{G} C \overset{S}{\underset{T}{\rightrightarrows}} B; \qquad\qquad C \overset{S}{\underset{T}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{F} E,$$

  y una transformación natural $\eta : S \dot{\to} T$, podemos definir en el primer caso una transformación natural $\eta G : SG \dot{\to} TG$ con componentes $(\eta G)_d = \eta_{Gd}$ para cada $d \in D$ y en el segundo caso una transformación natural $F\eta : FS \dot{\to} FT$ con componentes $(F\eta)_c = F\eta_c$. Usaremos indistintamente la notación ηG o η_G.

1.2. Bifuntores y composición de transformaciones naturales. Dadas dos categorías B y C podemos construir una nueva categoría $B \times C$, llamada el *producto* de B y C, de la manera obvia: los objetos en $B \times C$ serán pares $\langle b, c\rangle$ de objetos b de B y c de C; una flecha $\langle b, c\rangle \to \langle b', c'\rangle$ de $B \times C$ será un par $\langle f, g\rangle$ de flechas $f : b \to b'$ y $g : c \to c'$, y la composición de dos tales flechas

$$\langle b, c\rangle \xrightarrow{\langle f,g\rangle} \langle b', c'\rangle \xrightarrow{\langle f',g'\rangle} \langle b'', c''\rangle$$

es definida en términos de las composiciones en B y C como

$$\langle f', g'\rangle \circ \langle f, g\rangle = \langle f' \circ f, g' \circ g\rangle.$$

Los funtores $S : B \times C \to D$ desde una categoría producto son llamados *bifuntores* (en B y C). Si fijamos un argumento en un bifuntor S, el resultado es un funtor común en el argumento restante. El bifuntor S queda determinado por estos dos funtores como se indica en la siguiente proposición.

Proposición 1.8. *Sean B, C y D categorías. Para todos los objetos $b \in B$ y $c \in C$, sean*

$$L_c : B \to D, \qquad M_b : C \to D$$

funtores tales que $M_b(c) = L_c(b)$ para todo b y c. Entonces existe un bifuntor $S : B \times C \to D$ con $S(-, c) = L_c$ para todo c y $S(b, -) = M_b$ para todo b si y sólo si para todo par de flechas $f : b \to b'$ y $g : c \to c'$ se tiene que

$$M_{b'} g \circ L_c f = L_{c'} f \circ M_b g. \tag{1.9}$$

Cualquiera de los miembros en tal igualdad será entonces el valor $S(f, g)$ de la función flecha de S.

Usando esta proposición podemos probar que los hom-sets definen un bifuntor

$$hom : C^{op} \times C \to \mathbf{Set}.$$

En efecto, el diagrama conmutativo 1.5 muestra que los funtores covariante y contravariante

$$hom(-, b) : C^{op} \to \mathbf{Set}, \qquad hom(a, -) : C \to \mathbf{Set}$$

satisfacen la condición 1.9 de la proposición.

Consideramos ahora transformaciones naturales entre bifuntores $S, S' : B \times C \to D$. Sea α una función que asigna a cada par de objetos $b \in B$, $c \in C$ una flecha

$$\alpha(b, c) : S(b, c) \to S'(b, c) \tag{1.10}$$

en D. Diremos que α es *natural* en b si para cada $c \in C$, las componentes $\alpha(b, c)$ definen para todo b

$$\alpha(-, c) : S(-, c) \dot{\to} S'(-, c)$$

una transformación natural de funtores $B \to D$. De manera análoga definimos α *natual en c*. La siguiente proposición puede resultar muy útil para probar que una función es transformación natural entre bifuntores.

Proposición 1.11. *Para bifuntores S, S', una función α como en 1.10 es una transformación natural $\alpha : S \dot{\to} S'$ (i.e. de bifuntores) si y sólo si $\alpha(a, b)$ es natural en b para cada $c \in C$ y natural en c para cada $b \in B$.*

Dadas categorías C y B consideramos todos los funtores $R, S, T, ... : C \to B$. Si $\sigma : R \dot{\to} S$ y $\tau : S \dot{\to} T$ son dos transformaciones naturales, sus componentes para cada $c \in C$ definen flechas $(\tau \bullet \sigma)_c = \tau_c \circ \sigma_c$ que son las componentes de una transformación $\tau \bullet \sigma : R \dot{\to} T$. Para verificar que tal transformación es natural tomamos cualquier $f : c \to c'$ y consideramos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
Rc \arrow[r, "Rf"] \arrow[d, "\sigma_c"'] \arrow[dd, bend right, "(\tau\bullet\sigma)_c"'] & Rc' \arrow[d, "\sigma'_c"] \arrow[dd, bend left, "(\tau\bullet\sigma)'_c"] \\
Sc \arrow[r, "Sf"] \arrow[d, "\tau_c"'] & Sc' \arrow[d, "\tau'_c"] \\
Tc \arrow[r, "Tf"] & Tc'.
\end{tikzcd}$$

Como σ y τ son naturales, los dos cuadrados internos conmutan y por lo tanto el rectángulo externo conmuta, esto prueba que $\tau \bullet \sigma$ es natural. Observamos que esta composición de transformaciones naturales es asociativa ya que la composición de flechas en la categoría de llegada es asociativa. Además, para cada funtor T se tiene una identidad, la transformación identidad $1_T : T \dot{\to} T$ con componentes $(1_T)_c = 1_{Tc}$. Entonces, dadas categorías C y B, podemos construir la *categoría funtor* $B^C = Funt(C, B)$ donde los objetos serán los funtores $T : C \to B$ y las flechas serán las transformaciones naturales entre ellos.

La composición que acabamos de definir es conocida como "vertical", podemos definir también otro tipo de composición "horizontal". Dados funtores y transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left, "S"] \arrow[r, bend right, "T"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\tau"] & B \arrow[r, bend left, "S'"] \arrow[r, bend right, "T'"'] \arrow[r, phantom, "\downarrow\tau'"] & A \end{tikzcd}$$

podemos primero componer los funtores y obtener $S' \circ S$ y $T' \circ T : C \to A$ y luego construir el cuadrado

$$\begin{tikzcd} S'Sc \arrow[r, "\tau'_{Sc}"] \arrow[d, "S'\tau_c"'] & T'Sc \arrow[d, "T'\tau_c"] \\ S'Tc \arrow[r, "\tau'_{Tc}"'] & T'Tc \end{tikzcd}$$

el cual conmuta por la naturalidad de τ' para la flecha τ_c de B. Definimos $(\tau' \circ \tau)_c$ como la diagonal de tal cuadrado:

$$(\tau' \circ \tau)_c = T'\tau_c \circ \tau'_{Sc} = \tau'_{Tc} \circ S'\tau_c. \tag{1.12}$$

A veces denotaremos la composición horizontal simplemente por yuxtaposición: $\tau' \circ \tau = \tau'\tau$. Para mostrar que $\tau' \circ \tau : S'S \to T'T$ es natural, elegimos una flecha cualquiera $f : c \to b$ de C y formamos el diagrama

$$\begin{tikzcd} S'Sc \arrow[r, "S'\tau_c"] \arrow[d, "S'Sf"'] & S'Tc \arrow[r, "\tau'_{Tc}"] \arrow[d, "S'Tf"] & T'Tc \arrow[d, "T'Tf"] \\ S'Sb \arrow[r, "S'\tau_b"'] & S'Tb \arrow[r, "\tau'_{Tb}"'] & T'Tb. \end{tikzcd}$$

El cuadrado izquierdo conmuta pues τ es natural y S' es funtor, el lado derecho conmuta pues τ' es natural y $Tf : Tc \to Tb$ es flecha en B. Por definición, las composiciones horizontales en el diagrama son $(\tau' \circ \tau)_c$ y $(\tau' \circ \tau)_b$. Verificar que esta composición es asociativa es directo. Se tiene también una identidad: si $I_B : B \to B$ es el funtor identidad para una categoría B y $1_B : I_B \dot{\to} I_B$ es la transformación natural identidad de ese funtor sobre sí mismo, se tiene entonces que

$$(1_B \circ \tau)_c = I_B\tau_c \circ (1_B)_{Sc} = \tau_c \circ 1_{Sc} = \tau_c$$

$$(\tau' \circ 1_B)_b = T'(1_B)_b \circ \tau'_{I_B b} = 1_{T'b} \circ \tau'_b = \tau'_b.$$

Luego, I_B es la identidad para la composición $\circ$, así como también lo es para la composición $\bullet$. Si denotamos con el símbolo S de un funtor a la transformación natural $S : S \dot{\to} S$, se tienen las transformaciones naturales

$$S' \circ \tau : S'S \dot{\to} S'T, \qquad \tau' \circ T : S'T \dot{\to} T'T.$$

La definición 1.12 de $\circ$ puede reescribirse usando $\bullet$ como

$$\tau' \circ \tau = (T' \circ \tau) \bullet (\tau' \circ S) = (\tau' \circ T) \bullet (S' \circ \tau). \tag{1.13}$$

Este es un caso particular de la siguiente regla más general: dadas tres categorías y cuatro transformaciones naturales

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\sigma"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\tau"] & B \arrow[r, bend left=60] \arrow[r] \arrow[r, bend right=60] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow\sigma'"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow\tau'"] & A, \end{tikzcd}$$

las composiciones "verticales" bajo $\bullet$ y las "horizontales" bajo $\circ$ están relacionadas por la siguiente *ley de intercambio*:

$$(\tau' \bullet \sigma') \circ (\tau \bullet \sigma) = (\tau' \circ \tau) \bullet (\sigma' \circ \sigma).$$

El siguiente diagrama prueba este hecho:

$$\begin{tikzcd} R'Rc \arrow[rr, "R'R1_c"] \arrow[d, "(\sigma'\circ\sigma)_c"'] \arrow[dr, "(\tau'\bullet\sigma')_{Rc}"] & & R'Rc \arrow[d, "(\sigma'\circ\sigma)_c"] \\ S'Sc \arrow[d, "(\tau'\circ\tau)_c"'] & T'Rc \arrow[dr, "T'(\tau\bullet\sigma)_c"'] & S'Sc \arrow[d, "(\tau'\circ\tau)_c"] \\ T'Tc \arrow[rr, "T'T1_c"'] & & T'Tc. \end{tikzcd}$$

1.3. Flechas universales. Verificar la existencia de flechas universales de un objeto en un funtor (o de un funtor en un objeto) resulta una herramienta esencial para derivar resultados importantes sobre el funtor en cuestión. En este apartado damos la definición correspondiente y otra construcción más técnica que servirá para caracterizar ciertos funtores.

Definición 1.14. Si $S : D \to C$ es un funtor y c un objeto de C, una *flecha universal* de c a S es un par (r, u) donde r es un objeto de D y $u : c \to Sr$ es una flecha en C tal que para todo par (d, f) con d objeto de D y $f : c \to Sd$ flecha en C, hay una única flecha $f' : r \to d$ de D que cumple $Sf' \circ u = f$. Dicho de otro modo: toda flecha f a S se factoriza de manera única a través de la flecha universal u como en el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "f"'] & Sr \arrow[d, dotted, "Sf'"] & r \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & Sd & d. \end{tikzcd}$$

Observación 1.15. El objeto r de una flecha universal es único salvo isomorfismo: en efecto, si (r, u) y (r', u') son flechas universales de c a S entonces deben existir flechas únicas $\alpha : r \to r'$ y $\alpha' : r' \to r$ tales que $S\alpha \circ u = u'$ y $S\alpha' \circ u' = u$. De esto se obtiene la igualdad $S(\alpha \circ \alpha') \circ u' = u'$; como la flecha identidad $1_{r'}$ satisface la ecuación $S1_{r'} \circ u' = u'$, por unicidad debe ser $1_{r'} = \alpha \circ \alpha'$. De manera análoga se ve que $1_r = \alpha' \circ \alpha$ y por lo tanto α es isomorfismo.

En muchos casos, el embedding de un objeto matemático en otro objeto completo (en algún sentido) puede ser interpretado como una flecha universal. La unicidad de la flecha universal implica la unicidad, salvo isomorfismo, del objeto completo.

Hemos definido las flechas universales de un objeto $c \in C$ a un funtor $S : D \to C$, el concepto dual también es útil: una *flecha universal* de S a c es un par (r, v) que consiste de un objeto $r \in D$ y una flecha $v : Sr \to c$ en C tal que para todo par (d, f) con d objeto de D y $f : Sd \to c$, hay una única flecha $f' : d \to r$ de D que cumple $v \circ Sf' = f$. Visto como diagrama

$$\begin{tikzcd} d \arrow[d, dotted, "f'"'] & Sd \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "Sf'"'] & c \\ r & Sr. \arrow[ur, "v"] & \end{tikzcd}$$

Describiremos ahora un tipo específico de flecha universal.

Definición 1.16. Dada una categoría C y un par de flechas $f, g : a \to b$, un *coecualizador* de (f, g) es una flecha $u : b \to e$ (o un par (e, u)) tal que
(i) $uf = ug$
(ii) Si $h : b \to c$ cumple $hf = hg$ entonces $h = h'u$ para una única flecha $h' : e \to c$.
Visto como diagrama sería

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & b \arrow[r, "u"] \arrow[dr, "h"'] & e \arrow[d, dotted, "h'"] & uf = ug \\ & & c & hf = hg. \end{tikzcd}$$

Notamos que un coecualizador u es epi, en efecto, si

$$b \xrightarrow{u} e \underset{h_1}{\overset{h_0}{\rightrightarrows}} c$$

con $h_0 u = h_1 u$ entonces $(h_0 u) f = (h_1 u) g$ y por lo tanto debe existir una única h' tal que $h_0 u = h_1 u = h' u$, luego $h' = h_0 = h_1$.

Los coecualizadores pueden verse como flechas universales a cierto funtor llamado *diagonal.*

1.4. Adjunciones.

Definición 1.17. Sean A y X categorías. Una *adjunción* de X a A es un triple $\langle F, G, \varphi \rangle : X \to A$ donde F y G son funtores

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "F"] & A \arrow[l, shift left, "G"] \end{tikzcd}$$

y φ es una función que asigna a cada par de objetos $x \in X$, $a \in A$ una biyección $\varphi = \varphi_{x,a} : A(Fx, a) \cong X(x, Ga)$ natural en x y en a. Dada una tal adjunción, el funtor F se dice *adjunto a izquierda* para G, mientras que G es el *adjunto a derecha* para F. Usamos la notación $F \dashv G$ para expresar este hecho.

Observar que $A(Fx, a)$ es el bifuntor

$$X^{op} \times A \xrightarrow{F \times Id} A^{op} \times A \xrightarrow{hom} \mathbf{Set}.$$

Similarmente, $X(x, Ga)$ es el bifuntor

$$X^{op} \times A \xrightarrow{Id \times G} X^{op} \times X \xrightarrow{hom} \mathbf{Set}.$$

La naturalidad de la biyección significa que para toda $k : a \to a'$ y $h : x' \to x$ se cumple

$$\begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "k_*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X(x,Ga) \arrow[d, "(Gk)_*"] \\ A(Fx,a') \arrow[r, "\varphi_{x,a'}"] & X(x,Ga') \end{tikzcd} \tag{1.18}$$

$$\begin{tikzcd} A(Fx,a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "(Fh)^*"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & X(x,Ga) \arrow[d, "h^*"] \\ A(Fx',a) \arrow[r, "\varphi_{x',a}"] & X(x',Ga). \end{tikzcd} \tag{1.19}$$

Teorema 1.20. *Una adjunción $\langle F, G, \varphi\rangle : X \to A$ determina*

(a) Una transformación natural $\eta : I_x \dot{\to} GF$ tal que para cada objeto x la flecha η_x es universal de x a G, mientras que el adjunto a izquierda de $f : Fx \to a$ es

$$\varphi f = Gf \circ \eta_x : x \to Ga. \tag{1.21}$$

(b) Una transformación natural $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ tal que cada flecha ε_a es universal de F a a, mientras que cada $g : x \to Ga$ tiene adjunto a derecha

$$\varphi^{-1} g = \varepsilon_a \circ Fg : Fx \to a. \tag{1.22}$$

Más aún las siguientes composiciones son las identidades

$$G \xrightarrow{\eta_G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G \qquad F \xrightarrow{F\eta} FGF \xrightarrow{\epsilon_F} F. \tag{1.23}$$

Las dos identidades se refieren a las composiciones verticales $1_G = G\varepsilon \bullet \eta G$ y $1_F = \varepsilon F \bullet F\eta$.

Demostración. (a) Sabemos que hay una biyección natural $\varphi_{x,a} : A(Fx,a) \cong X(x,Ga)$. Si $a = Fx$ entonces el lado izquierdo contiene la identidad 1_{Fx}; sea $\eta_x : x \to GFx$ su imagen por $\varphi_{x,Fx}$, es decir, $\eta_x = \varphi_{x,Fx}(1_{Fx})$. Veamos que esta flecha es universal de x a G: si $f : x \to Gd$ es flecha en X, sea $f' = \varphi^{-1}_{x,d}(f) : Fx \to d$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & GFx \arrow[d, dotted, "Gf'"] & Fx \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & Gd & d. \end{tikzcd}$$

Por naturalidad de $\varphi^{-1} : X(\cdot, G\cdot) \cong A(F\cdot, \cdot)$ se tiene que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X(x,GFx) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{x,Fx}"] \arrow[d, "(Gf')_*"'] & A(Fx,Fx) \arrow[d, "f'_*"] \\ X(x,Gd) \arrow[r, "\varphi^{-1}_{x,d}"] & A(Fx,d). \end{tikzcd}$$

En particular vale la igualdad $f'_*(\varphi^{-1}_{x,Fx}(\eta_x)) = \varphi^{-1}_{x,d}((Gf')_*(\eta_x))$. El lado izquierdo es $f' = \varphi^{-1}_{x,d}(f)$ y el derecho es $\varphi^{-1}_{x,d}(Gf' \circ \eta_x)$. Aplicando $\varphi_{x,d}$ a ambos miembros obtenemos $f = Gf' \circ \eta_x$ como se quería.

La función $x \mapsto \eta_x$ es una transformación natural $I_x : \dot{\to} GF$, en efecto, si $h : x' \to x$ es flecha en X entonces:

$$\begin{aligned}
\eta_x \circ h &= h^*(\eta_x) \\
&= h^*(\varphi_{x,Fx}(1_{Fx})) \\
&= \varphi_{x',Fx}((Fh)^*(1_{Fx})) \qquad \text{(naturalidad de } \varphi \text{ en } x) \\
&= \varphi_{x',Fx}(Fh) \\
&= \varphi_{x',Fx}(Fh \circ 1_{Fx'}) \\
&= \varphi_{x',Fx}((Fh)_*(1_{Fx'})) \\
&= (GFh)_*(\varphi_{x',Fx'}(1_{Fx'})) \qquad \text{(naturalidad de } \varphi \text{ en } Fx) \\
&= (GFh)_*(\eta_{x'}) \\
&= GFh \circ \eta_{x'}.
\end{aligned}$$

Es decir que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
x' \arrow[r, "\eta_{x'}"] \arrow[d, "h"'] & GFx' \arrow[d, "GFh"] \\
x \arrow[r, "\eta_x"] & GFx.
\end{tikzcd}$$

Además, el adjunto a derecha de $f : Fx \to a$ es

$$\varphi_{x,a}(f) = \varphi_{x,a}(f \circ 1_{Fx}) = \varphi_{x,a}(f_*(1_{Fx})) =$$
$$= (Gf)_*(\varphi_{x,Fx}(1_{Fx})) = (Gf)_*(\eta_x) = Gf \circ \eta_x.$$

La tercera igualdad se deduce de 1.18 para $k = f$, $a = Fx$ y $a' = a$.

(b) Si $x = Ga$ se tiene la biyección $\varphi_{Ga,a} : A(FGa, a) \cong X(Ga, Ga)$, definimos $\varepsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga}) : FGa \to a$. Veamos que esta flecha es universal de F a a: si $f : Fd \to a$ es flecha en A, sea $f' = \varphi_{d,a}(f) : d \to Ga$. Queremos ver que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
d \arrow[d, dotted, "f'"'] & Fd \arrow[r, "f"] \arrow[d, dotted, "Ff'"'] & a \\
Ga & FGa. \arrow[ur, "\varepsilon_a"'] &
\end{tikzcd}$$

Por naturalidad de φ^{-1} se tiene que

$$\begin{tikzcd}
A(FGa, a) \arrow[d, "(Ff')^*"'] & X(Ga, Ga) \arrow[l, "\varphi^{-1}_{Ga,a}"'] \arrow[d, "(f')^*"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\
A(Fd, a) & X(d, Ga). \arrow[l, "\varphi^{-1}_{d,a}"]
\end{tikzcd}$$

En particular vale la igualdad $(Ff')^*(\varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga})) = \varphi^{-1}_{d,a}((f')^*(1_{Ga}))$. El lado izquierdo es $\varepsilon_a \circ Ff'$ y el derecho es f como se quería. Para verificar que $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ es natural, consideramos $f : a \to a'$ y el siguiente diagrama que resulta de la naturalidad de la biyección φ^{-1}:

$$\begin{tikzcd} A(FGa,a) \arrow[r, "f_*"] & A(FGa,a') & A(FGa',a') \arrow[l, "(FGf)^*"'] \\ X(Ga,Ga) \arrow[u, "\varphi^{-1}_{Ga,a}"] \arrow[r, "(Gf)_*"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X(Ga,Ga') \arrow[u, "\varphi^{-1}_{Ga,a'}"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & X(Ga',Ga'). \arrow[l, "(Gf)^*"'] \arrow[u, "\varphi^{-1}_{Ga',a'}"'] \end{tikzcd}$$

Luego, se tiene que:

$$\begin{aligned} f\circ\varepsilon_a &= f\circ\varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga}) \\ &= f_*(\varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga})) \\ &= \varphi^{-1}_{Ga,a'}(1_{Ga})((Gf)_*(1_{Ga})) \\ &= \varphi^{-1}_{Ga,a'}((Gf)_*(1_{Ga})) \\ &= \varphi^{-1}_{Ga,a'}(Gf\circ 1_{Ga}) \\ &= \varphi^{-1}_{Ga,a'}(1_{Ga'}\circ Gf) \\ &= \varphi^{-1}_{Ga,a'}((Gf)_*(1_{Ga'})) \\ &= (FGf)^*(\varphi^{-1}_{Ga',a'}(1_{Ga'})) \\ &= \varepsilon_{a'}\circ FGf. \end{aligned}$$

Esto dice que el siguiente diagrama conmuta, lo cual prueba la naturalidad de ε:

$$\begin{tikzcd} FGa \arrow[r, "\varepsilon_a"] \arrow[d, "FGf"'] & a \arrow[d, "f"] \\ FGa' \arrow[r, "\varepsilon_{a'}"] & a'. \end{tikzcd}$$

El adjunto a izquierda de $g : x \to Ga$ es

$$\varphi^{-1}_{x,a}(g) = \varphi^{-1}_{x,a}(1_{Ga}\circ g) = \varphi^{-1}_{x,a}(g^*(1_{Ga})) = (Fg)^*(\varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga})) = \varepsilon_a\circ Fg.$$

Finalmente, si $x = Ga$, dado que $\varepsilon_a = \varphi^{-1}_{Ga,a}(1_{Ga}) : FGa \to a$, podemos escribir $\varphi_{Ga,a}(\varepsilon_a) = 1_{Ga}$ y por (a) se tiene que $1_{Ga} = \varphi_{Ga,a}(\varepsilon_a) = G\varepsilon_a\circ\eta_{Ga}$. De forma similar, si $a = Fx$, como $\eta_x = \varphi_{x,Fx}(1_{Fx}) : x \to GFx$ entonces $1_{Fx} = \varphi^{-1}_{x,Fx}(\eta_x)$ y por (b) $1_{Fx} = \varphi^{-1}_{x,Fx}(\eta_x) = \varepsilon_{Fx}\circ F\eta_x$.

□

Llamaremos a η la *unidad* y a ε la *counidad* de la adjunción. El siguiente teorema muestra que una adjunción queda determinada por varios fragmentos de información.

Teorema 1.24. *Cada adjunción $\langle F, G, \varphi\rangle : X \to A$ queda completamente determinada por cualquiera de los siguientes conjuntos de datos:*

(a) Funtores F, G y una transformación natural $\eta : I_X \dot{\to} GF$ tal que cada $\eta_x : x \to GF_x$ es universal de x a G, entonces φ se define como en 1.21.

(b) Un funtor $G : A \to X$ y para cada $x \in X$ un objeto $F_0x \in A$ y una flecha universal $\eta_x : x \to GF_0x$ de x a G. Entonces el funtor F tiene función objeto F_0 y se define sobre las flechas $h : x \to x'$ como $GFh\circ\eta_x = \eta_{x'}\circ h$.

(c) Funtores F, G y una transformación natural $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ tal que cada $\varepsilon_a : FGa \to a$ es universal de F a a, entonces φ^{-1} se define como en 1.22.

(d) Un funtor $F : X \to A$ y para cada $a \in A$ un objeto $G_0 a \in X$ y una flecha universal $\varepsilon_a : FG_0 a \to a$ de F a a.

(e) Funtores F, G y dos transformaciones naturales $\eta : I_X \dot{\to} GF$ y $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ tales que las composiciones $G\varepsilon \bullet \eta G$ y $\varepsilon F \bullet F\eta$ son las identidades de G y F respectivamente. Aquí φ se define por 1.21 y φ^{-1} por 1.22.

Demostración. (a) La afirmación que η_x es universal significa que para cada $f : x \to Ga$ existe exactamente una g tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "f"'] & GFx \arrow[d, dotted, "Gg"] & Fx \arrow[d, dotted, "g"] \\ & Ga & a. \end{tikzcd}$$

Esto implica que $\psi(g) = Gg \circ \eta_x$ define una biyección $\psi : A(Fx, a) \cong X(x, Ga)$. Esta biyección es natural en a porque G es funtor, en efecto, para verificar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[d, "h"'] & A(Fx,a) \arrow[r, "\psi_{x,a}"] \arrow[d, "h_*"'] & X(x,Ga) \arrow[d, "(Gh)_*"] \\ a' & A(Fx,a') \arrow[r, "\psi_{x,a'}"] & X(x,Ga') \end{tikzcd}$$

conmuta, hacemos

$$(Gh)_*(\psi_{x,a}(g)) = Gh \circ Gg \circ \eta_x = G(h \circ g) \circ \eta_x = \psi_{x,a'}(h \circ g) = \psi_{x,a'}(h_*(g)).$$

La biyección es también natural en x porque η es natural y porque G es funtor: el diagrama

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[d, "k"'] & A(Fx,a) \arrow[r, "\psi_{x,a}"] \arrow[d, "(Fk)^*"'] & X(x,Ga) \arrow[d, "k^*"] \\ x & A(Fx',a) \arrow[r, "\psi_{x',a}"] & X(x',Ga) \end{tikzcd}$$

conmuta como se verifica con el cálculo $k^*(\psi_{x,a}(g)) = \psi_{x,a}(g) \circ k = Gg \circ \eta_x \circ k = Gg \circ GFk \circ \eta'_x = G(g \circ Fk) \circ \eta'_x = G((Fk)^*(g)) \circ \eta'_x = \psi_{x',a}((Fk)^*(g))$. Esto prueba que ψ forma una adjunción $\langle F, G, \psi \rangle$. En el caso que η sea la unidad de una adjunción $\langle F, G, \varphi \rangle$ entonces $\psi = \varphi$ (por 1.21).

(b) Podemos expandir los datos a los de (a) y determinar así la adjunción. Aquí se nos da simplemente una flecha universal $\langle F_0 x, \eta_x \rangle$ para cada $x \in X$, veremos que hay una única manera de hacer que F_0 sea la función objeto de un funtor F para el que $\eta : I_X : \dot{\to} GF$ es natural.
Para cada $h : x \to x'$, la universalidad de η_x dice que hay exactamente una flecha (punteada) tal que conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} F_0 x \arrow[d, dotted] & x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[d, "h"'] & GF_0 x \arrow[d, dotted] \\ F_0 x' & x' \arrow[r, "\eta'_x"] & GF_0 x'. \end{tikzcd}$$

Elegimos esta flecha como $Fh : F_0 x \to F_0 x'$. Veamos que F es funtor:
$1_{F_0 x} : F_0 x \to F_0 x$ hace conmutar el diagrama anterior para $x' = x$ y $h = 1_x$. Por unicidad debe ser $F(1_x) = 1_{F_0 x}$. Para ver que respeta la composición tomamos $g : x' \to x''$ y

$f : x \to x'$, entonces $F(g \circ f) : F_x \to F_0 x''$ y vale que $G(Fg \circ Ff) \circ \eta_x = GFg \circ (GFf \circ \eta_x) = GFg \circ (\eta_x \circ f) = (GFg \circ \eta_{x'}) \circ f = \eta x'' \circ (g \circ f)$. Por lo tanto $F(g \circ f) = Fg \circ Ff$. La naturalidad de η es consecuencia directa de la universalidad de η_x.

(c) y (d) son similares (duales) a (a) y (b).

(e) Usaremos η y ε para definir funciones

$$A(Fx, a)X \underset{\theta}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} X(x, Ga)$$

dadas por $\varphi(f) = Gf \circ \eta_x$ para $f : Fx \to a$ y $\theta(g) = \varepsilon_a \circ Fg$ para $g : x \to Ga$. Como G es funtor y η es natural se tiene:

$$\varphi(\theta(g)) = G(\theta(g)) \circ \eta_x = G\varepsilon_a \circ GFg \circ \eta_x = G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} \circ g.$$

Por hipótesis $G\varepsilon_a \circ \eta_{Ga} = 1_{Ga}$ por lo tanto $\theta \circ \varphi = id$. De forma similar $\varphi \circ \theta = id$ y por lo tanto φ es biyección. Para ver que es natural tomamos $f : Fx \to a$, $h : x' \to x$, $k : a \to a'$ y calculamos

$$\varphi(f \circ Fh) = G(f \circ Fh) \circ \eta_{x'} = Gf \circ GFh \circ \eta_{x'} = Gf \circ \eta_x \circ h = \varphi(f) \circ h$$
$$\varphi(k \circ f) = G(k \circ f) \circ \eta_x = Gk \circ Gf \circ \eta_x = Gk \circ \varphi(f)$$

que son las condiciones 1.18 y 1.19 de naturalidad. Concluimos entonces que $\langle F, G, \varphi \rangle$ es adjunción.

□

Corolario 1.25. *Dos adjuntos a izquierda F y F' de un funtor $G : A \to X$ son naturalmente isomorfos.*

Demostración. Si $\langle F, G, \eta, \varphi \rangle$ y $\langle F', G, \eta', \varphi' \rangle$ son dos adjunciones, queremos ver que existe $\tau : F \dot{\to} F'$ isomorfismo natural. Por ser $\langle Fx, \eta_x \rangle$ una flecha universal de x a G, existe una única flecha $\tau_x : Fx \to F'x$ tal que $G\tau_x \circ \eta_x = \eta'_x$. Del mismo modo, por ser $\langle F'x, \eta'_x \rangle$ una flecha universal de x a G, existe una única flecha $\tau'_x : F'x \to Fx$ tal que $G\tau'_x \circ \eta'_x = \eta_x$. Esto implica que τ_x es inversible. Falta comprobar que son las componentes de una transformación natural, es decir que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "h"'] & Fx \arrow[r, "\tau x"] \arrow[d, "Fh"'] & F'x \arrow[d, "F'h"] \\ x' & Fx' \arrow[r, "\tau_{x'}"] & F'x'. \end{tikzcd}$$

Dado que la universalidad de la flecha η_x nos permite completar de manera única el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "\eta'_{x'} \circ h"'] & GFx \arrow[d, dotted, "G\cdot"] & Fx \arrow[d, dotted] \\ & GF'x' & F'x', \end{tikzcd}$$

calculamos

$$G(F'h \circ \tau_x) \circ \eta_x = GF'h \circ G\tau_x \circ \eta_x = GF'h \circ \eta'_x = \eta'_{x'} \circ h$$
$$G(\tau_{x'} \circ Fh) \circ \eta_x = G\tau_{x'} \circ GFh \circ \eta_x = G\tau_{x'} \circ \eta_{x'} = \eta'_{x'} \circ h.$$

Las últimas igualdades se deben a la naturalidad de η' y η. Esto nos permite concluir $F'h \circ \tau_x = \tau_{x'} \circ Fh$, es decir, τ es natural. □

Notar que, por dualidad, también vale que dos adjuntos a derecha de un mismo funtor son naturalmente isomorfos. Como consecuencia de este corolario podemos definir un *funtor libre* como el adjunto a izquierda (si existe) de un funtor olvidadizo $G : C \to D$ ya que dos candidatos a funtor libre serán isomorfos en la categoría funtor D^C. Las adjunciones del tipo "libre-olvidadizo" serán nuestra principal herramienta en lo que sigue. Una observación sobre ellas es que la unidad y la counidad tienen interpretaciones bastante simples, la primera puede considerarse como "inserción de generadores" y la counidad como "evaluación".

Discutimos ahora brevemente la noción de transformación de adjunciones, concepto que surgirá al momento de comparar dos categorías y adjunciones entre las mismas. Dadas dos adjunciones $\langle F, G, \varphi, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A$ y $\langle F', G', \varphi', \eta', \varepsilon' \rangle : X' \to A'$, definimos un mapa de adjunciones (de la primera a la segunda) como un par de funtores $K : A \to A'$ y $L : X \to X'$ tal que ambos cuadrados

(1.26)
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "G"] \arrow[d, "K"'] & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "L"'] & A \arrow[d, "K"'] \\ A' \arrow[r, "G'"] & X' \arrow[r, "F'"] & A' \end{tikzcd}$$

conmutan y tal que el diagrama de hom-sets

(1.27)
$$\begin{tikzcd} A(Fx, a) \arrow[r, "\varphi_{x,a}"] \arrow[d, "K=K_{Fx,a}"'] & X(x, Ga) \arrow[d, "L=L_{x,Ga}"] \\ A'(KFx, Ka) \arrow[d, equal] & X'(Lx, LGa) \arrow[d, equal] \\ A'(F'Lx, Ka) \arrow[r, "\varphi'_{Lx,Ka}"] & X'(Lx, G'Ka) \end{tikzcd}$$

conmuta para todo $x \in X$, $a \in A$. Aquí $K_{Fx,a}$ es el mapa $f \mapsto Kf$ dado por el funtor K y análogamente para $L_{x,Ga}$.

Proposición 1.28. *Dadas adjunciones como arriba y funtores K y L que satisfacen 1.26, la condición 1.27 sobre los hom-sets es equivalente a la igualdad $L\eta = \eta' L$ y también a la igualdad $\varepsilon' K = K\varepsilon$.*

Demostración. Si 1.27 conmuta, sea $a = Fx$ y consderando $1_{Fx} = Fx \to Fx$ obtenemos $L\eta_x = L(\varphi_{x,Fx}(1_{Fx})) = \varphi'_{Lx,KFx}(K1_{Fx}) = \varphi'_{Lx,KFx}(1_{KFx}) = \varphi'_{Lx,F'Lx}(1_{F'Lx}) = \eta'_{Lx}$.
Se sigue que

$$\langle L\eta : L \to LGF \rangle = \langle \eta' L : L \to G'F'L \rangle,$$

donde $LGF = G'F'L$ por 1.26. Recíprocamente, dada la igualdad $L\eta = \eta' L$ de transformaciones naturales, si $f : Fx \to a$ entonces
$L(\varphi_{x,a}(f)) = L(Gf \circ \eta_x) = LGf \circ L\eta_x = LGf \circ \eta'_{lx} = G'Kf \circ \eta'_{Lx} = \varphi'_{Lx,Ka}(Kf)$.

El caso de las counidades es dual.

□

2. Mónadas

2.1. Generalidades. Un *monoide* M es un conjunto M junto con dos funciones

$$\mu : M \times M \to M, \qquad \eta : 1 \to M$$

tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} M\times M\times M \arrow[r, "1\times\mu"] \arrow[d, "\mu\times 1"'] & M\times M \arrow[d, "\mu"] \\ M\times M \arrow[r, "\mu"] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1\times M \arrow[r, "\eta\times 1"] \arrow[dr, "\lambda"'] & M\times M \arrow[d, "\mu"] & M\times 1 \arrow[l, "1\times\eta"'] \arrow[dl, "\rho"] \\ & M. & \end{tikzcd}$$

Aquí 1 es la función identidad $M \to M$ en $1 \times \mu$ y 1 en $1 \times M$ es el singulete $1 = \{0\}$. λ y ρ son las biyecciones $1 \times X \xrightarrow{\lambda} X \xleftarrow{\rho} X \times 1$.

La definición de mónada es como la de monoide reemplazando el conjunto M por el endofuntor $T : X \to X$ y el producto cartesiano por la composición de funtores, la operación binaria $\mu : M \times M \to M$ por $\mu : T^2 \dot{\to} T$ y la unidad (identidad) $\eta : 1 \to M$ por $\eta : I_X \dot{\to} X$. Llamaremos entonces a η la *unidad* y a μ la *multiplicación* de la mónada. El primer diagrama se denomina la asociatividad para la mónada, mientras que el segundo diagrama denomina las leyes de identidad izquierda y derecha respectivamente. En conclusión, una mónada es un monoide en la categoría de los endofuntores de X con el producto cartesiano reemplazado por la composición de endofuntores y la unidad por el funtor identidad. Más precisamente:

Definición 2.1. Una *mónada* en una categoría X es un funtor $T : X \to X$ junto con dos transformaciones naturales $\mu : T^2 \dot{\to} T$ y $\eta : I_X \dot{\to} T$ tales que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "\mu_T"] \arrow[d, "T\mu"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "T\eta"] \arrow[dr, "="'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "\eta_T"'] \arrow[dl, "="] \\ & T. & \end{tikzcd}$$

Si (S, η, μ) es una mónada en una categoría C y (T, η', μ') es una mónada en una categoría D, definimos un *funtor entre las mónadas* como un funtor $F : D \to C$ junto con una transformación natural $\sigma : SF \dot{\to} FT$ que satisface las identidades

$$F\eta' = \sigma \circ \eta F, \qquad \sigma \circ \mu F = F\mu' \circ \sigma T \circ S\sigma.$$

Si $F = I_D : D \to D$ es la identidad, se tiene la noción de *morfismo entre mónadas*: una transformación natural $\sigma : S \dot{\to} T$ tal que, para cada $d \in D$, valen las igualdades

$$\eta'_d = \sigma_d \circ \eta_d, \qquad \sigma_d \circ \mu_d = \mu'_d \circ \sigma_{Td} \circ S\sigma_d = \mu'_d \circ T\sigma_d \circ \sigma_{Sd}.$$

Esto es, hace conmutar los diagramas.

$$\begin{tikzcd} & I_D \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ S \arrow[rr, "\sigma"] & & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\sigma\circ\sigma"'] & S \arrow[d, "\sigma"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu'"] & T. \end{tikzcd}$$

Toda adjunción $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A$ da lugar a una mónada en la categoría X. La composición $T = GF : X \to X$ es endofuntor, la unidad η de la adjunción es una transformación natural $\eta : I_X \dot{\to} T$ y la counidad $\varepsilon : FG \dot{\to} I_A$ se compone horizontalmente para dar lugar a una transformación natural $\mu = G\varepsilon F : GFGF \dot{\to} GF$.

La asociatividad para μ se representa por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, "G\varepsilon FGF"] \arrow[d, "GFG\varepsilon F"'] & GFGF \arrow[d, "G\varepsilon F"] \\ GFGF \arrow[r, "G\varepsilon F"'] & GF. \end{tikzcd}$$

Por ser ε natural se tiene

$$\begin{tikzcd} FGFx \arrow[d, "\varepsilon_{Fx}"'] \\ Fx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} FGFGFx \arrow[r, "\varepsilon_{FGFx}"] \arrow[d, "FG\varepsilon_{Fx}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & FGFx \arrow[d, "\varepsilon_{Fx}"] \\ FGFx \arrow[r, "\varepsilon_{Fx}"] & Fx. \end{tikzcd}$$

Luego $\varepsilon_{Fx} \circ \varepsilon_{FGFx} = \varepsilon_{Fx} \circ FG\varepsilon_{Fx}$ y componiendo con G a izquierda obtenemos la conmutatividad del diagrama. Otra forma de ver esto es notar que la "ley de intercambio" 1.13 para la composición horizontal $\varepsilon\varepsilon$ resulta en la igualdad $\varepsilon\varepsilon = \varepsilon \bullet (FG\varepsilon) = \varepsilon \bullet (\varepsilon FG)$, la cual lleva a la igualdad requerida componiendo a izquierda con G y a derecha con F.

Similarmente, la unidad a izquierda y derecha se refleja en la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} GFx \arrow[r, "\eta_{GFx}"] \arrow[dr, "="'] & GFGFx \arrow[d, "\mu_x"] & GFx \arrow[l, "GF\eta_x"'] \arrow[dl, "="] \\ & GFx, & \end{tikzcd}$$

pero esto es consecuencia inmediata de las identidades 1.23.

Concluimos que $\langle GF, \eta, G\varepsilon F\rangle$ es una mónada en X que llamaremos *mónada definida por la adjunción* $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle$.

2.2. Toda mónada se define por sus T-álgebras. En esta sección nos ocuparemos de la siguiente pregunta: dada una mónada en una categoría X de la cual se sabe que proviene de una adjunción, ¿qué podemos decir de la adjunción original y de la segunda categoría involucrada en la misma? ¿Podemos recuperar completamente esos objetos a partir de la mónada?

Definición 2.2. Si $\langle T, \eta, \mu\rangle$ es una mónada en X, una *T-álgebra* $\langle x, h\rangle$ es un par que consiste de un objeto $x \in X$ y una flecha $h : Tx \to x$ de X (o sea un álgebra para el funtor T) que hace conmutar los diagramas

$$\begin{tikzcd} T^2x \arrow[r, "Th"] \arrow[d, "\mu_x"'] & Tx \arrow[d, "h"] \\ Tx \arrow[r, "h"] & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta_x"] \arrow[dr, "1_x"'] & Tx \arrow[d, "h"] \\ & x. \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

Un *morfismo de T-álgebras* $f : \langle x, h\rangle \to \langle x', h'\rangle$ es una flecha $f : x \to x'$ de X que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} x & Tx \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "Tf"] \\ x' \arrow[from=u, "f"'] & Tx'. \arrow[l, "h'"'] \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Teorema 2.5. *Si $\langle T,\eta,\mu\rangle$ es una mónada en X, entonces el conjunto de sus T-álgebras y sus morfismos forman una categoría X^T. Hay una adjunción $\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T\rangle : X \to X^T$ en donde los funtores G^T y F^T están dados por las asignaciones*

$$G^T\colon \begin{tikzcd} \langle x,h\rangle \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & x \arrow[d, "f"] \\ \langle x',h'\rangle \arrow[r, mapsto] & x' \end{tikzcd} \qquad F^T\colon \begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & \langle Tx,\mu_x\rangle \arrow[d, "Tf"] \\ x' \arrow[r, mapsto] & \langle Tx',\mu_{x'}\rangle. \end{tikzcd}$$

Mientras que $\eta^T = \eta$ y $\varepsilon^T\langle x,h\rangle = h$ para cada T-álgebra $\langle x,h\rangle$. La mónada definida en X por esta adjunción es $\langle T,\eta,\mu\rangle$.

Demostración. Si $f : \langle x,h\rangle \to \langle x',h'\rangle$ y $g : \langle x',h'\rangle \to \langle x'',h''\rangle$ son flechas en X^T, su composición $g\circ f : \langle x,h\rangle \to \langle x'',h''\rangle$ es morfismo de T-álgebras pues $(G\circ f)\circ h = g\circ(f\circ h) = g\circ(h'\circ Tf) = (g\circ h')\circ Tf = (h''\circ Tg)\circ Tf = h''\circ T(g\circ f)$. La identidad $1_x : \langle x,h\rangle \to \langle x,h\rangle$ es morfismo de T-álgebras. La composición es claramente asociativa y valen las leyes de identidad a izquierda y derecha. Se tiene entonces que X^T es categoría.

El funtor $G^T : X^T \to X$ es claramente un funtor, es el funtor que "olvida" el mapa estructura de cada T-álgebra. Por otro lado, para cada x, el par $\langle Tx, \mu_x : T(Tx) \to Tx\rangle$ es una T-álgebra (la T-álgebra *libre* en x), en efecto:

$$\begin{tikzcd} T^2(Tx) \arrow[r, "T\mu_x"] \arrow[d, "\mu_{Tx}"'] & T(Tx) \arrow[d, "\mu_x"] \\ T(Tx) \arrow[r, "\mu_x"] & Tx \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "\eta_{Tx}"] \arrow[dr, "="'] & T(Tx) \arrow[d, "\mu_x"] \\ & Tx. \end{tikzcd}$$

Estos diagramas conmutan por ser η unidad a izquierda y μ multiplicación de la mónada T. En el caso de las flechas, veamos que $F^T f = Tf$ es efectivamente un morfismo de T-álgebras: el diagrama

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, "f"'] & Tx \arrow[d, "Tf"'] & T(Tx) \arrow[l, "\mu_x"'] \arrow[d, "T(Tf)"] \\ x' & Tx' & T(Tx') \arrow[l, "\mu_{x'}"] \end{tikzcd}$$

conmuta por ser μ natural. Los axiomas para funtor son claros pues T es funtor, se sigue que F^T es funtor de X en X^T.

Como $G^T F^T x = G^T\langle Tx,\mu_x\rangle = Tx$, entonces $\eta^T : I_X \dot\to G^T F^T$ dada por $\eta^T_x := \eta_x : x \to Tx = G^T F^T x$ es natural, ya que η es transformación natural. Por otro lado, como $F^T G^T\langle x,h\rangle = F^T x = \langle Tx,\mu_x\rangle$, podemos definir $\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle} : F^T G^T\langle x,h\rangle \to I_{X^T}\langle x,h\rangle$ por $\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle} := h : Tx \to x$, y esto resulta flecha en X^T, componentes de una transformación natural $\varepsilon^T : F^T G^T \dot\to I_{X^T}$, en efecto, se tienen los diagramas

$$\begin{tikzcd} Tx \arrow[d, "\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T(Tx) \arrow[l, "\mu_x"'] \arrow[d, "Th=T\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle}"] \\ x & Tx \arrow[l, "h"] \end{tikzcd};\qquad \begin{tikzcd} F^T G^T\langle x,h\rangle \arrow[r, "h=\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle}"] \arrow[d, "Tf=F^T G^T f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \langle x,h\rangle \arrow[d, "f"] \\ F^T G^T\langle x',h'\rangle \arrow[r, "h'=\varepsilon^T_{\langle x',h'\rangle}"] & \langle x',h'\rangle, \end{tikzcd}$$

el de la izquierda muestra que $\varepsilon^T_{\langle x,h\rangle}$ es flecha, esto es simplemente la ley asociativa (diagrama izquierdo en 2.3) en la definición de T-álgebra. El diagrama derecho no es más que la definición de morfismo de T-álgebra aplicado a $f : \langle x, h\rangle \to \langle x', h'\rangle$ y muestra que ε^T es efectivamente transformación natural.

Las identidades triangulares se traducen aquí como

$$G^T \xrightarrow{\eta^T G^T} G^T F^T G^T \xrightarrow{G^T \varepsilon^T} G^T; \quad F^T \xrightarrow{F^T \eta^T} F^T G^T F^T \xrightarrow{\varepsilon^T F^T} F^T,$$

o vistas como diagramas:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "\eta^T_x = \eta_x"] \arrow[dr, "="'] & Tx \arrow[d, "h"] \\ & x \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Tx \arrow[r, "T\eta^T_x = T\eta_x"] \arrow[dr, "="'] & T^2x \arrow[d, "\mu_x"] \\ & Tx. \end{tikzcd}$$

El diagrama izquierdo conmuta pues es la parte derecha en 2.3 (ley de identidad de la T-álgebra) y el diagrama derecho conmuta pues es la ley de unidad a derecha de la mónada T.

Usando la parte (e) del teorema 1.24 sobre adjunciones podemos concluir que la construcción $\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T\rangle$ determina una adjunción $X \to X^T$.

Esta adjunción determina a su vez una mónada: el endofuntor $G^T F^T$ es el funtor T original, su unidad η^T es la unidad η de la mónada y la multiplicación $\mu^T = G^T \varepsilon^T F^T$ cumple $\mu^T_x = G^T \varepsilon^T_{F^T x} = G^T \varepsilon^T_{\langle Tx, \mu_x\rangle} = G^T \mu_x = \mu_x$, o sea que es la multiplicación original. $\square$

Hemos encontrado una respuesta parcial a la pregunta inicial: en la prueba de este teorema construimos, a partir de una mónada T, una categoría (llamada categoría de *Eilenberg-Moore*) y una adjunción que define la mónada original, tal adjunción no es más que la adjunción "libre-olvidadizo" de X a X^T.

Observación 2.6. Una subcategoría *plena* B de una categoría A es una que contiene para cada par de objetos $b, b' \in B$ todas las flechas $b \to b'$ en A. Dada una adjunción $\langle F, G, \varphi\rangle : X \to A$, cualquier subcategoría plena $B \subseteq A$ que contenga todos los objetos Fx para $x \in X$ lleva a una nueva adjunción $\langle F_B, G_B, \varphi_B\rangle : X \to B$, donde el funtor F_B es el funtor F con codominio restringido de A a B, G_B es G con dominio restringido a B, mientras que para cada $x \in X$ y $b \in B$ la adjunción dada brinda una biyección φ_B

$$hom_B(F_B X, b) = hom_A(Fx, b) \cong hom_X(x, Gb) = hom_X(x, G_B b)$$

que es natural en X y B. Más aún, esta segunda adjunción φ_B define en X la misma mónada que la primera adjunción. De esto concluimos que una mónada en X puede ser definida por muchas adjunciones. Más aún, podemos formar la categoría de todas las adjunciones que definen una mónada dada T en X, los morfismos en esta categoría serán los mapas de adjunciones que son la identidad en X.

El siguiente teorema afirma que la construcción de Eilenberg-Moore es un objeto terminal en la categoría de las adjunciones que definen una misma mónada.

Teorema 2.7. *Sean $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \to A$ una adjunción y $T = \langle GF, \eta, G\varepsilon F\rangle$ la mónada asociada en X. Entonces existe un único funtor "comparación" $K : A \to X^T$ que cumple $G^T K = G$ y $KF = F^T$.*

Demostración. La conclusión del teorema afirma que podemos completar la línea punteada en el siguiente diagrama de modo que ambos cuadrados conmuten

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "G"] \arrow[d, dotted, "K"'] & X \arrow[r, "F"] \arrow[d, "I_X"'] & A \arrow[d, dotted, "K"'] \\ X^T \arrow[r, "G^T"] & X \arrow[r, "F^T"] & X^T. \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

La counidad ε da para cada $a \in A$ una flecha $G\varepsilon_a : GFGa \to Ga$. Esta flecha puede considerarse una función estructura para una T-álgebra de base $x = Ga$ ya que los diagramas

$$\begin{tikzcd} GFGFGa \arrow[r, "GFG\varepsilon_a"] \arrow[d, "G\varepsilon_{FGa}=\mu^T_{Ga}"'] & GFGa \arrow[d, "G\varepsilon_a"] \\ GFGa \arrow[r, "G\varepsilon_a"] & Ga \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Ga \arrow[r, "\eta_{Ga}"] \arrow[dr, "1_{Ga}"'] & GFGa \arrow[d, "G\varepsilon_a"] \\ & Ga \end{tikzcd}$$

conmutan, en efecto, el segundo es la identidad triangular

$$G \xrightarrow{\eta G} GFG \xrightarrow{G\varepsilon} G$$

de la adjunción y el primero es la naturalidad de ε para la flecha ε_a (es decir $\varepsilon_a \circ \varepsilon_{FGa} = \varepsilon_a \circ FG\varepsilon_a$) y posterior aplicación de G.

Luego, para cada $f : a \to a'$ en A definimos K como

$$Ka = \langle Ga, G\varepsilon_a \rangle; \qquad Kf = Gf : \langle Ga, G\varepsilon_a \rangle \to \langle Ga', G\varepsilon_{a'} \rangle. \tag{2.9}$$

Para verificar que Kf es morfismo hacemos

$$\begin{tikzcd} Ga \arrow[d, "Kf=Gf"'] & GFGa \arrow[l, "G\varepsilon_a"'] \arrow[d, "GFKf=GFGf"] \\ Ga' & GFGa' \arrow[l, "G\varepsilon_{a'}"] \end{tikzcd}$$

el cual conmuta por naturalidad de ε para $f : a \to a'$ y posterior aplicación de G.

Se verifica fácilmente que $K : A \to X^T$ es funtor. Además

$$KFx = \langle GFx, G\varepsilon_{Fx} \rangle = \langle Tx, \mu^T_x \rangle = F^T x,$$
$$G^T Ka = G^T \langle Ga, G\varepsilon_a \rangle = Ga,$$

por ende $KF = F^T$ y $G^T K = G$.

Falta mostrar que K es único. Primero, cada Ka debe ser una T-álgebra y el requisito de conmutatividad $G^T K = G$ significa que el objeto base de esta T-álgebra es Ga. Por lo tanto $Ka = \langle Ga, h \rangle$ para algún mapa estructura h. Más aún, $G^T K = G$ implica que el valor de K en una flecha f de A debe ser $Kf = Gf$, exactamente como lo hemos definido. Sólo falta determinar el valor de h. Observamos que el par de funtores K e I_X forman un mapa de adjunciones de $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle$ a $\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T \rangle$; esto es así gracias a la conmutatividad de 2.8 y al hecho que las dos adjunciones tienen la misma unidad (esto permite probar que 1.27 conmuta). Por la proposición 1.28 se cumple que $K\varepsilon = \varepsilon^T K$. Pero K en las flechas es G, por lo tanto $K\varepsilon_a = G\varepsilon_a$ para cada $a \in A$, mientras que la definición de la counidad ε^T de una T-álgebra da $\varepsilon^T_{Ka} = \varepsilon^T_{\langle Ga,h \rangle} = h$. Luego, $h = G\varepsilon_a$. Se concluye que $K\varepsilon = \varepsilon^T K$ implica $G\varepsilon_a = h$ y por lo tanto el mapa estructura h está determinado y K es único. $\square$

La pregunta natural es entonces cuándo K resulta isomorfismo. Tal inquietud motiva la siguiente

Definición 2.10. Diremos que una adjunción es monádica si el funtor comparación K es un isomorfismo y un funtor será *monádico* si es el adjunto a derecha de una adjunción monádica.

Intuitivamente, la monadicidad del par $F \dashv G$ significa que la categoría A es definible en término de datos en X y que el funtor $G : A \to X$ es isomorfo a un tipo particular de funtor olvidadizo. En la próxima sección daremos un importante ejemplo de adjunción monádica. El siguiente ejemplo es un caso donde el funtor olvidadizo **no** es monádico.

Ejemplo 2.11. Consideramos el funtor olvidadizo $G : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ y el funtor $D : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ que asigna a cada conjunto X su espacio topológico discreto. Se cumple que $D \dashv G$, en efecto, la flecha identidad $\eta_X : X \to GDX$ es trivialmente universal de X a G (dado un e.t. Y, cualquier función $f : X \to GY$ es continua si la consideramos como $f : DX \to Y$ en $\mathbf{Top}$). Esta adjunción $\langle D, G, \eta, \varepsilon \rangle : \mathbf{Set} \to \mathbf{Top}$ define en $\mathbf{Set}$ la mónada identidad $I = (I_X, 1, 1)$. Las I-álgebras en $\mathbf{Set}$ son los conjuntos, por lo tanto el funtor comparación $K : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ es el funtor olvidadizo que obviamente no es isomorfismo.

2.3. Monadicidad de un funtor olvidadizo. En esta sección definiremos las estructuras algebraicas de cierto "tipo" para así obtener la categoría correspondiente a una *variedad* de álgebras. A partir de este concepto se obtendrá una adjunción de tipo "libre-olvidadizo" entre la categoría de variedades y $\mathbf{Set}$ sobre la cual el teorema 2.14 nos dirá que es monádica.

Una *signatura* es un par (Ω, α) donde Ω es un conjunto de símbolos de operación y $\alpha : \Omega \to \mathbb{N}$ asigna a cada símbolo su *aridad*. Una Ω-álgebra será un álgebra k para el funtor $F^\Omega : Y \mapsto \biguplus_{f \in \Omega} Y^{\alpha(f)}$ en la categoría $\mathbf{Set}$. Para cada símbolo de operación f, la f-ésima componente de k es una función $f_k : Y^{\alpha(f)} \to Y$. Los morfismos de Ω-álgebras son funciones que respetan las operaciones, es decir, si h es morfismo entonces

$$h(f_k(y_1, \ldots, y_{\alpha(f)}) = f_k(h(y_1), \ldots, h(y_{\alpha(f)})).$$

Dado un conjunto X, consideramos el funtor $Y \mapsto F^\Omega \uplus X$. Existe el álgebra inicial para este funtor, su objeto base es el conjunto TX de términos en X que resulta de la unión de los conjuntos de palabras $T_k^\Omega = T_k$ construidos inductivamente como sigue:

- $T_0 = X$
- $T_{k+1} = T_k \cup \{f(t_1, \ldots, t_n) \mid f \in \Omega; \alpha(f) = n; t_1, \ldots, t_n \in T_k; n \geq 1\}$.

La condición de objeto inicial para el funtor considerado equivale a la propiedad universal del álgebra de términos: si (A, k) es una Ω-álgebra y $h : X \to A$ es una función, entonces h puede ser extendida a un morfismo $h' : TX \to A$.

Si fijamos un conjunto V de variables, una teoría ecuacional será un conjunto de pares $E \subseteq TV \times TV$. Un par de términos (t_1, t_2) es interpretado como una ecuación $t_1 = t_2$. Una Ω-álgebra (Y, k) satisface una teoría ecuacional E si para cada ecuación (t_1, t_2) en E y función $j : V \to Y$, su extensión $j' : TV \to Y$ cumple $j'(t_1) = j'(t_2)$. Llamaremos a estas álgebras $\langle \Omega, E \rangle$-álgebras y se ve que forman una categoría denotada $\langle \Omega, E \rangle{-}\mathbf{Alg}$.

Teorema 2.12. *El funtor olvidadizo $G : \langle \Omega, E \rangle{-}\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}$ para cualquier signatura Ω y teoría ecuacional E tiene un adjunto a izquierda (llamamos a tal adjunto el funtor libre).*

La prueba estándar de este teorema usa el teorema del funtor adjunto de Freyd el cual especifica ciertas condiciones que debe cumplir un funtor para ser adjunto a derecha sin necesidad de conocer el adjunto a izquierda. Notamos que la mónada GF definida por la adjunción resultante es efectivamente (isomorfa a) el funtor T que devuelve los términos sobre un conjunto.

Un *fork* en una categoría C es un diagrama

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & b \arrow[r, "e"] & c \end{tikzcd}$$

en C tal que $e\partial_0 = e\partial_1$. Con este concepto, una flecha e es un coecualizador del par paralelo ∂_0 y ∂_1 si es un fork y si toda $f : b \to d$ con $f\partial_0 = f\partial_1$ es de la forma $f = f'e$ para una única $f' : c \to d$. Una flecha e se dice *coecualizador absoluto* de ∂_0 y ∂_1 en C si para cualquier funtor $T : C \to X$ el fork resultante

$$\begin{tikzcd} Ta \arrow[r, shift left, "T\partial_0"] \arrow[r, shift right, "T\partial_1"'] & Tb \arrow[r, "Te"] & Tc \end{tikzcd}$$

tiene todavía a Te como coecualizador (de $T\partial_0$ y $T\partial_1$). En particular, un coecualizador absoluto es automáticamente un coecualizador (basta tomar $T = I_C$). Un *split fork* en C es un fork con otras dos flechas $a \stackrel{t}{\leftarrow} b \stackrel{s}{\leftarrow} c$ que satisfacen las condiciones

$$e\partial_0 = e\partial_1; \qquad es = 1; \qquad \partial_0 t = 1; \qquad \partial_1 t = se.$$

En tal caso decimos que s y t dividen el fork. Un split fork puede representarse como un par de cuadrados conmutativos:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[r, "t"] \arrow[d, "e"'] & a \arrow[r, "\partial_0"] \arrow[d, "\partial_1"] & b \arrow[d, "e"] \\ c \arrow[r, "s"] & b \arrow[r, "e"] & c \end{tikzcd}$$

tal que ambas composiciones horizontales son la identidad. Se prueba fácilmente que en todo split fork, e es el coecualizador de ∂_0 y ∂_1.

Con un *split coecualizador* de ∂_0 y ∂_1 nos referiremos a la flecha e de un tal split fork en ∂_0 y ∂_1. Como cualquier funtor T preserva todas las identidades que definen un split fork, se puede ver que e resulta un coecualizador absoluto de ∂_0 y ∂_1.

Una última definición de este estilo: un funtor $G : A \to X$ *crea coecualizadores* para un par paralelo $f, g : a \rightrightarrows b$ en A cuando para cada coecualizador $u : Gb \to z$ de Gf y Gg en X hay un único objeto c y una única flecha $e : b \to c$ que es coecualizador de f y g y satisface las igualdades $Gc = z$ y $Ge = u$.

A continuación enunciamos el teorema de Beck, el cual caracteriza la categoría de T-álgebras para cualquier mónada T como una categoría con una adjunción en la cual el funtor olvidadizo crea coecualizadores adecuados.

Teorema 2.13. *Sea $\langle F, G, \eta, \varepsilon\rangle : X \to A$ una adjunción, $\langle T, \eta, \mu\rangle$ la mónada que define en X, X^T la categoría de T-álgebras de esta mónada y $\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T\rangle : X \to X^T$ la adjunción correspondiente. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(I) *El único funtor comparación $K : A \to X^T$ es isomorfismo;*
(II) *El funtor $G : A \to X$ crea coecualizadores para aquellas flechas paralelas f, g en A para las cuales Gf y Gg tienen un coecualizador absoluto en X;*
(III) *El funtor $G : A \to X$ crea coecualizadores para aquellas flechas paralelas f, g en A para las cuales Gf y Gg tienen un split coecualizador en X.*

La prueba de este teorema puede encontrarse en [3]. Enunciamos y probamos ahora el teorema principal de esta sección.

Teorema 2.14. *Sea Ω un conjunto de operadores, E un conjunto de identidades, G el funtor olvidadizo de la categoría $\langle\Omega, E\rangle-\mathbf{Alg}$ de todas las $\langle\Omega, E\rangle$-álgebras a* **Set** *y T la mónada resultante en* **Set**. *Entonces el funtor comparación $K : \langle\Omega, E\rangle-\mathbf{Alg} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{T}}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Usaremos el teorema anterior, consideramos entonces cualquier par paralelo $f, g : A \rightrightarrows B$ de morfismos de $\langle\Omega, E\rangle$-álgebras para los cuales las funciones subyacentes tienen un coecualizador absoluto e:

$$GA \underset{Gg}{\overset{Gf}{\rightrightarrows}} GB \xrightarrow{e} X.$$

Para mostrar que G crea coecualizadores debemos verificar que el mapa de conjuntos e se levanta a un único morfismo $B \to ?$ de álgebras, y que este mapa es coecualizador de las flechas f y g.

Consideramos cualquier operador n-ario $\omega \in \Omega$ con sus acciones ω_A y ω_B en los conjuntos A y B (identificamos el álgebra A con el conjunto subyacente $|A|$). En el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A^n \arrow[r, shift left, "f^n"] \arrow[r, shift right, "g^n"'] \arrow[d, "\omega_A"'] & B^n \arrow[r, "e^n"] \arrow[d, "\omega_B"] & X^n \arrow[r, dotted, "h'^n"] \arrow[d, dotted, "\omega_X"] & C^n \arrow[d, "\omega_C"] \\
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, dotted, "h'"] & C
\end{tikzcd} \tag{2.15}$$

los dos cuadrados izquierdos conmutan (para f y g respectivamente) pues f y g son morfismos de Ω-álgebras. La función e es coecualizador absoluto en **Set** y por lo tanto su n-ésima potencia e^n es también coecualizador (de f^n y g^n). Pero

$$e\omega_B f^n = ef\omega_A = eg\omega_A = e\omega_B g^n,$$

por lo que $e\omega_B$ debe factorizarse de manera única a través de este ecualizador como $e\omega_b = \omega_X e^n$. Esto define la operación ω_X en X de modo que el cuadrado central de 2.15 conmute, es decir e es morfismo de Ω-álgebras. El mismo diagrama se aplica a todos los operadores λ y define λ_X de forma única. Se sigue que cualquier identidad $\lambda_B = \mu_B$ válida en B también es válida en X, de modo que X es Ω-álgebra.

Falta mostrar que e es coecualizador de f y g. Consideramos un morfismo $h : B \to C$ de álgebras tal que $hf = hg$. Luego, aplicando el funtor olvidadizo G, obtenemos que $hf = hg$ en **Set**, de modo que h se factoriza $h = h'e$ para una única función h'. Debemos mostrar que el lado derecho de 2.15 conmuta para cualquier operador ω. Pero h es morfismo de álgebras y por lo tanto

$$h'\omega_X e^n = h'e\omega_B = h\omega_B = \omega_C h^n = \omega_C h'^n e^n.$$

Como e^n es coecualizador, entonces es epi y de esto se concluye que $h'\omega_X = \omega_C h'^n$ como se buscaba. $\square$

Este teorema nos dice entonces que podemos recuperar la adjunción "libre-olvidadizo" entre **Set** y una variedad algebraica con la información dada por la mónada resultante en **Set**. Esto nos da una manera "categórica" de hablar de una variedad algebraica, en cada caso son simplemente las álgebras de las correspondientes mónadas. Los endofuntores de tales mónadas para una variedad dan los conjuntos subyacentes de los objetos libres de la variedad.

2.4. La categoría de Kleisli de una mónada. En esta sección completamos la respuesta a la pregunta formulada anteriormente ocupándonos de contruir un objeto inicial en la categoría de las adjunciones que definen una mónada, la cual puede ser considerada como la más "pequeña" de tales adjunciones.

Teorema 2.16. *Dada una mónada $\langle T, \eta, \mu\rangle$ en una categoría X, consideramos para cada objeto $x \in X$ un nuevo objeto x_T y para cada flecha $f : x \to Ty$ en X una nueva flecha $f^\flat : x_T \to y_T$. Estos nuevos objetos y flechas constituyen una nueva categoría con la composición de $f^\flat$ y $g^\flat : y_T \to z_T$ definida por*

$$g^\flat \circ f^\flat = (\mu_z \circ Tg \circ f)^\flat. \tag{2.17}$$

Más aún, existen funtores $F_T : X \to X_T$ y $G_T : X_T \to X$ definidos por

$$F_T : \ k : x \to y \mapsto (\eta_y \circ k)^\flat : x_T \to y_T \tag{2.18}$$

$$G_T : \ f^\flat : x_T \to y_T \mapsto \mu_y \circ Tf : Tx \to T^2x \to Ty \tag{2.19}$$

de modo que $G_T x_T = Tx$ en objetos. La biyección $f^\flat \mapsto f$ da una adjunción $\langle F_T, G_T, \varphi_T\rangle : X \to X_T$ que define en X la mónada original $\langle T, \eta, \mu\rangle$.

Demostración. Veamos primero que la construcción dada es efectivamente una categoría. Dado $x_T \in X_T$ la flecha $\eta_x^\flat$ es la flecha identidad 1_{x_T}, en efecto: si $f^\flat : x_T \to y_T$

$$\begin{aligned} f^\flat \circ 1^\flat_{x_T} =& f^\flat \circ \eta_x^\flat = (\mu_y \circ Tf \circ \eta_x)^\flat = (\mu_y \circ \eta_{Ty} \circ f)^\flat = (1_{Ty} \circ f)^\flat = f^\flat \\ 1_{y_T} \circ f^\flat =& \eta_y^\flat \circ f^\flat = (\mu_y \circ T\eta_y \circ f)^\flat = f^\flat. \end{aligned}$$

Para verificar la asociatividad de la composición tomamos $f^\flat : x_T \to y_T$, $g^\flat : y_T \to z_T$, $h^\flat : z_T \to w_T$ y calculamos

$$\begin{aligned} h^\flat \circ (g^\flat \circ f^\flat) =& h^\flat \circ (\mu_z \circ Tg \circ f)^\flat = (\mu_w \circ Th \circ \mu_z \circ Tg \circ f)^\flat \\ (h^\flat \circ g^\flat) \circ f^\flat =& (\mu_w \circ Th \circ g)^\flat \circ f^\flat = (\mu_w \circ T(\mu_w \circ Th \circ g) \circ f)^\flat = \\ =& (\mu_w \circ T\mu_w \circ T^2h \circ Tg \circ f)^\flat. \end{aligned}$$

Por la naturalidad de μ y la ley de multiplicación de la mónada se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} T^2z \arrow[r, "\mu_z"] \arrow[d, "T^2h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & Tz \arrow[d, "Th"] \\ T^3w \arrow[r, "\mu_{Tw}"] \arrow[d, "T\mu_w"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & T^2w \arrow[d, "\mu_w"] \\ T^2w \arrow[r, "\mu_w"] & Tw. \end{tikzcd}$$

Se sigue que $\mu_w \circ Th \circ \mu_z = \mu_w \circ T\mu_w \circ T^2h$ y por lo tanto la composicón es asociativa. Llamaremos a esta categoría la *categoría de Kleisli* de la mónada T.

Verificamos ahora que F_T y G_T son funtores:

- $F_T(1_x) = (\eta_x \circ 1_x)^\flat = \eta_x^\flat = 1_{x_T}$

- Si $f : x \to y$, $g : y \to z$, entonces

$$\begin{aligned} F_T g \circ F_T f =& (\eta_z \circ g)^\flat \circ (\eta_y \circ f)^\flat = (\mu_z \circ T(\eta_z \circ g) \circ \eta_y \circ f)^\flat = \\ =& ((\mu_z \circ T\eta_z) \circ (Tg \circ \eta_y) \circ f)^\flat = ((\eta_z \circ g) \circ f)^\flat = (\eta_z \circ (g \circ f))^\flat = \\ =& F_T(g \circ f) \end{aligned}$$

- $G_T(1_{x_T}) = G_T(\eta_x^\flat) = \mu_x \circ T\eta_x = 1_x$
- Si $f^\flat : x_T \to y_T$, $g^\flat : y_T \to z_T$, entonces

$$\begin{aligned} G_T(g^\flat \circ f^\flat) =& G_T((\mu_z \circ Tg \circ f)^\flat) = \mu_z \circ T\mu_z \circ T^2 g \circ Tf = \\ =& \mu_z \circ \mu_{Tz} \circ T^2 g \circ Tf = \mu_z \circ Tg \circ \mu_y \circ Tf = G_T(g^\flat) \circ G_T(f^\flat). \end{aligned}$$

Por construcción $\varphi_T : f^\flat \mapsto f$ es biyección

$$X_T(F_T x, y_T) = X_T(x_T, y_T) \cong X(x, Ty) = X(x, G_T y_T).$$

Para verificar la naturalidad en x fijamos $y_T \in X_T$, queremos mostrar que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} x' \arrow[d, "f"'] & X_T(F_T x, y_T) \arrow[r, "\varphi_{x,y_T}"] \arrow[d, "(F_T f)^*"'] & X(x, G_T y_T) \arrow[d, "f^*"] \\ x & X_T(F_T x', y_T) \arrow[r, "\varphi_{x',y_T}"] & X(x', G_T y_T). \end{tikzcd}$$

Sea $h^\flat : F_T x \to y_T$, entonces $\varphi_{x',y_T}((F_T f)^*(h^\flat)) = \varphi_{x',y_T}(h^\flat \circ F_T f) = \varphi_{x',y_T}(h^\flat \circ (\eta_x \circ f)^\flat) = \varphi_{x',y_T}((\mu_y \circ Th \circ \eta_x \circ f)^\flat) = \mu_y \circ (Th \circ \eta_x) \circ f = (\mu_y \circ \eta_{Ty}) \circ h \circ f = h \circ f = \varphi_{x,y_T}(h^\flat) \circ f = f^*(\varphi_{x,y_T}(h^\flat))$. Aquí se usó la naturalidad de η_x y la ley de unidad a izquerda de la mónada.

En el caso de la naturalidad en y_T fijamos $x \in X$ y mostramos que conmuta el diagrama:

$$\begin{tikzcd} y_T \arrow[d, "f^\flat"'] & X_T(F_T x, y_T) \arrow[r, "\varphi_{x,y_T}"] \arrow[d, "f^\flat_*"'] & X(x, G_T y_T) \arrow[d, "(G_T f^\flat)_*"] \\ y'_T & X_T(F_T x, y'_T) \arrow[r, "\varphi_{x,y'_T}"] & X(x, G_T y'_T). \end{tikzcd}$$

Si $h^\flat : F_T x \to y_T$, entonces $\varphi_{x,y'_T}(f^\flat_*(h^\flat)) = \varphi_{x,y'_T}(f^\flat \circ h^\flat) = \varphi_{x,y'_T}(\mu_{y'} \circ Tf \circ h)^\flat = \mu_{y'} \circ Tf \circ h = G_T f^\flat \circ h = (G_T f^\flat)_*(\varphi_{x,y_T}(h^\flat))$.

Se sigue que $\langle F_T, G_T, \varphi_T \rangle$ es adjunción. Su unidad es $(\eta_T)_x = \varphi_T(1_{F_T x}) = \varphi_T(1_{x_T}) = \varphi_T(\eta_x^\flat) = \eta_x$. La counidad ε_T es $(\varepsilon_T)_{y_T} = \varphi_T^{-1}(1_{G_T y_T}) = \varphi^{-1}(1_{Ty}) = (1_{Ty})^\flat : (Ty)_T \to y_T$.

La multiplicación resultante en X es $\mu_T = G_T \varepsilon_T F_T$, es decir $(\mu_T)_x = G_T(\varepsilon_T)_{F_T x} = G_T(\varepsilon_T)_{x_T} = G_T(1_{Tx})^\flat = \mu_x \circ T1_{Tx} = \mu_x$. Concluimos que la mónada generada por esta adjunción es la mónada original $\langle T, \eta, \mu \rangle$. $\square$

El siguiente teorema es similar al teorema 2.7 de comparación reemplazando la categoría de las T-álgebras por la categoría de Kleisli de la mónada definida por la adjunción:

Teorema 2.20. *Sea $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A$ una adjunción $T = \langle GF, \eta, G\varepsilon F \rangle$ la mónada que define en X. Entonces hay un único funtor $L : X_T \to A$ que cumple $GL = G_T$ y $LF_T = F$.*

La conclusión de este teorema afirma que podemos completar y hacer conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[r, "G_T"] \arrow[d, dotted, "L"'] & X \arrow[r, "F_T"] \arrow[d, "I_X"'] & X_T \arrow[d, dotted, "L"'] \\
A \arrow[r, "G"] & X \arrow[r, "F"] & A.
\end{tikzcd}$$

Los dos teoremas de comparación 2.7 y 2.20 pueden resumirse en el siguiente

Teorema 2.21. *Dada una mónada $\langle T, \eta, \mu \rangle$ en X, consideramos la categoría con objetos todas las adjunciones $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \to A$ que definen $\langle T, \eta, \mu \rangle$ en X, y con flechas todos los mapas de adjunciones que son la identidad en X. Esta categoría tiene un objeto inicial, la construcción de Kleisli, y un objeto terminal, la adjunción de Eilenberg-Moore $F^T \dashv G^T$.*

2.5. Leyes distributivas. Ver una colección de estructuras algebraicas como álgebras para ciertas mónadas en **Set** permite entender ciertos aspectos sobre ellas, en particular la interacción de tales estructuras. La ley distributiva usual de la multiplicación sobre la adición $(x_0 + x_1)(y_0 + y_1) = x_0 y_0 + x_0 y_1 + x_1 y_0 + x_1 y_1$ combina las estructuras de grupos abelianos y monoides para producir la estructura más compleja de anillos. Desde el punto de vista de las mónadas, una ley distributiva provee una forma de intercambiar dos tipos de operaciones y darle a la composición funtorial de dos mónadas una estructura más compleja de mónada. Dadas dos mónadas $T, S : X \to X$, en general TS no es mónada pues, por ejemplo, no existe una forma canónica de definir una multiplicación $TSTS \to TS$. Una transformación natural $ST \dot{\to} TS$ proveería un candidato para multiplicación $TSTS \to TTSS \to TS$. Una ley distributiva es una tal transformación, y debe satisfacer las condiciones necesarias para que los morfismos resultantes sean las componentes de una multiplicación.

Definición 2.22. Supongamos $\langle T, \eta^T, \mu^T \rangle$ y $\langle S, \eta^S, \mu^S \rangle$ dos mónadas en una categoría X. Una *ley distributiva* de S sobre T es una transformación natural $d : ST \dot{\to} TS$ que satisface los siguientes axiomas:

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "\eta^S T"'] \arrow[dr, "T\eta^S"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
ST \arrow[rr, "d"] & {} & TS
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& S \arrow[dl, "S\eta^T"'] \arrow[dr, "\eta^T S"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & \\
ST \arrow[rr, "d"] & {} & TS
\end{tikzcd} \tag{2.23}$$

$$\begin{tikzcd}
SST \arrow[r, "Sd"] \arrow[d, "\mu^S T"'] & STS \arrow[r, "dS"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & TSS \arrow[d, "T\mu^S"] \\
ST \arrow[rr, "d"] & {} & TS
\end{tikzcd} \tag{2.24}$$

$$\begin{tikzcd}
STT \arrow[r, "dT"] \arrow[d, "S\mu^T"'] & TST \arrow[r, "Td"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & TTS \arrow[d, "\mu^T S"] \\
ST \arrow[rr, "d"] & {} & TS.
\end{tikzcd} \tag{2.25}$$

Como se adelantó, con una ley distributiva podemos definir una mónada en el endofuntor TS.

Lema 2.26. *Si $d : ST \dot{\to} TS$ es ley distributiva, $\langle TS, \eta^T \eta^S, \mu^T \mu^S \bullet TdS \rangle$ es mónada.*

Demostración. Escribimos $\eta := \eta^T\eta^S$ y $\mu := \mu^T\mu^S \bullet TdS$ para simplificar notación. Las componentes de las nuevas transformaciones naturales son:

$$\eta_x = (\eta^T \circ \eta^S)_x = T\eta^S_x \circ \eta^T_x = \eta^T_{Sx} \circ \eta^S_x$$
$$\mu_x = (\mu^T\mu^S)_x \circ (TdS)_x = T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ Td_{Sx} = \mu^T_{Sx} \circ T^2\mu^S_x \circ Td_{Sx}.$$

Verificamos primero la ley de la unidad a derecha e izquierda:

$$\begin{aligned}
\mu_x \circ TS\eta_x &= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ (Td_{Sx} \circ TS\eta^T_{Sx}) \circ TS\eta^S_x \\
&= T\mu^S_x \circ (\mu^T_{S^2x} \circ T\eta^T_{S^2x}) \circ TS\eta^S_x \quad \text{(2.23 der. para } x = Sx) \\
&= T\mu^S_x \circ 1_{TS^2x} \circ TS\eta^S_x \quad (\eta^T \text{ unidad}) \\
&= T(\mu^S_x \circ S\eta^S_x) \\
&= T1_{Sx} = 1_{TSx} \quad (\eta^S \text{ unidad})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_x \circ \eta_{TSx} &= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ (Td_{Sx} \circ \eta^T_{STSx}) \circ \eta^S_{TSx} \\
&= T\mu^S_x \circ (\mu^T_{S^2x} \circ Td_{Sx} \circ d_{TSx}) \circ S\eta^T_{TSx} \circ \eta^S_{TSx} \quad \text{(2.23 der. para } x = TSx) \\
&= T\mu^S_x \circ d_{Sx} \circ (S\mu^T_{Sx} \circ S\eta^T_{TSx}) \circ \eta^S_{TSx} \quad \text{(2.25 para } x = Sx) \\
&= T\mu^S_x \circ d_{Sx} \circ S1_{TSx} \circ \eta^S_{TSx} \quad (\eta^T \text{ unidad}) \\
&= T\mu^s_x \circ (d_{Sx} \circ \eta^S_{TSx}) \\
&= T\mu^S_x \circ T\eta^S_{Sx} \quad \text{(2.23 izq. para } x = Sx) \\
&= T(\mu^S_x \circ \eta^S_{Sx}) = T1_{Sx} = 1_{TSx} \quad (\eta^S \text{ unidad}).
\end{aligned}$$

Verificamos ahora la asociatividad de μ:

$$\begin{aligned}
\mu_x \circ \mu_{TSx} &= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ (Td_{Sx} \circ \mu^T_{STSx}) \circ T^2\mu^S_{TSx} \circ Td_{STSx} \\
&= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ \mu^T_{TS^2x} \circ (T^2d_{Sx} \circ T^2\mu^S_{TSx}) \circ Td_{STSx} \quad (\text{nat } \mu^T,\ f = d_{Sx}) \\
&= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ \mu^T_{TS^2x} \circ T^3\mu^S_{Sx} \circ T^2d_{S^2x} \circ (T^2Sd_{Sx} \circ Td_{STSx}) \quad (2.24/Sx) \\
&= T\mu^S_x \circ (\mu^T_{S^2x} \circ \mu^T_{TS^2x}) \circ T^3\mu^S_{Sx} \circ T^2d_{S^2x} \circ Td_{TS^2x} \circ TSTd_{Sx} \quad (\text{nat } d/d_{Sx}) \\
&= T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x} \circ (T\mu^T_{S^2x} \circ T^3\mu^S_{Sx}) \circ T^2d_{S^2x} \circ Td_{TS^2x} \circ TSTd_{Sx} \quad (\mu^T \text{ mult.}) \\
&= (T\mu^S_x \circ \mu^T_{S^2x}) \circ T^2\mu^S_{Sx} \circ T\mu^T_{S^3x} \circ T^2d_{S^2x} \circ Td_{TS^2x} \circ TSTd_{Sx} \quad (\text{nat } \mu^T/\mu^S_{Sx}) \\
&= \mu^T_{Sx} \circ (T^2\mu^S_x \circ T^2\mu^S_{Sx}) \circ T\mu^T_{S^3x} \circ T^2d_{S^2x} \circ Td_{TS^2x} \circ TSTd_{Sx} \quad (\text{nat } \mu^T/\mu^S_x) \\
&= \mu^T_{Sx} \circ T^2\mu^S_x \circ T^2S\mu^S_x \circ (T\mu^T_{S^3x} \circ T^2d_{S^2x} \circ Td_{TS^2x}) \circ TSTd_{Sx} \quad (\mu^S \text{ mult.}) \\
&= \mu^T_{Sx} \circ T^2\mu^S_x \circ (T^2S\mu^S_x \circ Td_{S^2x}) \circ TS\mu^T_{S^2x} \circ TSTd_{Sx} \quad (2.25,\ x = S^2x) \\
&= (\mu^T_{Sx} \circ T^2\mu^S_x \circ Td_{Sx}) \circ (TST\mu^S_x \circ TS\mu^T_{S^2x} \circ TSTd_{Sx}) \quad (\text{nat } d,\ f = \mu^S_x) \\
&= \mu_x \circ TS\mu_x.
\end{aligned}$$

□

El siguiente teorema da condiciones equivalentes para que exista una ley distributiva entre dos mónadas. Antes necesitamos la siguiente

Definición 2.27. Un *levantamiento* de la mónada T a la categoría de S-álgebras es una mónada $\langle \tilde{T}, \eta^{\tilde{T}}, \mu^{\tilde{T}} \rangle$ en C^S tal que, si $U^S : C^S \to C$ es el funtor olvidadizo, valen las igualdades

$$U^S\tilde{T} = TU^S; \qquad U^S\eta^{\tilde{T}} = \eta^TU^S; \qquad U^S\mu^{\tilde{T}} = \mu^TU^S.$$

Ahora sí, el teorema, cuya prueba puede encontrarse en [1].

Teorema 2.28. *Supongamos que $\langle T, \eta^T, \mu^T\rangle$ y $\langle S, \eta^S, \mu^S\rangle$ son dos mónadas en una categoría C. Las siguientes son equivalentes:*
(1) Una ley distributiva $d : ST \dot{\to} TS$
(2) Una multiplicación $\mu : TSTS \dot{\to} TS$ tal que:

- *$\langle TS, \eta^T\eta^S, \mu\rangle$ es mónada.*
- *Las transformaciones naturales $\eta^T S : S \dot{\to} TS$ y $T\eta^S : T \dot{\to} TS$ son morfismos de mónadas.*
- *Vale la siguiente ley (ley de media unidad):*

$$\begin{tikzcd} TS \arrow[r, "T\eta^S\eta^T S"] \arrow[dr, "I_{TS}"'] & TSTS \arrow[d, "\mu"] \\ & TS. \end{tikzcd}$$

(3) Un levantamiento $\tilde{T}$ de la mónada T a C^S.

3. Probabilidad y no determinismo

Ciertas nociones de computación pueden modelarse usando mónadas generadas por operaciones algebraicas y ecuaciones adecuadas. Dos ejemplos de ello son los efectos computacionales de *no determinismo* y *probabilidad*. El primero aparece cuando un programa puede llevar a cabo distintas acciones pero no se puede saber de antemano qué hará realmente; esto puede ser modelado por un operador de elección no determinista $\Cup$ y la mónada correspondiente P: $A \Cup B$ le ofrece al ambiente elegir entre A y B. Por otro lado, el efecto probabilidad será modelado por el operador de elección probabilista $\oplus$ y su mónada V: $A \oplus_p B$ representa elegir A con probabilidad p y B con probabilidad $p - 1$.

3.1. Las mónadas P y V. Consideramos la siguiente teoría ecuacional sobre la signatura $\{\Cup, \alpha\}$ con $\alpha = 2$, llamamos *unión formal* a la operacón representada por $\Cup$:

- $A \Cup B = B \Cup A$
- $(A \Cup B) \Cup C = A \Cup (B \Cup C)$
- $A \Cup A = A$.

Un modelo para esta teoría será un *semireticulado*. La categoría de semireticulados se denota **SLAT**. El funtor semireticulado libre es naturalmente isomorfo al funtor (covariante) partes finitas no vacías $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{SLAT}$ donde el símbolo $\Cup$ se interpreta como unión de conjuntos. En efecto, veamos que hay una flecha universal (PX, η_X) de X a G: si se tiene el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & GPX \arrow[d, dotted, "Gf'"] & (PX, \cup) \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & GL & (L, \Cup), \end{tikzcd}$$

la flecha $\eta_X : X \to GPX$ dada por $\eta^P_X(x) = \{x\}$ hace conmutar el diagrama para $f'(S) = \Cup\{f(s) \mid s \in S\}$. Además, todo morfismo $g : PX \to L$ que hace conmutar el diagrama queda determinado por su valor en los singuletes $\{x\}$ (ya que $Gg(\{x\}) = f(x)$), y como es morfismo vale la cadena de igualdades $g(S) = g(\cup\{s \mid s \in S\}) = \Cup\{g(s) \mid s \in S\} = f'(S)$, es decir $g{=}f'$. Usando la parte (b) del teorema 1.24, concluimos que $P \dashv G$. La counidad de esta adjunción es $\varepsilon : PG \dot{\to} Id$ dada por $\varepsilon_L(Z) = \Cup\{f(z) \mid z \in Z\}$.

La mónada correspondiente GP : **Set** $\to$ **Set**, que denotaremos simplemente con P, tiene la siguiente unidad y multiplicación:

$$\eta^P : Id \dot{\to} PX \qquad\qquad \mu^P : P^2 \dot{\to} P$$
$$\eta^P_X(x) = \{x\} \qquad\qquad \mu^P_X(\mathcal{S}) = G\varepsilon_{P(X)}(S) = \bigcup \mathcal{S}.$$

Definición 3.1. Una *valuación discreta* en un conjunto X es una función $\nu : X \to \overline{\mathbb{R}^+}$. El *soporte* de una valuación discreta en X es el conjunto

$$supp(\nu) := \{x \in X \mid \nu(x) > 0\}.$$

Denotamos el conjunto de las valuaciones discretas con $V_\infty(X)$. Las valuaciones discretas que toman valores en $[0, \infty)$ se llaman *pesos*. Una *valuación finita* es un peso cuyo soporte es finito, denotaremos al conjunto de tales valuaciones en un conjunto X con $V(X)$.

Podemos caracterizar las valuaciones finitas como el álgebra libre para una teoría ecuacional.

Definición 3.2. Un *cono real* es un álgebra para la siguiente teoría en la categoría **Set**

(I). $A \oplus B = B \oplus A$
(II). $A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$
(III). $A \oplus \underline{0} = A$
(IV). $0A = \underline{0}$
(V). $1A = A$
(VI). $p(A \oplus B) = pA \oplus pB \quad (p \in \mathbb{R}^+)$
(VII). $p(qA) = (pq)A \quad (p, q \in \mathbb{R}^+)$
(VIII). $(p + q)A = pA \oplus qA \quad (p, q \in \mathbb{R}^+)$.

Llamaremos **RCONE** a la categoría de conos reales y sus homomorfismos.

El conjunto de valuaciones finitas sobre un conjunto X es un cono real si definimos las siguientes operaciones (definidas puntualmente):

$$(p\nu)(x) := p\nu(x)$$
$$(\nu \oplus \xi)(x) := \nu(x) + \xi(x).$$

La aplicación V que manda un conjunto X en el conjunto de las valuaciones finitas en X define un funtor V : **Set** $\to$ **RCONE** el cual manda una función $f : X \to Y$ en el homomorfismo $Vf : VX \to VY$ dado por

$$Vf(\nu)(y) = \sum\{\nu(x) \mid f(x) = y\}.$$

La verificación que V cumple con los axiomas de funtor y que Vf es efectivamente un homomorfismo de conos reales es sencilla y directa de la definición.

Tenemos entonces la siguiente

Proposición 3.3. *Las valuaciones finitas son el cono real libre, es decir, el funtor V es adjunto a izquierda del funtor olvidadizo G :* **RCONE** $\to$ **Set**.

Demostración. La verficación que $V(X)$ es cono real es directa. Definimos la flecha $\eta_X : X \to GVX$ como $\eta_X(x) = \delta_x$ la delta de Dirac o valuación puntual, es decir la función

$$\delta_x(z) = \begin{cases} 1 & x = z \\ 0 & x \neq z. \end{cases}$$

Para probar la propiedad universal, dado un cono real A y una función $f : X \to GA$, queremos hacer conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & GVX \arrow[d, dotted, "Gf'"] & VX \arrow[d, dotted, "f'"] \\ & GA & A. \end{tikzcd}$$

Notamos primero que para una valuación finita ν se da la igualdad

$$\nu = \bigoplus\nolimits_A \{\nu(x)\delta_x \mid x \in supp(\nu)\}.$$

La conmutatividad del diagrama significa que $f'(\delta_x) = f(x)$. Con estos dos hechos en mente definimos el mapa $f' : VX \to A$ como

$$f'(\nu) = \bigoplus\nolimits_A \{\nu(x)f(x) \mid x \in supp(\nu)\}.$$

La conmutatividad es entonces directa si usamos el axioma (V). La unicidad se desprende de la forma de escribir una valuación ν: si g es homomorfismo que también hace conmutar el diagrama, entonces

$$\begin{aligned} g(\nu) =& g\left(\bigoplus\nolimits_A \{\nu(x)\delta_x \mid x \in supp(\nu)\}\right) \\ =& \bigoplus\nolimits_A \{\nu(x)g(\delta_x) \mid x \in supp(\nu)\} \\ =& \bigoplus\nolimits_A \{\nu(x)f(x) \mid x \in supp(\nu)\} = f(x). \end{aligned}$$

Verificamos que es homomorfismo: sean ν, ξ valuaciones finitas en X y $p \in \mathbb{R}^+$, para simplificar notación eliminamos el subíndice A de la operación $\oplus$ en A. Entonces:

$$\begin{aligned} f'(\nu \oplus \xi) =& \bigoplus \{(\nu \oplus \xi)(x)f(x) \mid x \in supp(\nu \oplus \xi)\} \\ =& \bigoplus \{(\nu(x) + \xi(x))f(x) \mid x \in supp(\nu \oplus \xi)\} \\ =& \bigoplus \{\nu(x)f(x) \oplus \xi(x)f(x) \mid x \in supp(\nu \oplus \xi)\} \\ =& \bigoplus \{\nu(x)f(x) \mid x \in supp(\nu)\} \oplus \bigoplus \{\xi(x)f(x) \mid x \in supp(\xi)\} \\ =& f'(\nu) \oplus f'(\xi). \end{aligned}$$

La tercera igualdad se debe al axioma (VIII) y la cuarta a los axiomas (I)–(IV). Además:

$$\begin{aligned} f'(p\nu) =& \bigoplus \{(p\nu)(x)f(x) \mid x \in supp(p\nu)\} \\ =& \bigoplus \{p\nu(x)f(x) \mid x \in supp(p\nu)\} \\ =& p\bigoplus \{\nu(x)f(x) \mid x \in supp(p\nu)\} \\ =& p\bigoplus \{\nu(x)f(x) \mid x \in supp(\nu)\} \\ =& pf'(\nu). \end{aligned}$$

Aquí, la tercera igualdad se debe a (VI) y (VII) y la cuarta al hecho que $p > 0$. Concluimos entonces que f' es efectivamente homomorfismo. $\square$

La counidad de esta adjunción es la transformación $(1_{GA})' = \varepsilon_A : VGA \to A$ dada por $\varepsilon_a(\nu) = \bigoplus_A\{\nu(a)a \mid a \in supp(\nu)\}$. La mónada correspondiente $GV : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, que denotaremos simplemente con V, tiene la siguiente unidad y multiplicación:

$$\begin{aligned} &\eta^V : Id \dot{\to} VX & &\mu^V : V^2 \dot{\to} V \\ &\eta^V_X(x) = \delta_x & &\mu^V_X(\Xi) = G\varepsilon_{V(X)}(\Xi) = \sum\{\Xi(\nu)\nu(x) \mid \nu \in supp(\Xi)\}. \end{aligned}$$

3.2. Fracaso de la ley distributiva. Cuando dos mónadas son libremente generadas por teorías ecuacionales, podemos combinar las ecuaciones de algún modo y luego generar una nueva mónada libre. Las tres formas más comunes de hacer esto son la suma, combinación conmutativa y combinación distributiva. En el primer caso se juntan todas las operaciones y ecuaciones en una sola teoría; en el segundo caso se añaden ecuaciones que expresan que cada una de las operaciones de una teoría conmuta con cada una de las operaciones de la otra teoría. En el último caso se añaden ecuaciones que señalan la distributividad de cada una de las operaciones de una teoría con cada operación de la segunda teoría. El último enfoque puede ser interpretado más categóricamente mediante el uso de leyes distributivas como las discutidas en 2.5. El estudio de sistemas que combinan los efectos de probabilidad y no determinismo para modelar situaciones en las que aparecen ambos sugiere que la elección probabilista debería distribuir sobre la no determinista. En esta esta sección demostramos que no es posible definir una ley distributiva entre las mónadas P y V.

Proposición 3.4. *No hay ley distributiva de V sobre P.*

Demostración. Supongamos $d : VP \dot{\to} PV$ ley distributiva. Consideramos el conjunto $X = \{a, b, c, d\}$ y $\Xi := \frac{1}{2}\delta_{\{a,b\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{c,d\}} \in VP(X)$. Queremos calcular $R := d_X(\Xi)$. Sea $Y = \{a, b\}$ y $f, f' : X \to Y$ dadas por:

$$f : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \\ d \mapsto b \end{cases} \qquad f' : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto b \\ d \mapsto a. \end{cases}$$

La naturalidad de d para f resulta en la igualdad $PVf(d_X(\Xi)) = d_Y(VPf(\Xi))$. Calculamos $VPf(\Xi) \in VP(Y)$:

$$VPf(\Xi) : \begin{cases} \{a\} \mapsto \Sigma\{\Xi(B) \mid f[B] = \{a\}\} = \Xi(\{a\}) + \Xi(\{c\}) + \Xi(\{a, c\}) = 0 \\ \{b\} \mapsto \Sigma\{\Xi(B) \mid f[B] = \{b\}\} = \Xi(\{b\}) + \Xi(\{d\}) + \Xi(\{b, d\}) = 0 \\ \{a, b\} \mapsto \Sigma\{\Xi(B) \mid f[B] = \{a, b\}\} = \Xi(\{a, b\}) + \Xi(\{c, d\}) + ... = 1. \end{cases} = \delta_{\{a,b\}}$$

Una de las leyes de la unidad para d (parte derecha de 2.23) afirma que $P\eta^V_Y = d_Y \circ \eta^V_{PY}$. Luego,

$$\begin{aligned} PVf(d_X(\Xi)) =& d_Y(VPf(\Xi)) = d_Y(\delta_{\{a,b\}}) = d_Y(\eta^V_{PY}(\{a, b\})) = (d_Y \circ \eta^V_{PY})(\{a, b\}) = \\ =& P\eta^V_Y(\{a, b\}) = \{\eta^V_Y(y) \mid y \in \{a, b\}\} = \{\delta_a, \delta_b\}. \end{aligned}$$

Se sigue que $PVf(R) = \{Vf(\nu) \mid \nu \in R\} = \{\delta_a, \delta_b\}$. Observar que esto muestra que R es no vacío. Sea $\nu \in R$ tal que $Vf(\nu) = \delta_a$, entonces

$$\begin{cases} 1 = \delta_a(a) = Vf(\nu)(a) = \nu(a) + \nu(c) \\ 0 = \delta_a(b) = Vf(\nu)(b) = \nu(b) + \nu(d). \end{cases}$$

Como $0 \leq \nu$ debe suceder $\nu(b) = \nu(d) = 0$. Si $p := \nu(a)$ entonces $0 \leq p \leq 1$ y podemos escribir $\nu = p\delta_a + (1-p)\delta_c$. De manera análoga, si $Vf(\nu) = \delta_b$ entonces $\nu = q\delta_b + (1-q)\delta_d$, $q \in [0,1]$. Podemos resumir estos hechos en la contención

$$\emptyset \neq R \subseteq \{p\delta_a + (1-p)\delta_c \mid p \in [0,1]\} \cup \{q\delta_b + (1-q)\delta_d \mid q \in [0,1]\}.$$

Los mismos cálculos para f' muestran que $VPf'(\Xi) = \delta_{\{a,b\}}$ y que

$$\emptyset \neq R \subseteq \{p'\delta_a + (1-p')\delta_d \mid p' \in [0,1]\} \cup \{q'\delta_b + (1-q')\delta_c \mid q' \in [0,1]\}.$$

Combinando esta información, se ve fácilmente que debe suceder

$$d_X(\Xi) = R \subseteq \{\delta_b, \delta_b, \delta_c, \delta_d\}.$$

Consideramos ahora el conjunto $Z := \{a, c\}$ y la función $f'' : X \to Z$ dada por

$$f : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \\ d \mapsto c. \end{cases}$$

Por naturalidad de d se tiene que $PVf''(R) = d_Z(VPf''(\Xi))$. Calcularemos ambos miembros de esta igualdad. Para $VPf''(\Xi) \in VP(Z)$ se tiene

$$VPf''(\Xi) : \begin{cases} \{a\} \mapsto \Xi(\{a\}) + \Xi(\{b\}) + \Xi(\{a,b\}) = 1/2 \\ \{c\} \mapsto \Xi(\{c\}) + \Xi(\{d\}) + \Xi(\{c,d\}) = 1/2 \\ \{a,c\} \mapsto \Xi(\{a,d\}) + \Xi(\{a,d\}) + ... = 0. \end{cases} = \frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{c\}}.$$

La otra ley de la unidad para d (parte izquierda de 2.23) establece que $\eta^P_{VZ} = d_Z \circ V\eta^P_Z$. Aplicamos η^P_{VZ} y $V\eta^P_Z$ a $\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c \in V(Z)$:

$$\eta^P_{VZ}\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c\right) = \left\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c\right\}$$

$$V\eta^P_Z\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c\right) : \begin{cases} \{a\} \mapsto 1/2 \\ \{c\} \mapsto 1/2 \\ \{a,c\} \mapsto 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{c\}} = VPf''(\Xi).$$

Luego $\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_c\} = d_Z(\frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{c\}}) = d_Z(VPf''(\Xi)) = PVf''(R)$.

Por otro lado, $PVf''(R) = \{Vf''(\nu) \mid \nu \in R\}$ y como $R \subseteq \{\delta_b, \delta_b, \delta_c, \delta_d\}$, calculamos:

$$Vf''(\delta_a) : \begin{cases} a \mapsto \Sigma\{\delta_a(x) \mid f''(x) = a\} = \delta_a(a) + \delta_a(b) = 1 \\ c \mapsto \Sigma\{\delta_a(x) \mid f''(x) = c\} = \delta_a(c) + \delta_a(d) = 0 \end{cases} = \delta_a$$

y de forma análoga para las otras valuaciones obtenemos $Vf''(\delta_b) = \delta_a$, $Vf''(\delta_c) = \delta_c$ y $Vf''(\delta_d) = \delta_c$. Luego, $PVf''(R) \subseteq \{\delta_a, \delta_c\}$ lo cual contradice lo concluido en el párrafo anterior. ¡Absurdo! Luego, no existe tal ley distributiva d.

□

Proposición 3.5. *No hay ley distributiva de P sobre V.*

Demostración. Supongamos $e : PV \dot{\to} VP$ ley distributiva. Sean $X := \{a, b, c, d\}$, $Y := \{a, b\}$ y definimos $R \in PVX$ como $R = \left\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b, \frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d\right\}$. Consideramos $f, f' : X \to Y$ dadas por:

$$f : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto a \\ d \mapsto b \end{cases} \qquad f' : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto b \\ c \mapsto b \\ d \mapsto a. \end{cases}$$

La naturalidad de e para una flecha h resulta en la igualdad $VPh \circ e_X = e_Y \circ PVh$.

Calculamos primero $PVf(R) = \{Vf(\nu) \mid \nu \in R\}$:

$$Vf\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right) : \begin{cases} a \mapsto (\delta_a/2 + \delta_b/2)(a) + (\delta_a/2 + \delta_b/2)(c) = 1/2 \\ c \mapsto (\delta_a/2 + \delta_b/2)(b) + (\delta_a/2 + \delta_b/2)(d) = 1/2 \end{cases} = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b$$

$$Vf\left(\frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d\right) : \begin{cases} a \mapsto (\delta_c/2 + \delta_d/2)(a) + (\delta_c/2 + \delta_d/2)(c) = 1/2 \\ c \mapsto (\delta_c/2 + \delta_d/2)(b) + (\delta_c/2 + \delta_d/2)(d) = 1/2 \end{cases} = \frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b.$$

Luego, $PVf(R) = \left\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right\}$ y observamos que $\eta^P_{VY}(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b) = \left\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right\}$. Por a esta observación y la ley de identidad $e_Y \circ \eta^P_{VY} = V\eta^P_Y$ concluimos que

$$e_Y(PVf(R)) = (e_Y \circ \eta^P_{VY})\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right) = V\eta^P_Y\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right) \in VPY.$$

Pero

$$V\eta^P_Y\left(\frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d\right) : \begin{cases} \{a\} \mapsto (\delta_a/2 + \delta_b/2)(a) = 1/2 \\ \{b\} \mapsto (\delta_a/2 + \delta_b/2)(b) = 1/2 \\ \{a, b\} \mapsto (\delta_a/2 + \delta_b/2)(\emptyset) = 0 \end{cases} = \frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{b\}}.$$

Por otro lado, usando la naturalidad de e obtenemos:

$$VPf(e_X(R)) : \begin{cases} \{a\} \mapsto e_X(R)(\{a\}) + e_X(R)(\{c\}) + e_X(R)(\{a, c\}) \\ \{b\} \mapsto e_X(R)(\{b\}) + e_X(R)(\{d\}) + e_X(R)(\{b, d\}) \\ \{a, b\} \mapsto e_X(R)(\{a, b\}) + e_X(R)(\{c, d\}) + ... \end{cases}$$

Y esto debe ser igual a $\frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{b\}}$. Concluimos que

$$\mathit{supp}(e_X(R)) \subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{b, d\}\}. \qquad (1)$$

De forma completamente análoga encontramos que $PVf'(R) = \left\{\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right\}$ y que $e_Y(PVf'(R) = \frac{1}{2}\delta_{\{a\}} + \frac{1}{2}\delta_{\{b\}}$, además calculamos

$$VPf'(e_X(R)) : \begin{cases} \{a\} \mapsto e_X(R)(\{a\}) + e_X(R)(\{d\}) + e_X(R)(\{a, d\}) \\ \{b\} \mapsto e_X(R)(\{b\}) + e_X(R)(\{c\}) + e_X(R)(\{b, c\}) \\ \{a, b\} \mapsto e_X(R)(\{a, b\}) + e_X(R)(\{c, d\}) + ... \end{cases}$$

Lo cual nos permite concluir

$$\mathit{supp}(e_X(R)) \subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, d\}, \{b, c\}\}. \qquad (2)$$

De (1) y (2) deducimos que

$$\mathit{supp}(e_X(R)) \subseteq \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}\}. \qquad (*)$$

Consideramos ahora el conjunto $Z := \{a, c\}$ y la función $f'' : X \to Z$ dada por

$$f : \begin{cases} a \mapsto a \\ b \mapsto a \\ c \mapsto c \\ d \mapsto c. \end{cases}$$

Calculamos $PVf''(R))$:

$$Vf''\left(\frac{1}{2}\delta_a + \frac{1}{2}\delta_b\right) : \begin{cases} a \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases} = \delta_a$$

$$Vf''\left(\frac{1}{2}\delta_c + \frac{1}{2}\delta_d\right) : \begin{cases} a \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases} = \delta_c.$$

Por lo tanto $PVf''(R) = \{\delta_a, \delta_c\} = P\eta_Z^V(\{a, c\})$. Debido a la otra ley de identidad para e, $e_z \circ P\eta_Z^V = \eta_{PZ}^V$, y a la segunda igualdad obtenemos

$$e_Z(PVf''(R)) = e_Z(P\eta_Z^V(\{a, c\}) = \delta_{\{a,c\}} \in VPZ.$$

Si usamos la naturalidad de e en f'', encontramos que $VPf''(e_X(R)) = e_Z(PVf''(R)) = \delta_{\{a,c\}}$. Pero también podemos calcular

$$VPf''(e_X(R)) : \begin{cases} \{a\} \mapsto e_X(R)(\{a\}) + e_X(R)(\{b\}) + e_X(R)(\{a, b\}) \\ \{c\} \mapsto e_X(R)(\{b\}) + e_X(R)(\{c\}) + e_X(R)(\{b, c\}) \\ \{a, b\} \mapsto e_X(R)(\{a, b\}) + e_X(R)(\{c, d\}) + ... \end{cases}$$

Se sigue que

$$supp(e_X(R)) \subseteq PX \setminus \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\}\}. \qquad (**)$$

Pero $(*)$ y $(**)$ no pueden darse a la vez, ¡absurdo! Luego, no existe tal e. $\square$

Una valuación ν es *normalizada* si $\nu(X) = 1$ y es *sub-normalizada* si $\nu(X) \leq 1$. Escribimos $V^1_\infty(X)$ y $V^{\leq 1}_\infty(X)$ para los conjuntos de valuaciones discretas normalizadas y subnormalizadas en un conjunto X. Los elementos de $V^1_\infty(X)$ son llamados distribuciones de probabilidad sobre X, los elementos de $V^{\leq 1}_\infty(X)$ reciben el nombre de distribuciones de subprobabilidad. Ambos forman mónadas en **Set** con la multiplicación definida igual que para V. Observamos que en la prueba recién dada todas las valuaciones involucradas son normalizadas, podemos concluir entonces que también muestra que no hay ley distributiva entre P y cualquiera de estas dos mónadas.

Una posible solución a este problema es la dada por Varacca en [8] y consiste en modificar la definición de la mónada probabilista removiendo la ley $A \oplus_p A = A$. En la presentación dada, la mónada probabilista es generada por la teoría de los conos reales; la elección probabilista es definida allí por $A \oplus_p B = pA \oplus (1 - p)B$. Si quitamos la ecuación $pA \oplus qA = (p + q)A$, obtenemos en **Set** la mónada *valuaciones indexadas finitas* generada por esta nueva teoría. Se prueba que hay una ley distributiva de ella a P. Otra solución es formar la combinación distributiva de las teorías ecuacionales y generar una nueva mónada. Este es el camino seguido por Tix y Mislove y desemboca en la mónada definida por el funtor libre P_{TM} de subconjuntos convexos finitamente generados.

4. Comentarios y trabajo futuro

En este trabajo se sentaron las bases para un estudio más profundo de modelos matemáticos de distintas nociones computacionales. Las tareas se centraron en seguir el esquema propuesto por Varacca en su tesis doctoral completando comentarios o haciendo las cuentas dejadas para el lector. Las herramientas categóricas fueron estudiadas principalmente de [3] bajo el mismo esquema: completar o hacer las pruebas de los teoremas allí encontrados así como reordenar la presentación de los conceptos de un modo conveniente que guíe directamente hacia las aplicaciones tratadas en este trabajo.

En cuanto a los temas desarrollados y posible trabajo futuro, el interés se centra en enriquecer las definiciones con alguna noción de continuidad. Los procesos de decisión de Markov sobre espacios continuos son un marco apropiado para estudiar y formalizar sistemas que involucran variables continuas tales como las que aparecen en física, biología y economía; y donde algunas de las variables son conocidas sólo de manera probabilista. En esta dirección, los procesos de Markov etiquetados (LMP) fueron desarrollados por Desharnais et alter como un conjunto etiquetado de acciones que codifican su interacción con el ambiente; por lo tanto, los LMP son modelos reactivos en los cuales hay distintas subprobabilidades de transición para cada acción. En este modelo, la incertidumbre es (sólo) considerada como probabilista; por consiguiente, los LMP pueden considerarse como una generalización de los procesos deterministas.

Uno de nuestros principales intereses se encuentra en los modelos que incluyen no determinismo tanto probabilista como interno. Estos surgen naturalmente, como abstracción o subespecifcación de LMP. En el caso discreto, la clase de los autómatas probabilistas es un ejemplo. Sobre espacios no contables de estados, la generalización común de LMP y autómatas probabilistas está dada por los procesos de Markov etiquetados no deterministas (NLMP). El objetivo general será el estudio de diversas nociones de bisimulación aplicables a los procesos de Markov etiquetados y las variantes que surgen al agregar no-determinismo.

Agradecimientos: a quienes elijo cada día, a quienes dejé ir y a quien no puedo dejar ir todavía.

Referencias

[1] Jon Beck. Distributive laws. *In Seminar on Triples and Categorical Homology Theory*, pages 119–140, 1969.
[2] C. Barry Jay. An introduction to categories in computing. University of Technology, Sydney, 2007.
[3] Saunders MacLane. Categories for the working mathematician. Springer-Verlag, 1971.
[4] Ernie Manes And Philip Mulry. Monad compositions I: general constructions and recursive distributive laws. Theory and Applications of Categories, Vol. 18, No. 7, 2007, pp. 172–208.
[5] Eugenio Moggi. An abstract view of programming languages. University of Edinburgh, 1989
[6] Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. Information and computation, 93(1):55–92, 1991.
[7] Anirudh Sankar. Monads and algebraic structures, 2012.
[8] Daniele Varacca. Probability, nondeterminism and concurrency: two denotational models for probabilistic computation. PhD thesis, BRICS Dissertation Series, 2003.