

# Grafos de Frobenius-Perron para categorías de fusión

por Edwin Fernando Pacheco Rodríguez

Presentado ante la Facultad de Matemática, Astronomía y Física como parte de los requerimientos para la obtención del grado de Doctor en Matemática de la

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Marzo de 2015

©FAMAF-UNC 2015

Directora: Dra. Sonia Natale



Grafos de Frobenius-Perron para categorías de fusión por Edwin Fernando Pacheco Rodríguez se distribuye bajo una Licencia Creative Commons Atribución 2.5 Argentina.



*Dedicado a  
Mamá Carmenza y papá Jaime  
Andrea y David  
Paula y Laura  
Mi abuela Carmelina  
Soy lo que soy gracias a ustedes*



## Resumen

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra. En este trabajo se estudian algunos grafos, llamados el grafo primo y el grafo común divisor, relacionados con las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de  $\mathcal{C}$ . Estos grafos generalizan los grafos correspondientes asociados a los caracteres irreducibles y a los órdenes de las clases de conjugación en un grupo finito. Se describen los grafos en distintos casos específicos, entre otros, cuando  $\mathcal{C}$  es una equivariantización bajo la acción de un grupo finito, una categoría 2-pasos nilpotente, y la categoría de representaciones de un doble de Drinfeld torcido de un grupo finito.

Se demuestran generalizaciones al contexto de las categorías de fusión íntegras de resultados sobre el número de componentes conexas de los grafos correspondientes para grupos finitos. En particular, se prueba que si  $\mathcal{C}$  es una categoría íntegra trenzada no degenerada, entonces el grafo primo de  $\mathcal{C}$  tiene a lo sumo 3 componentes conexas, y tiene a lo sumo 2 componentes conexas si  $\mathcal{C}$  es además resoluble.

Como aplicación de los resultados principales, se demuestra un resultado de clasificación para categorías de fusión débilmente íntegras tales que las dimensiones de sus objetos simples son todas potencias de números primos.

**Palabras clave:** Categoría de fusión; dimensión de Frobenius-Perron; grafo de Frobenius-Perron; equivariantización; categoría de fusión trenzada; categoría modular; resolubilidad.

**2010 Mathematics Subject Classification.** 18D10; 05C25.



## Abstract

Let  $\mathcal{C}$  be an integral fusion category. In this work, we study some graphs, called the prime graph and the common divisor graph, related to the Frobenius-Perron dimensions of simple objects of  $\mathcal{C}$ . These graphs extend the corresponding graphs associated to the irreducible character degrees and the conjugacy class sizes of a finite group. We describe these graphs in several cases, among others, when  $\mathcal{C}$  is an equivariantization under the action of a finite group, a 2-step nilpotent fusion category, and the representation category of a twisted quantum double.

We prove generalizations of known results on the number of connected components of the corresponding graphs for finite groups in the context of braided fusion categories. In particular, we show that if  $\mathcal{C}$  is any integral non-degenerate braided fusion category, then the prime graph of  $\mathcal{C}$  has at most 3 connected components, and it has at most 2 connected components if  $\mathcal{C}$  is in addition solvable.

As an application we prove a classification result for weakly integral braided fusion categories all of whose simple objects have prime power Frobenius-Perron dimension.

**Key words and phrases:** Fusion category; Frobenius-Perron dimension; Frobenius-Perron graph; equivariantization; braided fusion category; modular category; solvability.

**2010 Mathematics Subject Classification.** 18D10; 05C25.





## Agradecimientos

A mi directora Sonia Natale, una persona extraordinaria y una matemática excepcional. Para mí es un orgullo el haber podido ser su alumno. Gracias por enseñarme a hacer matemática. Muchas gracias por la dedicación, la paciencia y todo lo que he podido aprender a lo largo de este tiempo.

Al profesor Nicolás Andruskiewitsch. Muchas gracias por su apoyo e interés para que este trabajo saliera adelante.

A la república Argentina por intermedio del CONICET y del CIEM. Gracias por el apoyo financiero sin el cual habría sido imposible realizar el doctorado. Le debo muchísimo a este país que se ha convertido en mi segunda patria.

A los jurados de la tesis: Fernando Fantino, César Galindo y Paulo Tirao. Muchas gracias por leer la tesis tan cuidadosamente, gracias por el tiempo invertido y por todas las observaciones y sugerencias.

A todos mis amigos con quienes he compartido a lo largo de estos cinco maravillosos años. Ha sido una época increíble de mi vida y se lo debo mucho a ustedes. Me gustaría nombrarlos a todos pero la lista sería interminable. Gracias por no hacerme sentir extraño en estas tierras, por toda la buena energía y todos los ratos agradables que he podido compartir.

A los borbotones que va en camino de convertirse en toda una institución futbolística.

A David por su infinita paciencia. Estoy segurísimo de que va a ser un gran historiador.

A Marlon por su buena onda. Gran parte de la excelente convivencia en la casa se la debemos a él.

A mi hermana Andrea. Gracias por todo el cariño y amor.

A mi abuela Carmelina por toda su ternura y por tenerme siempre en sus oraciones.

A Paula y Laura. Gracias por todo ese amor incondicional, la llegada de ustedes dos cambió mi vida y la hizo mas hermosa.

A Alejandra. Muchas gracias por todo el apoyo, gracias por no permitir que abandonara el barco.

A toda mi familia en Colombia. Gracias por todo el aliento y el aguante durante este tiempo.

A mis padres. Les debo todo, no tengo palabras para agradecerles todo lo que han hecho por mi. Han sido y serán la inspiración y la fuerza en mi vida.

## Índice general

Resumen	5
Abstract	7
Agradecimientos	9
Introducción	13
Capítulo 1. Preliminares sobre categorías	21
1.1. Categorías abelianas	21
1.1.1. El grupo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$	24
1.2. Categorías monoidales	24
1.2.1. Categorías trenzadas	28
1.2.2. Categorías monoidales rígidas	31
1.2.3. El anillo de Grothendieck $\mathcal{G}(\mathcal{C})$	33
1.3. Categorías tensoriales finitas y de fusión	33
1.4. Categorías módulo	35
Capítulo 2. Categorías de fusión	39
2.1. Dimensiones de Frobenius-Perron	39
2.2. Equivariantización de categorías de fusión	41
2.3. Categorías de fusión de tipo grupo	44
2.4. Categorías graduadas	45
2.4.1. Categorías de fusión nilpotentes	46
2.4.2. Categorías de fusión resolubles	47
2.5. Sucesiones exactas	48
2.6. Categorías de fusión trenzadas	49
2.7. Categorías de fusión $G$ -cruzadas	51
2.7.1. $S$ -matriz y fórmula de Verlinde para categorías modulares	54
Capítulo 3. Preliminares acerca de grafos de grupos finitos	59
3.1. Grafo primo y grafo común divisor	60
3.2. El grafo $\Delta(G)$	62
3.3. El grafo $\Delta'(G)$	65

3.4. El grafo $\Gamma'(G)$ y el IP-grafo	69
Capítulo 4. Grafos de Frobenius-Perron de una categoría de fusión íntegra	73
4.1. Definición de grafos de Frobenius-Perron para una categoría de fusión íntegra	73
4.2. Grafos de Frobenius-Perron de algunas clases de extensiones graduadas	74
4.3. Teorema de Gallagher para categorías de fusión	76
Capítulo 5. Grafos de una equivariantización y de la categoría de representaciones de un doble de Drinfeld torcido	79
5.1. Grafos de Frobenius-Perron de una equivariantización	79
5.1.1. Equivariantización bajo la acción de un grupo no abeliano	81
5.1.2. Equivariantizaciones de categorías de fusión punteadas	85
5.2. El grafo de la categoría de representaciones de un doble de Drinfeld torcido	87
Capítulo 6. Grafos de Frobenius-Perron de una categoría de fusión no-degenerada	95
6.1. Resultados preliminares	95
6.2. Resultados principales	100
6.3. Aplicación	101
Bibliografía	105

## Introducción

Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero. El objeto principal de estudio de esta tesis son las categorías de fusión sobre  $k$ . Una categoría de fusión es una clase particular de lo que se denomina una categoría tensorial finita. La noción de categoría tensorial finita aparece en el trabajo [23] y juega un rol fundamental en varias ramas de la matemática y de la física teórica. Recordemos que una categoría tensorial finita sobre  $k$  es una categoría  $\mathcal{C}$  monoidal, rígida,  $k$ -lineal finita tal que el objeto unidad  $\mathbf{1}$  es simple y que posee un número finito de clases de isomorfismo de objetos simples. Una categoría de fusión es por definición, una categoría tensorial finita semisimple.

Las categorías tensoriales engloban diversos tipos de estructuras. Como ejemplo de estas podemos nombrar a la categoría de representaciones de un grupo finito, de álgebras de Lie y más generalmente, a la categoría de representaciones de un álgebra de Hopf.

En el artículo [17], Drinfeld introduce la noción de una *cuasi-álgebra de Hopf*, esta es una versión más general de un álgebra de Hopf donde se ha debilitado la asociatividad del coproducto. La categoría de representaciones de una cuasi-álgebra de Hopf de dimensión finita es una categoría tensorial finita.

Existen varias herramientas que se han desarrollado para el estudio de las categorías de fusión. Una de ellas, estudiada en detalle por Etingof, Nikshych y Ostrik en el trabajo [21], es la noción de *dimensión de Frobenius-Perron*, esta dimensión generaliza la dimensión de una representación. La dimensión de Frobenius-Perron es un número real positivo que es asignado a cada clase de equivalencia en el anillo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  de la categoría de fusión. En el mencionado trabajo, Etingof, Nikshych y Ostrik demostraron que las categorías de fusión cuya dimensión de Frobenius-Perron de cada clase de isomorfismo de objetos simples es un número entero, son exactamente las categorías de representaciones de cuasi-álgebras de Hopf semisimples. Este resultado tiende

un puente en el sentido de que un avance en la teoría de las cuasi-álgebras de Hopf es reflejado en la teoría de categorías de fusión íntegras y viceversa.

Por el momento, dar una clasificación general de todas las categorías de fusión es una cuestión que está fuera de alcance. Una de las formas de avanzar en el problema es restringir el conjunto de las categorías de fusión que se consideran, añadiendo algunas hipótesis extra.

Nociones de la teoría de grupos tales como nilpotencia y resolubilidad han sido generalizadas al contexto de categorías de fusión en los trabajos [27] y [22] respectivamente. Así mismo, resultados importantes han sido generalizados a este contexto. Uno de tales resultados, el cual es demostrado en [22], es la versión del teorema de Burnside para categorías de fusión: Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión tal que su dimensión de Frobenius-Perron se factoriza en la forma  $p^a q^b$ , con  $p$  y  $q$  primos, entonces dicha categoría es resoluble.

Sea  $G$  un grupo finito. Podemos asociar al grupo  $G$  dos conjuntos de números enteros positivos. El primero de ellos, denotado por  $\text{cd}(G)$ , se define como el conjunto de las dimensiones de las representaciones irreducibles de dimensión finita del grupo  $G$  sobre  $k$ , es decir, como el conjunto de los grados de los caracteres irreducibles de  $G$ . El segundo conjunto, denotado por  $\text{cs}(G)$ , es el conjunto formado por los cardinales de las clases de conjugación de  $G$ .

Sobre estos dos conjuntos se han definido diversas estructuras de grafos. El conocimiento de las propiedades de estos grafos, entre los cuales cabe destacar el número de componentes conexas y su diámetro, entre otras condiciones, proveen de información importante sobre la estructura del grupo  $G$ . Entre las principales referencias acerca de estos grafos y sus propiedades, podemos mencionar los trabajos [11], [36] y [41], así como las referencias que allí se citan.

En este trabajo nos vamos a concentrar principalmente en dos tipos de grafos conocidos con los nombres de *grafo primo* y *grafo común divisor*. En general, estos grafos son definidos sobre cualquier conjunto de enteros. Sea  $S$  un conjunto de enteros positivos. El grafo primo sobre  $S$ , el cual denotaremos por  $\Delta(S)$ , se define de la siguiente manera: El conjunto de vértices es el conjunto de números primos  $p$  tales que  $p$  divide a un elemento del conjunto  $S$ . Dos vértices  $p$  y  $q$  están unidos por una arista si y sólo si existe un elemento  $s \in S$  tal que  $pq$  divide a  $s$ .

Por otro lado, el grafo común divisor sobre  $S$ , que denotaremos por  $\Gamma(S)$ , es definido así: Su conjunto de vértices es el conjunto  $S - 1$ , dos vértices  $a$  y  $b$  están unidos por una arista si y sólo si  $a$  y  $b$  no son coprimos.

Sea  $G$  un grupo finito, fijemos los conjuntos de enteros  $\text{cd}(G)$  y  $\text{cs}(G)$  definidos anteriormente. Los grafos primo y grafo común divisor sobre el conjunto  $\text{cd}(G)$  serán denotados por  $\Delta(G)$  y  $\Gamma(G)$  respectivamente. Análogamente, podemos definir el grafo primo y el grafo común divisor sobre el conjunto  $\text{cs}(G)$ . Estos serán denotados por  $\Delta'(G)$  y  $\Gamma'(G)$  respectivamente.

Sobre el grafo  $\Delta(G)$ , donde  $G$  es un grupo finito, se sabe que el número de componentes conexas es lo sumo tres. Este número se reduce a dos si el grupo  $G$  es resoluble. Más aún, si el grafo  $\Delta(G)$  es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo tres. Por otro lado, si el grafo no es conexo, entonces cada componente conexa es un grafo completo, [40], [41], [42].

En cuanto al grafo  $\Delta'(G)$ , se sabe que este grafo posee a lo sumo dos componentes conexas. Más aún, este grafo no es conexo si y sólo si, el grupo  $G$  es un grupo cuasi-Frobenius con complemento y núcleo abelianos, en este caso cada componente conexa es un grafo completo. Estos resultados aparecen en los trabajos [3] y [36].

Como dijimos anteriormente, una forma de encarar el estudio de las categorías de fusión es imponiendo restricciones extras a la definición. En esta tesis vamos a trabajar con una clase de categorías de fusión llamadas *categorías de fusión íntegras*. Decimos que una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  es íntegra si las dimensiones de Frobenius-Perron de las clases de isomorfismo de sus objetos simples son números enteros.

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría íntegra. Uno de los principales objetivos de la tesis, consiste en estudiar el grafo primo  $\Delta(\mathcal{C})$  y el grafo común divisor  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Estos grafos son definidos como los grafos asociados al conjunto  $\text{cd}(\mathcal{C})$  de dimensiones de Frobenius-Perron de las clases de isomorfismo de los objetos simples de  $\mathcal{C}$ . Dichos grafos coinciden con  $\Delta(G)$  y  $\Gamma(G)$  cuando  $\mathcal{C}$  es la categoría  $\text{Rep } G$  de representaciones de dimensión finita de un grupo finito  $G$  sobre  $k$ .

Una consecuencia muy importante de los resultados sobre la estructura de los grafos, tanto en las categorías de representaciones de grupos como en el caso de las categorías de fusión, es que dan restricciones sobre las posibles dimensiones que ocurren y por lo tanto, dan una medida de la rigidez que impone la estructura de este tipo de categorías. Además, eventualmente estos

resultados tienen aplicaciones en problemas de clasificación, usándolos para descartar posibilidades en argumentos de conteo.

Los resultados de esta tesis hacen parte del trabajo [56] titulado *Graphs attached to simple Frobenius-Perron dimensions of an integral fusion category*, el cual será publicado en la revista Monatshefte für Mathematik y cuya versión preprint puede ser consultada en arXiv:1403.1247.

En el Capítulo 1 introducimos las nociones preliminares sobre categorías, esto con el fin de hacer la monografía lo más autocontenida posible.

El Capítulo 2 está dedicado a las nociones básicas y ejemplos de categorías de fusión. Comienza con la definición de la dimensión de Frobenius-Perron para una categoría de fusión, luego introducimos dos construcciones muy importantes las cuales son la equivariantización y la extensión de una categoría de fusión por un grupo finito. La Sección 2.5 es consagrada al estudio de la noción de sucesiones exactas de categorías tensoriales las cuales fueron introducidas por Brugières y Natale en el trabajo [7]. La Sección 2.6 está dedicada a la noción de categoría de fusión trenzada.

En la Sección 2.7, introducimos una noción debida a Turaev, la cual es llamada categoría de fusión  $G$ -cruzada. Estudiamos un invariante, en el contexto de categorías trenzadas, el cual es conocido con el nombre de la  $S$ -matriz y la noción relacionada de categoría modular. Las categorías modulares tienen una gran conexión con el área de la física matemática y fórmulas importantes como la llamada *fórmula de Verlinde* han sido adaptadas y generalizadas al contexto categórico. En esta misma sección enunciamos la fórmula de Verlinde y algunas consecuencias.

El tercer Capítulo está dedicado a definir y estudiar los diversos grafos sobre un grupo finito  $G$  con los que vamos a trabajar en la tesis. Introducimos los grafos primo y común divisor sobre el conjunto de enteros  $\text{cd}(G)$  y  $\text{cs}(G)$ , así como una generalización de este último grafo debida a Isaacs y Praeger [32] y que es conocido con el nombre de IP-grafo. A lo largo del Capítulo damos caracterizaciones sobre el número de componentes conexas así como la descripción de las mismas y ejemplos particulares.

En el Capítulo 4 introducimos la noción de grafos de Frobenius-Perron para una categoría de fusión íntegra. Damos esta definición en la Sección 4.1. En la Sección 4.2 estudiamos y caracterizamos el grafo primo para una categoría de



fusión íntegra 2-pasos nilpotente, así como el grafo primo de una categoría de fusión íntegra, nilpotente y trenzada.

El resultado principal de la Sección 4.3, es el siguiente resultado el cual generaliza al contexto de categorías de fusión un teorema de la teoría de representaciones de grupos llamado el Teorema de Gallagher.

**TEOREMA 4.3.1.** Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor tensorial entre dos categorías de fusión  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ . Sean  $X, Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$  tales que  $Y \in \mathfrak{Ker}_F$  y  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{D}$ . Entonces  $Y \otimes X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .

En el Capítulo 5 damos una caracterización de los grafos de Frobenius-Perron para una equivariantización de una categoría de fusión íntegra por un grupo finito  $G$ . El resultado principal es la caracterización del grafo primo: Si el grupo  $G$  no es abeliano, entonces el grafo primo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas, este número se reduce a dos si el grupo  $G$  es resoluble.

Por otro lado, el grafo primo de la categoría  $\mathcal{C}$  de representaciones de dimensión finita de un doble cuántico torcido  $D^\omega(G)$ , con  $\omega \in H^3(G, k^*)$ , está relacionado con el grafo  $\Delta'(G)$ . En la sección 5.2 estudiamos los grafos de la categoría de representaciones de un doble cuántico torcido. En particular, obtenemos el siguiente resultado de estructura:

**TEOREMA 5.2.8.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $\omega$  un 3-cociclo sobre  $G$ . Entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  tiene a lo sumo dos componentes conexas y su diámetro es a lo sumo tres. Más aún, se tiene:

- (i) Supongamos que  $G$  es un grupo nilpotente. Entonces  $\Delta(D^\omega(G))$  es el grafo completo sobre el conjunto de vértices  $S_\omega$ .
- (ii) Si el conjunto  $S_\omega$  es no vacío, entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos.
- (iii) Supongamos que  $\Delta(D^\omega(G))$  no es conexo. Entonces  $S_\omega = \emptyset$  y  $G$  es un grupo cuasi-Frobenius con complemento y núcleo abelianos. Mas aún, tenemos que  $\Delta(D^\omega(G)) = \Delta'(G)$  tiene dos componentes conexas y una de ellas es un grafo completo.
- (iv) Supongamos que  $G$  no es resoluble. Entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos.

El conjunto  $S_\omega$  que aparece en el enunciado del Teorema es un conjunto de números primos que satisfacen ciertas condiciones.

Finalmente, en el Capítulo 6 enunciamos y demostramos los resultados principales de la tesis.

Una clase distinguida dentro de las categorías de fusión es la de las categorías de fusión trenzadas, y en particular las categorías de fusión trenzadas no-degeneradas. Este tipo de categorías son muy relevantes en distintas áreas de la matemática y de la física matemática. Ver por ejemplo [2], [62].

Obtenemos el siguiente teorema en el contexto de las categorías de fusión trenzadas e íntegras:

**TEOREMA 6.2.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra no-degenerada. Entonces se tienen:

- (i) El grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.
- (ii) Supongamos que la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble. Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.

Para categorías de fusión trenzadas de tipo grupo, las cuales son siempre íntegras, obtenemos el siguiente teorema:

**TEOREMA 6.2.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada de tipo grupo. Entonces se tienen:

- (i) El grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.
- (ii) Si la categoría  $\mathcal{C}$  es no-degenerada, entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas y su diámetro es a lo sumo igual a tres.

Como aplicación de los resultados obtenidos a lo largo del trabajo, enunciamos y demostramos el siguiente teorema de clasificación:

**TEOREMA 6.3.2.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada tal que  $\text{FPdim } \mathcal{C} \in \mathbb{Z}$  y sean  $p_1, \dots, p_r$  números primos. Supongamos que las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de  $\mathcal{C}$  son una potencia del primo  $p_i$  para algún  $1 \leq i \leq r$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es débilmente de tipo grupo.

Además, si una de las siguientes condiciones ocurre

- (a)  $r \leq 2$ , o
- (b)  $p_i > 7$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .

Entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble.

La prueba del Teorema 6.2.1 involucra un estudio de subcategorías Tannakianas de categorías de fusión trenzadas y su conexión con la equivariantización. Usamos en la demostración, el hecho de que el grafo de Frobenius-Perron de una categoría de fusión trenzada no-degenerada sin subcategorías Tannakianas no punteadas tiene a lo sumo dos componentes conexas. Este último resultado sigue de una aplicación de la fórmula de Verlinde para categorías modulares.

Obtenemos el Teorema 6.2.2 usando la descripción de los grafos del doble de Drinfeld torcido de un grupo finito y del grafo para una equivariantización de una categoría de fusión punteada.



## Capítulo 1

### Preliminares sobre categorías

Recordemos que a lo largo de este trabajo vamos a fijar un cuerpo  $k$  algebraicamente cerrado y de característica cero.

En este capítulo recordaremos algunas definiciones y nociones sobre categorías, las cuales serán necesarias en capítulos posteriores cuando nos adentraremos en el estudio de una clase particular de estas. Además presentaremos algunos ejemplos y resultados que usaremos posteriormente.

Vamos a suponer conocidas las definiciones básicas de categorías, funtores y transformaciones naturales. Para el lector interesado en estas nociones remitimos a los libros [38], [24]. Para categorías monoidales, las principales referencias serán [35] y [2]. Para la sección de categorías tensoriales finitas y de fusión, nuestras principales referencias serán [20] y [21].

#### 1.1. Categorías abelianas

En esta sección introduciremos la noción de categoría abeliana y mostraremos algunos ejemplos de las mismas. La principal referencia usada será [38].

Todas las categorías que consideraremos a lo largo de este trabajo serán categorías pequeñas, esto es, categorías  $\mathcal{C}$  tales que la clase de objetos  $\text{Obj}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

**Definición 1.1.1.** Una categoría *aditiva*  $\mathcal{C}$  es una categoría que satisface las siguientes condiciones:

- (i) Para todo par de objetos  $X, Y$  en la categoría se tiene que el conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tiene estructura de grupo abeliano.
- (ii) Para cualesquiera objetos  $X, Y, Z$  en la categoría tenemos que la composición de morfismos

$$\circ : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

es bilineal.

- (iii) Existe un objeto en la categoría  $\mathcal{C}$ , denotado por  $0$ , llamado el objeto *cero*. Este objeto satisface que para todo objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$ , el conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, 0)$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(0, X)$  posee un único elemento.
- (iv) Todo par de objetos  $X$  e  $Y$  poseen suma directa en  $\mathcal{C}$ .

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías aditivas. Un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  se dice *aditivo* si para todo par de morfismos  $f, g$  en  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  se tiene que

$$F(f + g) = F(f) + F(g)$$

Consideremos dos funtores  $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre las categorías aditivas  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$ . Una *transformación natural*  $\tau : F \rightarrow G$  es una familia de morfismos  $\{\tau_X : F(X) \rightarrow G(X)\}_{X \in \mathcal{C}}$  tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\tau_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\tau_Y} & G(Y) \end{array}$$

conmuta para todo  $X, Y \in \mathcal{C}$  y para todo morfismo  $f : X \rightarrow Y$ .

**Ejemplo 1.1.2.** Sea  $R$  un anillo. Las categorías  ${}_R\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}_R$  y  ${}_R\mathcal{M}_R$  de  $R$ -módulos a izquierda,  $R$ -módulos a derecha y de  $R$ -bimódulos respectivamente, son aditivas.

**Definición 1.1.3.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. Decimos que la categoría  $\mathcal{C}$  es  $k$ -lineal, si para todo par de objetos  $X$  e  $Y$  de  $\mathcal{C}$ , el conjunto de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  es un  $k$ -espacio vectorial y la composición es  $k$ -bilineal.

Todos los funtores entre categorías aditivas (respectivamente  $k$ -lineales) que consideraremos serán supuestos aditivos (respectivamente  $k$ -lineales).

**Definición 1.1.4.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría aditiva. Decimos que la categoría es *abeliana* si se satisface:

- Para todo morfismo  $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  en la categoría, existe el núcleo  $\text{Ker } \phi$  y el conúcleo  $\text{Coker } \phi$ .
- Todo monomorfismo en la categoría es núcleo de algún morfismo.
- Todo epimorfismo en la categoría es un conúcleo de algún morfismo.

En virtud de la siguiente proposición, tenemos que en toda categoría abeliana cualquier morfismo se puede escribir como la composición de un epimorfismo seguido de un monomorfismo.

**Proposición 1.1.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Cada morfismo  $f$  en  $\mathcal{C}$  tiene una factorización  $f = me$ , donde  $m$  es un monomorfismo y  $e$  un epimorfismo. Más aún,*

$$m = \ker(\operatorname{coker} f), \quad e = \operatorname{coker}(\ker f)$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [38, Proposition 1 pag. 195] □

Recordemos que un funtor  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  entre dos categorías se dice *fiel* (respectivamente *pleno*), si para todo  $X, Y \in \mathcal{C}$ , la función inducida

$$F_{X,Y} : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$$

dada por  $f \mapsto F(f)$ , es inyectiva (respectivamente sobreyectiva).

Un funtor entre categorías abelianas se dice *exacto* si preserva núcleos y conúcleos.

Existe un resultado conocido como el teorema de Freyd-Mitchell el cual caracteriza a una categoría abeliana. Para el lector interesado en su demostración recomendamos las referencias [24], [46].

**Teorema 1.1.6** (Teorema de Freyd-Mitchell). *Si  $\mathcal{A}$  es una categoría abeliana pequeña, entonces existe un anillo con unidad  $R$  y un funtor exacto, fiel y pleno de  $\mathcal{A}$  en la categoría  ${}_R\mathcal{M}$ , el cual hace que  $\mathcal{A}$  sea equivalente a una subcategoría plena de  ${}_R\mathcal{M}$ .*

En vista del anterior teorema, podemos ver los principales conceptos de las categorías abelianas en términos de la teoría clásica de módulos sobre anillos. Por ejemplo, la definición de la serie de Jordan-Hölder, concepto definido inicialmente para módulos, tiene una extensión natural a categorías abelianas. Diremos que un objeto  $X$  en una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  es de *longitud finita* si su serie de Jordan-Hölder es finita.

**Ejemplo 1.1.7.** La categoría **Ab** de grupos abelianos de dimensión finita es abeliana.

**Definición 1.1.8.** Un objeto  $U$  de una categoría abeliana  $\mathcal{C}$  se dice *simple* si todo monomorfismo  $V \rightarrow U$  es el morfismo cero o un isomorfismo. Una categoría abeliana es llamada *semisimple* si todo objeto es suma directa de objetos simples.

**Ejemplo 1.1.9.** Sea  $G$  un grupo finito. La categoría **Rep**( $G$ ) de representaciones del grupo  $G$ , es una categoría abeliana  $k$ -lineal. Si consideramos la subcategoría plena  $\operatorname{Rep}(G)$  de representaciones de dimensión finita tenemos, por

el teorema de Maschke, que  $\text{Rep}(G)$  es semisimple si y sólo si la característica del cuerpo  $k$  no divide al orden de  $G$ .

**1.1.1. El grupo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ .** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana. Para cada objeto  $X \in \mathcal{C}$ , denotaremos por  $[X]$  a la clase de isomorfismo de  $X$  en  $\mathcal{C}$ . El grupo de Grothendieck, el cual será denotado por  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ , es el grupo abeliano generado por las clases de isomorfismos de objetos de la categoría  $\mathcal{C}$ , sujetos a las relaciones:

$$[X] = [Y] + [Z]$$

si existe una sucesión exacta

$$0 \rightarrow Y \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow 0$$

donde  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ .

En el caso de que la categoría  $\mathcal{C}$  sea de longitud finita, es decir, que para todo objeto su serie de Jordan-Hölder es finita, el grupo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  es un grupo abeliano libre generado por las clases de equivalencia de los objetos simples de  $\mathcal{C}$ .

## 1.2. Categorías monoidales

Una estructura importante que aparece en teoría de categorías y que usaremos a lo largo de la monografía es la estructura de categoría monoidal, la cual será definida en esta sección. Nuestras principales referencias son [35], [2] y [20].

**Nota 1.2.1.** En el libro [35] a las categorías monoidales se las denomina “categorías tensoriales”. Nosotros usaremos categoría tensorial para una estructura más restrictiva que será definida más adelante.

**Definición 1.2.2.** Una colección  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, r, l)$  se dice una *categoría monoidal*, si

- $\mathcal{C}$  es una categoría,  $\mathbf{1} \in \text{obj}(\mathcal{C})$  un objeto en  $\mathcal{C}$ ;
- $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un bifunctor;
- $a_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \rightarrow X \otimes (Y \otimes Z)$  es una familia de isomorfismos naturales,
- $r_X : X \otimes \mathbf{1} \rightarrow X$  y  $l_X : \mathbf{1} \otimes X \rightarrow X$  son familias de isomorfismos naturales,

tales que para todo objeto  $X, Y, Z, W$  en  $\mathcal{C}$  se satisfacen los siguientes axiomas:



- El *Axioma del pentágono*. Para todos  $X, Y, Z, W \in \mathcal{C}$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes W & \\
 a_{X,Y,Z} \otimes \text{id} \swarrow & & \searrow a_{X \otimes Y, Z, W} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes W & & (X \otimes Y) \otimes (Z \otimes W) \\
 \downarrow a_{X, Y \otimes Z, W} & & \downarrow a_{X, Y, Z \otimes W} \\
 X \otimes ((Y \otimes Z) \otimes W) & \xrightarrow{\text{id} \otimes a_{Y, Z, W}} & X \otimes (Y \otimes (Z \otimes W))
 \end{array}$$

- *Axioma del triángulo*. Para todo  $X \in \mathcal{C}$ , el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes \mathbf{1}) \otimes \mathbf{W} & \xrightarrow{a_{X, \mathbf{1}, \mathbf{Y}}} & X \otimes (\mathbf{1} \otimes \mathbf{W}) \\
 \downarrow r_X \otimes \text{id} & & \downarrow \text{id} \otimes l_W \\
 & X \otimes W &
 \end{array}$$

De ahora en adelante y cuando no se preste a confusiones, a la categoría monoidal  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, r, l)$  la denotaremos simplemente por  $\mathcal{C}$ .

Si en la definición tenemos que las familias de isomorfismos naturales  $a$ ,  $r_X$  y  $l_X$  son identidades, diremos que la categoría monoidal es *estricta*.

**Definición 1.2.3.** Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías monoidales. Un *functor monoidal* de  $\mathcal{C}$  en  $\mathcal{D}$  es una colección  $(F, f, \phi)$  donde

- $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un functor;
- $\{f_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \rightarrow F(X \otimes Y) \mid X, Y \in \text{obj}(\mathcal{C})\}$  es una familia de isomorfismos naturales,
- $\phi : F(\mathbf{1}_{\mathcal{C}}) \rightarrow \mathbf{1}_{\mathcal{D}}$  es un isomorfismo en  $\mathcal{D}$ ,

tales que para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ , se verifican:

- (1)  $(\text{id} \otimes f_{Y,Z})f_{X, Y \otimes Z}F(a_{X,Y,Z}) = a_{F(X), F(Y), F(Z)}(f_{X,Y} \otimes \text{id})f_{X \otimes Y, Z},$
- (2)  $l_{F(X)} = F(l_X)f_{\mathbf{1}, X}(\phi^{-1} \otimes \text{id}_{F(X)}),$
- (3)  $r_{F(X)} = F(r_X)f_{X, \mathbf{1}}(\text{id}_{F(X)} \otimes \phi^{-1}).$

Una *transformación natural monoidal*  $\tau : (F, f, \phi) \rightarrow (F', f', \phi')$  entre dos funtores monoidales es una transformación natural  $\tau : F \rightarrow F'$  tal que para cualquier  $X, Y \in \mathcal{C}$ , las identidades

- (4)  $\phi = \phi' \tau_{\mathbf{1}}, \quad \tau_{X \otimes Y} f_{X,Y} = f'_{X,Y}(\tau_X \otimes \tau_Y).$

se satisfacen.

Un *isomorfismo natural monoidal* es una transformación natural monoidal que es un isomorfismo natural.

Una *equivalencia monoidal* entre dos categorías monoidales  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  es un funtor monoidal  $(F, f, \phi) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ , tal que existe otro funtor monoidal

$$(F', f', \phi') : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$$

e isomorfismos naturales monoidales

$$\tau : F \circ F' \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{D}}, \quad \tau' : F' \circ F \rightarrow \text{Id}_{\mathcal{C}}.$$

En este caso decimos que las categorías monoidales  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son *monoidalmente equivalentes*.

**Nota 1.2.4.** Un hecho muy importante de las categorías monoidales que usaremos es el siguiente: Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal, entonces existe una categoría monoidal estricta  $\mathcal{C}'$ , tal que  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}'$  son monoidalmente equivalentes. Esto se conoce como el Teorema de Coherencia de Mac-Lane y puede ser consultado en [38].

**Ejemplo 1.2.5.** Sea  $\text{Vec}$  la categoría de espacios vectoriales sobre el cuerpo  $k$ . Esta categoría es una categoría monoidal donde  $\otimes = \otimes_k$ ,  $\mathbf{1} = k$  y los morfismos  $a$ ,  $r$  y  $l$  son los morfismos usuales de espacios vectoriales.

**Ejemplo 1.2.6.** Sea  $G$  un grupo finito. Consideremos la categoría  $\mathbf{Rep}(G)$  de representaciones sobre el cuerpo  $k$ . Sea  $V$  una representación y  $\rho_V : G \rightarrow GL(V)$  el morfismo correspondiente a esta representación. Podemos dotar a esta categoría de una estructura de categoría monoidal de la siguiente forma:

Si  $V$  y  $W$  son dos representaciones, entonces su producto tensorial es una nueva representación cuyo espacio vectorial subyacente es  $V \otimes W = V \otimes_k W$ . La aplicación

$$\rho_{V \otimes W} : G \rightarrow GL(V \otimes W)$$

es dada por  $\rho_{V \otimes W}(g) = \rho_V(g) \otimes \rho_W(g)$ . El objeto unidad es la representación trivial, es decir,  $\mathbf{1} = k$ .

**Ejemplo 1.2.7.** El ejemplo anterior se puede generalizar al siguiente caso. Sea  $H$  una biálgebra y sea  $H\text{-Mod}$  la categoría de  $H$ -módulos. Dados  $U, V \in H$  definimos su producto tensorial a partir de la acción diagonal determinada por la comultiplicación de  $H$ , es decir  $U \otimes V$  es un  $H$ -módulo con la acción dada por:

$$h \cdot (u \otimes v) := h_{(1)} \cdot u \otimes h_{(2)} \cdot v$$

para todos  $h \in H$ ,  $u \in U$ ,  $v \in V$ .

Con este producto tensorial,  $H\text{-Mod}$  es una categoría monoidal. La unidad es el cuerpo  $k$  visto como un espacio vectorial sobre si mismo, donde la acción viene dada por la counidad de  $H$ , es decir,  $h \cdot 1 = \varepsilon(h)$ . Los isomorfismos de asociatividad y de unidad son los usuales de espacios vectoriales.

**Ejemplo 1.2.8.** Sea  $G$  un grupo finito, denotaremos por  $\mathcal{C}(G)$  a la categoría de  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita  $G$ -graduados. Sus objetos son espacios vectoriales munidos de una  $G$ -graduación  $V = \bigoplus_{g \in G} V_g$  y sus morfismos son los morfismos que respetan la  $G$ -graduación.

Ahora, vamos a dotar a esta categoría de un producto tensorial de la siguiente forma:

$$V \otimes W = \bigoplus_{g \in G} (V \otimes W)_g$$

donde

$$(V \otimes W)_g = \bigoplus_{x \in G} V_x \otimes W_{x^{-1}g}$$

El objeto unidad satisface  $\mathbf{1}_e = k$  y  $\mathbf{1}_g = 0$  si  $g \neq e$ . Si consideramos los isomorfismos de asociatividad y de unidad de espacios vectoriales, entonces podemos definir los isomorfismos  $a, r$  y  $l$  de manera obvia.

**Ejemplo 1.2.9.** En este ejemplo, daremos una generalización del ejemplo anterior donde el isomorfismo de asociatividad no será el trivial.

Sea  $G$  un grupo finito. Un  $\beta$ -cociclo normalizado es una función  $\omega : G \times G \times G \rightarrow k^*$  que satisface:

$$\omega(g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3) = \omega(g_1g_2, g_3, g_4)\omega(g_1, g_2, g_3g_4)$$

$$\omega(g, 1, l) = 1$$

Para todo  $g, l, g_1, g_2, g_3, g_4 \in G$ .

De la definición se puede deducir que  $\omega(1, g, l) = 1 = \omega(g, l, 1)$  para todo  $g, l \in G$ .

Definimos la categoría monoidal  $\mathcal{C}(G, \omega)$  de la siguiente manera: Como categoría abeliana,  $\mathcal{C}(G, \omega)$  es igual a  $\mathcal{C}(G)$ . El producto tensorial y el objeto unidad son los mismos que los de la categoría  $\mathcal{C}(G)$ .

La diferencia ocurre con el isomorfismo de asociatividad  $a^\omega$ , el cual se define como

$$a^\omega : (U \otimes V) \otimes W \rightarrow U \otimes (V \otimes W)$$

$$a_{U,V,W}^\omega((u \otimes v) \otimes w) = \omega(g, f, h)(u \otimes (v \otimes w))$$

para elementos homogéneos  $u \in U_g$ ,  $v \in V_f$  y  $w \in W_h$  de  $U, V, W \in \mathcal{C}$  respectivamente.

Cuando tomamos el cociclo trivial 1, tenemos que  $\mathcal{C}(G, 1) = \mathcal{C}(G)$ .

**1.2.1. Categorías trenzadas.** Recordemos la noción de categoría trenzada, introducida por Joyal y Street en el artículo [34].

**Definición 1.2.10.** Una categoría monoidal  $\mathcal{C}$  se dice *trenzada*, si está munida de un isomorfismo natural,

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X, \quad X, Y \in \mathcal{C}$$

el cual es llamado una *trenza*, tal que satisface las siguientes ecuaciones para todos los objetos  $X, Y, Z$  en  $\mathcal{C}$ :

$$(a_{Y,Z,X})(c_{X,Y \otimes Z})(a_{X,Y,Z}) = (\text{id}_Y \otimes c_{X,Z})(a_{Y,X,Z})(c_{X,Y} \otimes \text{id}_Z)$$

$$(a_{Z,X,Y}^{-1})(c_{X \otimes Y,Z})(a_{X,Y,Z}^{-1}) = (c_{X,Z} \otimes \text{id}_Y)(a_{X,Z,Y}^{-1})(\text{id}_X \otimes c_{Y,Z})$$

estas ecuaciones son conocidas como los axiomas del hexágono.

Si la trenza satisface además que  $c_{V,U}c_{U,V} = \text{id}_{U \otimes V}$  para todo  $U, V$  en  $\mathcal{C}$ , decimos que la categoría  $\mathcal{C}$  es *simétrica*.

**Definición 1.2.11.** Sean  $\mathcal{C}^1$  y  $\mathcal{C}^2$  categorías monoidales trenzadas cuyas trenzas son denotadas por  $c^1$  y  $c^2$  respectivamente. Un funtor monoidal  $(F, f, \phi)$  de  $\mathcal{C}^1$  a  $\mathcal{C}^2$  se dice *trenzado* si el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} F(X) \otimes F(Y) & \xrightarrow{c_{F(X),F(Y)}^2} & F(Y) \otimes F(X) \\ f_{X,Y}^{-1} \downarrow & & \downarrow f_{Y,X}^{-1} \\ F(X \otimes Y) & \xrightarrow{F(c_{X,Y}^1)} & F(Y \otimes X) \end{array}$$

para todos los objetos  $X, Y$  en la categoría  $\mathcal{C}^1$ .

**Ejemplo 1.2.12.** Si  $G$  es un grupo finito, entonces la categoría  $\text{Rep}(G)$  es simétrica, su trenza es la trenza estándar. Esto es,

$$c_{X,Y}(x \otimes y) = y \otimes x$$

**Ejemplo 1.2.13.** Denotemos por  $\text{sVec}$  a la categoría de  $k$ -espacios vectoriales de dimensión finita  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graduados. Un elemento de esta categoría es de la forma

$$V = V_0 \bigoplus V_1$$

esta resulta ser una categoría simétrica. La trenza  $c : V \otimes W \rightarrow W \otimes V$  entre dos objetos  $V, W$  en  $\text{sVec}$  se define como

$$c(v \otimes w) = (-1)^{ab} w \otimes v$$

para elementos homogéneos  $v \in V_a, w \in W_b$ , con  $0 \leq a, b \leq 1$ .

**Ejemplo 1.2.14.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $z \in G$  un elemento central tal que  $z^2 = 1$ . Podemos asociarle a la categoría  $\text{Rep}(G)$  una trenza  $c'$  de la siguiente forma:

Supongamos que  $zx = (-1)^m x$  y  $zy = (-1)^n y$ , entonces:

$$c'_{X,Y}(x \otimes y) = (-1)^{mn}(y \otimes x).$$

Denotemos por  $\text{Rep}(G, z)$  a la categoría  $\text{Rep}(G)$  equipada con esta trenza, las categorías de esta forma reciben el nombre de categorías *super-Tannakianas*.

**Ejemplo 1.2.15.** En este ejemplo, introduciremos una clase de biálgebras definidas por Drinfeld en [17] y que son llamadas *Biálgebras cuasi-triangulares*.

Sea  $A$  una biálgebra. Decimos que  $A$  es una *biálgebra cuasi-triangular* si existe un elemento invertible  $R$  en  $A \otimes A$ , llamado la  $R$ -matriz universal, tal que para todo  $a \in A$  se satisface:

$$\Delta^{\text{cop}}(a) = R\Delta(a)R^{-1}$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = R_{13}R_{12}$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = R_{13}R_{23}$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id})(R) = 1 = (\text{id} \otimes \varepsilon)(R)$$

donde  $R_{12}$  significa  $R \otimes 1 \in A^{\otimes 3}$  y de manera similar para los elementos  $R_{13}$  y  $R_{23}$ .

En [35, Chapter XV] se demuestra que si  $A$  es una biálgebra cuasi-triangular, entonces la categoría  $A\text{-Mod}$  es una categoría monoidal trenzada. Más aún, esta categoría es simétrica si se cumple que  $R_{21} = R^{-1}$ .

Dada una categoría monoidal  $\mathcal{C}$ , existe una categoría asociada llamada el *centro* de  $\mathcal{C}$ , esta categoría será denotada por  $Z(\mathcal{C})$ . Entre las principales características de dicha categoría, podemos nombrar el hecho de que esta resulta ser una categoría monoidal trenzada.

Por comodidad, consideraremos a la categoría  $\mathcal{C}$  como una categoría monoidal estricta.

**Definición 1.2.16.** El *centro* de la categoría  $\mathcal{C}$ , denotado por  $Z(\mathcal{C})$ , es la categoría cuyos objetos son pares  $(V, c_{-,V})$ , donde  $V$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  y

$$c_{X,V} : X \otimes V \rightarrow V \otimes X$$

es una familia de isomorfismos naturales tales que para todo  $X, Y \in \mathcal{C}$  se satisface la siguiente identidad

$$c_{X \otimes Y, V} = (c_{X,V} \otimes \text{id}_Y)(\text{id}_X \otimes c_{Y,V})$$

**Definición 1.2.17.** Sean  $(V, c_{-,V})$  y  $(W, c_{-,W})$  dos objetos de  $Z(\mathcal{C})$ , un morfismo

$$f : (V, c_{-,V}) \rightarrow (W, c_{-,W})$$

es un morfismo  $f : V \rightarrow W$  en  $\mathcal{C}$  y tal que

$$(f \otimes \text{id}_X)c_{X,V} = c_{X,W}(\text{id}_X \otimes f)$$

para todo  $X$  en  $\mathcal{C}$ .

El centro  $Z(\mathcal{C})$  satisface unas propiedades muy interesantes que enunciaremos en el siguiente teorema:

**Teorema 1.2.18.** *Sea  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, r, l)$  una categoría monoidal.*

1. *Si  $\mathcal{C}$  es una categoría abeliana ( $k$ -lineal) entonces  $Z(\mathcal{C})$  es una categoría abeliana ( $k$ -lineal).*
2.  *$Z(\mathcal{C})$  es una categoría monoidal con unidad  $(\mathbf{1}, l_- \circ r_-)$  y si  $(V, c_{-,V})$  y  $(W, c_{-,W})$  son objetos de  $Z(\mathcal{C})$ , entonces su producto tensorial se define como*

$$(V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) = (V \otimes W, c_{-,V \otimes W})$$

*donde  $c_{X,V \otimes W} = (\text{id}_V \otimes c_{X,W})(c_{X,V} \otimes \text{id}_W)$  para todo  $X$  en  $\mathcal{C}$ .*

3. *La categoría  $Z(\mathcal{C})$  es trenzada. La trenza es dada por*

$$\sigma_{(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W})} : (V, c_{-,V}) \otimes (W, c_{-,W}) \rightarrow (W, c_{-,W}) \otimes (V, c_{-,V})$$

$$\sigma_{(V, c_{-,V}), (W, c_{-,W})} = c_{V,W}$$

DEMOSTRACIÓN. Ver [35, Theorem XIII.4.2]  $\square$

**1.2.2. Categorías monoidales rígidas.** Sea  $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbf{1}, a, r, l)$  una categoría monoidal. Supondremos en esta subsección que  $\mathcal{C}$  es estricta. La referencia usada es el libro [2].

**Definición 1.2.19.** Sea  $X$  un objeto de  $\mathcal{C}$ . Un *dual a derecha* de  $X$  es un objeto  $X^*$  munido de morfismos

$$ev_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \rightarrow X \otimes X^*$$

llamados morfismos de evaluación y de coevaluación respectivamente, tales que las composiciones:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{coev_X \otimes id_X} X \otimes X^* \otimes X \xrightarrow{id_X \otimes ev_X} X \\ X^* &\xrightarrow{id_{X^*} \otimes coev_X} X^* \otimes X \otimes X^* \xrightarrow{ev_X \otimes id_{X^*}} X^* \end{aligned}$$

son las identidades.

Análogamente un *dual a izquierda* de  $X$  es un objeto  ${}^*X$  munido de morfismos

$$ev_X : X \otimes {}^*X \rightarrow \mathbf{1}, \quad coev_X : \mathbf{1} \rightarrow {}^*X \otimes X$$

tales que las composiciones:

$$\begin{aligned} X &\xrightarrow{id_X \otimes coev_X} X \otimes {}^*X \otimes X \xrightarrow{ev_X \otimes id_X} X \\ {}^*X &\xrightarrow{coev_X \otimes id_{{}^*X}} {}^*X \otimes X \otimes {}^*X \xrightarrow{id_{{}^*X} \otimes ev_X} {}^*X \end{aligned}$$

son las identidades.

**Lema 1.2.20.** *Los duales a derecha y a izquierda son únicos salvo isomorfismos.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [2, Lemma 2.1.5].  $\square$

**Definición 1.2.21.** Una categoría monoidal se dice *rígida* si todo objeto posee duales a derecha y a izquierda.

Si  $\mathcal{C}$  es rígida, el objeto unidad verifica que  $\mathbf{1}^* \simeq \mathbf{1} \simeq {}^*\mathbf{1}$ .

**Lema 1.2.22.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría rígida. El funtor dualidad  $(\ )^* : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  es un funtor contravariante. Además para todo  $X, Y$  en la categoría  $\mathcal{C}$  se tiene que  $(X \otimes Y)^* \simeq Y^* \otimes X^*$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [2]. □

**Definición 1.2.23.** Un objeto  $g$  de  $\mathcal{C}$  se dice *invertible* si  $g \otimes g^* \cong \mathbf{1} \cong g^* \otimes g$ .

Una categoría  $\mathcal{C}$  abeliana y rígida es llamada *punteada* si todos sus objetos simples son invertibles.

**Ejemplo 1.2.24.** La categoría  $\mathcal{C}(G, \omega)$  del Ejemplo 1.3.4 es una categoría punteada.

**Lema 1.2.25.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría rígida. Entonces existen isomorfismos naturales*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*) & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(V^* \otimes U, W) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, {}^*V \otimes W) & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, V \otimes W) &= \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes {}^*V, W) \end{aligned}$$

para todo  $U, V, W \in \mathcal{C}$ .

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U \otimes V, W)$ . A este morfismo le asociamos la composición

$$U \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{coev}_V} U \otimes V \otimes V^* \xrightarrow{\psi \otimes \text{id}} W \otimes V^*$$

De manera análoga, al morfismo  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(U, W \otimes V^*)$  le podemos asociar el morfismo

$$U \otimes V \xrightarrow{\varphi \otimes \text{id}} W \otimes V^* \otimes V \xrightarrow{\text{id} \otimes \text{ev}_V} W$$

Es fácil verificar que estos morfismos son inversos el uno del otro. Análogamente se demuestra la existencia de los otros dos isomorfismos naturales. □

Usando el Lema 1.2.25, demostraremos la siguiente proposición, la cual nos da condiciones para que el funtor  $\otimes$  sea exacto en cada variable.

**Proposición 1.2.26.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana y rígida. Entonces el funtor  $\otimes$  es exacto en cada variable. Es decir, si la sucesión*

$$0 \rightarrow U \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow 0$$

*es exacta en  $\mathcal{C}$ , entonces las sucesiones*

$$0 \rightarrow U \otimes X \rightarrow V \otimes X \rightarrow W \otimes X \rightarrow 0$$

*y*

$$0 \rightarrow X \otimes U \rightarrow X \otimes V \rightarrow X \otimes W \rightarrow 0$$



son exactas.

DEMOSTRACIÓN. La sucesión

$$0 \rightarrow U \otimes X \rightarrow V \otimes X \rightarrow W \otimes X \rightarrow 0$$

es exacta si y sólo si la sucesión

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U \otimes X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, V \otimes X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, W \otimes X) \rightarrow 0$$

es exacta para todo  $Y \in \mathcal{C}$ , esto se puede consultar en [38].

Por el Lema 1.2.25, tenemos que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, U \otimes X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes^* X, U)$ . Como el funtor  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, -)$  es exacto a izquierda, entonces tenemos que  $- \otimes X$  es exacto. Análogamente, usando las otras identidades del mismo lema, tenemos que  $X \otimes -$  es exacto.  $\square$

**1.2.3. El anillo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ .** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana monoidal rígida. La Proposición 1.2.26 nos dice que el funtor  $\otimes$  es exacto. Este hecho nos permite definir una estructura de anillo sobre el grupo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ .

Sean  $[X]$  e  $[Y]$  elementos del grupo de Grothendieck. Definimos su producto como

$$[X][Y] = [X \otimes Y]$$

el objeto unidad corresponde a la clase  $[\mathbf{1}]$ .

El anillo resultante se conoce como *el anillo de Grothendieck* de la categoría.

### 1.3. Categorías tensoriales finitas y de fusión

Usando los preliminares de las secciones anteriores vamos a introducir la definición de categoría de fusión. Esta es una clase especial de una categoría llamada categoría tensorial finita. Las categorías de fusión son el contexto categórico en el que vamos a trabajar a lo largo de la monografía.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría abeliana  $k$ -lineal. Decimos que  $\mathcal{C}$  es *localmente finita* si todo objeto de  $\mathcal{C}$  es de longitud finita y los espacios de morfismos  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  son espacios vectoriales de dimensión finita para todo  $X, Y$  en  $\mathcal{C}$ .

La categoría  $\mathcal{C}$  se dice *finita* si es localmente finita y tiene un número finito de objetos simples.

**Definición 1.3.2.** [20] Sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado.

1. Una *categoría tensorial finita* sobre  $k$ , es una categoría finita,  $k$ -lineal, monoidal rígida, tal que el objeto unidad  $\mathbf{1}$  es simple.
2. Una *categoría de fusión* sobre un cuerpo  $k$  es una categoría tensorial finita semisimple.

**Ejemplo 1.3.3.** Los siguientes son ejemplos de categorías de fusión:

1. Sea  $G$  un grupo finito y  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado tal que la característica de  $k$  no divide al orden de  $G$ . La categoría  $\text{Rep}(G)$  es una categoría de fusión.
2. Sea  $H$  una (cuasi-)álgebra de Hopf semisimple de dimensión finita sobre  $k$ . La categoría  $\text{Rep } H$  es categoría de fusión.

**Ejemplo 1.3.4.** Cada categoría de fusión punteada  $\mathcal{C}$  es equivalente a la categoría  $\mathcal{C}(G, \omega)$  con  $G$  un grupo finito y  $\omega$  un 3-cociclo en  $G$ .

Consideremos una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  sobre  $k$ . Una subcategoría tensorial plena  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$  es una *subcategoría de fusión* de  $\mathcal{C}$  si para todo objeto  $X$  en  $\mathcal{C}$  isomorfo a un sumando directo de un objeto en  $\mathcal{D}$  se tiene que  $X \in \mathcal{D}$ . Una subcategoría de fusión es rígida, por lo tanto, es una categoría de fusión por si misma. Para una demostración de este hecho, referimos al lector a [19].

Sea  $\mathcal{X}$  una colección de objetos de  $\mathcal{C}$ . La subcategoría de fusión *generada* por  $\mathcal{X}$ , es la menor subcategoría de fusión que contiene a  $\mathcal{X}$ , la denotaremos por  $\mathcal{C}[\mathcal{X}]$ . En el caso en que  $\mathcal{X}$  está formado por un solo objeto  $X$ , denotaremos esta categoría por  $\mathcal{C}[X]$ .

**Definición 1.3.5.** La *subcategoría adjunta*  $\mathcal{C}_{ad}$  de la categoría de fusión  $\mathcal{C}$ , es la subcategoría de fusión generada por todos los elementos  $X \otimes X^*$ , donde  $X$  recorre todos los objetos simples de  $\mathcal{C}$ .

**Definición 1.3.6.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trezada. Una subcategoría simétrica  $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$  se dice *tannakiana*, si es equivalente, como categoría de fusión trezada, a la categoría de representaciones de dimensión finita de un grupo finito  $G$ . Es decir, si existe un funtor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \text{Rep}(G)$  el cual es una equivalencia de categorías de fusión trezadas.

**Ejemplo 1.3.7.** Sea  $G$  un grupo finito, consideremos la categoría  $\mathcal{C} = \text{Rep}(G)$ . Su subcategoría adjunta es  $\mathcal{C}_{ad} = \text{Rep}(G/Z(G))$ , donde  $Z(G)$  denota el centro del grupo  $G$ .

Una pregunta interesante es determinar cuando el producto tensorial de dos objetos simples en una categoría de fusión es de nuevo un objeto simple. La

respuesta a esta pregunta se encuentra en el siguiente lema cuya demostración aparece en [16, Lemma 2.5]. Recordemos que para dos objetos  $X, Y \in \mathcal{C}$ ,  $m(X, Y)$  denota la multiplicidad de  $X$  en  $Y$ .

**Lema 1.3.8.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. Sean  $X$  e  $Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- $X^* \otimes Y$  es simple.
- Para todo objeto simple  $Z$  distinto del objeto unidad, se tiene que  $m(Z, X \otimes X^*) = 0$  o  $m(Z, Y \otimes Y^*) = 0$ .

### 1.4. Categorías módulo

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría monoidal. La noción de categoría módulo generaliza la noción de módulo sobre un anillo. En esta sección daremos una breve introducción a este concepto.

**Definición 1.4.1.** Un módulo a izquierda sobre  $\mathcal{C}$ , es una categoría abeliana  $\mathcal{M}$ , equipada con un bifunctor  $\otimes^{\mathcal{M}} : \mathcal{C} \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , munido de isomorfismos naturales

$$a_{X,Y,M}^{\mathcal{M}} : (X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{M}} M \xrightarrow{\sim} X \otimes^{\mathcal{M}} (Y \otimes^{\mathcal{M}} M)$$

$$u_M : \mathbf{1} \otimes^{\mathcal{M}} M \xrightarrow{\sim} M$$

tales que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc}
 & ((X \otimes Y) \otimes Z) \otimes^{\mathcal{M}} M & \\
 a_{X,Y,Z}^{\mathcal{M}} \otimes^{\mathcal{M}} id \swarrow & & \searrow a_{X \otimes Y,Z,M}^{\mathcal{M}} \\
 (X \otimes (Y \otimes Z)) \otimes^{\mathcal{M}} M & & (X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{M}} (Z \otimes^{\mathcal{M}} M) \\
 \downarrow a_{X,Y \otimes Z,M}^{\mathcal{M}} & & \downarrow a_{X,Y,Z \otimes^{\mathcal{M}} M}^{\mathcal{M}} \\
 X \otimes^{\mathcal{M}} ((Y \otimes Z) \otimes^{\mathcal{M}} M) & \xrightarrow{id \otimes a_{Y,Z,M}^{\mathcal{M}}} & X \otimes^{\mathcal{M}} (Y \otimes^{\mathcal{M}} (Z \otimes^{\mathcal{M}} M))
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccc}
 (X \otimes \mathbf{1}) \otimes^{\mathcal{M}} M & \xrightarrow{a_{X,1,Y}^{\mathcal{M}}} & X \otimes^{\mathcal{M}} (\mathbf{1} \otimes^{\mathcal{M}} M) \\
 \downarrow r_{X \otimes^{\mathcal{M}} id_M} & & \downarrow id \otimes^{\mathcal{M}} u_M \\
 & X \otimes^{\mathcal{M}} M &
 \end{array}$$

conmutan para todo  $X, Y, Z \in \mathcal{C}$  y  $M \in \mathcal{M}$ .

**Definición 1.4.2.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos categorías módulo a izquierda sobre  $\mathcal{C}$ . Denotemos por  $a^{\mathcal{M}}$  y  $a^{\mathcal{N}}$  a los isomorfismos naturales de asociatividad de cada una de las categorías. Un *funtor de  $\mathcal{C}$ -módulos* de  $\mathcal{M}$  a  $\mathcal{N}$  es un par  $(F, s)$ , donde  $F : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  es un funtor y

$$s_{X,M} : F(X \otimes^{\mathcal{M}} M) \rightarrow X \otimes^{\mathcal{N}} F(M)$$

es un isomorfismo natural tal que los siguientes diagramas

$$\begin{array}{ccc} & F((X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{M}} M) & \\ & \swarrow^{F(a_{X,Y,M}^{\mathcal{M}})} \quad \searrow^{s_{X \otimes Y, M}} & \\ F(X \otimes^{\mathcal{M}} (Y \otimes^{\mathcal{M}} M)) & & (X \otimes Y) \otimes^{\mathcal{N}} F(M) \\ \downarrow^{s_{X, Y \otimes^{\mathcal{M}} M}} & & \downarrow^{a_{X,Y,F(M)}^{\mathcal{N}}} \\ X \otimes^{\mathcal{N}} F(Y \otimes^{\mathcal{M}} M) & \xrightarrow{id_X \otimes^{\mathcal{N}} s_{Y, M}} & X \otimes^{\mathcal{N}} (Y \otimes^{\mathcal{N}} F(M)) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} F(\mathbf{1} \otimes^{\mathcal{M}} M) & \xrightarrow{s_{\mathbf{1}, M}} & \mathbf{1} \otimes^{\mathcal{N}} F(M) \\ & \searrow^{F(l_M)} \quad \swarrow^{l_{F(M)}} & \\ & F(M) & \end{array}$$

conmutan para todo  $X, Y$  en la categoría  $\mathcal{C}$  y  $M$  en la categoría  $\mathcal{M}$ .

De ahora en más cuando digamos categorías módulo nos estaremos refiriendo a una categoría módulo a izquierda.

Decimos que una categoría módulo es *indescomponible*, si no es equivalente a la suma directa de dos categorías módulo no triviales.

Una categoría módulo  $\mathcal{M}$  sobre  $\mathcal{C}$  se dice *exacta* si para todo objeto proyectivo  $P \in \mathcal{C}$ , el objeto  $P \otimes^{\mathcal{M}} M$  es proyectivo para todo  $M \in \mathcal{M}$ .

Sean  $\mathcal{C}$  una categoría tensorial y  $\mathcal{M}$  una categoría módulo exacta indescomponible sobre  $\mathcal{C}$ . Consideremos la categoría  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^* = \text{End}_{\mathcal{C}}(\mathcal{M})$  de endofuntores de  $\mathcal{C}$ -módulos de  $\mathcal{M}$ . Esta resulta ser una categoría tensorial, decimos que  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^*$  es la *categoría dual* de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $\mathcal{M}$ .

Si  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión y  $\mathcal{M}$  es un  $\mathcal{C}$ -módulo exacto indescomponible, entonces la categoría  $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^*$  también es semisimple.

Utilizando la noción de categoría dual, Müger en [48] generalizó la noción clásica de equivalencia Morita entre anillos al contexto de categorías tensoriales.

**Definición 1.4.3.** Dos categorías tensoriales  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  se dicen *Morita equivalentes* si  $\mathcal{D} \cong (\mathcal{C}_{\mathcal{M}}^*)^{op}$  para alguna categoría módulo  $\mathcal{M}$  indescomponible sobre  $\mathcal{C}$ .



## Capítulo 2

### Categorías de fusión

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. Existe un invariante numérico de la categoría llamado la dimensión de Frobenius-Perron, este es un invariante muy importante que ha sido estudiado a profundidad por varios autores. Un objetivo de este capítulo será introducir esta noción y mostrar algunas de sus propiedades.

La equivariantización de una categoría de fusión por un grupo finito, así como la extensión de una categoría de fusión, son construcciones que nos permiten, a partir de categorías conocidas, construir nuevas categorías. Parte del capítulo será dedicado a recordar estas dos construcciones, así como también presentar una construcción debida a Turaev la cual es llamada categorías de fusión  $G$ -cruzadas.

Las categorías de fusión trenzadas tienen una motivación desde el punto de vista de la física. Nociones como la  $S$ -matriz y la fórmula de Verlinde que aparecen en estos casos serán presentadas y discutidas aquí.

#### 2.1. Dimensiones de Frobenius-Perron

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión, denotemos por  $\text{Irr}(\mathcal{C})$  al conjunto de clases de isomorfismos de objetos simples de  $\mathcal{C}$ .

Consideremos el anillo de Grothendieck  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$ , este fue definido en la Subsección 1.2.3. Como la categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión, entonces todos sus objetos son de longitud finita. En este caso  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  es generado por las clases de isomorfismo de objetos  $X \in \mathcal{C}$  con adición y multiplicación dada por:

$$[X] + [Y] = [X \oplus Y], \quad [X][Y] = [X \otimes Y]$$

para todo  $X$  e  $Y$  en  $\mathcal{C}$ .  $\mathcal{G}(\mathcal{C})$  es un  $\mathbb{Z}$ -módulo libre con base  $\text{Irr}(\mathcal{C})$ .

Antes de introducir la noción de dimensión de Frobenius-Perron de una categoría de fusión, enunciaremos un teorema clásico del álgebra lineal cuya demostración puede encontrarse en [25].

**Teorema 2.1.1.** (*Teorema de Frobenius-Perron*) Sea  $A$  una matriz cuadrada con entradas reales no negativas.

1.  $A$  tiene un autovalor real no negativo. El mayor autovalor real no negativo  $\lambda(A)$  de  $A$  domina los valores absolutos de todos los otros autovalores de  $A$ .
2. Si  $A$  tiene entradas estrictamente positivas entonces  $\lambda(A)$  es un autovalor positivo simple y el autovector correspondiente puede ser normalizado para tener entradas estrictamente positivas.
3. Si  $A$  tiene un autovector  $v$  con entradas estrictamente positivas, entonces el autovalor correspondiente es  $\lambda(A)$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión y sean  $X, Y, Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ . Denotemos por  $N_{XY}^Z \in \mathbb{Z}_+$  la multiplicidad del objeto simple  $Z$  en el producto tensorial  $X \otimes Y$ , es decir,

$$X \otimes Y \cong \bigoplus_{Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})} N_{XY}^Z Z$$

Para el objeto  $X$  consideremos la matriz de enteros no negativos

$$N^X = (N_{XY}^Z)_{Y, Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$$

**Definición 2.1.2.** Sea  $X \in \mathcal{C}$ , definimos su *dimensión de Frobenius-Perron*, como el autovalor de Frobenius-Perron de la matriz  $N^X$ . Lo denotaremos por  $\text{FPdim}(X)$ .

La dimensión de Frobenius-Perron de la categoría  $\mathcal{C}$  se define como

$$\text{FPdim } \mathcal{C} = \sum_{X \in \text{Irr}(\mathcal{C})} (\text{FPdim } X)^2$$

Sean  $X \in \mathcal{C}$ , consideremos su dual a derecha  $X^*$ . Las dimensiones de Frobenius-Perron de estos objetos satisfacen que  $\text{FPdim } X = \text{FPdim } X^*$ .

**Definición 2.1.3.** La categoría  $\mathcal{C}$  es llamada *íntegra* si  $\text{FPdim } X \in \mathbb{Z}$ , para todos los objetos simples  $X \in \mathcal{C}$ . Decimos que  $\mathcal{C}$  es *débilmente íntegra* si  $\text{FPdim } \mathcal{C} \in \mathbb{Z}$ .

**Nota 2.1.4.** Toda categoría de fusión íntegra es equivalente a una categoría  $\text{Rep } H$ , donde  $H$  es una cuasi-álgebra de Hopf de dimensión finita. Este hecho está enunciado y demostrado en [21, Theorem 8.33].

En el artículo [21] se estudia con mucho detalle la noción de dimensión de Frobenius-Perron para una categoría de fusión  $\mathcal{C}$ . Algunos de los principales resultados son:



**Teorema 2.1.5.** *La asignación  $X \rightarrow \text{FPdim } X$  se extiende a un morfismo de anillos  $\text{FPdim} : \mathcal{G}(\mathcal{C}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Más aún,  $\text{FPdim}$  es el único morfismo de anillos que satisface  $\text{FPdim}(X) > 0$  para todo objeto simple  $X$  en  $\mathcal{C}$ .*

**Teorema 2.1.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. Entonces  $\text{FPdim } Z(\mathcal{C}) = (\text{FPdim } \mathcal{C})^2$ , donde  $Z(\mathcal{C})$  es el centro de la categoría  $\mathcal{C}$ .*

**Teorema 2.1.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada, débilmente íntegra. Entonces para cualquier objeto simple  $X \in \mathcal{C}$ , el radio  $\text{FPdim}(\mathcal{C}) / \text{FPdim}(X)$  es la raíz cuadrada de un número entero.*

Este teorema puede ser visto en [21].

## 2.2. Equivariantización de categorías de fusión

La equivariantización es una construcción que permite construir nuevas categorías de fusión a partir de un grupo finito y de una acción de este sobre una categoría de fusión. El objetivo de esta sección es definir esta nueva categoría, la cual resultará ser de fusión nuevamente, así como ver algunas de sus propiedades.

Sea  $G$  un grupo finito. A partir de este grupo construiremos una categoría monoidal, denotada por  $\underline{G}$ , de la siguiente forma:

- Los objetos de  $\underline{G}$  son los elementos de  $G$ .
- Los morfismos en la categoría son las identidades.
- El producto tensorial es dado por el producto del grupo  $G$ . Es decir, si  $x$  e  $y$  pertenecen a  $\underline{G}$ , entonces  $x \otimes y = xy$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. Definimos la categoría monoidal  $\underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$  como la categoría cuyos objetos son autoequivalencias monoidales de la categoría  $\mathcal{C}$  en si misma (tales equivalencias se conocen como autoequivalencias tensoriales), los morfismos son los isomorfismos naturales monoidales entre estos funtores y el producto tensorial es dado por la composición de funtores.

**Definición 2.2.1.** Sea  $G$  un grupo finito.

Una *acción* de  $G$  sobre una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  consiste en un funtor monoidal

$$\rho : \underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C}) \quad g \mapsto \rho^g.$$

De esta definición se tiene, que cada  $g \in G$  es enviado a una autoequiv-alencia tensorial  $\rho^g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que para cada par  $g, h$  de elementos de  $G$ , existe un isomorfismo natural de funtores tensoriales

$$\rho_2^{g,h} : \rho^g \circ \rho^h \simeq \rho^{gh}$$

y un isomorfismo natural

$$\rho_0 : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \rho^e$$

tales que los siguientes diagramas son conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \rho^g \rho^h \rho^k & \xrightarrow{\rho_2^{g,h} \rho^k} & \rho^{gh} \rho^k \\ \rho^g \rho_2^{h,k} \downarrow & & \downarrow \rho_2^{g,h,k} \\ \rho^g \rho^{hk} & \xrightarrow{\rho_2^{g,hk}} & \rho^{ghk} \\ \rho^g & \xrightarrow{\rho^g \rho_0} & \rho^g \rho^e \\ \rho_0 \rho^g \downarrow & \searrow = & \downarrow \rho_2^{g,e} \\ \rho^e \rho^g & \xrightarrow{\rho_2^{e,g}} & \rho^g \end{array}$$

para todo  $g, h, k \in G$ .

**Definición 2.2.2.** Sean  $G$  un grupo finito y  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. Consideremos una acción de  $G$  sobre  $\mathcal{C}$ ,  $\rho : G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$ . Un *objeto  $G$ -equivariante* de  $\mathcal{C}$  es un par  $(X, \{\mu^g\}_{g \in G})$ , donde  $X$  es un objeto de  $\mathcal{C}$  y  $\mu^g : \rho^g(X) \simeq X$ ,  $g \in G$ , es una colección de isomorfismos tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \rho^g(\rho^h(X)) & \xrightarrow{\rho^g(\mu^h)} & \rho^g(X) \\ \rho_2^{g,h} \downarrow & & \downarrow \mu^g \\ \rho^{gh}(X) & \xrightarrow{\mu^{gh}} & X \end{array}$$

conmuta para todo  $g, h$  en  $G$ .

Un morfismo de dos objetos equivariantes  $(X, \{\mu^g\}_{g \in G})$  y  $(Y, \{\nu^g\}_{g \in G})$  en  $\mathcal{C}$ , es un morfismo  $f : X \rightarrow Y$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \rho^g(X) & \xrightarrow{\rho^g(f)} & \rho^g(Y) \\ \mu^g \downarrow & & \downarrow \nu^g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta para todo  $g \in G$ .

Dados un grupo finito  $G$ , una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  y una acción de  $G$  sobre  $\mathcal{C}$ , vamos a construir una nueva categoría llamada la *equivariantización*.

**Definición 2.2.3.** La *equivariantización*, denotada por  $\mathcal{C}^G$ , de la categoría de fusión  $\mathcal{C}$  bajo la acción de  $G$ , es la categoría cuyos objetos son los objetos  $G$ -equivariantes y cuyos morfismos corresponden a los morfismos entre objetos  $G$ -equivariantes.

Cuando  $k$  es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero, tenemos que la equivariantización  $\mathcal{C}^G$  de la categoría de fusión  $\mathcal{C}$ , es de nuevo una categoría de fusión y su dimensión de Frobenius-Perron es

$$\text{FPdim } \mathcal{C}^G = |G| \text{FPdim } \mathcal{C}.$$

Este resultado, así como más información sobre la equivariantización pueden ser consultados en las referencias [7], [8], [19].

Sea  $\mathcal{C}^G$  la equivariantización de  $\mathcal{C}$  bajo la acción  $\rho$  y sea  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$  el funtor de olvido.

Para cada objeto simple  $Z$  de  $\mathcal{C}$ , sea  $G_Z \subseteq G$  el *subgrupo de inercia de  $Z$* . Este se define como

$$G_Z = \{g \in G : \rho^g(Z) \cong Z\}.$$

Como  $Z$  es simple, existe un 2-cociclo  $\alpha_Z : G_Z \times G_Z \rightarrow k^*$  definido por la relación

$$\alpha_Z(g, h)^{-1} \text{id}_Z = c^g \rho^g(c^h) (\rho_{2_Z}^{g,h})^{-1} (c^{gh})^{-1} : Z \rightarrow Z,$$

donde, para todo  $g \in G_Z$ , se tiene que  $c^g : \rho^g(Z) \rightarrow Z$  es un isomorfismo fijo [9, Subsection 2.3].

Los objetos simples de  $\mathcal{C}^G$  están parametrizados por pares  $(Z, U)$ , donde  $Z$  corre sobre las  $G$ -órbitas de  $\text{Irr}(\mathcal{C})$  y  $U$  es una clase de equivalencia de una representación irreducible  $\alpha_Z$ -projectiva de  $G_Z$  (ver [9]).

Usaremos la notación  $S_{Z,U}$  para indicar la clase de isomorfismo del objeto simple correspondiente al par  $(Z, U)$ . Se demuestra en el artículo [9] que las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples satisfacen:

$$(5) \quad \text{FPdim } S_{Z,U} = [G : G_Z] \dim U \text{FPdim } Z.$$

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría tensorial. Existe un proceso opuesto a la equivariantización, llamado la *de-equivariantización*, el cual vamos a describir a continuación.

Sea  $\mathcal{E} \cong \text{Rep}(G)$  una subcategoría tannakiana del centro  $Z(\mathcal{C})$ , donde  $G$  es un grupo finito. Consideremos el álgebra  $A$  en la subcategoría  $\mathcal{E}$  correspondiente al álgebra  $k^G$  de funciones sobre  $G$  con la acción regular de  $G$ . Esta álgebra resulta ser conmutativa en la categoría  $\mathcal{E}$ .

Consideremos la categoría  $\mathcal{C}_G$  de  $A$ -módulos a derecha en  $\mathcal{C}$ ; esta es una categoría tensorial y es llamada la *de-equivariantización* de  $\mathcal{C}$  con respecto a  $\text{Rep}(G)$ .

La equivariantización y la de-equivariantización son construcciones inversas canónicamente una de la otra, es decir, existen equivalencias de categorías tensoriales  $(\mathcal{C}_G)^G \cong (\mathcal{C}^G)_G$ , ver [19].

### 2.3. Categorías de fusión de tipo grupo

Una clase de categorías de fusión son las llamadas *categorías de fusión de tipo grupo*, las cuales fueron definidas en [57] y estudiadas a profundidad en [21]. Estas se definen a partir de grupos finitos. El objetivo de esta sección será dar una breve introducción a estas categorías.

Consideremos los siguientes datos:

- Sea  $G$  un grupo finito y  $H \subseteq G$  un subgrupo.
- $\omega \in Z^3(G, k^\times)$  un 3-cociclo.
- $\alpha \in C^2(H, k^\times)$  una 2-cocadena tal que  $d\alpha = \omega|_H$ .

Consideremos el álgebra de grupo torcida  $A = k_\alpha[H]$ . Como  $d\alpha = \omega|_H$ , entonces el álgebra  $A$  es un álgebra asociativa en esta categoría.

Consideremos ahora la subcategoría  $\text{Vec}_{G,\omega}(H)$ , la cual es la subcategoría de  $\text{Vec}_{G,\omega}$  de objetos graduados por  $H$ .

Definimos la categoría  $\mathcal{C}(G, H, \omega, \alpha)$  como la categoría de  $A$ -bimódulos en  $\text{Vec}_{G,\omega}$ . Estas categorías se llaman *categorías de fusión de tipo grupo*.

Una caracterización simple de las categorías de tipo grupo es dada en [57], remitimos al lector a dicho artículo para ver su demostración.

**Proposición 2.3.1.** *Una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  es de tipo grupo si y solo si es dual a una categoría punteada con respecto a una categoría módulo indecomponible.*

El siguiente corolario, el cual se demuestra en [21], nos dice que las categorías de fusión de tipo grupo son íntegras, es decir que las dimensiones de Frobenius-Perron de sus objetos simples son números enteros.

**Corolario 2.3.2.** [21, Corollary 8.43] *Los objetos simples de una categoría de fusión de tipo grupo tienen dimensiones de Frobenius-Perron entera.*

Los resultados de [57] implican que la clase de las categorías de fusión de tipo grupo es cerrada bajo el producto tensorial, categoría opuesta y tomando la categoría dual con respecto a una categoría módulo indescomponible. Además la clase es cerrada tomando subcategorías y bajo componentes de una categoría cociente.

## 2.4. Categorías graduadas

En esta sección recordaremos la noción de graduación por un grupo finito en el contexto de categorías de fusión. Esta herramienta es muy útil a la hora de construir nuevas categorías de fusión a partir de categorías conocidas. La referencia principal es el artículo [27].

**Definición 2.4.1.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión y  $G$  un grupo finito. Decimos que  $\mathcal{C}$  es *graduada por  $G$* , si la categoría  $\mathcal{C}$  se descompone como una suma directa de subcategorías abelianas plenas  $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$  tal que para todo  $g, h \in G$ , el producto tensorial

$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

envía  $\mathcal{C}_g \times \mathcal{C}_h$  en la subcategoría  $\mathcal{C}_{gh}$ .

La subcategoría abeliana  $\mathcal{C}_e$  correspondiente al elemento neutro  $e \in G$  es llamada la *componente trivial* de la  $G$ -graduación. Esta subcategoría resulta ser una subcategoría de fusión.

**Nota 2.4.2.** Es consecuencia de lo anterior que el dual satisface  $\mathcal{C}_g^* = \mathcal{C}_{g^{-1}}$ .

Si tenemos que  $\mathcal{C}_g \neq 0$  para todo  $g$  en el grupo  $G$ , decimos que la graduación es *fiel*. Si  $\mathcal{C}$  es fielmente graduada por un grupo  $G$ , diremos que  $\mathcal{C}$  es una  $G$ -*extensión* de  $\mathcal{C}_e$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una  $G$ -extensión de  $\mathcal{C}_e$ . Las dimensiones de Frobenius-Perron de las subcategorías abelianas satisfacen que  $\text{FPdim } \mathcal{C}_g = \text{FPdim } \mathcal{C}_e$ , para todo  $g \in G$ . Además la dimensión de Frobenius-Perron de la categoría  $\mathcal{C}$  es  $\text{FPdim } \mathcal{C} = |G| \text{FPdim } \mathcal{C}_e$ . Ver [19, Corollary 4.28].

En el mismo trabajo [27], Gelaki y Nikshych probaron que para toda categoría de fusión  $\mathcal{C}$  existe una graduación fiel canónica

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in U(\mathcal{C})} \mathcal{C}_g$$

Esta graduación es llamada la *graduación universal de  $\mathcal{C}$* . El grupo  $U(\mathcal{C})$  es llamado el *grupo de graduación universal de  $\mathcal{C}$* . Este grupo es abeliano si la categoría  $\mathcal{C}$  es trezada. En este caso la componente trivial de la graduación  $\mathcal{C}_e$  es la categoría adjunta.

**2.4.1. Categorías de fusión nilpotentes.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión. La *serie central ascendente* de  $\mathcal{C}$  se define recursivamente de la siguiente forma:

$$\mathcal{C}^{(0)} = \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}^{(1)} = \mathcal{C}_{ad}, \quad \mathcal{C}^{(n)} = (\mathcal{C}^{(n-1)})_{ad},$$

para todo entero  $n \geq 1$ .

**Definición 2.4.3.** Una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  es *nilpotente* si su serie central ascendente converge a la categoría  $\text{Vec}$  de espacios vectoriales de dimensión finita, es decir, si existe un número entero  $n$  para el cual  $\mathcal{C}^{(n)} = \text{Vec}$ .

El menor número  $n$  para el que ocurre esto se conoce como la *clase de nilpotencia* de  $\mathcal{C}$ .

La noción de una categoría de fusión nilpotente fue introducida en el artículo [27].

Una condición equivalente a que una categoría  $\mathcal{C}$  sea nilpotente es que exista una sucesión de categorías de fusión

$$\text{Vec} = \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$$

y una sucesión de grupos finitos  $G_1, \dots, G_n$  tal que  $\mathcal{C}_i$  se obtiene de  $\mathcal{C}_{i-1}$  por una  $G_i$ -extensión para todo  $i = 1, \dots, n$ . Esta afirmación está demostrada en [27] (ver Theorem 3.5 y Remark 4.7).

Si todos los grupos  $G_1, \dots, G_n$  resultan ser cíclicos, decimos que la categoría  $\mathcal{C}$  es *cíclicamente nilpotente*.

**Ejemplo 2.4.4.** Consideremos una categoría de fusión punteada. Esta categoría siempre resulta ser nilpotente [27, Remark 4.7]. Más aún, las categorías con clase de nilpotencia 1 son siempre de esta forma.

**Ejemplo 2.4.5.** Sea  $G$  un grupo finito. La categoría  $\mathcal{C} = \text{Rep}(G)$  es nilpotente si y sólo si el grupo  $G$  es nilpotente.

**2.4.2. Categorías de fusión resolubles.** En el artículo [22] se introducen las definiciones de categoría de fusión débilmente de tipo grupo y categoría de fusión resoluble.

**Definición 2.4.6.** Una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  es *débilmente de tipo grupo* si es Morita equivalente a una categoría de fusión nilpotente.

Por otro lado, decimos que  $\mathcal{C}$  es *resoluble* si se satisface alguna de las siguientes dos condiciones equivalentes:

1.  $\mathcal{C}$  es Morita equivalente a una categoría de fusión cíclicamente nilpotente.
2. Existe una sucesión de categorías de fusión  $\mathcal{C}_0 = \text{Vec}, \mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n = \mathcal{C}$  y una sucesión  $G_1, \dots, G_n$  de grupos cíclicos de orden primo tal que  $\mathcal{C}_i$  es obtenido de  $\mathcal{C}_{i-1}$  por una  $G_i$ -equivariantización o por una  $G_i$ -extensión.

En [22] se demuestra que las categorías débilmente de tipo grupo y las categorías resolubles son débilmente enteras.

Las principales propiedades de las categorías débilmente de tipo grupo se resumen en la siguiente proposición.

**Proposición 2.4.7.** *La clase de categorías débilmente de tipo grupo es cerrada bajo extensiones, equivariantizaciones, equivalencia Morita, productos tensoriales, el centro, subcategorías y componentes de categorías cocientes.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [22, Proposition 4.1] □

Para categorías resolubles también en el mismo artículo se obtienen los siguientes resultados:

- Proposición 2.4.8.**
1. *La clase de categorías resolubles es cerrada tomando extensiones y equivariantizaciones por grupos resolubles, equivalencia Morita, productos tensoriales, el centro, subcategorías y categorías componentes de categorías cocientes.*
  2. *Las categorías  $\text{Vec}_{G,\omega}$  y  $\text{Rep}(G)$  son resolubles si y sólo si  $G$  es un grupo resoluble.*
  3. *Una categoría de fusión nilpotente trenzada es resoluble.*
  4. *Una categoría de fusión resoluble  $\mathcal{C} \neq \text{Vec}$  contiene un objeto invertible no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [22, Proposition 4.5] □

### 2.5. Sucesiones exactas

Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías de fusión y sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor tensorial.

**Definición 2.5.1.** Decimos que el funtor es *dominante* si todo objeto  $Y$  de  $\mathcal{D}$  es un subobjeto de  $F(X)$  para algún objeto  $X$  en la categoría  $\mathcal{C}$ .

Denotaremos con  $\mathfrak{ker}_F$  a la subcategoría de fusión formada por los objetos  $X$  de la categoría  $\mathcal{C}$  tales que  $F(X)$  es un objeto trivial de la categoría  $\mathcal{D}$ . Esto significa que  $F(X)$  es isomorfo a  $\mathbf{1}^{\otimes n}$  para algún entero  $n$ .

**Definición 2.5.2.** El funtor  $F$  es *normal* si para cada objeto simple  $X$  de  $\mathcal{C}$  que satisface  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}, F(X)) \neq 0$ , tenemos que  $X$  pertenece a  $\mathfrak{ker}_F$ .

En [7] se define la noción de *sucesión exacta de categorías de fusión*. Esta es una sucesión de funtores tensoriales entre categorías de fusión

$$\mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}''$$

tal que el funtor  $F$  es dominante y normal, y tal que  $i$  induce una equivalencia entre  $\mathcal{C}'$  y  $\mathfrak{ker}_F$ .

**Ejemplo 2.5.3.** Sea  $G$  un grupo finito y consideremos la sucesión exacta de grupos  $1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G'' \rightarrow 1$ . Esta da lugar a la sucesión exacta de categorías tensoriales:

$$\text{Rep}(G'') \rightarrow \text{Rep}(G) \rightarrow \text{Rep}(G').$$

Bruguères y Natale en [7] demostraron en particular que si  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}''$  es una sucesión exacta de categorías tensoriales, entonces las dimensiones de Frobenius-Perron satisfacen:

$$\text{FPdim } \mathcal{C} = \text{FPdim } \mathcal{C}' \text{ FPdim } \mathcal{C}''.$$

En el mismo artículo se demuestra que el proceso de equivariantización produce ejemplos de sucesiones exactas de categorías tensoriales. Específicamente, tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.5.4.** [7, Corollary 4.22] *Una acción de un grupo finito  $G$  sobre una categoría tensorial  $\mathcal{C}$  por autoequivalencias tensoriales da lugar a una sucesión exacta de categorías tensoriales:*

$$\text{Rep } G \rightarrow \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$$



Esta es una sucesión exacta de categorías de fusión si  $k$  es algebraicamente cerrado,  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión y  $\text{char}(k)$  no divide al orden de  $G$ .

En este caso, el funtor  $F : C^G \rightarrow \mathcal{C}$  corresponde al funtor de olvido  $F(X, \mu) = X$ .

## 2.6. Categorías de fusión trenzadas

**Definición 2.6.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada y  $c$  su trenza. Dos objetos simples  $X$  y  $Y$  se dicen que se *centralizan el uno al otro* si la trenza satisface  $c_{Y,X}c_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$ .

El *centralizador de Müger* de una subcategoría de fusión  $\mathcal{D}$ , el cual denotaremos por  $\mathcal{D}'$ , es la subcategoría de fusión plena generada por todos los objetos  $X$  en la categoría  $\mathcal{C}$  tales que  $c_{Y,X}c_{X,Y} = \text{id}_{X \otimes Y}$  para todos los objetos  $Y$  en la subcategoría  $\mathcal{D}$ .

El centralizador  $\mathcal{C}'$  de la categoría  $\mathcal{C}$  se llama el *centro de Müger* de la categoría.

Tenemos que la categoría  $\mathcal{C}$  es simétrica si y sólo si  $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$ . Si  $\mathcal{C}' \cong \text{Vec}$ , decimos que  $\mathcal{C}$  es *no degenerada*, y es llamada *ligeramente degenerada* si  $\mathcal{C}' \cong s\text{Vec}$ .

El siguiente teorema nos muestra una condición que satisfacen las dimensiones de Frobenius-Perron cuando es trenzada, débilmente íntegra no degenerada.

**Teorema 2.6.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada, débilmente íntegra no degenerada. Entonces para cualquier objeto simple  $X \in \mathcal{C}$ , el radio  $\text{FPdim}(\mathcal{C}) / \text{FPdim}(X)^2$  es un entero.*

La subcategoría adjunta de una categoría no degenerada satisface la siguiente condición interesante:

**Corolario 2.6.3.** *Si  $\mathcal{C}$  es no degenerada, entonces  $(\mathcal{C}_{ad})'$  iguala la subcategoría punteada maximal  $\mathcal{C}_{pt} \subset \mathcal{C}$ , es decir la subcategoría de fusión generada por los objetos invertibles de  $\mathcal{C}$ . Además,  $\mathcal{C}'_{pt} = \mathcal{C}_{ad}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [19, Corollary 3.27]. □

La siguiente proposición, la cual es extraída de [22], nos muestra un caso en el que una categoría de fusión íntegra trenzada, ligeramente degenerada contiene una subcategoría tannakiana no trivial.

**Proposición 2.6.4.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra trenzada, ligeramente degenerada. Supongamos que  $\mathcal{C}$  contiene un objeto simple de dimensión  $p^r$  para algún primo  $p > 2$ . Entonces  $\mathcal{C}$  contiene una subcategoría tannakiana no trivial.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [22, Proposition 7.4] □

Generalizando un poco la noción de centralizador, decimos que dos objetos  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro, si  $c_{Y,X}c_{X,Y}$  es un múltiplo escalar de la aplicación identidad de  $X \otimes Y$ . Una respuesta a la pregunta de cuando dos objetos se centralizan proyectivamente el uno al otro es dada por la siguiente proposición, la cual aparece en el artículo [19]:

**Proposición 2.6.5.** [19, Proposition 3.22] *Para un par de objetos simples  $X$  e  $Y$  pertenecientes a una categoría de fusión trenzada  $\mathcal{C}$ , las siguientes condiciones son equivalentes:*

1.  $X$  centraliza a  $Y \otimes Y^*$ ;
2.  $X \otimes X^*$  centraliza a  $Y$ ;
3.  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro.

Se define el *centralizador proyectivo* de un objeto simple  $X$  (respectivamente de una subcategoría plena  $\mathcal{D}$ ) como la subcategoría plena de  $\mathcal{C}$  cuyos objetos centralizan proyectivamente a  $X$  (respectivamente, a cada objeto simple de  $\mathcal{D}$ ). Esta resulta ser una subcategoría de fusión de  $\mathcal{C}$  [19, Lemma 3.15].

Bajo algunas condiciones podemos decir cuando una categoría es ligeramente no degenerada, ese es el resultado del siguiente lema para cuya demostración remitimos al lector a [54, Lemma 7.1].

Definimos al grupo  $G[X]$  como el subgrupo del grupo de objetos invertibles  $s$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $s \otimes X \cong X$ .

**Lema 2.6.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada. Supongamos que  $\mathcal{C}$  no contiene subcategorías Tannakianas o no-degeneradas no triviales. Entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es ligeramente degenerada y tenemos lo siguiente:*

- $\mathcal{C}_{pt} = \mathcal{C}'$ .
- $G[X] = 1$ , para todos los objetos simples  $X \in \mathcal{C}$

Existen varios resultados de clasificación de categorías de fusión trenzadas con alguna hipótesis adicional, uno de estos resultados que usaremos en resultados posteriores es el siguiente.

**Teorema 2.6.7.** [18, Theorem 1.1] *Una categoría de fusión nilpotente trenzada  $\mathcal{C}$  tiene una descomposición única como un producto tensorial de categorías de fusión trezadas*

$$\mathcal{C} \simeq \mathcal{C}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{C}_n$$

donde para todo  $i$  se satisface  $\text{FPdim}(\mathcal{C}_i) = p_i^{k_i}$ , con  $p_i$  un número primo y tal que  $p_i \neq p_j$  si  $i \neq j$ .

Un resultado interesante, debido a Naidu, Nikschych y Witherspoon, caracteriza las categorías de fusión de tipo grupo trezadas como una equivariantización de una categoría de fusión punteada.

**Teorema 2.6.8.** *Sea  $\mathcal{D}$  una categoría de fusión trenzada. Entonces  $\mathcal{D}$  es de tipo grupo si y solo si  $\mathcal{D}$  contiene una subcategoría tannakiana  $\xi = \text{Rep}(G)$  tal que la correspondiente de-equivariantización  $\mathcal{D}_G$  es punteada.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [51, Theorem 7.2]. □

## 2.7. Categorías de fusión G-cruzadas

Sea  $G$  un grupo finito, a continuación vamos a introducir una noción debida a Turaev y que se encuentra en [62], [61]:

**Definición 2.7.1.** Una *categoría de fusión G-cruzada* es una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  equipada con las siguientes estructuras:

- Una graduación (no necesariamente fiel)  $\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$ .
- Una acción  $\rho : G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$  de  $G$  sobre  $\mathcal{C}$  tal que  $\rho^g(\mathcal{C}_h) \subset \mathcal{C}_{ghg^{-1}}$ .
- Una colección de isomorfismos naturales, llamados la  $G$ -trenza:

$$c_{X,Y} : X \otimes Y \simeq \rho^g(Y) \otimes X, \quad X \in \mathcal{C}_g, g \in G \text{ e } Y \in \mathcal{C}$$

Sean  $\rho_2^{g,h} : \rho^g \rho^h \cong \rho^{gh}$  la estructura monoidal del funtor  $\rho$  y  $\mu_g$  la estructura tensorial de  $\rho^g$ .

Las anteriores estructuras deben satisfacer las siguientes relaciones de compatibilidad:

(a) el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\rho^g(X) \otimes \rho^g(Y) & \xrightarrow{c_{\rho^g(X), \rho^g(Y)}} & \rho^{ghg^{-1}}(\rho^g(Y)) \otimes \rho^g(X) \\
\uparrow (\mu_g)_{X,Y}^{-1} & & \downarrow (\rho_2^{ghg^{-1}, g})_Y \otimes \text{Id}_{\rho^g(X)} \\
\rho^g(X \otimes Y) & & \rho^{gh}(Y) \otimes \rho^g(X) \\
\downarrow \rho^g(c_{X,Y}) & & \uparrow (\rho_2^{g,h})_Y \otimes \text{Id}_{\rho^g(X)} \\
\rho^g(\rho^h(Y) \otimes X) & \xrightarrow{(\mu_g)_{\rho^g(Y), X}^{-1}} & \rho^g(\rho^h(Y)) \otimes \rho^g(X)
\end{array}$$

conmuta para todo  $g, h \in G$  y objetos  $X \in \mathcal{C}_h, Y \in \mathcal{C}$ ;

(b) el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& (X \otimes Y) \otimes Z & \\
& \swarrow a_{X,Y,Z} & \searrow c_{X,Y} \otimes \text{Id}_Z \\
X \otimes (Y \otimes Z) & & (\rho^g(Y) \otimes X) \otimes Z \\
\downarrow c_{X,Y \otimes Z} & & \downarrow a_{\rho^g(Y), X, Z} \\
\rho^g(Y \otimes Z) \otimes X & & \rho^g(Y) \otimes (X \otimes Z) \\
\downarrow (\mu_g)_{Y,Z}^{-1} \otimes \text{Id}_X & & \downarrow \text{Id}_{\rho^g(Y)} \otimes c_{X,Z} \\
(\rho^g(Y) \otimes \rho^g(Z)) \otimes X & \xrightarrow{a_{\rho^g(Y), \rho^g(Z), X}} & \rho^g(Y) \otimes (\rho^g(Z) \otimes X)
\end{array}$$

conmuta para todo  $g \in G$  y objetos  $X \in \mathcal{C}_g, Y, Z \in \mathcal{C}$ ;

(c) el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
& X \otimes (Y \otimes Z) & \\
& \nearrow^{a_{X,Y,Z}} & \searrow^{\text{Id}_X \otimes c_{Y,Z}} \\
(X \otimes Y) \otimes Z & & X \otimes (\rho^h(Z) \otimes Y) \\
\uparrow^{c_{X \otimes Y, Z}^{-1}} & & \downarrow^{a_{X, \rho^h(Z), Y}^{-1}} \\
\rho^{gh}(Z) \otimes (X \otimes Y) & & (X \otimes \rho^h(Z)) \otimes Y \\
\uparrow^{(\rho_2^{g,h})Z \otimes \text{Id}_{X \otimes Y}} & & \downarrow^{c_{X, \rho^h(Z)} \otimes \text{Id}_Y} \\
\rho^g \rho^h(Z) \otimes (X \otimes Y) & \xrightarrow{a_{\rho^g \rho^h(Z), X, Y}^{-1}} & (\rho^g \rho^h(Z) \otimes X) \otimes Y
\end{array}$$

conmuta para todo  $g, h \in G$  y objetos  $X \in \mathcal{C}_g, Y \in \mathcal{C}_h, Z \in \mathcal{C}$ .

La componente neutra de  $\mathcal{C}$  respecto a la  $G$ -graduación, denotada por  $\mathcal{C}_e$ , es una categoría de fusión trenzada.

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada y sea  $\mathcal{E} \cong \text{Rep}(G)$  una subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$ . La de-equivariantización  $\mathcal{C}_G$  es una categoría de fusión  $G$ -cruzada. Esta afirmación se puede consultar en [19]. Denotaremos por  $\mathcal{C}_G^0$  a la componente trivial de la  $G$ -graduación asociada a  $\mathcal{C}_G$ .

**Proposición 2.7.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada. Supongamos que  $\text{Rep } G \cong \mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$  es una subcategoría tannakiana. Entonces  $\mathcal{C}$  es débilmente íntegra (respectivamente íntegra o débilmente de tipo grupo) si y solo si  $\mathcal{C}_G^0$  es débilmente íntegra (respectivamente íntegra o débilmente de tipo grupo). Además  $\mathcal{C}$  es resoluble si y solo si  $\mathcal{C}_G^0$  es resoluble y  $G$  es resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Ver [54, Proposition 4.1].  $\square$

Como un caso particular de [13, Corollary 3.30], se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 2.7.3.** *Consideremos las mismas hipótesis de la proposición anterior. La categoría de fusión  $\mathcal{C}$  es no-degenerada si y sólo si  $\mathcal{C}_G^0$  es no-degenerada y la  $G$ -graduación sobre la categoría  $\mathcal{C}_G$  es fiel. Si esto ocurre, hay*

una equivalencia de categorías de fusión trenzadas:

$$\mathcal{C} \boxtimes (\mathcal{C}_G^0)^{op} \cong Z(\mathcal{C}_G)$$

Recíprocamente, si  $\mathcal{D}$  es una categoría de fusión  $G$ -cruzada, entonces la equivariantización  $\mathcal{D}^G$  bajo la acción de  $G$  es una categoría de fusión trenzada, y  $\mathcal{C}$  contiene a  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$  como subcategoría tannakiana, bajo la inclusión canónica  $\text{Rep } G \rightarrow \mathcal{D}^G \cong \mathcal{C}$  [19, Section 4].

Supongamos además que la subcategoría tannakiana  $\mathcal{E}$  está contenida en  $\mathcal{C}'$ . entonces la trenza de  $\mathcal{C}$  induce una trenza en la de-equivariantización  $\mathcal{C}_G$  tal que el funtor canónico  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_G$  es un funtor tensorial trenzado y la acción de  $G$  sobre  $\mathcal{C}_G$  es por autoequivalencias trenzadas [5], [47], [7, Corollary 5.31].

**Nota 2.7.4.** Supongamos que  $\mathcal{C} \cong \text{Rep}(G, u)$  es una categoría de fusión simétrica. Entonces tenemos que  $\mathcal{C}_1 \cong \text{Rep}(G/(u))$  es una subcategoría tannakiana maximal.

Sigue de la discusión anterior que la de-equivariantización  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{G/(u)}$  es una categoría de fusión trenzada munida con una acción de  $G/(u)$  por autoequivalencias trenzadas tales que  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^{G/(u)}$ .

Observemos además que si  $\mathcal{C}$  no es tannakiana, entonces tenemos la equivalencia  $\mathcal{D} \cong \text{sVec}$  como categorías de fusión trenzadas. Tenemos que  $\text{FPdim } \mathcal{D} = \text{FPdim } \mathcal{C} / \text{FPdim } \mathcal{C}_1 = 2$  y como el funtor canónico  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor tensorial trenzado, entonces la categoría  $\mathcal{D}$  es simétrica (y no es tannakiana). Como consecuencia obtenemos:

**Proposición 2.7.5.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión simétrica no tannakiana. Se tiene una sucesión exacta de categorías de fusión trenzadas*

$$\text{Rep } G/(u) \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \text{sVec}.$$

**2.7.1.  $S$ -matriz y fórmula de Verlinde para categorías modulares.**

**Definición 2.7.6.** Una *estructura pivotal* sobre una categoría de fusión  $\mathcal{C}$ , es un isomorfismo tensorial  $\psi$  entre la autoequivalencia identidad de  $\mathcal{C}$  y el funtor doble dual  $X \mapsto X^{**}$ . Una categoría de fusión con una estructura pivotal es llamada *pivotal*.

**Definición 2.7.7.** Sean  $\mathcal{C}$  una categoría pivotal,  $V$  un objeto de  $\mathcal{C}$  y  $f$  un endomorfismo de  $V$ . Definimos la *traza cuántica* de  $f$ , denotada por  $\text{Tr } f \in$

$\text{End}_k(\mathbf{1}) \simeq k$ , como la composición

$$\mathbf{1} \xrightarrow{\text{coev}_V} V \otimes V^* \xrightarrow{f \otimes \text{id}} V \otimes V^* \xrightarrow{\psi_V \otimes \text{id}} V^{**} \otimes V^* \xrightarrow{e_{V^*}} \mathbf{1} .$$

Para todo objeto  $V \in \mathcal{C}$ , definimos su *dimensión categórica* como  $d_V = \text{Tr}(\text{id}_V)$ .

**Definición 2.7.8.** Una estructura pivotal sobre una categoría  $\mathcal{C}$  se dice *esférica* si para todo  $X \in \mathcal{C}$  se satisface  $d_X = d_{X^*}$ .

**Definición 2.7.9.** [2] Una categoría *premodular*  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión trenzada equipada con una estructura esférica.

Esta definición es equivalente a que la categoría  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión trenzada munida con una *estructura balanceada*, esto significa que está munida con un automorfismo natural  $\theta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$  el cual satisface

$$\theta_{X \otimes Y} = c_{Y,X} c_{X,Y} (\theta_X \otimes \theta_Y)$$

$$\theta_{\mathbf{1}} = \text{id}$$

$$(\theta_X)^* = \theta_{X^*}$$

para todos los objetos  $X, Y$  de  $\mathcal{C}$ .

En el libro [2] se demuestra que una estructura balanceada  $\theta$  define un isomorfismo natural entre los funtores  $\delta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow ()^{**}$  con las siguientes propiedades:

$$\delta_{V \otimes W} = \delta_V \otimes \delta_W$$

$$\delta_{\mathbf{1}} = \text{id}$$

$$\delta_{V^*} = (\delta_V^*)^{-1}$$

para todo  $V \in \mathcal{C}$ .

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría premodular. Sean  $X, Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$ . Denotaremos por  $S_{X,Y} \in k$  a la traza cuántica de la composición

$$c_{Y,X} c_{X,Y} : X \otimes Y \rightarrow X \otimes Y.$$

La  $S$ -matriz de  $\mathcal{C}$  es definida en la forma  $S = (S_{X,Y})_{X,Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})}$ . Esta es una matriz simétrica con entradas en un cuerpo ciclotómico que satisface

$$S_{XY^*} = \overline{S_{XY}} = S_{X^*Y},$$

para todo  $X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ , donde  $\overline{S_{XY}}$  denota la conjugación compleja. En particular, el valor absoluto de  $S_{XY}$  está determinado por

$$|S_{XY}|^2 = S_{XY} S_{XY^*} = S_{XY} S_{X^*Y}, \quad X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C}).$$

**Definición 2.7.10.** [64] La categoría premodular  $\mathcal{C}$  es llamada *modular* si la  $S$ -matriz es no-degenerada.

Para cada  $X, Y, Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ , sea  $N_{XY}^Z = \dim \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \otimes Y)$  la multiplicidad del objeto simple  $Z$  en el producto tensorial  $X \otimes Y$ .

Las categorías modulares han sido de gran interés no solo en matemática sino también en el área de la física. Precisamente una fórmula importante en la física llamada la *fórmula de Verlinde* ha sido generalizada y probada en este contexto.

**Teorema 2.7.11.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría modular. Entonces se cumple la siguiente igualdad:*

$$(6) \quad N_{XY}^Z = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} \sum_{T \in \text{Irr}(\mathcal{C})} \frac{S_{XT} S_{YT} S_{Z^*T}}{d_T},$$

para todo  $X, Y, Z \in \text{Irr}(\mathcal{C})$ , donde  $d_T$  es la dimensión categórica del objeto  $T$ .

DEMOSTRACIÓN. Se puede consultar en [2, Theorem 3.1.14].  $\square$

**Observación 2.7.12.** Sea  $T$  un objeto simple de  $\mathcal{C}$ . Por [27, Lemma 6.1], tenemos que para todo  $X \in \text{Irr}(\mathcal{C})$  se satisface la igualdad  $|S_{XT}| = |d_X d_T|$ , si y sólo si  $T$  es un objeto invertible de  $\mathcal{C}$ .

Por el resto de esta sección, asumiremos que la categoría  $\mathcal{C}$  será una categoría de fusión trenzada, débilmente íntegra, esto es,  $\text{FPdim } \mathcal{C}$  es un número natural.

En este caso, el resultado [21, Proposition 8.23] nos dice que existe una estructura esférica en la categoría  $\mathcal{C}$  en la cual las dimensiones categóricas de los objetos simples coinciden con sus dimensiones de Frobenius-Perron. Esta estructura es conocida como la estructura esférica positiva canónica. La correspondiente estructura balanceada la denotaremos por  $\theta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$ .

Supongamos que  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$  es una subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  contenida en  $\mathcal{C}'$ .

Consideremos la de-equivariantización  $\mathcal{C}_G$  de  $\mathcal{C}$ , la cual también es débilmente íntegra y entonces una categoría premodular con estructura canónica balanceada  $\bar{\theta}$ .

La acción por autoequivalencias trenzadas de  $G$  sobre  $\mathcal{C}_G$  y el funtor canónico  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_G$  preservan las estructuras balanceadas, es decir,

$$\bar{\theta}_{F(X)} = F(\theta_X), \quad \bar{\theta}_{\rho^g(Y)} = \bar{\theta}_Y,$$



para todos los objetos  $X$  de  $\mathcal{C}$  y  $Y$  de  $\mathcal{C}_G$ , y para todo  $g \in G$  [5, Lemme 3.3].

**Lema 2.7.13.** *Sea  $Z \in \mathcal{C}'$  un objeto simple. Supongamos que  $Z$  es un componente de  $X \otimes X^*$  para algún objeto simple  $X$  de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $\theta_Z = 1$ .*

Este lema está contenido en [47, Lemma 5.4] para el caso en que  $Z$  es un objeto invertible de  $\mathcal{C}$ .

**DEMOSTRACIÓN.** La categoría  $\mathcal{C}'$  es una categoría de fusión simétrica. Sea  $G$  un grupo finito y sea  $u \in Z(G)$ ,  $u^2 = 1$ , tal que  $\mathcal{C}' \cong \text{Rep}(G, u)$ .

Como  $\mathcal{C}'$  es simétrica, entonces para cada objeto simple  $Z$  de  $\mathcal{C}$  tenemos que  $\theta_Z = \pm 1$ , y  $Z \in \text{Rep } G/(u)$  si y sólo si  $\theta_Z = 1$ .

Supongamos por el contrario que  $\theta_Z = -1$ . En particular  $\mathcal{C}'$  no es tannakiana y  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G/(u)$  es su subcategoría tannakiana maximal. Entonces  $\mathcal{E}$  es una subcategoría tannakiana maximal de  $\mathcal{C}$  contenida en el centro de Müger  $\mathcal{C}'$ .

Denotemos con  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{G/(u)}$  la de-equivariantización de  $\mathcal{C}$ , la cual es una categoría de fusión íntegra. Indicaremos por  $\bar{\theta}$  la estructura balanceada, canónica y positiva en  $\mathcal{D}$ .

Entonces el grupo  $G/(u)$  actúa sobre  $\mathcal{D}$  por autoequivalencias trenzadas que preservan las estructuras balanceadas, tal que  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^{G/(u)}$ , y el funtor canónico  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es un funtor trenzado el cual preserva las estructuras balanceadas.

La imagen esencial de  $\mathcal{C}'$  bajo el funtor  $F$  es equivalente, como categoría de fusión trenzada, a la categoría  $\text{sVec}$  de super espacios vectoriales; ver la nota 2.7.4. Sea  $g \in F(\mathcal{C}') \cong \text{sVec}$  el único objeto invertible no trivial;  $g$  es el único objeto simple de  $F(\mathcal{C}')$  tal que  $\bar{\theta}_g = -1$ . Notemos que, como  $Z \in \mathcal{C}'$ , entonces  $g \in \mathcal{D}'$  [5, Lemme 2.2 (1)].

Ahora, como  $\theta_Z = -1$  y  $F$  preservan las estructuras balanceadas, entonces  $\bar{\theta}_{F(Z)} = -\text{id}_{F(Z)}$ . Como el funtor  $F$  es normal, esto implica que  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathbf{1}, F(Z)) = 0$  y entonces  $F(Z)$  es isomorfo a una suma directa de copias del objeto  $g \in F(\mathcal{C}')$ .

Sea  $Y$  una componente simple del objeto  $F(X)$  en  $\mathcal{D}$ . El objeto  $F(X) \in \mathcal{D}$  se descompone como una suma directa de conjugados de  $Y$  bajo la acción de  $G/(u)$ . La hipótesis de que  $Z$  es una componente de  $X \otimes X^*$  implica que  $F(Z)$  es un sumando directo de  $F(X \otimes X^*) \cong F(X) \otimes F(X)^*$ .

En particular, existen  $s, t \in G/(u)$  tales que  $g$  tiene multiplicidad positiva en el producto tensorial  $\rho^t(Y) \otimes \rho^s(Y)^*$ . Esto implica que

$$g \otimes \rho^s(Y) \cong \rho^t(Y).$$

Por consiguiente,  $\bar{\theta}_{g \otimes \rho^s(Y)} = \bar{\theta}_{\rho^t(Y)} = \bar{\theta}_Y$ . Por otro lado, como  $g$  centraliza a  $\rho^s(Y)$ , obtenemos que

$$\bar{\theta}_{g \otimes \rho^s(Y)} = (\bar{\theta}_g \otimes \bar{\theta}_{\rho^s(Y)})c_{\rho^s(Y),g}c_{g,\rho^s(Y)} = -\bar{\theta}_{\rho^s(Y)} = -\bar{\theta}_Y.$$

Esto da origen a una contradicción  $\bar{\theta}_Y = -\bar{\theta}_Y$ . Esta contradicción viene de suponer que  $\theta_Z = -1$ . Luego obtenemos que  $\theta_Z = 1$ , como se quería.  $\square$

Existe un lema debido a Etingof, Nikshych y Ostrik el cual nos da una condición que satisfacen dos elementos simples cuya dimensión es coprima. Para los detalles acerca de su demostración, remitimos al lector al artículo [22, Lemma 7.1]

**Lema 2.7.14.** *Sean  $X$  e  $Y$  dos objetos simples de una categoría de fusión trenzada e íntegra cuyas dimensiones de Frobenius Perron  $\text{FPdim}(X)$  y  $\text{FPdim}(Y)$  son coprimas. Entonces se satisface una de las siguientes dos condiciones:*

- (i)  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro.
- (ii)  $S_{X,Y} = 0$ .

## Capítulo 3

### Preliminares acerca de grafos de grupos finitos

En este capítulo, introduciremos la noción de grafo primo y de grafo común divisor para un conjunto de enteros positivos. Esta construcción, de naturaleza meramente combinatoria, ha sido aplicada con gran éxito a problemas de teoría de grupos. Grafos primos y de común divisor cuyos conjuntos de vértices son los caracteres irreducibles del grupo o los cardinales de las clases de conjugación se han definido y estudiado. Condiciones como el número de componentes conexas serán importantes para nuestras aplicaciones. El objetivo de este capítulo será el mostrar estas nociones y discutir sus principales propiedades.

Sea  $G$  un grupo finito. En primer lugar, vamos a definir algunos grafos asociados al grupo  $G$  que serán generalizados y estudiados más adelante en el contexto de las categorías de fusión.

Sea  $n$  un número natural. La notación  $\pi(n)$  indicará el conjunto de divisores primos de  $n$ . Si  $X$  es un conjunto de enteros positivos, la notación  $\pi(X)$  indicará el conjunto de números primos  $p$  tales que  $p$  divide a algún elemento de  $X$ .

Trabajaremos con grafos no orientados. Para un grafo  $\mathcal{G}$ , el conjunto de sus vértices será denotado por  $\vartheta(\mathcal{G})$ .

Sean  $x$  e  $y$  dos vértices conectados por un camino en  $\mathcal{G}$ . La *distancia* entre  $x$  e  $y$  será denotada por  $d(x, y)$ ; esta es por definición la longitud mínima de un camino en  $\mathcal{G}$  que conecta a los vértices  $x$  e  $y$ . Si los vértices  $x$  e  $y$  pertenecen a componentes conexas distintas (es decir, ellos no están conectados por ningún camino) la distancia entre ellos no está definida.

El *diámetro* de  $\mathcal{G}$  es el máximo del conjunto de todas las distancias de todos los vértices del grafo  $\mathcal{G}$ .

### 3.1. Grafo primo y grafo común divisor

**Definición 3.1.1.** Sea  $S$  un conjunto de enteros positivos. El *grafo primo*  $\Delta(S)$  y el *grafo común divisor*  $\Gamma(S)$  de  $S$  se definen como sigue:

- El grafo  $\Delta(S)$  tiene como conjunto de vértices al conjunto  $\pi(S)$ . Dos vértices  $p$  y  $q$  están unidos por una arista si y sólo si existe  $a \in S$  tal que el producto  $pq$  divide a  $a$ .
- El grafo  $\Gamma(S)$  tiene como conjunto de vértices al conjunto  $S - \{1\}$ . Dos vértices  $a$  y  $b$  están unidos por una arista si y sólo si  $a$  y  $b$  no son coprimos.

Denotaremos por  $d_{\Gamma(S)}(x,y)$  y  $d_{\Delta(S)}(p,q)$  las distancias en los grafos  $\Gamma(S)$  y  $\Delta(S)$  respectivamente.

El siguiente lema, cuyo enunciado y demostración es tomada de [37], es importante por el hecho de que nos brinda una relación entre las distancias de ambos grafos.

**Lema 3.1.2.** [37, Lemma 3.1] *Sea  $S$  un conjunto de enteros positivos. Supongamos que  $a, b \in S^* = S - \{1\}$ . Sean  $p$  y  $q$  números primos tales que  $p \mid a$  y  $q \mid b$ . Entonces  $a$  y  $b$  están en la misma componente de  $\Gamma(S)$  si y sólo si  $p$  y  $q$  están en la misma componente de  $\Delta(S)$ .*

*Más aún, si esto ocurre, entonces  $|d_{\Gamma(S)}(a, b) - d_{\Delta(S)}(p, q)| \leq 1$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $a$  y  $b$  están en la misma componente conexa de  $\Gamma(S)$ . Escojamos enteros  $a = a_0, a_1, \dots, a_n = b \in S^*$  tales que

$$a = a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_n = b$$

es un camino con el menor número de vértices entre  $a$  y  $b$  en el grafo  $\Gamma(S)$ .

Por lo tanto  $d_{\Gamma(S)}(a, b) = n$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$  podemos encontrar un primo  $p_i \in \pi(S)$  tal que  $p_i \mid a_{i-1}$  y  $p_i \mid a_i$ . Por lo tanto tenemos el siguiente camino en el grafo  $\Delta(S)$

$$p \rightarrow p_1 \rightarrow \dots \rightarrow p_n \rightarrow q$$

Este camino es de longitud  $n + 1$  en  $\Delta(S)$ . Luego,  $p$  y  $q$  pertenecen a la misma componente conexa del grafo  $\Delta(S)$ . Además concluimos que

$$d_{\Delta(S)}(p, q) \leq n + 1 = d_{\Gamma(S)}(a, b) + 1.$$

Para probar la recíproca, supongamos que  $p$  y  $q$  pertenecen a la misma componente conexa del grafo  $\Delta(S)$ . Elijamos del conjunto  $\pi(S)$  un conjunto de primos  $p = q_0, q_1, \dots, q_l = q$  tales que el camino

$$p = q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow \dots \rightarrow q_l = q$$

es el camino de menor longitud entre  $p$  y  $q$  en  $\Delta(S)$ .

Por lo tanto  $d_{\Delta(S)}(p, q) = l$ .

Para  $i = 1, \dots, l$ , encontramos  $b_i \in S^*$  tal que  $q_{i-1}q_i | b_i$ , esto implica que tenemos que el camino

$$a \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_l \rightarrow b$$

conecta a los vértices  $a$  y  $b$  en  $\Gamma(S)$ . Más aún, este camino tiene longitud  $l + 1$ , luego

$$d_{\Gamma(S)}(a, b) \leq l + 1 = d_{\Delta(S)}(p, q) + 1$$

Por lo tanto, concluimos que  $|d_{\Gamma(S)}(a, b) - d_{\Delta(S)}(p, q)| \leq 1$ , lo cual da por terminada la demostración.  $\square$

El siguiente corolario nos brinda un hecho muy importante que será usado repetidamente a lo largo de este trabajo.

**Corolario 3.1.3.** [37, Corollary 3.2] *Sea  $S$  un conjunto de enteros positivos. El número de componentes conexas del grafo  $\Gamma(S)$  es igual al número de componentes conexas del grafo  $\Delta(S)$ .*

*Más aún,  $|\text{diam}(\Delta(S)) - \text{diam}(\Gamma(S))| \leq 1$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Por el Lema anterior, tenemos una correspondencia entre las componentes conexas de  $\Gamma(S)$  y las componentes conexas de  $\Delta(S)$ .

Más precisamente, consideremos un subconjunto maximal  $A$  de  $S^* = S - \{1\}$  de vértices en el grafo  $\Gamma(S)$ , es decir un subconjunto  $A$  en el que no existe un punto  $z \in S^* - A$  tal que  $z$  esté conectado con un punto de  $A$ . Sea  $\pi(A)$  su conjunto de primos.

Entonces tenemos que  $A$  corresponde a una componente conexa de  $\Gamma(S)$  si y sólo si  $\pi(S)$  corresponde a una componente conexa del grafo  $\Delta(S)$ . Más aún, su diámetro difiere a lo sumo por 1. Esta última afirmación se tiene nuevamente por el lema anterior.  $\square$

### 3.2. El grafo $\Delta(G)$

Sea  $G$  un grupo finito y sea  $k$  un cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero.

Recordemos que dada una representación de dimensión finita  $\rho : G \rightarrow GL(V)$  sobre  $k$ , el caracter  $\chi = \chi_V$  se define en la forma

$$\chi(g) = \text{Tr}(\rho(g))$$

para todo  $g \in G$ .

Si  $\chi$  es un caracter de  $G$ , definimos su *grado* como

$$\chi(1) = \dim(V),$$

donde  $V$  es el espacio vectorial subyacente a la representación de la cual  $\chi$  es su caracter.

Denotaremos por  $\text{cd}(G)$  al conjunto de los grados de los caracteres irreducibles del grupo  $G$ , es decir,

$$\text{cd}(G) = \{\chi(1) : \chi \in \text{Irr}(G)\}.$$

El conjunto  $\pi(\text{cd}(G))$  es entonces el conjunto de números primos  $p$  tales que  $p$  divide a  $\chi(1)$  para algún  $\chi \in \text{Irr}(G)$ . La notación  $\Delta(G)$  será usada para indicar el grafo primo sobre  $\text{cd}(G)$ .

El grafo máximo común divisor sobre el conjunto  $\text{cd}(G)$  será denotado por  $\Gamma(G)$ .

El grafo  $\Delta(G)$  brinda muchísima información acerca de la estructura del grupo  $G$ . Estas relaciones han sido estudiadas fuertemente. Entre las principales referencias podemos citar a [43, Chapter V] y [37].

Para los siguientes ejemplos vamos a fijar como cuerpo  $k$  al cuerpo de los números complejos  $\mathbb{C}$ .

**Ejemplo 3.2.1.** Sea  $G$  un grupo finito abeliano. Como cada representación irreducible de un grupo abeliano tiene dimensión 1, tenemos que en este caso el grafo  $\Delta(G)$  es el grafo vacío (sin vértices y sin aristas).

**Ejemplo 3.2.2.** Sea  $G$  un grupo finito no abeliano de orden una potencia de un primo  $p$ . Es un hecho conocido en la teoría de representaciones de grupos finitos que el orden de cualquier representación irreducible divide al orden del grupo, ver por ejemplo [30].

En este caso, como el grupo  $G$  es no abeliano, existe una representación irreducible  $\varphi$  cuyo grado no es 1. En vista del hecho mencionado anteriormente, tenemos que el grado de  $\varphi$  debe ser alguna potencia del primo  $p$ .

Por lo tanto, podemos concluir que el grafo  $\Delta(G)$  es un grafo con solo un vértice correspondiente al primo  $p$ .

**Ejemplo 3.2.3.** Sea  $G$  un grupo finito nilpotente. Entonces  $G$  es producto directo de sus subgrupos de Sylow, este hecho puede ser visto en [28, Chapter II, Proposition 7.5].

Como  $G$  es un producto directo de grupos, entonces los grados de sus representaciones irreducibles sobre  $\mathbb{C}$  son el producto de los grados de las representaciones irreducibles de sus factores directos.

Por lo tanto el grafo  $\Delta(G)$  tiene como conjunto de vértices al conjunto de primos  $p$  tales que el  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$  es no abeliano. La caracterización anterior de las representaciones irreducibles del grupo  $G$  nos permite concluir que todos los vértices de  $\Delta(G)$  están conectados entre si. Luego el grafo  $\Delta(G)$  es completo.

En el siguiente teorema resumiremos algunos de los resultados más importantes demostrados por Manz, Staszewski y Willems [41], Manz [40] y Manz, Willems y Wolf [42]; ver [37, Corollary 4.2 y Theorem 6.4]:

**Teorema 3.2.4.** *Sea  $G$  un grupo finito. Se tienen:*

- (i) *El grafo  $\Delta(G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.*

*Supongamos que el grupo  $G$  es resoluble. Entonces:*

- (ii) *El grafo  $\Delta(G)$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.*
- (iii) *Si  $\Delta(G)$  es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo igual a 3.  $\square$*

Hacemos notar que la prueba de la parte (i) del teorema, la cual es dada en [41], usa la clasificación de los grupos finitos simples.

Cuando el grupo  $G$  es además resoluble y el grafo  $\Delta(G)$  no es conexo, podemos dar una caracterización de sus componentes conexas gracias a los siguientes resultados de Pálffy. Para su demostración, remitimos al lector a [37] y a las referencias allí citadas.

**Teorema 3.2.5.** *Sea  $G$  un grupo resoluble, si el grafo  $\Delta(G)$  no es conexo, entonces cada componente conexa es un grafo completo.*

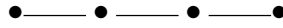
**Teorema 3.2.6.** *Sea  $G$  un grupo resoluble, supongamos que el grafo  $\Delta(G)$  tiene dos componentes conexas. Sean  $n$  y  $N$  las cardinalidades del conjunto de vértices de las dos componentes de  $\Delta(G)$ , donde  $n \leq N$ . Entonces  $N \geq 2^n - 1$ .*

**Ejemplo 3.2.7.** Como consecuencia del anterior teorema tenemos que el grafo



no se realiza como un grafo  $\Delta(G)$ , con  $G$  grupo resoluble.

**Ejemplo 3.2.8.** Existen otros ejemplos de grafos que no son realizaciones de grafos  $\Delta(G)$  con  $G$  grupo resoluble. Por ejemplo, Zhang demostró que el siguiente grafo



no se realiza si  $G$  es un grupo resoluble. Ver [37, Theorem 4.5].

Diversos autores han aplicado la técnica de grafos de grupos finitos para resolver problemas o enunciar propiedades interesantes referentes a los grupos. Como un ejemplo de esto, vamos a citar el siguiente corolario cuyo enunciado y demostración aparece en [41, Corollary 1].

**Corolario 3.2.9.** *Sea  $G$  un grupo no resoluble tal que los grados de todos sus caracteres irreducibles son potencias de primos. Entonces  $G \simeq S \times A$ , donde  $A$  es un grupo abeliano y  $S$  es el grupo  $A_5$  o el grupo  $SL(2, 8)$ .*

La siguiente observación, la cual está basada en el anterior corolario será usada en la parte final de la monografía cuando probemos uno de nuestros resultados principales.

**Observación 3.2.10.** Vamos a aplicar el anterior corolario en el siguiente caso:

Sea  $G$  un grupo que satisface alguna de las siguientes dos condiciones:

- (i) Los grados de las representaciones irreducibles de  $G$  son potencias de algún elemento del conjunto  $\{p, q\}$  con  $p$  y  $q$  primos.
- (ii) Los grados de las representaciones irreducibles de  $G$  corresponden a potencias de algún elemento del conjunto  $\{p_1, \dots, p_r\}$  donde  $p_1, \dots, p_r$  son primos y además  $p_i \neq 2, 3, 5$  o  $7$  para todo  $i = 1, \dots, r$ .

En cualquiera de los dos casos, el corolario anterior implica que el grupo  $G$  es resoluble puesto que el grupo  $G$  no es de la forma  $S \times A$ , donde  $A$  es un grupo abeliano y  $S$  es el grupo  $A_5$  o el grupo  $SL(2, 8)$



**3.3. El grafo  $\Delta'(G)$** 

Sea  $G$  un grupo finito. Denotemos por  $\text{cs}(G)$  al conjunto

$$\text{cs}(G) = \{|C| : C \text{ es una clase de conjugación de } G\}.$$

Los grafos primo y máximo común divisor sobre el conjunto  $\text{cs}(G)$  serán denotados respectivamente por  $\Delta'(G)$  y  $\Gamma'(G)$ .

**Ejemplo 3.3.1.** Sea  $D_{2n}$  el grupo dihedral.

Si  $n$  es impar, entonces el grupo  $D_{2n}$  tiene una clase de conjugación de orden 1,  $\frac{n-1}{2}$  clases de conjugación de orden 2 y una clase de conjugación de orden  $n$ . Entonces el grafo  $\Delta'(D_{2n})$  tiene como conjunto de vértices al conjunto  $2\cup\pi(n)$ . Este grafo tiene dos componentes conexas una de las cuales tiene como único elemento al 2.

El grafo  $\Delta'(G)$  tiene unas propiedades muy interesantes, las cuales serán resumidas en el Teorema 3.3.14 que enunciaremos más adelante. Estos resultados pueden ser consultados por ejemplo en [11] y [37].

A continuación, enunciaremos un pequeño corolario que nos será de gran utilidad para varios resultados. Remitimos al lector al artículo [11, Corollary 4].

**Corolario 3.3.2.** *Sea  $p$  un número primo el cual es coprimo con  $|x^G|$  para todo  $x \in G$ . Entonces el  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$  es un factor abeliano directo de  $G$ .*

**Lema 3.3.3.** *Sea  $p$  un número primo. Tenemos que  $p \notin \pi(\text{cs } G)$  si y sólo si existe un  $p$ -subgrupo de Sylow central en  $G$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $p$  no divide a  $|^G a|$  para todo  $a \in G$ , entonces el grupo  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo de Sylow central  $S_p$  por el Corolario 3.3.2.

La otra implicación sigue del hecho que si  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo de Sylow central  $S_p$ , entonces el subgrupo  $S_p$  es un factor directo abeliano de  $G$  y por lo tanto  $\text{cs}(G) = \text{cs}(G/S_p)$ . Pero todos los números en  $\text{cs}(G/S_p)$  dividen el orden de  $G/S_p$ , el cual es coprimo con  $p$ .  $\square$

El siguiente resultado debido a Naboru Ito, aparece por primera vez en [33] y será usado varias veces.

**Teorema 3.3.4.** [33] *Sea  $G$  un grupo finito. El grado de cualquier representación irreducible de  $G$  divide al índice de cada uno de sus subgrupos normales abelianos maximales.*

Michler en [45, Theorem 5.4] da una condición para que un grupo finito tenga un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano. En resumen, tenemos el siguiente enunciado conocido como Teorema de Ito-Michler:

**Teorema 3.3.5.** [45] *Sea  $G$  un grupo finito.  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano  $P$  si y sólo si  $p \nmid \chi(1)$  para cada caracter irreducible  $\chi$  de  $G$ .*

**Observación 3.3.6.** El teorema de Ito-Michler usa en su demostración la clasificación de los grupos finitos simples.

**Corolario 3.3.7.** *Sea  $G$  un grupo finito y  $p$  un número primo. Tenemos que  $p \notin \pi(\text{cd } G)$  si y sólo si existe un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p$  primo tal que  $p \notin \pi(\text{cd } G)$ . Por la definición del conjunto  $\pi(\text{cd } G)$ , tenemos que  $p$  no divide al grado de ninguna representación irreducible. Es decir, para toda representación irreducible  $\chi$  de  $G$  se satisface  $p \nmid \chi(1)$ . Luego, usando el Teorema 3.3.5, concluimos que existe un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano.

Veamos ahora la otra implicación. Por hipótesis, existe un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano. Nuevamente el Teorema de Ito-Michler nos dice que para toda representación irreducible  $\chi$  de  $G$ , se satisface  $p \nmid \chi(1)$ , es decir,  $p \notin \pi(\text{cd } G)$ . □

**Lema 3.3.8.** *Sea  $G$  un grupo finito. Entonces  $\pi(\text{cd}(G)) \subseteq \pi(\text{cs}(G))$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $p$  un número primo tal que  $p \notin \pi(\text{cs}(G))$ . El Lema 3.3.3 nos dice que  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo de Sylow central  $S_p$ .

El Teorema 3.3.4 implica que el grado de cualquier caracter irreducible  $\chi$  divide al índice  $[G : S_p]$ . Por lo tanto  $p \nmid \chi(1)$ , es decir,  $p \notin \pi(\text{cd}(G))$ .

Entonces  $\pi(\text{cd}(G)) \subseteq \pi(\text{cs}(G))$ , lo cual concluye la demostración. □

Una propiedad interesante y un tanto inesperada acerca de los grafos de un grupo resoluble fue enunciada por Dolfi. Para su demostración remitimos al lector a [37, Theorem 8.4].

**Teorema 3.3.9.** *Sea  $G$  un grupo resoluble. El grafo  $\Delta(G)$  es un subgrafo de  $\Delta'(G)$ .*

En el enunciado del teorema principal de esta sección, las nociones de un grupo de Frobenius y un grupo cuasi-Frobenius serán importantes, por lo cual las recordaremos.

**Definición 3.3.10.** Un grupo  $G$  es llamado un *grupo de Frobenius con complemento de Frobenius*  $H$ , si existe un subgrupo propio  $H \subseteq G$  tal que  $H \cap gHg^{-1} = \{e\}$  para todo  $g \in G \setminus H$ .

Si  $G$  es un grupo de Frobenius con complemento de Frobenius  $H$ , entonces  $G$  es un producto semidirecto  $G = N \rtimes H$ , donde el subgrupo normal  $N \subseteq G$ , está unívocamente determinado por  $H$ .  $N$  se llama el *núcleo de Frobenius* de  $G$ .

A continuación enunciamos algunas propiedades de los grupos de Frobenius, remitimos al lector interesado al libro de Isaacs [30, Capítulo 7].

**Proposición 3.3.11.** *Sea  $G$  un grupo de Frobenius con complemento  $H$  y núcleo  $N$ , entonces se tiene lo siguiente:*

- (i) *Los órdenes de  $H$  y  $N$  son primos relativos.*
- (ii) *Para todo  $1 \neq n \in N$  se tiene que  $C_G(n) \subset N$ .*
- (iii) *Para todo  $1 \neq h \in H$  se tiene que  $C_G(h) \subset H$ .*

**Observación 3.3.12.** Sea  $G$  un grupo de Frobenius, supongamos que su núcleo  $N$  y su complemento  $H$  son abelianos. Sea  $n \in N$  un elemento cuya clase de conjugación  $C_G(n)$  no es trivial. Como  $N$  es abeliano, entonces tenemos que  $N \subset C_G(n)$ . Ahora, la Proposición anterior nos dice que  $C_G(n) \subset N$ . Luego concluimos que si la clase de conjugación de  $n \in N$  es no trivial entonces satisface  $N = C_G(n)$ .

De la misma manera concluimos que si  $h \in H$  es un elemento del subgrupo  $H$  cuya clase de conjugación en  $G$  no es trivial entonces su centralizador satisface  $C_G(h) = H$ .

**Definición 3.3.13.** Un grupo  $G$  es llamado un grupo *cuasi-Frobenius* con núcleo de Frobenius  $\tilde{N} \subseteq G$  y complemento de Frobenius  $\tilde{H} \subseteq G$ , si  $G/Z(G)$  es un grupo de Frobenius con núcleo  $\tilde{N}/Z(G)$  y complemento  $\tilde{H}/Z(G)$ .

Ahora procederemos a enunciar el teorema principal de esta sección. Los resultados son debidos a Bertram, Herzog y Mann, Kazarin, Casolo y Dolfi y Alfandary [3], [36], [12], [1]. Ver por ejemplo [37, Section 8].

**Teorema 3.3.14.** *Sea  $G$  un grupo finito. Entonces se tienen:*

- (i) El grafo  $\Delta'(G)$  tiene a lo más dos componentes conexas.
- (ii) El grafo  $\Delta'(G)$  tiene dos componentes conexas si y sólo si  $G$  es un grupo cuasi-Frobenius con complemento y núcleo abelianos. En este caso, cada componente conexa es un grafo completo.
- (iii) Si el grupo  $G$  no es resoluble, entonces el grafo  $\Delta'(G)$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos.
- (iv) Si el grafo  $\Delta'(G)$  es conexo, entonces su diámetro es a lo sumo igual a 3.

Concluimos esta sección con dos propiedades más del grafo  $\Delta'(G)$ .

**Lema 3.3.15.** *Sea  $G$  un grupo finito. Los órdenes de las clases de conjugación de  $G$  son los mismos que los del grupo  $G/Z(G)$ . Más aún  $\Delta'(G) = \Delta'(G/Z(G))$ .*

**Proposición 3.3.16.** *Sea  $G$  un grupo cuasi-Frobenius con núcleo abeliano  $\tilde{N}$  y complemento abeliano  $\tilde{H}$ . Entonces el grafo  $\Delta'(G)$  posee dos componentes conexas, además cada componente es un grafo completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sean  $n$  y  $m$  los órdenes de los grupos  $N = \tilde{N}/Z(G)$  y  $H = \tilde{H}/Z(G)$  respectivamente. Como  $G$  es cuasi-Frobenius entonces, por definición, tenemos que el grupo  $G/Z(G)$  es un grupo de Frobenius con núcleo  $\tilde{N}/Z(G)$  y complemento  $\tilde{H}/Z(G)$ . La Proposición 3.3.11 implica que  $(n, m) = 1$ .

Ahora bien, por hipótesis, tanto el núcleo como el complemento de  $G$  son abelianos. Esto implica que los subgrupos  $\tilde{N}/Z(G)$  y  $\tilde{H}/Z(G)$  también son abelianos, es decir, el grupo de Frobenius  $G/Z(G)$  tiene núcleo y complemento abelianos. En este caso, la Observación 3.3.12 nos dice que las únicas clases de conjugación no triviales de  $G/Z(G)$  corresponden a los subgrupos  $\tilde{N}/Z(G)$  y  $\tilde{H}/Z(G)$ .

El lema anterior implica que los órdenes de las clases de conjugación del grupo  $G$  son los mismos que los del grupo  $G/Z(G)$ . Por lo tanto concluimos que los órdenes de las clases de conjugación no triviales de  $G$  son  $n$  y  $m$ .

Como  $n$  y  $m$  son coprimos entonces tenemos que las componentes conexas del grafo  $\Delta'(G)$  son los grafos completos sobre el conjunto de vértices  $\pi(n)$  y  $\pi(m)$ . Luego, el grafo  $\Delta'(G)$  posee dos componentes conexas.

Sean  $a, b \in \pi(n)$ , como el producto  $ab$  divide a  $n$ , entonces los vértices  $a$  y  $b$  están unidos por una arista en el subgrafo generado por el conjunto  $\pi(n)$ .

Por lo tanto la componente conexa generada por el conjunto  $\pi(n)$  es un grafo completo. De manera análoga, concluimos que el grafo sobre el conjunto de vértices  $\pi(m)$  también es completo. Esta afirmación nos permite concluir la demostración.  $\square$

### 3.4. El grafo $\Gamma'(G)$ y el IP-grafo

En esta sección vamos a considerar una generalización del grafo  $\Gamma'(G)$  introducida por Isaacs y Praeger en [32] y que se conoce con el nombre del IP-grafo.

Sea  $G$  un grupo finito actuando transitivamente sobre un conjunto  $\Omega$ . Consideremos un elemento  $\alpha \in \Omega$  y sea  $G_\alpha \subseteq G$  su subgrupo estabilizador. El subgrupo  $G_\alpha$  actúa sobre el conjunto  $\Omega$  por restricción de la acción original.

**Definición 3.4.1.** Definimos los *subgrados* de  $(G, \Omega)$  como las cardinalidades de las órbitas de la acción de un estabilizador  $G_\alpha$ ,  $\alpha \in \Omega$ , sobre el conjunto  $\Omega$ .

El conjunto de subgrados de  $(G, \Omega)$  es denotado por  $D = D(G, \Omega)$ .

**Observación 3.4.2.** Como la acción original es transitiva, se tiene que el conjunto  $D$  está bien definido, independientemente de la elección de  $\alpha \in \Omega$ .

**Definición 3.4.3** ([32]). Supongamos que todos los subgrados de  $(G, \Omega)$  son finitos. Se define el *IP-grafo* de  $(G, \Omega)$  como el grafo común divisor  $\Gamma(D)$  del conjunto  $D$ .

Las principales propiedades del IP-grafo se resumen en el siguiente teorema. Ver [32, Theorem A and Theorem C].

**Teorema 3.4.4.** *Sea  $G$  un grupo. Supongamos que  $G$  actúa transitivamente sobre el conjunto  $\Omega$  y que todos los subgrados son finitos. Entonces el IP-grafo de  $(G, \Omega)$  tiene a lo sumo dos componentes conexas. Más aún, se tienen:*

- (i) *Si el IP-grafo tiene sólo una componente conexa, entonces esta componente tiene diámetro a lo sumo 4.*
- (ii) *Si el IP-grafo tiene dos componentes conexas, entonces una de esas es un grafo completo y la otra tiene diámetro a lo sumo 2.*

**Nota 3.4.5.** En el resultado original dado en [32] se considera al 1 como una componente conexa también. Esto hace que en el enunciado del teorema se afirme que el grafo tiene a lo sumo tres componentes conexas. En esta tesis no consideramos al 1 como un elemento del conjunto de vértices, razón por la cual el número de componentes conexas de la versión del teorema se reduce en uno.

Antes de dar un ejemplo donde haremos uso de este teorema, enunciaremos un resultado debido a Yuster cuya demostración puede ser encontrada en [66, Theorem 1.5].

**Teorema 3.4.6.** *Sean  $H$  y  $G$  grupos finitos, tal que  $H$  actúa sobre  $G$  por automorfismos. Sean  $x, y \in G$  con  $|x^H| = m$ ,  $|y^H| = n$  donde  $(m, n) = 1$ . Supongamos que  $(|G|, |H|) = 1$ , entonces  $|(xy)^H| = mn$*

**Ejemplo 3.4.7.** El Teorema 3.4.4 será aplicado luego en este trabajo (ver Teorema 5.1.10 en el Capítulo 5) en el siguiente contexto. Sean  $G, A$  grupos finitos tales que  $G$  actúa sobre  $A$  por automorfismos. Esta acción es transitiva.

Consideremos los subgrados de  $(G, A)$  y formemos su correspondiente IP-grafo. Como consecuencia del Teorema 3.4.4, tenemos que este grafo tiene a lo sumo dos componentes conexas. Es decir, el grafo común divisor del conjunto de órdenes de las órbitas de la acción de  $G$  sobre  $A$  tiene a lo sumo dos componentes conexas. Ver [32, Corollary B].

Si, además, los órdenes de  $G$  y de  $A$  son primos relativos, entonces por el Teorema 3.4.6, tenemos que el grafo común divisor del conjunto de órdenes de las órbitas es conexo y su diámetro es a lo más 2.

El siguiente es un teorema, debido a Isaacs, que nos permitirá demostrar el Lema 3.4.11. Su demostración puede ser consultada en [31, Theorem A].

**Teorema 3.4.8.** *Sean  $H$  y  $N$  grupos finitos cuyos órdenes son coprimos. Supongamos que  $H$  actúa sobre  $N$  por automorfismos de manera no trivial. Asumamos que  $H$  fija cada caracter irreducible no lineal de  $N$ . Entonces el subgrupo derivado de  $N$  es nilpotente y por lo tanto  $N$  es resoluble.*

Un concepto útil en teoría de grupos es el de subgrupo característico, el cual definiremos a continuación.

**Definición 3.4.9.** Sea  $G$  un grupo finito y sea  $H$  un subgrupo de  $G$ . Decimos que el subgrupo  $H$  es *característico* si  $H$  es invariante bajo cada automorfismo de  $G$ . Es decir si

$$\varphi(H) = H$$

para cualquier automorfismo  $\varphi : G \rightarrow G$ .

**Proposición 3.4.10.** *Sea  $H$  un subgrupo característico en  $K$  y sea  $K \triangleleft G$ . Entonces  $H \triangleleft G$ .*

DEMOSTRACIÓN. Ver [58, Proposition 1.5.6 page 28]

□

Para terminar este capítulo, enunciaremos el siguiente lema que será usado mas adelante. Para más información, remitimos al lector a [41].

**Lema 3.4.11.** *Sea  $G$  un grupo finito y sea  $q$  un número primo. Supongamos que  $N$  es un subgrupo normal no resoluble de  $G$  cuyo índice es una potencia de  $q$  y sea  $Q \subseteq N$  un  $q$ -subgrupo de Sylow normal de  $N$ . Si  $Q_0 \subseteq G$  es un  $q$ -subgrupo de Sylow tal que cada representación irreducible no lineal de  $N/Q$  es estable bajo  $Q_0/Q$ , entonces  $Q_0$  es normal en  $G$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** El subgrupo  $Q$  es un  $q$ -subgrupo de Sylow normal de  $N$ , por lo tanto es el único  $q$ -subgrupo de Sylow de  $N$ . Como cualquier automorfismo de  $N$  debe preservar los  $q$ -subgrupos de Sylow entonces concluimos que el subgrupo  $Q$  es un subgrupo característico de  $N$ .

Por hipótesis,  $N$  es normal en  $G$ . Como  $Q$  es un subgrupo característico de  $N$ , usando la Proposición 3.4.10 deducimos que  $Q$  es un  $q$ -subgrupo normal de  $G$ . En particular,  $Q \subseteq Q_0$  para el  $q$ -subgrupo de Sylow  $Q_0$  de  $G$ .

Consideremos los subgrupos  $Q_0/Q$  y  $N/Q$  de  $G/Q$ . Por la forma en que están definidos  $Q$ ,  $N$  y  $Q_0$ , tenemos que el orden de  $Q_0/Q$  es una potencia de  $q$  y el orden de  $N/Q$  es coprimo a  $q$ . Luego  $(|Q_0/Q|, |N/Q|) = 1$ .

Vamos a suponer en primer lugar que el subgrupo  $Q_0/Q$  no centraliza al subgrupo  $N/Q$  en  $G/Q$ . Entonces el grupo  $Q_0/Q$  actúa sobre  $N/Q$  por conjugación de una forma no trivial. Por hipótesis, cada representación no lineal irreducible de  $N/Q$  es estable bajo  $Q_0/Q$ . Luego sigue del Teorema 3.4.8 que el grupo derivado  $(N/Q)'$  es nilpotente y en particular,  $N/Q$  es resoluble. Como  $Q$  es un grupo resoluble por ser  $q$ -subgrupo de Sylow, entonces concluimos que el subgrupo  $N$  es resoluble, lo cual es absurdo puesto que  $N$  no es resoluble por hipótesis.

Por lo tanto tiene que ocurrir que los subgrupos  $Q_0/Q$  y  $N/Q$  se centralizan el uno al otro en el grupo  $G/Q$ . Esto implica que  $N \subseteq N_G(Q_0)$ . Como  $N$  tiene como índice una potencia de  $q$ , entonces  $G = NQ_0 \subseteq N_G(Q_0)$ .

Luego  $G = N_G(Q_0)$  y esto permite concluir que  $Q_0$  es normal en  $G$ .  $\square$





## Grafos de Frobenius-Perron de una categoría de fusión íntegra

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra, en este caso, las dimensiones de Frobenius-Perron de sus objetos son enteros positivos. Utilizando este hecho, podemos definir sobre el conjunto de dimensiones de Frobenius-Perron de sus objetos simples los grafos que estudiamos en el capítulo anterior, lo cual da lugar a la noción de Grafos de Frobenius-Perron para una categoría de fusión íntegra. Este concepto será introducido en este capítulo.

Estudiaremos los grafos para algunas clases de extensiones graduadas. También generalizaremos, al caso de categorías de fusión, un teorema que en el caso de teoría de grupos se conoce como el Teorema de Gallagher.

### 4.1. Definición de grafos de Frobenius-Perron para una categoría de fusión íntegra

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra. Por analogía con la notación estándar en la teoría de caracteres de grupos finitos, denotaremos por  $\text{cd}(\mathcal{C})$  al conjunto:

$$\text{cd}(\mathcal{C}) = \{\text{FPdim } X : X \in \text{Irr}(\mathcal{C})\}.$$

**Definición 4.1.1.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra. El grafo primo  $\Delta(\mathcal{C})$  y el grafo común divisor  $\Gamma(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  se definen como el grafo primo y el grafo común divisor sobre el conjunto  $\text{cd}(\mathcal{C})$  respectivamente.

Llamaremos a  $\Delta(\mathcal{C})$  y  $\Gamma(\mathcal{C})$  los *grafos de Frobenius-Perron* de  $\mathcal{C}$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Sea  $G$  un grupo finito. Cuando  $\mathcal{C} = \text{Rep } G$  es la categoría de representaciones de dimensión finita de  $G$ , los grafos de Frobenius-Perron  $\Delta(\mathcal{C})$  y  $\Gamma(\mathcal{C})$  de  $\mathcal{C}$  coinciden con los grafos  $\Delta(G)$  y  $\Gamma(G)$  discutidos en el Capítulo 3.

**Ejemplo 4.1.3.** Supongamos que  $\mathcal{C}$  tiene un único objeto simple no invertible  $X$ ; en este caso  $\mathcal{C}$  es llamada una categoría de fusión *casi-grupo*. Asumamos además que  $\text{FPdim } X \in \mathbb{Z}$ . Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  es el grafo completo sobre el conjunto de vértices  $\pi(\text{FPdim } X)$  de divisores primos de  $\text{FPdim } X$ .

## 4.2. Grafos de Frobenius-Perron de algunas clases de extensiones graduadas

En esta sección vamos a estudiar el grafo primo de una categoría de fusión íntegra 2-pasos nilpotente y de una categoría de fusión íntegra, nilpotente y trezada.

**Proposición 4.2.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra. Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría de fusión 2-pasos nilpotente, esto es,  $\mathcal{C}$  es una extensión de una categoría de fusión punteada. Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  es conexo y su diámetro es a lo sumo 2.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existe un grupo finito  $G$  y una graduación fiel

$$\mathcal{C} = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{C}_g$$

tal que  $\mathcal{C}_e \cong \mathcal{D}$  es una subcategoría de fusión punteada.

Supongamos que  $X$  es un objeto simple no invertible de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $X$  pertenece a  $\mathcal{C}_g$ , para algún  $e \neq g \in G$ . Por consiguiente, podemos concluir que  $X \otimes X^* \in \mathcal{C}_e = \mathcal{D}$ .

Por lo tanto, todas las componentes simples de  $X \otimes X^*$  son invertibles y tenemos que

$$X \otimes X^* \cong \bigoplus_{s \in G[X]} s$$

donde  $G[X]$  es el subgrupo del grupo de objetos invertibles  $s$  de  $\mathcal{C}$  tales que  $s \otimes X \cong X$ .

Ahora,

$$\text{FPdim}(X)^2 = \text{FPdim}(X \otimes X^*) = \text{FPdim} \bigoplus_{s \in G[X]} s = |G[X]|.$$

Esta última igualdad se obtiene porque  $\text{FPdim}(s) = 1$ . Notemos que los divisores primos del orden de  $G[X]$  coinciden con los divisores primos de  $\text{FPdim } X$ .

Sean  $p \neq q$  vértices de  $\Delta(\mathcal{C})$ . Luego, existen objetos simples  $X$  y  $Y$  tales que  $p | \text{FPdim } X$  y  $q | \text{FPdim } Y$ . Entonces  $p | |G[X]|$  y  $q | |G[Y]|$ .

Supongamos primero que  $|G[X]|$  y  $|G[Y]|$  tienen un divisor primo en común  $r$ . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que  $p \neq r \neq q$ . Entonces  $pr | \text{FPdim } X$  y  $qr | \text{FPdim } Y$ . Con lo cual concluimos que  $d(p, q) \leq 2$ .

Ahora, si  $|G[X]|$  y  $|G[Y]|$  son coprimos, entonces  $G[X] \cap G[Y] = \mathbf{1}$ , luego  $X \otimes X^*$  y  $Y \otimes Y^*$  no tienen componentes simples no triviales en común.

Usando el Lema 1.3.8, concluimos que el producto tensorial  $X^* \otimes Y$  es simple. Como  $p|q| \text{FPdim}(X^* \otimes Y)$ , entonces se satisface que  $d(p, q) = 1$ . Esta última afirmación concluye la prueba de la proposición.  $\square$

**Proposición 4.2.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra, nilpotente y trenzada. Entonces  $\Delta(\mathcal{C})$  es un grafo completo.*

DEMOSTRACIÓN. Recordemos que por el Teorema 2.1.7, las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de  $\mathcal{C}$  dividen a  $\text{FPdim } \mathcal{C}$ .

Por el Teorema 2.6.7, hay una equivalencia de categorías de fusión trenzadas

$$\mathcal{C} \cong \mathcal{C}_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \mathcal{C}_m$$

donde para cada  $i = 1, \dots, m$ , la categoría  $\mathcal{C}_i$  es una categoría de fusión trenzada cuya dimensión de Frobenius-Perron es una potencia de un primo  $p_i^{d_i}$ ,  $d_i \geq 1$ .

Por hipótesis, la categoría  $\mathcal{C}$  es íntegra. Entonces las subcategorías  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_m$  también lo son.

Asumamos además que  $\mathcal{C}$  no es punteada. Sean  $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_t$  las subcategorías componentes no punteadas, con  $1 \leq t \leq m$ . Para todo  $1 \leq i \leq t$ , la subcategoría  $\mathcal{C}_i$  tiene un objeto simple  $Y_i$  cuya dimensión de Frobenius-Perron es divisible por  $p_i$ .

Cada objeto simple  $X$  de  $\mathcal{C}$  es de la forma

$$X = X_1 \boxtimes X_2 \boxtimes \cdots \boxtimes X_m$$

donde  $X_i$  es un objeto simple de la subcategoría  $\mathcal{C}_i$ , para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Por lo tanto, el conjunto de vértices de  $\Delta(\mathcal{C})$  es el conjunto  $\{p_1, \dots, p_t\}$ .

Además

$$Y = Y_1 \boxtimes Y_2 \boxtimes \cdots \boxtimes Y_t \boxtimes \mathbf{1} \boxtimes \cdots \boxtimes \mathbf{1}$$

es un objeto simple de  $\mathcal{C}$  cuya dimensión de Frobenius-Perron es divisible por  $p_i$ , para todo  $i = 1, \dots, t$ .

Entonces concluimos que el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  es un grafo completo sobre el conjunto de vértices  $\{p_1, \dots, p_t\}$ .  $\square$

### 4.3. Teorema de Gallagher para categorías de fusión

En esta sección vamos a generalizar al contexto de las categorías de fusión, un resultado muy conocido e importante en la teoría de representaciones de grupos finitos.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  un funtor tensorial entre dos categorías de fusión  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ . Sean  $X, Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$  tales que  $Y \in \mathfrak{ker}_F$  y  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{D}$ . Entonces  $Y \otimes X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema 1.3.8, una condición necesaria y suficiente para que el producto tensorial  $Y \otimes X$  sea simple, es que para cualquier objeto simple  $Z \neq \mathbf{1}$  de  $\mathcal{C}$ , se cumpla que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^* \otimes Y) = 0$ , o bien que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \otimes X^*) = 0$ .

Sea  $Z \neq \mathbf{1}$  un objeto simple tal que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^* \otimes Y) \neq 0$ . Como  $Y \in \mathfrak{ker}_F$ , esto implica también que  $Z \in \mathfrak{ker}_F$ , es decir,  $F(Z)$  es un objeto trivial de  $\mathcal{D}$ .

Supongamos también que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \otimes X^*)$  es no nulo. Entonces, tenemos una descomposición

$$X \otimes X^* \cong \mathbf{1} \oplus Z \oplus \dots$$

en  $\mathcal{C}$ . Aplicando el funtor  $F$ , obtenemos los isomorfismos

$$F(X) \otimes F(X)^* \cong F(X \otimes X^*) \cong \mathbf{1} \oplus F(Z) \oplus \dots$$

en la categoría  $\mathcal{D}$ .

Como  $F(Z) \neq 0$ , entonces tenemos que la multiplicidad del objeto trivial de  $\mathcal{D}$  en  $F(X) \otimes F(X)^*$  es mayor que 1.

Esta última conclusión contradice el hecho que  $F(X)$  es simple.

Por lo tanto  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X \otimes X^*) = 0$  para todos los objetos simples  $Z$  tales que  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Y^* \otimes Y) \neq 0$ . Luego  $Y \otimes X$  es simple.  $\square$

Como una consecuencia inmediata de este teorema, tenemos el siguiente corolario:

**Corolario 4.3.2.** *Sea  $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{C}''$  una sucesión exacta de categorías de fusión. Sean  $Y \in \mathcal{C}'$ ,  $X \in \mathcal{C}$ , objetos simples y supongamos que  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}''$ . Entonces  $Y \otimes X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .  $\square$*

Consideremos una acción de un grupo finito  $G$  sobre una categoría de fusión  $\mathcal{C}$  por autoequivalencias tensoriales. El Teorema 2.5.4 nos dice que tenemos una sucesión exacta de categorías de fusión

$$\text{Rep } G \rightarrow \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}.$$

El Corolario 4.3.2 implica que para cada representación irreducible de dimensión finita  $V$  de  $G$  y para cada objeto simple equivariante  $(X, u) \in \mathcal{C}^G$  cuyo objeto subyacente  $X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ , el producto tensorial  $V \otimes (X, u)$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}^G$ .

Un ejemplo de una sucesión exacta viene de sucesiones exactas de grupos finitos: Si  $F$  es un grupo finito y  $N \subseteq F$  es un subgrupo normal, entonces la acción natural de  $F$  sobre las representaciones de dimensión finita de  $N$  induce una acción del grupo cociente  $G = F/N$  sobre  $\text{Rep } N$  por autoequivalencias tensoriales. Más aún, hay una equivalencia de categorías tensoriales  $\text{Rep } F \cong (\text{Rep } N)^G$ , tal que el funtor de olvido  $(\text{Rep } N)^G \rightarrow \text{Rep } N$  se identifica con el funtor restricción  $\text{Rep } F \rightarrow \text{Rep } N$ ,  $X \mapsto X_N$ .

Obtenemos que para caracteres irreducibles  $\psi$  y  $\chi$  de  $F$  tales que  $N \subseteq \ker \psi$  y  $\chi_N \in \text{Irr}(N)$ , el producto  $\psi\chi$  es de nuevo un caracter irreducible de  $F$ .

Este hecho, el cual es bien conocido en teoría de grupos, se conoce como Teorema de Gallagher clásico. Para ver este resultado remitimos al lector al libro [30, Corollary 6.17].



## Grafos de una equivariantización y de la categoría de representaciones de un doble de Drinfeld torcido

En este capítulo estudiaremos los grafos de Frobenius-Perron para una equivariantización. Daremos una descripción del número de sus componentes conexas y algunos resultados de caracterización de las mismas.

Consideremos el doble de Drinfeld torcido, el cual es una cuasi-álgebra de Hopf. La categoría de representaciones de esta cuasi-álgebra de Hopf es una categoría de fusión. Uno de los objetivos de este capítulo es dar una descripción de los grafos correspondientes a esta categoría. Para esto, consagraremos una sección a presentar el doble de Drinfeld torcido, así como a estudiar sus representaciones. Como resultado principal de este estudio, obtuvimos una caracterización de sus grafos correspondientes.

### 5.1. Grafos de Frobenius-Perron de una equivariantización

En esta sección  $\mathcal{C}$  será una categoría de fusión íntegra y  $G$  será un grupo finito con una acción sobre  $\mathcal{C}$  por autoequivalencias tensoriales  $\rho : \underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$ . Recordemos que en este caso la equivariantización  $\mathcal{C}^G$  es una categoría de fusión íntegra.

La subcategoría plena de  $\mathcal{C}^G$  cuyos objetos simples son parametrizados por  $S_{1,U}$ , donde  $U$  corre sobre las representaciones irreducibles no isomorfas de  $G$ , es una subcategoría de fusión de  $\mathcal{C}^G$  equivalente a  $\text{Rep } G$ . Esta subcategoría coincide con el núcleo  $\mathfrak{Ker}_F$  del funtor de olvido  $F : \mathcal{C}^G \rightarrow \mathcal{C}$ . En particular,  $\Delta(G)$  es un subgrafo de  $\Delta(\mathcal{C}^G)$ . Ver [7].

**Lema 5.1.1.** *Sea  $X$  un objeto simple de  $\mathcal{C}^G$  tal que  $\text{FPdim } X$  es coprimo con el orden de  $G$ . Entonces  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $(Z, U)$  el par correspondiente al objeto simple  $X$ , es decir, el objeto que satisface  $X \cong S_{Z,U}$ . Como el número  $[G : G_Z] \dim U$  divide el orden de  $G$ , el cual por hipótesis es coprimo con  $\text{FPdim } X$ , entonces

$[G : G_Z] \dim U = 1$  y  $\text{FPdim } F(X) = \text{FPdim } X = \text{FPdim } Z$ . Luego  $F(X) = Z$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

La siguiente proposición será usada para probar los resultados principales de nuestro trabajo. Esta demostración usa el Teorema de Ito-Michler 3.3.5.

**Proposición 5.1.2.** *Sea  $G$  un grupo finito no abeliano y sea  $q$  un número primo. Supongamos que  $q$  es un vértice del grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tal que  $q \notin \pi(\text{cd } G)$ . Entonces vale alguna de las siguientes afirmaciones:*

- (i) *Existe  $p \in \pi(\text{cd } G)$  con  $d(p, q) \leq 1$ , o*
- (ii)  *$G$  posee un subgrupo de Sylow normal abeliano.*

*En particular, si  $G$  no satisface (ii), entonces el número de componentes conexas de  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  es a lo sumo igual al número de componentes conexas de  $\Delta(G)$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Consideremos un objeto simple  $X \in \mathcal{C}^G$  tal que  $q$  divide a  $\text{FPdim } X$ .

Supongamos que  $\text{FPdim } X$  es divisible por un factor primo  $p$  del orden de  $G$ . Entonces tenemos que  $p \in \pi(\text{cd } G)$ , en cuyo caso (i) ocurre, o en caso contrario, por el Teorema de Ito-Michler 3.3.5,  $G$  tiene un  $p$ -subgrupo de Sylow normal abeliano y entonces ocurre (ii).

En vista de esto, podemos asumir que  $\text{FPdim } X$  es coprimo con el orden de  $G$ . En este caso, por el Lema 5.1.1 tenemos que  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .

Por otro lado, como  $G$  no es abeliano, entonces  $\pi(\text{cd } G) \neq \emptyset$ .

Sea  $p \in \pi(\text{cd } G)$  y sea  $Y$  un objeto simple de  $\text{Rep } G = \mathfrak{Ker}_F$  cuya dimensión es divisible por  $p$ . Por el Corolario 4.3.2, tenemos que  $Y \otimes X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}^G$ . Además se tiene que  $pq$  divide a  $\text{FPdim}(Y \otimes X)$ .

Por lo tanto, concluimos que la distancia entre  $p$  y  $q$  en el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  es  $d(q, p) = 1$ , lo cual hace que ocurra (i).

Observemos finalmente que si  $G$  no tiene subgrupos de Sylow normales abelianos no triviales, entonces cada vértice de  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  está conectado con un vértice de  $\Delta(G)$ . Esto prueba la afirmación hecha sobre el número de componentes conexas.  $\square$



**5.1.1. Equivariantización bajo la acción de un grupo no abeliano.**

El principal objetivo de esta subsección será el estudiar el grafo  $\mathcal{C}^G$ , donde  $G$  es un grupo no abeliano.

**Nota 5.1.3.** Usaremos repetidamente el siguiente hecho: Supongamos que  $N$  es un subgrupo normal de  $G$ .

La acción

$$\rho : G \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$$

induce por restricción, una acción de  $N$  sobre  $\mathcal{C}$  por autoequivalencias tensoriales. Más aún, existe una acción por autoequivalencias tensoriales del grupo cociente  $G/N$  sobre la equivariantización  $\mathcal{C}^N$ , tal que  $\mathcal{C}^G$  es equivalente a la categoría  $(\mathcal{C}^N)^{G/N}$  como categorías tensoriales. Estos hechos pueden ser encontrados en las referencias [6, Corollary 5.4], [13, Example 2.9].

Consideremos la subcategoría de fusión  $\text{Rep } N \subseteq \mathcal{C}^N$ . Por la demostración de [6, Corollary 5.4], tenemos que la restricción de la acción de  $G/N$  a la subcategoría de fusión  $\text{Rep } N \subseteq \mathcal{C}^N$  es equivalente a la acción adjunta de  $G$  sobre  $\text{Rep } N$ , la cual está inducida por el funtor restricción  $\text{Rep } G \rightarrow \text{Rep } N$ .

**Lema 5.1.4.** *Sea  $G$  un  $p$ -grupo finito no abeliano, donde  $p$  es un número primo. Entonces  $d(p, q) \leq 1$  para todos los vértices  $q$  del grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$ . En particular, el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  es conexo y su diámetro es a lo sumo 2.*

DEMOSTRACIÓN. Un  $p$ -grupo no abeliano no tiene subgrupos de Sylow abelianos triviales. Entonces el resultado sigue de la Proposición 5.1.2.  $\square$

**Proposición 5.1.5.** *Sea  $G$  un grupo nilpotente no abeliano. Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, el grupo  $G$  es nilpotente, luego  $G$  es el producto directo de sus subgrupos de Sylow. Además  $G$  no es abeliano, por lo tanto podemos asumir que existe un número primo  $p$  tal que el  $p$ -subgrupo de Sylow  $S_p$  no es abeliano.

Sea  $L = G/S_p$ , entonces  $G \cong S_p \times L$ . La Nota 5.1.3, implica que el grupo  $S_p$  actúa por autoequivalencias tensoriales sobre la equivariantización  $\mathcal{C}^L$ . Luego tenemos una equivalencia de categorías de fusión  $\mathcal{C}^G \cong (\mathcal{C}^L)^{S_p}$ .

Usando el Lema 5.1.4 concluimos la demostración de la proposición.  $\square$

Vamos a enunciar sin demostración, un resultado que usaremos en la prueba del Teorema 5.1.7. Para ver los detalles de su prueba, referimos al lector al libro de Isaacs [30, Lemma 12.3].

**Lema 5.1.6.** *Sea  $G$  un grupo resoluble tal que  $G' \subseteq G$  es el único subgrupo normal minimal. Entonces los caracteres irreducibles de todas las representaciones no lineales de  $G$  tienen el mismo grado  $f$  y ocurre una de las siguientes afirmaciones:*

- $G$  es un  $p$ -grupo,  $Z(G)$  es cíclico y  $G/Z(G)$  es elementalmente abeliano de orden  $f^2$ .
- $G$  es un grupo de Frobenius con complemento abeliano  $G'$ . Además  $G'$  es el núcleo de Frobenius y es un  $p$ -grupo abeliano elemental.

La prueba del siguiente teorema usa las ideas de un resultado análogo para el grafo de caracteres de un grupo finito, el cual puede ser visto en [43, Theorem 18.4].

**Teorema 5.1.7.** *Sea  $G$  un grupo resoluble no abeliano. Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Consideremos primero el caso donde  $G/L$  es abeliano para cada subgrupo normal no trivial  $L \subseteq G$ . Notemos que esta condición es equivalente a asumir que  $G' \subseteq G$  es el único subgrupo normal minimal de  $G$ .

Por el Lema 5.1.4, podemos asumir que el orden de  $G$  no es potencia de un primo. El Lema 5.1.6 nos permite concluir que el grupo  $G$  tiene un único grado irreducible  $d > 1$ . Más aún,  $G$  es un grupo de Frobenius con núcleo de Frobenius  $G'$ , el cual resulta ser un  $r$ -grupo abeliano elemental para algún número primo  $r$ , y cuyo complemento de Frobenius  $H$ , es abeliano de orden  $d$ .

Observemos que el orden del grupo  $G$  es

$$|G| = r^n d$$

para algún  $n \geq 1$ .

Además, el conjunto de vértices de  $\Delta(G)$  coincide con el conjunto  $\pi(d)$  de divisores primos de  $d$  y  $\Delta(G)$  es el grafo completo sobre el conjunto  $\pi(d)$ .

Ahora, sea  $p$  un vértice de  $\Delta(\mathcal{C}^G)$ , y sea  $X$  un objeto simple de  $\mathcal{C}^G$  tal que  $p \mid \text{FPdim } X$ . Si  $r \mid \text{FPdim } X$ , entonces  $r$  también es un vértice de  $\Delta(\mathcal{C}^G)$ , luego  $d(p, r) \leq 1$ .

Asumamos que  $\text{FPdim } X$  no es divisible por  $r$ . Vamos a mostrar que cada divisor primo de  $\text{FPdim } X$  está conectado por un camino con cada vértice de  $\Delta(G)$ . Supongamos primero que  $\text{FPdim } X$  no es coprimo con  $d$ , entonces es divisible por algún número primo  $q$  en  $\pi(\text{cd } G)$  y  $d(p, q) \leq 1$ . Como  $\Delta(G)$  es

un grafo completo, esto implica que  $p$  está conectado por un camino con cada vértice  $t$  del grafo  $\Delta(G)$ .

Por otro lado, supongamos ahora que  $\text{FPdim } X$  es coprimo con el orden de  $G$ . Luego  $F(X)$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$  por el Lema 5.1.1. Sea  $Y \in \text{Irr}(G)$  de dimensión  $d$ . El Corolario 4.3.2 implica que  $Y \otimes X$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}^G$ . Como  $\text{FPdim}(Y \otimes X)$  es divisible por  $pq$ , para todo número primo  $q \in \pi(\text{cd } G)$ , obtenemos que  $d(p, q) \leq 1$ , para todos los vértices  $q$  del grafo  $\Delta(G)$ . Esto nos muestra que el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo dos componentes conexas en este caso.

Consideremos ahora el caso general. Sea  $N \subseteq G$  un subgrupo normal maximal tal que el cociente  $L = G/N$  no es abeliano. Como resaltamos en la Nota 5.1.3, el grupo  $L$  actúa sobre la equivariantización  $\mathcal{C}^N$  por autoequivalencias tensoriales tal que  $\mathcal{C}^G$  es equivalente a  $(\mathcal{C}^N)^L$  como categorías tensoriales.

Por otro lado, el hecho de que el subgrupo  $N$  sea maximal, implica que cada cociente propio del grupo  $L$  es abeliano. Luego, por la primera parte de la prueba, el grafo primo de  $(\mathcal{C}^N)^L \cong \mathcal{C}^G$  posee a lo más dos componentes conexas. Con esto concluimos la demostración.  $\square$

**Teorema 5.1.8.** *Sea  $G$  un grupo finito no abeliano y sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra munida de una acción por autoequivalencias tensoriales  $\underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$ . Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Haremos la prueba por inducción sobre el orden de  $G$ . Para esto, seguiremos las líneas de la última parte de la prueba de [41, Proposition 2].

Por el Teorema 5.1.7, podemos asumir que  $G$  no es resoluble. Usando la Proposición 5.1.2 podemos asumir que  $G$  contiene un subgrupo de Sylow normal abeliano no trivial. En otro caso, usando de nuevo la Proposición 5.1.2 y el Teorema 3.2.4 sigue el resultado.

Sean  $S_{p_1}, \dots, S_{p_r}$  los subgrupos de Sylow normales no triviales (no necesariamente abelianos) del grupo  $G$ , donde  $p_1, \dots, p_r$  son divisores primos distintos del orden de  $G$  y  $|S_{p_i}| = |G|_{p_i}$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

Definimos  $S$  como el subgrupo de  $G$  generado por  $S_{p_1}, \dots, S_{p_r}$ . Entonces  $S$  es un subgrupo normal de  $G$  isomorfo al producto directo  $S_{p_1} \times \dots \times S_{p_r}$ . Luego tenemos que  $S \subsetneq G$ , esta última afirmación se cumple porque estamos asumiendo que el grupo  $G$  no es resoluble.

Sea  $N \subsetneq G$  el subgrupo normal maximal tal que  $S \subseteq N \subseteq G$ . Luego, el grupo cociente  $G/N$  es simple y su orden es coprimo con  $p_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .

De la misma forma que en la prueba del Teorema 5.1.7, tenemos que existe una acción de  $G/N$  sobre la equivariantización  $\mathcal{C}^N$  tal que  $\mathcal{C}^G \cong (\mathcal{C}^N)^{G/N}$ .

Supongamos primero que  $G/N$  no es abeliano. La Proposición 5.1.2 implica que el número de componentes conexas del grafo primo de  $(\mathcal{C}^N)^{G/N} \cong \mathcal{C}^G$  es a lo sumo igual al número de componentes conexas del grafo  $\Delta(G/N)$ . Por el Teorema 3.2.4, sabemos que este número es a lo sumo tres.

Podemos entonces asumir que  $G/N$  es un grupo cíclico de orden primo  $q$ . En particular,  $N$  no es resoluble. Notemos que  $q \neq p_i$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ . Como  $|N| < |G|$ , podemos asumir inductivamente que el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^N)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.

Los objetos simples de  $(\mathcal{C}^N)^{G/N}$  están parametrizados por pares  $S_{Y,U}$ , donde  $Y$  recorre un conjunto de representantes de las órbitas de la acción de  $G/N$  sobre  $\text{Irr}(\mathcal{C}^N)$  y  $U$  es una representación proyectiva irreducible del estabilizador de  $Y$ .

El grupo  $G/N$  es cíclico y de orden  $q$ . Luego  $G_Y = 1$  ó  $G/N$ . En vista de la fórmula para las dimensiones de Frobenius-Perron de un objeto simple de una equivariantización, la cual fue dada en la Sección 2.2, tenemos dos posibilidades para cada  $Y \in \text{Irr}(\mathcal{C}^N)$ :

$$(a) \text{FPdim } S_{Y,U} = q \text{FPdim } Y, \quad \text{o} \quad (b) \text{FPdim } S_{Y,U} = \text{FPdim } Y.$$

La posibilidad (b) ocurre si y sólo si  $Y$  es  $G/N$ -estable. Más aún, podemos asumir que hay un objeto simple de  $\mathcal{C}^N$  el cual no es  $G/N$ -estable, si esto no ocurriese,  $\text{cd}(\mathcal{C}^G) = \text{cd}(\mathcal{C}^N)$  y entonces  $\mathcal{C}^G$  y  $\mathcal{C}^N$  tendrían el mismo grafo primo. Lo cual implicaría el resultado en este caso.

Entonces  $\vartheta(\Delta(\mathcal{C}^G)) = \{q\} \cup \vartheta(\Delta(\mathcal{C}^N))$ . Vamos a mostrar que  $q$  está unido con un vértice en  $\Delta(\mathcal{C}^N)$  y usaremos la hipótesis inductiva sobre  $\mathcal{C}^N$ .

Podemos asumir que  $N$  no tiene representaciones irreducibles no lineales de dimensión divisible por  $q$  (si una de estas representaciones existiese, entonces  $q$  está unido a un vértice de  $\Delta(N)$  el cual es un subgrafo de  $\Delta(\mathcal{C}^N)$ ). Por el Teorema de Ito-Michler 3.3.5,  $N$  tiene un  $q$ -subgrupo de Sylow abeliano y normal  $Q$ . Notemos que  $\vartheta(\Delta(N)) = \vartheta(\Delta(N/Q))$ , por el teorema de Ito.

Análogamente, si  $N$  tiene una representación irreducible no lineal  $Y$ , donde  $G_Y = 1$ , sigue que  $\text{FPdim } S_{Y,U} = q \dim Y$ . Concluimos que  $q$  está conectado con los divisores primos de  $\dim Y$ , lo cual prueba el resultado para este caso.

Ahora, asumamos que cada representación irreducible no lineal de  $N/Q$  es estable bajo  $G/Q$ . El Lema 3.4.11 implica que  $G$  tiene un  $q$ -subgrupo de Sylow normal  $Q_0$ .

La elección del subgrupo normal  $N$  implica que  $Q_0 \subseteq N$  y en particular  $[G : N]$  es coprimo con  $q$ , lo cual es un absurdo. Esto nos muestra que  $q$  debe estar conectado con un vértice del grafo  $\Delta(\mathcal{C}^N)$  y por inducción, obtenemos que el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas. Esto completa la demostración.  $\square$

### 5.1.2. Equivariantizaciones de categorías de fusión punteadas.

Sea  $G$  un grupo finito y sea  $\underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C})$  una acción de  $G$  por autoequivalecias tensoriales sobre una categoría de fusión punteada  $\mathcal{C}$ . En el trabajo [59, Section 7], Tambara describe las acciones de este estilo. Para una mejor comprensión del lector, vamos a transcribir esa descripción aquí.

Como  $\mathcal{C}$  es punteada, podemos asumir que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(A, \omega)$ , donde  $A$  es el grupo de clases de isomorfismo de objetos invertibles en  $\mathcal{C}$ , y  $\omega \in H^3(A, k^*)$  es un 3-cociclo invertible y normalizado. Recordemos que  $\mathcal{C}(A, \omega) = \text{Vec}_{\omega}^A$  es la categoría de espacios vectoriales  $A$ -graduados con la asociatividad inducida por  $\omega$ .

Una acción  $\rho : \underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes} \mathcal{C}$  es determinada por una acción por automorfismo de grupos de  $G$  sobre  $A$ ,  $x \mapsto {}^g a$ , con  $a \in A$  y  $g \in G$ , y por dos funciones  $\tau : G \times A \times A \rightarrow k^*$  y  $\alpha : G \times G \times A \rightarrow k^*$ , las cuales satisfacen

$$(7) \quad \frac{\omega(a, b, c)}{\omega({}^g a, {}^g b, {}^g c)} = \frac{\tau(g; ab, c) \tau(g; a, b)}{\tau(g; b, c) \tau(g; a, bc)}$$

$$(8) \quad 1 = \frac{\alpha(h, l; a) \alpha(g, hl; a)}{\alpha(gh, l; a) \alpha(g, h; {}^l a)}$$

$$(9) \quad \frac{\tau(gh; a, b)}{\tau(g; {}^h a, {}^h b) \tau(h; a, b)} = \frac{\alpha(g, h; a) \alpha(g, h; b)}{\alpha(g, h; ab)},$$

para todo  $a, b, c \in A$ ,  $g, h, l \in G$ .

Asumamos además que los 3-cociclos  $\tau$  y  $\alpha$  son normalizados.

Introducimos la notación  $\alpha_a(g, h) := \alpha(g, h; a)$  y  $\tau_{a,b}(g) := \tau(g; a, b)$ , donde  $a, b \in A$  y  $g, h \in G$ .

Sigue de la Ecuación (8), que para todo  $a \in A$ ,  $\alpha_a : G_a \times G_a \rightarrow k^*$  es un 2-cociclo. Se denotará por  $[\alpha_a] \in H^2(G_a, k^*)$  a la clase de cohomología de  $\alpha_a$ .

Sea  $A^G = \{a \in A : G_a = G\}$  el subgrupo de puntos fijos de  $A$  bajo la acción de  $G$ .

**Lema 5.1.9.** *La asignación  $a \mapsto [\alpha_a]$  define un homomorfismo de grupos  $A^G \rightarrow H^2(G, k^*)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que  $a, b \in A^G$ . La ecuación (9) se puede escribir de la siguiente forma:

$$(\alpha_a \alpha_b \alpha_{ab}^{-1})(g, h) = \tau_{a,b}(gh) \tau_{a,b}^{-1}(g) \tau_{a,b}^{-1}(h) = d\tau_{a,b}(g, h),$$

para todo  $g, h \in G$ , donde  $\tau_{a,b} : G \rightarrow k^*$  es la 1-cocadena  $g \mapsto \tau_{a,b}(g)$ .

De lo anterior concluimos que  $[\alpha_{ab}] = [\alpha_a][\alpha_b] \in H^2(G, k^*)$ , con lo cual finalizamos la prueba.  $\square$

Recordemos que el conjunto de clases de isomorfismo de objetos simples de  $\mathcal{C}^G$  está parametrizado por las clases de isomorfismo de objetos simples  $X_{a,U_a}$ , donde  $a$  recorre las órbitas de la acción de  $G$  sobre  $A$  y  $U_a$  es una representación irreducible proyectiva del estabilizador  $G_a \subseteq G$  con factor  $\alpha_a$ . En este caso, diremos que el objeto simple  $X_{a,U_a}$  *yace sobre*  $a \in A$ .

Para cada par  $(a, U_a)$  tenemos

$$(10) \quad \text{FPdim } X_{a,U_a} = |{}^G a| \dim U_a.$$

**Teorema 5.1.10.** *El grafo  $\Gamma(\mathcal{C}(A, \omega)^G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. El Corolario 3.1.3 nos dice que para cada conjunto  $X$  de enteros positivos, el grafo  $\Delta(X)$  y el grafo  $\Gamma(X)$  tienen el mismo número de componentes conexas. Usando además el Teorema 5.1.8 podemos asumir entonces que el grupo  $G$  es abeliano.

Como consecuencia de lo visto en el Ejemplo 3.4.7 y usando la ecuación (10), tenemos que las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples  $X_{a,U_a}$  que yacen sobre puntos no fijos  $a \in A \setminus A^G$  pertenecen a lo sumo a dos componentes conexas de  $\Gamma(\mathcal{C}(A, \omega)^G)$ .

Como el grupo  $G$  es abeliano, las dimensiones de Frobenius-Perron sobrantes de  $\mathcal{C}(A, \omega)^G$  corresponden a objetos simples  $X_{a,U_a}$  que yacen sobre elementos  $a \in A^G$  tales que  $[\alpha_a] \neq 1$ . Para tales objetos simples, tenemos que

$$\text{FPdim } X_{a,U_a} = \dim U_a.$$

Denotaremos por  $n_a$  al orden de la clase  $[\alpha_a]$  en  $H^2(G, k^*)$ . Entonces  $n_a$  divide a  $\dim U_a$ . Observemos que como  $G$  es abeliano, entonces las dimensiones de las representaciones proyectivas irreducibles de  $U_a$  son iguales.

Supongamos que  $a, b \in A^G$  son tales que  $[\alpha_a], [\alpha_b] \neq 1$  y  $n_a$  es coprimo con  $n_b$ . En particular,  $ab \in A^G$  y por el Lema 5.1.9 obtenemos que el orden de la clase  $[\alpha_{ab}] = [\alpha_a][\alpha_b]$  es igual al producto de los órdenes  $n_a n_b$ .

Entonces las dimensiones de Frobenius-Perron de  $X_{a, U_a}$  y  $X_{b, U_b}$  están conectadas a la dimensión de Frobenius-Perron de  $X_{ab, U_{ab}}$ , para alguna representación  $\alpha_{ab}$ -proyectiva irreducible  $U_{ab}$  de  $G$ .

Luego, las dimensiones no triviales de los objetos simples de  $\mathcal{C}(A, \omega)^G$  que yacen sobre puntos fijos de  $A$  pertenecen a la misma componente de  $\Gamma(\mathcal{C}(A, \omega)^G)$ . Por lo tanto concluimos que el grafo tiene a lo sumo tres componentes conexas.  $\square$

## 5.2. El grafo de la categoría de representaciones de un doble de Drinfeld torcido

El doble de Drinfeld torcido, que definiremos a continuación, es un ejemplo de lo que se conoce como una cuasi-álgebra de Hopf. La definición, así como más detalles acerca de las cuasi-álgebras de Hopf pueden ser consultados en [17].

Sea  $G$  un grupo finito y  $\omega : G \times G \times G \rightarrow \mathbb{C}^*$  un 3-cociclo normalizado. Consideremos los elementos  $x, y, g \in G$ , para estos elementos definimos:

$$\theta_g(x, y) = \frac{\omega(g, x, y)\omega(x, y, (xy)^{-1}gxy)}{\omega(x, x^{-1}gx, y)}$$

$$\gamma_g(x, y) = \frac{\omega(x, y, g)\omega(g, g^{-1}xgg^{-1}yg)}{\omega(x, g, g^{-1}yg)}$$

El *doble de Drinfeld torcido*  $D^\omega(G)$  de  $G$  con respecto a  $\omega$  se define como la cuasi-álgebra de Hopf con espacio vectorial subyacente  $(\mathbb{C}G)^* \otimes \mathbb{C}G$ , donde la multiplicación y la comultiplicación están definidas respectivamente como:

$$(e(g) \otimes x)(e(h) \otimes y) = \theta_g(x, y)e(g)e(xhx^{-1}) \otimes xy$$

$$\Delta(e(g) \otimes x) = \sum_{hk=g} \gamma_x(h, k)e(h) \otimes x \otimes e(k) \otimes x$$

acá  $\{e(g)|g \in G\}$  es la base dual de la base canónica de  $\mathbb{C}G$ .

La counidad y la antípoda de  $D^\omega(G)$  están dadas por

$$\epsilon(e(g) \otimes x) = \delta_{g,1}$$

$$S(e(g) \otimes x) = \theta_{g^{-1}}(x, x^{-1})^{-1} \gamma_x(g, g^{-1})^{-1} e(x^{-1}g^{-1}x) \otimes x^{-1}$$

donde  $\delta_{g,1}$  es el delta de Kronecker.

El elemento asociador  $\Phi$  se define como:

$$\Phi = \sum_{g,h,k \in G} \omega(g, h, k)^{-1} e(g) \otimes 1 \otimes e(h) \otimes 1 \otimes e(k) \otimes 1$$

En [51, Section 5] se afirma que las representaciones irreducibles de  $D^\omega(G)$  están parametrizadas por pares  $(a, U)$ , donde  $a$  es un representante de una clase de conjugación de  $G$  y  $U$  es una representación proyectiva irreducible de  $C_G(a)$ , el centralizador de  $a$  en  $G$ , con 2-cociclo  $\alpha_a$  cuyos coeficientes en  $k^*$  están dados por:

$$(11) \quad \alpha_a(x, y) = \frac{\omega(a, x, y)\omega(x, y, a)}{\omega(x, a, y)}, \quad x, y \in C_G(a).$$

La dimensión de la representación  $W_{(a,U)}$  correspondiente al par  $(a, U)$  es  $\dim W_{(a,U)} = [G : C_G(a)] \dim U = |{}^G a| \dim U$ , donde  ${}^G a \subseteq G$  denota la clase de conjugación de  $a$ .

**Nota 5.2.1.** La categoría de representaciones del doble de Drinfeld torcido  $D^\omega(G)$  es una categoría de fusión íntegra y es equivalente, como categoría trenzada, a la categoría  $Z(\mathcal{C}(G, \omega))$ . Esta afirmación se encuentra demostrada en el artículo [39].

**Nota 5.2.2.** Sea  $\mathcal{C}(G, \omega)$  la categoría de fusión de espacios vectoriales  $G$ -graduados de dimensión finita con asociatividad dada por el 3-cociclo  $\omega$ . La acción adjunta de  $G$  sobre sí mismo da lugar a una acción por autoequivalencias tensoriales  $\underline{G} \rightarrow \underline{\text{Aut}}_{\otimes}(\mathcal{C}(G, \omega))$  de tal forma que  $\text{Rep } D^\omega(G) \cong \mathcal{C}(G, \omega)^G$ . Esta última equivalencia de categorías puede ser vista en la sección 6 del artículo [50].

Los grafos de Frobenius-Perron de la categoría de fusión  $\mathcal{C} = \text{Rep } D^\omega(G)$  serán indicados por  $\Delta(D^\omega(G))$  y  $\Gamma(D^\omega(G))$ . El conjunto de vértices del grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  será denotado por  $\vartheta(D^\omega(G))$ .



Para cada  $a \in G$ , consideremos el 2-cociclo asociado  $\alpha_a$  de  $C_G(a)$  dado por la ecuación (11). La función  $D_a : \omega \mapsto \alpha_a$  induce un homomorfismo de grupos

$$H^3(G, k^*) \rightarrow H^2(C_G(a), k^*)$$

Siguiendo la notación del trabajo [44], denotaremos por  $H^3(G, k^*)_{ab}$  al subgrupo

$$H^3(G, k^*)_{ab} = \bigcap_{a \in G} \ker D_a \subseteq H^3(G, k^*).$$

También denotaremos por  $Z^3(G, k^*)_{ab}$  al subgrupo de 3-cociclos normalizados cuyas clases están en  $H^3(G, k^*)_{ab}$ .

Sea  $p$  un número primo. Denotaremos por  $\omega_p$  la  $p$ -parte del cociclo  $\omega$ . Esto es,  $\omega = \prod_{p|\omega} \omega_p$ .

Consideremos el conjunto  $S_\omega$  de números primos, el cual es definido de la siguiente manera:

$$S_\omega = \{p : \omega_p \notin H^3(G, k^*)_{ab} \text{ y } G \text{ tiene un } p\text{-subgrupo de Sylow central}\}.$$

Hacemos notar que el orden de  $\omega$  es divisible por todos los primos  $p \in S_\omega$ .

Enunciaremos sin demostración dos resultados que están formulados y probados en [44], los cuales usaremos en esta sección.

**Corolario 5.2.3.** [44, Corollary 3.6] *Sea  $G$  un grupo finito y  $\omega$  un 3-cociclo normalizado. Es equivalente:*

- $G$  es abeliano y  $\omega \in Z^3(G, k^*)_{ab}$ .
- $D^\omega(G)$  es un álgebra conmutativa.

**Proposición 5.2.4.** [44, Proposition 4.2] *Sea  $G$  un grupo finito el cual es un producto de grupos  $H \times K$  con  $|H|$  y  $|K|$  coprimos. Entonces para un 3-cociclo normalizado  $\omega$  de  $G$  existen 3-cociclos normalizados  $\eta$  y  $\eta'$  de  $H$  y  $K$  respectivamente, tales que  $D^\omega(G)$  y  $D^\eta(H) \otimes D^{\eta'}(K)$  son equivalentes como cuasi-álgebras de Hopf.*

**Lema 5.2.5.** *Sea  $p$  un número primo y asumamos que  $G$  posee un subgrupo de Sylow central  $S$ . Entonces  $p \in S_\omega$  si y sólo si  $\omega|_S \notin H^3(S, k^*)_{ab}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** La hipótesis implica que  $S$  es un factor directo abeliano de  $G$ , es decir,  $G = S \times \tilde{G}$ , donde el orden de  $\tilde{G}$  no es divisible por  $p$ . Entonces existen 3-cociclos  $\omega_1 \in H^3(S, k^*)$  y  $\omega_2 \in H^3(\tilde{G}, k^*)$  tales que  $\text{Infl } \omega_1 \text{ Infl } \omega_2 = \omega$  [4].

Observemos que el orden de la clase de cohomología de  $\text{Infl } \omega_2$  divide al orden de  $\tilde{G}$  y es coprimo con  $p$ . Entonces la clase de  $\text{Infl } \omega_1$  coincide con la  $p$ -parte  $\omega_p$  de la clase de  $\omega$ . Además

$$\omega|_S = \omega_p|_S = \omega_1.$$

Supongamos  $\omega_p \in H^3(G, k^*)_{ab}$ . Entonces, para todo  $a \in S \subseteq Z(G)$ , existe una 1-cadena  $f_a : G \rightarrow k^*$  tal que  $\alpha_a = df_a$ , donde  $\alpha_a \in H^2(G, k^*)$  es asociado a  $\omega_p$  por (11). Sea  $\alpha_a^1 \in H^2(S, k^*)$  el 2-cociclo asociado a  $\omega_1 = \omega_p|_S$ , entonces tenemos que  $\alpha_a^1 = df_a|_S$  y por lo tanto  $\omega_1 \in H^3(S, k^*)_{ab}$ .

Para probar la afirmación inversa supongamos que  $\omega_1 = \omega|_S \in H^3(S, k^*)_{ab}$ . Entonces para todo  $a \in S$ , existe  $f_a : S \rightarrow k^*$  tal que  $\alpha'_a = df_a$ , donde  $\alpha'_a \in H^2(S, k^*)$  es asociado a  $\omega|_S$  por la Ecuación (11).

Sea  $\tilde{f}_{(a,h)} : G = S \times \tilde{G} \rightarrow k^*$  la 1-cocadena definida por  $\tilde{f}_{(a,h)}(b, g) = f_a(b)$ , para todo  $a, b \in S, h, g \in \tilde{G}$ . Considerando  $\alpha_{(a,h)}$  el 2-cociclo sobre  $G = C_G(a)$  asociado a  $\omega_p = \text{Infl}(\omega_1)$  por (11), obtenemos que  $\alpha_{(a,h)} = d\tilde{f}$ . Entonces  $\omega_p = \text{Infl } \omega_1 \in H^3(G, k^*)_{ab}$ .  $\square$

**Proposición 5.2.6.**  $\Delta(G)$  y  $\Delta'(G)$  son subgrafos de  $\Delta(D^\omega(G))$ . Más aún,

$$\pi(\text{cs } G) \subseteq \vartheta(D^\omega(G)) \subseteq \pi(\text{cs } G) \cup S_\omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos  $p$  un vértice del grafo  $\Delta'(G)$ . Entonces existe  $a \in G$  tal que  $p$  divide a  $|^G a|$ . Sea  $W$  una representación irreducible de  $D^\omega(G)$  correspondiente al par  $(a, U)$ , donde  $U$  es alguna representación proyectiva irreducible  $C_G(a)$  con 2-cociclo  $\alpha_a$ . Tenemos que

$$\dim(a, U) = |^G a| \dim U,$$

de esto podemos concluir que  $p$  divide a  $\dim W$ . Luego  $p \in \Delta(D^\omega(G))$ . Por lo tanto tenemos que

$$\pi(\text{cs } G) \subseteq \vartheta(D^\omega(G)).$$

Claramente,  $\Delta'(G) \subseteq \Delta(D^\omega(G))$  es un subgrafo.

En vista de la Nota 5.2.2, tenemos la siguiente equivalencia de categorías

$$\text{Rep } D^\omega(G) \cong \mathcal{C}(G, \omega)^G.$$

En particular, la categoría  $\text{Rep } G$  es equivalente a una subcategoría de fusión de  $\text{Rep } D^\omega(G)$  y por lo tanto  $\Delta(G) = \Delta(\text{Rep } G)$  también es un subgrafo de  $\Delta(D^\omega(G))$ .

Asumamos que el vértice  $p \in \vartheta(D^\omega(G))$  satisface  $p \notin \pi(\text{cs } G)$ . Luego, para cada  $g \in G$  tenemos que  $p$  no divide a  $|{}^G g|$ . Usando el Corolario 3.3.2 podemos afirmar que el  $p$ -subgrupo de Sylow de  $G$  es un factor directo abeliano de  $G$ . Entonces  $G$  tiene un (único)  $p$ -subgrupo de Sylow central  $S_p$ .

En vista de esto, podemos escribir al grupo  $G$  como un producto de grupos

$$G \cong S_p \times \tilde{G}$$

donde los órdenes satisfacen  $(|S_p|, |\tilde{G}|) = 1$  y  $S_p$  es un  $p$ -grupo abeliano.

La Proposición 5.2.4 nos garantiza el siguiente isomorfismo de cuasi-álgebras de Hopf

$$(12) \quad D^\omega(G) \cong D^{\omega_1}(S_p) \otimes D^{\omega_2}(\tilde{G}),$$

donde los 3-cociclos  $\omega_1$  y  $\omega_2$  satisfacen  $\text{Infl } \omega_1 \text{ Infl } \omega_2 = \omega$ . Más aún, la clase de  $\text{Infl } \omega_1$  coincide con la  $p$ -parte  $\omega_p$  de la clase de  $\omega$  y  $\omega_p|_S = \omega_1$ .

El isomorfismo (12) implica que las representaciones irreducibles de  $D^\omega(G)$  son dadas por productos tensoriales de representaciones irreducibles de  $D^{\omega_1}(S_p)$  y  $D^{\omega_2}(\tilde{G})$ .

Como tenemos que  $(|S_p|, |\tilde{G}|) = 1$ , entonces el número  $p$  no divide al orden de  $\tilde{G}$ . Luego,  $p$  no divide la dimensión de ninguna representación irreducible de  $D^{\omega_2}(\tilde{G})$ . Entonces  $p$  divide a  $\dim Z$ , donde  $Z$  es una representación irreducible de  $D^{\omega_1}(S_p)$ . Esto último implica que  $D^{\omega_1}(S_p)$  no es un álgebra conmutativa.

Ahora, usando el Corolario 5.2.3 podemos concluir que  $\omega_1 \notin H^3(S_p, k^*)_{ab}$ . Entonces  $\omega_p \notin H^3(G, k^*)_{ab}$ , por el Lema 5.2.5. Esto último demuestra que  $p \in S_\omega$ , con lo cual podemos finalizar la demostración.  $\square$

**Proposición 5.2.7.** *Sea  $p \in \vartheta(D^\omega(G)) \setminus \pi(\text{cs } G)$ . Entonces  $p$  está conectado con cada vértice  $q \in \Delta'(G)$ .*

DEMOSTRACIÓN. Sigue de la Proposición 5.2.6 que  $p \in S_\omega$ . Entonces el  $p$ -subgrupo de Sylow  $S_p$  de  $G$  es un factor directo abeliano de  $G$ . Tenemos un isomorfismo

$$D^\omega(G) \cong D^{\omega_1}(S_p) \otimes D^{\omega_2}(\tilde{G})$$

donde  $G = S_p \times \tilde{G}$  y  $[\text{Infl } \omega_1][\text{Infl } \omega_2] = [\omega]$ . Más aún, las representaciones irreducibles de  $D^\omega(G)$  están dadas por productos tensoriales de representaciones irreducibles de  $D^{\omega_1}(S_p)$  y  $D^{\omega_2}(\tilde{G})$ .

Como  $p \in \vartheta(D^\omega(G))$ , y  $p$  no divide la dimensión de las representaciones irreducibles de  $D^{\omega_2}(\tilde{G})$ , entonces  $p$  divide a  $\dim Z$ , para alguna representación irreducible  $Z$  de  $D^{\omega_1}(S_p)$ .

Sea  $q \in \pi(\text{cs } G)$ . Observemos que  $\text{cs}(G) = \text{cs}(\tilde{G})$ , esto se tiene porque  $G = S_p \times \tilde{G}$  y el grupo  $S_p$  es abeliano. Entonces, existe  $a \in \tilde{G}$  tal que  $q$  divide a  $|\tilde{G}a|$ . Luego  $q$  divide la dimensión de una representación irreducible  $\tilde{W}_{(a,U)}$  de  $D^{\omega_2}(\tilde{G})$ . Esto implica que  $pq$  divide la dimensión de  $Z \otimes \tilde{W}_{(a,U)}$  y, como esta última es una representación irreducible de  $D^\omega(G)$ , entonces  $p$  y  $q$  están unidos por una arista en  $\Delta(D^\omega(G))$ .  $\square$

Usando las proposiciones previas, obtenemos el siguiente resultado importante sobre el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$ .

**Teorema 5.2.8.** *Sea  $G$  un grupo finito y sea  $\omega$  un 3-cociclo sobre  $G$ . Entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  tiene a lo sumo dos componentes conexas y su diámetro es a lo sumo tres. Más aún, se tiene:*

- (i) *Supongamos que  $G$  es un grupo nilpotente. Entonces  $\Delta(D^\omega(G))$  es el grafo completo sobre el conjunto de vértices  $S_\omega$ .*
- (ii) *Si el conjunto  $S_\omega$  es no vacío, entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos.*
- (iii) *Supongamos que  $\Delta(D^\omega(G))$  no es conexo. Entonces  $S_\omega = \emptyset$  y  $G$  es un grupo cuasi-Frobenius con complemento y núcleo abelianos. Más aún, tenemos que  $\Delta(D^\omega(G)) = \Delta'(G)$  tiene dos componentes conexas y una de ellas es un grafo completo.*
- (iv) *Supongamos que  $G$  no es resoluble. Entonces el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos.*

DEMOSTRACIÓN. (i) La hipótesis implica que el grupo  $G$  es el producto directo de sus subgrupos de Sylow:  $G \cong S_{p_1} \times \cdots \times S_{p_n}$ , donde  $p_1, \dots, p_n$  es el conjunto de divisores primos del orden de  $G$ . Nuevamente, la Proposición 5.2.4 nos dice que tenemos el isomorfismo:

$$D^\omega(G) \cong D^{\omega_1}(S_{p_1}) \otimes \cdots \otimes D^{\omega_n}(S_{p_n}),$$

donde los 3-cociclos  $\omega_i \in H^3(S_{p_i}, k^*)$  satisfacen  $\text{Infl } \omega_1 \dots \text{Infl } \omega_n = \omega$ .

En nuestro caso tenemos que  $\text{Rep } D^\omega(G)$  es una categoría nilpotente trenzada y entonces la parte (i) sigue de la Proposición 4.2.2. Cabe agregar que en este caso, el conjunto de vértices coincide con el conjunto  $S_\omega$ .

(ii) Podemos asumir que el grupo  $G$  no es abeliano. Sea  $p \in \vartheta(D^\omega(G))$  tal que  $p \in S_\omega$ . Usando la Proposición 5.2.7, para algún  $q \in \vartheta(D^\omega(G))$  tal que  $q \in \Delta'(G)$  tenemos que  $p$  y  $q$  están unidos por una arista. Esto prueba que el grafo es conexo. Si  $s$  y  $r$  son dos vértices en  $\Delta'(G)$  entonces puede ocurrir que  $s$  y  $r$  están unidos por una arista o que existe un camino de longitud 2, el cual consiste de las aristas  $(s, p)$  y  $(p, r)$ .

Análogamente, supongamos que  $p \neq l \in S_\omega$  es otro vértice. Como  $G$  no es abeliano, entonces existe un vértice  $t \in \Delta'(G)$ . Entonces  $t$  está unido al vértice  $p$  y también está unido al vértice  $l$ . Luego, existe un camino  $(p, t)$   $(l, t)$  de  $p$  a  $l$ , de longitud dos. Entonces tenemos que el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  tiene diámetro a lo sumo 2. Con esto queda demostrada la afirmación (ii).

(iii) Supongamos que el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  no es conexo. Entonces por la parte (ii) se concluye que  $S_\omega = \emptyset$ . Por la Proposición 5.2.6, tenemos que  $\vartheta(D^\omega(G)) = \pi(\text{cs } G)$  y como el grafo  $\Delta'(G)$  es un subgrafo de  $\Delta(D^\omega(G))$ , tenemos pues que el grafo  $\Delta'(G)$  tampoco es conexo. El Teorema 3.3.14 implica que  $G$  es un grupo de Frobenius con complemento y núcleo abelianos.

La hipótesis de desconexidad del grafo  $\Delta(D^\omega(G))$  nos permite decir que no existen más vértices en  $\Delta(D^\omega(G))$  que también estén en  $\Delta'(G)$ . Luego  $\Delta(D^\omega(G)) = \Delta'(G)$  y así queda demostrada (iii).

(iv) Por la afirmación (ii), podemos asumir que el conjunto  $S_\omega$  es vacío, entonces  $\vartheta(D^\omega(G)) = \pi(\text{cs } G)$ , por la Proposición 5.2.6.

Como  $G$  no es resoluble, tenemos que  $\Delta'(G)$  es conexo y su diámetro es a lo sumo dos, esta conclusión es gracias al Teorema 3.3.14 (iii). Esta última afirmación también ocurre para el grafo  $\Delta(D^\omega(G))$ . Con esto demostramos la afirmación (iv).

La afirmación referente al número de componentes conexas de  $\Delta(D^\omega(G))$  sigue de (iii).

Finalmente, nos queda solo por demostrar la afirmación concerniente al diámetro. Tenemos que  $\vartheta(D^\omega(G)) \subseteq \pi(\text{cs } G) \cup S_\omega$ . Si  $S_\omega \neq \emptyset$ , entonces el diámetro de  $\Delta(D^\omega(G))$  es a lo sumo dos por la parte (ii).

Supongamos por otro lado que  $S_\omega = \emptyset$ . Como  $\Delta'(G)$  es un subgrafo de  $\Delta(D^\omega(G))$ , entonces el diámetro de  $\Delta(D^\omega(G))$  no es más grande que el diámetro de  $\Delta'(G)$ . Por el Teorema 3.3.14, el diámetro  $\Delta'(G)$  es a lo sumo

tres. Esto demuestra la afirmación y con esto podemos dar por concluida la demostración.  $\square$

## Grafos de Frobenius-Perron de una categoría de fusión no-degenerada

En este capítulo daremos la demostración de los resultados principales de la tesis. Para ello, enunciaremos y demostraremos unos resultados previos los cuales usan fuertemente la fórmula de Verlinde y hechos vistos en los capítulos anteriores.

Como aplicación, daremos un resultado de clasificación para categorías de fusión trenzadas débilmente íntegras cuyos objetos simples tienen dimensión de Frobenius-Perron potencia de un primo.

### 6.1. Resultados preliminares

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra.

Comenzaremos dando condiciones suficientes para que un producto tensorial de objetos simples de  $\mathcal{C}$  sea también simple.

**Lema 6.1.1.** *Supongamos que cada subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  es punteada. Sean  $X, Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$  tales que  $G[X^*] \cap G[Y] = \mathbf{1}$ . Asumamos además que  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro. Entonces el producto tensorial  $X \otimes Y$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Supongamos que  $Z$  es una componente simple no trivial común a  $X^* \otimes X$  y a  $Y \otimes Y^*$ . Como por hipótesis  $G[X^*] \cap G[Y] = \mathbf{1}$ , entonces  $Z$  no es invertible. Además, como  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro, entonces por la Proposición 2.6.5, el objeto  $Z$  centraliza simultáneamente a  $X$  y a  $Y$ .

Sea  $\tilde{\mathcal{C}}$  la subcategoría de fusión de  $\mathcal{C}$  generada por  $X$  e  $Y$ . Entonces  $Z$  pertenece al centro de Müger  $\tilde{\mathcal{C}}'$ . Además, como  $Z$  es sumando directo de  $Y \otimes Y^*$ , entonces  $Z \in \tilde{\mathcal{C}}$ . El Lema 2.7.13 implica que  $\theta_Z = 1$ . Luego,  $Z$  genera una subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$ . Pero  $Z$  no es invertible, esto contradice la hipótesis de que la categoría  $\mathcal{C}$  no contiene subcategorías Tannakianas no punteadas.

Por lo tanto  $X^* \otimes X$  y  $Y \otimes Y^*$  no pueden tener componentes simples no invertibles en común. El Lema 1.3.8 implica que el producto tensorial  $X \otimes Y$  es simple como se afirma.  $\square$

**Nota 6.1.2.** Recordemos que para cada objeto simple  $Z$ , el orden del grupo  $G[Z]$  de componentes simples invertibles de  $Z \otimes Z^*$  divide a  $(\text{FPdim } Z)^2$ . Ver por ejemplo [16, Lemma 2.2].

Supongamos que  $\mathcal{C}$  es una categoría íntegra. Sean  $X$  e  $Y$  objetos simples de  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos. Supongamos además que  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro. Entonces los órdenes de los grupos  $G[X^*]$  y  $G[Y]$  son coprimos también, por lo que se puede aplicar el Lema 6.1.1. Se obtiene así que, bajo estas condiciones,  $X \otimes Y$  es un objeto simple de  $\mathcal{C}$ .

**Corolario 6.1.3.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada e íntegra tal que cada subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  es punteada. Supongamos que  $X$  e  $Y$  son objetos simples de  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos. Entonces debe ocurrir una de las siguientes posibilidades:*

- (i) *El producto tensorial  $X \otimes Y$  es simple, o bien*
- (ii)  *$S_{X,Y} = 0$ .*

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos, el Lema 2.7.14 implica que, o bien  $S_{X,Y} = 0$ , y tenemos (ii), o bien  $X$  e  $Y$  se centralizan proyectivamente el uno al otro. Si ocurre la segunda posibilidad, entonces por el Lema 6.1.1 y la Nota 6.1.2, tenemos que  $X \otimes Y$  es simple. Esto prueba que en este caso debe valer (i).  $\square$

Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada, íntegra no-degenerada. Consideremos a la categoría  $\mathcal{C}$  munida con su estructura esférica canónica positiva, de modo que  $\mathcal{C}$  es una categoría modular.

**Lema 6.1.4.** *Supongamos que cada subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  es punteada. Sean  $X, Y$  objetos simples no invertibles de  $\mathcal{C}$ . Se tienen:*

- (i) *Si  $d(\text{FPdim } X, \text{FPdim } Y) > 2$  en el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$ , entonces  $S_{X,Y} = 0$ .*
- (ii) *Si  $\text{FPdim}(X)$  y  $\text{FPdim}(Y)$  pertenecen a diferentes componentes conexas del grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$ , entonces la multiplicidad de  $Y$  en  $X \otimes X^*$  es dada por:*

$$(13) \quad \frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2} N_{X, X^*}^Y = \sum_{\text{FPdim } T=1} S_{Y^*, T}.$$



DEMOSTRACIÓN. (i). La hipótesis implica que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son primos relativos. Más aún, el producto tensorial  $X \otimes Y$  no puede ser simple, porque en este caso tendríamos que  $d(\text{FPdim } X, \text{FPdim } Y) \leq 2$  en  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Luego por el Corolario 6.1.3 tenemos que  $S_{X,Y} = 0$ , con esto queda demostrado (i).

(ii). Recordemos primero la fórmula de Verlinde, la cual fue enunciada en el Teorema 2.7.11.

$$N_{X,Y}^Z = \frac{1}{\text{FPdim}(\mathcal{C})} \sum_{T \in \text{Irr}(\mathcal{C})} \frac{S_{XT} S_{YT} S_{Z^*T}}{\text{FPdim } T},$$

Sea  $\Gamma_1$  la componente conexa de  $\text{FPdim}(X)$ . La multiplicidad de  $Y$  en  $X \otimes X^*$  viene dada por la fórmula de Verlinde.

Por la parte (i), los sumandos no nulos de esta expresión corresponden a los objetos simples  $T$  tales que  $d(\text{FPdim } T, \text{FPdim } X) \leq 2$ . Por lo tanto  $\text{FPdim } T$  pertenece a la componente conexa  $\Gamma_1$  de  $\text{FPdim } X$  o  $\text{FPdim } T$  es invertible. Luego tenemos:

$$\begin{aligned} N_{X,X^*}^Y &= \frac{1}{\text{FPdim } \mathcal{C}} \sum_{d(\text{FPdim } T, \text{FPdim } X) \leq 2} \frac{S_{XT} S_{X^*T} S_{Y^*T}}{\text{FPdim } T} \\ &+ \frac{1}{\text{FPdim } \mathcal{C}} \sum_{\text{FPdim } T=1} S_{XT} S_{X^*T} S_{Y^*T}. \end{aligned}$$

Recordemos que si  $T$  es un objeto invertible, entonces  $\text{FPdim } T = 1$ . Además, por la Observación 2.7.12, tenemos que  $S_{XT} S_{X^*T} = |S_{X,T}|^2 = (\text{FPdim } X)^2$ .

Por otro lado, si  $d(\text{FPdim } T, \text{FPdim } X) \leq 2$ , entonces  $\text{FPdim } T$  y  $\text{FPdim } Y$  no están conectados en  $\Gamma(\mathcal{C})$  puesto que  $\text{FPdim } Y$  no pertenece a la componente conexa  $\Gamma_1$ . Luego, por la parte (i) tenemos que  $S_{Y^*T} = 0$ .

Por lo tanto la expresión anterior queda reducida a

$$(14) \quad N_{X,X^*}^Y = \frac{(\text{FPdim } X)^2}{\text{FPdim } \mathcal{C}} \sum_{\text{FPdim } T=1} S_{Y^*T}.$$

Esto implica la parte (ii) y finaliza la demostración.  $\square$

**Observación 6.1.5.** Consideremos las hipótesis del Lema 6.1.4 (ii). Entonces,  $X$  e  $Y$  son objetos simples no invertibles de  $\mathcal{C}$  tales que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  pertenecen a distintas componentes conexas de  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Supongamos que  $Y \in \mathcal{C}_{ad}$ . Afirmamos que  $S_{Y^*T} = \text{FPdim } Y$ , para cada objeto invertible  $T$ . Esto sigue del hecho que  $\mathcal{C}_{ad} = \mathcal{C}'_{pt}$  el cual fue enunciado en el Corolario 2.6.3.

Por lo tanto, la relación (13) se escribe como

$$\frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2} N_{X, X^*}^Y = \text{FPdim } Y \text{ FPdim } \mathcal{C}_{pt}.$$

En particular, obtenemos que  $N_{X, X^*}^Y > 0$ .

**Proposición 6.1.6.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada, íntegra no degenerada. Asumamos que cada subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  es punteada. Entonces, el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.*

DEMOSTRACIÓN. Para esta prueba vamos a considerar dos casos.

En primer lugar, consideremos el caso en el que para cada objeto simple no invertible  $X$  y para cada objeto simple no invertible  $Z$  que hace parte de la descomposición de  $X \otimes X^*$ ,  $\text{FPdim } X$  está conectado con  $\text{FPdim } Z$  en  $\Gamma(\mathcal{C})$ .

Supongamos que el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  no es conexo. Sean  $X, Y \in \text{Irr}(\mathcal{C})$  tales que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  pertenecen a componentes conexas distintas de  $\Gamma(\mathcal{C})$ . En particular,  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos y  $G[X^*] \cap G[Y] = 1$ .

El producto tensorial  $X \otimes Y$  no puede ser simple, puesto que en otro caso  $d(\text{FPdim } X, \text{FPdim } Y) \leq 2$ .

Por lo tanto, el Lema 1.3.8 implica que los productos tensoriales  $X^* \otimes X$  e  $Y \otimes Y^*$  tienen un elemento simple en común  $Z$ . Este elemento es no invertible. Por hipótesis, las dimensiones de Frobenius-Perron de las componentes no invertibles de  $X^* \otimes X$  (respectivamente  $Y \otimes Y^*$ ) pertenecen a la misma componente conexa que  $\text{FPdim } X$  (respectivamente  $\text{FPdim } Y$ ). Esto implica que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  están conectados en  $\Gamma(\mathcal{C})$  lo cual es una contradicción.

Por lo tanto  $\Gamma(\mathcal{C})$  es conexo en este caso.

Ahora, consideremos el caso en el que existen un objeto simple no invertible  $X$  y una componente simple no invertible  $Z$  de  $X \otimes X^*$  tales que  $\text{FPdim } X$  no está conectado con  $\text{FPdim } Z$  en  $\Gamma(\mathcal{C})$ .

Por el Lema 6.1.4 (ii), la multiplicidad de  $Z$  en el objeto  $X \otimes X^*$  satisface

$$\frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2} N_{X, X^*}^Z = \sum_{\text{FPdim } T=1} S_{Z^*, T}.$$

Supongamos que  $Y$  es un objeto no invertible tal que  $\text{FPdim } Y$  no pertenece a la componente conexa de  $\text{FPdim } X$  en  $\Gamma(\mathcal{C})$ . Si  $\text{FPdim } Y$  no está conectado

con  $\text{FPdim } Z$ , entonces el Lema 6.1.4 (ii) de nuevo implica que la multiplicidad de  $Z$  en  $Y \otimes Y^*$  satisface

$$\frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } Y)^2} N_{Y, Y^*}^Z = \sum_{\text{FPdim } T=1} S_{Z^*, T} = \frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2} N_{X, X^*}^Z.$$

En particular,  $N_{Y, Y^*}^Z > 0$  y entonces ocurre la siguiente relación:

$$(\text{FPdim } X)^2 N_{Y, Y^*}^Z = (\text{FPdim } Y)^2 N_{X, X^*}^Z.$$

Por hipótesis,  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos, luego tenemos que  $(\text{FPdim } X)^2$  divide a  $N_{X, X^*}^Z$ . Pero esto es imposible porque

$$N_{X, X^*}^Z \text{FPdim } Z < \text{FPdim}(X \otimes X^*) = (\text{FPdim } X)^2$$

con lo cual tenemos una contradicción.

Por lo tanto tenemos que para cada objeto simple no invertible  $Y$ ,  $\text{FPdim } Y$  está conectado con  $\text{FPdim } X$  o con  $\text{FPdim } Z$ . Esto implica que el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  posee dos componentes conexas. Con esto concluimos la demostración de la proposición.  $\square$

Observemos que la anterior proposición aplica en particular cuando la categoría de fusión no degenerada  $\mathcal{C}$  no contiene subcategorías Tannakianas no triviales.

Cuando la categoría  $\mathcal{C}$  de la Proposición 6.1.6 no posee subcategorías punteadas no triviales, el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  es conexo.

**Proposición 6.1.7.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada, íntegra no degenerada tal que  $\mathcal{C}_{pt} = \text{Vec}$ . Entonces el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  es conexo.*

Como  $\mathcal{C}_{pt} = \text{Vec}$ , la condición de que  $\mathcal{C}$  no contiene subcategorías Tannakianas no triviales es equivalente a que cada subcategoría tannakiana es punteada.

**DEMOSTRACIÓN.** Como  $\mathcal{C}$  es no degenerada, el Teorema 2.6.2 implica que  $(\text{FPdim } X)^2$  divide a  $\text{FPdim } \mathcal{C}$  para cada objeto simple  $X \in \mathcal{C}$ .

Supongamos por el contrario que  $X$  e  $Y$  son objetos no invertibles tales que  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  están en componentes conexas distintas en el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$ . En particular,  $\text{FPdim } X$  y  $\text{FPdim } Y$  son coprimos. Por lo tanto  $(\text{FPdim } X)^2(\text{FPdim } Y)^2$  divide a  $\text{FPdim } \mathcal{C}$ .

Como  $\mathcal{C}$  es no degenerada, entonces el Corolario 2.6.3 nos permite concluir que  $\mathcal{C}_{ad} = \mathcal{C}'_{pt}$ . La hipótesis implica que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ad}$ .

Por la Observación 6.1.5, la multiplicidad de  $Y$  en  $X \otimes X^*$  satisface

$$\frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2} N_{X, X^*}^Y = \text{FPdim } Y \text{ FPdim } \mathcal{C}_{pt} = \text{FPdim } Y.$$

Luego

$$\frac{\text{FPdim } \mathcal{C}}{(\text{FPdim } X)^2 (\text{FPdim } Y)^2} N_{X, X^*}^Y = \frac{1}{\text{FPdim } Y}.$$

Tenemos una contradicción, porque el lado izquierdo de esta ecuación es un entero, pero el lado derecho no lo es. Esto nos muestra que el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  debe ser conexo.  $\square$

## 6.2. Resultados principales

Usando las herramientas desarrolladas hasta ahora, vamos a dar en esta sección la demostración de dos de los resultados principales de nuestro trabajo.

**Teorema 6.2.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión íntegra no-degenerada. Entonces se tienen:*

- (i) *El grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.*
- (ii) *Supongamos que la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble. Entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.*

**DEMOSTRACIÓN.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trezada íntegra y no degenerada. Si cada subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  es punteada, entonces por la Proposición 6.1.6 el grafo  $\Gamma(\mathcal{C})$  posee a lo sumo dos componentes conexas.

Ahora, por el Corolario 3.1.3, tenemos que el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  también posee a lo sumo dos componentes conexas.

Podemos entonces asumir que  $\mathcal{C}$  contiene una subcategoría tannakiana  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$ , donde  $G$  es un grupo finito no abeliano. Entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es una equivariantización  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D}^G$ , donde  $\mathcal{D} = \mathcal{C}_G$  es la categoría de fusión trezada  $G$ -cruzada asociada (ver enunciados de la Sección 2.7).

Sigue del Teorema 5.1.8, que el grafo  $\Delta(\mathcal{C}^G)$  tiene a lo sumo tres componentes conexas. Esto demuestra la parte (i) del teorema.

Por la proposición 2.4.8, si  $\mathcal{C}$  es resoluble, entonces el grupo  $G$  también es resoluble. Luego, el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas por el Teorema 5.1.7. Esto termina de probar la parte (ii) del enunciado y con esto concluimos la demostración del teorema.  $\square$

El siguiente teorema concierne al grafo de categorías de fusión trezadas de tipo grupo. Recordemos que estas categorías son íntegras.

**Teorema 6.2.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada de tipo grupo. Entonces se tienen:*

- (i) *El grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo tres componentes conexas.*
- (ii) *Si la categoría  $\mathcal{C}$  es no-degenerada, entonces el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene a lo sumo dos componentes conexas y su diámetro es a lo sumo igual a tres.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada de tipo grupo. Por el Teorema 2.6.8, existe una subcategoría tannakiana  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$  de  $\mathcal{C}$  tal que la de-equivariantización  $\mathcal{C}_G$  es una categoría punteada. En particular, la categoría  $\mathcal{C}$  es una equivariantización de una categoría de fusión punteada.

Por lo tanto, como consecuencia del Teorema 5.1.10 obtenemos la parte (i) del teorema, dado que el grafo primo y el grafo máximo común divisor de la categoría  $\mathcal{C}$  tienen el mismo número de componentes conexas por el Corolario 3.1.3.

Ahora demostraremos la parte (ii). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada de tipo grupo y no-degenerada. Sea  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$  la subcategoría tannakiana de  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{C}_G$  es punteada. Entonces tenemos la equivalencia  $\mathcal{C}_G \cong \mathcal{C}(\Gamma, \omega)$ , para algún grupo finito  $\Gamma$  y algún 3-cociclo  $\omega \in H^3(\Gamma, k^*)$ . Ver el Ejemplo 1.3.4.

La Nota 5.2.1, implica la siguiente equivalencia de categorías

$$\mathcal{Z}(\mathcal{C}_G) \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C}(\Gamma, \omega)) \cong \text{Rep } D^\omega(\Gamma).$$

Además, por la Proposición 2.7.3, hay una equivalencia de categorías de fusión trenzadas  $\mathcal{C} \boxtimes (\mathcal{C}_G^0)^{\text{op}} \cong \mathcal{Z}(\mathcal{C}_G)$ , donde la componente neutra  $\mathcal{C}_G^0 \subseteq \mathcal{C}_G$  también es punteada.

Esto implica que

$$\Delta(\mathcal{C}) = \Delta(\mathcal{Z}(\mathcal{C}_G)) = \Delta(D^\omega(\Gamma))$$

luego, la parte (ii) se deduce del Teorema 5.2.8. □

### 6.3. Aplicación

Para comenzar esta sección, recordemos el siguiente resultado, que se demuestra en [54, Theorem 7.2].

**Teorema 6.3.1.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada débilmente íntegra. Supongamos que  $p$  es un número primo tal que  $\text{FPdim } X$  es una potencia de  $p$ , para todo objeto simple  $X$ . Entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble.*

El objetivo principal de esta sección consistirá en dar una aplicación basada principalmente en la Proposición 6.1.7. Este es un resultado de clasificación, el cual generaliza el Teorema anterior.

**Teorema 6.3.2.** *Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada tal que  $\text{FPdim } \mathcal{C} \in \mathbb{Z}$  y sean  $p_1, \dots, p_r$  números primos. Supongamos que las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de  $\mathcal{C}$  son una potencia del primo  $p_i$  para algún  $1 \leq i \leq r$ . Entonces  $\mathcal{C}$  es débilmente de tipo grupo.*

*Además, si una de las siguientes condiciones ocurre*

- (a)  $r \leq 2$ , o
- (b)  $p_i > 7$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .

*Entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble.*

DEMOSTRACIÓN. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría de fusión trenzada que satisface las hipótesis del teorema.

La prueba se hará por inducción en  $\text{FPdim } \mathcal{C}$ . Observemos que las hipótesis sobre las dimensiones de los objetos simples de  $\mathcal{C}$  se satisfacen también para cualquier subcategoría de fusión y por lo tanto, para cualquier de-equivariantización de  $\mathcal{C}$ .

Si  $\text{FPdim } \mathcal{C} = 1$  entonces no tenemos nada que demostrar. Si  $\mathcal{C}_{ad} \subsetneq \mathcal{C}$ , entonces  $\mathcal{C}$  es una  $U(\mathcal{C})$ -extensión de su subcategoría adjunta  $\mathcal{C}_{ad}$ , donde  $U(\mathcal{C})$  denota el grupo graduado universal de  $\mathcal{C}$ . Como  $\mathcal{C}$  es trenzada, entonces el grupo  $U(\mathcal{C})$  es abeliano.

Podemos asumir inductivamente que  $\mathcal{C}_{ad}$  es débilmente de tipo grupo (respectivamente resoluble), y entonces  $\mathcal{C}$  es débilmente de tipo grupo (respectivamente resoluble), en vista de la Proposición 2.4.8.

Por lo tanto, podemos asumir que  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ad}$ . En particular,  $\mathcal{C}$  es íntegra y no punteada. Más aún, podemos también asumir que el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  consiste de al menos dos puntos aislados; en otro caso las dimensiones de Frobenius-Perron de los objetos simples de  $\mathcal{C}$  son potencias de un número primo fijo y el resultado sigue del Teorema 6.3.1.

Vamos a demostrar que  $\mathcal{C}$  contiene una subcategoría tannakiana no trivial  $\mathcal{E}$ . Supongamos que no. Supongamos además que  $\mathcal{C}$  es no degenerada. Como  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{ad}$ , entonces  $\mathcal{C}_{pt} = \text{Vec}$ , la Proposición 6.1.7 implica que el grafo  $\Delta(\mathcal{C})$  es conexo, lo cual contradice la hipótesis de que  $\Delta(\mathcal{C})$  tiene por lo menos dos vértices aislados.

Si, por otro lado,  $\mathcal{C}$  contiene una subcategoría de fusión propia no trivial y no-degenerada  $\mathcal{D}$ , entonces  $\mathcal{C} \cong \mathcal{D} \boxtimes \mathcal{D}'$ . Como  $\text{FPdim } \mathcal{D}, \text{FPdim } \mathcal{D}' < \text{FPdim } \mathcal{C}$ , entonces sigue por inducción que  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}'$  son ambas débilmente de tipo grupo, luego  $\mathcal{C}$  también es débilmente de tipo grupo.

Análogamente, si  $\mathcal{C}$  satisface (a) o (b), entonces también lo satisfacen las subcategorías  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}'$ . Luego  $\mathcal{D}$  y  $\mathcal{D}'$  son resolubles por hipótesis inductiva, y luego  $\mathcal{C}$  es resoluble también.

Supongamos ahora que  $\mathcal{C}$  no contiene subcategorías Tannakianas no triviales (o subcategorías no-degeneradas). En este caso, el Lema 2.6.6 implica que la categoría  $\mathcal{C}$  es ligeramente degenerada. Como  $\Delta(\mathcal{C})$  consiste de al menos dos puntos aislados, entonces  $\mathcal{C}$  tiene un objeto simple de dimensión una potencia de  $p$  para algún primo impar  $p$ . La Proposición 2.6.4 implica que en este caso  $\mathcal{C}$  posee subcategorías Tannakianas no triviales, lo cual contradice la hipótesis.

Con esto queda demostrado que la categoría  $\mathcal{C}$  tiene una subcategoría tannakiana no trivial  $\mathcal{E}$ . Entonces  $\mathcal{E} \cong \text{Rep } G$  para algún grupo finito  $G$ .

Como  $\mathcal{C}$  contiene  $\text{Rep } G$  como subcategoría tannakiana, entonces la categoría  $\mathcal{C}$  es una equivariantización de una categoría de fusión trenzada  $G$ -cruzada  $\mathcal{C}_G$ .

Como  $\text{FPdim } \mathcal{C}_G^0 \leq \text{FPdim } \mathcal{C}_G = \text{FPdim } \mathcal{C}/|G| < \text{FPdim } \mathcal{C}$  y  $\mathcal{C}_G^0$  es una categoría de fusión trenzada, entonces por hipótesis inductiva tenemos que  $\mathcal{C}_G^0$  es débilmente de tipo grupo. Entonces la Proposición 2.7.2 implica que  $\mathcal{C}$  es débilmente de tipo grupo.

Más aún, si  $\mathcal{C}$  satisface las condiciones (a) o (b), entonces también la categoría  $\mathcal{C}_G$  satisface estas condiciones (esta categoría no es necesariamente trenzada). Lo mismo ocurre para la subcategoría de fusión  $\mathcal{C}_G^0 \subseteq \mathcal{C}_G$ .

Entonces  $\mathcal{C}_G^0$  es resoluble por inducción.

Por otro lado, la condición (a) implica que el grafo primo  $\Delta(G)$  consiste de a lo sumo dos puntos aislados, mientras que la condición (b) implica que las componentes conexas del grafo  $\Delta(G)$  son  $\{p_1\}, \dots, \{p_r\}$ , donde  $p_i \neq 2, 3, 5$  o  $7$ , para todo  $i = 0, \dots, r$ .

En cualquier caso, tenemos que el grupo  $G$  es resoluble, por la Observación 3.2.10. Nuevamente usando la Proposición 2.7.2, tenemos que la categoría  $\mathcal{C}$  es resoluble.

Con esto concluimos la demostración del teorema.





## Bibliografía

- [1] G. Alfandary, *On graphs related to conjugacy classes of groups*, Isr. J. Math. **86**, 211–220 (1994).
- [2] B. Bakalov, A. Kirillov Jr., *Lectures on tensor categories and modular functors*, University Lecture Series **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2001.
- [3] E. Bertram, M. Herzog, A. Mann, *On a graph related to conjugacy classes of groups*, Bull. Lond. Math. Soc. **22**, 569–575 (1990).
- [4] K. Brown *Cohomology of Groups*, Graduate Texts in Mathematics **87**, Springer-Verlag, 1982.
- [5] A. Bruguières, *Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3*, Math. Ann. **316**, 215–36 (2000).
- [6] A. Bruguières, S. Burciu, *On normal tensor functors and coset decompositions for fusion categories*, Appl. Categor. Struct. (2014) DOI 10.1007/s10485-014-9371-x.
- [7] A. Bruguières, S. Natale, *Exact sequences of tensor categories*, Int. Math. Res. Not. **2011**, 5644–5705 (2011).
- [8] A. Bruguières, S. Natale, *Central exact sequences of tensor categories, equivariantization and applications* J. Math. Soc. Japan **66**, 257–287 (2014).
- [9] S. Burciu, S. Natale, *Fusion rules of equivariantizations of fusion categories*, J. Math. Phys. **54**, 013511 (2013).
- [10] P. Bruillard, C. Galindo, S.-M. Hong, Y. Kashina, D. Naidu, S. Natale, J. Plavnik, E. Rowell, *Classification of integral modular categories of Frobenius-Perron dimension  $pq^4$  and  $p^2q^2$* , Can. Math. Bull. **57**, 721–734 (2014).
- [11] A. R. Camina, R. D. Camina, *The influence of conjugacy class sizes on the structure of finite groups: a survey*, Asian-Eur. J. Math. **4**, 559–588 (2011).
- [12] C. Casolo, S. Dolfi, *The diameter of a conjugacy class graph of finite groups*, Bull. Lond. Math. Soc. **28**, 141–148 (1996).
- [13] A. Davydov, M. Mueger, D. Nikshych, V. Ostrik, *The Witt group of non-degenerate braided fusion categories*, J. Reine Angew. Math. **677**, 135–177 (2013).
- [14] P. Deligne, *Catégories tensorielles*, Mosc. Math. J. **2**, 227–248 (2002).
- [15] R. Dijkgraaf, V. Pasquier, Ph. Roche, *Quasi-Quantum Groups Related to Orbifold Models*, Proceedings of the “International Colloquium on Modern Quantum Field Theory”, Tata Institute of Fundamental Research, 375–383 (1990).
- [16] J. Dong, S. Natale, L. Vendramin, *Frobenius property for fusion categories of small integral dimension*, J. Algebra Appl. **14**, 1550011 (2015).
- [17] V. G. Drinfel’d, *Quasi-Hopf algebras* (English translation), Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419–1457.

- [18] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Group-theoretical properties of nilpotent modular categories*, preprint [arXiv:0704.0195](https://arxiv.org/abs/0704.0195) (2007).
- [19] V. Drinfeld, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *On braided fusion categories I*, *Sel. Math. New Ser.* **16**, 1–119 (2010).
- [20] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik, *Tensor Categories*, Lecture notes of the MIT course 'Tensor categories' by P. Etingof, <http://www-math.mit.edu/etingof/tenscat.pdf>
- [21] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *On fusion categories*, *Ann. Math* **162**, 581–642 (2005).
- [22] P. Etingof, D. Nikshych, V. Ostrik, *Weakly group-theoretical and solvable fusion categories*, *Adv. Math* **226**, 176–205 (2011).
- [23] P. Etingof, V. Ostrik, *Finite tensor categories*. *Mosc. Math. J.* **4**, 627–654 (2004).
- [24] P. Freyd, *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*, Harper's Series in Modern Mathematics (1964), Harper and Row, New York-Evanston-London.
- [25] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, A.M.S. Chelsea Publishing (1998), Providence, RI.
- [26] S. Gelaki, D. Naidu, D. Nikshych *Centers of graded fusion categories*, *Algebra Number Theory* **3**, 959–990 (2009).
- [27] S. Gelaki, D. Nikshych, *Nilpotent fusion categories*, *Adv. Math.* **217**, 1053–1071 (2008).
- [28] T. Hungerford, *Algebra*, Graduate Texts in Mathematics **73**, Springer Verlag, New York, 1973.
- [29] B. Huppert, *Endliche Gruppen I, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **134**, Springer-Verlag, Berlin, 1967.
- [30] M. Isaacs, *Character theory of finite groups*, Academic Press, New York, 1976.
- [31] M. Isaacs, *Coprime group actions fixing all nonlinear irreducible characters*, *Can. J. Math.* **41**, 68–82 (1989).
- [32] M. Isaacs, C. Praeger, *Permutation group subdegrees and the common divisor graph*, *J. Algebra* **159**, 158–175 (1993).
- [33] N. Ito, *On the degrees of irreducible representations of a finite group*, *Nagoya Math. J.* **3**, 5–6 (1951).
- [34] *Braided Tensor Categories*, *Adv. Math.* **102**, 20–78 (1993).
- [35] C. Kassel, *Quantum Groups*, Graduate Texts in Mathematics **155**. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [36] L. Kazarin, *On groups with isolated conjugacy classes*, *Sov. Math.* **25**, 43–49 (1981); translation from *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.* 1981, (230) 40–45 (1981).
- [37] M. Lewis, *An overview of graphs associated with character degrees and conjugacy class sizes in finite groups*, *Rocky Mountain J. Math.* **38**, 175–211 (2008).
- [38] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*. Springer, Graduate Texts in Mathematics, **5**. Springer-Verlag, New York, (1971).
- [39] S. Majid, *Quantum double for quasi-Hopf algebras*, *Lett. Math. Phys.* **45** (1998), 1–9.
- [40] O. Manz, *Degree Problems II:  $\pi$ -separable character degrees*, *Commun. Algebra* **13**, 2421–2431 (1985).

- [41] O. Manz, R. Staszewski, W. Willems, *The number of components of a graph related to character degrees*, Proc. Amer. Math. Soc. **103**, 31–37 (1988).
- [42] O. Manz, W. Willems, T. Wolf, *The diameter of the character degree graph*, J. Reine Angew. Math. **402**, 181–198 (1989).
- [43] O. Manz, T. Wolf, *Representations of solvable groups*, London Math. Soc. Lect. Not. Ser. **185**, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [44] G. Mason, S. Ng, *Group cohomology and gauge equivalence of some twisted quantum doubles*, Trans. Amer. Math. Soc, **353**, 3465–3509 (2001).
- [45] G. Michler, *A finite simple group of Lie type has  $p$ -blocks with different defects,  $p \neq 2$* , J. Algebra **104**, 220–230 (1986).
- [46] B. Mitchell, *The full imbedding theorem*, Amer. J. Math. **86**, 619–637 (1964).
- [47] M. Müger, *Galois theory for braided tensor categories and the modular closure*, Adv. Math. **150**, 151–201 (2000).
- [48] M. Müger, *From subfactors to categories and topology. I. Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories*, J. Pure Appl. Algebra **180** (2003), No. 1-2, 81-157.
- [49] M. Müger, *Galois extensions of braided tensor categories and braided crossed  $G$ -categories*, J. Algebra **277**, 256–281 (2004).
- [50] D. Naidu *Crossed pointed categories and their equivariantizations*, Pacific Journal of Mathematics **210**, 477–496 (2010).
- [51] D. Naidu, D. Nikshych, S. Witherspoon *Fusion subcategories of representation categories of twisted quantum doubles of finite groups*, Int. Math. Res. Not. **22**, 4183–4219 (2009).
- [52] D. Naidu, E. Rowell, *A finiteness property for braided fusion categories*, Algebr. Represent. Theory **14**, 837–855 (2011).
- [53] S. Natale, *Hopf algebra extensions of group algebras and Tambara-Yamagami categories*, Algebr. Represent. Theory **13**, 673–691 (2010).
- [54] S. Natale, *On weakly group-theoretical non-degenerate braided fusion categories*, to appear in J. Noncommut. Geom. Preprint [arXiv:1301.6078](https://arxiv.org/abs/1301.6078).
- [55] S. Natale, *Faithful simple objects, orders and gradings of fusion categories*, Algebr. Geom. Topol. **13**, 1489–1511 (2013).
- [56] S. Natale y E. Pacheco Rodríguez, *Graphs attached to simple Frobenius-Perron dimensions of an integral fusion category*, Monatsh. Math. DOI 10.1007/s00605-015-0734-7 (2015). Preprint [arXiv:1403.1247](https://arxiv.org/abs/1403.1247).
- [57] V. Ostrik, *Module categories over the Drinfeld double of a finite group*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2003**, 1507–1520 (2003).
- [58] D. Robinson, *A course in the theory of groups*, Graduate Texts in Mathematics **80**, Springer Verlag, New York (1996).
- [59] D. Tambara, *Invariants and semi-direct products for finite group actions on tensor categories*, J. Math. Soc. Japan **53**, 429–456 (2001).
- [60] D. Tambara, S. Yamagami, *Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups*, J. Algebra **209**, 692–707 (1998).

- [61] V. Turaev, *Crossed group-categories*, Arabian Journal for Science and Engineering **33**, 484–503 (2008).
- [62] V. Turaev, *Homotopy field theory in dimension 3 and crossed group-categories*, preprint [arXiv:math/0005291](https://arxiv.org/abs/math/0005291) (2000).
- [63] V. Turaev, *Homotopy quantum field theory*, EMS Tracts in Mathematics **10**, European Mathematical Society, Zürich, 2010.
- [64] V. Turaev, *Quantum invariants of knots and 3-manifolds*, de Gruyter Studies in Math. **18**, Berlin, 1994.
- [65] W. Willems, *Blocks of defect zero and degree problems*, Proc. Sympos. Pure Math. **47** (I), 481–484, Amer. Math. Soc, Providence, R. I., 1987.
- [66] T. Yuster, *Orbit sizes under automorphism actions in finite groups*, J. Algebra **82**, 342–352 (1983).