FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA Y FÍSICA-UNC

ACOTACIÓN DE OPERADORES INTEGRALES, DADOS POR UN NÚCLEO A VALORES VECTORIALES QUE SATISFACE UNA CONDICIÓN DE TIPO HÖRMANDER Y APLICACIONES

TRABAJO ESPECIAL DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICA

ANDREA LILÉN GALLO

Dirigida por:
Dra. MARIA SILVINA RIVEROS

CÓRDOBA-ARGENTINA

-2015-

PALABRAS CLAVES:

- Operadores Integrales
- Condiciones Hörmander
- Operador Cuadrado
- Maximal de Hardy-Littelwood
- Pesos

RESUMEN:

El principio de Calderón-Zygmund "asegura" que toda integral singular está acotada en normas $L^p(w)$, con w un cierto peso, por un operador maximal apropiado. Para integrales singulares de Calderón-Zygmund (con núcleo satisfaciendo la condición de Lipschitz) este es el resultado clásico de Coifman: el operador que controla en normas p's es la maximal de Hardy-Littlewood. Para integrales singulares con núcleo no tan suave, por ejemplo con núcleo en H_r, el operador maximal que controla es $M_{r'}$, que resulta mayor que el de Hardy-Littlewood.

En este trabajo se definen condiciones que debe satisfacer un núcleo K de una integral singular a valores vectoriales, es decir cuando $K \in H^{\dagger}_{A,X}$. y a partir de esta condición se prueba que el operador maximal que controla en normas p ´s es el $M_{\bar{A}}$. Como aplicación de este resultado estudiamos el operador cuadrado.

CLASIFICACIÓN: 47G10 – Integral Operators

AUTOR: Andrea Lilén Gallo, con fecha de nacimiento el 24 de diciembre de 1988 en Córdoba-Argentina.

DIRECTORA: Dra. María Silvina Riveros, con fecha de nacimiento el 26 de setiembre de 1967 en Córdoba-Argentina. Filiación: Profesor Asociado Dedicación Exclusiva.

AGRADECIMIENTOS:

A la UNC, institución a la cual agradezco por ser una de las pocas universidades del mundo que nos permite a todos los habitantes, argentinos o extranjeros, estudiar de forma libre y gratuita, ampliando el horizonte de posibilidades a todos los que de otra forma no podríamos obtener un título, o, simplemente, estudiar lo que nos gusta.

Al Programa Nacional de Becas Universitario (PNBU), en particular, al plan de Becas Bicentenario (BB), que facilitó mi permanencia, y la de muchos otros, en la universidad durante los seis años de trayectoria.

A mi directora del Trabajo Especial, la Dra. M. Silvina Riveros, por su paciencia y predisposición; por su optimismo y gran dedicación.

Al grupo de Análisis, en particular a la Dra. Linda Saal y Dra. Marta Urciuolo, por aceptar ser parte del tribunal.

A mis abuelos: Osorio y Rosa, y a mis tios Laura y Gabriel, porque siempre estuvieron para lo que necesitara y porque los quiero.

A mis viejos Carlos y Sonia, a mis hermanos Pablito y Titi, y a mi compañero de todos los días, Damián, ellos son parte de este logro, apoyándome en lo cotidiano, con ellos cuento siempre.

A mis compañeros, en particular a Day, Leo, Gon y Agus, con los que compartí gran parte de la carrera.

A mis amigos, que son como mi familia: Eva, Aye, Emi, y a los que alegran mis semanas con las famosas guitarreadas, Leo, Giuli y la Garza.

A todos ellos y los que formaron parte de este gran logro ¡MUCHAS GRACIAS!

Índice general

Introducción

Consideremos T una aplicación definida de un $\mathbb{K}$-espacio vectorial A en otro $\mathbb{K}$-espacio vectorial B, donde $\mathbb{K}$ es $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. En este trabajo consideraremos A y B espacios vectoriales normados, cuyos elementos son funciones definidas en $\mathbb{R}^n$.

En el caso particular en que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ una aplicación $T : A \rightarrow\ B$ se dice sublineal si satisface:

$$T(cr + s)(x) \leq |c|T(r)(x) + T(s)(x),$$

para todo $c \in \mathbb{R}$, para todo $r, s \in A$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Un operador T será una aplicación lineal o sublineal de A en B, según el caso.

Surge entonces una pregunta que es muy recurrente en el análisis: ¿cuándo un operador T es acotado? En lo que sigue intentaremos responder esta inquietud para cierto tipo de operadores.

Consideraremos operadores de la forma:

$$T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow\ X\},\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

con $(X = \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}, ||\cdot||_{\mathbf{x}})$ espacio de Banach.
En particular nos dedicaremos a los Operadores Integrales Singulares (OIS), los cuales vienen dados por el valor principal (v.p.) de la convolución con una función K que toma valores en $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ y tiene a lo sumo una singularidad en el origen, es decir T será de la forma:

$$\begin{aligned} Tf(x) &= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy \\ &= \left\{ v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K_n(x-y)f(y)dy \right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

A la función K asociada al operador T la llamaremos núcleo.

Estudiaremos las condiciones que debe cumplir el núcleo K para que el operador T esté acotado por composiciones de un cierto operador M llamado Maximal de Hardy-Littlewood, o por operadores que surgen de generalizar este operador maximal.

Algunos Resultados Conocidos...

Dada K una función definida de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ decimos que K satisface la condición de Lipschitz (diremos $K \in H^*_\infty$) si: existen $\alpha > 0$ y $C > 0$ tales que:

$$|K(x-y) - K(-y)| \leq C\frac{|x|^\alpha}{|y|^{\alpha+n}},\ \text{cada vez que } |y| > 2|x|.$$

Sea T un operador integral singular, donde el núcleo K tiene transformada de Fourier acotada y satisface la condición de Lipschitz. Un resultado clásico de Coifman [**2**], afirma que para este tipo de operador T, vale:

para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p w(x)\, dx, \qquad (1)$$

para toda f tal que el lado izquierdo sea finito, donde Mf es la función maximal de Hardy-Littlewood asociada a f. Definiremos qué quiere decir $w \in A_\infty$ más adelante, en el desarrollo de este trabajo.

Posteriormente Martell, Pérez y Trujillo en [**10**] probaron que la desigualdad (1) falla si el núcleo K satisface, en vez de la condición de Lipschitz, una condición más débil llamada condición de Hörmander definida como sigue:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{|y|>2|x|} |K(x-y) - K(-y)|\, dy < \infty. \qquad (H_1)$$

Además prueban que (1) falla cuando el núcleo K satisface cierta condición intermedia entre H_∞^* y H_1. Estas son las condiciones L^r-Hörmander que se definen a continuación:

Definición H_r : Sea $1 \leq r \leq \infty$, decimos que el núcleo K satisface la condición L^r-Hörmander si existen números $c_r > 1$ y $C_r > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $R > c_r|x|$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \left(\frac{1}{(2^m R)^n} \int_{2^m R < |y| \leq 2^{m+1} R} |K(x-y) - K(-y)|^r\, dy \right)^{\frac{1}{r}} \leq C_r,$$

si $r < \infty$, (en tal caso se dice que $K \in H_r$), y

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \sup_{2^m R < |y| \leq 2^{m+1} R} |K(x-y) - K(-y)| \leq C_\infty,$$

si $r = \infty$ (en tal caso se dice que $K \in H_\infty$).

Observemos que estas clases satisfacen las siguientes inclusiones:

$$H_\infty \subset H_r \subset H_s \subset H_1, \quad 1 < s < r.$$

En [**12**] se prueba el siguiente teorema:

Teorema[**12**]: *Sea $1 < r \leq \infty$. Supongamos que el operador T está acotado en algún L^{p_0}, con $1 < p_0 < \infty$, y que el núcleo $K \in H_r$, entonces para todo p con $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$ existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{r'} f(x))^p\, w(x)\, dx,$$

siembre que el lado izquierdo sea finito.

Se ve, además, que el operador maximal M_t definido por $M_t f(x) = (M|f|^t(x))^{\frac{1}{t}} \geq Mf(x)$ para todo $t \geqslant 1$.

Nos preguntamos entonces:

¿Qué sucede entre H_∞ y la intersección de todas las H_r, $1 \leq r < \infty$?

Más precisamente: ¿habrá algún núcleo que esté en H_r para todo $r > 1$ y no pertenezca a H_∞?

Para tal núcleo , si existe alguno, el mejor resultado conocido hasta ese momento es la desigualdad esperada:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_t f(x))^p\, w(x)\, dx, \quad (2)$$

para $1 < t$.

Ahora, como ese núcleo no está en H_∞ no podemos afirmar que se cumpla:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (Mf(x))^p\, w(x)\, dx.$$

Esto, de todas manera, no excluye que el operador satisfaga una desigualdad del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_A f(x))^p\, w(x)\, dx, \quad (3)$$

donde M_A es algún operador maximal tal que $Mf(x) \leq M_A f(x) \leq M_t f(x)$ para toda función f y todo $t > 1$.

En [**8**] se prueba que el Operador Cuadrado S definido para toda f con dominio en $\mathbb{R}$ por la siguiente fórmula:

$$Sf(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

donde

$$A_n f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{x-2^n}^{x+2^n} f(y) dy,$$

es un ejemplo que satisface (2) para todo $t > 1$ y en ese artículo se encuentra un operador adecuado M_A más pequeño que M_t para todo $t > 1$ para el cual vale (3).

Con el fin de estudiar estas desigualdades primero introduciremos conceptos necesarios tales como: espacios de Banach, Maximal de Hardy-Littelwood, pesos, funciones de Young y normas Luxemburgo y algunas nociones de operadores acotados.

Luego definiremos una nueva condición para el núcleo K ($K \in H^\dagger_{A,X}$) que nos permitirá deducir resultados similares a los conocidos pero mediante los cuales se puedan mejorar las cotas obtenidas para algunos ejemplos particulares.

Finalmente analizaremos detalladamente el operador S y compararemos la acotación obtenida con las propuestas en otros artículos.

Capítulo 1

Preliminares

1. Espacios de Banach y Operadores Acotados

Definición 1.1. Dado $\mathbf{X}$ espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, una norma sobre $\mathbf{X}$ es una función $\|.\|_{\mathbf{x}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:
1. $\|y\|_{\mathbf{x}} \geqslant 0$ y $\|y\|_{\mathbf{x}} = 0$ si y sólo si $y = 0$
2. $\|cy\|_{\mathbf{x}} = |c|\|y\|_{\mathbf{x}}$
3. $\|z + y\|_{\mathbf{x}} \leqslant \|z\|_{\mathbf{x}} + \|x\|_{\mathbf{x}}$.

Esta norma induce una métrica $d(y, z) = ||y - z||_{\mathbf{x}}$ y llamamos al par $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{x}})$ espacio normado.

Definición 1.2. Un **Espacio de Banach** es un par $(\mathbf{X}, \|.\|_{\mathbf{x}})$ normado cuya métrica inducida es completa.

Ejemplo 1.3. Espacios de Banach:
1. $L^p(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p < \infty\}$ con $\|f\|_{\mathbf{x}} = (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p)^{\frac{1}{p}} := ||f||_p$, para $1 \leqslant p < \infty$.
2. $L^\infty(\mathbb{R}^n)$:=$\{f$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: $\text{supess}_{x \in \mathbb{R}^n} |f(x)| < \infty\}$, con $\|f\|_{\mathbf{x}}$=supess$|f(x)|$=$||f||_\infty$.
3. $\ell^p(\mathbb{R}^n) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \sum_{i\in\mathbb{Z}} |x_i|^p < \infty\}$, con $\|(x_i)\|_{\mathbf{x}} = (\sum_i |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} := ||(x_i)||_p$, para $1 \leq p < \infty$.
4. $\ell^\infty(\mathbb{R}^n) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{Z}} : \sup_{i\in\mathbb{Z}} |x_i| < \infty\}$, con $\|(x_i)\|_{\mathbf{x}} = \sup_i |x_i| := ||(x_i)||_\infty$

1.1. Algunas Nociones de Operadores Acotados.

De aquí en mas el espacio $\mathbf{X}$ será $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$, es decir el espacio vectorial de las sucesiones. $||.||_{\mathbf{x}}$ será alguna norma definida en el espacio de sucesiones $\mathbf{X}$, por ejemplo las normas p, con $1 \leq p \leq \infty$, o la norma Luxemburgo dada por alguna función de Young con la cual $(X, || \cdot ||_{\mathbf{x}})$ es un espacio de Banach. Además Q será un cubo en $\mathbb{R}^n$ y c una constante positiva que cambia renglón a renglón.

A continuación se presentarán dos definiciones de operadores acotados.

Definición 1.4. Sean $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leq q \leq \infty$, y T un operador definido de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en el espacio de las funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ que toman valores en el espacio de Banach $(\mathbf{X}, ||.||_{\mathbf{x}})$, entonces:

- T **se dice de tipo fuerte** (p, q) si y sólo si, existe c>0 tal que,
$$\|\|Tf\|_{\mathbf{x}}\|_q \leqslant c\|f\|_p,$$
para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

- T **se dice de tipo débil** (p,q) si y sólo si, existe c>0 tal que,

$$|\{x : \|Tf(x)\|_{\mathbf{X}} > t\}| \leqslant c\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q,$$

para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

En el caso particular de un operador $T : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, es decir $\mathbf{X} = \mathbb{R}$ o $\mathbf{X} = \mathbb{C}$ tenemos que para toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$:
T es de tipo fuerte (p,q) si y sólo si, existe $c > 0$ tal que, $\|Tf\|_q \leqslant c\|f\|_p$ y
T es de tipo débil (p,q) si y sólo si, existe $c > 0$ tal que, $|\{x : |Tf(x)| > t\}| \leqslant c\left(\frac{\|f\|_p}{t}\right)^q$.

Observación 1.5. Se prueba que si un operador es de tipo fuerte (p,q) entonces es de tipo débil (p,q). Para hacer la prueba sólo hay que usar la desigualdad de Tchebycheff.

2. Operadores Maximales y la Clase de Pesos de Muckenhoupt

A continuación se define un caso particular de un operador sublineal:
Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $x \in \mathbb{R}^n$, definimos:

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|\, dy.$$

A M se lo denomina el operador **Maximal de Hardy-Littelwood**, y es una herramienta muy útil dentro del análisis armónico.

Observación 1.6. El operador M satisface las siguientes propiedades:

1. M es sublineal.
2. M es semicontinua inferiormente.
3. $f(x) \leqslant Mf(x)$, para casi todo $x \in \mathbb{R}$ (por el Teorema de diferenciación de Lebesgue).
4. M es de tipo fuerte (∞, ∞) para toda $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (esto se prueba trivialmente).
5. M es de tipo débil (1,1) para toda $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$(para este inciso hay que usar algún lema de cubrimiento).
6. M es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p \leqslant \infty$. Esta afirmación se deduce usando el Teorema de Interpolación de Marzinkiewicz y los dos incisos anteriores.

Para mas información ver [**3**] y [**4**].

Al operador M se lo generaliza a una familia de operadores M_r como se muestra a continuación:

Definición 1.7. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y $r \geq 0$ definimos

$$M_r f(x) := (M(f)^r(x))^{\frac{1}{r}} = \sup_{Q \ni x} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)|^r dy \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Observar que si $1 \leqslant r < \infty$, por la desigualdad de Hölder, se tiene que $Mf(x) \leqslant M_r f(x)$.

Antes de definir el último operador maximal, el operador $M^\sharp$, definamos que será para nosotros una función peso w.

Definición 1.8. Dada una función w, diremos que es un **peso** si w es positiva y localmente integrable.

Definición 1.9. Dado w peso diremos que:

- w es un peso de la clase A_p, $1 < p < \infty$, si para todo cubo Q,
$$\left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)\, dy \right) \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q w(y)^{\frac{-1}{p-1}}\, dy \right)^{p-1} \leq C_p,$$
con C_p independiente de Q.
- w es un peso de la clase A_1 si
$$Mw(x) \leq C_1 w(x) \qquad p.p. x \in \mathbb{R}^n,$$

con C_1 independiente de x.
Definimos además la clase A_∞ como $A_\infty = \bigcup_{p \geq 1} A_p$.

Se prueba que:

Teorema 1.10. *Dada w una función positiva localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ y M la función maximal de Hardy-Littlewood, entonces son equivalentes:*

- *w es un peso de la clase A_p con $1 \leq p < \infty$.*
- *M es de tipo débil débil (p, p) en medida $w(x)dx$.*

Si consideramos $p > 1$ son equivalentes:

- *w es un peso de la clase A_p con $1 < p < \infty$.*
- *M es de tipo fuerte (p, p) en medida $w(x)dx$.*

Observación 1.11. Si K es el núcleo de un operador integral singular con $K \in H_r$ con $r \geqslant 1$, y $w \in A_\infty$, la desigualdad (2) nos dice:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{r'} f(x))^p\, w(x)\, dx,$$

Observemos que resulta $r' > 1$.

Además $w \in A_\infty$ implica que $w \in A_{p_0}$ para algún $p_0 > 1$. Sea p tal que $\frac{p}{r'} = p_0$, entonces la desigualdad se puede continuar (por el teorema anterior) como sigue:

$$\begin{aligned} C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{r'} f(x))^p w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (M|f|^{r'}(x))^{\frac{p}{r'}} w(x) dx \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} (|f|^{r'})^{\frac{p}{r'}}(x) w(x) dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x) w(x) dx. \end{aligned}$$

Concluimos que T es de tipo fuerte (p,p) en medida $w(x)dx$ para $p = p_0 r'$.

Consideremos ahora el caso en que K es el núcleo de un operador integral con $K \in \cap_{r \geq 1} H_r$ y $w \in A_\infty$, entonces la desigualdad anterior se sigue con $p = p_0 r'$ para todo $r' > 1$.

Concluímos que T es de tipo fuerte (p,p) en medida $w(x)dx$ para todo $p > p_0$ con p_0 tal que $w \in A_{p_0}$.

Definición 1.12. Dada $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos el **Operador Sharp** como sigue:

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x \in Q} \inf_{a \in \mathbb{R}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - a|\, dy$$

Este operador está controlado puntualmente por un múltiplo de la maximal de Hardy-Littlewood, más concretamente, $M^\sharp f(x) \leq 2Mf(x)$.
El siguiente teorema nos dá la otra desigualdad pero en normas p's (ver [**5**]) .

Teorema 1.13 (Teorema Sharp). *Sea $w \in A_\infty$, $0 < p < \infty$. Existe $c > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Mf|^p w \leqslant \; c \int_{\mathbb{R}^n} |M^\sharp f|^p w$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

3. Funciones de Young y Normas Luxemburgo

Una función $B : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ es una **Función de Young** si B es continua, convexa, no decreciente, satisface $B(0) = 0$ y $B(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$.
Se define la **norma Luxemburgo** de una función f inducida por una tal B función de Young de la siguiente manera:

$$\|f\|_B = \inf\{\lambda > 0 : \int_{\mathbb{R}} B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leqslant 1\}.$$

El promedio de la norma Luxemburgo de f en el cubo Q viene dado por:

$$\|f\|_{B,Q} = \inf\{\lambda > 0 : \frac{1}{|Q|} \int_Q B\left(\frac{|f|}{\lambda}\right) \leqslant 1\}.$$

Se denota por $\overline{B}$ a la función de Young complementaria a B que satisface la siguiente desigualdad de Hölder generalizada:

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |fg| \leqslant \|f\|_{B,Q} \; \|g\|_{\overline{B},Q}.$$

Para $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ se define el operador Maximal asociado a la función de Young B como:

$$M_B f(x) = \sup_{Q \ni x} \|f\|_{B,Q}.$$

Ejemplo 1.14.

1. $B(t) = t^p,\ 1 \leqslant p < \infty$, $\overline{B}(t) = t^{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ con $\|f\|_B = \|f\|_p$ y por lo tanto $M_B f(x) = M_p f(x)$.
2. Si $B(t) = \exp\left(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right) - 1$ con $\varepsilon \geqslant 0$, entonces $\overline{B} = t\,(1 + log(t))^{1+\varepsilon}$.

Observación 1.15. Si $k \in \mathbb{N}$, se puede probar que el operador $M_{L(1+logL)^k}$ es puntualmente equivalente a (k+1) veces iteraciones del operador M, es decir, a

$$\underbrace{M \circ \cdots \circ M}_{k+1} = M^{k+1}.$$

Más aún se tiene:

$$Mf(x) \leqslant c\ M_{L(logL)^k} f(x) \leqslant c\ M_r f(x),\ \forall k > 0,\ r > 1.$$

Para mas detalles ver [**1**] y [**11**].

Observación 1.16. Dada una función de Young A y (Ω, β, μ) un espacio de medida se puede generalizar la norma Luxemburgo de funciones definidas en Ω que se encuentran en un espacio denotado por L_A definido como sigue:

$L_A := \cup_{0<a<\infty} S_{A,a}$, con $S_{A,a} := \{f : \int_\Omega A(|f|)d\mu \leq a\}$.

Se prueba que:

$$||f||_{A,a} := \text{ínf}\{\rho > 0\ :\ \int_\Omega A\left(\frac{|f|}{\rho}\right)\ d\mu \leq a\}$$

define una norma completa en L_A para todo $a \in [0, \infty)$. Más aún todas las normas $||\cdot||_{A,a}$ son equivalentes para todo a.

En particular si consideramos $\Omega = \mathbb{Z}$, $d\mu$ la medida de contar, entonces queda definida una familia de normas Luxemburgo en $\mathbb{K}^{\mathbb{Z}}$ asociadas a la función de Young A (definiendo como $||f||_{A,a} = \infty$ si $f \notin L_A$). A Denotaremos a $||\cdot||_{A,a}$ como $||\cdot||_A$ para todo a. De esta manera, $(x, ||\cdot||_A)$ resulta espacio de Banach. (Ver [**14**] .)

4. Operadores Integrales Singulares (OIS)

En esta sección definiremos un caso particular de operador a valores vectoriales: los Operadores Integrales Singulares (OIS). Para ello comencemos definiendo algunas condiciones de tipo Hörmander.

La siguiente definición fue dada en el trabajo [**8**]. Ahí los autores generalizan la clásica condición de Hörmander o de Dini.

Definición 1.17. Sea K una función a valores vectoriales y A una función de Young, entonces:

1. K satisface la condición $L^{A,X}$-Hörmander si existen $c_A > 1$ y $C_A > 0$ tales que para cada x y $R > c_A|x|$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n\ \|\|K(x-\cdot) - K(-\cdot)\|_{\mathbf{x}}\ \chi_{\{2^m R<|y|<2^{m+1}R\}}(\cdot)\|_{A,B(0,2^{m+1}R)} \leqslant C_A.$$

ó, equivalentemente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, K satisface la condición $L^{A,X}$-Hörmander centrada en x_0 si existen $c_A > 1$ y $C_A > 0$ tales que para cada x y $R > c_A|x - x_0|$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \, \| \|K((x-x_0)-\cdot) - K(-\cdot)\|_{\mathbf{x}} \, \chi_{\{2^m R<|y-x_0|<2^{m+1}R\}}(\cdot)\|_{A,B(x_0,2^{m+1}R)} \leqslant C_A.$$

Si K satisface la condición $L^{A,X}$-Hörmander se dice que $K \in H_{A,X}$.

2. K satisface la condición $L^{\infty,X}$-Hörmander si existen y $C_\infty > 0$ tal que :

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \sup_{2^m R<|y|\le 2^{m+1}R} ||K(x-y) - K(-y)||_{\mathbf{x}} \le C_\infty.$$

Si K satisface la condición $L^{\infty,X}$-Hörmander se dice que $K \in H_{\infty,X}$.

3. $K \in H_{1,X}$ si existe $C > 0$ tal que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \int_{|y|>2|x|} \|K(x-y) - K(-y)\|_{\mathbf{x}} dy < C \ \forall y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Observación 1.18. Para probar que la dos condiciones en 1. son equivalentes sólo hay que realizar el cambio de variable $\overline{x} = x - x_0$ y $\overline{y} = y - x_0$ en la definición de norma de Young de $\|K((x-x_0)-\cdot) - K(-\cdot)\|_{\mathbf{x}} \, \chi_{\{2^m R<|y-x_0|<2^{m+1}R\}}(\cdot)$.

Observación 1.19. Destaquemos acá como son estas clases. Si A es una función de Young, usando la desigualdad de Hölder, tenemos:

1. $H_{A,X} \subset H_{1,X}$.
2. Además si $A(t) = t^r$ y si denotamos $H_{r,X} = H_{A,X}$, entonces

$$H_{\infty,X} \subset H_{r_2,X} \subset H_{r_1,X} \subset H_{1,X},$$

para todo $1 < r_1 < r_2 < \infty$.

Definiremos ahora un **Operador Integral Singular (OIS)** a valores vectoriales.

Definición 1.20. Consideremos una función K a valores vectoriales, $K(y) = (K_n(y))_{n\in\mathbb{Z}}$, $K_n \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n/\{0\})$. Definimos:

$$\begin{aligned} Tf(x) :&= v.p. \int_{\mathbb{R}^n} K(x-y)f(y)dy = \{v.p.(K_n * f)(x)\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \left\{ v.p. \left(\int_{\mathbb{R}^n} K_n(x-y)f(y)dy \right) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

El operador T será un operador integral singular (OIS) si es fuerte (p_0, p_0), para algún $p_0 > 1$, y el núcleo $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in H_{1,X}$.

Observación 1.21. Las dos hipótesis pedidas al operador T implican que el operador es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p < \infty$. En efecto: supongamos que el operador T es de tipo fuerte (p_0, p_0) para algún $1 < p_0 < \infty$. Usando la clásica descomposición de Calderón-Zygmund (ver Capítulo 3) dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, la podemos descomponer en dos funciones: una buena g, y otra mala b. Para poder probar el tipo débil $(1,1)$, aplicamos el operador a g y a b. Para g usamos que el operador es tipo fuerte (p_0,p_0) y para b usamos el hecho de que $K \in H_{1,X}$. Luego, por interpolación, obtenemos que el operador es de tipo fuerte (p,p) para todo $1 < p \leq p_0$. Por un argumento de dualidad, (T es un operador de convolución dado por el núcleo K por lo tanto autoadjunto) obtenemos que el operador es de tipo fuerte (p,p), para todo $p_0 < p < \infty$.

Como mencionamos en la introducción, el principio de Calderón-Zygmund "asegura" que toda integral singular está acotada en normas $L^p(w)$, $w \in A_\infty$, por un operador maximal apropiado. Para integrales singulares de Calderón-Zygmund (con núcleo satisfaciendo la condición de Lipschitz) este es el resultado clásico de Coifman [**2**]: el operador que controla en norma es el de Hardy-Littlewood. Para integrales singulares con núcleo no tan suave, por ejemplo con núcleo en $H_{r,X}$, el operador maximal que controla es mayor que el de Hardy-Littlewood, es $M_{r'}$ (ver [**6**] y [**12**], donde se generaliza a desigualdad (2) para núcleos a valores vectoriales). En [**8**] los autores generalizan estos resultados probando el siguiente teorema

Teorema 1.22. [**8**] *Sea K un núcleo a valores vectoriales, que satisface la condición $L^{A,X}$-Hörmander y sea T el operador asociado al núcleo K. Supongamos T es de tipo fuerte (p_0,p_0) para algún $p_0 > 1$. Entonces para todo $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, se tiene,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf\|_{\mathbf{x}}^p w \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\overline{A}} f)^p w,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Notemos aquí que la desigualdad (3) se obtiene como un caso particular de este teorema.

Observación 1.23. Las hipótesis pedidas a T y K implican que el operador T es de tipo débil (1,1), esto se deduce por lo comentado en las **Observaciónes** 1.19 y 1.21 (T es de tipo fuerte (p_0,p_0), y $K \in H_{A,X} \subset H_{1,X}$). El tipo débil $(1,1)$ y la condición $H_{A,X}$ que satisface el núcleo son fundamentales para la prueba de este teorema.
Notemos además que un operador que satisfaga las hipótesis del **Teorema** 1.22 es un OIS, pues $K \in H_{A,X} \subset H_{1,X}$.

En la introducción dimos una definición del operador cuadrado S. Seamos más concretos ahora.

Definición 1.24. Sea f medible definida en $\mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ consideramos los promedios $A_n f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{x-2^n}^{x+2^n} f$. El operador cuadrado se define como:

$$Sf(x) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Este operador esta relacionado con el siguiente operador a valores vectoriales:

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \left\{ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2^{n+1}} \chi_{(-2^n,2^n)}(x-y) - \frac{1}{2^n} \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x-y) \right) f(y)dy \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \\ &= \int_{\mathbb{R}} K(x-y)f(y)dy, \end{aligned}$$

donde K es la función sucesión

$$K(x) = \{K_n(x)\}_n = \left\{ \frac{1}{2^{n+1}} \chi_{(-2^n,2^n)}(x) - \frac{1}{2^n} \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x) \right\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Más aún, se probará en el Capítulo 2 que $\|Tf(x)\|_{\ell^2} = Sf(x)$, es decir, que T viene dado por la convolución con un núcleo K a valores vectoriales. Para este operador T el espacio de Banach $(\mathbf{X}, ||.||_{\mathbf{x}})$ a considerar es $(\ell^2(\mathbb{Z}), ||\cdot||_{\ell^2}$. Nos preguntamos ahora si el operador cuadrado S satisface las desigualdades (1), (2) y (3) planteadas en la introducción.
Para resolver este interrogante primero analizaremos que condiciones satisface el núcleo K asociado al operador cuadrado S.

En [**8**] se obtiene trabajando con las clases H_{A,ℓ^2} el siguiente corolario del Teorema anterior:

Corolario 1.25. [**8**] *Sea S el operador cuadrado entonces su núcleo K satisface la condición L^{A,ℓ^2}-Hörmander con $A(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}) - 1$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego para $p > 0$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (||Tf(x)||_{\ell^2})^p w(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} (Sf(x))^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^3 f(x))^p w(x)\, dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Aquí sólo hay que ver que si $A(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}) - 1$, entonces $\overline{A}(t) = t\,(1 + log(t))^{1+\varepsilon}$. Para ε suficientemente pequeño $\overline{A}(t)$ esta acotada por $B(t) = t(1 + log^+(t))^2$ y por lo tanto $M_B f$ es puntualmente equivalente a $(M)^3 f$. El **Corolario** 1.25 se probará en el Capítulo 2.

Posteriormente en [**9**] , los autores logran mejorar con algunas cuentas esta cota trabajando con este operador específicamente y obtienen:

Corolario 1.26. [**9**] *Sea S el operador cuadrado, para $p > 0$ y $w \in A_\infty$ existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (Sf(x))^p w(x)\, dx \leq C \int_{\mathbb{R}} (M^2 f(x))^p w(x)\, dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

En este trabajo introducimos la siguiente definición que es una condición más débil que satisfacerá un núcleo y nos permitirá obtener mejores resultados a los probados en [**8**] y generalizar los de [**9**] para OIS. El **Corolario** 1.26 será una aplicación del resultado que probaremos en los Capítulos 2 y 3 utilizando esta nueva definición.

Definición 1.27. Sea T un operador a valores vectoriales, K el núcleo asociado a T y A una función de Young, entonces:

1. K satisface la condición $L_{\dagger}^{A,X}$-Hörmander si existen $c_A > 1$ y $C_A > 0$ tales que para cada x y $R > c_A\,|x|$ se tiene:

$$\|\{\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^n\,\|(K_n(x-\cdot)-K_n(-\cdot))\,\chi_{\{2^m R<|y|<2^{m+1}R\}}(\cdot)\|_{A,B(0,2^{m+1}R)}\}\|_{\mathbf{x}} \leqslant C_A.$$

ó, equivalentemente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, K satisface la condición $L_{\dagger}^{A,X}$-Hörmander centrada en x_0 si existen $c_A > 1$ y $C_A > 0$ tales que para cada x y $R > c_A|x-x_0|$ se tiene:

$$\|\{\sum_{m=1}^{\infty}(2^m R)^n\,\|(K_n((x-x_0)-\cdot)-K_n(-\cdot))\,\chi_{\{2^m R<|y-x_0|<2^{m+1}R\}}(\cdot)\|_{A,B(x_0,2^{m+1}R)}\}\|_{\mathbf{x}} \leqslant C_A.$$

Si K satisface la condición $L_{\dagger}^{A,X}$-Hörmander se dice que $K \in H_{A,X}^{\dagger}$.

2. $K \in H_{1,X}^{\dagger}$ si existe $C > 0$ tal que:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\|\{\int_{|y|>2|x|}|K_n(x-y)-K_n(-y)|dy\}\|_{\mathbf{x}} \leqslant C.$$

Observación 1.28. En 1., para probar que estas dos condiciones son equivalentes, sólo hay que realizar el cambio de variable $\overline{x} = x - x_0$ y $\overline{y} = y - x_0$ en la definición de norma de Young de $(K_n((x-x_0)-\cdot)-K_n(-\cdot))\,\chi_{\{2^m R<|y-x_0|<2^{m+1}R\}}(\cdot)$.

Observación 1.29. Nuevamente observemos que se dan las siguientes contenciones, estas se deducen solamente usando la desigualdad de Hölder:

1. $H_{A,X}^{\dagger} \subset H_{1,X}^{\dagger}$.
2. Además si $A(t) = t^r$ y denotamos $H_{r,X}^{\dagger} = H_{A,X}^{\dagger}$, entonces

$$H_{\infty,X}^{\dagger} \subset H_{r_2,X}^{\dagger} \subset H_{r_1,X}^{\dagger} \subset H_{1,X}^{\dagger},$$

para todo $1 < r_1 < r_2 < \infty$.

Además tenemos estas otras contenciones que mezclan las distintas clases:

1. $H_{A,X} \subset H_{A,X}^{\dagger}$.
2. $H_{1,X} \subset H_{1,X}^{\dagger}$.

La prueba de estas últimas es sólo usar la desigualdad triangular respecto de la norma $||.||_{\mathbf{x}}$.

En el próximo capítulo enunciaremos el teorema más importante del trabajo con sus respectivos corolarios y aplicaciones.

Capítulo 2

Resultados Principales y Aplicaciones

1. Resultados Principales

A continuación enunciaremos el resultado principal de este trabajo. Para ello consideraremos núcleos que satisfacen la condición $H^{\dagger}_{A,X}$. El enunciado de este teorema es similar al **Teorema** 1.22, pero nos permitirá obtener acotaciones mas precisas para el caso del operador cuadrado S.

Teorema 2.1. *Sea T OIS a valores vectoriales cuyo núcleo $K \in H^{\dagger}_{A,X}$. Sea $0 < p < \infty$ y $w \in A_\infty$, entonces $\exists\ c > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf\|_{\mathbf{x}}^p w \leqslant c \int_{\mathbb{R}^n} (M_{\overline{A}} f)^p\, w,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Este Teorema se demostrará en el siguiente capítulo. Como aplicación del mismo recordemos el corolario enunciado en los preliminares:

Corolario1.26. [**9**] *Sea Sf el operador cuadrado. Dado $p > 0$ y $w \in A_\infty$, existe una constante $c > 0$ tal que:*

$$\int_{\mathbb{R}} (Sf(x))^p w(x)\, dx \leq c \int_{\mathbb{R}} (M^2 f(x))^p w(x)\, dx,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

2. El Operador Cuadrado

Esta sección tiene como objetivo demostrar el **Corolario** 1.26; para ello comenzaremos presentando algunas propiedades que cumple el núcleo K del operador cuadrado S.

2.1. Propiedades del Operador Cuadrado.

Proposición 2.2. *Sea $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el núcleo asociado al operador cuadrado S, entonces $K \notin H_{\infty,\ell^2}$.*

Proposición 2.3. *Sea $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el núcleo asociado al operador cuadrado S, entonces $K \in H_{A,\ell^2}$ con $A(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}) - 1$ para todo $\varepsilon > 0$.*

Proposición 2.4. *Sea $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ el núcleo asociado al operador cuadrado S, entonces $K \in H^{\dagger}_{A,\ell^2}$ con $A(t) = \exp(t) - 1$.*

Recordemos que el Operador Cuadrado S se define como sigue:

$$Sf(x) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

con

$$A_n f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \int_{x-2^n}^{x+2^n} f(y)\ dy.$$

Sea

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\ f(y)\ dy = (K * f)(x) = \{(K_n * f)(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

donde

$$K_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\ \chi_{(-2^n,2^n)}(x) - \frac{1}{2^n}\ \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x).$$

Observar que vale la siguiente Proposición:

Proposición 2.5. *El operador cuadrado* $Sf(x) = \|Tf(x)\|_{\ell^2}$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
Sf(x) &= \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} |A_n f(x) - A_{n-1} f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Big|\frac{1}{2^{n+1}} \int_{x-2^n}^{x+2^n} f(y)\ dy - \frac{1}{2^n} \int_{x-2^{n-1}}^{x+2^{n-1}} f(y)\ dy\Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Bigg(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Big|\frac{1}{2^{n+1}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\ \chi_{(-2^n,2^n)}(x-y)\ dy \\
&\qquad - \frac{1}{2^n} \int_{\mathbb{R}} f(y)\ \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x-y)\ dy\Big|^2 \Bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\ \chi_{(-2^n,2^n)}(x-y) - \frac{1}{2^n}\ \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x-y) \right) f(y)\ dy\Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \Big| \int_{\mathbb{R}} K_n(x-y) f(y)\ dy\Big|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\{(K_n * f)(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_{\ell^2} = \|Tf(x)\|_{\ell^2}.
\end{aligned}$$

□

Probemos ahora, una propiedad central del núcleo K del operador cuadrado S. Como consecuencia de esta propiedad se puede ver que para ciertos x e y se tiene que $K_n(x-y) - K_n(-x) = 0$ para casi todo $n \in \mathbb{Z}$, lo cual nos será de gran utilidad para probar las **Proposiciones** 2.2, 2.3 y 2.4 en lo que sigue.

Proposición 2.6. *Sean* $x_0 \in \mathbb{R}$, $i < j$, $i, j \in \mathbb{Z}$. *Sean* x *e* y *tales que* $x_0 - 2^i < x < x_0 + 2^i$ *y además* $x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$ *ó* $x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1}$. *Entonces:*

$$K_n(x-y)-K_n(x_0-y)=\begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}\chi_{(x-2^n,x_0-2^n)\cup(x_0+2^n,x+2^n)}(y), & si,\ n=j \\ \frac{1}{2^{n+1}}\chi_{(x_0-2^n,x-2^n)\cup(x+2^n,x_0+2^n)}(y) \\ +\frac{1}{2^n}\chi_{(x-2^{n-1},x_0-2^{n-1})\cup(x_0+2^{n-1},x+2^{n-1})}(y), & si, n=j+1 \\ \frac{1}{2^n}\chi_{(x_0-2^{n-1},x-2^{n-1})\cup(x+2^{n-1},x_0+2^{n-1})}(y), & si,\ n=j+2 \\ 0, & si,\ n\notin\{j,j+1,j+2\}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $\chi_n(y)=\chi_{(-2^n,2^n)}(y)$.

Veamos cuanto vale $\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)$:

1. Si $n=j$:
   - Caso 1: $x_0\leqslant x<x_o+2^i$, $\quad x_0+2^j<y<x_0+2^{j+1}$:

     $\chi_n(x-y)=\chi_{(x-2^j,x+2^j)}(y)=\chi_{(x_0+2^j,x+2^j)}(y)$, pues:

     $$x-2^j<x_0-2^j+2^i\leqslant x_0<x_0+2^j\leqslant x+2^j.$$

     $\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0-2^j,x_0+2^j)}(y)=0$, pues:

     $$y>x_0+2^j.$$

     Luego, en este caso, $\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0+2^j,x+2^j)}(y)$.
   - Caso 2: $x_0-2^i<x<x_0$, $\quad x_0+2^j<y<x_0+2^{j+1}$:

     $\chi_n(x-y)=\chi_{(x-2^j,x+2^j)}(y)=0$, pues:

     $$x+2^j<x_0+2^j<y.$$

     $\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0-2^j,x_0+2^j)}(y)=0$, pues:

     $$x_0+2^j<y.$$

     Luego, en este caso, $\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=0$.
   - Caso 3: $x_0\leqslant x<x_o+2^i$, $\quad x_0-2^{j+1}<y<x_0-2^j$:

     $\chi_n(x-y)=\chi_{(x-2^j,x+2^j)}(y)=0$, pues:

     $$y<x_0-2^j\leqslant x-2^j.$$

     $\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0-2^j,x_0+2^j)}(y)=0$, pues:

     $$x_0-2^j>y.$$

     Luego, en este caso, $\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=0$.

- Caso 4: $x_0 - 2^i < x < x_0, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^j,x+2^j)}(y) = \chi_{(x-2^j,x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$x - 2^j < x_0 - 2^j < x_0 - 2^i < x < x + 2^j.$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^j,x_0+2^j)}(y) = 0$, pues:
  $$y < x_0 - 2^j.$$
  Luego, en este caso, $\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x-2^j,x_0-2^j)}(y)$.

Por lo tanto,*si* $n = j$, se tiene:

$$\begin{aligned}\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) &= \chi_{(x-2^j,x_0-2^j)}(y) + \chi_{(x_0+2^j,x+2^j)}(y)\\ &= \chi_{(x-2^j,x_0-2^j)\cup(x_0+2^j,x+2^l)}(y).\end{aligned}$$

2. Si $n <\ j$:

- Caso 1: $x_0 - 2^i < x < x_0 + 2^i, \qquad x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1}$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y) = 0$, pues:

  \- Caso (i): si $n \geqslant i$ entonces:
  $$y > x_0 + 2^j \geqslant x_0 + 2^{n+1} = x_0 + 2^n + 2^n \geq x_0 + 2^i + 2^n > x + 2^n.$$

  \- Caso (ii): si $n < i$ entonces:
  $$y > x_0 + 2^j \geqslant x_0 + 2^{i+1} = x_0 + 2^i + 2^i > x_0 + 2^i + 2^n > x + 2^n.$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^j,x_0+2^j)}(y) = 0$, pues:
  $$x_0 + 2^n < x_0 + 2^j < y.$$
  Luego, $\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = 0$.

- Caso 2: $x_0 - 2^i < x < x_0 + 2^i, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y) = 0$, pues:

  \- Caso (i): si $n \geqslant i$ entonces:
  $$y < x_0 - 2^j \leqslant x_0 - 2^{n+1} = x_0 - 2^n - 2^n \leqslant x_0 - 2^i - 2^n < x - 2^n.$$

  \- Caso (ii): si $n < i$ entonces:
  $$y < x_0 - 2^j \leqslant x_0 - 2^{i+1} = x_0 - 2^i - 2^i \leqslant x_0 - 2^i - 2^n < x - 2^n.$$
  $\chi_n(x_0-y) = 0$, pues:
  $$x_0 - 2^n > x_0 - 2^j > y.$$

Luego, $\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=0.$

Por lo tanto, si $n<j$, se tiene:

$$\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=0.$$

3. Si $n>\ j+1$:

- Caso 1: $x_0\leq x<x_0+2^i, \qquad x_0+2^j<y<x_0+2^{j+1}$:

  $\chi_n(x-y)=\chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)$, pues:

$$\begin{aligned} y<x_0+2^{j+1}=x_0+2^j+2^j&<x+2^j+2^j\\ &=x+2^{j+1}<x+2^n \end{aligned}$$

  y, además, $x-2^n<x_0+2^j<y$.

  $\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0-2^n,x_0+2^n)}(y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)$, pues:

$$x_0+2^n\geqslant x_0+2^{j+1}>y>x_0+2^j>x_0-2^n.$$

  Luego se tiene:

$$\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)-\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)=0.$$

- Caso 2: $x_0-2^i<x<x_0, \qquad x_0+2^j<y<x_0+2^{j+1}$:

  $\chi_n(x-y)=\chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)$, pues:

$$\begin{aligned} x+2^n>x_0+2^n-2^i&\geqslant x_0+2^{j+2}-2^i\\ &=x_0-2^i+2^{j+1}+2^{j+1}\\ &>x_0+2^{j+1}>y \end{aligned}$$

  y, además, $y>x_0+2^j>x>x-2^n$.

  $\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0-2^n,x_0+2^n)}(y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)$, pues:

$$x_0+2^n>x_0+2^{j+1}>y>x_0+2^j>x_{-}2^n.$$

  Luego se tiene:

$$\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)=\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}-\chi_{(x_0+2^j,x_0+2^{j+1})}(y)=0.$$

- Caso 3: $x_0 \leq x < x_0 + 2^i, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$\begin{aligned} x - 2^n < x - 2^{j+1} - 2^{j+1} &< x_0 + 2^i - 2^{j+1} - 2^{j+1} \\ &< x_0 - 2^{j+1} < y \end{aligned}$$
  y, además, $y < x_0 - 2^j < x < x + 2^n$.

  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^n,x_0+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}$, pues:
  $$x_0 - 2^n < x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j < x_0 + 2^n.$$

  Luego se tiene:
  $$\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y) - \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y) = 0.$$

- Caso 4: $x_0 - 2^i < x < x_0, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$\begin{aligned} x - 2^n < x_0 - 2^n < x_0 - 2^{j+1} &< y \\ &< x_0 - 2^j < x < x + 2^n. \end{aligned}$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$x_0 - 2^n < x_0 - 2^{j+1} < x_0 - 2^j < x_0 + 2^n.$$

  Luego, $\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y) - \chi_{(x_0-2^{j+1},x_0-2^j)}(y) = 0$.

Por lo tanto, si $n > j+1$, se tiene:
$$\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = 0.$$

4. Si $n = j+1$

- Caso 1: $x_0 \leq x < x_0 + 2^i, \qquad x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1}$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n,x+2^n)}(y) = \chi_{(x+2^j,x+2^{j+1})}(y)$, pues:
  $$x - 2^n < x < x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1} < x + 2^{j+1}.$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^n,x_0+2^n)}(y) = \chi_{(x+2^j,x+2^{j+1})}(y)$, pues:
  $$x_0 - 2^n = x_0 - 2^{j+1} < x_0 + 2^j < y < x + 2^{j+1} = x + 2^n.$$

  Luego se tiene:
  $$\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x+2^j,x+2^{j+1}}(y) - \chi_{(x+2^j,x+2^{j+1}}(y) = 0.$$

- Caso 2: $x_0 - 2^i < x < x_0, \qquad x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1}$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n, x+2^n)}(y) = \chi_{(x_0+2^j, x+2^{j+1})}(y)$, pues:
  $$\begin{aligned} x - 2^n < x < x_0 + 2^j &< x + 2^i + 2^j \\ &< x + 2^{j+1} = x + 2^n \\ &< x_0 + 2^{j+1}. \end{aligned}$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^n, x_0+2^n)}(y) = \chi_{(x_0+2^j, x_0+2^{l+1})}(y)$, pues:
  $$x_0 - 2^{j+1} < x_0 + 2^j < y < x_0 + 2^{j+1} = x_0 + 2^n.$$

  Luego se tiene:
  $$\begin{aligned} \chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0+2^j, x+2^{j+1})}(y) - \chi_{(x_0+2^j, x_0+2^{j+1})}(y) = \\ - \chi_{(x+2^{j+1}, x_0+2^{j+1})}(y). \end{aligned}$$

- Caso 3: $x_0 - 2^i < x < x_0, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n, x+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$\begin{aligned} x - 2^n = x - 2^{j+1} < x_0 - 2^{j+1} &< y \\ &< x_0 - 2^j < x < x + 2^n. \end{aligned}$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^n, x_0+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j}(y)$, pues:
  $$x\_2^n = x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j < x_0 + 2^{j+1} = x_0 + 2^n.$$

  Luego se tiene:
  $$\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y) - \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y) = 0.$$

- Caso 4: $x_0 \leq x < x_0 + 2^i, \qquad x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j$:

  $\chi_n(x-y) = \chi_{(x-2^n, x+2^n)}(y) = \chi_{(x-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$\begin{aligned} x - 2^{j+1} \leq x - 2^n = x - 2^{j+1} &< x_0 - 2^{j+1} + 2^i \\ &x_0 - 2^j - 2^j + 2^i < x_0 - 2^j. \end{aligned}$$
  $\chi_n(x_0-y) = \chi_{(x_0-2^n, x_0+2^n)}(y) = \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y)$, pues:
  $$x_0 - 2^n = x_0 - 2^{j+1} < y < x_0 - 2^j < x + 2^{j+1} = x + 2^n.$$

  Luego se tiene:
  $$\begin{aligned} \chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) &= \chi_{(x-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y) - \chi_{(x_0-2^{j+1}, x_0-2^j)}(y) \\ &= -\chi_{(x_0-2^{j+1}, x-2^{j+1})}(y). \end{aligned}$$

 Por lo tanto, si $n = j+1$, se tiene:

 $\chi_n(x-y) - \chi_n(x_0-y) = -\chi_{(x_0-2^{j+1}, x-2^{j+1}) \cup (x+2^{j+1}, x_0+2^{j+1})}(y).$

Juntando todos los casos analizados anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned}
K_n(x-y)-K_n(x_0-y) &= \frac{1}{2^{n+1}}\chi_n(x-y)-\frac{1}{2^n}\chi_{n-1}(x-y)\\
&\quad -\frac{1}{2^{n+1}}\chi_n(x_0-y)+\frac{1}{2^n}\chi_{n-1}(x_0-y)\\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\chi_n(x-y)-\chi_n(x_0-y)\right)\\
&\quad -\frac{1}{2^n}\left(\chi_{n-1}(x-y)-\chi_{n-1}(x_0-y)\right),
\end{aligned}$$

por lo que queda probada la proposición. □

Notación: De ahora en más $\{y : 2^m R < |y| \leqslant 2^{m+1}R\} := |y| \backsim 2^m R$. Denotaremos como $-F_m$ a:

- $(x-2^{m+i}, -2^{m+i})$ si $x-2^{m+i} < -2^{m+i}$.
- $(-2^{m+i}, x-2^{m+i})$ si $x-2^{m+i} > -2^{m+i}$.

Finalmente denotaremos como F_m a:

- $(x+2^{m+i}, 2^{m+i})$ si $x < 0$.
- $(2^{m+i}, x+2^{m+i})$ si $x > 0$.

Probemos ahora las **Proposiciones** 2.2, 2.3 y 2.4.

Demostración de la Proposición 2.2. Probemos que el núcleo del operador cuadrado S, $K(x)=\{K_n(x)\}$ no satisface la condición $L^{\infty,\ell^2}-$ Hörmander. En efecto, recordemos que, como K está definida en $\mathbb{R}$, entonces en la definición de la condición de Hörmander tomamos $n=1$ (el de la dimensión), es decir que, K satisface la condición $L^{\infty,\ell^2}-$ Hörmander si y sólo si existen $c_A>1$ y $C_A>0$ tales que para todo $R\in\mathbb{R}$ y para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $R>c_A|x|$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m R \sup_{2^m R<|y|\leqslant 2^{m+1}R} \|K(x-y)-K(-y)\|_{\ell^2} \leqslant C_A.$$

Probemos entonces que el núcleo K no satisface dicha condición.
Sea $x_0=0$ (de la proposición anterior) y sean $c_A>1$, $C_A>0$ fijos, $R=2^i$ para algún $i\in\mathbb{Z}$, $|x|\, c_A<R$, $j=m+i$ con $m\in\mathbb{N}$ y $2^j<|y|<2^{j+1}$ entonces por la proposición 2.6 se tiene:

$$
\begin{aligned}
2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \|K(x-y)-K(-y)\|_{\ell^2} &= 2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left[\left(\frac{1}{2^{m+i+1}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^2\right.\\
&+ \left.\left(-\frac{1}{2^{m+i+2}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}} + \frac{1}{2^{m+i+1}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{m+i+2}}\ \chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\geq 2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left[\left(\frac{1}{2^{m+i+1}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{m+i+2}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{2^{m+i+1}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= 2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left[\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m} + \frac{1}{2^{2(m+i+2)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}} + \frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right]^{\frac{1}{2}}\\
&\geq 2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left(\frac{2}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= 2^{m+i} \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left(\frac{1}{2^{m+i}\sqrt{2}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)
\end{aligned}
$$

Debido a las siguientes contenciones entre intervalos:

$$
\begin{aligned}
&(2^{m+i},2^{m+i+1}) \cap (-F_m \cup F_m))\\
&\quad = \Big((2^{m+i}, 2^{m+i+1}) \cap -F_m\Big) \cup \Big((2^{m+i}, 2^{m+i+1}) \cap F_m\Big)\\
&\quad \supseteq (2^{m+i}, 2^{m+i+1}) \cap F_m\\
&\quad \supseteq (2^{m+i}, 2^{m+i+1}) \cap (2^{m+i}, x+2^{m+i}) \neq \varnothing.
\end{aligned},
$$

se puede continuar la desigualdad anterior como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
2^{m+i} \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}} \left(\frac{1}{2^{m+i}\sqrt{2}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right) &= 2^{m+i}\frac{1}{2^{m+i}\sqrt{2}} = \frac{2^{m+i}}{2^{m+i}\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $2^m2^i \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}R} \|K(x-y)-K(-y)\|_{\ell^2} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \qquad \forall\ m \in \mathbb{N}.$

Entonces: $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} \sup_{|y|\backsim 2^{m+i}R} \|K(x-y)-K(-y)\|_{\ell^2} \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = \infty \geq C_A.$

Luego K $\notin$ H_{∞,ℓ^2}. ☐

Observación 2.7. Se puede ver también que $K \in H_{r,\ell^2}$ para todo $r \geq 1$, donde $A(t) = t^r$. Esto implica usando el **Teorema** 1.22 que:

$$
\int_{\mathbb{R}n} |Sf(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}n} \|Tf(x)\|_{\ell^2}^p w(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |M_{r'}f(x)|^p w(x)dx \qquad (4)
$$

para todo $r' > 1$ con $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Recordemos que:

$$Mf(x) \leqslant c\ M^k f(x) \leqslant c\ M_r f(x),\ \forall k \geq 1,\ r > 1.$$

Entonces una pregunta natural será: ¿Podremos poner M, el operador maximal de Hardy-Littlewood, del lado derecho de (4)? Como $K \notin\ H_{\infty,\ell^2}$ no podemos usar este Teorema para asegurar que:

$$\int_{\mathbb{R}n} |Sf(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}n} \|Tf(x)\|^p_{\ell^2} w(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |Mf(x)|^p w(x)dx.$$

Esta última desigualdad sigue siendo un problema abierto.

Lo que si se puede probar (ver [**8**]) es el siguiente Teorema.

Teorema 2.8. *Existe un operador a valores vectoriales T cuyo núcleo K está en $\cap_{r\geq 1} H_{r,X} \setminus H_{\infty,X}$ y el operador satisface*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|^p_{\mathbf{x}} w(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |Mf(x)|^p w(x)dx.$$

Solo hay que considerar $S_\infty f(x) = \|Tf(x)\|_{\ell^\infty}$, donde T es el mismo que dá a lugar al operador cuadrado, tomando en este caso $(\mathbf{X}, ||.||_{\mathbf{x}}) = \ell^\infty(\mathbb{Z})$, en vez de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Demostración de la Proposición 2.3. Para probar este resultado sólo debemos ver que el núcleo K del operador cuadrado S satisface la condición L^{A,ℓ^2} - Hörmander con $A(t) = \exp(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}) - 1$ y $\varepsilon > 0$.
Recordemos que K satisface la condición L^{A,ℓ^2}- Hörmander si y sólo si existen $c_A > 1,\ C_A > 0$ tales que, para todo $R \in \mathbb{R}$ y para todo $x \in \mathbb{R} : |x|c_A < R$ se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R) \| \|K(x-\cdot) - K(-\cdot)\|_{\ell^2}\ \chi_{|y|\sim 2^m R}(\cdot)\|_{A,B(0,2^{m+1}R)} < C_A.$$

De la **Proposición** 2.6 se puede ver que si $x = 0$, $K(x-\cdot) - K(-\cdot) = 0$, luego la desigualdad anterior se cumple trivialmente.

Consideremos entonces $x \neq 0$.
Sea $i \in \mathbb{Z}$ y consideremos $R = 2^i,\ I_m = (-2^{m+i+1}, 2^{m+i+1}),\ -F_m$ y F_m como antes, entonces $|I_m| = 2^{m+i+2}$. Utilizando la desigualdad $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ para todo $0 < p < 1$, y para todo $a, b \in \mathbb{R}$ (en este caso consideramos $p = \frac{1}{2}$) se tiene:

$$
\begin{aligned}
&2^{m+i}\|\|\|K(x-\cdot)-K(-\cdot)\|_{\ell^2}\chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{A,I_m}\\
&= 2^{m+i}|| \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m} + \frac{1}{2^{2(m+i+2)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}} + \frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right.\\
&\left.+\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{[-F_{m+1}\cup F_{m+1}]\cap[-F_m\cup F_m]} + \frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m}\\
&\leq 2^{m+i}\left[|| \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m} + || \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^{\frac{1}{2}}\right.\\
&+|| \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m} + || \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m}\\
&\left.+|| \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m} + || \left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^{\frac{1}{2}} ||_{A,I_m}\right]\\
&\leqslant 2^{m+i}\|3\left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_m\cup F_m}\right)^{\frac{1}{2}} \|_{A,I_m}\\
&+ 2^{m+i}\|2\left(\frac{1}{2^{2(m+i+1)}}\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \|_{A,I_m}\\
&= \frac{2^{m+i+2}}{2^{m+i+1}}\|\chi_{-F_m\cup F_m}\|_{A,I_m} + \frac{2^{m+i+2}}{2^{m+i+1}}\|\chi_{-F_{m+1})\cup F_{m+1}}\|_{A,I_m}\\
&=2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{1}{|I_m|}\int_{I_m} A\left(\frac{\chi_{-F_m\cup F_m}}{\lambda}\right)\leq 1\right\}\\
&+2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{1}{|I_m|}\int_{I_m} A\left(\frac{\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}}{\lambda}\right)\leq 1\right\}\\
&=2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{1}{|I_m|}\int_{-2^{m+i+1}}^{2^{m+i+1}} A(\lambda^{-1})\chi_{-F_m\cup F_m}\leq 1\right\}\\
&+2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0 : \frac{1}{|I_m|}\int_{-2^{m+i+1}}^{2^{m+i+1}} A(\lambda^{-1})\chi_{-F_{m+1}\cup F_{m+1}}\leq 1\right\}\\
&=2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{A(\lambda^{-1})}{2^{m+i+2}}\int_{(-2^{m+i+1},2^{m+i+1})\cap[-F_m\cup F_m]} dy\leq 1\right\}\\
&+2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{A(\lambda^{-1})}{2^{m+i+2}}\int_{(-2^{m+i+1},2^{m+i+1})\cap[-F_{m+1}\cup F_{m+1}]} dy\leq 1\right\}\\
&=2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{|I_m\cap[-F_m\cup F_m]|}{2^{m+i+2}}A(\lambda^{-1})\leq 1\right\}\\
&+2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon \frac{|I_m\cap[-F_{m+1}\cup F_{m+1}]|}{2^{m+i+2}}A(\lambda^{-1})\leq 1\right\}\\
&=2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon A(\lambda^{-1})\leq \frac{2^{m+i+2}}{|I_m\cap[-F_m\cup F_m]|}\right\}\\
&+2\ \text{ínf}\left\{\lambda>0\colon A(\lambda^{-1})\leq \frac{2^{m+i+2}}{|I_m\cap[-F_{m+1}\cup F_{m+1}]|}\right\}.
\end{aligned}
$$

Además, como A es creciente si y sólo si A^{-1} es creciente, podemos continuar la cuenta anterior:

$$\begin{aligned}
&= 2\ \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \colon \frac{1}{\lambda} \leq A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}\right)\right\} \\
&+ 2\ \text{ínf}\left\{\lambda > 0 \colon \frac{1}{\lambda} \leq A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|}\right)\right\} \\
&= 2\ \sup\left\{\lambda > 0 \colon \lambda \geq \left[A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}\right)\right]^{-1}\right\} \\
&+ 2\ \sup\left\{\lambda > 0 \colon \lambda \geq \left[A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|}\right)\right]^{-1}\right\} \\
&= \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}\right)} + \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|}\right)} \\
&\leq \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|-F_{m+1} \cup F_{m+1}|}\right)} + \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|-F_{m+1} \cup F_{m+1}|}\right)}
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de:

$$(-2^{m+i}, 2^{m+i}) \cap [-F_m \cup F_m] \subseteq -F_m \cup F_m \subseteq -F_{m+1} \cup F_{m+1}.$$

Observemos que las desigualdades anteriores valen siempre que:

$A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_m \cup F_m]|}\right) \neq 0$ y $A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|}\right) \neq 0.$

Como para este caso particular, $A^{-1}(x) = (\log(x+1))^{1+\varepsilon}$, esto se cumple si y sólo si:

$\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|} \neq 0$ y $\frac{2^{m+i+2}}{|I_m \cap [-F_{m+1} \cup F_{m+1}]|} \neq 0,$

Y esto se cumple para todo $m \geq 1$.

Además podemos ver que $|-F_m| = |x| = |F_m|$ para todo m. Luego $|-F_{m+1} \cup F_{m+1}| \leq 2|x|$.

Finalmente tenemos para todo $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
2^{m+i} \| \| K(x-\cdot) - K(-\cdot) \|_{\ell^2} \chi_{|y| \sim 2^{m+i}} \|_{A, I_m} &\leq \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|-F_{m+1} \cup F_{m+1}|}\right)} + \frac{2}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{|-F_{m+1} \cup F_{m+1}|}\right)} \\
&\leq \frac{4}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+2}}{2|x|}\right)} = \frac{4}{A^{-1}\left(\frac{2^{m+i+1}}{|x|}\right)} \\
&\leq \frac{4}{A^{-1}(2^{m+1})}.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdad se debe a que A^{-1} creciente y $|x| < 2^i$. Como $A^{-1}(x) \sim (\log(x))^{1+\varepsilon}$, entonces:

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} \| \| K(x-\cdot) - K(\cdot)\|_{\ell^2} \ \chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{A,I_m} &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{A^{-1}(2^{m+1})} \\ &\sim \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\log\left(2^{m+1}\right)^{1+\varepsilon}} \\ &\leq \frac{4}{(m+1)^{1+\varepsilon}} = C_A < \infty,\end{aligned}$$

pues $\varepsilon > 0$.

Por lo tanto la desigualdad

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R) \| \| K(x-\cdot) - K(\cdot)\|_{\ell^2} \chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{A,I_m} \leq C_A$$

se cumple para todo $|x|c_A < R < 2^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Luego para probarlo para todo $R \in \mathbb{R}$ elegimos i tal que $R < 2^i$ y usamos la desigualdad anterior.

Luego K satisface la condición L^{A,ℓ^2}-Hörmander. □

El siguiente Corolario muestra que podemos poner un operador maximal intermedio entre los $M_{r'}$ y M.

Demostración del Corolario (1.25). En [**13**] se probó que S es de tipo fuerte (p, p) respecto de la medida de Lebesgue para todo $p > 1$, luego por la **Proposición** 2.3 y el **Teorema** 1.22, dado $w \in A_\infty$, $1 < p < \infty$, existe $c > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Sf(x)|^p w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|_2^p w(x)dx \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}}f(x))^p \, w(x)dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M^3 f(x)\right)^p w(x)dx.\end{aligned}$$

Por último observar que $A(t) = \exp\left(t^{\frac{1}{1+\varepsilon}}\right) - 1$, entonces por **Ejemplo** 1.14 $\overline{A}(t) = t\left(1 + \log\left(t\right)\right)^{1+\varepsilon}$. Para ε suficientemente pequeño $\overline{A}(t)$ está acotada por $B(t) = t(1+\log\left(t\right))^2$ y por lo tanto, por **Observación** 1.15 $M_B f$ es puntualmente equivalente a $(M)^3 f$. □

Demostración de la Proposición 2.4. Probemos que el núcleo K del operador cuadrado S satisface la condición $L_{\dagger}^{A,\ell^2}$- Hörmander con $A(x) = \exp\left(x\right) - 1$. Recordemos que como K toma valores en $\mathbb{R}$, K satisface la condición $L_{\dagger}^{A,X}$-Hörmander si y sólo si existen $c_A > 1, C_A > 0$ tales que para todo $x \in \mathbb{R} : |x|c_A < R$ se tiene:

$$\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^m R \|K_n(x-\cdot) - K_n(-\cdot) \ \ \chi_{y\sim 2^m R}\|_{A,B_{m+1}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2} < \infty$$

Notemos que si $x = 0$ la desigualdad se sigue trivialmente de la **Proposición** 2.6.

Consideremos entonces $x \neq 0$.
Sea $R = 2^i$ $i \in \mathbb{Z}$, $c_A > 2^i > |x|$, sea $I_m = (-2^{m+i}, 2^{m+i})$, $-F_m$ y F_m como antes y sea T definido como:

$$T := \{n \in \mathbb{Z} \ : \ 2^{n+i+1} \neq |I_n \cap [-F_{n-1} \cup F_{n-1}]| \text{ y } 2^{n+i} \neq |I_n \cap [-F_n \cup F_n]|\}$$

La desigualdad que sigue se obtiene utilizando la desigualdad triangular respecto de la norma $||\cdot||_{A,I_m}$.

$$\begin{aligned}
&\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^m R \|K_n(x-\cdot) - K_n(-\cdot) \ \ \chi_{|y|\sim 2^m R}\|_{A,I_{m+1}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2} \\
&= \| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^{m+i} \|K_n(x-\cdot) - K_n(-\cdot) \ \ \chi_{|y|\sim 2^{m+i}}\|_{A,I_{m+1}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2} \\
&= \| \left\{ 2^{n+i} \| \frac{1}{2^{n+1+i}} \ \ \chi_{-F_n \cup F_n}(y) \|_{A,I_{n+1}} \right. \\
&\qquad + 2^{n-1+i} \| \frac{1}{2^{n+1+i}} \ \ \chi_{-F_n \cup F_n}(y) + \frac{1}{2^{n+i}} \ \ \chi_{-F_{n-1} \cup F_{n-1}}(y) \|_{A,I_n} \\
&\qquad \left. + \ 2^{n-2+i} \| \frac{1}{2^{n+i}} \ \ \chi_{-F_{n-1} \cup -F_{n-1}}(y) \|_{A,I_{n-1}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2} \\
&\leq \| \left\{ 22^{n+i} \| \frac{1}{2^{n+1+i}} \ \ \chi_{-F_n \cup F_n} \|_{A,I_{n+1}} + 22^{n-1+i} \| \frac{1}{2^{n+i}} \ \ \chi_{-F_{n-1} \cup F_{n-1}} \|_{A,I_{n-1}} \right\}_{n\in\mathbb{Z}} \|_{\ell^2} \\
&= \| \left\{ \frac{2}{A^{-1}(\frac{2^{n+1+i}}{2|x|})} + \frac{2}{A^{-1}(\frac{2^{n+i}}{2|x|})} \right\}_{n\in(\mathbb{Z}-T)} \|_{\ell^2} \\
&\leq \| \left\{ \frac{2}{\log(2^n)} + \frac{2}{\log(2^{n-1})} \right\}_{n\in(\mathbb{Z}-T)} \|_{\ell^2} \\
&\leq \| \left\{ \frac{4}{\log(2^{n-1})} \right\}_{n\in(\mathbb{Z}-T)} \|_{\ell^2} \\
&= \| \left\{ \frac{c}{n-1} \right\}_{n\in(\mathbb{Z}-T)} \|_{\ell^2} \\
&\leq c \left(\sum_{n\in(\mathbb{Z}-\{1\})} \frac{1}{(n-1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} = C_A < \infty.
\end{aligned}$$

En efecto, $A(x) = \exp(x) - 1 = y \ \ \Rightarrow \exp(x) = y + 1 \ \ \Rightarrow x = \log(y+1)$.

Luego $A^{-1}(2^{n+1}) = \log(2^n)$.

Además, $A^{-1}(\frac{2^{n+1}}{2|x|}) = A^{-1}(\frac{2^n}{|x|}) \geq A^{-1}(2^n)$ pues $|x| < 2^i$ y A^{-1} es creciente.
Entonces: $\frac{1}{A^{-1}(\frac{2^{n+1}}{2|x|})} \leq \frac{1}{A^{-1}(2^n)} = \frac{1}{\log(2^n+1)} \leq \frac{1}{2^n}$.

Notemos que la desigualdad anterior se da para todo $n \in (\mathbb{Z} - T)$, con $T := \{n \in \mathbb{Z} \ : \ 2^{n+i+1} \neq |I_n \cap [-F_{n-1} \cup F_{n-1}]| \text{ y } 2^{n+i} \neq |I_n \cap [-F_n \cup F_n]|\}$.

Esto se debe a que por cuentas similares a las usadas en la demostración de la **Proposición** 2.3, podemos utilizar la desigualdad

$$\| \left\{ 22^{n+i} \| \frac{1}{2^{n+1+i}} \ \chi_{-F_n \cup F_n} \|_{A, I_{n+1}} + 22^{n-1+i} \| \frac{1}{2^{n+i}} \ \chi_{-F_{n-1} \cup F_{n-1}} \|_{A, I_{n-1}} \right\} \|_{\ell^2}$$
$$= \| \left\{ \frac{2}{A^{-1}(\frac{2^{n+1+i}}{2|x|})} + \frac{2}{A^{-1}(\frac{2^{n+i}}{2|x|})} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2}$$

si sólo si n satisface:

$A^{-1}\left(\frac{2^{n+i+1}}{|I_n \cap [-F_{n-1} \cup F_{n-1}]|}\right) \neq 0$ y $A^{-1}\left(\frac{2^{n+i}}{|I_n \cap [-F_n \cup F_n]|}\right) \neq 0$,

lo cual se cumple si y sólo si se cumple:

$2^{n+i+1} \neq |I_n \cap [-F_{n-1} \cup F_{n-1}]|$ y $2^{n+i} \neq |I_n \cap [-F_n \cup F_n]|$.

Se puede ver que esto no se satisface, a lo sumo, para una cantidad finita (que incluye a $n = 1$) de n's, es decir que T tiene cardinal finito. Además, usando la **Proposición** 2.6 se puede ver también que para esos n's, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m R \| K_n(x - \cdot) - K_n(-\cdot) \ \chi_{|y| \sim 2^m R} \|_{A, I_{m+1}} < \infty$$

.

Por lo tanto se sigue que la desigualdad

$$\| \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} 2^m R \| K_n(x - \cdot) - K_n(-\cdot) \ \chi_{y \sim 2^m R} \|_{A, B_{m+1}} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \|_{\ell^2} < C_A$$

se verifica para todo $|x| c_A < R < 2^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Luego para probarlo para todo $R \in \mathbb{R}$ elegimos i talque $R < 2^i$ y utilizamos la desigualdad anterior. □

Demostración del Corolario 1.26. Como $K \in H^{\dagger}_{A,X}$ por **Proposición** 2.4 y $H^{\dagger}_{A,X} \subseteq H_{A,X} \subseteq H^{\dagger}_{1,X}$, en particular T es un OIS. Luego por la **Proposición** 2.4 y el **Teorema** 2.1, dado $w \in A_\infty$ y $0 < p < \infty$, existe $c > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |Sf(x)|^p w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|^p_{\ell^2} \, w(x) dx \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}} f(x))^p \, w(x) \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M^2 f(x) \right)^p w(x), \end{aligned}$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |Sf(x)|^p w(x) dx < \infty$.
Esta última desigualdad se sigue de que por el **Ejemplo** 1.14, si $A(t) = \exp(t) - 1$, entonces $\widehat{A}(t) = t \log(t)$, que por **Observación** 1.15 es pultualmente equivalente a M^2. □

3. Generalizando el Operador Cuadrado

Sea $Sf(x) = S_2f(x)$ y definimos $S_qf(x) := ||Tf(x)||_{\ell^q}$ para todo q tal que $1 < q < \infty$ con T definido como antes, es decir:

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} K(x-y)\ f(y)\ dy = (K * f)(x) = \{(K_n * f)(x)\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

donde,

$$K_n(x) = \frac{1}{2^{n+1}}\ \chi_{(-2^n,2^n)}(x) - \frac{1}{2^n}\ \chi_{(-2^{n-1},2^{n-1})}(x).$$

Si $A(t) = \exp(t) - 1$, entonces, S_q satisface la siguiente desigualdad:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |S_qf(x)|^p w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|^p_{\ell^q}\, w(x)dx \\ &\leqslant c\int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}}f(x))^p\, w(x) \leqslant c\int_{\mathbb{R}} \left(M^2f(x)\right)^p w(x),\end{aligned}$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S_qf(x)|^p w(x)dx < \infty$.

Esto se sigue del hecho que, $K \in H^{\dagger}_{A,\ell^q}$ para todo q tal que $1 < q < \infty$, pues si en la demostración de la **Proposición** 2.4 cambiamos q, por 2, llegaríamos a

$$\left(\sum_{n\in(\mathbb{Z}-\{1\})} \frac{1}{(n-1)^q}\right)^{\frac{1}{q}} = C_{A_q} < \infty.$$

Finalmente la desigualdad deseada se obtiene usando el **Teorema** 2.1.

Ahora, si en vez de tomar las normas q a Tf tomamos la norma Luxemburgo B para una B función de Young (definida en 1.16 para la medida de contar), vamos a tener: $S_Bf(x) := ||Tf(x)||_B$ con B función de Young y T como antes. Si se cumple:

$$\| \left\{\frac{1}{n-1}\right\}_{n\in(\mathbb{Z}-\{1\})} \|_B = C_{A_B} < \infty,$$

entonces:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |S_Bf(x)|^p w(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} \|Tf(x)\|^p_B\, w(x)dx \\ &\leqslant c\int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}}f(x))^p\, w(x)dx \leqslant c\int_{\mathbb{R}} \left(M^2f(x)\right)^p w(x)dx,\end{aligned}$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S_Bf(x)|^p w(x)dx < \infty$.

En efecto, cambiando la norma dada por la función de Young B por la norma de ℓ^2 en la **Proposición** 2.4 se sigue que $K \in H^{\dagger}_{A,B}$. Luego por **Teorema** 2.1 se tiene la desigualdad deseada.

Notemos que la función definida por: $B_k(t) = t^2\left(\log(t+1)\right)^k$ si $t \geq 0$ es una función continua, no decreciente, $B_k(0) = 0$, $B_k(t) \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y B_k es convexa para todo $k > 0$. Luego B_k es una función de Young. Además es fácil ver que si consideramos la norma de Luxemburgo asociada a B_k, $||\cdot||_{B_k}$, en el espacio

$(\mathbb{Z}, \mu)$ donde μ es la medida de contar y calculamos la norma de $f(x) = \frac{1}{x-1}$ si $x \neq 1$ y $f(1) = 0$ tenemos:

$$||f||_{B_k} = \| \left\{ \frac{1}{n-1} \right\}_{n \in (\mathbb{Z}-\{1\})} \|_{B_k} < \infty,$$

para todo $k > 0$ y por lo comentado anteriormente se tiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |S_{B_k} f(x)|^p w(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \|T f(x)\|_{B_k}^p \, w(x) dx \\ &\leqslant c \int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}} f(x))^p \, w(x) dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M^2 f(x) \right)^p w(x) dx, \end{aligned}$$

para todo k.

Veamos ahora porqué se tiene que

$$||f||_{B_k} = \| \left\{ \frac{1}{n-1} \right\}_{n \in (\mathbb{Z}-\{1\})} \|_{B_k} < \infty.$$

Notemos que probar esto es equivalente a probar que existe $0 < \lambda < \infty$ tal que $\lambda \in G$ con

$$G := \{\lambda > 0 \ : \ \int_{\mathbb{Z}} B_k \left(\frac{|f|}{\lambda} \right) d\mu \leq 1\}.$$

Sea $\lambda > 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}} B_k \left(\frac{|f|}{\lambda} \right) d\mu \leq 1 &= \sum_{n \in (\mathbb{Z}-\{1\}} \log(\frac{1}{|n-1|\lambda} + 1)^k \frac{1}{(\lambda(n-1))^2} \\ &\leq \log(\frac{1}{\lambda} + 1)^k \frac{1}{\lambda^2} \sum_{n \in (\mathbb{Z}-\{1\}} \frac{1}{(n-1)^2} \\ &\leq \log(2)^k \frac{1}{\lambda^2} c \end{aligned}$$

Observemos que $\log(2)^k \frac{1}{\lambda^2} c \leq 1$ si y sólo si $c \log(2)^k \leq \lambda^2$.

En particular $\lambda_0 := \sqrt{\log(2)^K C + 1}$ satisface dicha desigualdad, es decir, $\lambda_0 \in G$.

Luego se tiene $||f||_{B_k} < \infty$.

En la siguiente sección se dará la prueba del resultado principal de este trabajo: el **Teorema** 2.1.

Capítulo 3

Demostración Teorema Central

En este capítulo demostraremos el **Teorema** 2.1, que es el resultado principal que obtuvimos en este trabajo. Para ello enunciaremos y demostraremos tres lemas previos y recordaremos la descomposición de Calderón-Zygmud.

Teorema 3.1 (Descomposición de Calderón-Zygmud). *Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, para todo $\lambda > 0$ existen una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j\}_j$ disjuntos tales que*

1. $f(x) \leq \lambda$ *para todo* $x \notin \cup_j Q_j := \Omega_\lambda$.
2. $|\Omega_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}||f||_1$.
3. $\lambda < \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$.

De la descomposición de Calderón-Zygmund se deduce el siguiente resultado

Teorema 3.2. *Sea $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda > 0$. Sean $\{Q_j\}_j$ los cubos diádicos de la descomposición de Calderón -Zygmund asociados a f y λ. Existen funciones g y b con $f = g + b = g + \sum_{j\in\mathbb{Z}} b_j$, tales que:*

1. $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ *y* $\|g\|_\infty \leq c\,\lambda$ *con* $c > 0$.
2. $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *y* $\|g\|_1 = \|f\|_1$.
3. $g \in L^p(\mathbb{R}^n),\ 1 \leq p < \infty$ *y* $\|g\|_p \leq c\,\lambda^{p-1}\|f\|_1$ *para algún* $c > 0$.
4. b_j *tiene soporte en* Q_j, $\int_{R^n} b_j = 0$, $\|b\|_1 \leq \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|b_j\|_1 \leq \|f\|_1$.

Más aún,

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & si,\ x \notin \Omega_\lambda \\ \dfrac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f, & si,\ x \in Q_j \end{cases} \qquad y \quad b_j(x) = \left(f(x) - \frac{1}{|Q_j|}\int_{Q_j} f\right)\chi_{Q_j}(x).$$

Observación 3.3. Este resultado se puede generalizar para cualquier $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1. Enunciado de Lemas fundamentales

A continuación enunciaremos los tres lemas que son fundamentales para la prueba del resultado principal.

Lema 3.4 (Tipo débil (1,1)). *Sea T el OIS asociado al núcleo $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ entonces T es de tipo débil (1,1).*

Lema 3.5 (Desigualdad de Kolmogörov). *Sea T un operador a valores vectoriales tal que T es de tipo débil* $(1,1)$. *Entonces si f es una función con soporte en $\widehat{Q}$, $\widehat{Q} \subset Q$ con Q y $\widehat{Q}$ cubos, se tiene que para todo $0<\varepsilon<1$, existe $c>0$ tal que:*

$$\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q \|Tf\|_{\mathbf{x}}^{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \leq c\,\frac{1}{|\widehat{Q}|}\int_{\widehat{Q}} |f|.$$

Observación 3.6. Si T es un OIS a valores vectoriales, por **Lema** 3.4, T es de tipo débil $(1,1)$, luego para T vale la Desigualdad de Kolmogörov, es decir vale el **Lema** 3.5.

Lema 3.7. *Sea A función de Young y sea T el OIS asociado al núcleo $K = \{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ con $K \in H^{\dagger}_{A,X}$. Dado $0<\delta<1$, existe $c>0$ tal que:*

$$M^{\sharp}_{\delta}\|Tf\|_{\mathbf{x}}(x) := \left(M^{\sharp}\|Tf\|_{\mathbf{x}}^{\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}(x) \leq c\, M_{\overline{A}}f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

2. Demostración de los Resultados Enunciados

Demostración Teorema 2.1. Sea $w \in A_\infty$, y supongamos que K, el núcleo asociado al operador T, es tal que $K \in H^{\dagger}_{A,X}$ con A función de Young y $f \in C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Dado $p>0$, elegimos ε tal que $0<\delta=p\varepsilon<1$. Luego usando el **Teorema Sharp** 1.13 tenemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \|Tf\|_{\mathbf{x}}^p w &\leq \int_{\mathbb{R}} M_{\varepsilon}\left(\|Tf\|_{\mathbf{x}}^p\right) w = \int_{\mathbb{R}} \left(M(\|Tf\|_{\mathbf{x}}^{p\,\varepsilon})\right)^{\frac{1}{\varepsilon}} w \\ &\leq c\int_{\mathbb{R}} \left(M^{\sharp}(\|\|Tf\|_{\mathbf{x}}^{\delta})\right)^{\frac{p}{\delta}} w = c\int_{\mathbb{R}} \left(M^{\sharp}_{\delta}(\|Tf\|_{\mathbf{x}}\right)^{p} w \\ &\leq c\int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}}f)^p\, w,\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del **Lema** 3.7. Luego se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}} \|Tf\|_{\mathbf{x}}^p w \leq c\int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}}f)^p\, w.$$

El resultado se sigue de que el espacio $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo p. □

Observación 3.8. Notemos que para la demostración de este Teorema utilizamos el **Teorema Sharp** 1.13, el cual tiene como hipótesis que "el lado izquierdo sea finito". Si $f \in C_c^{\infty}$ siguiendo cuentas clásicas como en [**3**] pero adaptándolas con núcleos que cumplan una condición de tipo Hörmander, como en [**7**], se puede probar que $\int_{\mathbb{R}} M_{\varepsilon}\left(\|Tf\|_{\mathbf{x}}^p\right) w < \infty$ con lo cual se puede usar este teorema.

2.1. Demostración de los Lemas.

A continuación demostraremos los lemas enunciados que utilizamos para la demostración del **Teorema** 2.1..

Demostración Lema 3.4. Recordemos que en la definición de OIS hemos pedido que T venga dado por un núcleo K a valores vectoriales tal que $K \in H_{1,X}$ y T sea de tipo fuerte (p,p) para algún $p > 1$. Queremos probar que el operador T es de tipo débil $(1,1)$, es decir $\exists\, c > 0$ tal que:

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \|Tf(x)\|_{\mathbf{x}} > \lambda\}| \leq \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f| \ \ \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Sean f en el espacio de Schwartz y $\lambda > 0$. Realizamos la Descomposición de Calderón-Zygmud, para f a la altura λ. Sea $\Omega_\lambda = \cup_j Q_j$, donde Q_j son cubos diádicos disjuntos y escribimos $f = g + b$ (ver **Teoremas** 3.1 y 3.2). Luego:

$$|\{x : \|Tf(x)\|_{\mathbf{x}} > \lambda\}| \leq |\{x : \|Tg(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x : \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| = I + II.$$

Analicemos primero I. Usando el hecho que T es de tipo débil (p,p) (T es de tipo fuerte (p,p)), tenemos:

$$\begin{aligned} I = |\{x : \|Tg(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| &\leq \frac{2^p}{\lambda^p} c\|g\|_p^p \\ &\leq c\frac{2^p}{\lambda^p}\|f\|_1 \lambda^{p-1} = \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f|, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue de las propiedades de g dadas por el **Teorema** 3.2. Ahora veamos II. Para ello sea $\Omega_\lambda^\star := \cup Q_j^\star$, con $Q_j \subseteq Q_j^\star$ donde $Q_j^\star$ es el padre de Q_j. Luego

$$\begin{aligned} II &= |\{x \ : \ \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\leq |\{x \in \Omega_\lambda^\star \ : \ \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| + |\{x \notin \Omega_\lambda^\star \ : \ \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &\leq |\Omega_\lambda^\star| + |\{x \notin \Omega_\lambda^\star \ : \ \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| \\ &= (i) + (ii). \end{aligned}$$

Para (i) usemos como es la medida de Ω_λ dada en el **Teorema** 3.1,

$$(i) = |\Omega_\lambda^\star| = |\cup Q_j^\star| \leq \textstyle\sum_{j\in\mathbb{Z}} |Q_j^\star| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^n|Q_j| = 2^n|\Omega_\lambda| \leq 2^n\frac{\|f\|_1}{\lambda} = \frac{2^n}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|.$$

Ahora analicemos (ii). Para ello usaremos: que $Q_j^\star \subset \Omega_\lambda^\star$ para todo j, Tchevycheff, Fubini-Tonelli, el hecho de que b_j tiene soporte en Q_j , $b_j \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y T es de tipo fuerte (p,p) para todo p.

Sea c_j el centro del cubo Q_j, entonces:

$$\begin{aligned}
(ii) &= |\{x \notin \Omega^\star_\lambda \ : \ \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} > \frac{\lambda}{2}\}| \\
&\leq \frac{2C}{\lambda}\int_{(\Omega^\star_\lambda)^c} \|Tb(x)\|_{\mathbf{x}} dx \\
&\leq \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{(\Omega^\star_\lambda)^c} \|Tb_j(x)\|_{\mathbf{x}} dx \\
&= \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{(\Omega^\star_\lambda)^c} \|\int_{Q_j} K(x-y)b_j(y)dy\|_{\mathbf{x}} dx \\
&\leq \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{(Q^\star_j)^c} \|\int_{Q_j} \left(K(x-y)-K(x-c_j)\right) b_j(y)dy\|_{\mathbf{x}} dx \\
&\leq \frac{2C}{\lambda}\sum_{j}\int_{Q_j}\int_{(Q^\star_j)^c} || \left(K(x-y)-K(x-c_j)\right) b_j(y)||_{\mathbf{x}} dx\, dy.
\end{aligned}$$

Como $(Q^\star_j)^c \subseteq \{x \ : \ |x-c_j| > |y-c_j|\}$, (esto se deduce de: $|x-c_j| > \sqrt{n}\ell$ y $|y-c_j| < \frac{\sqrt{n}}{2}\ell$ donde ℓ es la longitud de los lados del cubo Q) se continúa la desigualdad anterior como sigue:

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{Q_j}\int_{|x-c_j|>|y-c_j|} || \left(K(x-c_j+c_j-y)-K(x-c_j)\right) b_j(y)||_{\mathbf{x}} dx\, dy \\
&= \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{Q_j} |b_j(y)| \int_{|x-c_j|>|y-c_j|} ||K((x-c_j)-(y-c_j))-K(x-c_j)||_{\mathbf{x}} dx\, dy \\
&\leq \frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{Q_j} |b_j(y)| \ B\ dy \\
&= B\frac{2C}{\lambda}\sum_{j\in\mathbb{Z}}\int_{Q_j} |b_j(y)| dy \\
&\leq B\frac{2C}{\lambda}||f||_1 \\
&= \frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n} |f|.
\end{aligned}$$

Esto último se debe a que el núcleo $K \in H_{1,X}$, esto es:

$$\sup_{(y-c_j)\in\mathbb{R}^n}\int_{|z-c_j|>|y-c_j|} ||K((x-c_j)-(y-c_j))-K(x-c_j)||_{\mathbf{x}} dx < \infty,$$

para toda $(x-c_j) \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, lo cual implica que

$$\int_{|x-c_j|>|y-c_j|} ||K((x-c_j)-(y-c_j))-K(x-c_j)||_{\mathbf{x}} dx < B,$$

pues $|z-c_j| > \sqrt{n}\ \ell > 0$.

Sumando I, (i) y (ii) y notando que el espacio Schwartz es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > 1$ se obtiene el resultado que queremos probar. □

Para la demostración del **Lema** 3.5 primero realizaremos la siguiente observación:

Observación 3.9. $||f||_p^p = p\int_0^\infty t^{p-1}\lambda_{|f|}(t)\ dt$ con $\lambda_{|f|}(t) = |\{x : |f| > t\}|$ para todo p con $0 < p < \infty$.

Demostración Lema 3.5. Como T es un operador de tipo débil $(1,1)$, si Q es un cubo y $\widehat{Q}$ otro cubo tal que $sop(f) \subseteq \widehat{Q}$ y $\widehat{Q} \subset Q$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|Q|}\int_Q ||Tf(x)||_{\mathbf{x}}^\varepsilon &= \frac{1}{|Q|}\int_{\mathbb{R}} ||Tf(x)||_{\mathbf{x}}^\varepsilon \chi_Q \\
&= \frac{1}{|Q|}\int_0^\infty \varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}|\{x\in Q : ||Tf(x)||_{\mathbf{x}} > \lambda\}|d\lambda \\
&= \frac{1}{|Q|}\int_0^R \varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}|\{x\in Q : ||Tf(x)||_{\mathbf{x}} > \lambda\}|d\lambda \\
&\quad + \frac{1}{|Q|}\int_R^\infty \varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}|\{x\in Q : ||Tf(x)||_{\mathbf{x}} > \lambda\}|d\lambda \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\left[|Q|\lambda^\varepsilon|_0^R + \int_R^\infty \varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}\frac{c}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^n}|f|d\lambda\right] \\
&\leq \frac{1}{|Q|}\left[|Q|R^\varepsilon + c\int_{\widehat{Q}}|f|\frac{\varepsilon\lambda^{\varepsilon-1}}{\varepsilon-1}\ |_R^\infty\right] \\
&= R^\varepsilon + \frac{c}{|Q|}\int_{\widehat{Q}}|f|\frac{\varepsilon R^{\varepsilon-1}}{1-\varepsilon} \\
&\leq R^\varepsilon\left[1 + \frac{c}{|\widehat{Q}|}\int_{\widehat{Q}}|f|\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}R^{-1}\right].
\end{aligned}$$

Tomando $R = \frac{1}{|\widehat{Q}|}\int_{\widehat{Q}}|f|$ se obtiene:

$$R^\varepsilon\left[1 + \frac{c}{|\widehat{Q}|}\int_{\widehat{Q}}|f|\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}R^{-1}\right] = (\frac{1}{|\widehat{Q}|}\int_{\widehat{Q}}|f|)^\varepsilon(1 + c\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}).$$

Luego se sigue el resultado deseado. □

Para terminar este capítulo probaremos el **Lema** 3.7.

Demostración Lema 3.7. Recordemos que $M^\sharp$ se define como:

$$M^\sharp f(x) = \sup_{x\in Q}\inf_{a\in\mathbb{R}}\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(y) - a|\,dy$$

Queremos probar que para todo $0 < \delta < 1$ existe $c > 0$ tal que:

$$M_\delta^\sharp\|Tf\|_{\mathbf{x}}(x) := \left(M^\sharp\|Tf\|_{\mathbf{x}}^\delta\right)^{\frac{1}{\delta}}(x) \leq c\,M_{\overline{A}}f(x),$$

donde K es el núcleo asociado a T con $K \in H_{A,X}^\dagger$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ un cubo centrado en x y $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Definimos $f_1 = f\chi_{3Q}$ con $3Q$ el cubo que tiene el mismo centro que Q pero sus lados miden el triple de los lados de Q , y sean $f_2 = f - f_1$ y $a = ||Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}$. Entonces usando que $(a+b)^p \leq a^p + b^p$ si $0 < p < 1$ y $(a+b)^p \leq 2^p(a^p + b^p)$ si $p > 1$ se tiene:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\, ||Tf(y)||_{\mathbf{x}}^{\delta} - a|\right)^{\frac{1}{\delta}} &= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |\, ||Tf(y)||_{\mathbf{x}}^{\delta} - ||Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}|dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||Tf(y) - Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||Tf_1(y) + Tf_2(y) - Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left[\frac{1}{|Q|}\int_Q \left(||Tf_1(y)||_{\mathbf{x}}^{\delta} + ||Tf_2(y) - Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}\right) dy\right]^{\frac{1}{\delta}} \\
&\leq \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q ||Tf_1||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} + \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q ||Tf_2(y) - Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \\
&= I + II.
\end{aligned}$$

La desigualdad para I se obtiene de la Desigualdad de Kolmogörov (**Lema** 3.5), ya que el operador T es de tipo débil $(1,1)$ (**Lema**3.4), como sigue:

$$I = \left(\frac{C}{|Q|}\int_Q ||Tf_1||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \left(\frac{C}{|3Q|}\int_{3Q} |f_1(y)|dy\right) = \left(\frac{C}{|3Q|}\int_{3Q} |f(y)|dy\right) \leq CMf(x).$$

Veamos ahora la desigualdad II. Para ello utilizamos la desigualdad de Jensen, ladesigualdad de Hölder con A y $\overline{A}$ y la hipótesis $K \in H_{A,X}^{\dagger}$. Sea $R = \sqrt{n}\ell$, entonces $B(x,R) \subseteq 3\,Q$. Usemos la siguiente notación $B(x, 2^{m+1}R) := B_m^x$. Luego se tienen las siguientes desigualdades:

$$II = C\left(\frac{1}{|Q|}\int_Q ||Tf_2(y)-Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}^{\delta}dy\right)^{\frac{1}{\delta}} \leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||Tf_2(y)-Tf_2(x)||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\int_{\mathbb{R}} K_n(y-z)f_2(z)dz - \int_{\mathbb{R}} K_n(x-z)f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\int_{(3Q)^c}(K_n(y-z)-K_n(x-z))f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\int_{B(x,R)^c}(K_n(y-z)-K_n(x-z))f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\int_{|z-x|\sim 2^m R}(K_n(y-z)-K_n(x-z))f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\int_{B_m^x}(K_n((y-x)-(z-x))-K_n(-(z-x)))\chi_{|z-x|\sim 2^m R}f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(2^{m+1}R)^n}{(2^{m+1}R)^n}\int_{B_m^x}(K_n((y-x)-(z-x))-K_n(-(z-x)))\chi_{|z-x|\sim 2^m R}f_2(z)dz\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q ||\left\{\sum_{m=1}^{\infty}(2^{m+1}R)^n||(K_n((y-x)-\cdot)-K_n(-\cdot))\chi_{|z-x|\sim 2^m R}||_{A,B_m^x}||f_2||_{\overline{A},B_m^x}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q M_{\overline{A}}f_2(x)||\left\{\sum_{m=0}^{\infty}(2^{m+1}R)^n||K_n((y-x)-\cdot)-K_n(-\cdot)\chi_{|z-x|\sim 2^m R}||_{A,B_m^x}\right\}||_{\mathbf{x}}dy$$
$$\leq \frac{C}{|Q|}\int_Q M_{\overline{A}}f_2(x)C_A \leq CC_A M_{\overline{A}}f_2(x)$$
$$\leq C\ C_A\ M_{\overline{A}}f(x).$$

Observar que en la desigualdad anterior se usó la definición equivalente de la condición $H_{A,X}^{\dagger}$ es decir, la condición centrada en x_0.

Sumando I y II, tomando ínfimo sobre $a \in \mathbb{R}$ y finalmente tomando supremo sobre $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ se obtiene:

$$M_\delta^\sharp ||Tf||_{\mathbf{x}}(x) \leq CMf(x) + C\ C_A\ M_{\overline{A}}f(x).$$

Notando que $Mf(x) \leq M_{\overline{A}}f(x)$ y tomando $c = \max\{C, CC_A\}$ se logra la desigualdad deseada. $\square$

Capítulo 4

Conclusión

Primero se plantearon las condiciones introducidas por los autores Lorente, Riveros y de la Torre, en [**8**], que tiene que cumplir un núcleo K asociado a un operadores del tipo Operador Integral Singular a valores vectoriales, para que este acotado por una clase de operador maximal: el operador $M_{\overline{A}}$. Estas son las condiciones $L^{A,X}$-Hörmander.

Luego se logró definir una nueva condición: llamada $L_{\dagger}^{A,X}$-Hörmander. un poco más débil que la condición $L^{A,X}$-Hörmander.

Con esta nueva definición se pudieron probar resultados para operadores asociados a núcleos $K \in H_{A,X}^{\dagger}$ (**Teorema** 2.1), similares a los ya conocidos para núcleos que satisfacen la condición $L^{A,X}$-Hörmander.

La generalización de este Teorema nos permitió demostrar una acotación conocida para el Operador Cuadrado S que mejora la cota probada con los resultados ya conocidos para núcleos que satisfacen la condición $L^{A,X}$.

Concretamente se logró recuperar (ver [**9**]) el siguiente resultado trabajando con la función de Young $A(t) \sim \exp(t)$:

Existe $c > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} |Sf(x)|^p w(x)dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M_{\overline{A}}f(x)\right)^p w(x) \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M^2 f(x)\right)^p w(x)$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |Sf(x)|^p w(x)dx < \infty$.

Finalmente se generalizó la definición del operador cuadrado S a una familia de operadores S_B con B función de Young que cumple una cierta propiedad de convergencia a saber:

$$\|\left\{\frac{1}{n-1}\right\}_{n\in\mathbb{Z}}\|_B < \infty$$

Para estos operadores S_B se generalizó el resultado obtenido para el operador S como sigue:

Existe $c > 0$ tal que:

$$\int_{\mathbb{R}} |S_B f(x)|^p w(x)dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} (M_{\overline{A}} f(x))^p \, w(x)dx \leqslant c \int_{\mathbb{R}} \left(M^2 f(x)\right)^p w(x)dx.$$

siempre que $\int_{\mathbb{R}} |S_B f(x)|^p w(x)dx < \infty$.

También se nos planteó un interrogante que no pudimos responder, que es si se puede obtener una acotación para el operador cuadrado S del tipo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Sf(x)|^p w(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \|Tf(x)\|_{\ell^2}^p w(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}} |Mf(x)|^p w(x)dx.$$

Este continúa siendo un problema abierto.

Propuestas para seguir investigando... Alguna propuesta para continuar investigando en un futuro trabajo es la siguiente.

Continuando esta línea de trabajo, Lorente, Martell, Riveros y de la Torre en [**7**] probaron desigualdades de tipo Coifman para conmutadores de orden k con funciones de BMO para integrales singulares con núcleos en H_A, definido por

$$T_b^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x) - b(y))^k K(x-y) f(y) \, dy \, .$$

El mayor grado de singularidad de los conmutadores se va a reflejar en la condición que tienen que satisfacer sus núcleos. Para esto definieron la clases $H_{A,k}$

Definición 4.1. Sea A una función de Young y $k \in \mathbb{N}$. Decimos que el núcleo K satisface la condición $L^{A,k}$-Hörmander (escribimos $K \in H_{A,k}$), si existe $c \geq 1$ y $C > 0$ (dependiendo sólo de A y k) tal que para todo $y \in \mathbb{R}^n$ y $R > c\,|y|$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (2^m R)^n \, m^k \, \|K(\cdot - y) - K(\cdot)\|_{A,|x|\sim 2^m R} \leq C,$$

donde $\|f\|_{A,|x|\sim s} = \|f \chi_{\{|x|\sim\}}\|_{A,B(0,2\,s)}$.

Se dice que $K \in H_{\infty,k}$ si K satisface la condición anterior con $\|\cdot\|_{L^\infty,|x|\sim 2^m R}$ en lugar de $\|\cdot\|_{A,|x|\sim 2^m R}$

Con esta definición se prueba el siguiente teorema:

Teorema 4.2. *Sea $b \in BMO$ y $k \geq 0$. Sean A, B funciones de Young, tal que $\overline{A}^{-1}(t)\, B^{-1}(t)\, \overline{C}_k^{-1}(t) \leq t$ con $\overline{C}_k(t) = e^{t^{1/k}}$. Si T es un operador integral singular con núcleo $K \in H_B \cap H_{A,k}$ (o en particular, $K \in H_{B,k}$), entonces para todo $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T_b^k f(x)|^p \, w(x) \, dx \leq C \, \|b\|_{BMO}^{p\,k} \int_{\mathbb{R}^n} M_{\overline{A}} f(x)^p \, w(x) \, dx, \qquad f \in L_c^\infty,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Condiciones similares se definen cuando el núcleo K es a valores vectoriales. Para el caso del operador cuadrado S, aplicando el análogo al **Teorema** 4.2, cuando el núcleo es a valores vectoriales se obtiene el siguiente resultado: para todo $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_b^k f(x)|^p \, w(x)\, dx \leq C \, \|b\|_{\mathrm{BMO}}^{p\,k} \int_{\mathbb{R}^n} M^{k+3} f(x)^p \, w(x)\, dx, \qquad f \in L_c^\infty,$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

En [**9**] los autores para este operador específico logran mejorar el resultado: para todo $0 < p < \infty$, $w \in A_\infty$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S_b^k f(x)|^p \, w(x)\, dx \leq C \, \|b\|_{\mathrm{BMO}}^{p\,k} \int_{\mathbb{R}^n} M^{k+2} f(x)^p \, w(x)\, dx, \qquad f \in L_c^\infty, \tag{4.1}$$

siempre que el lado izquierdo sea finito.

Una propuesta para continuar este trabajo es intentar definir una condición adecuada $H^\dagger_{A,X,k}$ para núcleos a valores vectoriales pero que tengan en cuenta el orden del conmutador, que sea una combinación de la definición $H^\dagger_{A,X}$ (definida en este trabajo) y la $H_{A,k}$ definida en [**7**] . De esta forma se obtendría un resultado para núcleos que satisfacen la condición $H^\dagger_{A,X,k}$ similar al **Teorema** 4.2 , y como corolario de este, la desigualdad (4.1).

Bibliografía

[1] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic Press, New York , 1998.

[2] R. Coifman, *'Distribution function inequalities for singular integrals',* Proc. Acad. Sci. U.S.A. **69**, (1972), 2838-2839.

[3] J. Duoandikoetxea, *Fourier Analysys.* Graduate Studants in Mathematics, Volumen 29. American Mthematical Society. (2001)

[4] N. Fava, F.Zó, *Medida e Integral de Lebesgue.* Colección de Textos Universitarios, Red Olímpica , Olimpíada Matemática Argentina. (1996)

[5] J. García- Cuerva and J.L. Rubio de Francia, *Weighted Norm Inequalities and Related Topics,* North Holland Mathematics Studies **116**, (1985).

[6] D.S. Kurtz and R.L. Wheeden, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), 343–362.

[7] Lorente M., Martell J.M., Riveros M.S. and de la Torre A.*Generalized Hörmander's conditions, commutators and weights*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol **342** (2008) 1399–1425.

[8] M. Lorente, M.S. Riveros and A. de la Torre, *Weighted estimates for singular integral operators satisfying Hörmander's conditions of Young type*, Journal of Fourier Analysis and Aplications. Vol 11, No 5 (2005) 497-509.

[9] M. Lorente, M.S. Riveros and A. de la Torre, *On the Coifman type inequality for the oscillation of the one-sided averages* , Journal of Mathematical Analysis and Applications, Vol 336, Issue 1,(2007) 577-592.

[10] J.M. Martell, C. Pérez, and R. Trujillo-González, *Lack of natural weighted estimates for some singular integral operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **357** (1), (2005), 385-396 (electronic).

[11] R. OÑeil, *Fractional integration in Orlicz spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **115** (1963), 300–328.

[12] J.L. Rubio de Francia, F.J. Ruiz and J. L. Torrea, *Calderón-Zygmund theory for vector-valued functions,* Adv. in Math. **62**, (1986) 7-48.

[13] A. de la Torre and J.L. Torrea, *One-sided discrete square function,* Studia Math. **156** (3), (2003), 243-260.

[14] O. van Gaans, *Combination of Orlicz norms*, Bachelorscriptie, 17 januari 2013, Mathematisch Instituut, Universiteit Leiden.