

Universidad Nacional de Córdoba
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
Trabajo Especial de la Licenciatura en Astronomía

Efectos magnetohidrodinámicos no ideales en discos protoplanetarios.

Autor: Krapp Leonardo Javier
Director: Benítez Llambay Pablo



Este trabajo se distribuye bajo una Licencia Creative Commons AtribuciónNoComercialSinDerivadas 2.5 Argentina.

Agradecimientos

Agradezco al Dr. Frédéric Masset por asistencia prestada para este trabajo, al proyecto CONACyT 178377 que permitió la adquisición del cluster con el cual se realizaron muchas de las simulaciones en este trabajo, y al proyecto PAPIIT IN101113.

Agradezco también la colaboración del Dr. Cristian Beauge y de la Dra. Andrea Costa.

En especial, mi agradecimiento al compromiso, dedicación y constante trabajo del Lic. Pablo Benítez Llambay.

Índice

1	Dinámica del disco Protoplanetario	15
1.1	Estructura de DPP	15
1.1.1	Estructura vertical	15
1.1.2	Equilibrio radial	17
1.2	El problema de acreción	18
1.3	Viscosidad	19
1.3.1	Turbulencia y la parametrización α	20
1.4	Inestabilidad Magneto-rotacional	20
1.4.1	El criterio de Rayleigh	20
1.4.2	La importancia de los campos magnéticos	21
2	Efectos no ideales de la MHD	23
2.1	Fuentes de ionización en un DPP	23
2.2	Colisiones y fuerza de arrastre	24
2.3	Difusión de Ohm	25
2.4	Difusión Ambipolar	26
2.5	Efecto Hall	26
3	Ecuaciones multifluido y aproximación monofluido	27
3.1	Multifluido	27
3.1.1	Ecuación de inducción magnética	29
3.2	Aproximación monofluido	29
3.2.1	Ecuación de inducción magnética	31
3.2.2	Ecuaciones finales	32
4	Revisión sobre FARGO3D	35
4.1	Ecuaciones en FARGO3D	36
4.2	Método	36
4.3	Distribución de campos en una malla 3D, operador split y método de transporte.	37
4.4	El algoritmo de Constraint Transport (CT)	39
4.5	Condición de Courant-Friedrichs-Lewy	41
4.6	Trabajando sobre el código, funciones y setups	42
4.7	Unidades	42
5	Difusión de Ohm	45
5.1	Cálculo numérico de la corriente	45
5.1.1	Cálculo cartesiano	45

5.1.2	Cálculo cilíndrico	45
5.1.3	Cálculo esférico	46
5.2	Implementación numérica del término de Ohm	46
5.3	Condición CFL para la difusión de Ohm	46
6	Difusión Ambipolar	49
6.1	Implementación numérica	49
6.1.1	Cálculo numérico de las FEM	50
6.2	Estudio del decaimiento de las ondas de Alfvén	51
6.2.1	Derivación de la relación de dispersión para las ondas de Alfvén bajo la difusión Ambipolar	51
6.3	Verificación numérica de la relación de dispersión	54
6.3.1	Análisis de datos	54
6.3.2	Simulaciones y resultados	60
6.4	Condición CFL para la difusión Ambipolar.	64
7	Efecto Hall	65
7.1	Implementación numérica	65
7.1.1	Cálculo numérico de la FEM	67
7.2	Estudio de ondas circularmente polarizadas	68
7.2.1	Derivación de la relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas	68
7.3	Verificación numérica de la relación de dispersión	70
7.3.1	Análisis de datos	70
7.3.2	Simulaciones y resultados	73
7.4	Condición CFL para el efecto Hall.	74
8	MRI bajo el efecto Hall y la difusión de Ohm	75
8.1	Relación de dispersión	77
8.2	Comprobación numérica de la relación de dispersión	77
8.2.1	Efecto Hall	81
8.2.2	Difusión de Ohm y efecto Hall	82
9	Estudios preliminares de la interacción polvo-gas. Desarrollo multi- fluido hidrodinámico	87
9.1	Ecuaciones dinámicas de la interacción polvo-gas	87
9.2	Solución numérica a la interacción de arrastre para dos fluidos	88
9.3	Prueba de conservación de momento	90
9.4	Prueba de la interacción polvo-gas en DPP	91

9.4.1	Simulaciones 2D	92
9.4.2	Simulación 3D	92
9.5	Posible solución implícita al problema de interacción de N fluidos. . . .	97
10	Conclusiones	101
10.1	Estudios en difusión Ambipolar	103
10.2	Estudios en Efecto Hall	103
10.3	Crecimiento lineal de la MRI	104
10.4	Interacción de arrastre entre dos fluidos	104
11	Perspectivas futuras	107
12	Apéndice A	109
13	Apéndice B	115
14	Apéndice C	120

Clasificación del trabajo

00 General:

05. Statistical physics, thermodynamics, and nonlinear dynamical systems

40 Electromagnetism, Optics, Acoustics, Heat Transfer, Classical Mechanics, and Fluid Dynamics:

47. Fluid dynamics

50 Physics of Gases, Plasmas, and Electric Discharges:

51. Physics of gases

52. Physics of plasmas and electric discharges

90 Geophysics, Astronomy, and Astrophysics:

97 Stars

97.10.Gz Accretion and accretion disks

Resumen

En este trabajo realizamos un estudio de los efectos no ideales de la MHD, conocidos como efecto Hall, difusión Ambipolar y difusión de Ohm. Éstos son capaces de suprimir la inestabilidad Magneto Rotacional presente en discos de acreción magnetizados y generar nuevos mecanismos de acreción.

Para el estudio de estos efectos es necesario el uso de códigos MHD, a fin de resolver la compleja dinámica involucrada. Así, el principal objetivo de este trabajo es la utilización, explotación y extensión del código público magnetohidrodinámico FARGO3D mediante el desarrollo de un nuevo módulo físico que incluya los efectos no ideales de la MHD conocidos como efecto Hall y difusión Ambipolar.

Presentamos aquí una serie de simulaciones que demuestran la efectiva implementación numérica de estos módulos. Esta implementación abre una puerta hacia el estudio de nuevos efectos en la interacción planeta-disco.

Introducción

Objetivo y motivación de este trabajo

Se sabe que los discos protoplanetarios (DPP) son discos de acreción débilmente ionizados (Armitage 2010). Así, el estudio de la dinámica del proceso de formación planetaria requiere de conocimientos en hidrodinámica y magnetohidrodinámica (MHD). Por otro lado, de las observaciones se ha estimado la tasa de acreción de los discos y modelado su composición química, especificando la densidad y el tipo de especies ionizadas (Hartmann et al. 1998). Sin embargo, en la actualidad, uno de los interrogantes que persiste refiere a cuáles son los mecanismos de acreción y cómo éstos afectan al proceso de formación planetaria. Hace unos 25 años Balbus y Hawley (1991) presentaron un modelo que explica la acreción de los DPP a partir de inestabilidades que se desarrollan de la rotación diferencial del disco magnetizado, generando un disco turbulento. El modelo se conoce como “Inestabilidad Magneto-Rotacional” (MRI).

Si bien la MRI ha resultado exitosa para describir el transporte de momento angular en los DPP, la mayoría de los trabajos que estudian la interacción planeta-disco, como por ejemplo estudios en migración planetaria (Masset 2008, Masset & Snellgrove 2004), adhieren a un modelo de disco laminar, y no turbulento como lo requiere la MRI.

Recientemente, Bai y Stone (2013) demostraron que al considerar efectos de la MHD *no ideal*, se suprime la MRI y aparecen mecanismos de acreción alternativos asociados al campo magnético. Un aspecto fundamental del trabajo es la aparición de flujos laminares en las capas ecuatoriales del disco, lo cual es consistente con los modelos aplicados anteriormente en el estudio de la interacción planeta-disco. Otros trabajos, como los de Gressel et al. (2015) muestran como la dinámica global del disco es alterada por estos efectos no ideales.

Dichos efectos son conocidos como difusividad de Ohm, Ambipolar y efecto Hall y serán el principal objeto de estudio de este trabajo.

Recientemente en el grupo de sistemas planetarios del Observatorio Astronómico de Córdoba (OAC) se ha comenzado el estudio en discos magnetizados, mediante la utilización del código magnetohidrodinámico (MHD) FARGO3D, desarrollado por el Lic. Benítez-Llambay, director de éste trabajo y miembro del grupo y el Dr. Masset de la UNAM (México). Este código está basado principalmente en las técnicas numéricas de Stone & Norman (1992), Hawley et al. (1995) y (Masset 2000).

En particular, con este código el grupo está estudiando el efecto del torque de corrotación bajo la acción de campos magnéticos débiles que perturban la dinámica del disco plasmático. Si bien estos estudios se encuentran en desarrollo, Guilet et al. (2013) realizaron un trabajo pionero exploratorio, demostrando que un campo magnético muy

débil es capaz de cambiar considerablemente la dinámica conocida, por lo que no es claro si los resultados obtenidos en trabajos previos podrían ser extrapolados de algún modo a este nuevo escenario. Es interesante notar que los autores realizaron simulaciones MHD bidimensionales, isotermas y laminares.

El efecto Hall, la difusión Ambipolar y la difusión de Ohm son el resultado de colisiones entre los fluidos que componen al sistema físico. Estos efectos, combinados, producen una resistividad efectiva en los discos, alterando significativamente la dinámica global del disco. Por lo tanto, entender cuales son los mecanismos y consecuencias de esta física es de importancia en el avance del estudio de la interacción planeta-disco. Así, por un lado, sería interesante verificar de forma independiente los resultados provistos por Bai & Stone (2013), y por otro, investigar cuales son las similitudes entre simulaciones tridimensionales complejas y los modelos bidimensionales sencillos como los de Guilet et al. (2013). En particular, responder la última pregunta es interesante ya que el costo de las simulaciones tridimensionales es muy alto, por lo que poder reducir el estudio a simples casos bidimensionales sería deseable. Además, el estudio analítico y el desarrollo de modelos se simplifica notablemente en el caso bidimensional. La implementación numérica de estos efectos físicos es conocida en la actualidad, (ver por ejemplo Bai & Stone 2013, Bai 2014 y referencias dentro), mientras que la evaluación de los coeficientes de resistividad necesarios pueden ser realizados asumiendo equilibrio químico (ej: Hirose & Turner 2011). Es interesante destacar que hasta la fecha no existen estudios de planetas embebidos en discos con esta física novedosa ya que el trabajo de Bai & Stone (2013) fue sobre la estructura local del disco.

En vista de éstas consideraciones, éste trabajo final tiene como objetivo:

1. Implementación de nuevos módulos físicos en el código magnetohidrodinámico FARGO3D, a saber:
 - Difusión de Ohm.
 - Difusión Ambipolar.
 - Efecto Hall.
2. Implementación de un módulo que resuelva la interacción de arrastre de N fluidos.

Ambos objetivos implican la incorporación de la misma física pero bajo aproximaciones distintas. Esto responde al hecho de que los términos de Ohm, Ambipolar y Hall son consecuencia de las interacciones de arrastre entre distintos fluidos, descritas en un modelo que simplifica el problema a un único fluido. Así, en el fondo, estamos estudiando las colisiones entre los fluidos.

Ambipolar y Ohm son mecanismos meramente difusivos, mientras que el efecto Hall actúa dividiendo los modos lineales de las ondas de Alfvén. Son esencialmente modelos en una escala macroscópica de los cambios en la conductividad del medio a partir de las colisiones microscópicas entre los fluidos. En este trabajo vamos a mostrar dos de los modelos actuales para trabajar con colisiones en fluidos magnetizados. El tratamiento general se describe en un marco de *multifluido*, en donde hay que resolver las ecuaciones para cada uno de los fluidos interactuantes junto con las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctrico y magnético. Por otro lado, desarrollaremos una simplificación del problema general que permita cuantificar y observar los efectos difusivos en forma explícita mediante una ecuación general de inducción magnética. Aquí solo se resuelven las ecuaciones para un único fluido, y las ecuaciones de Maxwell se combinan con las ecuaciones del resto de los fluidos para derivar la ecuación de inducción magnética. Esta simplificación es una aproximación *monofluido*, y es con la cual trabajaremos en la mayoría de los casos.

Descripción y organización del trabajo

En el capítulo 1 desarrollaremos los conceptos fundamentales de la dinámica y estructura de un disco protoplanetario, explicando el problema de acreción, la necesidad de una viscosidad efectiva y la parametrización de Shakura-Sunyaev; finalmente realizaremos un breve resumen acerca de la MRI y la importancia de los campos magnéticos en los DPP.

En el capítulo 2 puntualizaremos sobre los conceptos de la MHD no ideal, explicando el efecto Hall, la difusión Ambipolar y difusión de Ohm a partir de un modelo clásico de colisiones entre fluidos.

En el capítulo 3 presentaremos las ecuaciones completas de la dinámica de fluidos capaces de colisionar entre sí e interactuar con un campo magnético. Se darán a conocer las ecuaciones en un marco de *multifluido* y la aproximación *monofluido*, clave para éste trabajo.

En el capítulo 4 ofrecemos una breve revisión acerca de FARGO3D, detallando algunos de los métodos que utiliza el código, como los algoritmos de división, transporte y Constraint Transport (CT), y el desarrollo de nuevos **setups** dentro del código.

En los capítulos 5, 6 y 7 precisaremos en como hemos realizado las implementaciones numéricas de los términos de Hall, Ohm y difusión Ambipolar en distintos sistemas de coordenadas, conjuntamente con una serie de pruebas realizadas para comprobar las implementaciones cartesianas de los términos y parte del análisis de los datos. Las

pruebas consisten en estudiar relaciones de dispersión de distintas ondas en forma analítica y numérica.

En el capítulo 8 presentamos un estudio realizado en MRI bajo la acción del efecto Hall y la difusión de Ohm. El estudio permite comprobar la implementación numérica de Ohm y Hall en coordenadas cilíndricas y es nuestro primer problema de MHD *no ideal* resuelto en una configuración de disco.

En el capítulo 9 mostraremos parte del trabajo realizado con las ecuaciones del modelo *multifluido*, en el caso puramente hidrodinámico, contando cómo hemos implementado un módulo que permite la interacción de 2 fluidos en FARGO3D, las pruebas realizadas, y las primeras simulaciones sobre una configuración de DPP para reproducir los aspectos fundamentales de la interacción polvo-gas. Además, proponemos una solución numérica al problema de arrastre entre N fluidos, la cual aún no ha sido implementada en FARGO3D.

En los capítulos 10 y 11 exponemos las principales conclusiones de éste trabajo y nuestras perspectivas futuras.

1 Dinámica del disco Protoplanetario

La dinámica de los discos protoplanetarios es compleja y responde, en esencia, a la dinámica de un fluido bajo la acción de fuerzas internas, como por ejemplo el potencial del objeto central. Sabemos con certeza que los DPP son discos de acreción débilmente ionizados (Armitage 2010). Estas dos características son fundamentales a la hora de establecer un modelo que los reproduzca. Sabemos también de la presencia de campos magnéticos en DPP y que califican como uno de los agentes fundamentales para que se produzca la acreción. Pues, para que exista acreción, debe de encontrarse algún mecanismo que genere un torque neto sobre el fluido y así un transporte de momento angular. Desde principios de la década de los 90's, se ha establecido y fortalecido el modelo de MRI (Balbus & Hawley 1991), el cual explica la acreción a partir de turbulencia y fluctuaciones asociadas al campo magnético. El modelo sigue consolidado hasta hoy, aunque cabe destacar que sus ecuaciones no involucran efectos difusivos poco estudiados en la actualidad, como la difusión Ambipolar y el efecto Hall. Estos efectos pueden disminuir la turbulencia de los DPP, haciendo ineficaz la acreción mediante MRI (Bai & Stone 2013), lo cual promueve la necesidad de nuevos mecanismos de acreción.

En este capítulo, primero trataremos algunos aspectos básicos en la estructura del DPP y luego nos concentraremos en el problema de acreción.

1.1 Estructura de DPP

Los DPPs están compuestos fundamentalmente por gas neutro, polvo, y una fracción de gas ionizado. Los discos se forman en torno a estrellas recientes que han dejado un remanente de gas difuso y que tiene un momento angular suficientemente grande como para no colapsar al centro. La acreción, sustentada por el transporte de momento angular, presenta escalas temporales mayores a los tiempos orbitales (Armitage 2010), por esta razón asumimos que el disco es una estructura estática, equilibrándose radial y verticalmente en los tiempos de interés.

1.1.1 Estructura vertical

La estructura vertical del disco está sustentada por el equilibrio entre las fuerzas de presión y el potencial gravitatorio del objeto central. Para derivar la ecuación de equilibrio hidrostático vamos a asumir que la masa del disco es mucho menor que la masa del objeto central, de tal forma que podemos despreciar el potencial del disco y

solo tendremos un problema de campo central. Esta aproximación es válida, en general, cuando $M_{disco} \sim 10^{-2} M_*$ (Armitage 2010).

Por otro lado asumimos que el espesor vertical de disco, h , es una fracción invariante del radio orbital. Esto se sigue del hecho de que el disco presenta una gran área superficial capaz de enfriarse por pérdidas radiativas eficientemente. El enfriamiento implica temperaturas bajas $10 \sim 100 \text{ K}$ y por lo tanto disminución en la agitación térmica. Por lo tanto, la presión será incapaz de soportar el colapso gravitacional a menos que h sea una fracción pequeña del radio, $\frac{h}{r} \ll 1$.

La estructura fina del disco protoplanetario surge de considerar el balance de fuerzas en la dirección vertical a una altura z respecto del plano medio (plano ecuatorial) de un disco orbitando un estrella central M_* . En la figura 1.1 presentamos un esquema sencillo para derivar la ecuación de balance de fuerzas.

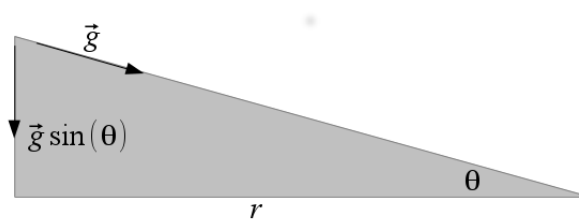


Figure 1.1: Esquema de la estructura vertical del disco protoplanetario.

La ecuación para la componente normal g_z es:

$$g_z = g \sin(\theta) = \frac{GM_*}{(r^2 + z^2)} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (1.1)$$

donde G es la constante de gravitación de Newton, M_* es la masa del objeto central y z, r son las coordenadas cilíndricas altura y radio, respectivamente.

La fuerza por unidad de volumen, en la dirección normal, será entonces ρg_z y deberá ser compensada por la fuerza de presión en la misma dirección. Asumiendo un estado isoterma local se tiene que $P = c_s^2 \rho$, y si además $T(z) = T_0$ se tiene que la velocidad del sonido $c_s = c_s(r)$, por lo tanto:

$$c_s^2 \frac{d\rho}{dz} = - \frac{GM_* z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rho \quad (1.2)$$

puede verse que la solución a esta ecuación es el perfil de densidad volumétrico del disco de la forma:

$$\rho = C_0 \exp \left(\frac{GM_*}{c_s^2 (r^2 + z^2)^{1/2}} \right) \quad (1.3)$$

donde $C_0 = \rho(z = 0)$. Esta expresión es rara vez utilizada. La condición $z \ll r$ implica $g_z \simeq \Omega^2 z$ (con $\Omega = \sqrt{\frac{GM_*}{r^3}}$), con lo cual podemos reescribir la solución 1.3 de la forma:

$$\rho = \rho_0 e^{-z^2/2h^2} \quad (1.4)$$

donde la densidad ρ_0 del plano medio puede escribirse en términos de la densidad superficial Σ (la integral de la densidad en z) de la forma $\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\Sigma}{h}$, y $h = \frac{c_s}{\Omega}$ es la escala vertical del disco. c_s será constante siempre que el disco sea isoterma tanto vertical como radialmente. Además, en general la densidad superficial Σ sigue una relación de potencia con el radio r , $\Sigma = \Sigma_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\sigma}$.

Si asumimos un perfil radial para la velocidad del sonido de la forma $c_s \sim r^{-\beta}$, la relación de aspecto varía de la forma $\frac{h}{r} \sim r^{-\beta+1/2}$. Siempre que $\beta < \frac{1}{2}$ el disco aumentará su estructura vertical junto con el radio siguiendo una forma de bowl o curvada. El perfil de temperatura en este caso es $T(r) \sim r^{-2\beta}$.

Éstas consideraciones serán importante en el caso de desarrollar simulaciones 3D dado que la relación de aspecto es en este caso $\frac{h}{r} \sim r^{(-2\beta+1)/2}$.

1.1.2 Equilibrio radial

Sin bien el problema de campo central es Kepleriano para el caso de partículas, cuando se trata de un fluido, la componente radial del gradiente de presión hace que la velocidad del fluido sea subkepleriana. El equilibrio rotacional viene dado por la ecuación 1.5:

$$\frac{v_\phi^2}{r} = \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} \quad (1.5)$$

Consideraremos la componente radial de la ecuación de momento del fluido (ecuación 1.5). Dado que el disco se enfría radialmente (recordar $T \sim r^{-2\beta}$), la presión disminuye en la dirección de crecimiento de r por lo que $dP < 0$, por lo tanto v_ϕ es menor que en el caso meramente kepleriano.

Para cuantificar el efecto podemos asumir un perfil radial de presión de la forma:

$$P = P_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-n} \quad (1.6)$$

con $P_0 = \rho_0 c_s^2$. Sustituyendo en la ecuación 1.5 se sigue:

$$v_\phi = v_k \left(1 - n \frac{c_s^2}{v_k^2} \right)^{1/2} \quad (1.7)$$

donde $v_k = \sqrt{\frac{GM_*}{r}}$ es la velocidad kepleriana y el índice n suele ser función de los índices σ y β , $n(\sigma, \beta)$ ($n = 1$ cuando $\sigma = \beta = 0.0$). Se puede ver que $\frac{c_s}{v_k} = \frac{h}{r}$, por lo tanto la disminución de la velocidad kepleriana es del orden $1 - \mathcal{O}\left(\frac{h}{r}\right)^2$, con $\frac{h}{r} = 0.05$ se tiene $v_\phi \sim 0.996v_k$.

1.2 El problema de acreción

El proceso de acreción no es más que el transporte radial de material y se suele cuantificar por medio de tasas de la forma \dot{M} en unidades (SI) de kg/año. En un DPP, en ausencia de torques, el momento angular L del fluido se conserva, es decir que conservará su órbita y se moverá sobre ella hasta que alguna perturbación actúe sobre el mismo. La acreción implica la extracción (o entrega) de energía y momento angular sobre el elemento de fluido orbitando. Este proceso tiene consecuencias radiativas que permiten estimar la tasa de acreción de un DPP a partir de observables. Hoy en día se conocen diversas relaciones entre la luminosidad de los discos y la tasa de acreción \dot{M} . Pringle entrega un completo desarrollo del problema en su Annual Review sobre discos de acreción (Pringle 1981).

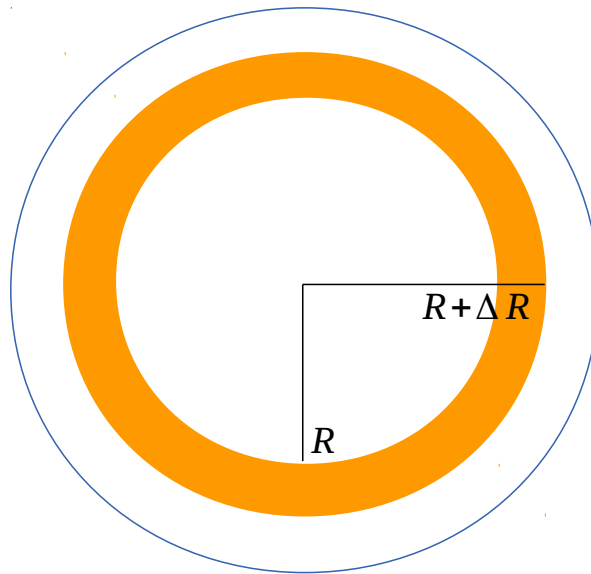


Figure 1.2: Anillo de fluido de radio R y espesor ΔR .

La idea básica es considerar un disco bidimensional de densidad superficial $\Sigma = \Sigma(r, t)$, se toma un anillo de radio R y espesor ΔR (figura 1.2), de tal forma que el momento angular es $L = 2\pi R \Delta R \Sigma(R, t) R^2 \Omega$. Escribimos la ecuación para el momento angular del anillo, es decir $\frac{dL}{dt} = \Gamma$, donde Γ es el torque viscoso, y escojamos un modelo de viscosidad. En el caso de Pringle (1981) $\Gamma = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial G}{\partial r}$, donde $G(R, t)$ es el torque que ejerce el anillo exterior consecutivo al anillo considerado. Dado que la fuerza viscosa responde a $\nu \Sigma A$ (donde ν es la viscosidad cinemática y A la superficie del anillo) se sigue que $G(R, t) = 2\pi R \Delta R \nu \Sigma$. Reemplazando en Γ , tomando $\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$ y despejando $\frac{\partial \Sigma}{\partial t}$ se obtiene:

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} = \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r^{1/2} \frac{\partial}{\partial r} (\nu \Sigma r^{1/2})] \quad (1.8)$$

La relación 1.8 para la densidad superficial (o lo que es lo mismo, para el momento angular) es una ecuación difusiva. Cabe destacar que uno de los parámetros fundamentales en esta ecuación es la viscosidad ν , la cual hay que modelar.

1.3 Viscosidad

Si bien Pringle ha derivado una ecuación consistente para el transporte de momento angular en los discos, todavía no hay certezas de cual es el modelo adecuado para la viscosidad ν . El conocimiento actual del problema implica que sin un mecanismo de turbulencia, las tasas de acreción observadas son incapaces de reproducirse en la teoría.

La pregunta es entonces, qué mecanismos físicos son responsables de generar una viscosidad, indispensable para el transporte del momento angular observado.

El primer candidato es considerar colisiones intermoleculares, en donde la viscosidad ν_m es:

$$\nu_m \sim \lambda c_s \quad (1.9)$$

con $\lambda = \frac{1}{n\sigma_{mol}}$ corresponde al camino libre medio entre las moléculas, con n densidad numérica de moléculas y σ_{mol} la sección eficaz de las moléculas, recordar que c_s es la velocidad del sonido en el medio.

Siguiendo al desarrollo de Armitage (2010) se puede verificar que $\nu_m \sim 2.5 \times 10^7 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$. Existe una cantidad típica en los DPP, que introducimos aquí, conocida como tiempo característico viscoso $t_\nu = \frac{r^2}{\nu_m}$. En este caso se encuentra que $t_\nu \sim 3 \times 10^{13}$ años.

Este tiempo característico puede ser medido a partir de el decaimiento en la tasa de acreción (sobre la estrella central) en función de la edad estelar. Para DPP en torno a estrellas tipo Sol se sabe que $t_\nu \sim 10^6$ años. Es obvio entonces que los 7 órdenes de magnitud de diferencia imposibilitan que las colisiones moleculares sean un mecanismo de viscosidad en los DPP.

1.3.1 Turbulencia y la parametrización α

Al presente, el modelo robusto que explica la acreción en los discos protoplanetarios se sostiene del concepto de "turbulencia". La idea de turbulencia no es más que considerar pequeñas fluctuaciones del campo de velocidad (por ejemplo) sobre la media en una región diferencial del disco. Así los efectos de la micro escala juegan un rol determinante en la evolución del disco.

Esta turbulencia puede ser macroscopicamente caracterizada como una "viscosidad efectiva" cuya magnitud puede estimarse a partir de un análisis dimensional.

Si la turbulencia es relativamente isotrópica, la escala de las fluctuaciones turbulentas no es superior al parámetro de escala vertical del disco h , y la velocidad de la fluctuaciones no es superior a c_s (dado que movimientos supersónicos resultan en choques y disipación rápida) se puede derivar la siguiente relación:

$$\nu = \alpha c_s h \quad (1.10)$$

donde α es un parámetro adimensional, conocido como el parámetro α de Shakura-Sunyaev y determina la eficiencia del transporte de momento angular a partir de la turbulencia. (Shakura-Sunyaev, 1973).

1.4 Inestabilidad Magneto-rotacional

El parámetro α de Shakura-Sunyaev entrega una fórmula para la "viscosidad efectiva" y con ella, la pregunta de cuál es el origen de la turbulencia. La existencia de la turbulencia se justifica a partir de inestabilidades que pueden tener origen hidrodinámico o magnetohidrodinámico. Vamos a estudiar algunos criterios para generar inestabilidades en un DPP.

1.4.1 El criterio de Rayleigh

La estabilidad de un fluido que rota, asociado a perturbaciones hidrodinámicas, puede ser derivada a partir de la linealización de las ecuaciones de fluido, estableciendo

perturbaciones proporcionales a $e^{i\omega t}$, donde ω es la frecuencia de un modo de Fourier arbitrario. Aquellos modos que resulten con ω imaginario serán responsables de crecimiento o decrecimiento exponencial de las perturbaciones. En discos no magnetizados y no autogravitantes ($M_{\text{disco}}/M_{\text{estrella}} < h/r$) se verifica el criterio de estabilidad de Reyleigh (Pringle & King, 2007).

Este criterio básicamente implica que un fluido es estable ante perturbaciones aximétricas si y solo si el momento angular específico crece con el radio. Para que haya una inestabilidad se requiere:

$$\frac{dl}{dr} = \frac{d}{dr}(r^2\Omega) < 0. \quad (1.11)$$

En un disco Kepleriano el momento angular específico es una función creciente del radio, pues $l \propto \sqrt{r}$, por lo cual el flujo es hidrodinámicamente estable. En otras palabras, las perturbaciones hidrodinámicas no alcanzan a generar un flujo turbulento y por lo tanto no existe la posibilidad de una viscosidad efectiva asociada a la turbulencia.

1.4.2 La importancia de los campos magnéticos

Ya se ha destacado que los DPP son discos de acreción débilmente ionizados. La presencia de cargas libres en el fluido permite la interacción del medio con campos magnéticos (ya sean autoinducidos por el movimiento de las cargas o externos). Bajo estas consideraciones se puede pensar al fluido como un plasma débilmente ionizado o equivalentemente un plasma débilmente magnetizado.

En este caso, la condición de inestabilidad lineal difiere levemente de la condición de Rayleigh para los discos hidrodinámicos puros. Aquí se requiere que el decrecimiento de la velocidad angular con el radio:

$$\frac{d}{dr}(\Omega^2) < 0 \quad (1.12)$$

lo cual se satisface en los discos keplerianos y subkeplerianos dado que $\Omega \propto r^{-3/2}$, por lo tanto $\frac{d}{dr}(\Omega^2) \propto -3r^{-4}$.

Esta inestabilidad, conocida como MRI, fue derivada por Balbus y Hawley (1991) y es el modelo de acreción adoptado por innumerables trabajos hasta la actualidad.

A partir de la MRI, Balbus y Hawley cuantifican el parámetro α de Shakura-Sunyaev a partir de las fluctuaciones en los campos de velocidad y magnético:

$$\alpha = \left\langle \frac{\delta v_r \delta v_\phi}{c_s^2} - \frac{B_r B_\phi}{4\pi \rho c_s^2} \right\rangle \quad (1.13)$$

donde los $\langle \rangle$ indican promedio temporal. A partir de esta relación, se conectan las microescalas turbulentas con la dinámica global del disco, permitiendo el transporte de momento angular en forma eficiente. Simulaciones numéricas revelan que la contribución del tensor de tensiones de Maxwell ($B_r B_\phi$) es la más importante en la ecuación 1.13 y los valores en algunos casos son consistentes con las estimaciones observacionales de $\alpha \sim 10^{-2}$.

En principio, el desarrollo de esta inestabilidad responde a las ecuaciones MHD bajo el régimen ideal, en donde no se involucran efectos difusivos en la evolución temporal de la inducción magnética.

De esta forma, *bajo el régimen de la MHD ideal*, la inestabilidad magnetorotacional parece ser el único mecanismo eficiente para el transporte de momento angular, lo cual verifica la importancia de la interacción entre el campo magnético y el DPP.

2 Efectos no ideales de la MHD

En este capítulo describiremos algunos fenómenos físicos relevantes cuando se estudia la dinámica de fluidos débilmente ionizados que interactúan con campos magnéticos. Si bien estos efectos se corresponden a una micro-escala, pueden no ser despreciables y alterar drásticamente la dinámica global del disco protoplanetario.

La naturaleza de estos efectos se debe a colisiones del tipo choque elástico (colisiones que conservan energía y momento) e interacciones de campo entre las partículas con carga. En un disco compuesto por gas neutro y gas ionizado, es esperable que en alguna escala espacial y temporal se den este tipo de colisiones y es importante estudiar si estas colisiones repercuten en la dinámica global del disco.

Discutiremos primeramente las fuentes de ionización en los DPP y luego las consecuencias de las colisiones sobre el campo magnético \vec{B} en términos de la difusión de Ohm, Ambipolar y el efecto Hall.

2.1 Fuentes de ionización en un DPP

Los DPP son generalmente demasiado fríos para dar lugar a la ionización térmica, excepto en regiones internas, con radios menores a la unidad astronómica. Existen esencialmente 3 fuentes de ionización principales (Armitage 2010) y se deben a:

- Radiación X proveniente de la protoestrella
- Rayos cósmicos
- Decaimiento radioactivo de las partículas en el interior del disco

La ionización de rayos X es consecuencia de la emisión de las estrellas centrales de los DPP, tipo T-Tauri. Ésta emisión es en general variable en el lapso de unas semanas y la luminosidad promedio es del orden de $L_X \sim 10^{29} - 10^{31} \text{erg s}^{-1}$ para estrellas con masas solares.

Los rayos cósmicos circundantes también son capaces de ionizar el medio del DPP, sus tasas de ionización son difíciles de modelar dado que supernovas cercanas al disco pueden ionizar con mucha mayor intensidad al medio (Bai 2011a).

Por último, el decaimiento radioactivo, fundamentalmente de ^{26}Al , produce tasas de ionizaciones del orden de $3 \times 10^{-19} \text{s}^{-1}$. Si bien la tasa de ionización es menor que en los otros casos, es importante dado que se pueden ionizar regiones muy internas del disco donde los rayos cósmicos y la radiación X son incapaces de penetrar. En la figura 2.1 mostramos las distintas tasas de ionización en función de la columna de densidad que son capaces de penetrar.

Otras posibles fuentes de ionización son fotones energéticos de la corona estelar que puede fotoionizar la superficie más externa del disco.

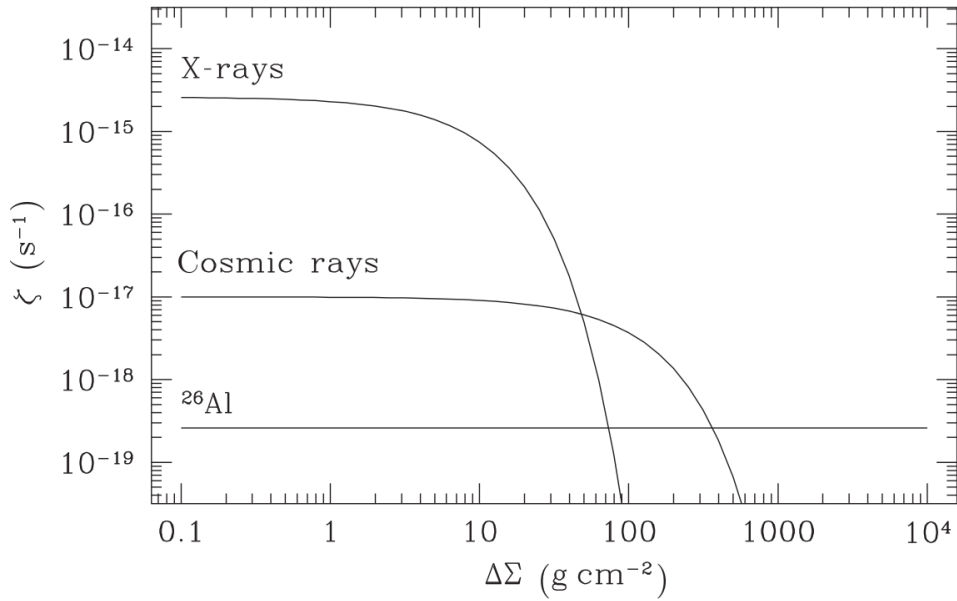


Figure 2.1: En la figura se observa como disminuye la tasa de ionización ζ , (número total de iones por unidad de tiempo) para los rayos X y cósmicos a medida que penetran en columnas de mayor densidad superficial $\Delta\Sigma$, es decir mayor profundidad. El decaimiento radioactivo se mantiene constante y alcanza regiones de alta densidad, en el interior del disco. Figura adaptada de Armitage (2010).

2.2 Colisiones y fuerza de arrastre

En primer lugar es importante revisar algunos puntos de la física clásica correspondientes a las interacciones entre partículas. En este caso son de interés las colisiones que clasificamos en dos clases:

1. colisiones de Coulomb: responden a interacciones de campo entre partículas con carga. Al interactuar un electrón con el campo de un ión, éste puede ser deflectado y cambiar su momento, radiando o entregándole momento al ion.
2. colisiones clásicas: choques entre partículas cargadas y neutras. Pueden tratarse de choques entre iones y neutros o electrones y neutros.

Las interacciones se modelan a partir de fuerzas de “arrastre” entre los fluidos. Si la diferencia de velocidad entre las partículas aumenta, mayor será la magnitud de la colisión, y por lo tanto mayor el intercambio de momento. De esta forma, la fuerza de arrastre deberá ser proporcional a la diferencia de velocidad entre los fluidos y al

número de partículas por unidad de volumen, pues mientras mayor sea el número de iones, mayor la probabilidad de colisión con el neutro.

En general se tiene:

$$\vec{F}_{ji} = \gamma_{ij} \rho_i \rho_j (\vec{v}_i - \vec{v}_j) \quad (2.1)$$

Donde \vec{F}_{ij} es la fuerza por unidad de volumen que ejerce el fluido i sobre el fluido j y γ_{ij} es la tasa de colisión entre ambos fluidos por unidad de densidad.

Existen diversos modelos para determinar el valor de γ , por ejemplo en la dinámica clásica la frecuencia de colisión es proporcional a la sección eficaz σ de las partícula. Aquí seguimos el desarrollo de Wardle & Ng (2007) en donde se modela la tasa de colisión por unidad de densidad como:

$$\gamma_{ij} = \langle \sigma v \rangle_{ij} / (m_i + m_j) \quad (2.2)$$

donde $\langle \sigma v \rangle_{ij}$ es la tasa de transferencia de momento entre la especie i y la especie j .

Como se verá más adelante, los efectos colisionales son responsables del cambio en la conductividad del medio. Esto será aclarado cuando se desarrolle la ecuación de inducción general en la aproximación monofluido (sección 3) en donde modelaremos las fuerzas de arrastre a partir de la ecuación 2.1. Por ahora continuaremos explicando brevemente las consecuencias de estas colisiones sobre el campo magnético \vec{B} .

2.3 Difusión de Ohm

La difusión de Ohm está asociada a las colisiones de Coulomb entre iones y electrones en un plasma ideal. En este caso, las densidades y temperaturas son lo suficientemente bajas ($T \sim 10 - 100$ K, y $\rho_i \sim \rho_e \sim 10^{-3} \rho_{\text{neutro}}$) como para que consideremos este tipo de interacción. Así que en el marco que hemos presentado para los DPP, se asocia a la difusión de Ohm con la colisión elástica entre electrones y neutros (Bai 2014).

El campo magnético en el disco esta sustentado por corrientes debidas al movimiento de los iones y electrones en el medio neutro. Al colisionar los electrones con el gas neutro, disminuye su movimiento, y así, disminuye la conductividad en el medio.

Como consecuencia, se genera una difusión del campo magnético que aumentará a medida que la densidad del gas neutro se incremente y con ésta las colisiones. Por lo tanto la difusión de Ohm será más importante en las regiones del disco donde el gas neutro sea más denso.

Estos efectos podrán reproducirse si uno considera la fuerza de arrastre en las ecuaciones de movimiento de electrones y neutro. Además aparecen explícitos en la ecuación

de inducción magnética bajo la aproximación monofluido, como veremos en el capítulo 3.

2.4 Difusión Ambipolar

La difusión Ambipolar es el caso análogo a la difusión de Ohm, pero teniendo en cuenta colisiones entre el gas neutro y los iones. Es importante en regiones donde aumenta la densidad de iones (respecto a la densidad de electrones) y se incrementa la intensidad del campo magnético. Esto se entiende a partir de que mientras mayor sea el campo magnético, mayor será la fuerza de Lorentz que experimenten los iones, lo que puede producir un aumento en su momento lineal. De esta forma los choques con el gas neutro serán más intensos perdiendo gran cantidad de movimiento. Al igual que Ohm, la consecuencia neta es la disminución de la intensidad del campo magnético en estas regiones.

Sus efectos podrán reproducirse si uno considera la fuerza de arrastre en las ecuaciones de movimiento de iones y neutro, al igual que en el caso de Ohm, estos efectos están explícitos en la ecuación de inducción magnética bajo la aproximación monofluido, la cual estudiaremos en el capítulo 3.

2.5 Efecto Hall

El efecto Hall no es en realidad un efecto difusivo sobre el campo magnético (Bai 2014), se debe a la deriva entre iones y electrones ($\vec{v}_i - \vec{v}_e$) en la dirección normal al campo \vec{B} , la cual produce un campo eléctrico denominado “campo de Hall” proporcional a, $\vec{J} \times \vec{B}$, que no es más que la fuerza de Lorentz sobre las cargas. En el límite de Hall puro, las colisiones con el gas neutro son suficientemente intensas como para desacoplar a los iones del campo magnético. La menor tasa de colisión de los electrones, les permite mantenerse congelados al campo magnético. En este caso $\vec{J} = en_e(\vec{v}_i - \vec{v}_e)$.

Una de sus consecuencias es afectar los modos de Alfvén, los cuales son ondas provenientes de perturbaciones en el medio y se estudian a partir de un análisis lineal en modos de Fourier, como veremos en los capítulos 6 y 7.

Hall genera la división de los modos de Alfvén de ondas circularmente polarizadas en dos nuevos modos, uno rápido y otro lento denominados modos de Whistler o izquierdo (rápido) y modo derecho (lento).

El término $\vec{J} \times \vec{B}$ aparece explícito en la ecuación de inducción magnética en la aproximación monofluido (capítulo 3). El cambio de signo del campo de Hall altera la dinámica en formas diferentes, lo cual quedará claro al estudiar el crecimiento lineal de la MRI bajo el efecto Hall.

3 Ecuaciones multifluido y aproximación monofluido

En este capítulo introduciremos las ecuaciones generales del problema de varios fluidos que colisionan entre sí y que son capaces de interactuar con un campo magnético. Las colisiones estarán modeladas por una fuerza de arrastre como la descrita en la sección 2.2.

Primeramente desarrollaremos un modelo general que involucra las ecuaciones dinámicas completas, sin aproximaciones, al cual denominamos *multifluido*. Aquí se deben resolver las ecuaciones de continuidad, momento y energía de todos los fluidos junto a las ecuaciones de Maxwell para el campo magnético.

Luego explicaremos algunas aproximaciones importantes para simplificar nuestro problema físico, tal que solamente se deben resolver las ecuaciones de continuidad y de momento para un solo fluido. Las ecuaciones del resto de los fluidos se combinan junto con las ecuaciones de Maxwell para dar lugar a una ecuación de inducción magnética general. A este esquema final de ecuaciones lo denominamos *aproximación monofluido*.

3.1 Multifluido

Consideremos un conjunto de N fluidos y asumamos que la transferencia de masa entre especies distintas es nula y que no existen sumideros externos de energía sobre el sistema de fluidos. Las ecuaciones 1D pueden escribirse como:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \rho_i \vec{q}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i \vec{q}_i + P_i \mathbf{I}) = \alpha_i \rho_i \left(\vec{E} + \vec{q}_i \times \vec{B} \right) + \sum_{j \neq i}^N f_{ij} \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[u_i \left(e_i + P_i + \frac{1}{2} \rho_i q_i^2 \right) \right] = \alpha_i \rho_i \vec{q}_i \cdot \left(\vec{E} + \vec{q}_i \times \vec{B} \right) + \sum_{j \neq i}^N G_{ij} \quad (3.3)$$

donde f_{ij} es la tasa de transferencia de momento entre la especie i y la especie j y está dada por la fuerza de roce $\vec{F}_{ij} = -\gamma_{ij} \rho_i \rho_j (\vec{v}_j - \vec{v}_i)$, G_{ij} es la tasa de transferencia de energía entre la especie i y la especie j y está dada por la relación $\vec{q}_i \cdot f_{ij}$. Además la energía total de la especie i es $e_i = \frac{P_i}{\gamma_i - 1} + \frac{1}{2} \rho_i q_i^2$, $\vec{q}_i = (u_i, v_i, w_i)$ es la velocidad y α_i corresponde a la carga de la especie i . P es la presión de cada especie, \vec{E} y \vec{B} son

los campos eléctrico y magnético respectivamente, α denota la carga de la especie, e \mathbf{I} es la matriz identidad.

A este conjunto de ecuaciones para los fluidos, deben añadirse las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético. Siguiendo el desarrollo 1D se tiene:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad \frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = -\mu_0 J_z, \quad \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 J_y \quad (3.5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (3.6)$$

donde hemos despreciado la corriente de desplazamiento, dado que estamos en un régimen no relativista.

La corriente \vec{J} está dada por:

$$\vec{J} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i \vec{q}_i \quad (3.7)$$

y además se exige la condición:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i = 0 \quad (3.8)$$

Este conjunto de ecuaciones tiene como variables al campo de velocidad \vec{q} , la densidad ρ , la presión P para cada fluido y los campos \vec{E} y \vec{B} . El sistema de ecuaciones así presentado tiene la misma cantidad de ecuaciones que de variables, por lo cual admite solución. Si además se asume un estado isoterma, se obtiene la relación entre la presión y densidad:

$$P_i = \rho_i c_{si}^2 \quad (3.9)$$

donde c_{si} es la velocidad del sonido para el fluido i . En este trabajo siempre hemos considerado un régimen isoterma a partir de la ecuación 3.9, por lo que no hemos resuelto nunca la ecuación 3.3.

3.1.1 Ecuación de inducción magnética

Uno de los mayores desafíos del modelo *multifluido* es encontrar alguna solución para la ecuación de Maxwell-Faraday:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} \quad (3.10)$$

Resolver esta ecuación en términos de \vec{E} es difícil, ya que uno debe conocer cual es la distribución de cargas fuente del campo \vec{E} y luego resolver la ecuación de Poisson, por ejemplo.

3.2 Aproximación monofluido

La aproximación monofluido es una descripción del problema físico en donde interactúan muchos fluidos distintos, pero la dinámica general del problema está gobernada por uno de ellos. Esto significa que las escalas espaciales y temporales del sistema quedan determinadas por las escalas del fluido de mayor interés en el problema.

En el caso de un disco protoplanetario débilmente ionizado, podemos separar su composición en varios fluidos, uno de ellos completamente neutro (no presenta distribuciones de carga en todas sus escalas espaciales) y otros con cargas, resultantes de la ionización. El corazón de la aproximación que vamos a desarrollar es la relación entre las densidades de los fluidos con carga y el neutro, la misma es del orden de $\frac{\rho_i}{\rho_n} \sim 10^{-2}$ o 10^{-3} (Armitage 2010).

Supongamos que tenemos N fluidos de los cuales uno de ellos es neutro ($\alpha_1 = 0$) y que las escalas dinámicas de interés están definidas en función de este fluido.

La ecuación de momento para el fluido neutro es:

$$\frac{\partial \rho_1 \vec{q}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1 + P_1 \mathbf{I}) = \sum_{j \neq 1}^N f_{1j} \quad (3.11)$$

Ahora bien, dado que estamos interesados en la descripción dinámica del fluido neutro podemos normalizar las escalas temporales y espaciales a las escalas dinámicas típicas de este fluido, asumiendo que estas escalas están definidas por las colisiones del neutro con el resto de las especies.

Definimos entonces la longitud de colisión l_c (camino libre medio entre dos colisiones consecutivas) y frecuencia de colisión ω_c (inverso del tiempo medio entre dos colisiones consecutivas) como:

$$\omega_c = \sum_{j \neq 1}^N \gamma_{1j} \rho_j \quad (3.12)$$

$$l_c = \frac{v_c}{\omega_c} \quad (3.13)$$

donde v_c es la velocidad media o típica entre dos colisiones consecutivas y se define $\tau_c = \frac{1}{\omega_c}$.

Definimos la misma escala pero para los fluidos con carga:

$$\omega_i = \sum_{j \neq i}^N \gamma_{ij} \rho_j \sim \gamma_{i1} \rho_1 \quad (3.14)$$

$$l_i = \frac{v_i}{\omega_i} \quad (3.15)$$

La aproximación para $\omega_i \sim \gamma_{i1} \rho_1$ es válida dado que $\rho_1 \gg \rho_i$ para todo i .

Dado que los fluidos con carga experimentan la fuerza de Lorentz, sus escalas pueden ser definidas también por:

$$\omega_R = \alpha_i B \quad (3.16)$$

$$l_R = \frac{v_i}{\omega_R} \quad (3.17)$$

que no son más que las denominadas frecuencia y radio de Larmor.

Supongamos que las escalas dinámicas de los fluidos con carga están determinadas por l_i y ω_i (todo el análisis puede realizarse de igual manera para el caso en que l_R y ω_R sean las escalas dominantes) y hagamos un cambio de variable que permita normalizar las variables temporales y espaciales a las escalas del fluido neutro de la forma:

$$t' = \frac{t}{\tau_c} \quad x' = \frac{x}{l_c} \quad (3.18)$$

Aplicando esto sobre la ecuación 3.2, junto a la aproximación, 3.14 se sigue:

$$\frac{\rho_i q_i}{\tau_c} + \frac{1}{l_c} (\rho_i q_i^2 + P) = \alpha \rho_i (E + q_i B) - \gamma_{1i} \rho_i \rho_1 (q_1 - q_i) \quad (3.19)$$

dividiendo todo por $\gamma_{1i} \rho_1 = \frac{1}{\tau_i}$, se sigue:

$$\frac{\tau_i}{\tau_c} q_i + \frac{l_i}{l_c} \left(q_i + \frac{P}{\rho_i} \right) = \frac{\alpha_i}{\gamma_{1i} \rho_1} (E + q_i B) - (q_1 - q_i) \quad (3.20)$$

Donde hemos utilizado que $l_i = \frac{q_i}{\gamma_{1i} \rho_1}$. Dada la relación entre las densidades, $\frac{\rho_i}{\rho_n} \sim 10^{-2}$ o 10^{-3} , se cumple la condición $\frac{\tau_i}{\tau_c} \sim \frac{l_i}{l_c} \ll 1$ y los términos de la izquierda en la ecuación 3.20 son despreciables. Se concluye que:

$$\alpha_i (\vec{E} + \vec{q}_i \times \vec{B}) - \gamma_{1i} \rho_1 (\vec{q}_1 - \vec{q}_i) \sim 0 \quad (3.21)$$

$$\alpha_i \rho_i (\vec{E} + \vec{q}_i \times \vec{B}) = \gamma_{1i} \rho_1 \rho_i (\vec{q}_1 - \vec{q}_i) \quad (3.22)$$

para cada especie i . De esta forma se pueden despreciar los términos de presión e inercia en la ecuación de momento de las especies con carga.

Si retornamos a la ecuación de momento del fluido neutro 3.11 y reemplazamos la fuerza de colisiones a partir de la ecuación de balance 3.22 se sigue:

$$\sum_{j \neq 1} f_{1j} = - \sum_{j \neq 1} \gamma_{j1} \rho_1 \rho_j (\vec{q}_j - \vec{q}_1) = \sum_{j \neq 1} \alpha_j \rho_j (\vec{E} + \vec{q}_j \times \vec{B}) = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.23)$$

donde hemos utilizado la condición de cuasi-neutralidad $\sum_j \alpha_j \rho_j = 0$ y la definición de la corriente $\vec{J} = \sum_j \alpha_j \rho_j \vec{q}_j$.

$$\frac{\partial \rho_1 \vec{q}_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_1 \vec{q}_1 \vec{q}_1 + P_1 \mathbf{I}) = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.24)$$

De esta forma, el fluido neutro es capaz de experimentar una fuerza de Lorentz a partir del intercambio de momento con las cargas y de la ecuación de balance de fuerzas 3.22.

3.2.1 Ecuación de inducción magnética

La ecuación de Maxwell 3.10 puede ahora resolverse en términos más elementales despejando el campo \vec{E} de la ecuación 3.22 y utilizando la expresión para la corriente $\vec{J} = \sum_i \alpha_i \rho_i \vec{q}_i$. Cowling (1957) ha demostrado que se puede escribir al campo \vec{E} de la forma:

$$\vec{E} = -\vec{q} \times \vec{B} + \eta_O \vec{J} + \eta_H \vec{J} \times \hat{B} + \eta_A \vec{J}_\perp \quad (3.25)$$

donde $\vec{J} = \nabla \times \vec{B}$, \vec{J}_\perp designa la componente perpendicular de \vec{J} respecto a \vec{B} y η_O , η_H , η_A son las denominadas difusividades de Ohm, Hall y Ambipolar respectivamente. En este caso general de N fluidos pueden escribirse como:

$$\eta_O = \frac{1}{\sigma_O} \quad \eta_H = \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \quad \eta_A = \frac{\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

donde σ_O es la conductividad de Ohm, σ_1 es la conductividad de Hall y σ_2 es la conductividad de Pedersen, que en términos del parámetro de Hall, $\beta_i = \frac{\alpha_i \vec{B}}{\gamma_{1i} \rho_1}$, pueden escribirse como (Falle 2003):

$$\sigma_O = \frac{1}{B} \sum_{i=2}^N \alpha_i \rho_i \beta_i$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{B} \sum_{i=2}^N \frac{\alpha_i \rho_i}{1 + \beta_i^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{B} \sum_{i=2}^N \frac{\alpha_i \rho_i \beta_i}{1 + \beta_i^2}$$

Basta reemplazar \vec{E} en la ecuación 3.10 para obtener finalmente la ecuación de inducción general para el caso monofluido, de la forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{q} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta_O \vec{J} + \eta_H \vec{J} \times \hat{B} + \eta_A \vec{J}_\perp) \quad (3.26)$$

3.2.2 Ecuaciones finales

Bajo estas consideraciones el conjunto completo de ecuaciones en la aproximación monofluido es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q}) = 0 \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \rho \vec{q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{q} \vec{q} + P \mathbf{I}) = \vec{J} \times \vec{B} \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{q} \times \vec{B}) - \nabla \times (\eta_O \vec{J} + \eta_H \vec{J} \times \hat{B} + \eta_A \vec{J}_\perp) \quad (3.29)$$

$$P = \rho c_s^2 \tag{3.30}$$

junto a la condición para el campo magnético $\nabla \cdot \vec{B} = 0$.

Este conjunto de ecuaciones es con el cual hemos trabajado y desarrollado implementaciones en el código FARGO3D, las cuales estudiaremos en el capítulo 5, 6 y 7.

4 Revisión sobre FARGO3D

En este capítulo vamos a revisar algunos conceptos numéricos y métodos que constituyen la base del funcionamiento del código FARGO3D, para más detalles acceder a su documentación en <http://fargo.in2p3.fr/>.

FARGO3D es un código MHD euleriano multidimensional, fundamentalmente desarrollado para resolver discos protoplanetarios y estudiar las interacciones planeta-disco. Aunque como veremos, puede ser utilizado para distintos problemas independientes de los DPP. El código está escrito en el lenguaje de programación C, aunque utiliza diferentes scripts de `python`. Está paralelizado y puede correr tanto en CPUs (central processing unit) como en GPUs (graphics processing unit). En resumen, las características principales del código son:

- Resuelve las ecuaciones de la hidrodinámica (continuidad, Navier-Stokes y energía interna) y de la magnetohidrodinámica (MHD) en una malla Euleriana.
- Es multidimensional (1D, 2D, 3D) y funciona en varias geometrías (Cartesiana, Cilíndricas y Esféricas).
- Marcos de referencia no inerciales
- Ecuaciones de estado Isotérmicas y Adiabáticas.
- Incluye MHD ideal (Método de las características y Constraint Transport (CT))
- Tensor de viscosidad completo en las tres geometrías.
- Algoritmo FARGO (Masset 2000) implementado en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.
- El esquema de advección orbital de FARGO está implementado para la MHD.
- Modo secuencial para un proceso en CPUs.
- Modo paralelo para clusters de CPUs.
- Un GPU (CUDA sin MPI).
- Modo paralelo para GPU, para clusters en GPU (utiliza una versión que combina MPI-CUDA).

El código fue desarrollado con la ayuda de macrocomandos los cuales permiten compilar de acuerdo a los requerimientos de cada problema.

4.1 Ecuaciones en FARGO3D

El código FARGO3D está diseñado para resolver las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla P + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} + \nabla \cdot T + \vec{F}_{ext} \quad (4.2)$$

donde $T = \rho \nu [\nabla \vec{v} + (\nabla \vec{v})^T - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \vec{v})I]$ es el tensor de viscosidad.

$$\rho \left[\frac{\partial e^*}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) e^* \right] = -P \nabla \cdot \vec{v} \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) \quad (4.4)$$

donde ρ es la densidad volumétrica, \vec{v} es el campo de velocidad del fluido, P es la presión, \vec{B} es el campo magnético, \vec{F}_{ext} son las fuerzas externas (ej: gravedad), ν es la viscosidad cinemática y e^* es la energía interna específica (e/ρ , donde e es energía por unidad de volumen).

El sistema se cierra utilizando una ecuación de estado que relaciona la presión con la densidad o la energía interna.

En el caso isoterma se tiene:

$$P = c_s^2 \rho \quad (4.5)$$

y en el caso adiabático

$$P = (\gamma - 1)e \quad (4.6)$$

donde c_s es la velocidad del sonido en el medio ($c_s^2 = \frac{dP}{d\rho}$) y $\gamma = (n + 2)/n$ con n el grado de libertad de cada partícula de gas.

4.2 Método

FARGO3D sigue al código ZEUS (Stone & Norman 1992a) resolviendo las ecuaciones hidrodinámicas utilizando un método de diferencias finitas sobre una malla alternada. La solución de la evolución temporal de las cantidades se logra a partir de métodos

explícitos utilizando la aproximación del operador *separador* (split). Para avanzar la ecuación de inducción magnética se utiliza el método de las características (MOC) (Stone & Norman 1992b) y para conservar la divergencia del campo magnético el algoritmo de transporte restringido (CT) (Evans & Hawley 1988).

4.3 Distribución de campos en una malla 3D, operador split y método de transporte.

Para resolver las ecuaciones en diferencias finitas, FARGO3D utiliza una malla o grilla de celdas sobre las cuales se distribuyen los campos y los escalares. Las cantidades vectoriales (\vec{v} , \vec{B}) se ubican sobre las caras de la celda mientras que los escalares (ρ , e) en el centro. Ésta disposición evita la pérdida de precisión en el computo de la vortencidad ($\nabla \times \vec{v}$), que es muy importante en el estudio de la dinámica de los DPP.

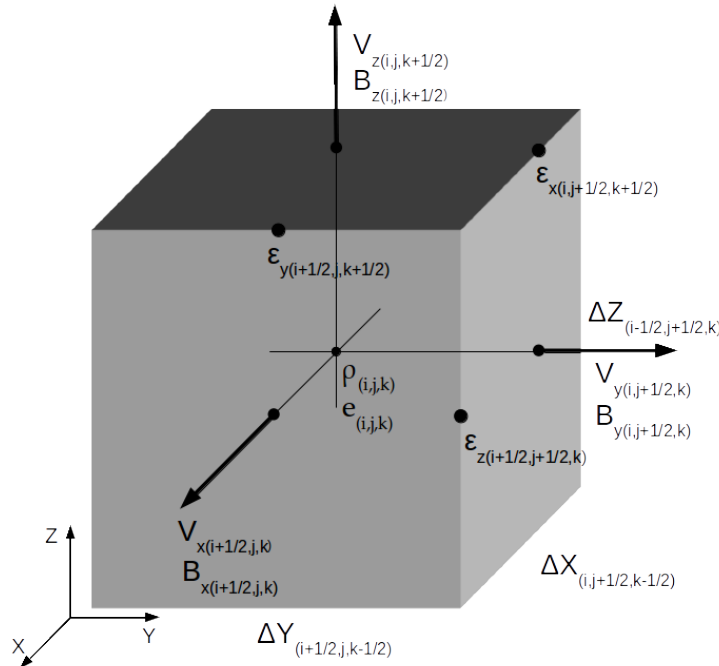


Figure 4.1: Distribución de campos de un celda en FARGO3D

En la figura 4.1 y de aquí en adelante se sigue la convención de índices:

$$i \rightarrow x$$

$$j \rightarrow y$$

$$k \rightarrow z$$

y los desplazamientos sobre las caras se denotan por $\pm \frac{1}{2}$.

En hidrodinámica, la ecuaciones diferenciales tiene la forma general:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Q\vec{v}) = S(Q, \vec{v}, t) \quad (4.7)$$

donde Q suele ser un escalar y $S(Q, \vec{v}, t)$ corresponde a los denominados términos fuente. Por ejemplo Q puede ser el momento radial, S puede ser la fuerza de gravedad o presión. El proceso de división (split) es básicamente dividir a la ecuación 4.7 en dos ecuaciones de la forma:

$$\begin{aligned} A_1 &= S \\ A_2 &= -\nabla \cdot (Q\vec{v}) \end{aligned}$$

De esta forma, la solución de la ecuación 4.7 se obtiene en dos pasos. El primer paso está asociado a la fuente y el segundo paso es la denominada etapa de transporte (Stone & Norman 1992a).

La etapa completa de solución implica un avance parcial de $Q(0) = Q^0 \rightarrow Q^1$ en función de las fuentes y luego el transporte de la forma $Q^1 \rightarrow Q^2 = Q(t + \Delta t)$.

Este paso final de transporte es una advección pura de la cantidad Q bajo la acción del campo de velocidades \vec{v} . El problema general de advección corresponde a:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot (Q\vec{v}) = 0 \quad (4.8)$$

lo cual es una ley de conservación de la cantidad Q . La forma integral de la ecuación 4.8 es:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int Q dV + \int Q\vec{v} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.9)$$

donde hemos asumido que el volumen de control no tiene una dependencia explícita con el tiempo (al permutar los operadores). De esta forma variaciones temporales de Q dentro del volumen de control están dadas exclusivamente por su flujo a través de sus caras.

Si Q se asume en el centro de la celda (es decir en la posición i, j, k) la ecuación 4.9 en diferencias finitas corresponde a:

$$\frac{Q^{n+1} - Q^n}{\Delta t} V = - \left[\Phi_{Xi+\frac{1}{2}} - \Phi_{Xi-\frac{1}{2}} + \Phi_{Yj+\frac{1}{2}} - \Phi_{Yj-\frac{1}{2}} + \Phi_{Zk+\frac{1}{2}} - \Phi_{Zk-\frac{1}{2}} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

donde Φ representa al flujo y el término derecho es entonces el flujo neto en el volumen V en el paso de tiempo $n + \frac{1}{2}$.

Para el computo de los flujos se sigue (por ejemplo para la componente X):

$$\Phi_{Xi+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left[v_{Xi+\frac{1}{2}} Q^* S_{i+\frac{1}{2}} \right]^{n+\frac{1}{2}} \quad (4.11)$$

donde Q^* es la valor de la cantidad centrada Q sobre la cara $i + \frac{1}{2}$, y se calcula interpolando. El campo de velocidad ya está en la posición de la cara de la celda por lo que no hace falta interpolarlo, (una de las ventajas de la malla escalonada).

Existen diversas formas de computar el lado izquierdo de la ecuación 4.11. Una de ellas es distribuir el índice temporal de la forma:

$$\Phi_{Xi+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = v_{Xi+\frac{1}{2}}^n Q^* S_{i+\frac{1}{2}}^n \quad (4.12)$$

donde Q^* es el valor de $Q_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$. Uno de los métodos utilizados para el cómputo de Q^* es Van Leer.

4.4 El algoritmo de Constraint Transport (CT)

FARGO3D integra la ecuación de inducción magnética utilizando el algoritmo de Constraint Transport (CT), el cual computa la fuerza electromotriz (FEM) y con ésta actualiza el campo magnético a partir del flujo magnético, satisfaciendo la condición de divergencia magnética nula.

Para actualizar el campo magnético con este algoritmo uno debe escribir la ecuación de Maxwell-Faraday en forma integral:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla \times \mathcal{E} d\Omega \quad (4.13)$$

donde Ω es la superficie de integración. Aplicando el teorema de Stokes se sigue:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} \mathcal{E} d(\partial\Omega) \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = - \int_{\partial\Omega} \mathcal{E} d(\partial\Omega) \quad (4.15)$$

donde Φ es el flujo magnético, y la integral sobre $\partial\Omega$ denota la integral de línea sobre el contorno de la superficie Ω .

Para entender como se resuelve la ecuación 4.15 numéricamente vamos a ejemplificar la actualización de la componente z del campo magnético en una malla cartesiana. Primero escribimos la derivada temporal del flujo magnético en diferencias finitas:

$$\frac{\Delta \Phi_{z,i,j,k}}{\Delta t} = \frac{(B_{z,i,j,k}^{n+1} - B_{z,i,j,k}^n) A_z}{\Delta t} \quad (4.16)$$

donde $A_z = \Delta x \Delta y$ es el área a través de la cual se calcula el flujo magnético Φ . Veamos ahora el lado derecho de la ecuación 4.15, el cual corresponde a la integral de línea de la FEM.

$$\begin{aligned} \frac{(B_{z,i,j,k}^{n+1} - B_{z,i,j,k}^n) A_z}{\Delta t} &= (\mathcal{E}_{y,i+\frac{1}{2},j,k} - \mathcal{E}_{y,i-\frac{1}{2},j,k}) \Delta y \\ &+ (\mathcal{E}_{x,i,j+\frac{1}{2},k} - \mathcal{E}_{x,i,j-\frac{1}{2},k}) \Delta x \end{aligned} \quad (4.17)$$

De la ecuación 4.17 se puede despejar la componente $B_{z,i,j,k}^{n+1}$ una vez computado el valor de la FEM.

Se puede ver que:

$$\frac{1}{\Delta t} (\Phi_{z,i,j,k}^{n+1} - \Phi_{z,i,j,k}^n + \Phi_{y,i,j,k}^{n+1} - \Phi_{y,i,j,k}^n + \Phi_{x,i,j,k}^{n+1} - \Phi_{x,i,j,k}^n) = 0 \quad (4.18)$$

Dado que la ecuación 4.18 es la derivada temporal del flujo total de una celda, se sigue que

$$\frac{d}{dt} (\nabla \cdot \vec{B}) = 0 \quad (4.19)$$

Por lo tanto CT asegura $\nabla \cdot \vec{B} = cte$. Así, si inicialmente el campo tiene divergencia nula, entonces la relación 4.19 asegura que la divergencia se conservará nula durante la integración para todo t .

En el caso de MHD ideal, donde $\mathcal{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, se utiliza el algoritmo MOC (method of characteristic) para el correcto centrado del producto cruz entre \vec{v} y \vec{B} en la posición de \mathcal{E} , esto se hace componente a componente interpolando espacialmente y extrapolando temporalmente. No vamos a precisar en este algoritmo ya que solo nos interesa aquí el computo de los términos no ideales de la FEM.

En nuestro caso, el procedimiento general implica calcular la FEM debida a la difusión Ambipolar, de Ohm y efecto Hall. Para realizar el cálculo de estas cantidades

de forma consistente con el centrado de las cantidades en la malla, serán necesarias interpolaciones espaciales. En el caso de Ohm y Ambipolar, asumiremos que la FEM es constante durante todo el paso de integración, (ie: $\mathcal{E}^{n+\frac{1}{2}} = \mathcal{E}^n$), lo cual es satisfactorio debido a la naturaleza difusiva de las ecuaciones. Al final se suman todas estas FEMs a la FEM convectiva, $\mathcal{E} = \vec{v} \times \vec{B}$, para actualizar en campo magnético con ecuaciones de la forma 4.17. Así la FEM general será:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{AD} + \mathcal{E}_H + \mathcal{E}_O + \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.20)$$

4.5 Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

La condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) es necesaria para la estabilidad de las soluciones al resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales utilizando un método de diferencias finitas explícito. Establece un límite superior para el paso de tiempo impidiendo el crecimiento de modos que conducen a la inestabilidad de la solución.

Dado que FARGO3D resuelve ecuaciones diferenciales en derivadas parciales cuenta con una condición CFL para determinar el paso de tiempo de integración. Éste paso de tiempo es variable y combina toda la información de las señales presentes en la simulación. Esto significa que la condición CFL depende de la densidad, velocidad, campo magnético, dimensiones espaciales de la grilla, etc.

Cualquier nuevo término que incorporemos de forma explícita para la integración de las ecuaciones, lleva asociado su criterio CFL, el cual debe ser incorporado adecuadamente en el código. Para esto es necesario modificar la función `cfl_cpu()` dentro del archivo fuente `cfl.c`.

En los desarrollos de las implementaciones numéricas de los términos no ideales en la ecuación de inducción magnética mencionaremos las condiciones CFL incorporadas para el efecto Hall y la difusión de Ohm y Ambipolar.

Si la implementación es *implícita*, como en el caso de las soluciones a la fuerza de arrastre entre los fluidos, no es necesaria esta condición ya que se puede probar que la solución es incondicionalmente estable (Stone 1997).

Físicamente, la condición CFL es una limitación para la distancia que puede atravesar la información en un único paso de tiempo, ésta distancia debe ser menor al tamaño de una celda. Así, en el caso 1D la condición CFL es:

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x}{|u| + c_s} \right) \quad (4.21)$$

donde u es la velocidad local del fluido y c_s es la velocidad del sonido. El mínimo se toma sobre todas las celdas de la malla. La derivación formal del criterio puede establecerse mediante un análisis de Von Neumann, para estudiar la estabilidad de las ecuaciones diferenciales (haremos este análisis en la implementación del efecto Hall).

Para cada dimensión espacial que se agregue, se suma una condición CFL. Además, nuevas ecuaciones y términos, como viscosidades y difusividades también deben ser tenidos en cuenta, de forma tal que la condición CFL en FARGO3D es:

$$\Delta t = C_0 / \left(\max[\delta t_1^{-2} + \delta t_1^{-2} + \delta t_2^{-2} + \delta t_3^{-2} + \dots + \delta t_n^{-2}] \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

donde $C_0 \sim 0.5$ es un valor típico y δt_j es el paso de tiempo mínimo (de toda la malla) asociado algún término y a alguna dimensión espacial.

4.6 Trabajando sobre el código, funciones y setups

FARGO3D está organizado en una serie de directorios de los cuales los más importantes, para comenzar a trabajar, son los directorios `\src` y `\setups`. Dentro del directorio `\src` se encuentran todas las funciones del código (básicamente archivos del tipo `.c`) en donde, entre varias cuestiones, se resuelven todas las ecuaciones con los algoritmos presentados. El código está preparado para correr tanto en procesadores de CPU como de GPU y cuenta con un traductor de lenguajes para no tener que programar en CUDA.

El directorio `\setups` contiene los archivos que definen nuestro problema físico: un archivo con las condiciones iniciales (`condinit.c`), un archivo con las condiciones de contorno (`setup.bound`), un archivo con los parámetros de nuestro problema (`setup.par`) y un archivo con los macrocomandos externos que indican activaciones de distintos bloques de códigos (`setup.opt`) y módulos necesarios para el problema. Así, para resolver un problema, se debe definir el directorio `\setup` correspondiente, por ejemplo el directorio `\fargo` es el setup de un problema planeta-disco 2D.

Cada vez que hagamos mención al desarrollo de un setup en el trabajo, nos referiremos a la construcción de estos archivos adaptados el problema a resolver.

4.7 Unidades

El código permite trabajar en varios sistemas de unidades diferentes, e incluso se pueden definir sistemas nuevos. Todas las cantidades dimensionales dentro del código son multiplicadas por ciertos prefactores dependientes del sistema de unidades utilizado. Hay dos formas de realizar esto, por un lado es posible definir todo el problema

en un sistema de unidades particular (ej: MKS); sin embargo en la mayoría de los casos se utiliza la opción RESCALE, la cual permite definir el problema en unidades arbitrarias, por ejemplo $G = 1$, $M_* = 1$, $\mu_0 = 1$, etc. y transformar esto a MKS o CGS según se desee.

Los sistemas actualmente implementados son:

- MKS:

- $G = 6.674 \times 10^{11} \text{ N(m/Kg)}^2$
- $M_* = 1.9891 \times 10^{30} \text{ Kg}$
- $R_0 = 1.49597871 \times 10^{11} \text{ m}$
- $\mu_0 = 1.25663706143591 \times 10^{-6} \text{ Tm/A}$

- CGS:

- $G = 6.674 \times 10^8 \text{ dyn(cm/g)}^2$
- $M_* = 1.9891 \times 10^{33} \text{ g}$
- $R_0 = 1.49597871 \times 10^{13} \text{ cm}$
- $\mu_0 = 12.5663706143591 \text{ Gs cm/(Fr/s)}$

Donde utilizamos la relación $[A] = 10^{-1} \text{ c Fr/s}$, Fr denota la unidad de Franklin.

- Sistema adimensional:

- $G = 1.0$
- $M_* = 1.0$
- $R_0 = 1.0$
- $\mu_0 = 1.0$

En este trabajo, a menos que hagamos mención explícita a lo contrario, utilizaremos el sistema adimensional.

5 Difusión de Ohm

En este capítulo puntualizaremos sobre la implementación realizada para resolver el término de Ohm en la ecuación general de inducción magnética. Esta implementación es importante, más allá de describir a la resistividad de Ohm, porque implica el cálculo de la corriente \vec{J} necesaria para la difusión Ambipolar y el efecto Hall. Básicamente se describe el algoritmo para el computo de la FEM \mathcal{E}_O en la coordenada z cartesiana y se detalla el computo de la corriente \vec{J} en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

5.1 Cálculo numérico de la corriente

Recordemos que una de las condiciones de la aproximación MHD es despreciar las corrientes de desplazamiento en la ecuación de Maxwell-Ampere, por lo tanto se sigue que:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} \quad (5.1)$$

A continuación se ejemplifica el cálculo de la componente z y θ de la corriente en los 3 sistemas de coordenadas de FARGO3D. Todas las implementaciones utilizan diferencias finitas para el cálculo de las derivadas espaciales en el $\nabla \times \vec{B}$.

5.1.1 Cálculo cartesiano

En coordenadas cartesianas la componente z de la corriente se calcula como:

$$J_z = \frac{B_{y,i,j-\frac{1}{2},k} - B_{y,i-1,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} - \frac{B_{x,i-\frac{1}{2},j,k} - B_{x,i-\frac{1}{2},j-1,k}}{\Delta y} \quad (5.2)$$

donde omitimos el factor μ_0 .

5.1.2 Cálculo cilíndrico

Aquí el cálculo es más complejo y hay que tener en cuenta que la terna cilíndrica de FARGO3D es ϕ , r , z , por lo tanto el campo $B_x = B_\phi$ y el campo $B_r = B_y$. Análogamente $\Delta x = \Delta\phi$ y $\Delta y = \Delta r$, la coordenada y (r) que multiplique al campo B_x (B_ϕ) debe estar exactamente en la posición del campo (lo cual implica que el índice j debe ser el mismo tanto para la coordenada como para el campo); en FARGO3D esta coordenada se denomina y_{med} . Por otro lado el factor y (r) que aparece dividiendo

debe estar en la posición de J_z , lo cual es sobre la arista y corresponde al valor medio de la coordenada y entre dos celdas consecutivas, $y_{\min} = \frac{y_j + y_{j-1}}{2}$.

$$J_z = \frac{1}{y_{\min}} \left(\frac{y_j B_{x,i-\frac{1}{2},j,k} - y_{j-1} B_{x,i-\frac{1}{2},j-1,k}}{\Delta y} - \frac{B_{y,i,j-\frac{1}{2},k} - B_{y,i-1,j-\frac{1}{2},k}}{\Delta x} \right) \quad (5.3)$$

5.1.3 Cálculo esférico

En este caso hay que recordar que la terna esférica en FARGO3D es $\phi \ r \ \theta \rightarrow x \ y \ z$, por lo tanto $B_x = B_\phi$, $B_y = B_r$ y $J_z = J_\theta$. Se deben utilizar nuevamente los valores de y_{med} e y_{\min} como mostramos para las coordenadas cilíndricas.

$$J_z = \frac{1}{y_{\min}} \left(\frac{B_{y,i,j-\frac{1}{2},k} - B_{y,i-1,j-\frac{1}{2},k}}{\sin(z_k) \Delta x} - \frac{y_j B_{x,i-\frac{1}{2},j,k} - y_{j-1} B_{x,i-\frac{1}{2},j-1,k}}{\Delta y} \right) \quad (5.4)$$

5.2 Implementación numérica del término de Ohm

El término de Ohm se escribe como:

$$\mathcal{E}_O = \eta_O \vec{J} \quad (5.5)$$

donde η_O es la difusividad de Ohm, y en la implementación actual se tiene que $\eta_O = \tilde{\eta}_O \rho$, con $\tilde{\eta}_O = cte$ y ρ la densidad del neutro. Esto se debe a que la difusión de Ohm es más importante en las regiones donde la densidad del neutro aumenta, la cantidad $\tilde{\eta}_O$ representa la tasa de colisiones con los electrones y es una función de la densidad y la carga de los electrones, en este trabajo se asumirá constante. Para cada paso de tiempo se calculan las componentes de la corriente \vec{J} y luego se multiplica por el valor de la difusividad η_O y finalmente se suma \mathcal{E}_O a la FEM que se tenga ya calculada, para actualizar el campo magnético vía CT.

La prueba de la implementación de la difusión óhmica se detallará cuando se estudie el efecto Hall en el capítulo 8.

5.3 Condición CFL para la difusión de Ohm

El criterio CFL empleado para la difusión de Ohm es:

$$\Delta t_O = \min \left(\frac{\Delta x^2}{\eta_O 2D}, \frac{\Delta y^2}{\eta_O 2D}, \frac{\Delta z^2}{\eta_O 2D} \right) \quad (5.6)$$

Esta condición es agregada junto con el resto que ya existen en FARGO3D para asegurar la estabilidad de la implementación.

6 Difusión Ambipolar

Este capítulo se divide en dos secciones, en la primera de ellas explicaremos la implementación numérica del término de difusión Ambipolar, mientras que en la segunda sección estudiaremos la relación de dispersión para ondas de Alfvén bajo el efecto de esta difusión. Aquí detallaremos algunas derivaciones importantes, los procedimientos numéricos para el análisis de datos y las simulaciones realizadas con sus resultados.

La implementación numérica utiliza el computo de la corriente descrito en la sección 5.1 y entrega las componentes de la FEM \mathcal{E}_{AD} que luego se suman las FEM de Ohm y convectiva para actualizar el campo magnético con una FEM general \mathcal{E} . Para el computo de \mathcal{E}_{AD} no se deben realizar actualizaciones parciales del campo magnético. Autores como Choi et al. (2009) prueban la estabilidad de esta solución.

Respecto a las simulaciones y pruebas efectuadas para corroborar la implementación hemos decidido estudiar el decaimiento de las ondas de Alfvén siguiendo el trabajo de Choi et al. (2009).

Al final del capítulo explicitamos el criterio CFL para la difusión Ambipolar.

6.1 Implementación numérica

La ecuación de inducción magnética en el régimen de MHD no ideal, restringida al caso particular de difusión Ambipolar, es:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta_A \nabla \times [(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B}] \quad (6.1)$$

Dado que $\vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B}$ y que $(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} \times \vec{B} = -|\vec{B}|^2 (\nabla \times \vec{B})_{\perp}$, podemos reescribir la ecuación 6.1 convenientemente de la forma:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\eta_A}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \vec{B})_{\perp} \quad (6.2)$$

Para este caso se tiene $\mathcal{E}_{AD} = \frac{\eta_A}{\mu_0} (\nabla \times \vec{B})_{\perp}$.

Se escogen las coordenadas cartesianas x, y, z para explicar la implementación realizada. La misma es válida en coordenadas cilíndricas y esféricas, dado que aquí se utiliza el computo de la corriente \vec{J} especificado en la sección 5.1, y los cálculos que desarrollaremos son generales.

En el caso de trabajar con coordenadas cilíndricas debe alternarse:

$$x \rightarrow \varphi, y \rightarrow r, z \rightarrow z$$

En el caso de trabajar con coordenadas esféricas debe alternarse:

$$x \rightarrow \varphi, y \rightarrow r, z \rightarrow \theta$$

Se detalla el algoritmo para la componente z de la FEM $\mathcal{E}_{ADz} = \mathcal{E}_z$ de ahora en adelante. Es importante recordar la distribución de campos sobre la celda de la figura 4.1 y que la convención de índices es $x \rightarrow i, y \rightarrow j, z \rightarrow k$.

Para poder operar con los campos, es preciso que las cantidades involucradas en cualquier cálculo tengan el mismo centrado, lo que se entiende como la misma posición (i, j, k) sobre la celda 3D (4.1). Cabe destacar que el centrado de la corriente \vec{J} es el mismo que el de las FEM, por esta razón resulta sencillo implementar el término de difusión Ambipolar en la forma $(\nabla \times \vec{B})_{\perp} = \nabla \times \vec{B} - \frac{(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{B}}{\vec{B} \cdot \vec{B}} \vec{B}$.

6.1.1 Cálculo numérico de las FEM

Una vez computadas las componentes de la corrientes (ver sección 5.1), se calculan las FEM desplazando los campos magnéticos y las corrientes adecuadamente sobre las posiciones de las componentes de \mathcal{E} . Aquí se desarrolla el cálculo para la componente \mathcal{E}_z centrada en la posición $(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)$.

$$\mathcal{E}_z = \frac{1}{\gamma \rho \rho_i} [J_z B^{*2} - (J_x^* B_x^* + J_y^* B_y^* + J_z B_z^*) B_z^*]$$

Las cantidades señaladas con $*$ son aquellas que deben centrarse sobre la posición $(i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)$, donde también se encuentra J_z .

$$\begin{aligned} J_x^* &= \frac{1}{4} \left(J_{x,i,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + J_{x,i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + J_{x,i-1,j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + J_{x,i-1,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right) \\ J_y^* &= \frac{1}{4} \left(J_{y,i-\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + J_{y,i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + J_{y,i-\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} + J_{y,i-\frac{1}{2},j-1,k+\frac{1}{2}} \right) \\ B_z^* &= \frac{1}{8} (B_{z,i,j,k-\frac{1}{2}} + B_{z,i,j,k+\frac{1}{2}} + B_{z,i,j-1,k-\frac{1}{2}} + B_{z,i,j-1,k+\frac{1}{2}} \\ &\quad + B_{z,i-1,j,k-\frac{1}{2}} + B_{z,i-1,j,k+\frac{1}{2}} + B_{z,i-1,j-1,k-\frac{1}{2}} + B_{z,i-1,j-1,k+\frac{1}{2}}) \\ B_x^* &= \frac{1}{2} \left(B_{x,i-\frac{1}{2},j,k} + B_{x,i-\frac{1}{2},j-1,k} \right) \\ B_y^* &= \frac{1}{2} \left(B_{y,i,j-\frac{1}{2},k} + B_{y,i-1,j-\frac{1}{2},k} \right) \end{aligned}$$

Para completar el cálculo solo resta determinar la difusividad η_A . Para el caso de dos fluidos (uno neutro y otro compuesto de iones) se tiene que $\eta_A = \frac{B^2}{\gamma \rho \rho_i}$, donde γ

es la constante de arrastre colisional entre iones y neutros, ρ es la densidad del fluido neutro y ρ_i es la densidad de iones (Choi et al. 2009). Dado que se ha utilizado el numerador (B^2) dentro del computo de las FEM solo resta calcular $\widetilde{\eta}_A = \frac{1}{\gamma\rho\rho_i}$. Si bien ρ_i es una cantidad variable, para ciertas pruebas (como se verá más adelante) puede considerarse constante, de tal forma que la única cantidad que debe centrarse en la posición de \mathcal{E}_z es la densidad del neutro ρ .

$$\rho^* = \frac{1}{4} (\rho_{i,j,k} + \rho_{i,j-1,k} + \rho_{i-1,j-1,k} + \rho_{i-1,j,k})$$

6.2 Estudio del decaimiento de las ondas de Alfvén

El estudio de la propagación de las ondas de Alfvén en un plasma débilmente ionizado proporciona una herramienta efectiva para comprender la dinámica de la difusión Ambipolar.

Puede verse que la relación de dispersión para la ondas de Alfvén satisface (Balsara 1996):

$$\omega^2 + i \frac{v_A^2 k^2}{\gamma \rho_i} \omega - v_A^2 k^2 = 0 \quad (6.3)$$

donde k es el número de onda, ω la frecuencia temporal de la señal y v_A es la velocidad de Alfvén, $\gamma\rho_i$ fue introducido con la difusividad η_A .

Para la derivación se realiza un análisis lineal en modos de Fourier, el análisis completo del problema puede estudiarse en el trabajo de (Balsara 1996), sin embargo aquí se ofrece una derivación menos rigurosa pero que permite desarrollar intuición sobre la prueba a desarrollar.

6.2.1 Derivación de la relación de dispersión para las ondas de Alfvén bajo la difusión Ambipolar

Supongamos una densidad media $\rho_0 \equiv \text{cte}$ y un campo magnético medio constante B_0 , con perturbaciones en la velocidad δv , en la densidad $\delta\rho$, y en el campo δB , de la forma:

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad (6.4)$$

$$\vec{v} = \delta v e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \hat{z} \quad (6.5)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{x} + \delta B e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \hat{z} \quad (6.6)$$

Tal que $\frac{\delta v}{v} \sim \frac{\delta B}{B} \ll 1$. Para simplificar el desarrollo suponemos $\vec{k} = k \hat{x}$ y omitimos el factor μ_0 irrelevante en el cálculo.

Es inmediato ver que $\nabla \times \vec{B} = -ik\delta B e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)} \hat{y}$ y consecuentemente $(\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{B} = 0$. Por lo tanto se sigue que $(\nabla \times \vec{B})_{\perp} = -ik\delta B \hat{y}$.

Dado que la perturbación en la velocidad $\vec{\delta v}$, y en el campo magnético $\delta \vec{B}$, tienen la misma dirección se satisface la condición $\vec{v} \times \vec{B} = \delta v B_0 \hat{y}$. Reemplazando estos resultados en la ecuación de inducción magnética 6.2 se sigue que:

$$\frac{\partial \delta B}{\partial t} \hat{z} = \nabla \times ((\delta v B_0 - i\eta_A k \delta B) \hat{y}) \quad (6.7)$$

resolviendo el rotor del lado derecho se obtiene la ecuación de inducción escalar para la perturbación del campo magnético:

$$\frac{\partial \delta B}{\partial t} = ik\delta v B_0 + i\eta_A k^2 \delta B \quad (6.8)$$

Ahora bien, si tomamos la ecuación de momento para el fluido neutro y despreciamos todas las fuerzas excepto la fuerza de Lorentz ($\vec{F} = \mu_0(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$), se puede ver fácilmente que:

$$-i\rho_0\omega\delta v\hat{z} = \rho_0\frac{\partial\delta v}{\partial t}\hat{z} = (\nabla \times \delta B\hat{z}) \times B_0\hat{x} = -ikB_0\delta B \quad (6.9)$$

la cual implica la relación:

$$k = \omega\rho_0\frac{\delta v}{B_0\delta B} \quad (6.10)$$

Esto es porque el término $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times \delta B \hat{z}$, luego $\nabla \times \delta B \hat{z} \times \vec{B} = \nabla \times \delta B \hat{z} \times B_0 \hat{x}$.

Ahora que ya se tienen las ecuaciones de momento e inducción, se deriva la ecuación de momento respecto al tiempo y se reemplaza en ella la ecuación de inducción.

$$\rho_0\frac{\partial^2\delta v}{\partial t^2} = \left(\nabla \times \frac{\partial\delta B}{\partial t}\hat{z}\right) \times B_0\hat{x} = [\nabla \times (k\delta v B_0 + i\eta_A k^2 \delta B) \hat{z}] \times B_0\hat{x} \quad (6.11)$$

El lado izquierdo de la ecuación 6.11 se resuelve como $\rho_0\omega^2\delta v$, mientras que el lado derecho, al resolver el producto cruz y tomar rotor, se encuentra:

$$\rho_0 \omega^2 \delta v = -ikB_0(ikB_0 \delta v + \eta_A k^2 \delta B) \quad (6.12)$$

al dividir por $\rho_0 \delta v$ se obtiene:

$$\omega^2 = k^2 \frac{B_0^2}{\rho_0} - \frac{i\eta_A k^3 B_0 \delta B}{\rho_0 \delta v} \quad (6.13)$$

y se puede llevar a la forma:

$$\omega^2 = k^2 \frac{B_0^2}{\rho_0} - i\eta_A k^2 \omega \quad (6.14)$$

Finalmente, recordando que $\eta_A = \frac{B^2}{\rho \rho_i \gamma}$ y $B^2 = (B_0^2 + \delta B^2) \simeq B_0^2$ se puede reescribir la relación 6.14 en términos de la velocidad de Alfvén $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0}$ de la forma:

$$\omega^2 = k^2 v_A^2 - i \frac{k^2 v_A^2}{\gamma \rho_i} \omega \quad (6.15)$$

La solución de la ecuación 6.3, se compone de una parte real (oscilación) y una parte imaginaria (decaimiento). Básicamente se tiene que $\omega = \omega_R + i\omega_i$. Siempre que $\omega_R \neq 0$ la onda de Alfvén podrá propagarse.

De esta forma se espera una solución analítica para la componente z del campo magnético de la forma:

$$\langle \delta B_z^2 \rangle^{1/2} = h_0 |\sin(\omega_R t)| e^{\omega_i t} \quad (6.16)$$

donde $\langle \rangle$ denota el promedio espacial y se realiza para quitar la dependencia con x , en efecto basta reemplazar ω en B_z para verificar que cumple con la relación 6.16.

Si se resuelve la ecuación cuadrática 6.3 para ω se verifica que:

$$\omega_R = \frac{1}{2} v_A k \sqrt{4 - \left(\frac{v_A k}{\gamma \rho_i} \right)^2} \quad (6.17)$$

$$\omega_i = \frac{v_A^2 k^2}{2\gamma \rho_i} \quad (6.18)$$

La disminución en la constante de acoplamiento implica un alejamiento del caso ideal ($\omega = v_A k$) en la frecuencia de oscilación, disminuyendo su valor hasta anularse y dejar de propagarse en el caso $k = \frac{2\gamma \rho_i}{v_A}$.

6.3 Verificación numérica de la relación de dispersión

Aquí presentamos el trabajo realizado para verificar la relación de dispersión 6.3, el cual consiste en una serie de simulaciones para las cuales se inicializa una perturbación oscilante en función de algún número de onda k y mediante un procedimiento numérico, que detallaremos a continuación, calculamos el valor de ω_R y ω_i para cada modo. Luego graficaremos los valores obtenidos con las curvas analíticas $\omega_R(k)$ y $\omega_i(k)$ para constatar que se superponen, de tal manera que los valores numéricos sigan la tendencia de las curvas analíticas.

Además de calcular estas frecuencias, vamos a comparar los datos numéricos superponiendo los valores de $\sqrt{\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}}$ con la solución analítica 6.16 evaluada en los valores teóricos de ω_R y ω_i .

6.3.1 Análisis de datos

El procedimiento a seguir será distinto según sea el caso $|\omega_R(k)| > |\omega_i(k)|$ o $|\omega_R(k)| < |\omega_i(k)|$. Mientras que $|\omega_R(k)| > |\omega_i(k)|$ es posible separar la oscilación del amortiguamiento para realizar ajustes más precisos, en cambio cuando $|\omega_R(k)| < |\omega_i(k)|$ el amortiguamiento no permite alcanzar a mapear ni siquiera un período de oscilación, por lo cual no podemos separar la oscilación del amortiguamiento y se debe ajustar la solución completa 6.16, lo cual introduce mayor error en el ajuste a diferencia del caso $|\omega_R(k)| > |\omega_i(k)|$.

La información que elegimos de cada simulación, para calcular ω_R y ω_i , es la componente z del campo magnético, B_z . Para cada salida se calcula $\langle B_z^2 \rangle_{x,y,z}$, donde $\langle \rangle_{x,y,z}$ denota el promedio espacial. Elegimos dos simulaciones para ejemplificar los procedimientos de cada caso. No importan ahora los valores calculados sino más bien los métodos de cálculo y análisis.

Comenzaremos contando el caso en que:

$$|\omega_R(k)| > |\omega_i(k)|$$

En la figura 6.1 graficamos el valor de $\langle B_z^2 \rangle_{x,y,z}$ para cada salida.

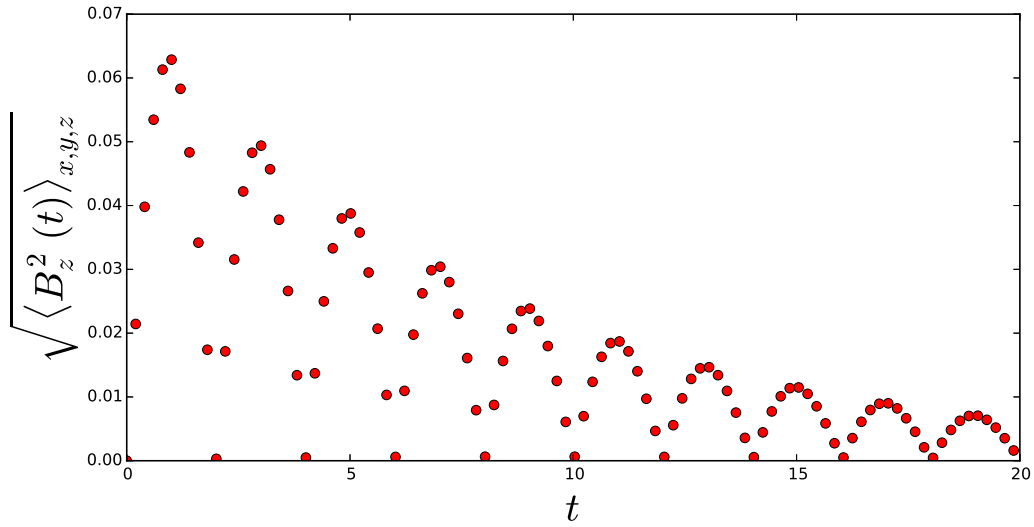


Figure 6.1: Cada punto rojo corresponde a el valor de $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$ en cada salida. En el eje horizontal hemos puesto las salidas en el tiempo correspondiente para obtener la relación $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$.

Si uno es capaz de capturar los máximos de la distribución de puntos de la figura 6.1, puede determinar la tasa de decaimiento ajustándole una recta al logaritmo natural de la distribución. Esto se debe a que si asumimos que los puntos siguen una función del tipo 6.16, la envolvente de la curva (en donde se ubican los máximos) es una función exponencial, de esta forma al tomar logaritmo se obtiene:

$$\ln(\langle B_z(t_{\max}) \rangle_{x,y,z}^{1/2}) = \ln(h_0) + \omega_i t_{\max} \quad (6.19)$$

dato que $\sin(\omega_R t_{\max}) = 1.0$.

Para estimar el valor de t_{\max} es conveniente interpolar la distribución de puntos de $\langle B_z^2 \rangle_{x,y,z}$ para obtener la curva $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$, luego buscamos aquellos puntos t_i en torno a los cuales cambia de signo la pendiente de la recta tangente la curva de la forma 6.20.

$$t_i = t_{\max} \iff (\langle B_z^2(t_{i+1}) \rangle_{x,y,z} - \langle B_z^2(t_i) \rangle_{x,y,z} < 0) \wedge (\langle B_z^2(t_i) \rangle_{x,y,z} - \langle B_z^2(t_{i-1}) \rangle_{x,y,z} > 0) \quad (6.20)$$

Por t_{\max} nos referimos a los valores de t_i donde el campo magnético es máximo, es decir $\max(\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z})$.

Si uno interpola esta distribución de puntos puede obtener la relación numérica $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$, la cual es más conveniente para los cálculos que se suceden. Realizamos

una interpolación del tipo spline cúbico con la función `interpolate.spline` de la librería `scipy`, presentamos la misma en la figura 6.2 juntos a los máximos obtenidos.

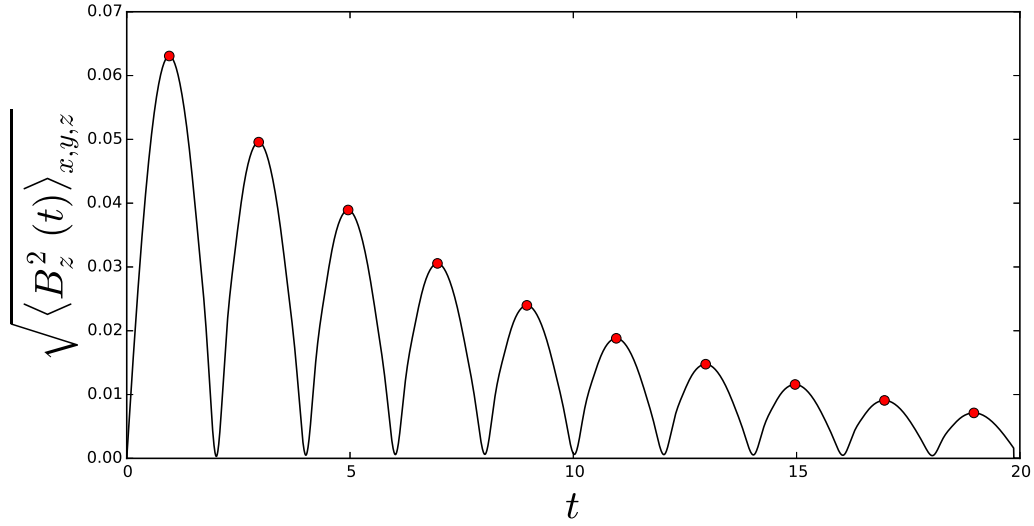


Figure 6.2: Curva resultado de la interpolación spline cúbica. En puntos los valores $\max(\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z})$ obtenidos mediante 6.20.

Tomamos logaritmo natural a estos puntos y ajustamos una recta con la función `polyfit` de la librería `scipy` la cual realiza un ajuste de cuadrados mínimos. En la figura 6.3 podemos ver este ajuste.

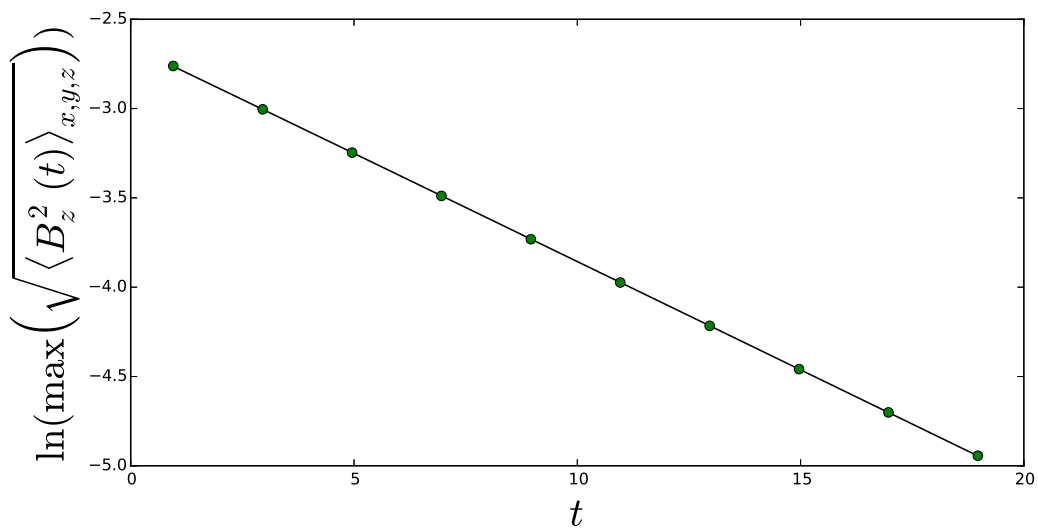


Figure 6.3: Ajuste lineal realizado sobre el logaritmo natural de los puntos máximos de la raíz cuadrática media de la componente z del campo magnético. En línea negra la recta cuya pendiente es la tasa de decaimiento.

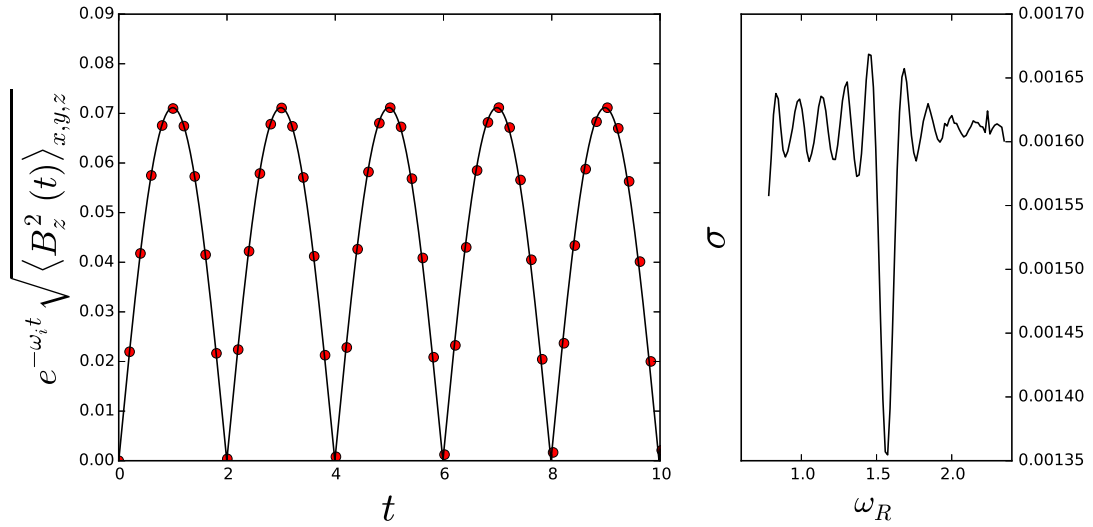


Figure 6.4: A la izquierda el ajuste obtenido para la oscilación pura del campo magnético. A la derecha el error cuadrático medio σ para cada ω_R calculado. El error mínimo corresponde a $\omega_R = 1.5706$.

Una vez obtenida la tasa de decaimiento ω_i , debemos computar la frecuencia de oscilación ω_R . Para esto vamos a desafectar al campo $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$ del amortiguamiento generado por ω_i simplemente multiplicamos:

$$\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}^* = \langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z} e^{-\omega_i t} \quad (6.21)$$

El supraíndice $*$ denota a la parte oscilatoria pura de $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$. Para obtener el valor de ω_R realizamos un ajuste de cuadrados mínimos tomando 100 frecuencias en el intervalo $[\omega_{R0} - \delta : \omega_{R0} + \delta]$, donde δ puede variar entre simulación y simulación. En general hemos tomados valores entre $\delta \in (0.1 : 0.8)$. El valor de la amplitud es estimado a partir del valor máximo de $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}^*$, de esta forma $h_0 = \max \langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}^*$.

En la figura 6.4 mostramos la oscilación pura y el ajuste obtenido para ω_R junto al error cuadrático medio σ , de cada una de las frecuencias ajustadas. Elegimos aquella con el menor error.

Veamos ahora el caso en donde:

$$|\omega_R(k)| < |\omega_i(k)|$$

En la figura 6.5 mostramos los valores $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$ obtenidos para cada salida. Es evidente como se amortigua la señal rápidamente.

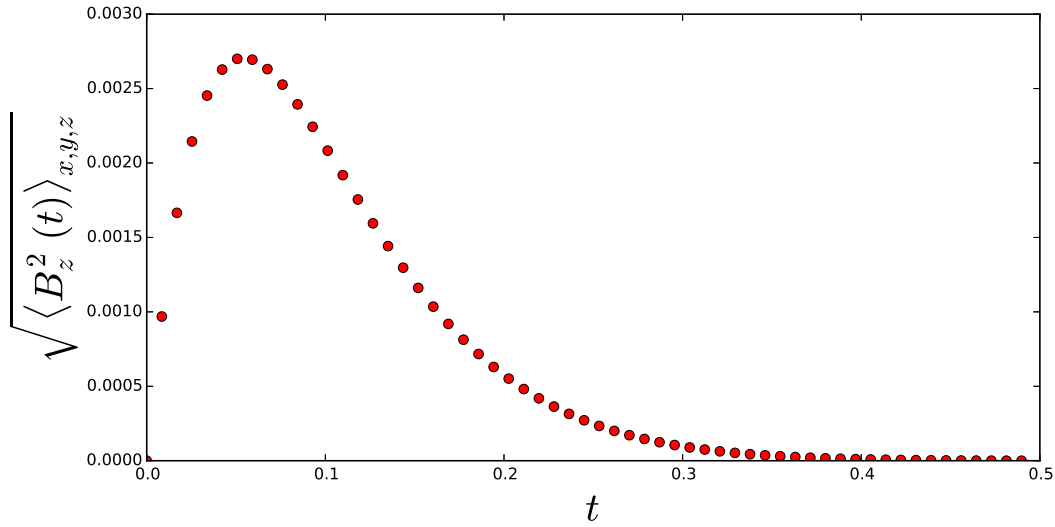


Figure 6.5: Cada punto rojo corresponde a el valor de $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$ en cada salida. En el eje horizontal hemos puesto las salidas en función del tiempo, t , para obtener la relación $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$.

Aquí realizamos un ajuste de mínimos cuadrados sobre los puntos de la figura 6.5 con la solución completa 6.16. Para ello primero estimamos el valor de la amplitud h_0 para ajustar únicamente ω_R y ω_i , en este caso no es un buen estimador de h_0 en $\max \langle B_z^2 \rangle_{x,y,z}$, dado que conocemos el valor máximo de la componente z del campo magnético vamos a estimar h_0 como se sigue a continuación:

$$h_0 = \frac{\max \langle B_z^2 \rangle_{x,y,z}}{\sin(\omega_R t_{\max})} e^{-\omega_i t_{\max}}$$

donde $t_{\max} = \arctan(|\frac{\omega_R}{\omega_i}|)$, y se obtiene extremizando la solución 6.16.

Con esta estimación realizamos un ajuste de cuadrados mínimos en los parámetros ω_R y ω_i tomando 100 curvas de la forma 6.16 y los valores obtenidos en la figura 6.5. Elegimos como semilla el valor teórico de ω_R y ω_i , tomando intervalos centrados en estos valores con $\delta = 0.5$. En la figura 6.6 mostramos la distribución de errores obtenidas, el error cuadrático medio se calcula fijando el valor de ω_i y barriendo en todos los posibles ω_R , y se repite el procedimiento para cada ω_i . De tal forma que:

$$\sigma^2 = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N (\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z} - h_0 \sin(\omega_{Rj} t) e^{\omega_{il} t})^2 \quad (6.22)$$

El mejor ajuste obtenido corresponde al valor $\min \sigma_{lj}$, así $\omega_R = \omega_{Rj_{\min}}$ y $\omega_i = \omega_{il_{\min}}$. En la figura 6.7 mostramos el mejor ajuste obtenido.

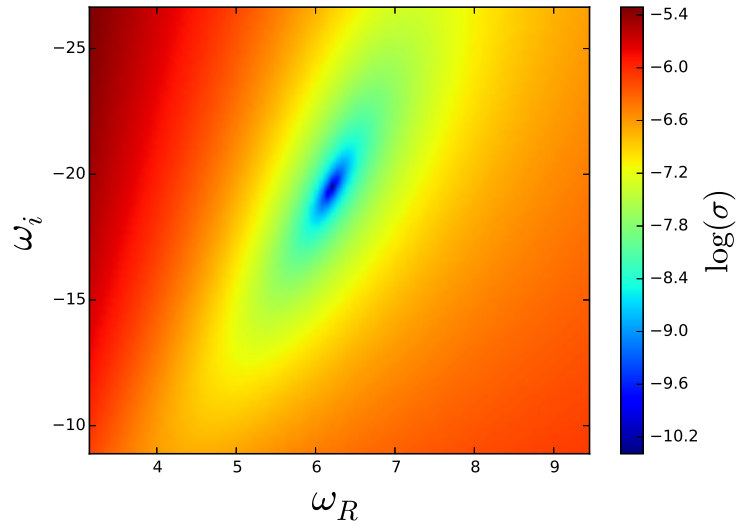


Figure 6.6: Curvas de nivel del error cuadrático medio $\log(\sigma(\omega_i, \omega_R))$. Se observa la región de error mínimo de color azul.

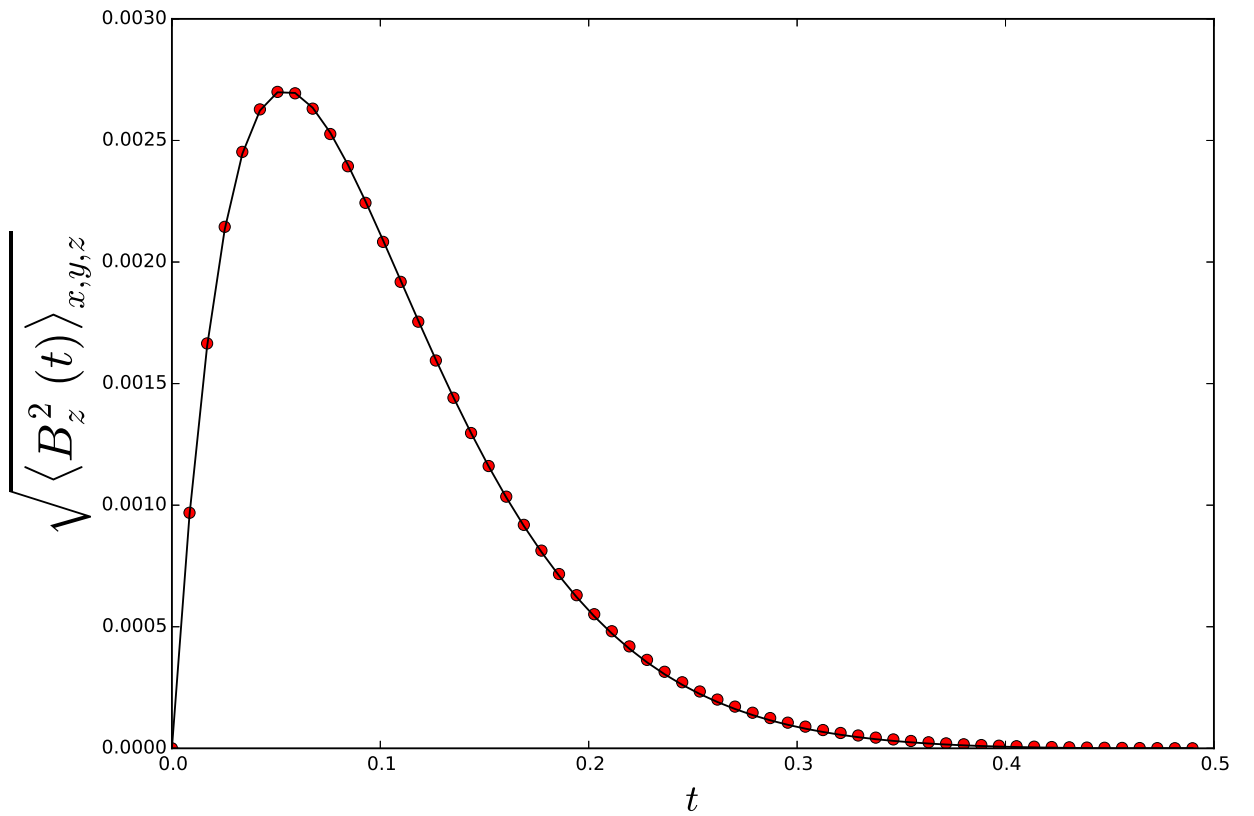


Figure 6.7: La curva negra es el mejor ajuste obtenido para la solución 6.16, los puntos rojos corresponden a $\langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}$.

6.3.2 Simulaciones y resultados

Las primeras simulaciones realizadas permiten analizar el amortiguamiento de las ondas de Alfvén debido a la difusión Ambipolar y verificar que la solución analítica 6.16 y la solución numérica son esencialmente las mismas. Puede verse que a medida que la constante de acoplamiento γ disminuye, las ondas se amortiguan hasta desaparecer, estas pruebas se realizan para un único número de onda k , tomando tres valores de la constante de acoplamiento, $\gamma = 100, 500, 1000$. Los datos del setup implementado se detallan en la tabla 6.1.

Las segundas simulaciones son las más importantes y posibilitan comprobar numéricamente la relación de dispersión para las ondas de Alfvén bajo la acción de la difusión Ambipolar. A estas simulaciones le hemos aplicado todo el procedimiento detallado en la sección 6.3.1. Con estas simulaciones vamos a evaluar la capacidad del código de resolver grandes números de onda donde la oscilación asociada a ω_R desaparece, es decir $k \sim \frac{2\gamma\rho_i}{v_A}$. Las pruebas se realizan con $\gamma = 100$.

Para las todas las simulaciones mencionadas adoptamos coordenadas cartesianas, $\rho_i = 0.01$ y $\widetilde{\eta}_A = \frac{1}{\gamma\rho\rho_i}$. En general las simulaciones presentan una resolución de 64 celdas por longitud de onda, excepto un caso que se simula nuevamente con mayor resolución (128 por longitud de onda). Las condiciones de contorno son periódicas en todas las direcciones. En las primeras simulaciones se fija $k = 2\pi$, el tamaño físico de la malla 3D es $L = [0 : \lambda]$, para todas las direcciones permitiendo resolver una longitud de onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ con la resolución adoptada, 64 o 128 celdas por longitud de onda según el caso. En las otras pruebas, se modifica el valor de k y el tamaño físico que adoptamos es tal que permite resolver una longitud de onda con 64 o 128 celdas según sea la resolución, de tal forma que siempre $L = [0 : \lambda]$.

v_0	0.1
B_{0x}	1.0
B_{0y}	0.0
B_{0z}	0.0
v_{0x}	0.0
v_{0y}	0.0
v_{0z}	$v_0 \sin(kx)$
ρ	1.0

Table 6.1: Condiciones iniciales para las simulaciones de decaimiento de una onda de Alfvén. Los datos son idénticos para $\gamma = 100, 500, 1000$.

En la figura 6.8 se observan las tres soluciones obtenidas numéricamente y su comparación con las solución analítica predicha por la ecuación 6.16 para una resolución de

64 celdas por longitud de onda. Para los valores de $\gamma = 100, 500$ los datos numéricos (puntos rojos) se ajustan de una muy buena manera con las soluciones analíticas (línea negra). En cambio, para $\gamma = 1000$ se aprecia una notable diferencia entre la frecuencia de amortiguamiento ω_i analítica y la frecuencia obtenida numericamente. En la tabla 6.2 se presentan los valores de las frecuencias obtenidas a partir de ajustes sobre los datos de las simulaciones y los valores teóricos de las mismas.

γ	ω_R	$\omega_{R,analítico}$	ω_i	$\omega_{i,analítico}$
100	5.9650	5.9650	-1.9686	-1.9739
500	6.2732	6.2707	-0.38211	-0.3947
1000	6.2831	6.2831	-0.17584	-0.1973

Table 6.2: Soluciones numéricas y analíticas de la relación de dispersión 6.3 para los distintos valores de la constante de acoplamiento γ . La resolución aquí es de 64 celdas por longitud de onda.

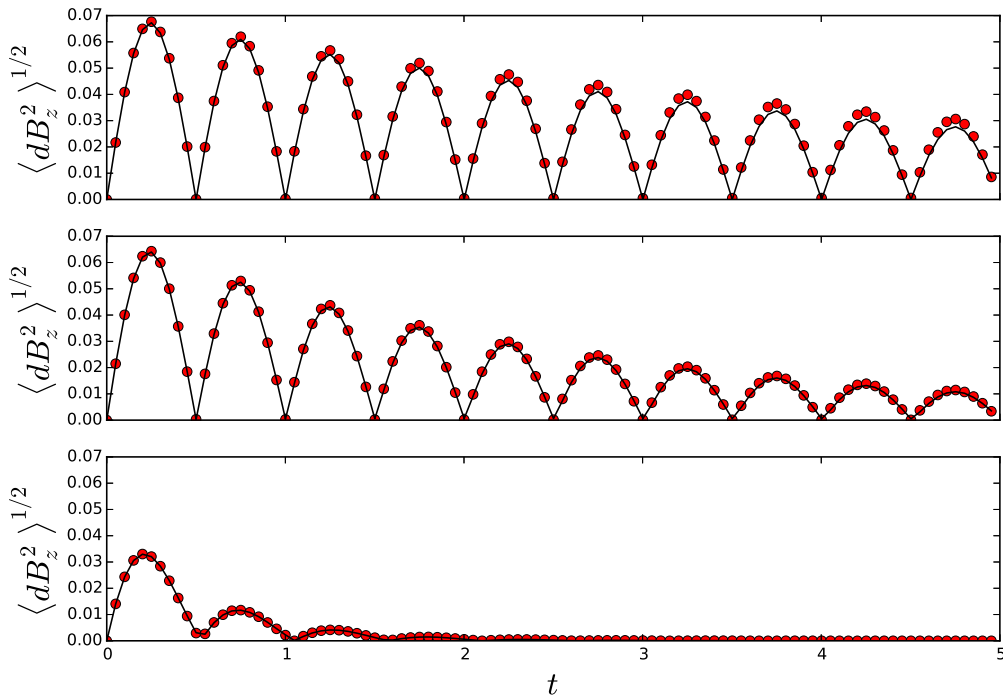


Figure 6.8: Evolución temporal de la raíz cuadrática media del campo magnético, promediada en el espacio. Arriba $\gamma = 1000$, al medio $\gamma = 500$, abajo $\gamma = 100$. Los puntos rojos corresponden a los datos numéricos mientras que la curva negra es la solución analítica.

Ya que para el caso de $\gamma = 1000$ el ajuste se observa pobre, quisimos ver si mejoraba al aumentar la resolución. Para ello se realizó una nueva simulación con una resolución

de 128 celdas por longitud de onda. En la figura 6.9 se observa como mejora la relación entre los puntos calculados numéricamente (rojos) y la curva analítica (negro).

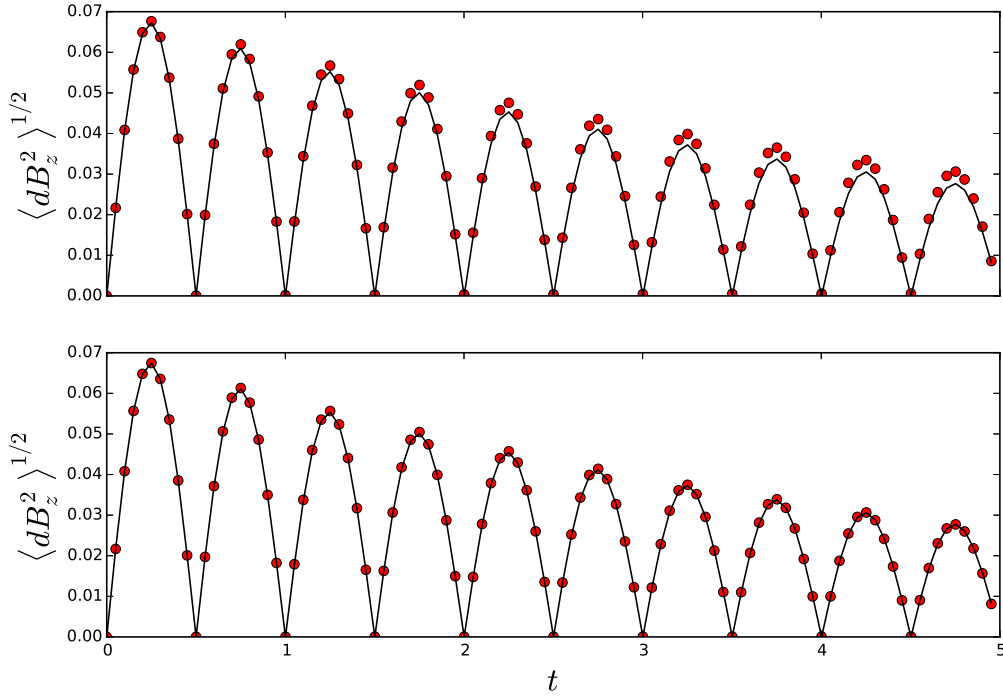


Figure 6.9: Evolución temporal de la raíz-cuadrática-media del campo magnético, promediada en el espacio. Ambas corresponden a $\gamma = 1000$. Arriba resolución de 64 celdas por longitud de onda, abajo resolución de 128 por longitud de onda. Vemos como al aumentar la resolución los datos numéricos ajustan mejor con la función de amortiguamiento analítica.

Las segundas simulaciones son un total de 5, todas con $\gamma = 100$, condiciones de contorno periódicas en todas las direcciones y $\rho_i = 0.01$, la resolución es de 64 celdas por longitud de onda. Además se simuló la correspondiente a valor máximo de k con una resolución de 128 celdas por longitud de onda para determinar si se encuentran mejoras en la tendencia de la solución numérica sobre la solución analítica. Las condiciones iniciales son idénticas a la primer simulación (ver tabla 6.1) y los valores de k se presentan en la tabla 6.3, junto con los resultados obtenidos para la frecuencia ω_R y la tasa de decaimiento ω_i .

k	ω_R	ω_i
$\frac{\pi}{2}$	1.5690	-0.1210
2π	5.9975	-1.9727
4π	9.8191	-7.8559
6π	6.8990	-17.4961

Table 6.3: Valores de número de onda k y valores obtenidos de las simulaciones para ω_R y ω_i . La resolución es de 64 celdas por longitud de onda.

Para verificar la relación de dispersión 6.3 graficamos la solución analítica para el módulo de ω_R y ω_i como función del número de onda k . Sobre las curvas se muestran los resultados numéricos con círculos para los casos con resolución de $\frac{\lambda}{64}$ y con puntos para el caso con resolución de $\frac{\lambda}{128}$ (con $k = 6\pi$). Observamos como se alejan los valores calculados con las simulaciones a medida que crece el valor de k , sin embargo es claro que las soluciones obtenidas en las simulaciones conservan el comportamiento de las dos curvas teóricas, lo cual verifica que la relación de dispersión 6.3 se satisface y permite concluir que la implementación de la difusión Ambipolar captura la nueva dinámica correctamente en FARGO3D.

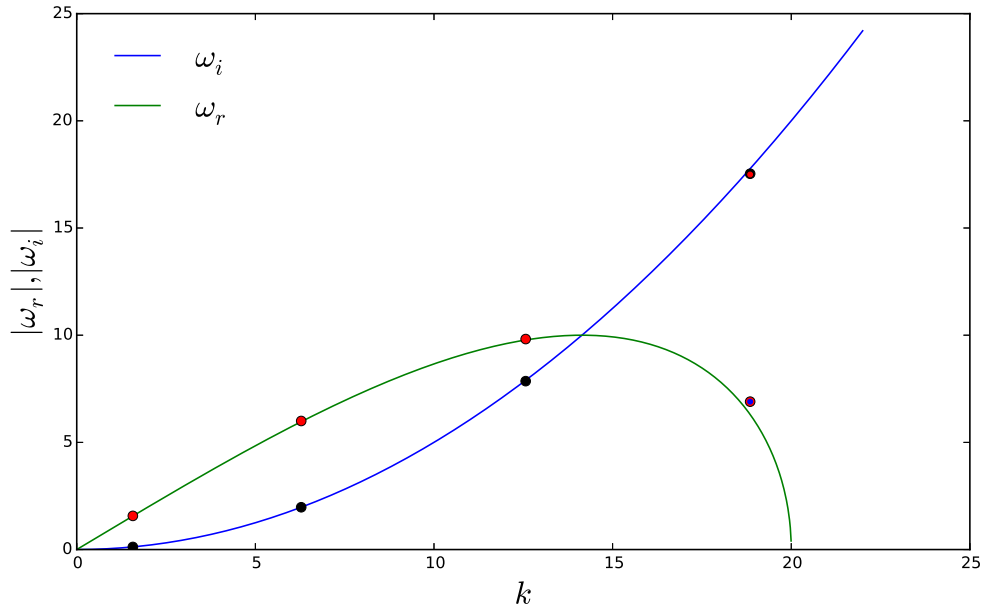


Figure 6.10: Soluciones teóricas de la relación de dispersión 6.3 como función del número de onda k . En verde la solución ω_R y en azul la solución ω_i . Sobre las curvas los resultados en círculos corresponden a las simulaciones de 64 celdas por longitud de onda, mientras que para $k = 6\pi$ se observan con puntos las soluciones para la resolución de 128 celdas por longitud de onda. No se encuentran diferencias entre ambas resoluciones para los valores calculados de ω_R y ω_i .

6.4 Condición CFL para la difusión Ambipolar.

La condición de estabilidad CFL en este caso es análoga a la difusión de Ohm, y se tiene:

$$\Delta t_A = \min \left(\frac{\Delta x^2}{\eta_A 2D}, \frac{\Delta y^2}{\eta_A 2D}, \frac{\Delta z^2}{\eta_A 2D} \right) \quad (6.23)$$

donde $\eta_A = \frac{B^2}{\gamma \rho_i}$ y D es la dimensión espacial del problema.

7 Efecto Hall

La estructura de este capítulo es idéntica al capítulo 6 para la difusión Ambipolar. Primeramente contaremos cómo se realiza el cálculo de la FEM de Hall \mathcal{E}_H , que a diferencia de la difusión Ambipolar, se deben realizar actualizaciones parciales del campo magnético de una forma muy particular para que la solución sea estable. Como podrá verse, en el trabajo de (Bai 2014) se prueba la estabilidad de este tipo de implementación a partir de un análisis de Von Neumann, el cual desarrollaremos brevemente. La implementación y el análisis de estabilidad se adoptan de (Bai 2014).

En la segunda parte de éste capítulo se describe la prueba de (Bai 2014) para analizar la correcta implementación numérica del término de Hall. Dicha prueba consiste en verificar numéricamente la relación de dispersión de ondas de Alfvén circularmente polarizadas. Al igual que en caso de la difusión Ambipolar resumiremos parte del procedimiento numérico para el análisis de los datos, junto a las simulaciones y sus resultados.

Al final del capítulo explicitamos el criterio CFL para el efecto Hall.

7.1 Implementación numérica

La ecuación de inducción en el régimen no ideal, restringida al caso particular del efecto Hall, puede escribirse como:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \eta_H \nabla \times (\vec{J} \times \hat{B}) \quad (7.1)$$

donde η_H es la difusividad de Hall y la misma responde a la relación $\eta_H = \frac{B}{en_e}$ donde n_e es la cantidad de electrones por unidad de volumen y e corresponde a la carga fundamental. Además \hat{B} es el vector unitario en la dirección del campo magnético.

En este caso $\mathcal{E}_H = \eta_H \vec{J} \times \hat{B}$ es la FEM de Hall.

La implementación numérica del término de Hall, al igual que en la difusión Ambipolar, requiere de actualizaciones de las FEM, dado el algoritmo de CT que utiliza FARGO3D. La diferencia fundamental es que no se puede utilizar una implementación directa, como en el caso de la difusión Ambipolar.

La naturaleza no disipativa del término de Hall genera que su implementación no sea tan sencilla como en caso de la difusión de Ohm y Ambipolar. Es sabido que los posibles esquemas de primer y segundo orden no son estables (Falle 2003). Aquí vamos a seguir la implementación de Bai (2014) quien muestra que un método semi-implícito permite obtener un algoritmo estable para la MHD de Hall.

Para mostrar la estabilidad del método seguiremos el desarrollo de Bai, (Bai 2014), escribiendo la ecuación de inducción magnética en 1D. Supongamos un campo magnético uniforme B_o en la dirección x . Si solo se considera el término de Hall en la ecuación de inducción, el campo magnético evoluciona como:

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \eta_H \frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\eta_H \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \quad (7.3)$$

Para avanzar el campo magnético del paso de tiempo n al paso de tiempo $n + 1$ primero avanzamos B_y^n a B_y^{n+1} utilizando B_z^n y luego avanzamos B_z^n a B_z^{n+1} utilizando B_y^{n+1} . En diferencias finitas las ecuaciones 7.3 y 7.2 se escriben:

$$\frac{B_y^{n+1} - B_y^n}{\Delta t} = \eta_H \partial_x^2 B_z^n \quad (7.4)$$

$$\frac{B_z^{n+1} - B_z^n}{\Delta t} = -\eta_H \partial_x^2 B_y^{n+1} \quad (7.5)$$

Para mostrar que este método es numéricamente estable realizamos un análisis de Von-Neumann descomponiendo a los campos magnéticos en modos de Fourier y elegimos un modo arbitrario tal que:

$$B_y = A_y e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.6)$$

$$B_z = A_z e^{i(\omega t - kx)} \quad (7.7)$$

Reemplazando en las ecuaciones 7.5 y 7.4 se obtiene:

$$A_y (e^{i\omega \Delta t} - 1) = A_z D_H (2 \cos(k\Delta x) - 2) \quad (7.8)$$

$$A_z (e^{i\omega \Delta t} - 1) = -A_y e^{i\omega t} D_H (2 \cos(k\Delta x) - 2) \quad (7.9)$$

donde $D_H = \eta_H \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$.

Soluciones no triviales de estas ecuaciones, es decir amplitudes no nulas, se obtienen al tomar el cociente entre ambas, de esta manera puede verse que $A_y = \pm i A_z e^{-i\omega \Delta t}$. Si se reemplaza A_y en la ecuación 7.8, con un poco de álgebra e identidades trigonométricas (recordar que $\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$) se obtiene la relación:

$$\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \pm 2D_H \sin^2\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) \quad (7.10)$$

Estabilidad en el método implica que los modos de Fourier conserven su amplitud sin amplificarse, lo cual se logra siempre que ω sea real y por lo tanto siempre que $2|D_H| \leq 1$, puesto que $\sin(\frac{\omega\Delta t}{2}) > 1 \Rightarrow \omega = a \pm ib$, es decir ω tendría una componente imaginaria cuyo signo implicaría amortiguamiento o ampliaciones en la amplitud. La condición $2|D_H| \leq 1$ determina directamente el criterio CFL necesario para la estabilidad del método y se detalla más adelante, pero no es más que reemplazar D_H y despejar Δt .

La implementación de este algoritmo en FARGO3D requiere del computo de las denominadas fuerzas electromotrices de Hall (FEMH), \mathcal{E}_{Hx} , \mathcal{E}_{Hy} , \mathcal{E}_{Hz} , que se suman a las actualizaciones de la difusión Ambipolar y Ohm para luego actualizar al campo magnético vía CT.

7.1.1 Cálculo numérico de la FEM

Para el caso del efecto Hall, se debe calcular:

$$\mathcal{E}_H = \eta_H \vec{J} \times \hat{B} \quad (7.11)$$

La implementación se realizó definiendo a $\eta_H = \widetilde{\eta}_H B$ con $\widetilde{\eta}_H = \frac{1}{en_e}$, de tal forma que:

$$\mathcal{E}_H = \frac{1}{en_e} \vec{J} \times \vec{B} \quad (7.12)$$

Lo primero que se efectúa es el computo de la componente \mathcal{E}_{Hx} centrada en la posición $(i, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$, utilizando los campos originales.

$$\mathcal{E}_{Hx} = \widetilde{\eta}_H (J_y^* B_z^* - J_z^* B_y^*)$$

Las cantidades señaladas con * son aquellas que deben centrarse sobre la posición $(i, j - \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2})$.

$$J_z^* = \frac{1}{4} \left(J_{z,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + J_{z,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k} + J_{z,i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k-1} + J_{z,i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k+1} \right)$$

$$J_y^* = \frac{1}{4} \left(J_{y,i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}} + J_{y,i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} + J_{y,i+\frac{1}{2},j-1,k-\frac{1}{2}} + J_{y,i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}} \right)$$

$$B_z^* = \frac{1}{2} \left(B_{z,i,j,k-\frac{1}{2}} + B_{z,i,j-1,k+\frac{1}{2}} \right)$$

$$B_y^* = \frac{1}{2} \left(B_{y,i,j-\frac{1}{2},k} + B_{y,i,j-\frac{1}{2},k-1} \right)$$

Únicamente con \mathcal{E}_{Hx} , se hace una actualización de los campos B_y y B_z para un paso de tiempo completo, esto es:

$$B_y^{n+1} = B_y^n + \frac{dt}{A_y}(\mathcal{E}_{Hx,i,j,k+1} - \mathcal{E}_{Hx,i,j,k})\Delta x$$

donde $A_y = \Delta x \Delta z$, es el área de la cara en donde está centrada la componente B_y . Igualmente se avanza la componente z de la forma

$$B_z^{n+1} = B_z^n + \frac{dt}{A_z}(\mathcal{E}_{Hx,i,j+1,k} - \mathcal{E}_{Hx,i,j,k})\Delta x$$

donde $A_z = \Delta x \Delta y$, es el área de la cara en donde está centrada la componente B_z .

Con los campos nuevos, junto con el campo B_x original, se calcula la nueva corriente \vec{J} , y con ella la componente \mathcal{E}_{Hy} .

$$\mathcal{E}_{Hy} = \widetilde{\eta}_H(J_z^* B_x^* - J_x^* B_z^*) \quad (7.13)$$

Todas las cantidades con * deben estar centradas correctamente en la posición de \mathcal{E}_{Hy} . El procedimiento de centrado es análogo al desarrollado para la componente x .

Con esta nueva componente \mathcal{E}_{Hy} , y solo ésta, se actualizan los campos B_x y B_z para un paso de tiempo completo.

Con los nuevos campos se calcula la nueva corriente \vec{J} y con ella, junto a los nuevos campos, se calculan la componente \mathcal{E}_{Hz}

Una vez calculadas \mathcal{E}_{Hx} , \mathcal{E}_{Hy} , \mathcal{E}_{Hz} se actualizan los campos magnéticos via CT. Es importante aclarar que todas las actualizaciones realizadas sobre el campo magnético son descartadas una vez obtenidas las FEMH.

7.2 Estudio de ondas circularmente polarizadas

Para determinar si la implementación se ha efectuado correctamente, se realiza un test para comprobar la relación de dispersión de una onda circularmente polarizada en el límite incompresible, bajo la acción del efecto Hall.

7.2.1 Derivación de la relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas

Supongamos un campo uniforme \vec{B}_0 y una densidad uniforme ρ_0 en régimen incompresible. Proponemos perturbaciones $\frac{\delta v}{v} \sim \frac{\delta B}{B} \sim e^{i(-\vec{k} \cdot \vec{x} + \omega t)}$, y asumimos $\vec{k} = k\hat{z}$.

Las ecuaciones para el caso son:

$$\vec{k} \cdot \delta \vec{v} = 0 \qquad \vec{k} \cdot \delta \vec{B} = 0$$

Las mismas surgen del límite de incompresibilidad ($\nabla \cdot \vec{v} = 0$) y ausencia de monopolos magnéticos ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$).

Se puede ver que, a partir de la ecuación de momento, las perturbaciones en la presión son del orden $\delta P \sim (\delta B \cdot B_0) \sim 0$, así podremos escribir las ecuaciones de inducción y momento de la forma:

$$\rho_0 \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0 \quad (7.14)$$

Pues $\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\delta \vec{B} + \vec{B}_0)$ y se satisface $\nabla \times \vec{B}_0 = 0$ por ser constante. De ahora en más omitiremos el factor μ_0 ya que es irrelevante en el cálculo.

$$\frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{B}_0) + \eta_H \nabla \times ((\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0) \quad (7.15)$$

donde $\eta_H = \frac{1}{n_{ee}}$ se toma por unidad de campos magnético, al igual que en la implementación numérica.

Puede verse que $\nabla \times \delta \vec{B} = i\vec{k} \times \delta \vec{B}$ y $\nabla \times (\delta \vec{v} \times \vec{B}_0) = -i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\delta \vec{v}$.

Por último, se sigue que:

$$\nabla \times ((\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0) = i\nabla \times ((\vec{k} \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0) = i\nabla \times ((\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\delta \vec{B})$$

donde utilizamos la propiedad del producto vectorial $A \times (B \times C) = (B \cdot A)C - (C \cdot A)B$, junto a la relación $\vec{B}_0 \cdot \delta \vec{B} = 0$ (dado que la perturbación y el campo son ortogonales). Evaluando el rotor, se sigue para la inducción magnética:

$$i\omega \delta \vec{B} = \frac{\partial \delta \vec{B}}{\partial t} = -i(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)\delta \vec{v} + \eta_H(\vec{k} \cdot \vec{B}_0)(\vec{k} \times \delta \vec{B}) \quad (7.16)$$

en tanto, la ecuación de momento es:

$$\rho_0 i\omega \delta \vec{v} = \rho_0 \frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -i(\vec{k} \times \delta \vec{B}) \times \vec{B}_0 \quad (7.17)$$

De la ecuación 7.17 se puede ver que

$$\delta \vec{v} = -\frac{kB_0}{\rho_0\omega} \delta \vec{B}. \quad (7.18)$$

Reemplazando esta relación en la ecuación 7.16 y multiplicando por $-i\omega$ se obtiene:

$$\omega^2 \delta \vec{B} = k^2 v_A^2 \delta \vec{B} - i\omega \eta_H k B_0 (\vec{k} \times \delta \vec{B}) \quad (7.19)$$

donde $v_A^2 = \frac{B_0^2}{\rho_0}$ es la velocidad de Alfvén. Por último $\vec{k} \times \delta \vec{B} = k(-\delta B_y, \delta B_x, 0)$. Pero dado que en particular se estudian ondas circularmente polarizadas, se debe satisfacer la relación $\delta B_y = \pm i \delta B_x$, lo que equivale a un desfase en $\frac{\pi}{2}$ entre ambas componentes. Por lo tanto, si se escribe a la ecuación 7.19 en término de sus componentes, por ejemplo la componente x , se sigue:

$$\omega^2 \delta B_x = k^2 v_A^2 \delta B_x - i\omega \eta_H k^2 B_0 (\pm i \delta B_x) \quad (7.20)$$

Finalmente se obtiene la relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas bajo el efecto Hall de la forma:

$$\omega^2 - k^2 v_A^2 = \pm \omega \eta_H k^2 B_0 \quad (7.21)$$

7.3 Verificación numérica de la relación de dispersión

Aquí presentamos el trabajo realizado para verificar la relación de dispersión 7.21. Primeramente hemos desarrollado una serie de simulaciones en donde inicializamos una onda circularmente polarizada con un número de onda k , luego, mediante un procedimiento numérico, calculamos el valor de las soluciones de la ecuación 7.21, para cada modo, ω_R y ω_L . Al final graficamos los valores obtenidos de ω_R y ω_L , con las curvas analíticas $\omega_R(k)$ y $\omega_L(k)$ para constatar que se superponen, de tal manera que los valores numéricos sigan la tendencia de las curvas analíticas.

7.3.1 Análisis de datos

Las soluciones a la ecuación 7.21 corresponden a:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{2} \left(\pm \eta_H k B_0 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4v_A^2}{k^2 B_0^2 \eta_H^2}} \right) \right) \quad (7.22)$$

La solución positiva se conoce como modo de Whistler, rápido o izquierdo. La otra solución es la denominada modo lento o derecho. Esta denominación se debe al hecho de que los dos modos circularmente polarizados tienen sentido de giro opuestos, uno es en dirección horaria (derecho) y el otro modo es en dirección anti-horaria (Whistler).

Vamos a designar ω_L al modo lento y ω_R al modo rápido. Para poder encontrar los valores de ω_R y ω_L en las simulaciones que mostraremos a continuación realizamos ajustes de los campos magnéticos B_y y B_z con el fin de obtener las frecuencias temporales. Para ondas circularmente polarizadas se esperan soluciones de la forma:

$$B_y(x, t) = \delta B_{y0} (\cos(kx - \omega_L t) + \cos(kx - \omega_R t)) \quad (7.23)$$

$$B_z(x, t) = \delta B_{z0} (\sin(kx - \omega_L t) - \sin(kx - \omega_R t)) \quad (7.24)$$

Donde δB_{z0} y δB_{y0} son las amplitudes de los campos.

Al fijar la coordenada espacial, por ejemplo en $x = 0$, obtenemos la evolución temporal de ambas cantidades y podemos ajustarle una función de la forma 7.23 y 7.24. Dado que tanto B_z como B_y oscilan como la misma frecuencias basta elegir alguna de ellas para obtener las frecuencias, ω_R y ω_L a partir de un ajuste de cuadrados mínimos.

Para ello es necesario primeramente estimar el valor de las amplitudes δB_{z0} y δB_{y0} . En las simulaciones que mostraremos a continuación se cumple la condición:

$$\sqrt{\delta B_{z0}^2 + \delta B_{y0}^2} = \langle \delta B(t) \rangle_t = 10^{-4} \quad (7.25)$$

y dado que se satisface la relación :

$$\delta B^2(t) = \delta B_{z0}^2 + \delta B_{y0}^2 + 2\delta B_{z0}\delta B_{y0} \cos((\omega_R + \omega_L)t) \quad (7.26)$$

Se puede estimar numéricamente el producto:

$$\delta B_{z0}\delta B_{y0} = \frac{1}{2} (\max[\delta B(t)^2] - \langle \delta B(t)^2 \rangle_t) \quad (7.27)$$

De esta forma las relaciones 7.25 y 7.27 entregan un sistema de ecuaciones que al resolverse devuelve los valores de las amplitudes, δB_{z0} y δB_{y0} , necesarios para los ajustes de las frecuencias.

El error cuadrático medio del ajuste sobre la componente B_y corresponde a:

$$\sigma^2 = \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N (B_y(0, 0, 0, t) - \delta B_{y0}(\cos(\omega_{Lj}t) + \cos(\omega_{Rl}t)))^2 \quad (7.28)$$

En la figura 7.1 mostramos el ajuste obtenido para las frecuencias para una de las simulaciones que detallaremos a continuación y en la figura 7.2 mostramos el error cuadrático medio para todos los ajustes realizados sobre B_y en este caso de la figura 7.1.

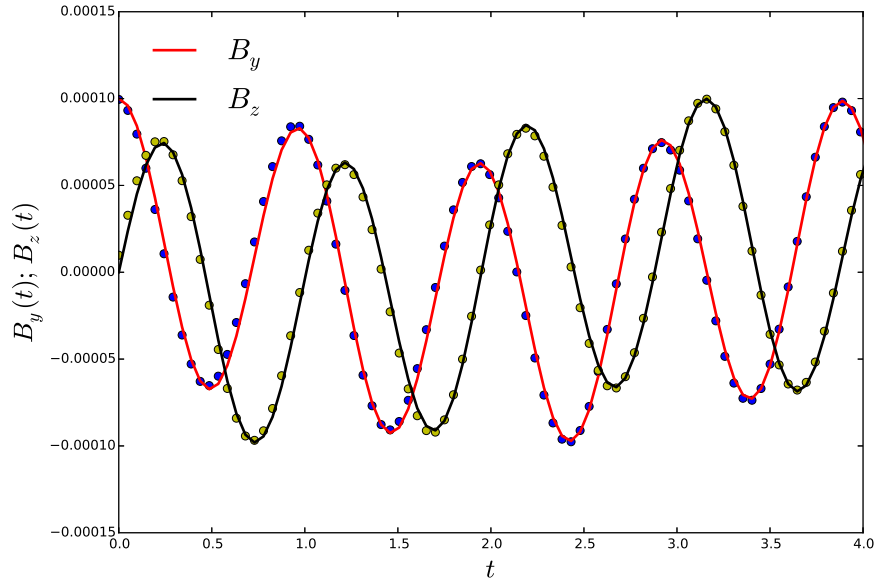


Figure 7.1: Ajuste de cuadrados mínimos para B_z (curva negra, puntos amarillos) y para B_y (curva roja, puntos azules). Aquí se observan algunos de los períodos mapeados para obtener ω_R y ω_L . La resolución corresponde a $\frac{\lambda}{32}$.

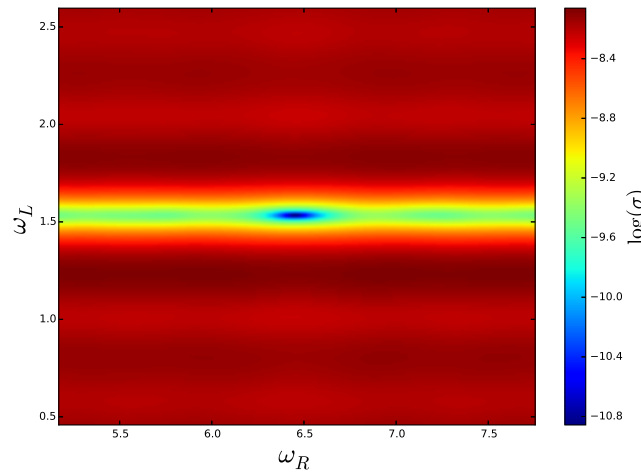


Figure 7.2: Curvas de nivel del error cuadrático medio, $\log(\sigma(\omega_R, \omega_L))$, para el ajuste de las frecuencias ω_L y ω_R . El error es mayor para la frecuencia rápida ω_R dado que hemos mapeado menos períodos, respecto a ω_L .

7.3.2 Simulaciones y resultados

Para encontrar las relaciones 7.22 y determinar si la implementación del término de Hall en la ecuación de inducción magnética en FARGO3D es correcta, construimos el siguiente setup siguiendo a Bai (2014).

Elegimos tres números de onda, $k = \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$, espaciados convenientemente para mapear la solución 7.22. Se define una caja cartesiana de dimensiones físicas $L = [0 : \lambda]$, para las tres direcciones x, y, z , de tal forma de utilizar toda la caja para mapear un período espacial. Para los tres valores de k se realizan dos simulaciones con resolución de 32 y 16 celdas por longitud de onda. Las condiciones de contorno son periódicas en todas las direcciones. La difusividad de Hall se fija en $\widetilde{\eta}_H = 0.5$ para todas las simulaciones y se adopta una ecuación de estado isoterma. Se inicializa $\rho = 1.0$, $\vec{v} = 0.0$ y el campo magnético $\vec{B} = (B_0, \delta B \cos(kx), \delta B \sin(kx))$ con $B_0 = 1.0$ y $\delta B = 10^{-4}$.

Realizados los ajustes detallados en el análisis de datos 7.3.1, para todas las simulaciones, se pueden comparar los resultados numéricos para las distintas frecuencias como función del número de onda k . Se grafica la solución analítica y los valores obtenidos numéricamente en la figura 7.3.

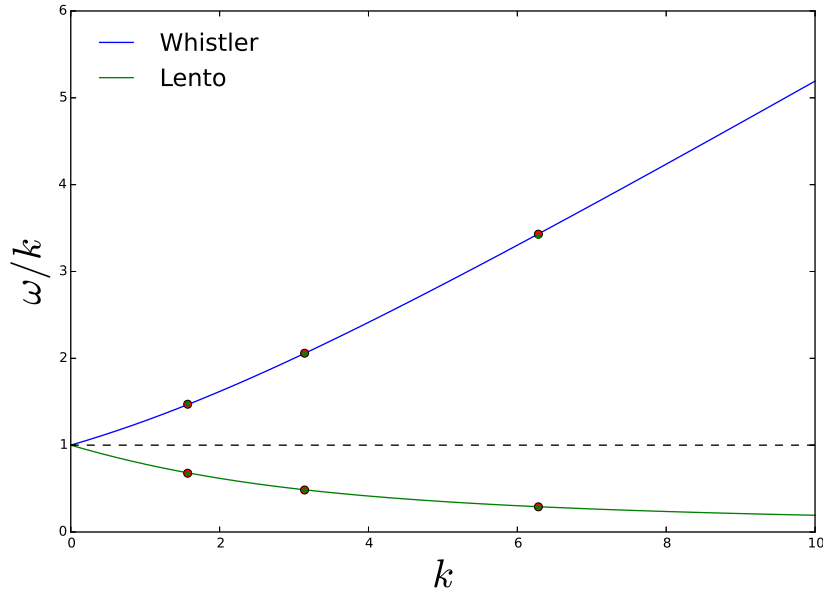


Figure 7.3: Relación de dispersión para ondas circularmente polarizadas bajo el efecto Hall. La curva azul corresponde al modo de Whistler ω_R , la curva verde corresponde al modo lento o derecho ω_L . Con círculos se representan las soluciones numéricas para la resolución de 32 celdas por longitud de onda, y con puntos las soluciones para la resolución de 16 celdas por longitud de onda. Notar que FARGO3D es capaz de resolver grandes números de onda incluso con una resolución de 16 celdas por longitud de onda. La línea de puntos corresponde al modo de Alfvén del caso ideal.

Como se observa en la figura 7.3, la consecuencia del efecto Hall sobre una onda circularmente polarizada es dividir al modo de Alfvén en dos nuevos modos, uno rápido (Whistler) y otro modo lento (derecho). Es claro que la implementación ha sido satisfactoria dado que se reproduce el comportamiento analítico de la relación de dispersión 7.21.

7.4 Condición CFL para el efecto Hall.

La condición de estabilidad CFL en este caso es análoga a la difusión de Ohm, y se tiene:

$$\Delta t_H = \min \left(\frac{\Delta x^2}{\eta_H 2D}, \frac{\Delta y^2}{\eta_H 2D}, \frac{\Delta z^2}{\eta_H 2D} \right) \quad (7.29)$$

donde $\eta_H = \frac{B}{n_e e}$ y D es la dimensión espacial del problema.

8 MRI bajo el efecto Hall y la difusión de Ohm

Ya que la MRI es una inestabilidad, se caracteriza por la excitación de distintos modos que bajo condiciones de la MHD ideal crecen indefinidamente. Estos modos surgen de perturbaciones en el fluido propias de la turbulencia y la rotación diferencial del disco ($\Omega = \Omega(r)$). Si se realiza un análisis lineal en modos de Fourier sobre los campos, puede derivarse una relación de dispersión que describa la tasa de crecimiento σ en función del número de onda k para cada modo de Fourier. De esta forma uno propone

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \quad (8.1)$$

$$\vec{v} = \delta v e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \hat{z} \quad (8.2)$$

$$\vec{B} = B_0 \hat{x} + \delta B e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)} \hat{z} \quad (8.3)$$

Donde k es el número de onda y σ se corresponderá con la parte imaginaria de la frecuencia ω . Autores como Wardle (1999) y Babus y Hawley (1991) prueban que los modos siguen la relación $\sim e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}+\sigma t}$, por esta razón nos referimos siempre al crecimiento de los modos generados por la MRI.

En este capítulo vamos a mostrar los resultados obtenidos al estudiar la tasa de crecimiento lineal de la MRI bajo la acción del efecto Hall y la difusión de Ohm. Lo interesante de las pruebas realizadas aquí es que estamos estudiando por primera un problema de MHD no ideal sobre la configuración de un disco protoplanetario.

Para desarrollar las distintas simulaciones fue necesario implementar un setup en FARGO3D que sea capaz de generar distintos modos de la MRI sobre el disco. El modelo de disco adoptado para las simulaciones posee un perfil de densidad homogéneo, no estratificado, de la forma $\rho_0 = 1.0$. La relación de aspecto es $h = 0.1$ y la velocidad del sonido $c_s = H\Omega$, con $H = hr$. La ecuación de estado es isoterma y no se agrega viscosidad al disco. En la ecuación de momento se agrega un potencial central de la forma $\Phi = \frac{GM_*}{r}$, además de la fuerza de Lorentz y el gradiente de presión. La base elegida para la solución de las ecuaciones es cilíndrica, sobre un marco de referencia inercial.

Para generar los distintos modos se inicializan perturbaciones aleatorias del orden de $\frac{\delta v}{c_s} = 10^{-6}$ en la componente radial y vertical de la velocidad, el campo magnético

es inicializado uniformemente en la dirección z a partir del parámetro β mediante la relación:

$$B_{z0} = h \sqrt{\frac{2\mu_0\rho_0}{\beta}} \quad (8.4)$$

Donde $\mu_0 = \frac{4\pi}{c}$ es la permeabilidad magnética, que en las unidades de FARGO3D se adopta como la unidad. Para todos los casos presentados de aquí en adelante se fija un valor de $\beta = 500$, de tal forma que el campo inicial $B_{z0} \sim 0,006$.

Todas las simulaciones son 2D, en una caja de tamaño $1 \times 256 \times 256$, (recordar que en FARGO3D la terna cilíndrica se corresponde con ϕ, r, z). El tamaño físico adoptado para la caja es $\pi \times 1$ en ϕ, r . De esta forma se simula la mitad del disco con una única celda en la dirección azimutal, el tamaño en z varía en algunas simulaciones y se detallará más adelante. Se adoptan los límites en r de tal forma que el radio central sea $R = 3.0$, es decir, la caja tiene los límites radiales $[2.5, 3.5]$ (ver figura 8.1) las condiciones de contorno son periódicas en z (cilindro infinito) y reflectantes en r .

Estas condiciones nos posibilitan estudiar los modos sobre el plano (r, z) con $k = \sqrt{k_z^2 + k_r^2}$. Dado que la condición de contorno en r no es periódica, se utiliza una función para difundir los campos a 0 cerca de los bordes radiales para evitar que la reflexiones introduzcan ruidos en la medición, básicamente se toma una región de tamaño 0.5 en torno a $R = 3.0$ y en el resto de las celdas se anulan los campos, como se ve en la figura 8.1

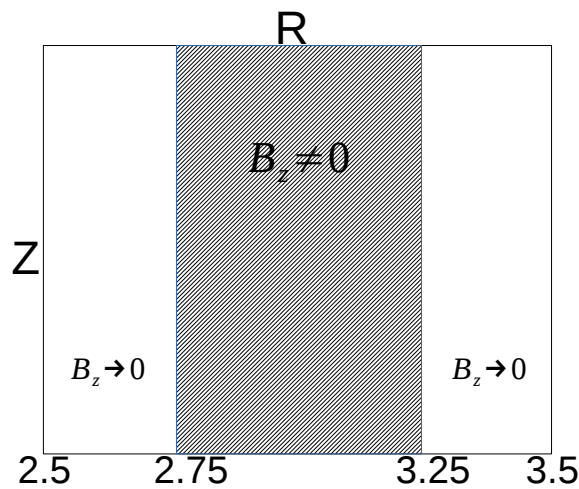


Figure 8.1: Condición para el campo magnético en la dirección radial.

8.1 Relación de dispersión

Cuando se escriben las ecuaciones dinámicas para el fluido en un disco caracterizado por su velocidad angular diferencial $\Omega = \Omega(r)$ y se realiza un análisis lineal en modos de Fourier sobre los campos se puede derivar una relación de dispersión del tipo $\sigma(k)$ (Wardle 1999), la cual en condiciones de MHD ideal solo depende de Ω y χ la velocidad de Alfvén v_A . Si se contemplan los efectos no ideales tales como Hall y difusión Óhmica, la relación de dispersión $\sigma(k)$ puede obtenerse resolviendo la ecuación 8.5 (Bai 2014):

$$\sigma^4 + \frac{2k^2}{\Lambda}\sigma^3 + \mathcal{E}_2\sigma^2 + \frac{2k^2}{\Lambda}(k^2 + 1)\sigma + \mathcal{E}_0 = 0 \quad (8.5)$$

Donde:

$$\mathcal{E}_2 = 2k^2 + 1 + \frac{k^2}{\Lambda^2} + \frac{k^2}{2\chi} \left(\frac{2k^2}{\chi} - 3 \right) \quad (8.6)$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{k^4}{\Lambda^2} + k^2 \left(k^2 + \frac{2k^2}{\chi} - 3 \right) \left(1 + \frac{1}{2\chi} \right) \quad (8.7)$$

$$\Lambda = \frac{v_A^2}{\eta_O \Omega} \quad (8.8)$$

$$\chi = \frac{v_A^2}{\eta_H \Omega} \quad (8.9)$$

Donde χ y Λ son los denominados números de Elsasser y a medida que decrecen a 0 determinan cuando los efectos no ideales se tornan importantes. En la ecuación 8.5 las unidades son tales que $\sigma \equiv \frac{\sigma}{\Omega}$ y $k \equiv \frac{k v_A}{\Omega}$.

8.2 Comprobación numérica de la relación de dispersión

Vamos a detallar el procedimiento numérico realizado para obtener los distintos modos k de la MRI y cómo hemos medido su tasa de crecimiento lineal σ . La clave del análisis de los datos es estudiar el problema en el espacio de Fourier donde las coordenadas son (k_r, k_z, σ) . Para llevar nuestro problema de 2D a 1D, en el espacio de Fourier, de tal manera que $\sigma(k) = \sigma(k_z)$, se fija $k_r = 0$ para todos los ajustes. La transformada de Fourier de la componente del campo magnético radial $B_r(\vec{x}, t)$ es

$$\mathcal{F}(\vec{k}, t) = \iint_{-\infty}^{\infty} B_r(\vec{x}, t) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{x}} d\vec{x} \quad (8.10)$$

Durante la etapa de crecimiento lineal, podemos pensar a $B_r(\vec{x}, t)$ como una combinación lineal de los N modos que se excitarán, así se tiene que:

$$B_r(\vec{x}, t) = \sum_{l=1}^N B_{l0} e^{i\vec{k}_l \cdot \vec{x} + \sigma_l t} \quad (8.11)$$

La transformada de Fourier es entonces:

$$\mathcal{F}(k_r, k_z, t) = \sum_{l=1}^N B_{l0} e^{\sigma_l t} 2\pi \delta(k_{lz} - k_z) \delta(k_{lr} - k_r) \quad (8.12)$$

Por lo tanto para cada modo \vec{k}_l se puede derivar la relación lineal:

$$\ln|\mathcal{F}(k_{zl}, k_{rl}, t)| = \sigma_l t + \ln(B_{l0}) \quad (8.13)$$

Ajustando esta relación se puede obtener el valor de σ_l para cada modo k_l . Como dijimos al comienzo tomamos $k_{rl} = 0$ de tal forma que $k_l = k_{zl}$.

Para resolver el problema numéricamente utilizamos la rutina FFT2 (Fast Fourier Transform 2D) de `numpy`, la cual retorna el la transformada bidimensional de una señal. Dado que la perturbación inicial es muy pequeña ($\sim 10^{-6}$) la amplitud del espectro de potencia, $\mathcal{F}(B_r)^2$, presenta una relación señal ruido pobre. Para aumentar ésta relación se realizan 20 simulaciones con perturbaciones aleatorias diferentes en cada una de ellas y se promedian los espectros de potencia, en la figura 8.2 se muestran las diferencias entre ambos espectros.

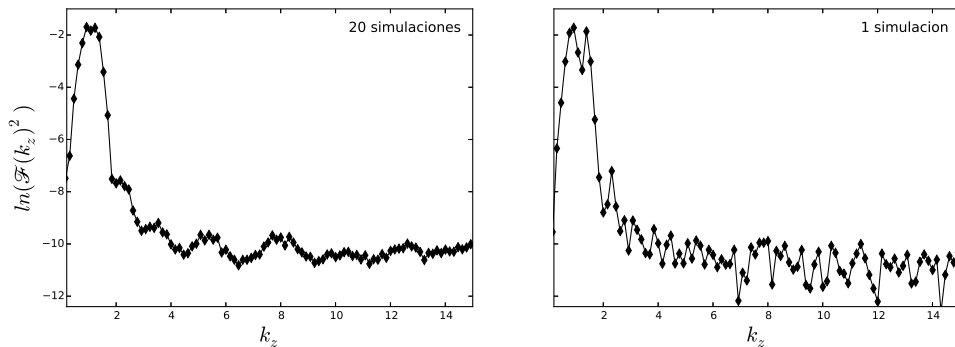


Figure 8.2: En la figura se observa como disminuye el ruido y se suaviza la curva del espectro de potencias al tomar el promedio de 20 simulaciones idénticas, excepto por las perturbaciones aleatorias en la velocidad. Ambos espectros corresponden a la última salida de cada simulación. Los modos excitados (que son los estudiados) pertenecen a la región de máximo crecimiento, en el intervalo $k_z = [0, 2]$ aproximadamente.

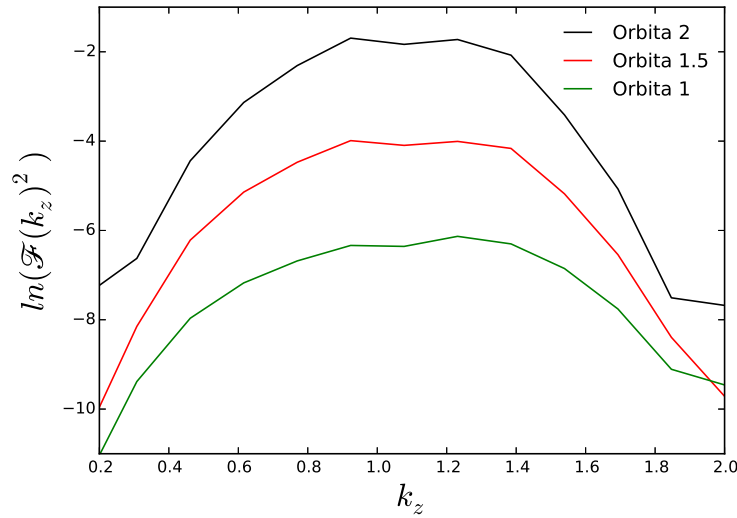


Figure 8.3: Crecimiento del espectro de potencias en una simulación con 200 salidas temporales. Se observa como los modos con $k_z = [0, 2]$ crecen a medida que se avanza en el tiempo.

Es interesante observar como crece el espectro de potencias de Fourier a medida que avanzan en el tiempo las simulaciones. En la figura 8.2 mostramos el crecimiento particular obtenido en una de las simulaciones. La idea aquí no es precisar en los parámetros de la simulación sino mas bien mostrar las herramientas utilizadas para el computo de la tasa de crecimiento. Además, en la figura 8.4, para las mismas simulaciones mostramos el campo magnético radial B_r sobre el plano (r, z) para observar el crecimiento de las estructuras generadas por la MRI.

Por último, en la figura 8.5 mostramos el crecimiento lineal de $\ln|\mathcal{F}(k_{zl}, 0, t)|$ para distintos modos k_{zl} como función del tiempo. A partir de un ajuste de cuadrados mínimos se obtiene el valor de σ_l para cada modo.

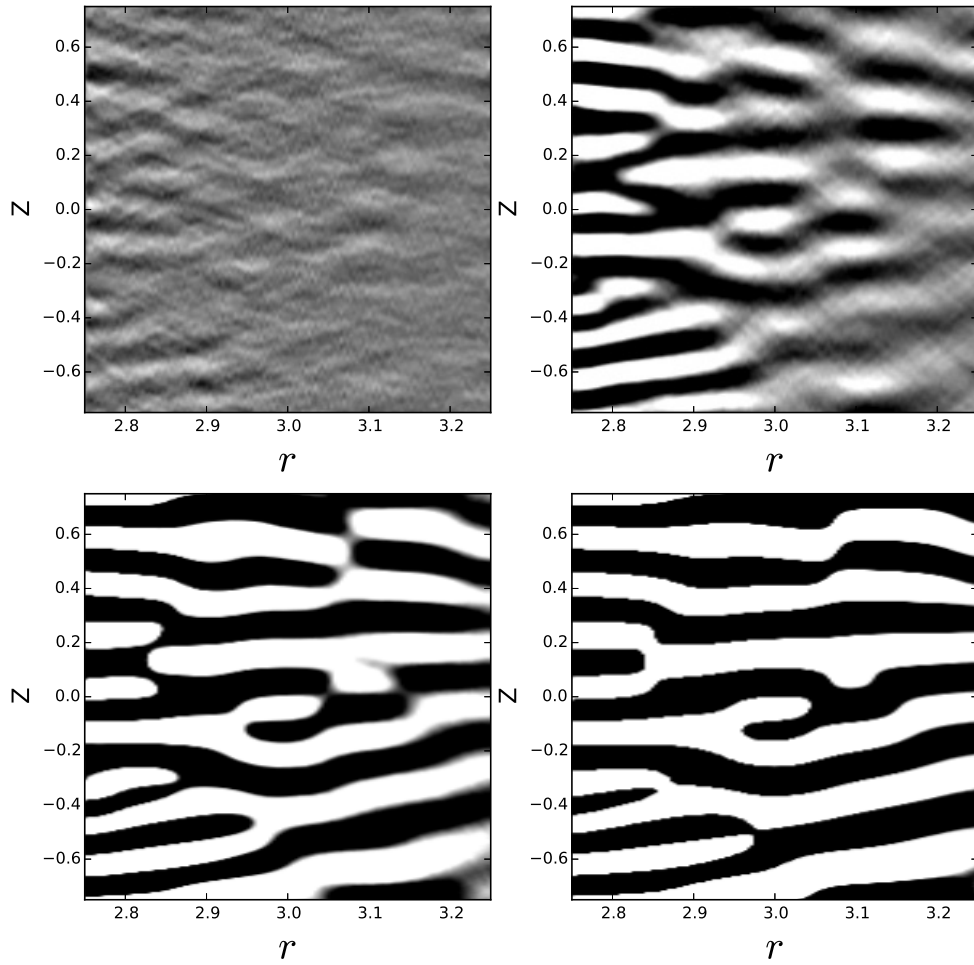


Figure 8.4: Aquí observamos la amplitud del campo magnético radial en el plano (r, z) . Se distinguen las estructuras generadas por la MRI. El crecimiento está dado por el aumento en intensidad y contraste de las imágenes. Observamos como la inestabilidad se propaga de radios menores a radios mayores. Esto se debe a que el crecimiento de la inestabilidad depende de la velocidad de rotación y los radios interiores rotan más rápidamente.

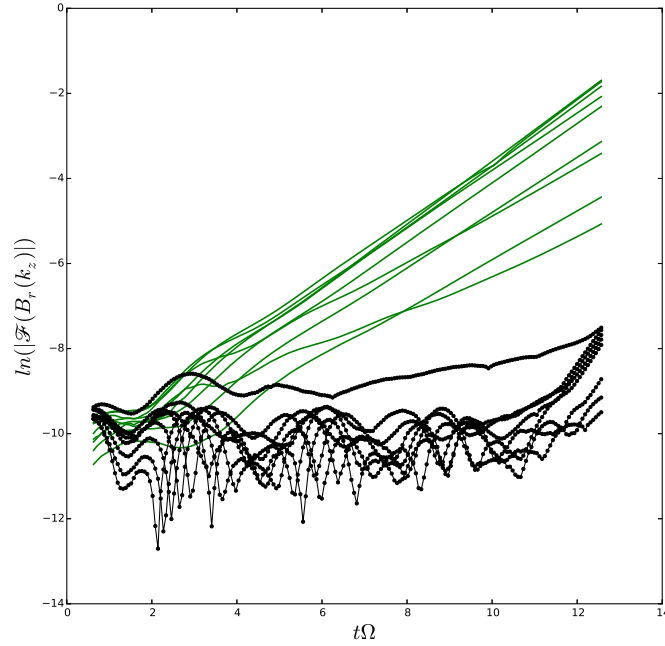


Figure 8.5: En la figura se observa como algunos de los modos comienzan a crecer linealmente mientras que otros no han comenzado su crecimiento aún. Se gráfica en función de $t\Omega$ para adimensionalizar el problema. Las líneas continuas verdes corresponden a los modos excitados en el intervalo $k = [0 : 2]$ (ver figura 8.2), y son los estudiados. Las líneas con puntos negros corresponden a modos que están empezando a crecer. Si el tiempo de total de la simulación crece, la inestabilidad alcanzará un punto de saturación, pues todos los modos habrán crecido desarrollando a la MRI por completo.

El conjunto de pasos explicados aquí se desarrollan para cada una de las simulaciones con las cuales se obtiene los resultados que veremos a continuación considerando al efecto Hall y la difusión Óhmica en la ecuación de inducción magnética.

8.2.1 Efecto Hall

Si despreciamos la difusión Óhmica, lo que equivale a $\eta_O = 0 \Rightarrow \Lambda \rightarrow \infty$, se simplifica la relación 8.5 de la forma:

$$\sigma^4 + \mathcal{E}_2^* \sigma^2 + \mathcal{E}_0^* = 0 \quad (8.14)$$

Donde $\mathcal{E}_2^* = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2$ y $\mathcal{E}_0^* = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \mathcal{E}_0$, de tal forma que la relación 8.14 es ahora:

$$\sigma^4 + \left(2k^2 + 1 + \frac{k^2}{2\chi} \left(\frac{2k^2}{\chi} - 3\right)\right) \sigma^2 + k^2 \left(k^2 + \frac{2k^2}{\chi} - 3\right) \left(1 + \frac{1}{2\chi}\right) = 0 \quad (8.15)$$

La solución de interés de esta ecuación es:

$$\sigma(k) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(-\mathcal{E}_2^* + \sqrt{-4\mathcal{E}_0^* + \mathcal{E}_2^*} \right)}$$

Considerando el setup y los procedimientos numéricos descritos anteriormente, se realizan 4 simulaciones que difieren únicamente en el valor de la difusividad de Hall, η_H . Se toman los valores de $\eta_H = -0.01, -0.04, 0.01$ y 0.0 , el caso con $\eta_H = 0.0$ es MHD ideal. Las simulaciones se desarrollan en un de tiempo total equivalente a 2 orbitas para el radio $R = 3.0$ (excepto para el caso $\eta_H = -0.04$ donde se alcanzan 2.5 órbitas), con un período orbital $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, donde $\Omega \simeq 0.192$ en las unidades de FARGO3D ($G = 1.0$ y $M_* = 1.0$).

En la figura 8.6 mostramos los resultados obtenidos para las distintas simulaciones.

Para la obtención de los puntos ajustamos la relación 8.13 entre las órbitas 1 – 2, excepto en el caso $\eta_H = -0.04$ donde tomamos el intervalo de tiempo correspondiente a 2 – 2.5 órbitas. Los resultados revelan una satisfactoria implementación del efecto Hall en FARGO3D, dado que los puntos siguen notablemente el comportamiento analítico de la solución teórica. Es importante notar que la solución teórica fue calculada a partir de los valores iniciales de la densidad y el campo magnético, es decir $\chi = \frac{v_{A0}^2}{\eta_H \Omega}$.

En la figura 8.6 se destacan dos aspectos fundamentales íntimamente relacionados. El aumento de la cantidad de modos que crecen a medida que se incrementa el valor de η_H y el desplazamiento de la frecuencia de corte o número de onda crítico k_{zc} . Este valor k_{zc} se obtiene resolviendo la ecuación $\sigma(k_z) = 0$.

Existe un valor de η_{Hc} a partir del cual no hay un modo crítico de corte y todos los modos son capaces de crecer, como se observa en la figura asociada a $\eta_H = -0.04$. Es esperable que el valor de $\eta_{Hc} \sim -0.04$.

8.2.2 Difusión de Ohm y efecto Hall

En este caso se resuelve la ecuación general 8.5 teniendo en cuenta que tanto χ y Λ toman valores no nulos. Las simulaciones realizadas son iguales a las desarrolladas para el efecto Hall, solo que se agrega el parámetro $\eta_O = 0.0002$ en todas ellas. En la figura 8.7 se presentan los resultados analíticos para $\sigma(k_z)$ junto a los puntos obtenidos numéricamente para la tasa de crecimiento. En este caso, a diferencia del anterior en

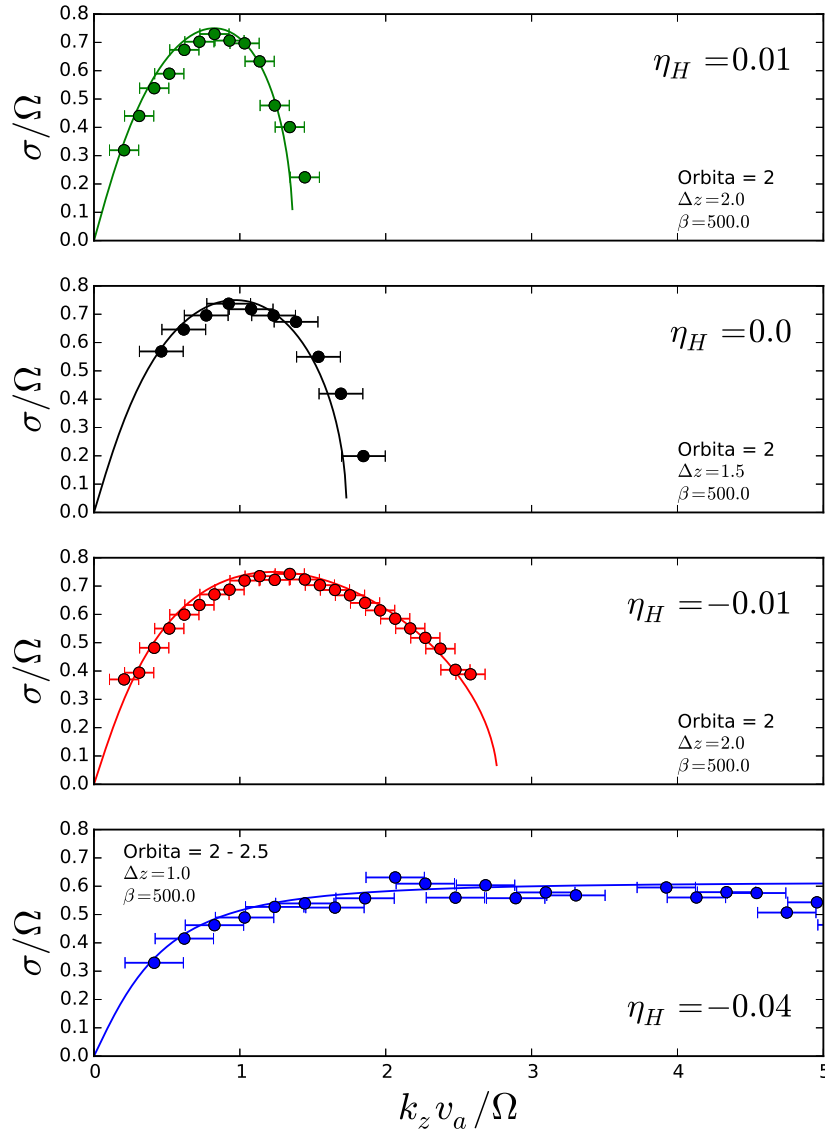


Figure 8.6: En la figura observamos los resultados de las 4 simulaciones. Con puntos los datos numéricos y con líneas continuas los resultados teóricos. Se aprecia como los datos numéricos siguen la tendencia de la solución teórica. Δz corresponde al tamaño físico de la caja en la dirección z . A medida que η_H aumenta se observa como aumenta el número de modos excitados.

donde solo se tenía en cuenta el efecto Hall, la curva teórica es calculada a partir de los valores de la densidad y el campo magnético, correspondientes a la órbita 1.5, es decir que $\chi = \frac{v_{A150}^2}{\eta_H \Omega}$ y $\Lambda = \frac{v_{A150}^2}{\eta_O \Omega}$. Esto se debe a que el valor del campo magnético se modifica notablemente entre cada paso de tiempo debido a la acción de la difusión óhmica, y su valor medio se aleja del valor inicial, a diferencia del caso de puro Hall (recordar que Hall no es difusivo). Se toma el valor de la órbita , dado que la tasa de crecimiento σ se calcula entre la órbita 1 – 2, y queremos una estimación media del campo en ese período de tiempo. De todas formas hay que destacar que nunca buscamos precisión en los ajustes ni la esperamos debido a la gran cantidad de efectos presente no deseados (crecimientos no lineales de los modos, interferencias, aliasing, etc.), sino más bien que los datos numéricos sigan las tendencias de las curvas teóricas, por lo tanto la precisión en este tipo de estimaciones no es necesaria.

Reconocemos nuevamente como los resultados numéricos siguen el comportamiento de la curva teórica, demostrando así que la implementación de la difusión óhmica es correcta y que además los términos de Hall y Ohm pueden funcionar juntos sin problemas. Esta prueba es importante dado que es la única en la que se comprueba la implementación de los términos de Ohm, además de permitir analizar como funciona el código con los términos de Hall y Ohm actuando en forma conjunta.

A diferencia de los resultados obtenidos en la figura 8.6, en este caso la frecuencia de corte es mucho menor y la tasa de crecimiento disminuye notablemente.

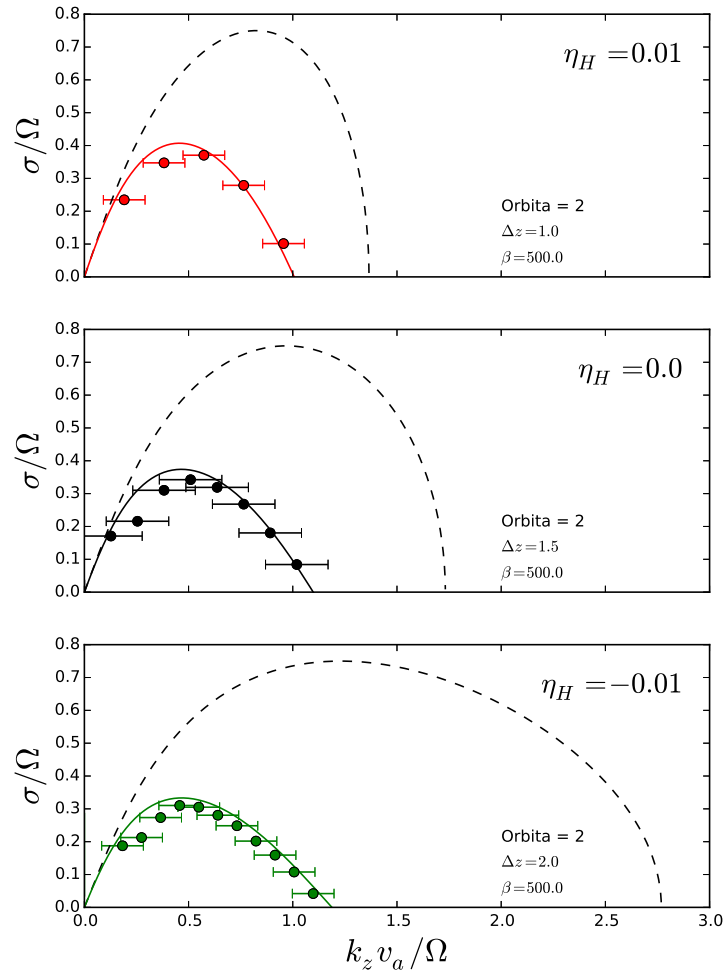


Figure 8.7: Relación de dispersión para MRI con efecto Hall y Ohm. Para todas las simulaciones se fijó un valor de $\eta_O = 0.0002$. Se observa como la tasa de crecimiento disminuye en comparación a los resultados de la figura 8.6 (curvas en línea de puntos). Además la frecuencia de corte o número de onda crítico decrece notablemente.

9 Estudios preliminares de la interacción polvo-gas. Desarrollo multifluido hidrodinámico

En el capítulo 3 presentamos las ecuaciones generales que describen la dinámica de un conjunto de fluidos interactuantes bajo la presencia de un campo electromagnético. Si bien todos los desarrollos hasta aquí y todos los resultados obtenidos surgieron de trabajar con la aproximación de monofluido, hemos trabajado e incorporado un nuevo módulo en FARGO3D que permite resolver la interacción hidrodinámica entre dos fluidos. Es posible que uno de los fluidos sea un plasma y en su conjunto de ecuaciones se resuelva la ecuación de inducción magnética bajo la aproximación magnetohidrodinámica.

La incorporación de este módulo pudo aplicarse al estudio de la interacción entre el polvo y el gas en un disco protoplanetario. Dado que el polvo es una componente principal del disco y teniendo en cuenta que muchas de las observaciones de los DPP se realizan en bandas propias de la radiación proveniente del polvo, como las observaciones desarrolladas por ALMA (Atacama Large Millimeter/Submillimeter Array), la incorporación de este módulo nos posibilita realizar simulaciones para comparar con las observaciones y así profundizar en conocimiento y entendimiento de la dinámica en los procesos de formación planetaria.

Las simulaciones intentan reproducir la interacción de arrastre entre el polvo y el gas incorporando fuerzas de colisiones entre ambos fluidos. En este capítulo primeramente puntualizaremos en cómo se realizó la incorporación del módulo multifluido en FARGO3D y luego mostraremos algunas de las simulaciones realizadas para constatar que el módulo funciona correctamente y reproduce los patrones básicos de la interacción polvo-gas.

9.1 Ecuaciones dinámicas de la interacción polvo-gas

Si bien el polvo suele resolverse con un modelo de partículas, es posible describir su dinámica pensándolo como un fluido que solo interactúa con el potencial central del disco y de los planetas y colisiona con el gas. De esta forma no es necesario incorporar partículas y basta resolver las ecuaciones dinámicas de cada fluido. En el caso puramente hidrodinámico se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_p \vec{v}_p) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_g \vec{v}_g) &= 0\end{aligned}\tag{9.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}_g}{\partial t} + \vec{v}_g \cdot \nabla \vec{v}_g &= -\frac{\nabla P}{\rho_g} - \nabla \Phi + \rho_p \gamma_{gp} (\vec{v}_p - \vec{v}_g) \\ \frac{\partial \vec{v}_p}{\partial t} + \vec{v}_p \cdot \nabla \vec{v}_p &= -\nabla \Phi - \rho_g \gamma_{gp} (\vec{v}_p - \vec{v}_g)\end{aligned}\quad (9.2)$$

Donde p denota el polvo, g al gas, γ_{gp} es la frecuencia de colisión característica entre el polvo y el gas, Φ el potencial central y P la presión sobre el gas. Además se asume una ecuación de estado isoterma para el gas de la forma:

$$P = \rho_g c_s^2 \quad (9.3)$$

9.2 Solución numérica a la interacción de arrastre para dos fluidos

Los términos de arrastre son las únicas novedades para FARGO3D en las ecuaciones 9.2, así que precisaremos en la solución de estos nuevos términos. Siguiendo el desarrollo de Stone (1997) primero se resuelven las colisiones de manera implícita y luego la velocidad resultante de esta solución se entrega como una suerte de condición inicial a los operados de FARGO3D que resuelven tanto las ecuaciones de continuidad como de momento (sin el arrastre).

La solución implícita para el arrastre surge de la condición:

$$\frac{v_g^{n+1} - v_g^n}{\Delta t} = \gamma \rho_p (v_p^{n+1} - v_g^{n+1}) \quad (9.4)$$

$$\frac{v_p^{n+1} - v_p^n}{\Delta t} = -\gamma \rho_g (v_p^{n+1} - v_g^{n+1})$$

Que no es más que la ecuación de momento para el gas y el polvo escrita en diferencias finitas teniendo en cuenta solo la fuerza de arrastre. Este sistema de ecuaciones se puede resolver para v_g^{n+1} y v_p^{n+1} de la forma:

$$v_g^{n+1} = \frac{v_g^n + \Delta t \gamma (\rho_g v_g^n + \rho_p v_p^n)}{1 + \Delta t (\rho_p + \rho_g)} \quad (9.5)$$

$$v_p^{n+1} = \frac{v_p^n + \Delta t \gamma (\rho_g v_g^n + \rho_p v_p^n)}{1 + \Delta t (\rho_p + \rho_g)} \quad (9.6)$$

entregando una solución numéricamente estable, ya que a medida que se incrementa

el valor de Δt la solución tiende al promedio de las velocidades pesado en la densidad (Stone 1997):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} v_g^{n+1} = \frac{1}{\rho_g + \rho_p} (v_g^n \rho_g + v_p^n \rho_p) = \frac{\mathcal{M}_0}{\rho_{tot}} \quad (9.7)$$

Donde \mathcal{M}_0 es el momento total inicial y ρ_{tot} es la densidad total. La solución de la ecuación 9.7 es la esperada para un conjunto de partículas que intercambian momento por medio de un arrastre proporcional a la diferencia de sus velocidades.

De esta forma, hemos incorporado en FARGO3D para cada componente de la velocidad las soluciones de la forma 9.5. El éxito de la implementación numérica recae en el nuevo macrocomando **MULTIFLUID**, el cual es en esencia un lazo que se aplica sobre las funciones deseadas, por ejemplo la función **algogas()** que le permite a FARGO3D resolver todas las ecuaciones para cada fluido (incluyendo 9.5) e incluso permite resolver la MHD (por medio de funciones que se llaman dentro de **algogas()**). Existen una serie de macrocomandos nuevos que deben utilizarse junto a **MULTIFLUID**, tales como el macro **GAS** y el macro **INTERACT**. El macro **GAS** define la cantidad de fluidos que se quieren resolver, por ejemplo podemos realizar varias simulaciones de fluidos independientes con distintas condiciones iniciales, pero con un mismo archivo de parámetros. El macro **INTERACT** activa el arrastre entre los fluidos. **MULTIFLUID** está siempre activado, sólo que por defecto la cantidad de fluidos es 1. Si aumenta el valor de **GAS**, el lazo se realiza **GAS**-veces.

El objetivo de la implementación es que FARGO3D resuelva las ecuaciones para cada fluido en forma independiente y eficiente, pero teniendo en cuenta que para cada paso de tiempo las velocidades de ambos están acopladas. Estos macrocomandos permiten conservar la estructura de FARGO3D prácticamente intacta y cumplir con este objetivo.

Un detalle a tener en cuenta es que la estructura interna de FARGO3D resuelve las ecuaciones para los planetas teniendo en cuenta la interacción con el fluido y con el campo central. Para que **MULTIFLUID** sea eficiente debe, computar la interacción de los planetas con cada fluido y una única vez por paso de tiempo la interacción del planeta con el potencial central. Esto requirió de algunas modificaciones internas en el código, ya que al aplicar el lazo sobre la función **algogas** se resuelve la interacción planeta-objeto central **GAS**-veces en un mismo paso de tiempo. Para evitar esto se agregaron contadores dentro de la función que resuelve la interacción planeta-objeto central que activan la función una única vez en todo el lazo.

9.3 Prueba de conservación de momento

La prueba realizada para comprobar la correcta implementación de los términos de arrastre consiste en estudiar la conservación de momento de los fluidos interactuantes. Si sólo actúa la fuerza de arrastre (son las únicas ecuaciones que se resuelven), esperamos que las velocidades decaigan exponencialmente en el tiempo y que el momento lineal se mantenga constante.

Para estudiar si éste comportamiento era descrito por la implementación realizada se desarrolló un setup 2D en una malla de tamaño 4×4 con 100×100 celdas. Fijamos una tasa de colisión $\gamma = 1.0$ y se inicializaron las densidades y la velocidad de cada fluido de tal manera que los momentos sean iguales y opuestos, $\mathcal{M}_{y1} = -\mathcal{M}_{y2}$ y $\mathcal{M}_{x1} = -\mathcal{M}_{x2}$ donde $\mathcal{M} = \rho v$. Mostramos los resultados en las figuras 9.1 y 9.2.

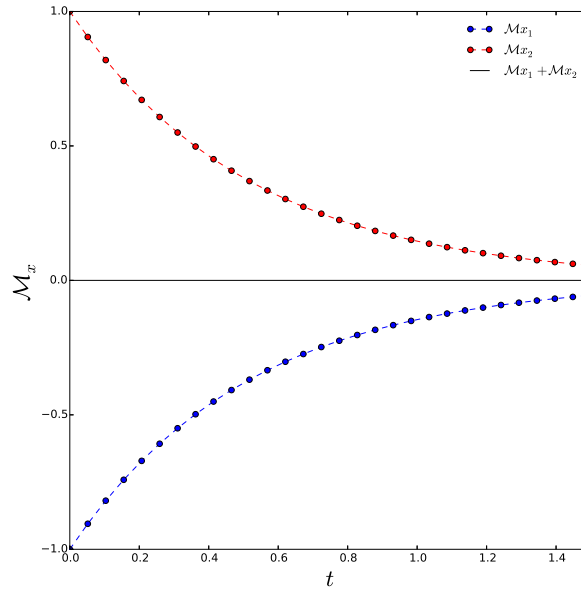


Figure 9.1: Conservación del momento lineal por unidad de volumen $\mathcal{M} = \rho v$ para la componente x de la velocidad. En azul/rojo los momentos del fluido 1/2. En negro la suma de ambos momentos, la cual se observa constante.

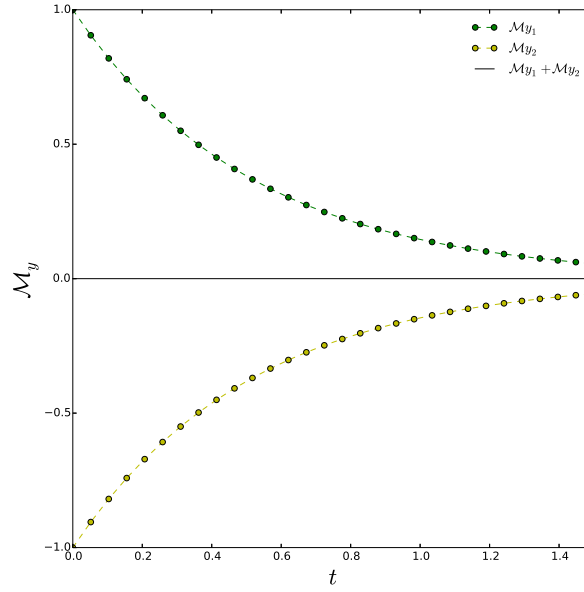


Figure 9.2: Conservación del momento lineal por unidad de volumen $\mathcal{M} = \rho v$ para la componente y de la velocidad. En azul/rojo los momentos del fluido 1/2. En negro la suma de ambos momentos, la cual se observa constante.

Tanto para el momento en y como en x observamos el comportamiento de la ecuación 9.7, dado que los momentos, y por lo tanto las velocidades, pues la densidad es constante ($\rho(t) = \rho_0$), decaen al valor del momento inicial, $\mathcal{M}_0 = 0$.

Claramente se observa como el momento en x e y se conserva. Esta es una buena prueba para comprobar que la implementación no presenta errores groseros. Por supuesto no es suficiente para comprobar que la implementación es correcta, por esta razón se realizan una serie de simulaciones extra intentando describir un problema físico real, como lo es la interacción polvo-gas en un DPP.

9.4 Prueba de la interacción polvo-gas en DPP

En este caso hemos desarrollado una serie de 4 simulaciones con el fin de describir cualitativamente los aspectos generales en la dinámica gas-polvo de un disco protoplanetario. Las primeras 3 simulaciones son 2D y muestran como el gas afecta la dinámica del polvo a medida que aumenta el arrastre entre ambos, la última simulación es 3D y tiene como objetivo ejemplificar la caída del polvo a la región central del disco, mientras que el gas queda prácticamente inalterado en su estructura vertical. Todas las simulaciones se realizan con la presencia de un planeta lo que es más interesante ya que tendremos un problema de 3 cuerpos para cada elemento de volumen.

9.4.1 Simulaciones 2D

Presentamos aquí los resultados de 3 simulaciones hidrodinámicas 2D de tamaño $\phi = [0 : 2\pi]$ y $r = [0.4 : 1.8]$ con 1024×512 celdas y unas 200 órbitas. Se fija un valor de $h = 0.05$ para la relación de aspecto y un perfil de densidad homogéneo $\Sigma_0 \sim 6.3 \times 10^{-6}$. Se adhiere una viscosidad cinemática de $\nu = 10^{-5}$ y se suma un planeta de masa $M_p = 0.0002$, dado que en FARGO3D $M_\odot = 1.0$ la masa del planeta es equivalente a $0.2 M_{júpiter}$. La relación de densidad entre el polvo y el gas es $\frac{\rho_p}{\rho_g} = 10^{-2}$. Para que el potencial del planeta interactúe suavemente con el polvo y el gas, y no se generen vórtices inicialmente, aumentamos la masa del planeta gradualmente en unas 10 órbitas, esto significa que M_p crece a $0.2 M_{júpiter}$ en la décima órbita. El marco de referencia es corrotante con $\Omega = 1.0$ en $R = 1.0$, lo cual corresponde a la posición del planeta. Las simulaciones difieren en el valor de la tasa de colisión por unidad de densidad γ , la cual toma los valores de 0, 10, y 100. La velocidad radial se inicializa nula, mientras que la velocidad azimital es subkepleriana de la forma $v_\phi = r\Omega\sqrt{1-h^2}$, dado que $\sigma = \beta = 0.0 \implies n(\sigma, \beta) = 1.0$, además $c_s = h\Omega$.

Las condiciones de contorno son periódicas en ϕ y reflectantes en r . Se agrega una función extra en r para evitar reflexiones no deseadas, la cual amortigua todas las ondas que alcanzan el límite radial del disco simulado.

En las figuras 9.3, 9.4 y 9.5 presentamos los resultados de cada simulación para la última órbita.

En estas 3 simulaciones es claro que no existe una respuesta del polvo hacia el gas, es decir que la dinámica del gas no se ve alterada por la presencia del polvo. Ocurre exactamente lo contrario para el polvo, su distribución de densidad es más suave a medida que aumenta el arrastre y su caída al centro del disco se retarda. Todas las simulaciones reproducen los aspectos básicos de la dinámica gas-polvo en un DPP. El gas presenta un vaciamiento (gap) en la región planetaria y se distinguen las colas tidales típicas de la interacción planeta disco. Por otro lado el polvo presenta una configuración orbital de herradura con las asimetrías típicas.

Si bien aquí estamos estableciendo un análisis cualitativo, reconocemos que en las simulaciones capturamos los aspectos básicos de la dinámica gas-polvo en un DPP, verificando una correcta implementación de los módulos de interacción.

9.4.2 Simulación 3D

El setup implementado aquí sigue los mismos parámetros que en el caso 2D, sólo que agregamos una dimensión vertical $\theta = [\arctan(3h(r_0), \frac{\pi}{2})]$, el tamaño es de $512 \times$

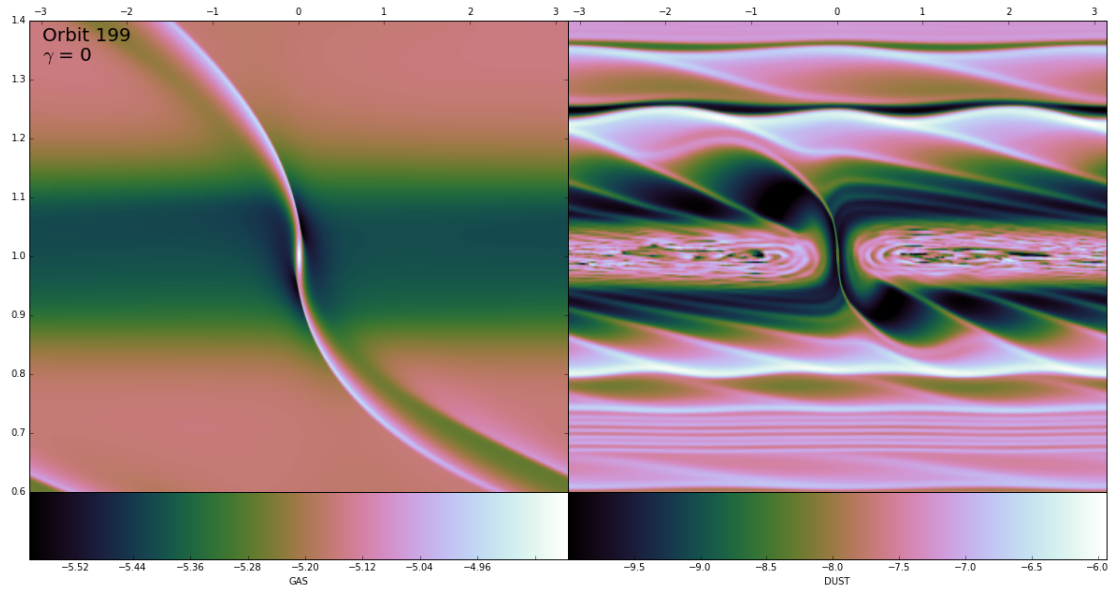


Figure 9.3: Distribución de densidad para la órbita 199 de la simulación con $\gamma = 0$. A la izquierda el gas, a la derecha el polvo (DUST). Se observan las colas tidales en torno al planeta en ambos casos. Para el gas el gap del planeta está prácticamente vacío. Para el polvo se observa la configuración de herradura con posibles regiones de resonancia de movimientos medios, en donde se acumula material.

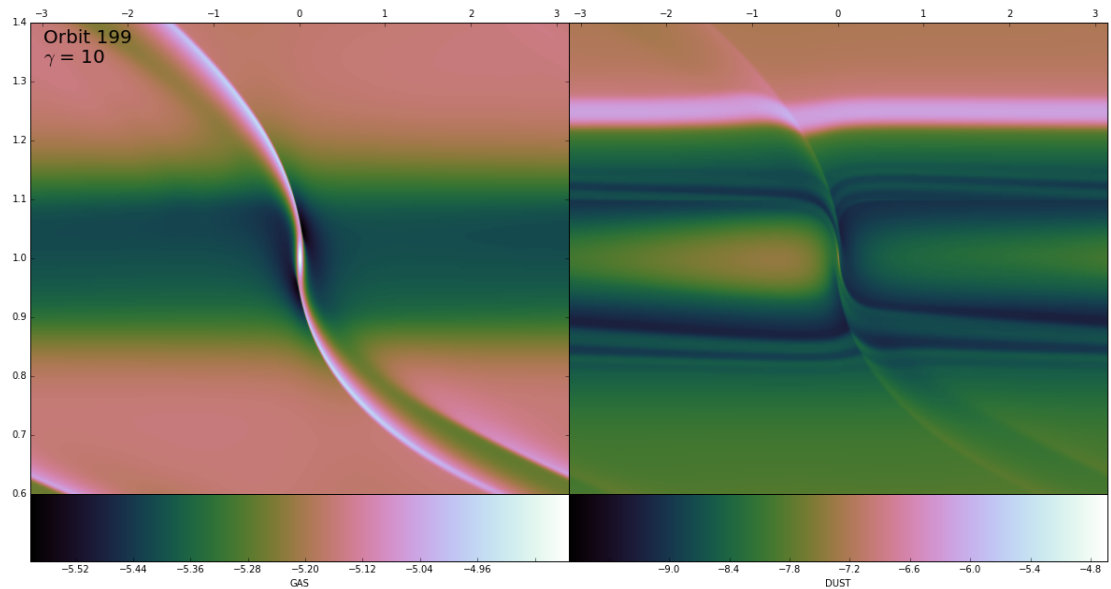


Figure 9.4: Distribución de densidad para la órbita 199 de la simulación con $\gamma = 10$. A la izquierda el gas, a la derecha el polvo (DUST). Se observan las colas tidales en torno al planeta en ambos casos. Para el gas, el gap del planeta está prácticamente vacío. Para el polvo se observa la configuración de herradura y una distribución de densidad mucho mas suave que en el caso $\gamma = 0$. Esto se debe a la interacción con el gas.

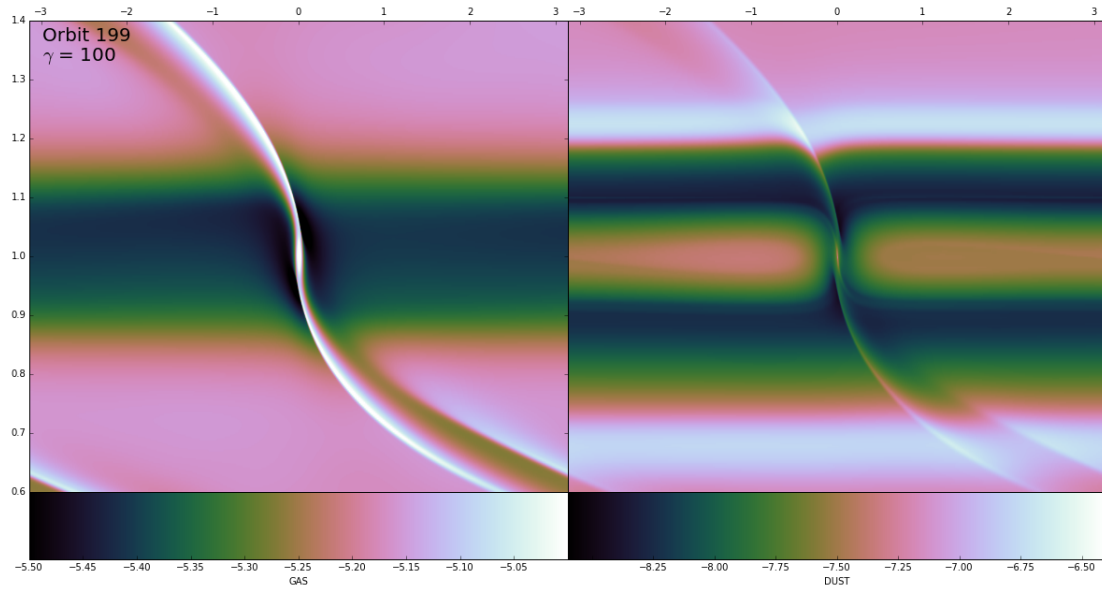


Figure 9.5: Distribución de densidad para la órbita 199 de la simulación con $\gamma = 100$. A la izquierda el gas, a la derecha el polvo (DUST). Se observan las colas tidales en torno al planeta en ambos casos. Para el gas el gap del planeta está prácticamente vacío. Para el polvo se observa la configuración de herradura y una distribución de densidad mucho mas suave que en el caso $\gamma = 0$, y $\gamma = 100$. Esto se debe al aumento en la interacción con el gas. A diferencia del caso $\gamma = 10$ el material aquí no cayó todavía al centro dado acoplamiento fuerte entre el gas y el polvo.

256×32 celdas, $\theta = \frac{\pi}{2}$ corresponde al plano del planeta y el perfil de densidad ya no es homogéneo sino que sigue la relación 1.4 con $\frac{h}{r} = h(r_0)r^{-\beta+1/2}$, $\beta = 0.5$, $h(r_0) = 0.05$ y $r_0 = 1$. El valor inicial de la densidad superficial es $\Sigma_0 = 6.3 \times 10^{-4}$, $c_s = h(r = 1)\Omega \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\beta}$. Además $\sigma = 0.0$, la velocidad radial y vertical son nulas, es decir $v_r = v_z = 0.0$, y la velocidad azimutal es subkepleriana de la forma $v_\phi = r\Omega\sqrt{1 - h^2 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2\beta}}$.

Utilizamos el macrocomando HALFDISK que permite simular la mitad vertical del disco, dado que se asume simetría en la dirección normal al plano orbital del planeta, y de esta forma disminuir el tiempo de computo. Presentamos los resultados para 3 órbitas distintas en la figura 9.6.

Se observa como el polvo cae a la región central del disco luego de 200 órbitas, lo que prácticamente reduce el problema a dos dimensiones, dado que la interacción planeta-polvo será completamente en el plano ecuatorial.

Para el caso de gas (figura 9.7) prácticamente no se observan diferencias en la densidad del disco, por lo cual no existe una retribución importante del polvo hacia el gas, lo que nos permite concluir que, para el gas, la interacción con el polvo es despreciable.

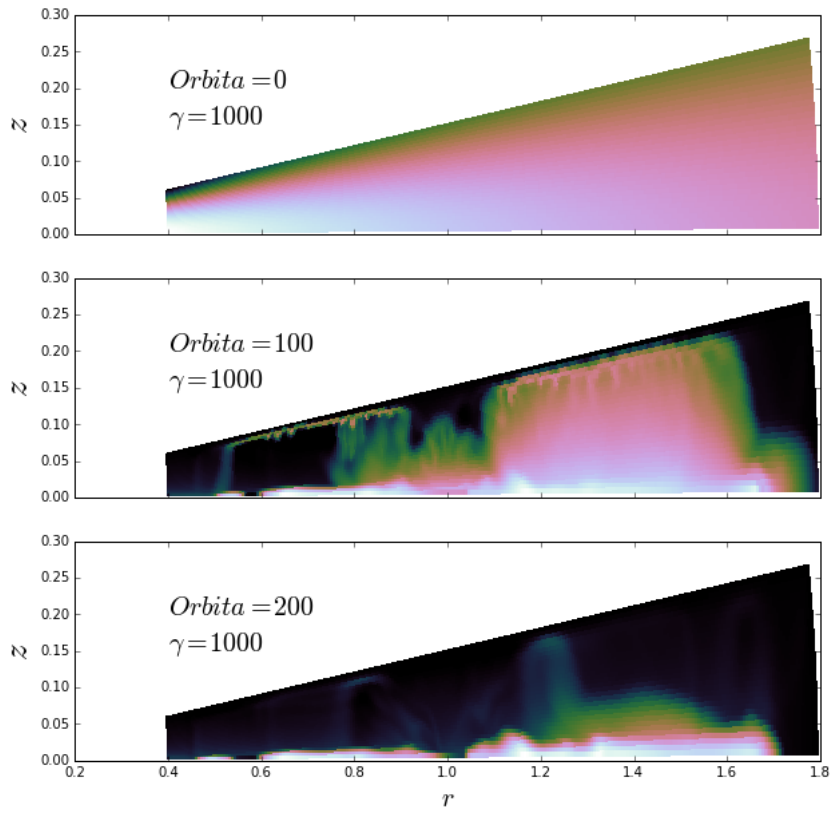


Figure 9.6: Corte azimutal del disco para distinguir la distribución de polvo en el plano (r, z) . Se observa claramente como el polvo cae a las región ecuatorial del disco en unas 200 órbitas aproximadamente. La tasa de colisión entre polvo y gas es $\gamma = 1000$. La relación de densidades es $\frac{\rho_p}{\rho_g} = 10^{-2}$.

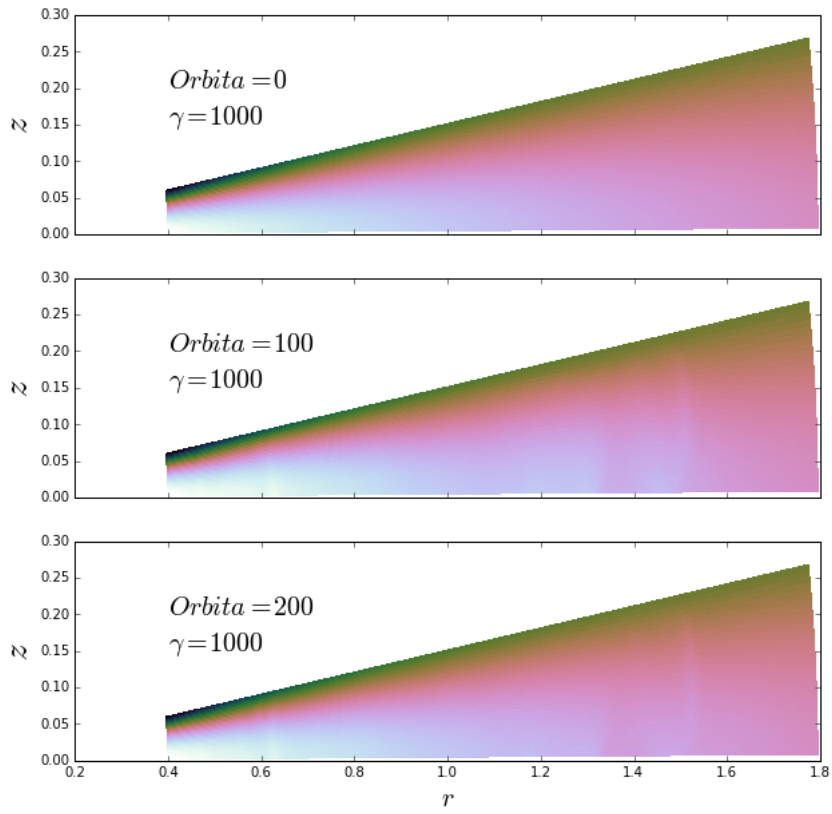


Figure 9.7: Corte azimutal del disco para distinguir la distribución de gas en el plano (r, z) . El gas se ve inalterado por la caída del polvo. La tasa de colisión entre polvo y gas es $\gamma = 1000$. La relación de densidades es $\frac{\rho_p}{\rho_g} = 10^{-2}$.

9.5 Posible solución implícita al problema de interacción de N fluidos.

Hemos presentado aquí la solución al problema de arrastre de dos fluidos de (Stone 1997) pero sería más interesante que el código FARGO3D pueda resolver el arrastre de N fluidos en forma eficiente. Presentamos aquí una posible solución implícita a este problema la cual es estable para $\Delta t \rightarrow \infty$ y converge al valor promedio de las velocidades pesadas en la densidad como en el caso 9.7.

Consideremos la ecuación

$$\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \sum_{i=2}^N \gamma_{1i} \rho_i (\vec{v}_i - \vec{v}_1) \quad (9.8)$$

tomamos a la componente x de esta ecuación (el desarrollo es igual para cada componente de \vec{v}_1), la denotamos por $v_{1x} = v$ y la descomponemos en la suma de $N - 1$ velocidades de la forma:

$$v = v_{a1} + v_{a2} + \dots + v_{aN-1} \quad (9.9)$$

y nada nos impide pedir la condición $v_{ai} = \alpha_i v$ con $\sum_i \alpha_i = 1$.

$$v = \alpha_1 v + \alpha_2 v + \dots + \alpha_N v \quad (9.10)$$

derivamos respecto al tiempo y se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=2}^N \alpha_i \frac{dv}{dt} + v \frac{d}{dt} \sum_{i=2}^N \alpha_i \quad (9.11)$$

como $\frac{d}{dt} \sum_{i=2}^N \alpha_i = 0$ se sigue que $\frac{dv}{dt} = \sum_{i=2}^N \alpha_i \frac{dv}{dt}$.

finalmente dado que $\frac{dv}{dt} = - \sum_{i=2}^N \gamma_i (v_i - v)$ encontramos la relación:

$$\sum_{i=2}^N \alpha_i \frac{dv}{dt} = - \sum_{i=2}^N \gamma_i \rho_i (v_i - v) \quad (9.12)$$

exigimos la condición de igualdad término a término dado que α_i es libre, así se sigue:

$$\alpha_i \frac{dv}{dt} = -\gamma_i \rho_i (v_i - v) \quad (9.13)$$

Lo cual es un problema exactamente igual al problema de arrastre entre dos fluidos. Así hemos desarmado el problema en $N-1$ ecuaciones idénticas al caso de DOS fluidos cuya solución implícita ya conocemos. Tomamos la ecuación 9.13 para el fluido i y escribimos el sistema de ecuaciones en diferencias finitas de la forma:

$$\alpha_i \frac{(v^{n+1} - v^n)}{\Delta t} = \gamma_i \rho_i (v_i^{n+1} - v^{n+1}) \quad (9.14)$$

$$\alpha \frac{(v_i^{n+1} - v_i^n)}{\Delta t} = \gamma_i \rho (v^{n+1} - v_i^{n+1}) \quad (9.15)$$

donde α es el equivalente a α_i para v . La solución a este sistema puede escribirse como:

$$\alpha_i v^{n+1} = \frac{\alpha_i \alpha v^n + \Delta t \gamma_i (\rho_i \alpha v_i^n + \rho \alpha_i v^n)}{\alpha + \frac{\Delta t \gamma_i}{\alpha_i} (\alpha_i \rho + \alpha \rho_i)} \quad (9.16)$$

Si se toma la interacción del fluido asociado a v con el resto, pueden derivarse $N-1$ ecuaciones de la forma 9.16 donde se debe pensar a $\alpha = \alpha_{i1}$ y $\alpha_i = \alpha_{1i}$, los cuales son distintos. La solución será:

$$v_1^{n+1} = \sum_{i=2}^N \frac{\alpha_{1i} \alpha_{i1} v^n + \Delta t \gamma_i (\rho_i \alpha_{i1} v_i^n + \rho \alpha_{1i} v^n)}{\alpha_{i1} + \frac{\Delta t \gamma_i}{\alpha_{1i}} (\alpha_{1i} \rho + \alpha_{i1} \rho_i)} \quad (9.17)$$

Para determinar el valor de los coeficiente adimensionales α_{ji} se debe utilizar la ecuación:

$$\alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{1N} = 1 \quad (9.18)$$

junto a $N-2$ ecuaciones de la forma

$$\frac{\alpha_{1i}}{\alpha_{1j}} = \frac{\gamma_{1i} (v_1^n - v_i^n)}{\gamma_{1j} (v_1^n - v_j^n)} \quad (9.19)$$

Al resolver el sistema se llega a la solución final:

$$\alpha_{1i} = \frac{\chi_{1i}}{\sum_{i=2}^N \chi_{1i}} \quad (9.20)$$

con $\chi_{1i} = \gamma_{1i}(v_1 - v_i)$.

La ventaja de escribir la solución de esta forma es que fácilmente uno puede corroborar su estabilidad al tomar límite $\Delta t \rightarrow \infty$ sobre la ecuación 9.17. La desventaja es que uno tiene un total de $N-1$ α 's coeficientes para cada componente de la velocidad, por lo tanto se tienen $3N-3$ incógnitas que resolver para cada paso de tiempo para cada fluido. En el caso de $N=2$ todos los coeficientes $\alpha = 1$ y se recupera la solución ya implementada 9.5.

10 Conclusiones

En este trabajo nos concentramos en la implementación de nuevos módulos en el código FARGO3D que nos permiten profundizar en el estudio en la dinámica de los discos protoplanetarios bajo la acción de efectos no ideales de la MHD. En función de los resultados de las diversas pruebas realizadas, estamos en condiciones de afirmar que las implementaciones numéricas efectuadas son correctas y permitirán trabajar en problemas con física más compleja de aquí en adelante.

Primeramente, hemos introducido un marco teórico para describir los aspectos fundamentales de la física relevante en los DPP, presentamos el problema de acreción y la necesidad de un nuevo modelo que permita la cohesión entre la dinámica tridimensional de la MRI y los modelos laminares bidimensionales de formación planetaria.

Bajo la motivación de los trabajos de Bai y Stone (2011) y Bai (2014) comenzamos a estudiar la posibilidad de incorporar nueva física en FARGO3D para estudiar la dinámica de los discos. La idea original era implementar un modelo de multifluido colisional, para el cual hemos presentado las ecuaciones generales y las simplificaciones y aproximaciones que se pueden establecer para derivar la aproximación monofluido. Ésta aproximación no es en sí un modelo de un único fluido, sino más bien que las ecuaciones de continuidad y momento de las cargas se combinan con las ecuaciones de Maxwell para derivar una ecuación general de inducción magnética, mientras que para el fluido neutro se resuelven todas las ecuaciones. El éxito del modelo está en el computo de las difusividades para el caso en que interactúen varias especies distintas.

La última etapa del marco teórico es una revisión sobre las características del código numérico FARGO3D, con el cual estamos trabajando.

El trabajo numérico realizado para desarrollar los módulos de Ohm, Ambipolar y Hall nos han permitido interactuar con nuevas y sofisticadas herramientas para el análisis de datos, además de profundizar el conocimiento en programación. Todo el análisis de los datos se efectuó mediante el software Python, desde la visualización de distribuciones de densidad, campo magnético, ajustes de cuadrados mínimos, interpolaciones, transformadas de Fourier, etc. que vale la pena destacar no son para nada triviales de realizar sin una herramienta suficientemente completa. Es importante destacar que hemos adquirido un profundo conocimiento en FARGO3D dado que somos capaces de manipularlo y adaptarlo a los requerimientos necesarios de cada problema.

Las distintas pruebas y estudios realizados sobre las relaciones de dispersion, que surgen del análisis lineal de las ecuaciones para modos arbitrarios de Fourier, nos permitió entender el comportamiento de las ondas bajo los efectos difusivos y de Hall, y determinar que tan bien pueden ser resueltas numéricamente. Éste tipo de pruebas es clave en códigos para fluidos, dado que una característica general de los fluidos (ya

sean hidrodinámicos puros o en MHD) es su capacidad de generar y transmitir ondas.

El principal objetivo de todos las pruebas y análisis realizados para Ohm, Ambipolar y Hall es recuperar la relación de dispersión numéricamente y constatar que se verifica $\omega(k)$ analíticamente. Este objetivo ha sido satisfactorio para todas las pruebas.

En el caso de la difusión Ambipolar, hemos estudiado el cambio en la supresión de las ondas de Alfvén debido a distintas tasas de colisión entre iones y neutros. Uno de los objetivos de las simulaciones cartesianas realizadas aquí era comparar el comportamiento analítico de la relación de dispersión con los resultados numéricos para cada tasa de colisión, lo cual ha sido positivo. Otro de los objetivos radicaba en determinar si al aumentar la resolución de la simulación percibíamos mejoras en los ajustes, y en la tendencia de la relación de dispersión calculada numéricamente.

Para el caso del efecto Hall los resultados son equivalentes al caso de la difusión Ambipolar, solo que aquí hemos estudiado la división de los modos de Alfvén de ondas circularmente polarizadas. Dado que Hall no es en realidad un efecto difusivo, para evaluar sus efectos sobre el campo magnético hemos estudiado los modos de Whistler y los modos lentos para constatar que el código reproduce esta división correctamente.

Finalmente, hemos desarrollado una simulación para estudiar el crecimiento lineal de la inestabilidad magneto-rotacional bajo la difusión de Ohm, y el efecto Hall. Esta simulación es importante dado que es la primera realizada en la configuración de disco, y permite analizar las implementaciones cilíndricas de los términos de Hall y Ohm. Los resultados generales permiten determinar cómo varía la cantidad de modos excitados y el número de onda crítico al variar la difusividad de Hall. Además, el cambio de signo en la difusividad implica un cambio de signo en el campo magnético y el comportamiento de la inestabilidad no es el mismo bajo esta condición. Mientras que para la difusión de Ohm, observamos como disminuye la intensidad de los modos excitados decayendo rápidamente a valores nulos. Esto es un claro ejemplo de la diferencia entre Hall y Ohm, verificando la naturaleza no disipativa del efecto Hall.

Por último hemos trabajado en las ecuaciones del caso multifluido, desarrollando una implementación que permite la interacción de arrastre entre DOS fluidos distintos. Las pruebas realizadas son puramente hidrodinámicas y nos posibilitaron reproducir los aspectos básicos de la interacción gas-polvo en un DPP. El conjunto de simulaciones desarrolladas aquí verifican una correcta implementación dado que el comportamiento encontrado tanto para el gas como para el polvo es el esperado y ya conocido en un DPP. Si bien los análisis aquí han sido cualitativos son prometedores a la hora de realizar estudios profundos de carácter cuantitativo.

Sintetizando, entendemos que en relación a los objetivos planteados para este trabajo, la implementación de los módulos de difusión de Ohm, Ambipolar y efecto Hall, hemos concretado satisfactoriamente los requerimientos mínimos para su fun-

cionamiento.

Este trabajo permitió ampliar nuestro conocimiento en la MHD resistiva, profundizar en el entendimiento de las ecuaciones y modelos teóricos que describen la física de los fluidos magnetizados y nos ha proporcionado nuevas herramientas y métodos numéricos.

Todas las implementaciones numéricas requirieron del conocimiento detallado de la estructura interna del código FARGO3D, desde cómo desarrollar un nuevo setup, crear y modificar funciones e interactuar con cada uno de los directorios que conforman al código.

A continuación resumimos las conclusiones generales de las pruebas realizadas durante el trabajo.

10.1 Estudios en difusión Ambipolar

La comprobación numérica de la relación de dispersión de la difusión Ambipolar mostró, por un lado que el campo medio en la dirección $z \langle B_z^2(t) \rangle_{x,y,z}^{1/2}$, sigue notablemente las curvas teóricas encontradas para su evolución temporal. El procedimiento aquí fue básicamente superponer los datos numéricos sobre las curvas analíticas y constatar que representaban la misma evolución temporal. En los casos de $\gamma = 100, 500$ los datos numéricos se superponen notablemente a las curvas teóricas para la resolución $\frac{\lambda}{64}$, mientras que en el caso en que la frecuencia de colisión $\gamma = 1000$ observamos que la tendencia de los datos numéricos mejoró al aumentar la resolución de $\frac{\lambda}{64}$ a $\frac{\lambda}{128}$.

Respecto a las soluciones de relación de dispersión 6.17 y 6.18, los ajustes para comparar el comportamiento de los valores ω_R y ω_i como función del número de onda k han sido positivos dado que los puntos siguen la tendencia de las curvas analíticas tanto para ω_R como para ω_i , incluso para números de onda grandes en donde $\omega_R \rightarrow 0$ y la señal se amortigua completamente.

Una consideración importante respecto a la difusión Ambipolar recae sobre el criterio CFL implementado dado que el paso de tiempo puede llegar a ser muy pequeño bajo esta condición, haciendo al código excesivamente lento. Un método que no hemos implementado todavía para resolver esta dificultad corresponde al super-time-stepping (STS) (Alexiades 1996) que ha quedado en nuestra lista de trabajo a futuro.

10.2 Estudios en Efecto Hall

En este caso los ajustes numéricos realizados sobre la componente y del campo magnético $B_y^2(x_0, y_0, z_0, t)$, (en este caso no se promedia en el espacio, sino que se fijan los valores a $x_0 = 0, y_0 = 0$ y $z_0 = 0$), permitieron constatar que la relación

de dispersión, tanto para los modos de Whistler, ω_R , como para los modos lentos, ω_L , siguen la tendencia de la curva analítica notablemente, incluso para resoluciones menores del orden de $\frac{\lambda}{16}$. Esto nos dice que FARGO3D es capaz de resolver los modos de Hall de un campo circularmente polarizado incluso a resoluciones pobres como 16 celdas por longitud de onda.

La implementación del efecto Hall difiere respecto a la de Ohm y Ambipolar, y hemos mostrado un interesante análisis de Von Neumann para comprobar la estabilidad del método implementado. Dicha estabilidad debe entenderse como la conservación de las amplitudes de los modos de Fourier de una señal arbitraria, dado que Hall no es difusivo la señal no debería amortiguarse y mucho menos amplificarse. El análisis entrega el criterio CFL necesario para Hall. Aquí no es necesario implementar un método del tipo STS, a diferencia de la difusión Ambipolar.

10.3 Crecimiento lineal de la MRI

Este es el primer trabajo realizado con los efectos MHD no ideales (Hall y Ohm) en una configuración de disco. Nos ha permitido comprender como generar numéricamente inestabilidades, distribuidas aleatoriamente en la malla, para la que se produzca la MRI, y que rol juega el efecto Hall y la difusión de Ohm sobre sus modos. Además nos permitió controlar la implementación numérica de la corriente en coordenadas cilíndricas.

Los resultados muestran como la MRI es sensible al signo del término de Hall (las pruebas se realizan modificando el signo de la difusividad por simplicidad) y la capacidad de excitar o anular modos con mayores números de onda a medida que varía la difusividad de Hall. Por otro lado es el único test realizado para estudiar el efecto Ohm, y es notable como se suprimen las señales de los distintos modos al activar ésta difusión.

Los valores calculados numéricamente siguen notablemente la tendencia de las curvas teóricas (teniendo en cuenta el error en los números de onda, que corresponde a la diferencia entre números de ondas consecutivos) de las complejas relaciones de dispersión que involucran tanto el término de Ohm como de Hall.

10.4 Interacción de arrastre entre dos fluidos

El módulo de la interacción de arrastre entre dos fluidos surge como consecuencia de la posibilidad de implementar un modelo que resuelva el arrastre entre fluidos neutros y fluidos con carga, en principio, bajo condiciones ideales de la MHD. No hemos profundizado todavía el estudio en este modelo para determinar como resolver la ecuación

de inducción general. Sin embargo el módulo permite estudiar en detalle la interacción gas-polvo del disco protoplanetario, dado que el polvo es una componente principal de los discos y es uno de los observables más importantes, tener un código que reproduzca su interacción nos abre las puertas a problemas más complejos y sofisticados. Incluso si uno considera al polvo en un estado neutro tal que no interactúe con el campo magnético, uno puede resolver al gas, bajo la aproximación monofluido con la ecuación de inducción magnética de Ohm, Hall y Ambipolar, y agregarle el arrastre con el polvo. Los resultados obtenidos muestran que para las densidades típicas de polvo en los discos $\frac{\rho_g}{\rho_p} = 10^2$, el gas es indiferente al arrastre que le produce el polvo mientras que la dinámica global del polvo se ve afectada por el arrastre que le produce el gas. Esto es una mera consecuencia de que la tasa de colisión para el gas depende de la densidad del polvo y viceversa.

11 Perspectivas futuras

El estado actual del código no necesita demasiado trabajo para poder completar nuestro estudio en la dinámica de DPP bajo los efectos de la MHD no ideal. Para que podamos desarrollar simulaciones sobre un modelos de disco protoplanetario es necesario un computo detallado de las difusividades de Ohm, Hall y Ambipolar que involucren a todas las especies ionizadas del disco.

Luego, sería interesante realizar simulaciones que involucren planetas en el disco para determinar si la dinámica del mismo se ve afectada por estos efectos.

Por otro lados, estas simulaciones necesitan de resoluciones para las cuales el criterio CFL para la difusión Ambipolar es ineficiente. Así se necesita implementar el método de super-time-stepping (STS).

En vista de trabajar con un modelo con un número escaso de aproximaciones en las ecuaciones es importante continuar con el estudio del caso *multifuido* donde no es despreciable la inercia de las cargas.

12 Apéndice A

Presentamos aquí las rutinas utilizadas en python para el análisis de datos correspondientes al capítulo 6. Las rutinas permiten leer los datos de las simulaciones, interpolar, graficar y resolver la relación de dispersión 6.15.

DEFINIMOS TODOS LOS DATOS PARA NUESTRO SETUP. Dado un valor de k , calculamos todos los parámetros que deben ir en el `.par` antes de correr la simulación.

```
ca = 1.0
k = pi*6. ##### INGRASAR MANUALMENTE
gamma_rhoi = 10
w1 = 0.5*ca*k*sqrt(4.0 - (ca*k/gamma_rhoi)**2)
a2 = 0.5*ca*k*ca*k/gamma_rhoi
print 'k =', k
if k>4*pi: ##### En este valor deja de ser lineal la relacion entre k y wr
    print "tiempo decaimiento =", 1/a2
    print "periodo espacial = ", 2*pi/k
    print "tiempo total de integracion = ",3/a2
    print "dt = ", (3/a2)/20
    print "ntot = ", int((3/a2)/((1/a2)/20))
    print "frecuencia real = ", w1
    print "damping = ", -a2
    dt = (3/a2)/20
    ntot = int((3/a2)/((1/a2)/20))
else:
    print "periodo temporal = ", 2*pi/w1
    print "periodo espacial = ", 2*pi/k
    print "tiempo total de integracion = ", 5.0*2.0*pi/w1
    print "dt = ", (2.0*pi/w1)/20
    print "ntot = ", int((5.0*2*pi/w1)/((2*pi/w1)/20))
    dt = (2.0*pi/w1)/20
    ntot = int((5.0*2*pi/w1)/((2*pi/w1)/20))

#####
#### LEAMOS LOS DATOS. Calculamos la raíz cuadrática media de Bz

cd ~/data/leo/outputs/ambipolar_a_k3
```

```

r = 128 ### PARA 6PI ES 128
bz = []
t = []
for n in range(ntot):
    try:
        b = (fromfile("bz{:d}.dat".format(n)).reshape(r,r,r))**2
        bz.append(sqrt(b.mean()))
        t.append(dt*n)
    except:
        pass
#####
### INTERPOLAMOS

from scipy.interpolate import interpolate
tnew = np.arange(0,dt*ntot,0.001)
bznew = interpolate.spline(t,bz,tnew)
fig = figure(figsize(10,5))
plot(tnew,bznew, 'k-')
plot(t,bz,'ro')
xlim(0,20)
ylim(0,0.07)
xlabel(r'$t$',fontsize=25)
ylabel(r'$\sqrt{\langle B^2_z(t) \rangle_{x,y,z}}$',fontsize=25)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADbz_1.eps')

#####
#### Obtenemos los máximos locales

bz_max = []
t_max = []
n = len(tnew)-2
for i in range(n):
    if bznew[i+1]-bznew[i]>0:
        if bznew[i+2]-bznew[i+1]<0:
            if bznew[i+1]>0.0001:
                bz_max.append(bznew[i+1])
                t_max.append(tnew[i+1])

```

```

        plot(tnew,bznew,'k')
plot(t_max,bz_max,'ro')
xlim(0,20)
ylim(0,0.07)
xlabel(r'$t$',fontsize=25)
ylabel(r'$\sqrt{\langle B^2_z(t) \rangle_{x,y,z}}$',fontsize=25)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADbz_t.eps')

#####
### En el caso que se pueda ajustamos una recta al logaritmo de los máximos
para obtener la tasa de decaimiento.

if len(t_max)==1:
    print "No se puede ajustar una recta !!!!!!!!!!!,"
        no se efectua el paso inmediato"
else:
    logbz = log(bz_max)
    a,b = polyfit(t_max,logbz,1)
    t_max = array(t_max)
    plot(t_max,logbz,'k')
    plot(t_max,a*t_max+b,'go')
    xlabel(r'$t$',fontsize=25)
    ylabel(r'$\ln(\max \left( \sqrt{\langle B^2_z(t) \rangle_{x,y,z}} \right) )$',fontsize=25)
print a
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADlineal.eps')

#####
### Multiplicamos por la exponencial para ajustar una oscilación pura.

if k<=4*pi:
    bz_final = []
    t_final = []
for i in range(100):
    bz_final.append(bz[i]*exp(-a*t[i]))
    t_final.append(t[i])
plot(t_final,bz_final,'k-o')
xlabel(r'$t$',fontsize=25)

```

```

ylabel(r'$B_z(t)e^{\{-at\}}$', fontsize=25)

#####
#### Estimación frecuencia (y damping solo en el caso  $k > 4\pi$ )

wr = w1      wi = -a2
#### Rango para mapeo de frecuencia
width_1 = 0.5
width_2 = 0.5
ntot = 100
WR = linspace((1-width_1)*wr, (1+width_1)*wr, ntot)
WI = linspace((1-width_2)*wi, (1+width_2)*wi, ntot)
#####
#####
if k > 4*pi:
    def b2(h0, wr, wi, t):
        return h0*exp(wi*t)*sqrt(sin(wr*t)**2)
    bz = array(bz)
    t = array(t)
    #####
    ### DETERMINAMOS LA AMPLITUD DE LA SEÑAL h0, A PARTIR DEL MAXIMO #####
    amp = bz.max()
    alpha = arctan(wr/wi)
    h0 = amp/(exp(wi*alpha/wr)*sqrt(sin(alpha/wr)**2))
    error = np.zeros([ntot, ntot])
    for i in range(ntot):
        for j in range(ntot):
            error[i, j] = np.mean((bz-b2(h0, WR[i], WI[j], t))**2)

plt.imshow(log10(error), origin='lower', aspect='auto',
            extent=[WR[0], WR[ntot-1], WI[0], WI[ntot-1]])
plt.xlabel(r'$\omega_R$', fontsize=25)
plt.ylabel(r'$\omega_i$', fontsize=25)
cbar = colorbar()
cbar.set_label(r'$\log(\sigma)$', fontsize=20)
cbar.solids.set_edgecolor("face")
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADbz_sigmamap.eps')
show()

```

```

solucion = np.where(error == error.min())
ff = figure(figsize(10,7))
plt.plot(t,bz,'ro')
plt.plot(t,b2(h0,WR[solucion[0]],WI[solucion[1]],t),'k-',linewidth=1)
plt.xlabel(r'$t$',fontsize=20)
plt.ylabel(r'$\sqrt{\langle B^2_z(t) \rangle_{x,y,z}}$',fontsize=26)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADbzsine+damping.eps')
print "Estos valores deben tomarse para el ajuste de las curvas,
      no se ejecuta      nada más"
print "Frecuencia = ", WR[solucion[0]]
print "Damping = ", WI[solucion[1]]
show()
else:      ##### Funcion para ajustar, modulo del sin(wt)
def b1(a,w,t):
    return a*sqrt(sin(w*t)**2)
#### Estimación amplitud
bz_final = array(bz_final)
t_final = array(t_final)
amp = bz_final.max()
error = np.zeros([ntot])
for i in range(ntot):
    error[i] = np.mean((bz_final-b1(h0,WR[i],t_final))**2)
plot(WR,error,'k-')
ylabel(r'$\sigma$',fontsize=25)
xlabel(r'$\omega_R$',fontsize=25)
solucion = np.where(error == error.min())
wf = WR[solucion]
print "Este valor debe tomarse para el ajuste de la curvas,
      el valor del damping   se obtuvo arriba"
print "Frecuencia = ",wf
show()

#####
#### Superponemos las frecuencias obtenidas a las curvas características
fig = figure(figsize(10,6))
ca = 1.0
###gamma_rhoi = g
g = 10
kt = linspace(0,22,1000)

```

```

wi = 0.5*(ca*kt)**2/g
wr = 0.5*ca*kt*sqrt(4-(ca*kt/g)**2)
plt.xlim=(0,22)
plt.ylim=(0,20)
ax1 = plt.plot(kt,wi,'b-',label=r'$\omega_i$')
ax2 = plt.plot(kt,wr,'g-',label=r'$\omega_r$')
xlabel(r"$k$",fontsize=20) ylabel(r"$|\omega_r|, |\omega_i|$",fontsize=20)
#### kx = pi/2 (ambipolar_a_k0) con 64^3 #####
w0_k0 = 1.57068939
w1_k0 = 0.12108386526
plot(pi/2.0, w0_k0,'ro')
plot(pi/2.0, w1_k0,'ko')
##### kx = 2*pi (ambipolar_a_k1) con 64^3 #####
w0_k1 = 5.99758598
w1_k1 = 1.97270927636
plot(2*pi, w0_k1,'ro')
plot(2*pi, w1_k1,'ko')
##### kx = 4*pi (ambipolar_a_k2) con 64^3 #####
w0_k2 = 9.81918671
w1_k2 = 7.8559002535
plot(4*pi, w0_k2,'ro')
plot(4*pi, w1_k2,'ko')
#### kx = 6*pi (ambipolar_a_k2) con 64^3 #####
w0_k3 = 6.89907714
w1_k3 = 17.53200636
plot(6*pi, w0_k3,'ro')
plot(6*pi, w1_k3,'ko')
plt.legend()
#### kx = 6*pi (ambipolar_a_k2) con 128^3 #####
w0_k31 = 6.89907714
w1_k31 = 17.49611689
plot(6*pi, w0_k31,'b.')
plot(6*pi, w1_k31,'r.')
plt.legend(prop={'size':20},loc=2).draw_frame(False)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/ADbz_curvas.eps')

```

13 Apéndice B

Presentamos aquí las rutinas utilizadas en python para el análisis de datos correspondientes al capítulo 7. Las rutinas permiten leer los datos de las simulaciones, interpolar, graficar y resolver la relación de dispersión 7.21.

```
### Calculamos los valores para el .par

k0 = pi
print "omegas", abs(f1(k0)*k0), abs(f2(k0)*k0)
print "periodo temporal:", 2*pi/abs(f1(k0)*k0), 2*pi/abs(f2(k0)*k0)
print "periodo espacial:", 2*pi/k0
print "Tiempo total de integracion:", 3*2*pi/abs(f2(k0)*k0)
print "Ntot:", int(3*2*pi/abs(f2(k0)*k0)/(2*pi/abs(f1(k0)*k0)/20.0))
dt = 2*pi/abs(f1(k0)*k0)/20.0
print "Dt:", 2*pi/abs(f1(k0)*k0)/20.0
print "Xmax", 2*pi/k0
print "Gb" 9*8*32**3/10.24**9*int(3*2*pi/abs(f2(k0)*k0)/
(2*pi/abs(f1(k0)*k0)/20.0))

#####
### Resolvemos la relación de dispersión

from __future__ import division
import sympy as sp
sp.init_printing()
w = sp.symbols('w')
va, qh, b, k, wh = sp.symbols('v_a Q_H B k w_h', real=True)
solution = sp.solve((w**2-va**2*k**2)**2-qh**2*b**2*k**4*w**2,w)
print "solution 1:"
solution[0]
print "solution 2:"
solution[1]
B = 1
Q_H = 0.5
v_a = 1
def f1(k): #it is the solution 1 divided by k
    return -B*Q_H*k/2 - sqrt(B**2*Q_H**2*k**2 + 4*v_a**2)/2
```

```

def f2(k): #it is the solution 2 divided by k
    return -B*Q_H*k/2 + sqrt(B**2*Q_H**2*k**2 + 4*v_a**2)/2
#####
### Leemos los datos

cd ~/data/leo/outputs/hall_k1

w10 = abs(f1(k0)*k0)
w20 = abs(f2(k0)*k0)
db0 = 1e-4
n = 4000
nx = ny = nz = 32
db = []
t = []
b0y = []
b0z = []
for i in range(n):
    try:
        by = fromfile("by{:d}.dat".format(i)).reshape(nz,ny,nx)
        bz = fromfile("bz{:d}.dat".format(i)).reshape(nz,ny,nx)
        db.append((sqrt(by**2+bz**2))[0,0,0]) #para x fijo
        t.append(dt*i)
        b0y.append(by[0,0,0])
        b0z.append(bz[0,0,0])
    except:
        continue
db = array(db)
t = array(t)
b0y = array(b0y)
b0z = array(b0z)

#####
## AJUSTAMOS LAS FRECUENCIAS Y CALCULAMOS LAS AMPLITUDES DE LA
ONDA CIRCULARMENTE POLARIZADA

bmean2 = (db**2).mean()/db0**2
prod = ((db**2/db0**2).max() - bmean2)/2.0 #producto de los coeficientes

```

```

print prod
a1 = (1+sqrt(1-4*prod))/2.0
a2 = (1-sqrt(1-4*prod))/2.0
width_1 = 0.2
width_2 = 0.7
ntot = 200
W1 = linspace((1-width_1)*w10,(1+width_1)*w10,ntot)
W2 = linspace((1-width_2)*w20,(1+width_2)*w20,ntot)
error = np.zeros([ntot,ntot])
for i in range(ntot):
    for j in range(ntot):
        error[i,j] = np.mean((b0y-b_y(db0,a1,a2,W1[i],W2[j],t))**2)
figg = figure(figsize(10,7))
imshow(log10(error[:,:] ),
origin='lower',aspect='auto',extent=[W1[0],W1[ntot-1],W2[0],W2[ntot-1]])
plt.xlabel(r'$\omega_R$',fontsize=25)
plt.ylabel(r'$\omega_L$',fontsize=25)
cbar = colorbar()
cbar.set_label(r'$\log(\sigma)$',fontsize=20)
cbar.solids.set_edgecolor("face")
savefig('/home/pablo/leo/figuras/Hall_sigma.eps')
print W1[solucion[0]], W2[solucion[1]], W1[solucion[0]]/pi, W2[solucion[1]]/pi

solucion = np.where(error == error.min())
show()
fig = figure(figsize=(10,7))
plt.xlim(0,4)
plt.ylim(-0.00015,0.00015)
xlabel(r'$t$',fontsize=20)
ylabel(r'$B_y(t);\ B_z(t)$',fontsize=20)
plot(t,b0y,'bo') plot(t,db0*(a1*cos(W1[solucion[0]]*t)+a2*cos(W2[solucion[1]]*t)),
'r',linewidth=2, alpha=1,label=r'$B_y$')
plot(t,b0z,'yo')
plot(t,db0*(a1*sin(W1[solucion[0]]*t)-a2*sin(W2[solucion[1]]*t)),'k',
linewidth=2,alpha=1,label=r'$B_z$')
plt.legend(prop={'size':22},loc=2).draw_frame(False)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/Hall_ajuste.eps')
show()

```

```

fig = figure(figsize=(10,7))
l=plot(t,db,'k-o')
plot(t,db0*sqrt(a1**2+a2**2+2*a1*a2*cos((W1[solucion[0]]+W2[solucion[1]])*t)), 'r',
linewidth=10, alpha=0.3, label=r'$\delta B$')

#####
### SUPERPONEMOS LOS VALORE NUMÉRICOS A LAS CURVAS ANALÍTICAS

fig = figure(figsize=(10,7))
k = linspace(0.0,10)
plot(k,abs(f1(k)),label=r'Whistler')
plot(k,abs(f2(k)),label=r'Lento')
plt.legend(prop={'size':18},loc=2).draw_frame(False)
w01 = 2.3113721
w02 = 1.06319081
w01_16 = 2.3160041
w02_16 = 1.05673418
w11= 6.46860125
w12= 1.51962957
w11_16= 6.44262293
w12_16= 1.50734974
w21 = 21.54782004
w22 = 1.8210917
w21_16 = 21.37439695
w22_16 = 1.79165991
#plot([pi/2],[w01*2/pi], 'ro')
#plot([pi/2],[w02*2/pi], 'ro')
#plot([pi/2],[w01_16*2/pi], 'g.')
#plot([pi/2],[w02_16*2/pi], 'g.')
#plot([pi],[w11/pi], 'ro')
#plot([pi],[w12/pi], 'ro')
#plot([pi],[w11_16/pi], 'g.')
#plot([pi],[w12_16/pi], 'g.')
#plot([2*pi],[w21/(2*pi)], 'ro')
#plot([2*pi],[w22/(2*pi)], 'ro')
#plot([2*pi],[w21_16/(2*pi)], 'g.')
#plot([2*pi],[w22_16/(2*pi)], 'g.')
axhline(1,0,10,color='k',linestyle='--')

```

```
xlabel(r"$k$",fontsize=30) ylabel(r"$\omega/k$",fontsize=30)  
  
savefig('/home/pablo/leo/figuras/Hall_curvas_nopoints.eps')
```

14 Apéndice C

Presentamos aquí las rutinas utilizadas en python para el análisis de datos correspondientes al capítulo 8. Las rutinas permiten leer los datos de las simulaciones, calcular transformadas de Fourier, graficar y resolver la relación de dispersión 8.5.

```
cd /data/leo/mriohm/  ## Leemos los datos

nx = 1
ny = 256
nz = 256
M = 22
s = 200
nr = 32
fm = np.zeros([nz,nr+1,s])  #inicializo a 0 la matriz fm
fm0 = np.zeros([nz,nr+1,s]) #inicializo a 0 la matriz fm0
m0 = 1
rmin = ny/2-nr/2
rmax=ny/2+nr/2

rho = fromfile("mriohm256f_0/gasdens0.dat",dtype='float64').reshape(nz,ny)
bz0 = fromfile("mriohm256f_0/bz0.dat",dtype='float64').reshape(nz,ny)

### Calculamos la transformada de Fourier y promediamos para
aumentar la relación S/N

for m in range(0,s):
    v=fromfile("mriohm256f_{0:d}/by{1:d}.dat".format(m0,m),dtype='float64').
    reshape(nz,ny)
    fm0[:, :, m] = (log(abs((fft.fft2(v)))))
    for n in range(M):
        v=fromfile("mriohm256f_{0:d}/by{1:d}.dat".format(n,m),dtype='float64').
        reshape(nz,ny)
        v = v[:,rmin:rmax+1]
        fm[:, :, m] += (log(abs((fft.fft2(v)))))
    fm[:, :, m] /= M

#####
### importamos librerias para plots dinámicos
```

```

from IPython.html import widgets
from scipy.ndimage import uniform_filter

omega = 3**-1.5
deltaz = 1.5
kz = 2.*pi*(fft.fftfreq(nz,deltaz/nz))*bz0.max()/(sqrt(rho.mean()))*omega)
def pp(t):
    plot(kz, fm[:,0,t], 'k-o',)
    plt.xlim(0,4)
    plt.ylim(-15,0)
fig = figure(figsize(5,5))
i = widgets.interact(pp,t=widgets.FloatSliderWidget(min=0,max=199
,step=1,value=20))

### widgets.interact permite graficar todos los outputs y
visualizarlos ordenadamente con una barra de desplazamiento
#####

### Graficamos la transformada de Fourier promediada.

fig = figure(figsize(15,5))
s, (ax1, ax2) = plt.subplots(1,2, sharex=False,sharey=True)
ax1.plot(fft.fftshift(kz),fft.fftshift(fm[:,0,199]),'k-d',
label='20simulaciones')
ax2.plot(fft.fftshift(kz),fft.fftshift(fm0[:,0,199]),'k-d',
label='1 simulacion')
ax1.set_xlim(0.2,15)
ax2.set_xlim(0.2,15)
ax1.set_ylim(-12,-1)
ax2.set_ylim(-12.4,-1)
ax1.legend(numpoints='0',prop={'size':13}).draw_frame(False)
ax2.legend(numpoints='0',prop={'size':13}).draw_frame(False)
ax1.set_xlabel(r'$k_z$',fontsize=20)
ax2.set_xlabel(r'$k_z$',fontsize=20)
ax1.set_ylabel(r'$\ln(\mathscr{F}(k_z)^2)$',fontsize=20)
savefig('/home/pablo/leo/figuras/MRI_Fourier.eps')

```

```
#### Graficamos el campo magnético radial para observar la MRI
```

```
by50=fromfile("mriohm256f_0/by{:d}.dat".format(int(50)),dtype='float64').  
reshape(nz,ny)  
by100=fromfile("mriohm256f_0/by{:d}.dat".format(int(100)),dtype='float64').  
reshape(nz,ny)  
by150=fromfile("mriohm256f_0/by{:d}.dat".format(int(150)),dtype='float64').  
reshape(nz,ny)  
by200=fromfile("mriohm256f_0/by{:d}.dat".format(int(200)),dtype='float64').  
reshape(nz,ny)  
vmin = by50.min()  
vmax = by50.max()  
fig = figure(figsize(10,10))  
  
ax1 = fig.add_subplot(221)  
ax2 = fig.add_subplot(222)  
ax3 = fig.add_subplot(223)  
ax4 = fig.add_subplot(224) cmap = 'gray'  
extent = [2.5,3.5,-0.75,0.75]  
ax1.imshow(by50 ,origin='lower',aspect='auto',cmap=cmap ,vmin=vmin, vmax=vmax,  
extent=extent)  
ax2.imshow(by100,origin='lower',aspect='auto',cmap=cmap ,vmin=vmin, vmax=vmax,  
extent=extent)  
ax3.imshow(by150,origin='lower',aspect='auto',cmap=cmap ,vmin=vmin, vmax=vmax,  
extent=extent)  
ax4.imshow(by200,origin='lower',aspect='auto',cmap=cmap ,vmin=vmin, vmax=vmax,  
extent=extent)  
xmin = 2.75  
xmax = 3.25  
ax1.set_xlim(xmin,xmax)  
ax2.set_xlim(xmin,xmax)  
ax3.set_xlim(xmin,xmax) ax4.set_xlim(xmin,xmax)  
axes = [ax1,ax2,ax3,ax4]  
for a in axes:  
    a.set_xlabel(r"$r$",fontsize=25)  
    a.set_ylabel('Z',fontsize=15)  
savefig('/home/pablo/leo/figuras/mrifigure_4.eps')
```

Graficamos el logaritmo del espectro de potencias versus tiempo para obtener la tasa de crecimiento de cada modo, para ello ajustamos rectas.

```

i0 = 10
i1 = 200
modofinal = 20
lineas = np.arange(3,modofinal,1)
T = 2.*pi/omega
dt = T/100.0
t = linspace(i0*dt,i1*dt,i1-i0)*omega
a = []
b = []
kk = []
stda = []
cla()
for linea in lineas:
    y = fm[linea,0,i0:i1]
    kk.append(kz[linea])
    p = polyfit(t,y,1,cov=True,full=False)
    a1 = p[0][0]
    b1 = p[0][1]
    stda.append(sqrt(p[1][0][0]))
    a.append(a1)
    b.append(b1)
    if linea<12:
        plot(t,y,'g-',linewidth=1.5)
    else:
        plot(t,y,'k.-')
    xlabel(r"$t\backslash\Omega$",fontsize=20)
    ylabel(r"$\ln(|\backslash\mathscr{F}\{B_r(k_z)|)\backslash$",fontsize=20)
print "ERROR EN K, DeltaK = ",
kz[2]-kz[1]
savefig('/home/pablo/leo/figuras/mri_lineal.eps')

### Graficamos los ajustes obtenidos para la tasa de crecimiento
en función del número de onda k, junto a la solución analítica
de la rel. de dispersión.

```

```

k = linspace(0,100,10000)
f = sqrt(-k**2 + 0.5*(16.0*k**2 + 1.0)**0.5 - 0.5)
plot(k,f)
plt.ylim(0,1)
plt.xlim(0,2.0)
for kkk,aa, sstda in zip(kk,a,sstda):
    plot((kkk,), (aa,), "o")
    errorbar(kkk, aa, xerr=0.15, yerr=sstda)
    xlabel(r"$kv\_a/\Omega$", fontsize=20)
    ylabel(r"$\sigma/\Omega$", fontsize=20)

### Guardamos los datos en una tabla

tabla = open("/home/pablo/leo/hall/mrinohall.dat", 'w')
tabla.write("#k\trate_of_growth\n")
for n,elemento in enumerate(a):
    tabla.write(str(kk[n])+"\t"+str(elemento)+"\n")

#####
### Esta rutina permite calcular la solución a la relación de dispersión.

k = linspace(0,10,10000)
etaohm = 0.0002
etahall = 0.01
X = abs(bz0).mean()/(etahall*rho.mean()*omega)
Lambda = bz0.mean()**2/(etaohm*rho.mean()*omega)
print X, Lambda

u = 1.0
b = 2.*k**2/Lambda
c = 2.*k**2 + 1. + k**2/Lambda**2 + k**2/(2.*X)*(2.*k**2/X - 3.)
d = 2.*k**2*(k**2+1.)/Lambda
e = k**4/Lambda**2 + k**2*(k**2 + 2.*k**2/X - 3.)*(1. + 1./(2.*X))
p = (8.*u*c-3.*b**2)/(8.*u**2)
q = (b**3 - 4.*u*b*c + 8.*u**2*d)/(8.*u**3)
Delta_0 = c**2 - 3.*b*d + 12.*u*e
Delta_1 = 2.*c**3 - 9.*b*c*d + 27.*b**2*e + 27.*u*d**2 - 72.*u*c*e

```

$$Q = ((\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4 \cdot \Delta_0^3})/2.)^{1/3.}$$

$$S = 0.5 \sqrt{(-2./3.)p + 1./(3.u)(Q + \Delta_0/Q)}$$

$$x_1 = -b/(4.u) - S + 0.5 \sqrt{-4.S^2 - 2.p + q/S}$$

En el caso sin Hall ni Ohm: $x_1 = f$.

Bibliografía

- Alexiades, V., Amiez, G., & Gremaud, P. 1996, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 12, 31.
- Armitage P. 2010, *Astrophysics of planets formation*, Cambridge University Press.
- Bai, X.-N. 2011, *ApJ*, 739, 50.
- Bai, X.-N. 2014, *ApJ*, 791, 137.
- Bai, X.-N., & Stone, J. M. 2013, *ApJ*, 769, 76.
- Balbus, S. A., & Hawley, J. F. 1991, *ApJ*, 376, 214.
- Balsara, D. S. 1996, *ApJ*, 465, 775.
- Choi, E., Kim, J., & Wiita, P. J. 2009, *ApJS*, 181, 413.
- Cowling T. G, 1957, *Magnetohydrodynamics*. Interscience, New York.
- Evans, C. R., & Hawley, J. F. 1988, *ApJ*, 332, 659.
- Falle, S. 2003, *MNRAS*, 344, 1210.
- Gressel, O., Turner, N. J., Nelson, R. P., & McNally, C. P. 2015, *ApJ*, 801, 84.
- Guilet, J., & Ogilvie, J. 2013, SF2A-2013. Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics, 395.
- Hartmann, L., Calvet, N., Gullbring, E., & D'Alessio, P. 1998, *ApJ*, 495, 385.
- Hawley, J. F., & Stone, J. M. 1995, *Computer Physics Communications*, 89, 127.
- Hirose, S., & Turner, N. J. 2011, *ApJL*, 732, LL30.
- Masset, F. S. 2000, *Disks, Planetesimals, and Planets*, 219, 75.
- Masset, F. S., & Snellgrove, M. D. 2004, *Planetary Systems in the Universe*, 202, 211.
- Masset, F. S. 2008, *EAS Publications Series*, 29, 165.
- Pringle, J. E. 1981, *ARAA*, 19, 137.
- Pringle, J. E., & King, A. 2007, *Astrophysical Flows*, by James E. Pringle , Andrew King, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.
- Stone J. M, 1997, *ApJ*487.

Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, ApJS, 80, 753.

Stone, J. M., & Norman, M. L. 1992, ApJS, 80, 791.

Wardle, M. 1999, MNRAS, 307, 849.

Wardle, M. 2007, ApSS, 311, 35.

