Título: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Autores: CALDERÓN, Cristian Gabriel – MANZUR, Nadia Natalí

Profesora supervisora de MOPE: LOSANO, Ana Leticia

Carrera: Profesorado en Matemática

Fecha: 26 de Noviembre de 2015

Clasificación:

97 Mathematical Education

Palabras Claves:

Función exponencial

Función logaritmo

Parámetro

Gráfico

GeoGebra

Resumen:

En el presente informe se realiza una descripción de la experiencia de las prácticas docentes de los autores en el marco de la materia Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza de la carrera Profesorado en Matemática. Dichas prácticas se desarrollaron en dos divisiones de 5º Año de una institución de gestión estatal. El tema abordado fue Funciones Exponenciales y Logarítmicas. Se describen la planificación elaborada y su implementación en el aula. También, se analiza una problemática surgida durante el dictado de las clases.

Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza.

Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

Calderón Cristian Gabriel

Manzur Nadia Natalí

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

Facultad de Matemática, Astronomía y Física.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN.

1.1 PRESENTACIÓN.

El presente informe describe las prácticas realizadas por dos alumnos del Profesorado en Matemática. Las mismas se llevaron a cabo en el marco de la materia Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (M.O.P.E.).

Las prácticas involucraron actividades que integraron acciones propias del profesional docente realizadas en el ámbito del nivel secundario. Las actividades consistieron en un periodo de observación, una etapa de planificación de las clases y, finalmente, la puesta en práctica de lo planificado. Durante las observaciones se realizó una exploración y reconocimiento de la institución y de los cursos asignados. Se consideraron tanto las clases de matemática como de otras materias, realizando una observación de jornada completa. Luego, siguió la etapa de planificación de las clases donde se tuvo en cuenta la información recolectada durante el periodo de observación, el programa anual del curso y los Diseños Curriculares vigentes para la provincia de Córdoba. La puesta en práctica de la planificación tuvo una duración de cinco semanas, incluyendo el dictado de clases y finalizando con la evaluación.

En este capítulo se resume la información recaudada en el periodo de observación.

1.2 LA INSTITUCIÓN.

Las prácticas docentes se realizaron en una institución provincial de gestión estatal, ubicada en las cercanías de la Ciudad Universitaria en Córdoba. La institución cuenta con los niveles Inicial, Primario, Secundario y Superior. El nivel Secundario tiene un plan de estudios de Bachiller en Música-Especialidad: Preparador de Coro. Los alumnos participan de una educación que integra la escolaridad común y la escolaridad musical con una oferta educativa de doble jornada, por la mañana de 7:40 Hs. a 12:00 Hs. y por la tarde de 14:00 Hs. a 17:00 Hs. Los recreos son de 10 minutos cada dos horas cátedra. Entre las 12:00 Hs. y 13:30 Hs. ensayan coro y de 13:30 Hs. a 14:00 Hs. almuerzan.

El edificio tiene dos plantas. En planta baja funcionan el nivel Inicial y el Primario. La planta alta alberga el nivel Secundario. Al ingresar al edificio hay una amplia galería donde los alumnos cotidianamente se forman para izar la bandera. Allí se realizan, además, los actos. La escuela posee también un gran patio de uso común para todos los niveles.

La institución cuenta con kiosco, fotocopiadora, biblioteca, laboratorio de computación móvil (incluye 30 netbooks y un proyector), laboratorio de ciencias naturales, sala de profesores, dirección y baños para cada nivel. En cuanto a los espacios destinados al desarrollo de actividades musicales, hay salas de coro especialmente ambientadas con gradas y un piano. Además, hay una sala de instrumento armónico y un auditorio, donde se realizan conciertos corales, con una capacidad para 400 personas.

1.3 LOS CURSOS.

Los cursos asignados para la realización de las prácticas fueron 5º Año "A" y 5º Año "B". El primero tiene un total de 18 alumnos, 16 mujeres y 2 varones, mientras que el segundo 24 alumnos, 18 mujeres y 6 varones.

Las clases de matemática se dictan por la mañana. Tienen una carga horaria de cuatro horas cátedra por semana distribuidas en los siguientes días y horarios (Tabla 1):

Días / *Hora*	*Lunes*	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*
7:40 Hs. a 9:00 Hs.				5º Año "A"	
Recreo					
9:10 Hs. a 10:30 Hs.			5º Año "B"	5º Año "B"	
Recreo					
10:40 Hs. a 12:00 Hs.		5ºAño "A"			

Tabla 1: Distribución de las horas de Matemática.

Las aulas que corresponden a 5º Año están emplazadas una al lado de la otra y presentan características similares. Son amplias y con buena iluminación contando con ventanas grandes que dan al patio. Cada una posee dos pizarrones, uno grande y liso para tiza, y uno blanco más pequeño con pentagrama. Los bancos están ubicados mirando hacia al pizarrón. El escritorio destinado a los profesores está al frente, en una esquina. En la pared opuesta a las ventanas, hay varios compartimentos que los alumnos utilizan para colocar sus pertenencias. En cada aula, al lado de la puerta hay una toma de corriente.

En 5º "A" todos los bancos para los alumnos son individuales y están distribuidos en cuatro filas. Cabe resaltar que la ubicación es elegida por ellos y la mantienen durante todo el año. En los primeros bancos, al lado de la ventana, se ubican los dos varones y en el resto de los bancos las mujeres.

En 5º "B" no se distinguen filas, pero la ubicación de los alumnos es más o menos la misma durante todo el año. Hay un banco doble y el resto son individuales. Al igual que en la división "A", los varones se ubican del lado de las ventanas.

En la Figura 1 se muestran un esquema de las aulas y de la distribución de los alumnos:

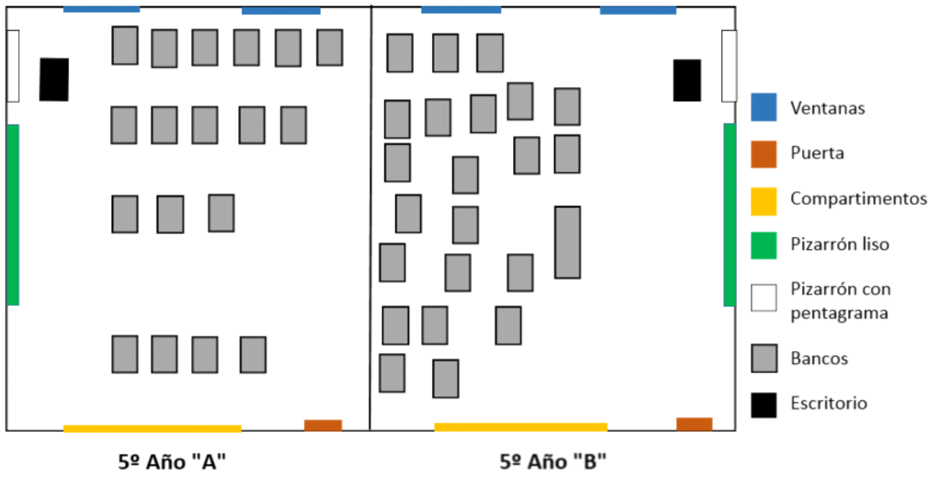


Figura 1: Esquema de las aulas y distribución de bancos.

1.4 LAS CLASES DE MATEMÁTICA.

El periodo de observaciones tuvo una duración de dos semanas y se realizó en dos etapas de una semana cada una. La primera semana de observación fue a mediados de mayo y la segunda semana a fines de junio. Durante este periodo la profesora trabajó el tema Números Irracionales. El desarrollo de las clases fue similar en ambos cursos.

Cuando la profesora ingresaba al aula los alumnos se ponían de pie para el saludo formal. Después tomaban asiento y la profesora tomaba lista. Seguidamente completaba el libro de temas.

Al comenzar la primera clase observada la docente informó a los alumnos que iba a comenzar con un tema nuevo: Números Irracionales. Inició haciendo un repaso de las propiedades de la potenciación y de la radicación. A continuación, dio ejercitación de aplicación de dichas propiedades. Inmediatamente los alumnos se pusieron a resolver los ejercicios. Luego, se resolvieron algunos de ellos en el pizarrón. Los que no se llegaron a resolver en clase quedaron como tarea.

La profesora inició la siguiente clase con la corrección de los ejercicios de tarea. Al finalizar, la docente explicó cómo ubicar números irracionales en la recta numérica y después comenzó a tratar el tema transformación de radicales y operaciones con radicales. Luego, resolvieron ejercicios y problemas que serían corregidos la siguiente clase. Para esta parte los alumnos tenían la teoría y los ejercicios en fotocopias.

En la segunda etapa de observaciones, la profesora estaba finalizando con el tema Números Irracionales. En una clase dio ejercicios de repaso y, en la siguiente, tomó la evaluación para cerrar el tema. En la clase de repaso los alumnos resolvieron ejercicios similares a los que se incluyeron en la evaluación. Dicha evaluación fue individual y escrita. La profesora entregó los enunciados en una fotocopia a cada estudiante. Los alumnos la resolvieron en silencio y ninguno le hizo preguntas a la profesora.

En las clases observadas se puede notar que las mismas estaban divididas en dos partes: una parte teórica y una parte práctica.

La parte teórica consistía en una exposición del tema por parte de la profesora, haciendo uso del pizarrón. En dicha exposición se presentaban las nociones matemáticas, propiedades, ejemplos de problemas de aplicación. Posteriormente les daba unos minutos a los estudiantes para que copiaran en sus carpetas lo que estaba escrito en el pizarrón. En esta parte de la clase los alumnos participaban activamente respondiendo a las preguntas de la docente, aportando ejemplos y preguntando cuando no entendían. Si algún alumno no entendía la profesora volvía a explicarlo. Como recurso principal utilizaban el pizarrón y la tiza, aunque también hacían uso de fotocopias, regla y compás (para la ubicación de números irracionales en la recta numérica).

La parte práctica involucraba la resolución de ejercicios, consultas a la profesora, y corrección de tareas. A la hora de resolver los ejercicios los alumnos, por lo general, trabajaban en forma individual y a veces se consultaban entre ellos. Mientras los alumnos estaban involucrados en esta actividad, la docente acostumbraba circular por el aula observando cómo trabajaban y respondiendo a sus preguntas. Otras veces se quedaba en su escritorio y los alumnos se acercaban a consultarle. La corrección de ejercicios se realizaba mayormente en el pizarrón. Pasaban diferentes alumnos y escribían la resolución de los ejercicios. Pudimos observar ocasiones donde la corrección se hacía en forma oral, es decir, los alumnos explicaban oralmente como habían resuelto un ejercicio.

El ambiente en las aulas era muy tranquilo. Cuando la profesora explicaba los alumnos estaban en silencio y cuando resolvían ejercicios trabajaban en voz baja y en forma ordenada. Había buena predisposición de ambas partes, de los alumnos para realizar las actividades, y de la docente para responder a las dudas de los alumnos.

La relación entre los alumnos era muy buena. La relación docente-alumno era formal y de mucho respeto.

1.5 OBSERVACIÓN DE JORNADA COMPLETA.

Para conocer un poco más a los alumnos se realizó una observación de jornada completa donde se apreció el comportamiento de los alumnos y la relación con los docentes de otras materias.

La observación de jornada completa se realizó un día jueves. Comenzó a las 7:40 Hs. y finalizó a las 17:00 Hs.

En 5º Año “A” se observaron las siguientes materias:

- Matemática.
- Literatura.
- Inglés.
- Formación para la educación.
- Folclore.

La clase de Matemática no será descripta en esta sección dado que está incluida en “Las clases de Matemática”.

-La clase de Literatura.

La profesora ingresó al aula y saludó, mientras los alumnos se ubicaban en sus respectivos bancos. Luego de tomar lista, les dijo: “Hoy vamos a realizar un viaje. Vamos al Machu Picchu y estamos bien asegurados porque viajamos con la NatGeo”. Los alumnos preguntaron si necesitaban llevar algo y la docente les respondió que no. Luego, todos se dirigieron a la sala de video.

En la sala ya estaba todo preparado para proyectar un video. Antes de comenzar con la reproducción la profesora les informó que estaban por comenzar con un tema nuevo: Los orígenes de la Literatura en América. A modo de introducción iban a ver un documental llamado “Machu Picchu al descubierto”.

Al finalizar el documental se realizó una puesta en común. La profesora preguntó: ¿Les interesó el video? Los alumnos respondieron que sí y comenzaron a contar lo que más les había llamado la atención. Un alumno comentó que le había interesado la parte donde mostraban los descubrimientos arqueológicos porque le gustaría ser arqueólogo. La profesora preguntó si alguien más tenía decidido qué carrera continuar al finalizar los estudios secundarios. Una alumna respondió Ingeniería Ambiental y el resto de los alumnos confesaron que aún no lo tenían decidido.

En los últimos minutos de la clase, la profesora les dijo que para la siguiente clase debían traer el material que había dejado en fotocopiadora.

-La clase de Inglés.

La profesora ingresó al aula acompañada por una practicante del Profesorado de Inglés de la Facultad de Lenguas. La practicante se ubicó en un banco que estaba en el fondo del aula. Los alumnos se pusieron de pie y saludaron a la profesora.

Luego de tomar lista, la docente llamó a la practicante al frente. Ella saludó a los alumnos y después se presentó. A continuación, les dijo que harían un repaso antes de la evaluación. Repartió una fotocopia a cada alumno con actividades y les dio diez minutos para que las resuelvan. El tema era Voz Activa-Voz Pasiva. Los alumnos trabajaron individualmente y en silencio. Cuando un alumno tenía una duda, la practicante se acercaba a su banco y lo ayudaba.

Cumplido el tiempo establecido, se realizó la puesta en común de las actividades. La practicante seleccionó, para cada actividad, diferentes alumnos para que leyeran la respuesta que habían colocado, mientras ella las registraba en el pizarrón. Luego, realizó un breve resumen del tema. Al finalizar, les deseó suerte para la evaluación y se quedó a observar el resto de la clase.

La profesora, que había estado observando la clase desde su escritorio, se puso de pie. Les pidió a los alumnos que separaran bien los bancos entre sí y que sacaran una hoja para realizar la evaluación. Después, comenzó a escribir las actividades en el pizarrón. Los estudiantes copiaron y resolvieron las actividades en total silencio. La evaluación duró cuarenta minutos, aunque a los veinte minutos algunos alumnos comenzaron a entregar la evaluación.

Durante toda la clase la docente, la practicante y los alumnos se comunicaron hablando en inglés. También los registros en el pizarrón se hacían en inglés.

Al finalizar la clase de inglés, los alumnos se separaron y se dirigieron a distintas salas para el ensayo de coro. Los coros estaban conformados por alumnos de diferentes cursos. Luego, los alumnos almorzaron.

-La clase de Formación para la educación.

Al sonar el timbre los alumnos comenzaron a ingresar al aula. Charlaban entre sí mientras esperan que la profesora llegara. Cuando la profesora entró al aula, los alumnos continuaron charlando y estaban desordenados. La docente les pidió que hicieran silencio y se ubicaran cada uno en su banco. Luego, los saludó. Seguidamente les dijo: “Hoy les traje un trabajo práctico para hacer en grupo”. Frente a esta propuesta algunos alumnos le dijeron a la profesora que todavía no habían finalizado un trabajo práctico que debían entregar ese día y una alumna preguntó: “¿Profe, nos da la hora para consultar sobre ese trabajo práctico?, yo no entendí qué había que hacer”. Dicho trabajo era individual y estaba relacionado con el texto

“Por qué triunfó la escuela” de Pablo Pinau. Entonces, la profesora decidió destinar la clase para que los alumnos terminaran el trabajo práctico pendiente. Explicó claramente la consigna y les dio un ejemplo.
Los estudiantes se abocaron a la realización del trabajo práctico haciendo consultas a la profesora cuando lo necesitaban. Los estudiantes hablaban en voz alta y, algunas veces, sus propios compañeros les pedían que bajasen el volumen de voz.

-La clase de folclore:
Antes de que la docente ingresara al aula, los alumnos corrieron los bancos despejando el centro del aula y se pusieron a practicar el paso de zamba. Cuando la profesora ingresó, los saludó y les contó cómo se iba a organizar la clase del día: “Primero vamos a terminar de leer las características de las danzas folclóricas de la región centro: el gato y la vidala, y después vamos a ensayar las coreografías para el acto del 25 de Mayo”. En clases anteriores habían leído sobre la zamba, la chacarera y el escondido. Los alumnos se ubicaron en un banco y sacaron de sus mochilas el cuadernillo de folclore. La profesora le pidió a una alumna que leyera. Después de la lectura la docente amplió la información.
Luego comenzó el ensayo, al que se sumaron alumnos de otros cursos, seleccionados por la profesora. El ensayo duró hasta el final de la clase.

En 5º Año “B” se observaron las siguientes materias:

- Física.
- Matemática.
- Literatura.

Estas materias corresponden a la jornada de la mañana. Este día los alumnos se retiraron a las 14:00 Hs. por ausencia de profesores.

-La clase de Física.
El profesor de Física ingresó al aula, saludó y les comunicó a sus alumnos que debían dirigirse a la sala de proyector para ver un video sobre la fuerza de gravedad. Los alumnos se mostraron interesados y se dirigieron a la sala. Dos alumnos ayudaron al profesor a hacer funcionar el proyector, mientras otros se ocuparon de traer y acomodar los bancos para sentarse. Luego, se reprodujo el documental. Cuando éste finalizó, los estudiantes regresaron en orden al aula. Entre todos comentaron que les había gustado el video. Un grupo de alumnos planteó preguntas vinculadas al video que el profesor escuchó y respondió. Atendiendo a las intrigas

de sus alumnos, en esta clase el profesor estableció un clima de mucho diálogo. Pudimos observar que había algunos estudiantes que no se involucraron en el debate. Al sonar el timbre el profesor se despidió de los alumnos.

-La clase de Literatura.

Los alumnos y profesor ingresaron al aula apenas sonó el timbre. El profesor estableció que trabajarían durante 20 minutos en un trabajo práctico. Aclaró que luego los llevaría a la sala de video para ver un cortometraje. El trabajo era acerca de una novela de Adolfo Bioy Casares y había sido comenzado en clases anteriores. Los alumnos trabajaban en grupo de a dos, aunque algunos decidieron trabajar individualmente.

El profesor se tomó un tiempo para hablar de las notas. Les comentó que debía cerrar los promedios del trimestre pero todavía le faltaba una calificación. Frente a esta situación les dio libertad a los alumnos para que eligieran la modalidad de la evaluación que se tomaría. Quedó acordado que los estudiantes se agruparían de la misma manera que como lo hicieron en el trabajo práctico.

El profesor les llamaba la atención a los estudiantes cuando el curso comenzaba a desordenarse.

Todos los alumnos trabajaban en el práctico, llamando al profesor para hacerle consultas cuando era necesario. Él se acercaba a cada grupo y les explicaba.

Durante el resto de la clase el profesor adaptó el tiempo a las necesidades de los estudiantes. La resolución del trabajo práctico llevó más tiempo que el establecido inicialmente de manera que esa clase no pudieron ver el video que tenía planificado.

Luego de la clase de Literatura, los alumnos se separaron y se dirigieron a distintas salas para el ensayo de coro. Los coros estaban conformados por alumnos de diferentes cursos.

Después de almorzar los alumnos se retiraron del establecimiento debido a que los docentes estaban ausentes.

La observación de jornada completa nos permitió identificar diversas estrategias, modos de trabajo y actividades utilizadas por los profesores para llevar a cabo la tarea docente. Como así también, conocer diversas actitudes y comportamientos de los alumnos.

A lo largo de este capítulo se ha realizado una descripción del contexto donde se desarrollaron las prácticas, de los sujetos a quienes fue dirigida y de las formas de trabajo habituales dentro de la escuela. En el próximo capítulo desplegaremos la planificación realizada y explicaremos cómo fueron implementadas las diferentes actividades en el aula.

CAPÍTULO 2

DISEÑO DE LA PRÁCTICA E IMPLEMENTACIÓN EN EL AULA.

2.1 PLANIFICACIÓN ANUAL DE LA PROFESORA Y LA UNIDAD DIDÁCTICA A TRABAJAR EN LAS PRÁCTICAS.

El programa anual de la profesora incluye objetivos, unidades didácticas, formas y criterios de evaluación y la bibliografía. En relación con los objetivos el programa establece los siguientes:

1. Operar con expresiones algebraicas fraccionarias y graficar.
2. Utilizar y operar con números reales.
3. Operar con números complejos.
4. Identificar, comparar y graficar funciones exponenciales y logarítmicas.
5. Clasificar funciones, reconociéndolas a través de su gráfica.
6. Resolver gráfica y analíticamente funciones cuadráticas.
7. Plantear y resolver ecuaciones de segundo grado a partir de problemas.
8. Resolver analítica y gráficamente sistema de ecuaciones mixto.

Los títulos de las unidades didácticas son:

UNIDAD N° 1: REVISIÓN
UNIDAD N° 2: EXPRESIONES ALGEBRAICAS FRACCIONARIAS
UNIDAD N° 3: LOS NÚMEROS REALES
UNIDAD N° 4: NÚMEROS COMPLEJOS
UNIDAD N° 5: FUNCIÓN
UNIDAD N° 6: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS
UNIDAD N° 7: FUNCIÓN CUADRÁTICA

Los criterios y formas de evaluación estaban establecidos para las instancias de coloquio o examen, según la condición de alumno regular, previo regular y previo libre

En el programa se propone como bibliografía cualquier texto que contenga los temas desarrollados durante el año. A modo de ejemplo se establece una lista de libros y textos que cubren dichos temas.

Antes de comenzar con la planificación de las clases correspondientes a las prácticas profesionales, la profesora tutora había desarrollado hasta la Unidad 4 del programa. Ella nos dio la posibilidad de elegir entre la Unidad 5 y la Unidad 6. Los contenidos de dichas unidades eran los siguientes:

<u>UNIDAD Nº 5</u>: FUNCIÓN

Revisión de: función, dominio e imagen, función lineal, rectas paralelas y perpendiculares, rectas que pasan por dos puntos. Función par. Función impar. Clasificación de las funciones: inyectiva, suryectiva y biyectiva. Función inversa.

<u>UNIDAD Nº 6</u>: FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Concepto de logaritmo. Propiedades. Ecuación logarítmica. Función logarítmica. Variaciones de una función logarítmica. Ecuación exponencial. Función exponencial. Variaciones de una función exponencial.

Decidimos optar por la Unidad 6 aunque incluimos en nuestra planificación un repaso de algunas nociones fundamentales y necesarias de la Unidad 5. Nuestra decisión estuvo basada en las siguientes razones:

- La Unidad 5 era, gran parte, un repaso de contenidos ya desarrollados en años anteriores.
- La Unidad 6 incluía temas novedosos para los alumnos.
- Se podía hacer una combinación de ambas unidades. Para desarrollar la Unidad 6 era necesario revisar y retomar algunas nociones incluidas en la Unidad 5.

En cuanto a los contenidos ya trabajados por los alumnos, fue muy importante que los alumnos hubieran conocido previamente la existencia de los números complejos. Este conocimiento era necesario para poder explicar las condiciones de los parámetros para la función exponencial. También fue oportuno que los alumnos hubieran estudiado las funciones racionales, porque en dicha oportunidad pudieron trabajar con la noción de asíntota.

En relación a los temas posteriores, la manera en que se abordó la Unidad 6, podría ser retomada por la profesora, por ejemplo, para realizar el análisis de la gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ al variar los parámetros a, b y c.

2.2 NUESTRA PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA

Planificamos nuestras prácticas profesionales siguiendo el texto de *Gvirtz y Palamidessi* del texto *El ABC de la tarea docente: Curriculum y enseñanza.* Los autores proponen una serie de variables a tener en cuenta para diseñar la enseñanza:

- *las metas, objetivos o expectativas de logro;*
- *la selección del/de los contenidos;*
- *la organización del/de los contenidos;*
- *las tareas y actividades;*
- *la selección de los materiales y recursos;*
- *la participación de los alumnos;*
- *la organización del escenario;*
- *la evaluación de los aprendizajes.*

Como mencionamos anteriormente, la unidad seleccionada fue Funciones Exponenciales y Logarítmicas.

Nuestro objetivo a la hora de planificar fue diseñar una propuesta didáctica que permitiese introducir en el aula las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación (TICs) y, simultáneamente, proponer actividades donde los estudiantes fueran actores principales en la construcción de su propio conocimiento.

2.2.1 *Metas, objetivos o expectativas de logro*

Al comenzar con nuestra planificación fue prioritario establecer una serie de metas, objetivos y expectativas de logro para guiar el desarrollo de la planificación. Para la elaboración de los mismos, se tuvo en cuenta tanto los objetivos del programa de la profesora como los objetivos que plantean los Diseños Curriculares vigentes para la provincia de Córdoba.

Tener en cuenta los siguientes objetivos permitió establecer el rumbo o la intención de nuestra planificación, así como también, hacer una reflexión previa y posterior de cada una de las clases durante las prácticas profesionales:

Objetivos generales.

- Alentar a los alumnos para que valoren sus producciones matemáticas, las discutan y analicen en equipos de trabajo, favoreciendo la construcción de conocimiento a través del intercambio de ideas.
- Que los alumnos logren reconocer la presencia de la matemática en situaciones y fenómenos de la vida real y valoren los aportes de la matemática al mundo extramatemático.
- Favorecer la utilización de herramientas TICs, en particular de GeoGebra, para la resolución de problemas.

Objetivos específicos.

Que los alumnos puedan:

- Analizar el comportamiento de las funciones exponenciales y logarítmicas recurriendo a las diferentes formas de representación (tabla, gráfico y fórmula) e interpretar sus parámetros.
- Usar y analizar variaciones funcionales *(exponenciales y logarítmicas)* como herramientas para resolver problemas recurriendo cuando, sea posible, al uso reflexivo de recursos tecnológicos.
- Utilizar el programa GeoGebra para graficar, analizar datos y observar la variación de parámetros de la función en estudio, formular hipótesis, comprobarlas y validarlas.
- Utilizar e interpretar ecuaciones exponenciales y logarítmicas como modelo matemático para resolver problemas, seleccionando el modelo más adecuado en función del problema.

2.2.2 *Selección de los contenidos.*

La selección de los contenidos se realizó comparando los contenidos incluidos en la Unidad 6 del Programa de 5º año con los contenidos que figuran en los Diseños Curriculares vigentes para la provincia de Córdoba.

En la Tabla 2 se listan los contenidos de la Unidad 6 y los contenidos y aprendizajes que aparecen en el Tomo 7: Orientación arte-Música de los Diseños Curriculares para la provincia de Córdoba:

Programa: UNIDAD DIDÁCTICA N° 6	**Diseño Curricular:** EJE ÁLGEBRA Y FUNCIONES
Contenidos	Contenidos y aprendizajes
• Concepto de logaritmo. • Propiedades de los logaritmos. • Ecuación logarítmica. • Función logarítmica. • Variaciones de una función logarítmica. • Ecuación exponencial. • Función exponencial. • Variaciones de una función exponencial.	• Nociones: función, dependencia, variable. • Diferentes representaciones. • Comportamiento analizando la variación de los parámetros. • Dominio e imagen. • Función inversa. • Funciones como modelos matemáticos. • Problemas intra y extramatemáticos. • Uso de TICs. • Utilización de ecuaciones logarítmicas y exponenciales para resolver problemas extramatemáticos.

Tabla 2: Cuadro comparativo entre los contenidos de la Unidad 6 del Programa de la profesora y los contenidos del Eje Algebra y Funciones de los Documentos Curriculares.

Dado que en los diseños curriculares, la mayor cantidad de contenidos y aprendizajes estaban relacionados con la noción de función más que de ecuación, decidimos priorizar el estudio de funciones exponenciales y logarítmicas, aunque también se trabajó con algunas ecuaciones exponenciales. Por lo tanto, se seleccionaron los siguientes contenidos:

Contenidos principales:

- Función exponencial.
- Análisis del gráfico de la función exponencial al variar los parámetros ***a*** y ***k***.
- Función logarítmica.
- Análisis del gráfico de la función logaritmo al variar el parámetro ***a***.

Dentro de estos contenidos, fue necesario trabajar y repasar las siguientes nociones:

- Función.
- Diferentes tipos de representación de una función (descripción verbal, tabla, fórmula y gráfico).
- Continuidad.
- Dominio e imagen de una función.

- Función creciente y función decreciente.
- Ordenada al origen y raíz de una función.
- Función positiva y función negativa.
- Función inversa.

2.2.3 <u>Organización y secuenciación de los contenidos.</u>

Como marco general, es de destacar que decidimos comenzar tratando función exponencial y continuar con función logarítmica. Esto se debe, a que nos pareció pertinente definir a la función logaritmo como función inversa de la función exponencial.
Teniendo en cuenta los contenidos y las nociones principales antes mencionados, la propuesta didáctica se organizó de la siguiente manera:

- Análisis de situaciones problemáticas que pueden ser modelizadas a través de funciones exponenciales. Tipos de representación de una función.
- Revisión del concepto de función, dominio e imagen, noción de continuidad.
- Función exponencial: definición.
- Análisis del gráfico de la función exponencial al variar los parámetros ***a*** y ***k***. Definición de función creciente y de función decreciente. Repaso del concepto de ordenada al origen.
- Noción de función inversa.
- Función logarítmica: definición.
- Análisis del gráfico de la función logarítmica al variar el parámetro ***a***. Repaso del concepto de raíz. Definición de función positiva y de función negativa.

Para secuenciar los contenidos nos basamos en las *relaciones conceptuales*, es decir, *"la secuencia de los contenidos refleja las relaciones entre los conceptos siguiendo una estructura lógica"* (Gvirtz y Palamidessi, 1999: 195).
Para comenzar con el tema función exponencial, presentamos una actividad introductoria que consistía en cinco guías de actividades diferentes para trabajar en pequeños grupos de alumnos. Todas planteaban situaciones que se modelaban con funciones exponenciales. A partir de la situación planteada, los estudiantes debían recabar datos en una tabla, graficar dichos datos y luego encontrar la regularidad que les permitiera calcular cualquier dato de la situación. Para finalizar con la actividad, cada grupo debía hacer una exposición informando lo realizado. El nivel de desafío que debían enfrentar los alumnos era elevado ya que sólo podían recurrir a la interpretación de los datos y a sus ideas y habilidades. Por lo tanto, estas

actividades fueron, para los alumnos, una *tarea de investigación* según la clasificación de Ponte (2004).

Luego, continuamos con una estrategia de enseñanza directa, de profesor a alumno. A partir de las soluciones de las actividades anteriores, se establecieron ciertas regularidades entre las diferentes tablas, gráficas y fórmulas obtenidas: todas representaban a una función, la gráfica era una curva, el dominio era el conjunto de los números reales, todas las fórmulas tenían la variable independiente ***x*** en el exponente. Así, en una primera instancia, la enseñanza tuvo un carácter investigativo para luego pasar a la teoría en donde se presentó formalmente la definición de función exponencial.

Posteriormente, se presentó una actividad donde los estudiantes debían analizar los diferentes comportamientos del gráfico de la función exponencial al hacer variar los parámetros. En esta actividad se hizo uso de un applet creado en GeoGebra y de una guía de preguntas elaborada específicamente para tal fin. Para dar continuación a la actividad, se realizó una puesta en común, que consistió en completar un cuadro que resumía las conclusiones de la tarea realizada. Consideramos que esta actividad en su conjunto constituyó una *tarea de exploración* (Ponte, 2004) ya que los estudiantes fueron partícipes activos elaborando conclusiones acerca del comportamiento de los gráficos de la función exponencial.

Para poner en práctica las nociones desarrolladas hasta el momento y ayudar a consolidar los conocimientos, se resolvió una guía de ejercicios.

Para comenzar con el tema función logaritmo, se presentó una actividad donde a partir de la lectura “inversa” del gráfico de una función exponencial y de una serie de preguntas, los estudiantes agrupados de a dos y haciendo uso de GeoGebra, debían realizar una tabla de valores, graficar y sacar conclusiones. Esta tarea fue de carácter exploratorio para los alumnos. Continuamos con una exposición utilizando los resultados obtenidos anteriormente, se trabajó la noción de función inversa para luego poder definir la función logaritmo. Así, en esta etapa volvimos a una enseñanza de tipo directa.

Para analizar cómo variaba el gráfico de la función logaritmo al modificar los valores del parámetro ***a***, se propuso una guía de actividades que se complementaba con un applet de GeoGebra. La intención era generar una tarea del tipo exploratoria en los alumnos. Así buscábamos que a partir de la exploración del applet sacaran sus propias conclusiones y pudieran resolver las actividades. Al igual, que para la variación de la función exponencial, para finalizar la actividad se completó un cuadro que resumía las conclusiones obtenidas a partir de la exploración.

Finalmente, se resolvió una guía de ejercicios donde los alumnos debían poner en práctica los conocimientos adquiridos sobre función logaritmo.

2.2.4 *Cronograma de clases implementado.*

En esta sección se presenta el cronograma implementado en ambos cursos durante el periodo de las prácticas. En el mismo se describen los contenidos y actividades desarrolladas en cada una de las clases (ver Tabla 3).

En 5º "A" se desarrollaron diez clases, mientras que en 5º "B" nueve clases ya que hubo un jueves en que los alumnos de 5º "B" tenían prevista una actividad extra institucional. Por cuestiones de tiempo y, principalmente, por el cronograma establecido por la institución para el mes de septiembre, no se pudo recuperar esta clase.

<table>
<tr><th rowspan="2">Clase</th><th colspan="2">Cursos: 5º Año "A" y 5º Año "B"</th></tr>
<tr><td colspan="2">Contenidos.
Actividades desarrolladas.</td></tr>
<tr><td>1</td><td colspan="2">Presentación.
GeoGebra.
¿Qué es GeoGebra?
Ejemplo.
Función exponencial.
Actividad introductoria.</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">Función exponencial.
Actividad introductoria (Exposiciones).
Búsqueda de regularidades entre las diferentes tablas, gráficas y fórmulas obtenidas en la Actividad introductoria.
Definición.</td></tr>
<tr><td></td><td>5º "A"</td><td>5º "B"</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Función exponencial.
Búsqueda de regularidades entre las diferentes tablas, gráficas y fórmulas obtenidas en la Actividad introductoria. (Continuación)
Definición de Función exponencial.
Análisis de la gráfica de la función exponencial al variar los parámetros a y k.</td><td>Función exponencial.
Búsqueda de regularidades entre las diferentes tablas, gráficas y fórmulas obtenidas en la Actividad introductoria. (Continuación)</td></tr>
</table>

	Actividad de parámetros con applets de GeoGebra (parámetro ***a***).	
4	**Análisis de la gráfica de la función exponencial al variar los parámetros *a* y *k*.** Actividad de parámetros con applets de GeoGebra (parámetro ***k***). Puesta en común (cuadro resumen). Guía de ejercicios Nº 1.	**Función exponencial.** Definición de Función exponencial. **Análisis de la gráfica de la función exponencial al variar los parámetros *a* y *k*.** Actividad de parámetros con applets de GeoGebra (parámetro ***a***).
5	**Función exponencial.** Resumen (Power Point)[1]. **Asíntota.** **Función logaritmo.** Actividad introductoria.	**Análisis de la gráfica de la función exponencial al variar los parámetros *a* y *k*.** Actividad de parámetros con applets de GeoGebra (parámetro ***k***). Puesta en común (cuadro resumen). Guía de ejercicios Nº 1.
6	**Función logaritmo.** Actividad introductoria (Conclusiones). Definición de función logaritmo. **Análisis de la gráfica de la función logaritmo al variar el parámetro *a*.** Actividad de parámetro con applet de GeoGebra.	**Función logaritmo.** Actividad introductoria. Definición de función logaritmo. **Análisis de la gráfica de la función logaritmo al variar el parámetro *a*.** Actividad de parámetro con applet de GeoGebra.
7	**Función exponencial.** Guía de ejercicios Nº 1 (Revisión)[2]. **Análisis de la gráfica de la función logaritmo al variar el parámetro *a*.** Puesta en común (cuadro resumen).	**Análisis de la gráfica de la función logaritmo al variar el parámetro *a*.** Puesta en común (cuadro resumen). Guía de ejercicios Nº 2.
8	**Análisis de la gráfica de la función logaritmo al variar el parámetro *a*.** Guía de ejercicios Nº 2.	**Repaso (Función exponencial/Función logaritmo).** Leyenda: Origen del ajedrez.
9	**Repaso (Función**	**Evaluación.**

	exponencial/Función logaritmo) Leyenda: Origen del ajedrez.	
10	**Evaluación.**	

Tabla 3: Cronograma de clases implementado.

[1] Resumen (Power Point). Durante la marcha de las prácticas se decidió realizar un resumen del tema Función exponencial en 5º "A", dado que en la clase anterior se habían ausentado aproximadamente la mitad de la cantidad de alumnos, afectados por una actividad institucional. El resumen se realizó en la sala de video con una presentación en Power Point.

[2] En la séptima clase de 5º "A" se retomaron los ejercicios de la Guía de ejercicios Nº 1, de función exponencial, para que los alumnos controlaran lo que habían realizado y se sacaran las dudas que pudieran tener.

2.2.5 Materiales y recursos.

Las TICs ocuparon un lugar preponderante en nuestras prácticas. Para diseñar las actividades utilizamos como recurso principal el programa GeoGebra. Con este programa creamos applets dinámicos. Buscábamos que los alumnos explorasen dichos applets para luego dar respuesta a las preguntas que les planteábamos. Estos applet se describirán en detalle en la siguiente sección. Los alumnos también utilizaron las herramientas de GeoGebra para resolver las actividades: realizar tablas, graficar, verificar y validar sus respuestas. Una semana antes de comenzar con las prácticas fue necesario instalar el programa y guardar todos los applets y archivos necesarios en cada una de las netbooks del laboratorio móvil de computación.
El laboratorio móvil de computación contaba con 30 netbooks y un proyector. El mismo se guardaba en la biblioteca y debía reservarse con antecedencia. El proyector sólo se podía utilizar en la sala de coro y no en el aula. Esto fue importante porque cambio bastante nuestras prácticas ya que esta sala no estaba siempre disponible.
El personal de la biblioteca fue determinante para la correcta implementación de las actividades. Para cada clase, nos entregaban las netbooks cargadas. De esta manera, se evitaba que las computadoras se apagaran en medio de la clase y que tuviéramos que llevar cargadores al aula. Esto hubiese sido un inconveniente dado que solo había una toma de corriente en cada curso.
Otro recurso utilizado fueron las láminas que confeccionamos para las clases en que necesitábamos mostrar gráficos y no podíamos utilizar el proyector en la sala de video.

También realizamos los cuadros resumen en afiches para completarlos en conjunto con los estudiantes.

2.2.6 Las Actividades: Implementación en el aula.

La mayoría de las actividades estuvieron caracterizadas por el trabajo en grupos favoreciendo así la cooperación y el intercambio de ideas.

Al comienzo de cada actividad, en la que los alumnos necesitaban visualizar un applet o trabajar en GeoGebra, se les entregaba por grupo una netbook encendida y con las ventanas necesarias abiertas.

Las guías eran entregadas en fotocopias en el momento en que se presentaba cada actividad.

Seguidamente, se describen como se implementaron cada una de las actividades así como también algunos aspectos de lo que ocurrió en el aula y las decisiones que se tomaron durante las prácticas.

Presentación.

La primera clase se desarrolló en una de las salas de video. Una vez que los alumnos se ubicaron, se presentó nuestro equipo de prácticas. Luego, se informó a los estudiantes, que se desarrollaría una unidad de la asignatura Matemática. Se decidió no dar el nombre de la unidad para que, con el transcurso de las actividades desarrolladas, fueran los alumnos quienes descubrieran de qué tema se trataba.

También se comunicó cómo sería la organización durante el desarrollo de las clases, es decir, que la modalidad de trabajo sería grupal e individual y que se utilizarían como recursos principales las Netbooks y el programa GeoGebra.

Introducción a GeoGebra.

Dado que los alumnos no habían trabajado nunca con GeoGebra, fue necesario destinar un tiempo para presentar el programa.

Haciendo uso del proyector, primero se comentó qué es GeoGebra y después se realizó un ejemplo donde se utilizaron algunas de las herramientas que los alumnos necesitarían conocer para realizar las actividades.

Se abrió el programa GeoGebra y se indicaron y nombraron cada una de las siguientes barras y vistas (ver Figura 2):

- Menú.

- Herramientas.
- Vista Algebraica.
- Vista gráfica.
- Hoja de cálculo.
- Botones de vista.
- Entrada.
- Tabla de símbolos.
- Ayuda de Entrada

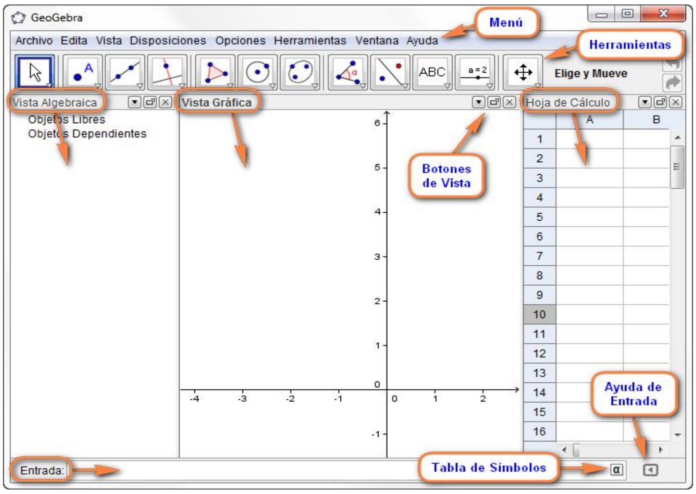


Figura 2: Ventana de GeoGebra con las vistas y barras que se mostraron a los estudiantes.

Después, se comentó que GeoGebra es un programa dinámico, es decir, permite trabajar de manera simultánea con la vista algebraica, la vista gráfica y la hoja de cálculo. El ejemplo que se realizó tenía como finalidad mostrarles a los alumnos los comandos y herramientas que debían utilizar para hacer una tabla de valores, graficar los puntos de una tabla e ingresar una fórmula en la barra de entrada para graficar una función. Para esto, se utilizó una función lineal, tema que los alumnos habían visto en 4º Año.

El ejemplo utilizado fue:

Dada la siguiente función lineal $y = 2x + 3$, realizar la tabla de valores y graficar.

Con este ejemplo, también se pudo demostrar que GeoGebra es un programa dinámico que permite trabajar con las distintas representaciones de una función: algebraica, tabla y gráfica (ver Figura 3).

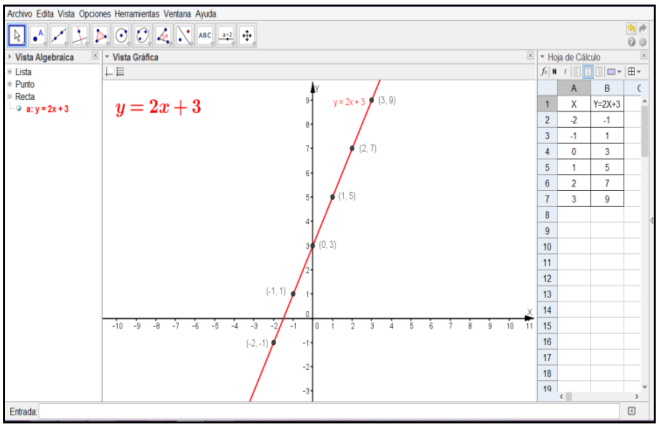


Figura 3: Solución en GeoGebra del ejemplo $y = 2x + 3$.

Actividad introductoria-Función exponencial.

Para introducir la noción de función exponencial se trabajó con diversas situaciones problemáticas que podían ser modelizadas utilizando funciones exponenciales. Para ello, se propusieron diferentes guías de actividades para trabajar en grupos. Para dichas actividades fue necesario utilizar el programa GeoGebra.

Las guías de actividades estaban enumeradas del 1 al 5 y cada una tenía un título relacionado con la situación a modelizar:

Guía de Actividades Nº 1: “Tiras de papel”.

Guía de Actividades Nº 2: “Semillas”.

Guía de Actividades Nº 3: “Cuadriláteros”.

Guía de Actividades Nº 4: “Bacterias”.

Guía de Actividades Nº 5: “Triángulos”.

Para la guía “Tiras de papel” eran necesarias una tira de papel de 116 cm y una tijera. Para cada una de las restantes guías se creó un applet de GeoGebra que ilustraba cada situación. Estos applet tenían el mismo nombre que su respectiva guía y fueron guardados previamente en cada una de las netbooks.

Para comenzar con la actividad, se les pidió a los alumnos que formaran cinco grupos. Luego, se les entregó una guía de actividades en fotocopia y los materiales y recursos necesarios.

A cada uno de los grupos se les entregó dos netbooks para que pudieran trabajar cómodamente. En una computadora se les abrió el applet correspondiente, y en la otra se les dejó la ventana de GeoGebra lista para resolver las actividades.

A continuación, describiremos la Guía de Actividades N° 2: “Semillas”. El desarrollo de las otras guías fue similar. Las mismas se encuentran en el Anexo I.

<u>Guía de Actividades N° 2: “Semillas”.</u>

Materiales y recursos.

- Netbook-Programa GeoGebra.
- Archivo de GeoGebra llamado “Semillas”.

Situación problemática.

De una determinada semilla nace una planta. De esta planta se obtienen 3 semillas nuevas. De ellas nacen sendas plantas que, a su vez, dan 3 semillas cada una, y así sucesivamente. **Llamamos “generación cero” a la primera semilla.**

1) Abrir el archivo “Semillas”. Observar lo que sucede.

2) Responder:

   a. ¿Cuántas semillas hay en la generación 1? ¿Y en la generación 2? ¿Y en la generación 3?
   b. ¿Cuántas semillas habrá en la generación 4? ¿Cuántas habría en la siguiente generación? ¿Cuántas semillas habría en la generación 50?

3) Registrar en forma de tabla, en GeoGebra, las respuestas a las preguntas del ítem 2).

> Para realizar una tabla ir a la opción “Vista”, del menú ubicado en la parte superior, y seleccionar “Hoja de Cálculo”. Allí introducir los datos obtenidos.

4) Graficar los datos registrados en la tabla.

> Para graficar seleccionar la tabla completa, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción Crea-Lista de puntos.

5) Encontrar una fórmula que permita calcular la cantidad de semillas que habría en cada generación.

6) Introducir la fórmula encontrada en “Entrada” ubicada en la parte inferior de la ventana de GeoGebra.

7) Guardar el archivo de GeoGebra en la computadora con el nombre “Solución Semillas”.

8) Preparar una presentación, de cinco minutos aproximadamente, donde deberán contar:

   - Cuál era el problema a resolver.
   - Mostrar los resultados: tabla, fórmula y gráfico.
   - Explicar cómo obtuvieron esos resultados.

Para visualizar el applet “Semillas” ir a http://tube.geogebra.org/m/BTxURAHM. En la Figura 4 se muestran capturas de pantalla correspondientes al applet “Semillas” y muestran lo que sucedía en cada generación:

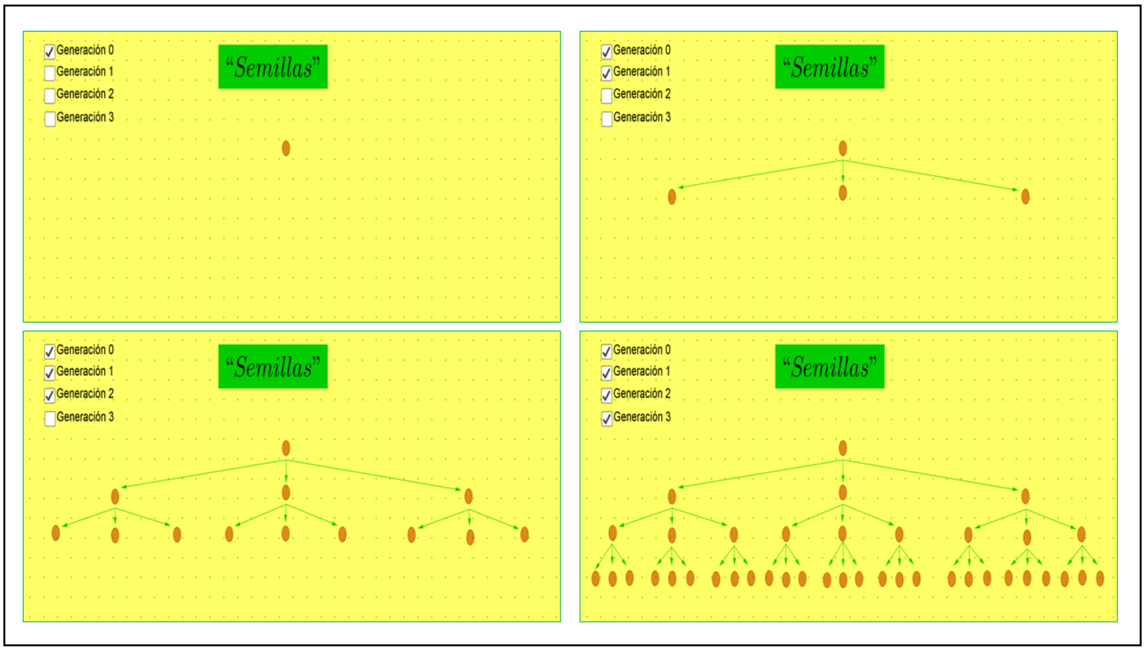


Figura 4: Capturas de pantalla del applet "Semillas".

Los primeros cuatro puntos fueron realizados sin dificultad por los alumnos. Después de graficar los puntos en GeoGebra, los estudiantes intentaron unir los puntos con una recta utilizando la herramienta "Recta", como habíamos hecho en el ejemplo de la función lineal. Pero al unir dos de los puntos con una recta, observaron que el resto de los puntos no estaban contenidos en ella y que, además, no estaban alineados. Entonces, concluyeron que no se trataba de una función lineal. Luego, se les aconsejó que siguieran el orden de las actividades para así encontrar la forma de unir los puntos.

La siguiente actividad era encontrar una fórmula que les permitiera calcular la cantidad de semillas que se obtenían en cada generación. Esta actividad generó un alto grado de dificultad y tuvimos que intervenir para guiarlos.

Entre las fórmulas que proponían estaban $y = 3 \cdot x$, $y = x^3$ y otras expresiones lineales que habían deducido relacionando sólo dos filas de la tabla. A las fórmulas lineales encontradas las descartaron porque recordaron la conclusión a la que habían llegado cuando intentaron unir los puntos. Para verificar si la expresión $y = x^3$ era correcta, se les pidió que realizaran el punto 6). Al introducir la expresión en la Barra de Entrada, inmediatamente apareció la gráfica correspondiente a dicha expresión. Al ver que había puntos fuera de esa curva se dieron cuenta de que la expresión no era correcta. Los alumnos estaban seguros de que el 3 debía aparecer en la fórmula porque decían que las semillas se triplicaban.

Como ayuda, se les sugirió que analizaran el applet y la tabla. Esta última tenía dos columnas una para el número de generación y otra para el número de semillas. Se les propuso que comenzaran escribiendo la relación entre la primera y la segunda fila de la tabla. Con esto nos referimos a analizar cómo se podía obtener el número de semillas de una generación a partir del número de semillas de la generación anterior. Luego, que escribieran la relación que había entre la segunda y tercera fila y que continuaran así sucesivamente hasta la última fila de la tabla. De esta manera, encontraron la expresión $y = 3^x$. Introdujeron la fórmula en la barra Entrada y apareció la curva correspondiente. Al observar que pasaba por todos los puntos graficados, se convencieron de era la expresión correcta.

Para la exposición utilizaron el proyector para mostrar el applet que representaba el problema asignado y la solución a la que arribaron (ver Figura 5). Todos los alumnos lograron expresarse correctamente. Contaron cómo habían realizado la tabla y cómo habían graficado los puntos y la gráfica correspondiente a la fórmula. También describieron el procedimiento que utilizaron para deducir la fórmula y cómo verificaron que era la correcta.

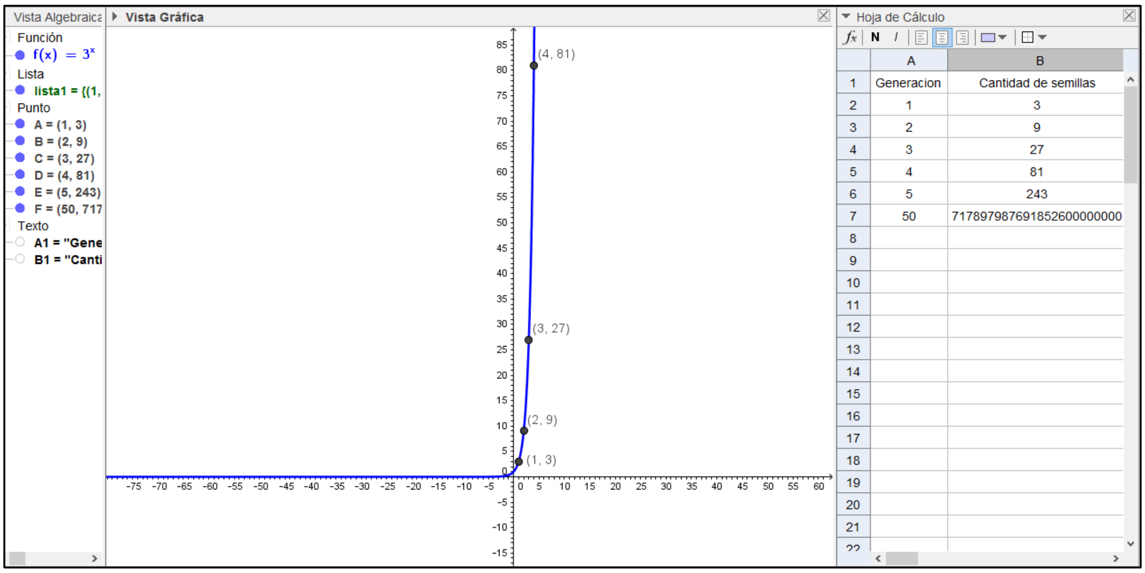


Figura 5: Solución de la Guía de actividades Nº 2: “Semillas” realizada por un grupo de alumnos.

Seguidamente se muestra y describen algunas particularidades de la Guía de Actividades N° 3: “Cuadriláteros”.

<u>Guía de Actividades N° 3: “Cuadriláteros”.</u>

Materiales y recursos.

- Netbook-Programa GeoGebra.
- Archivo de GeoGebra llamado “Cuadriláteros”.
- Lápiz y papel.

Actividades.

1) Abrir el archivo “Cuadriláteros”. Observar que sucede en cada paso.
2) Responder.

a. ¿Cuál es el área del cuadrilátero inicial?

b. ¿Cuál es el área del cuadrilátero que aparece sombreado en el Paso N° 1? ¿Y en el Paso N° 2? ¿Y en el Paso N° 3? ¿Y en el Paso N° 4?

c. ¿Cuál es el área del cuadrilátero en el paso N° 6? ¿Cuál sería el área del cuadrilátero que aparecería sombreado en el Paso N° 7? ¿Cuál sería el área del cuadrilátero que aparecería sombreado en el Paso N° 50?

3) Registrar en forma de tabla las respuestas obtenidas en el ítem 2).

Para realizar una tabla ir a la opción "Vista", del menú ubicado en la parte superior, y seleccionar "Hoja de Cálculo". Allí introducir los datos obtenidos.

4) Graficar los datos registrados en la tabla.

Para graficar seleccionar la tabla completa, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción Crea-Lista de puntos.

5) Encontrar una fórmula que permita calcular el área del cuadrilátero que aparecería sombreado en cualquier número de pasos.

6) Introducir la fórmula encontrada en "Entrada" ubicada en la parte inferior de la ventana de GeoGebra.

7) Guardar el archivo de GeoGebra en la computadora con el nombre "Solución Cuadriláteros".

8) Preparar una presentación, de cinco minutos aproximadamente, donde deberán contar:

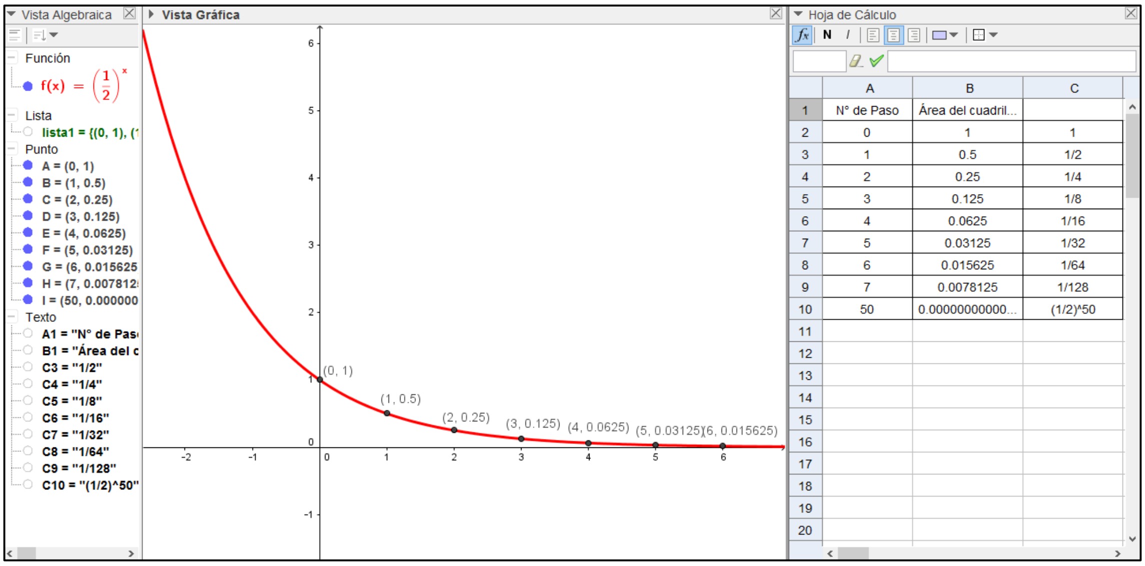
   - Cuál era el problema a resolver.
   - Mostrar los resultados: tabla, fórmula y gráfico.
   - Explicar cómo obtuvieron esos resultados.

Para visualizar le applet ir a http://tube.geogebra.org/m/xyU9YB88. En la Figura 6 se muestran capturas de pantalla correspondientes al applet "Cuadriláteros" y muestran lo que sucedía en cada paso:

Figura 6: Capturas de pantalla del applet “Cuadriláteros”.

En la hoja de cálculo de GeoGebra, al escribir el área como fracción, el programa realizaba el cociente devolviendo la expresión decimal. A partir del paso número 6, el área daba como resultado cero, lo cual no era correcto. Para solucionar esto se les pidió a los alumnos que aumentaran la cantidad de cifras decimales (*Opciones-Redondeo-15 cifras decimales).*

Para deducir la expresión que les permitiera calcular el área del cuadrilátero que aparecería sombreado en cualquier número de paso se les sugirió que agregaran una columna a la tabla y expresaran las áreas como fracciones escribiéndolas entre comillas. Esto hacía que GeoGebra considerase el contenido de la celda como texto por lo que no modificaba la representación fraccionaria en una expresión decimal. Luego, los invitamos a que observaran y compararan los numeradores y denominadores. En la Figura 7 se puede observar la solución a la que arribó un grupo de alumnas.



	A	B	C
1	Nº de Paso	Área del cuadril...	
2	0	1	1
3	1	0.5	1/2
4	2	0.25	1/4
5	3	0.125	1/8
6	4	0.0625	1/16
7	5	0.03125	1/32
8	6	0.015625	1/64
9	7	0.0078125	1/128
10	50	0.00000000000...	(1/2)^50

Figura 7: Solución de la Guía de actividades Nº 3: “Cuadriláteros” realizada por un grupo de alumnas.

Búsqueda de regularidades.

La presente actividad estuvo a cargo de nosotros y se llevó a cabo en el aula. Para su desarrollo se retomaron los trabajos realizados por los alumnos en la actividad introductoria y se los organizó en una lámina (ver Figura 8). Dicha lámina, utilizada para hacer una puesta en común, contenía las tablas, los gráficos y las fórmulas obtenidas en la actividad introductoria.

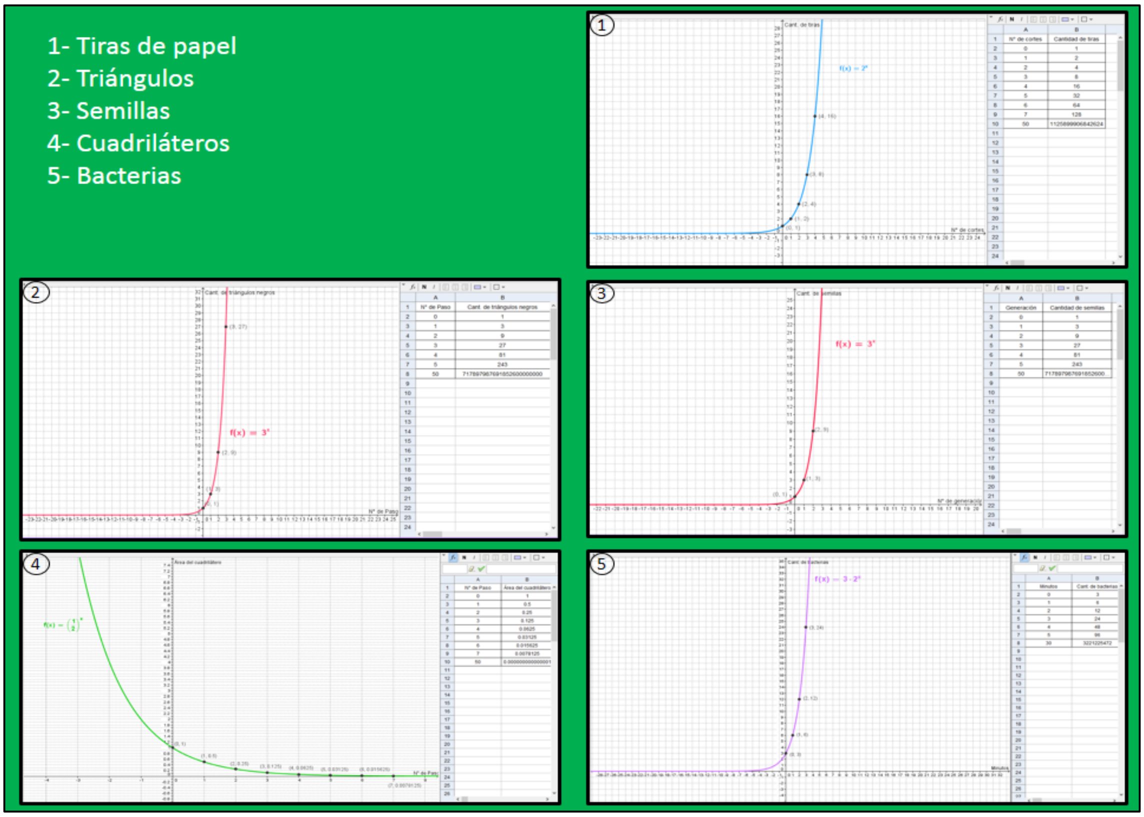


Figura 8: Lámina que se utilizó para la puesta en común de la actividad introductoria.

Las regularidades que fuimos remarcando junto con los estudiantes fueron las siguientes:

- Todas son funciones.
- Todas tienen como representación gráfica una curva.
- Todas son continuas.
- Todas tienen como dominio al conjunto de los números reales.
- Todas tienen la variable independiente ***x*** en el exponente.
- Todas son funciones exponenciales.

Arribar a estas regularidades implicó repasar con los estudiantes algunas nociones fundamentales vinculadas con el concepto de función. Se comenzó identificando las variables que intervenían en cada uno de los problemas trabajados, haciéndoles notar que al cambiar una de ellas la otra también cambiaba, es decir, que existía una relación de dependencia entre ambas. Se dio el siguiente ejemplo:

En el problema "Tiras de papel" las variables son: el número de cortes y la cantidad de tiras de papel. A medida que aumenta el número de cortes va cambiando la cantidad de tiras obtenidas, es decir, a cada número de cortes le corresponde una cierta cantidad de tiras. Entonces, la cantidad de tiras depende del número de cortes. Por lo tanto, el número de cortes es una variable independiente y la cantidad de tiras obtenidas es una variable dependiente.

Luego, se observó que en un mismo corte no se pueden obtener distintas cantidades de tiras, o sea, por cada corte se obtiene una única cantidad de tiras. De esta manera, se concluyó que ésta era una relación de dependencia en la cual a cada valor de la variable independiente le correspondía un **único** valor de la variable dependiente. A este tipo de relación se las llamaría **función**. Dimos la siguiente definición y notación de función:

Función.

Es una **relación** entre dos variables ***x*** e ***y*** que cumplen con la siguiente condición: a cada valor de la variable ***x*** le corresponde **uno y sólo un** valor de la variable ***y***.

x: variable independiente.

y: variable dependiente.

Notación:

Esta correspondencia se representa con la notación $y = f(x)$ que indica que la variable ***x*** se puede mover libremente por ser la variable independiente mientras que la variable ***y*** depende de la variación de ***x.***

Junto con los alumnos, se identificaron las variables de cada situación y se verificó que cada ejemplo cumplía la condición de la definición de función.

También, mirando los gráficos, se observó que las cinco funciones eran continuas, y se dio la siguiente condición para continuidad:

Una función es **continua** si su gráfica no presenta huecos ni saltos.

Otra de las regularidades encontradas fue que todas las funciones tienen como dominio al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. Luego, se dieron las siguientes definiciones de dominio e imagen:

Dominio: conjunto de todos los valores que toma la variable independiente ***x***. **Imagen**: conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente ***y***, que tienen asociado algún valor de la variable independiente ***x***.

Por último, se observó una de las regularidades más importantes que se podía apreciar en las fórmulas: la variable independiente ***x*** aparecía en el exponente. Entonces, se les dijo a los estudiantes que las funciones que tienen ***x*** en el exponente se denominan funciones exponenciales. Posteriormente se dio la expresión general de la función exponencial y sus características más importantes.

<u>Función exponencial.</u> La expresión general de la función exponencial es: $f(x) = k\mathrm{a}^x, \qquad con\ \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1\ y\ k \neq 0$ Éstas funciones reciben éste nombre porque la variable independiente $\boldsymbol{x}$ aparece en el exponente. Los parámetros ***a*** y ***k*** pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$. El número fijo ***a*** se llama base y la función así definida se denomina **función exponencial en base *a*** con **dominio $\mathbb{R}$.**

Se verificó, junto con los alumnos, que las funciones obtenidas en las guías de actividades eran funciones exponenciales. Se destacó que ésta era una regularidad por detrás de problemas y de situaciones muy diferentes (triángulos, cuadriláteros, bacterias, tiras de papel).

Para finalizar se justificó por qué eran necesarias las condiciones $k \neq 0$**,** $a \neq 1\ y\ a > 0$. Discutiendo con los alumnos y utilizando el pizarrón arribamos a la siguiente síntesis que explica la necesidad de imponer condiciones para los parámetros ***a*** y ***k***

¿Por qué ***k*** debe ser distinto de cero?

Si ***k*** = 0 $\longrightarrow f(x) = 0 \cdot a^x \longrightarrow f(x) = 0$ constante.

¿Por qué ***a*** debe ser distinto de 1?

Si $a = 1 \longrightarrow f(x) = 1^x \longrightarrow f(x) = 1$ constante.

¿Por qué ***a*** debe ser mayor que cero?

Si $a = 0 \longrightarrow f(x) = 0^x$
- Si ***x*** > 0 $f(x) = 0$ constante.
- Si ***x*** < 0 no está definida.

Si $a < 0 \longrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = (-2)^{\frac{1}{2}}$ no está definida dentro de los reales, no es función.

Actividad: Variación de parámetros – Función exponencial.

El objetivo de estas actividades era analizar la variación del gráfico de la función exponencial cuando se modifican los parámetros ***a*** y ***k*** en la fórmula.

Para estas actividades se crearon dos applets de GeoGebra, uno para analizar el gráfico de la función cuando se modifica el valor de ***a*** y otro para estudiar la variación del parámetro ***k***.

Los alumnos trabajaron de a dos. Se entregó una fotocopia con las actividades a cada uno y una netbook, por grupo, con los archivos necesarios ya abiertos.

Análisis de la variación de la función exponencial.

Actividades.

<u>Variación del parámetro ***a***.</u>

Analizaremos cómo varía la gráfica de la función exponencial $f(x) = ka^x$ cuando el parámetro ***a*** cambia. Para ello, mantendremos fijo el parámetro ***k*** en 1.

1) Abran el archivo “Parámetro *a*”. Utilicen el deslizador para hacer variar ***a*** y describan con sus palabras lo que sucede con la gráfica.
2) Respondan:
   a. ¿Para qué valores de ***a*** la función es creciente?
   b. ¿Para qué valores de ***a*** la función es decreciente?
   c. ¿Cuál es el conjunto imagen de $f(x) = ka^x$ con k = 1?

<u>Variación del parámetro $\boldsymbol{k}$.</u>

Analizaremos como varía la gráfica de la función exponencial $f(x) = ka^x$ cuando el parámetro ***k*** cambia.

3) Abran el archivo “Parámetro k”. Fijen el parámetro ***a*** en 2 (***a*** = 2). Utilicen el deslizador para hacer variar ***k***.

a. Posicionen el deslizador en $\boldsymbol{k}$ = -10, -5, -3, 1, 3, 5, 10, ¿en qué punto cada una de las gráficas corta el eje y? ¿Qué representa $\boldsymbol{k}$ en la gráfica?

b. ¿Cuál es el conjunto imagen para $\boldsymbol{k} > \mathbf{0}$?

c. ¿Cuál es el conjunto imagen para $\boldsymbol{k} < \mathbf{0}$?

d. Repitan los ítems a, b y c fijando el parámetro ***a*** en ½ (***a*** = 1/2)

4) Completen el cuadro colocando creciente o decreciente según corresponda

k \ ***a***	***a>1***	***0<a<1***
k>0		
k<0		

Para visualizar el applet "Parámetro a" ir a http://tube.geogebra.org/m/FZzlBCFp. En la Figura 9.1 y en la Figura 9.2 se pueden observar imágenes del applet "Parámetro a"

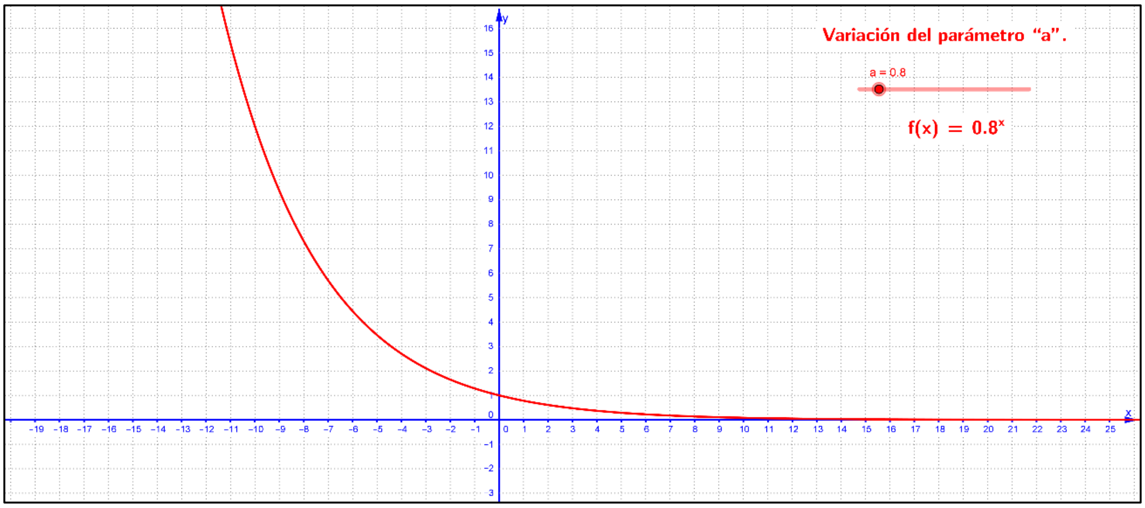


Figura 9.1: Captura de pantalla del applet "Parámetro a" (0 < ***a*** < 1).

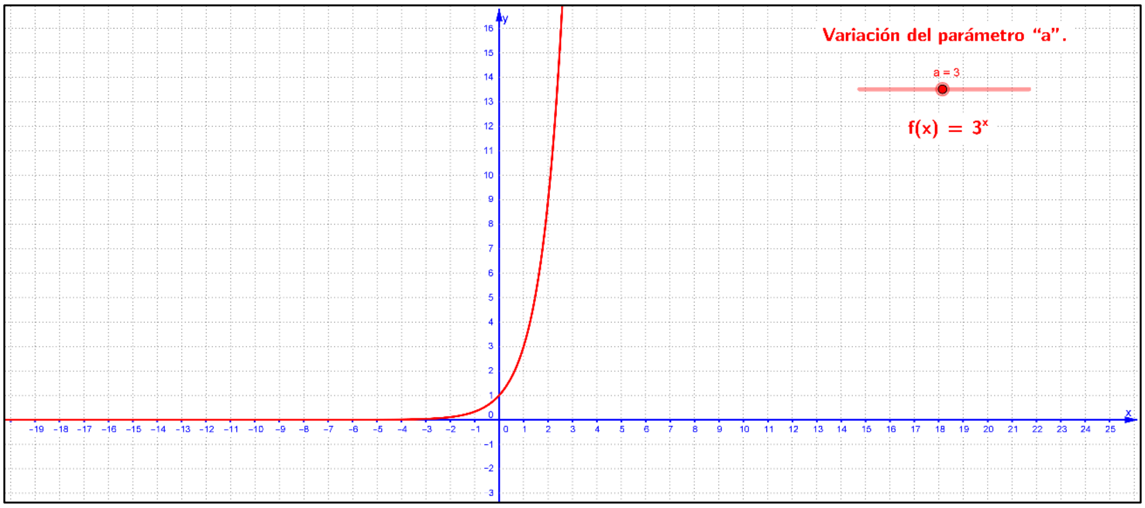


Figura 9.2: Captura de pantalla del applet "Parámetro a" (***a*** > 1).

Con la primera actividad se buscaba que los alumnos se familiarizaran con los deslizadores y pudieran contar con sus palabras lo que observaban al mover el punto en el deslizador, es decir al variar el valor de ***a***. Algunas de las conclusiones a las que arribaron los alumnos fueron: *"La curva cambia de lado", "Se dobla para un lado y después para el otro", "Si **a** es menor que 1 se levanta en el segundo cuadrante. Si **a** es mayor que 1 se levanta en el primer cuadrante", "De un lado es creciente y del otro lado es decreciente".*

Antes de que los alumnos comenzaran con la actividad 2 se les recordaron las definiciones de función creciente, función decreciente e imagen:

Una función es **creciente** cuando al aumentar la variable independiente ***x***, aumenta la variable dependiente ***y***.

Una función es **decreciente** cuando al aumentar la variable independiente ***x***, disminuye la variable dependiente ***y***

Imagen: conjunto de todos los valores que toma la variable dependiente ***y***, que tienen asociado algún valor de la variable independiente ***x***.

Para la actividad 3 fue necesario recordar la definición de ordenada al origen:

Ordenada la origen: es el valor de **y** cuando **x** vale cero. Gráficamente, es la coordenada **y** del punto donde se intersecan la gráfica de la función con el eje **y**.

Para resolver la última actividad se utilizó el archivo "Parámetro k", en el que se podía hacer variar ambos parámetros a la vez: con el deslizador ***k*** y con la casilla de entrada ***a*** (ver Figura 10.1 y Figura 10.2). Para visualizar el applet "Parámetro k" ir a http://tube.geogebra.org/m/cAHoceUQ.

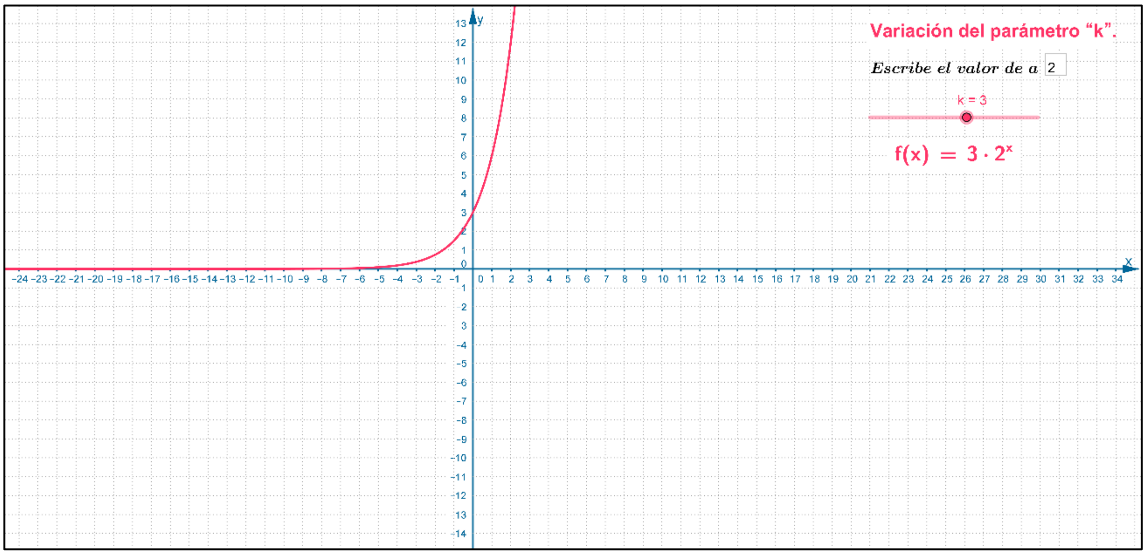


Figura 10.1: Captura de pantalla del applet "Parámetro k" (***a*** > 1 y ***k*** > 0).

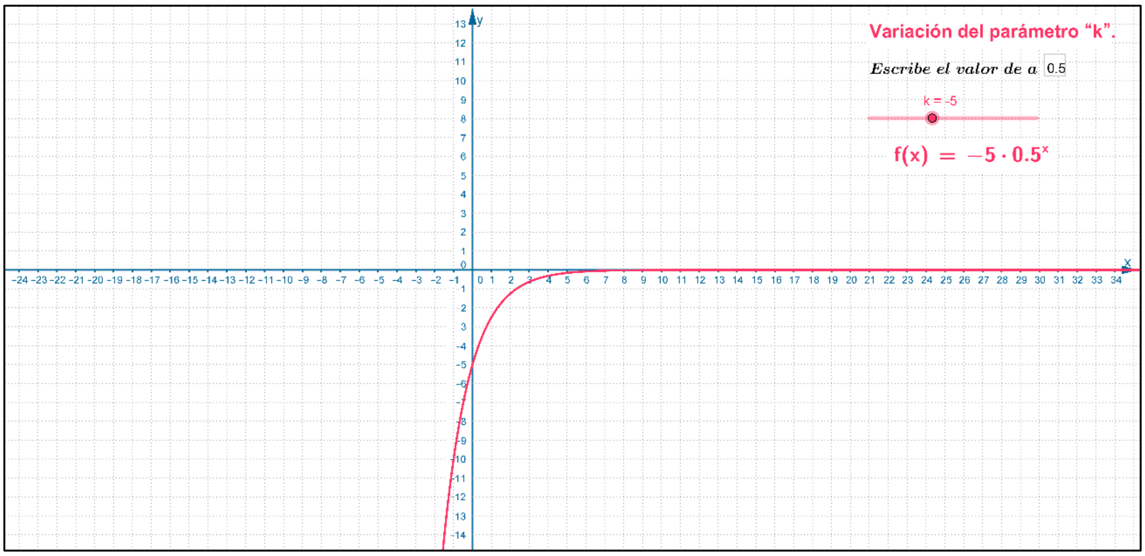


Figura 10.1: Captura de pantalla del applet "Parámetro k" (0 < ***a*** < 1 y ***k*** < 0).

Después de que los alumnos finalizaron con las actividades, se completó el siguiente cuadro entre todos. El mismo les serviría como recurso para realizar la guía de ejercicios. Con los alumnos nos referíamos a tal cuadro como "cuadro resumen" (ver Tabla 4).

	a>1 y ***k***>0	***a***>1 y ***k***<0	0<***a***<1 y ***k***>0	0<***a***<1 y ***k***<0
Creciente/Decreciente	Creciente	Decreciente	Decreciente	Creciente
Conjunto imagen	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{<0}$	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}_{<0}$
Ordenada al origen/Punto de corte con el eje y	***K*** (0,***k***)	***K*** (0,***k***)	***K*** (0,***k***)	***K*** (0,***k***)

Tabla 4: Cuadro resumen de la Actividad de parámetros-Función exponencial.

Asíntota.

Para trabajar la noción de asíntota se creó un applet dinámico en GeoGebra que llamamos "Asíntota". En dicho applet se podía observar la tabla de valores y el gráfico correspondientes a una función exponencial de la forma $y = k \cdot a^x$ con ***k*** = 1 y ***a*** > 1.

Primero explicamos la idea de asíntota analizando la tabla de valores. Como ***a*** > 1 la curva de la función parecía coincidir con el eje ***x*** cuando la variable ***x*** tomaba valores negativos cada vez más pequeños. Entonces, en la tabla tomamos valores negativos para la variable ***x*** y fuimos obteniendo los valores de la variable ***y*** correspondientes (ver Tabla 5).

X	$y = a^x(a > 1)$
-1	$\frac{1}{a}$
-2	$\frac{1}{a^2}$
-3	$\frac{1}{a^3}$
-4	$\frac{1}{a^4}$
-5	$\frac{1}{a^5}$
-n	$\frac{1}{a^n}$

Tabla 5: Tabla de valores de la función $y = a^x(a > 1)$.

Luego analizamos la tabla. Concluimos que la variable ***y*** nunca podía tomar el valor cero, pues ***a*** era diferente de cero y por lo tanto el denominador también, pero que los valores de ***y*** se acercaban cada vez más a cero a medida que tomábamos valores negativos más pequeños.

Pudimos comprobar este hecho gráficamente utilizando el applet "Asíntota" (ver Figura 11). Para visualizar el applet ir a http://tube.geogebra.org/m/KicBY4PX.

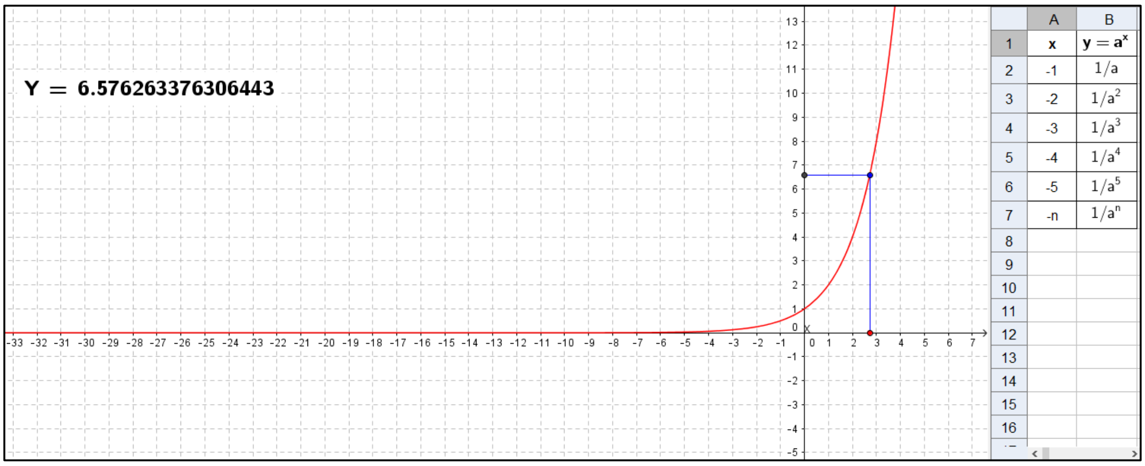


Figura 11: Captura de pantalla del applet "Asíntota".

En él se podía modificar el valor de la abscisa moviendo el punto rojo y en pantalla nos mostraba el valor de ***y*** correspondiente. Verificamos que los valores de la variable ***y*** se aproximaban cada vez más a cero a medida que disminuíamos los valores de la variable ***x***. Dado que GeoGebra redondea hasta un máximo de 15 cifras decimales, a partir de valores para ***x*** menores a -27 (aproximadamente), ***y*** daba cero. Esto fue explicado a los alumnos, y haciendo uso de la herramienta *Zoom de Acercamiento* de GeoGebra realizamos sucesivos zoom en esa región y comprobamos que la curva no tocaba al eje ***x***, por lo tanto el valor de ***y*** no era igual a cero. Como conclusión general, determinamos junto con los alumnos que aunque visualmente se observaba que la curva y el eje ***x*** coinciden eso no es lo que realmente sucedía. Lo que sucedía era que los valores de ***y*** se aproximaban mucho a cero a medida que los valores de ***x*** decrecían, entonces, la curva se aproximaba cada vez más al eje ***x***. Entonces explicamos que a ésta recta, el eje ***x***, a la cual la curva se acercaba pero no la tocaba se denominaba asíntota. Formalizamos la definición de asíntota de la siguiente manera:

Asíntota.

Es una recta a la cual la curva se acerca indefinidamente, sin llegar a tocarla.

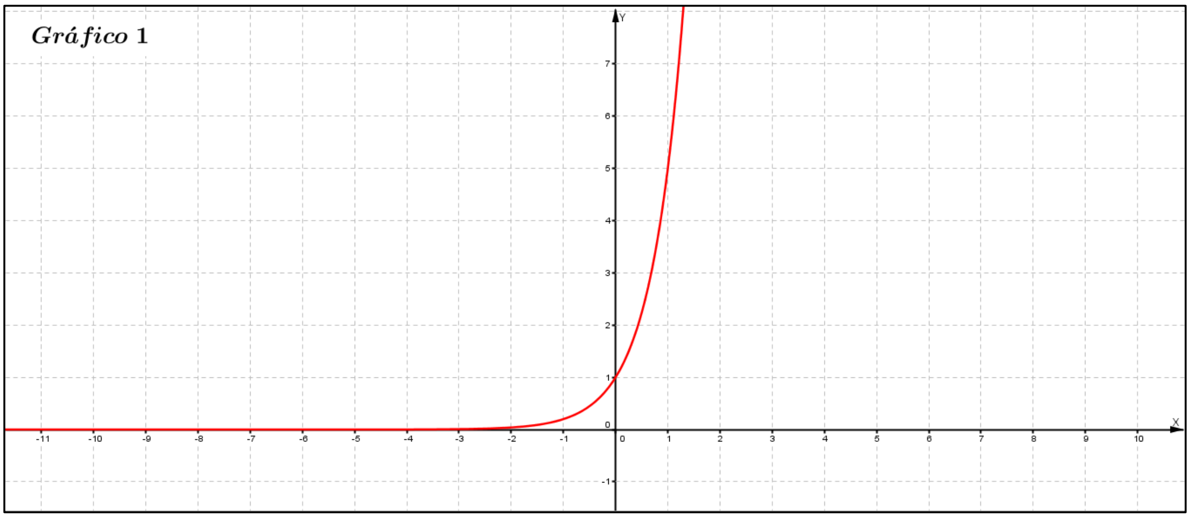
Guía de ejercicios – Función exponencial.

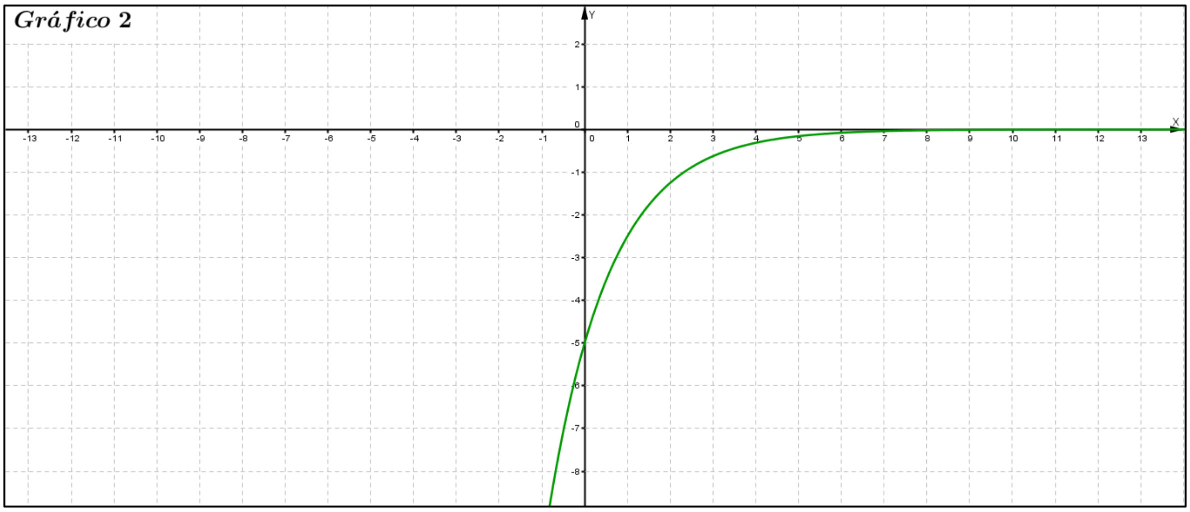
La guía de ejercicios tenía como finalidad poner en práctica los conocimientos adquiridos por los alumnos hasta el momento. Mayormente trabajaron en forma individual aunque solían realizar consultas y preguntas a sus compañeros.

<u>Guía de ejercicios n° 1</u>

❖ Para resolver los ejercicios puedes utilizar el "cuadro resumen".

1- Las siguientes gráficas representan funciones del tipo $f(x) = ka^x$. En cada uno de los casos, identifica si 0 < ***a*** < 1 o ***a*** > 1 y si ***k*** < 0 o ***k*** > 0. Además, escribe el valor exacto de ***k***.





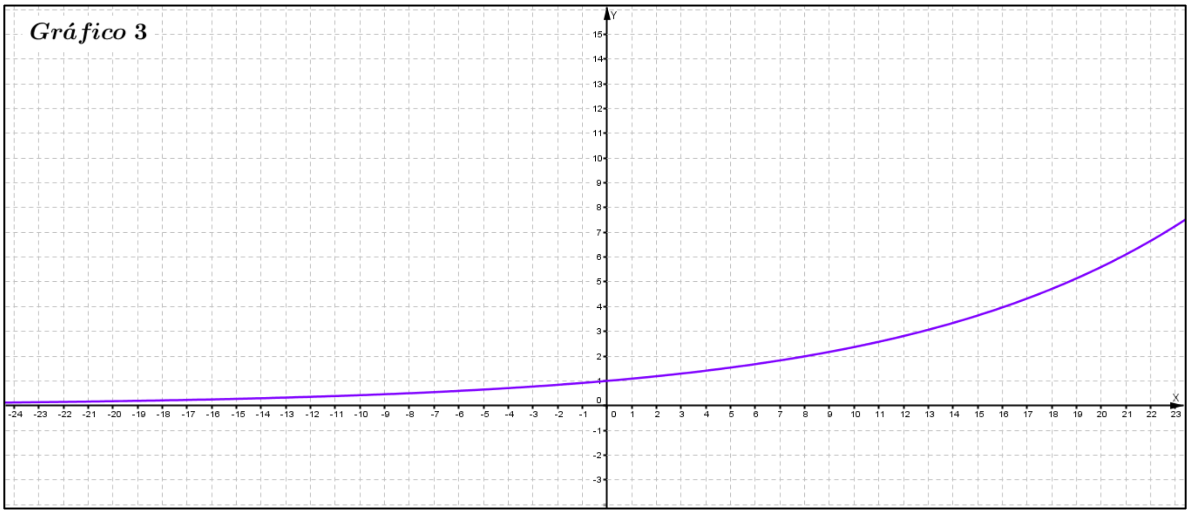


Gráfico 3
X
Y

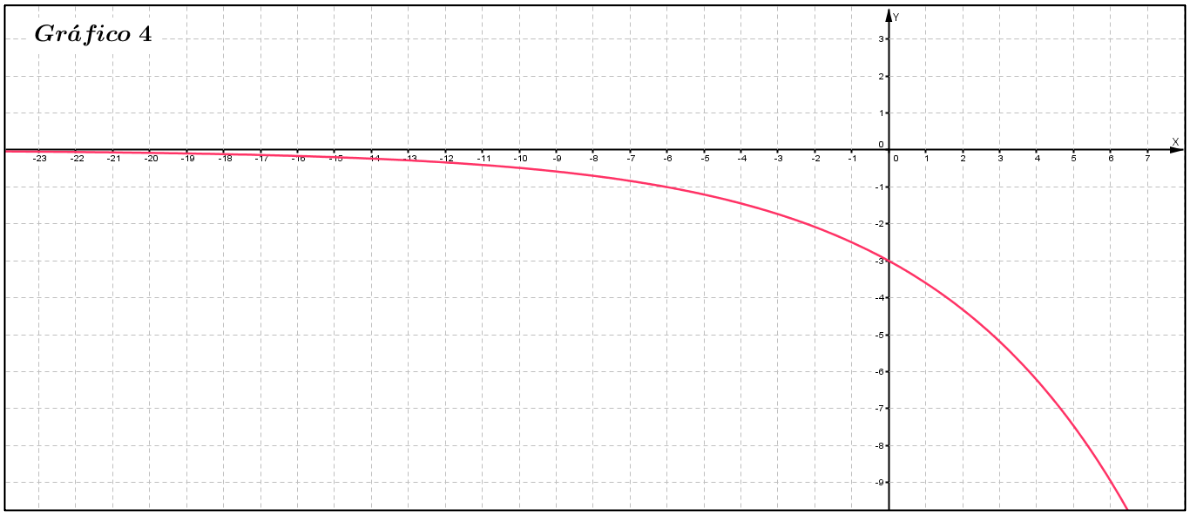


Gráfico 4
X
Y

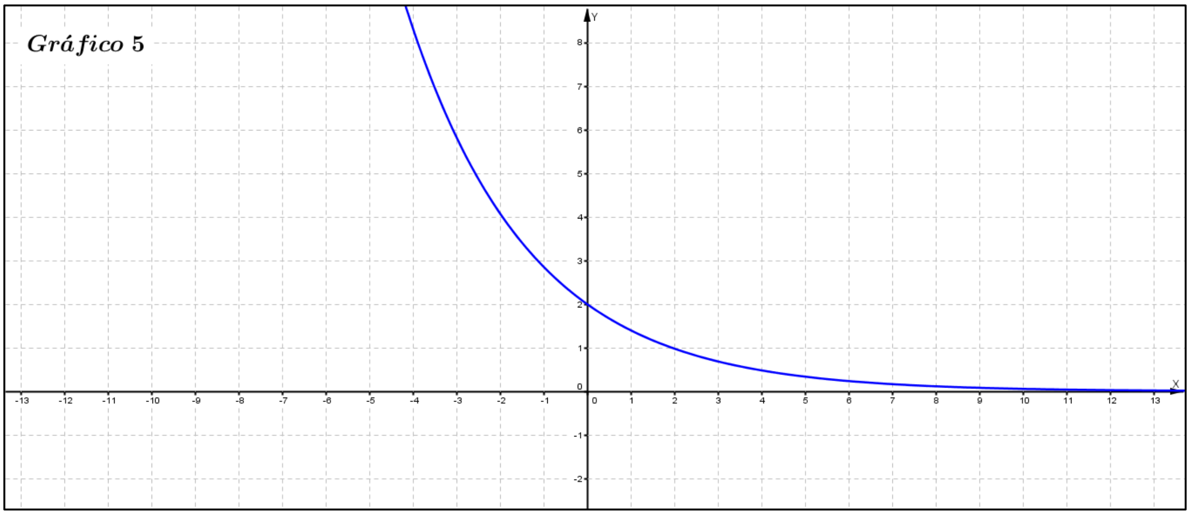


Gráfico 5
X
Y

2- Completa el siguiente cuadro:

Función	Ordenada al origen	Creciente o Decreciente	Imagen	Dominio
$f(x) = 2 \cdot (1/4)^x$				
$f(x) = (-3) \cdot 5^x$				
$f(x) = -5 \cdot (0.8)^x$				
$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot 10^x$				
$f(x) = -\frac{1}{2} \cdot 1{,}5^x$				

3- Decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) La función exponencial $f(x) = -(10^x)$ es creciente.

b) Si en la expresión $f(x) = k\ a^x$, el parámetro $\boldsymbol{a}$ es igual al valor 1 entonces no es una función exponencial.

c) Si 0 < ***a*** < 1 y ***k*** < 0, la función exponencial $f(x) = k\ a^x$ es decreciente.

d) La función exponencial $f(x) = -21 \cdot 5^x$ corta al eje $\boldsymbol{y}$ en el punto (0, -21).

e) El conjunto dominio de una función exponencial siempre es $\mathbb{R}$**.**

f) La función exponencial $f(x) = -7 \cdot 0{,}3^x$ es creciente.

g) La expresión $f(x) = 2 \cdot (-5)^x$ es una función exponencial creciente.

Para resolver el ejercicio 2 se les aconsejó a los alumnos que primero identificaran los parámetros. Además, se les sugirió que realizaran un bosquejo del gráfico de la función para que pudiesen comprender mejor el comportamiento de ésta.

En el último ejercicio fue necesario trabajar con las justificaciones, especialmente con las que eran verdaderas. Esto fue así porque los alumnos estaban acostumbrados a no tener que justificar las proposiciones verdaderas.

Entonces, se resolvieron algunos de los incisos en el pizarrón.

Por ejemplo el inciso f):

La función exponencial $\mathrm{f(x)} = -7 \cdot 0{,}3^{\mathrm{x}}$ es creciente.

La afirmación es verdadera.

Se realizaron dos justificaciones que se tomarían como válidas:

1- Verdadero. Como ***k*** < 0 y 0 < ***a*** < 1 la función $f(x) = -7 \cdot 0{,}3^x$ es creciente.

2- Verdadera. -7 es la ordenada la origen y la curva "se dobla" hacia el tercer cuadrante porque ***k*** < 0 y 0 < ***a*** < 1, entonces el gráfico de la función $f(x) = -7 \cdot 0{,}3^x$ es aproximadamente de la siguiente forma (Figura 12):

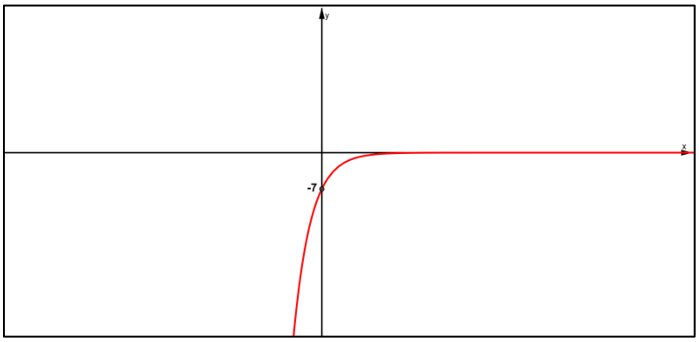


Figura 12: Gráfico aproximado de la función $f(x) = -7 \cdot 0{,}3^x$ que se realizó en el pizarrón.

Se observa que a medida que los valores de ***x*** aumentan, los valores de ***y*** también aumentan. Por lo tanto, la función es creciente.

Actividad introductoria – Función logaritmo.

Esta actividad estaba planificada para realizarse en la sala de video porque era necesario el proyector. Por razones institucionales, la actividad se desarrolló en el aula utilizando el pizarrón y tiza.

Para introducir la noción de función logaritmo, se tomó como base el problema "Tiras de papel".

Partiendo de éste problema se plantearon las siguientes actividades:

<u>Guía de actividades</u>

1- Abran el archivo de GeoGebra llamado "Solución Tiras de papel" en el que la tabla y el gráfico corresponden a la función $y = 2^x$. En este caso, ***x*** = números de cortes, ***y*** = cantidad de tiras de papel.

2- A partir del gráfico de $y = 2^x$, respondan:

¿Cuántos cortes deberían realizar si desearan obtener 64 tiras de papel? ¿Cuántos cortes deberían realizar si desearan obtener 32, 16, 8, 4, 2 tiras de papel? Y si sólo desearan tener una tira de papel, ¿cuántos cortes deberían realizar?

3- En la misma hoja de cálculo registren en forma de tabla las respuestas a las preguntas anteriores.

4- Grafiquen, en la misma vista gráfica, los datos registrados en la nueva tabla.

5- Grafiquen la recta $y = x$.

6- Seleccionen la herramienta “Simetría axial”, después seleccionen la gráfica de $y = 2^x$ y luego la recta $y = x$.

7- ¿Qué pueden decir sobre la nueva gráfica que aparece?, ¿tiene alguna relación con los puntos graficados en el ítem 4?

8- ¿Cómo son las dos curvas con respecto a la recta $y = x$?

Les pedimos a los alumnos que se agruparan de a dos y se les entregó, a cada uno, una fotocopia con las actividades.

En la Figura 13 se muestra el archivo sobre el que tenían que trabajar.

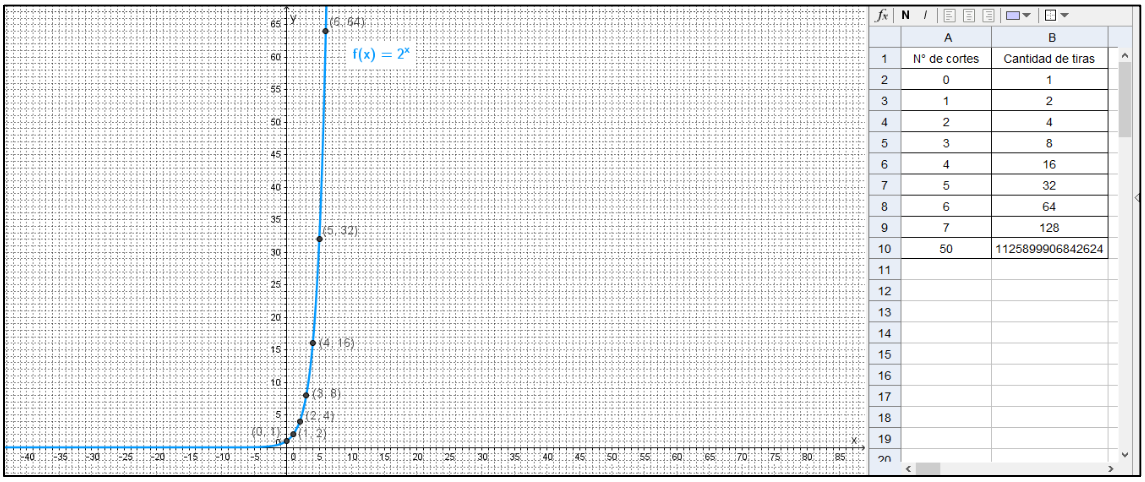


Figura 13: Captura de pantalla de la “Solución Tiras de papel” con la que los estudiantes debían trabajar.

Durante la puesta en común reprodujimos en el pizarrón el siguiente gráfico (ver Figura 14), paso por paso, como indicaban las actividades, para luego comenzar con el análisis.

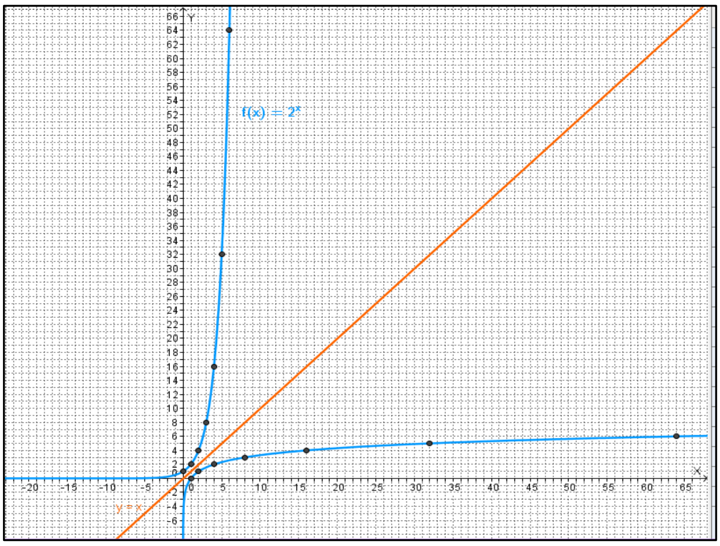


Figura 14: Gráfico que se realizó en el pizarrón para su análisis posterior.

Para llevar adelante esta discusión se comenzó preguntando a los alumnos: ¿Cuál es la variable independiente?, ¿y cuál la variable dependiente? Los alumnos respondieron que la variable independiente era la cantidad de tiras que se desean obtener y la variable dependiente el número de cortes necesarios.

Después, se les hizo notar que a cada valor de la variable independiente le corresponde un sólo valor de la variable dependiente. Por lo tanto, la curva correspondía a una función.

Mirando los gráficos, se observó que las curvas correspondían a dos funciones diferentes.

Se realizó una comparación de ambas funciones completando el siguiente cuadro junto a los alumnos (ver Tabla 6):

	$\boldsymbol{y = 2^x}$	**Nueva función**
Variable independiente (x)	Número de cortes	Cantidad de tiras de papel
Variable dependiente (y)	Cantidad de tiras de papel	Número de cortes
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{>0}$
Imagen	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
Corte con los ejes	(0, 1)	(1, 0)

Tabla 6: Cuadro comparativo entre la función $y = 2^x$ y la Nueva función.

Pero aún no conocíamos la expresión correspondiente a esta nueva función. Para ello se trabajó con las tablas de las dos funciones. Se agregó una columna a cada una de las tablas donde se escribió cómo se fue obteniendo cada valor de la variable ***y*** dependiendo del valor de la variable ***x***. Para la exponencial sabíamos que la expresión era $y = 2^x$. Lo que no se conocía en este caso era la cantidad de tiras que se iban a obtener. Entonces escribimos en la nueva columna de la tabla (ver Tabla 7):

Nº de cortes (*x*)	**Cantidad de tiras (*y*)**	$\boldsymbol{y = 2^x}$
0	1	$? = 2^0$
1	2	$? = 2^1$
2	4	$? = 2^2$
3	8	$? = 2^3$
4	16	$? = 2^4$
5	32	$? = 2^5$
6	64	$? = 2^6$

Tabla 7: Tabla de valores de la función $y = 2^x$.

Para la segunda tabla correspondiente a la nueva función se sabía que los valores de ***y*** se habían obtenido a partir del gráfico de la función exponencial. La diferencia estaba en que en este caso se conocía la cantidad de tiras que se deseaban obtener pero no se sabía cuántos cortes había que realizarle a la tira original para obtener tal cantidad de tiras. En la Tabla 8 se muestra la tabla de valores correspondiente a la nueva función y lo que escribimos en la tercera columna:

Cantidad de tiras (*x*)	**Nº de cortes (*y*)**	
64	6	$64 = 2^?$
32	5	$32 = 2^?$
16	4	$16 = 2^?$
8	3	$8 = 2^?$
4	2	$4 = 2^?$
2	1	$2 = 2^?$
1	0	$1 = 2^?$

Tabla 8: Tabla de valores de la Nueva función.

Por lo tanto, de esta última tabla se concluyó lo siguiente:

El número de cortes es igual el exponente al que hay que elevar al 2 para obtener la cantidad de tiras de papel que deseamos.

Se les dijo a los alumnos que a estos exponentes se los denomina logaritmos. Se dio el siguiente ejemplo: 6 es el logaritmo en base 2 de 64 porque 6 es el exponente al que se debe elevar el 2 para obtener 64. Se denota $log_2 64 = 6$ dado que $64 = 2^6$.

Por lo tanto, la nueva función correspondía a la función logarítmica $y = log_2 x$ dado que $x = 2^y$.

En el cuadro comparativo reemplazamos “Nueva función” por $y = log_2 x$ (ver Tabla 9).

	$\boldsymbol{y = 2^x}$	$\boldsymbol{y = log_2 x}$
Variable independiente (***x***)	Número de cortes	Cantidad de tiras de papel
Variable dependiente (***y***)	Cantidad de tiras de papel	Número de cortes
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{>0}$
Imagen	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
Corte con los ejes	(0, 1)	(1, 0)

Tabla 9: Cuadro comparativo entre la función exponencial$y = 2^x$y la función logarítmica $y = log_2 x$

Observando nuevamente los gráficos, se analizó la continuidad de la función $y = log_2 x$.

Luego, se retomó la última pregunta de la guía: *¿Cómo son las dos curvas con respecto a la recta $y = x$?* Entonces, se analizó la simetría de las curvas con respecto a la recta ***y*** = ***x***. Esto se realizó a partir de notar que los puntos de la curva exponencial y los puntos de la curva logarítmica están a igual distancia con respecto a la recta ***y*** = ***x***.

Con esto, completamos el cuadro comparativo (Figura 15):

	$\boldsymbol{y = 2^x}$	$\boldsymbol{y = log_2 x}$
Variable independiente (***x***)	Número de cortes	Cantidad de tiras de papel
Variable dependiente (***y***)	Cantidad de tiras de papel	Número de cortes
Dominio	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_{>0}$
Imagen	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
Corte con los ejes	(0, 1)	(1, 0)
Continuidad	Ambas son continuas	
Simetría	Simétricas con respecto a la recta ***y*** = ***x***	

Figura 15: Cuadro comparativo completo entre la función exponencial $y = 2^x$ y la función logarítmica $y = log_2 x$.

Finalmente, se estableció que como el dominio y la imagen estaban "invertidos" y que las curvas eran simétricas con respecto a la recta ***y*** = ***x***, estas dos funciones eran inversas. Por lo tanto, la función logaritmo era la inversa de la función exponencial.

Todo este trabajo nos permitió enunciar la siguiente definición de función logaritmo.

<u>Función logaritmo.</u>

La función logaritmo en base ***a*** es la función inversa de la función exponencial en base ***a***:

$$y = log_a x \text{ } si \text{ } y \text{ } sólo \text{ } si \text{ } se \text{ } cumple \text{ } que \text{ } x = a^y, con \text{ } a > 0, a \neq 1$$

a: base

x: argumento

y: logaritmo

Para finalizar se analizó por qué eran necesarias las condiciones $\boldsymbol{a} > 0, \boldsymbol{a} \neq 1$.

Actividad: Variación de parámetro – Función logaritmo.

Con esta actividad se analizó como variaba el gráfico de la función logaritmo al modificar la base ***a***. Los alumnos trabajaron de a dos. A cada grupo se le entregaron las actividades en fotocopia y una computadora con el archivo correspondiente ya abierto.

Actividades.

Analizaremos como varía la gráfica de la función logaritmo al modificar la base "***a***".

1. Abran el archivo de GeoGebra llamado "Logaritmo". Utilicen el deslizador para hacer variar ***a***. Describan con sus palabras lo que sucede con la gráfica.
2. Respondan:
    a. ¿Para qué valores de ***a*** la función es creciente?
    b. ¿Para qué valores de ***a*** la función es decreciente?
3. Escriban en la casilla de entrada el valor 4, ***a*** = 4.
    a. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es igual a cero?
    b. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es mayor que cero?
    c. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es menor que cero?
4. Ahora, escriban en la casilla de estrada el valor 1/2, ***a*** = 1/2.
    a. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es igual a cero?
    b. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es mayor que cero?
    c. ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es menor que cero?
5. Completen el siguiente cuadro.

Función	**Base**	**Creciente o Decreciente**	**Raíz**	$y > 0$	$y < 0$	**Dominio**	**Imagen**
$y = \log_a x$	***a***>1	Creciente	1	***x***>1	0<***x***<1	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$
	0<***a***<1	Decreciente	1	0<***x***<1	***x***>1	$\mathbb{R}_{>0}$	$\mathbb{R}$

Para visualizar el applet "Logaritmo" ir a http://tube.geogebra.org/m/Dup471tl. En la Figura 16.1 y la Figura 16.2 se muestran capturas de pantalla del applet "Logaritmo".

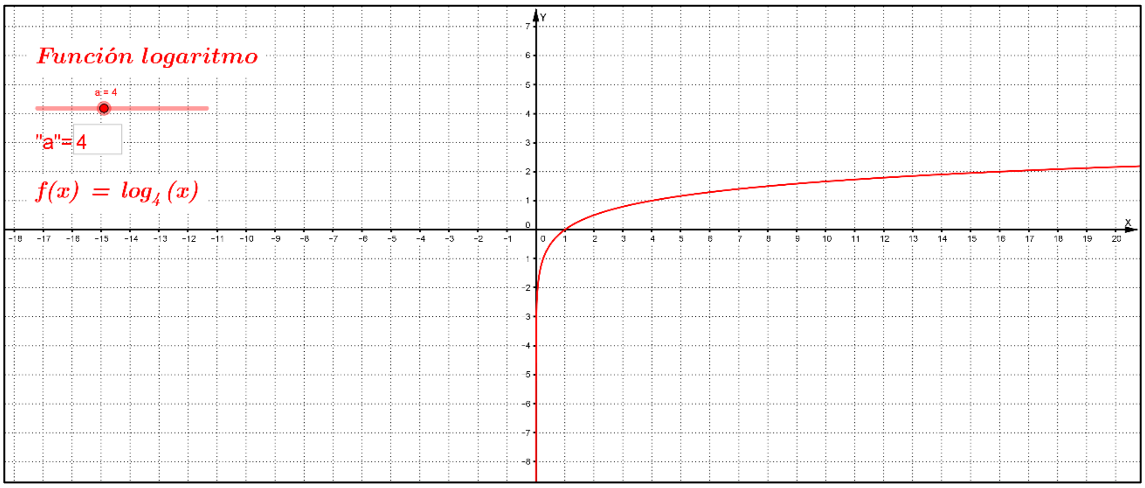


Figura 16.1: Captura de pantalla del applet "Logaritmo" ($\boldsymbol{a} > 1$)

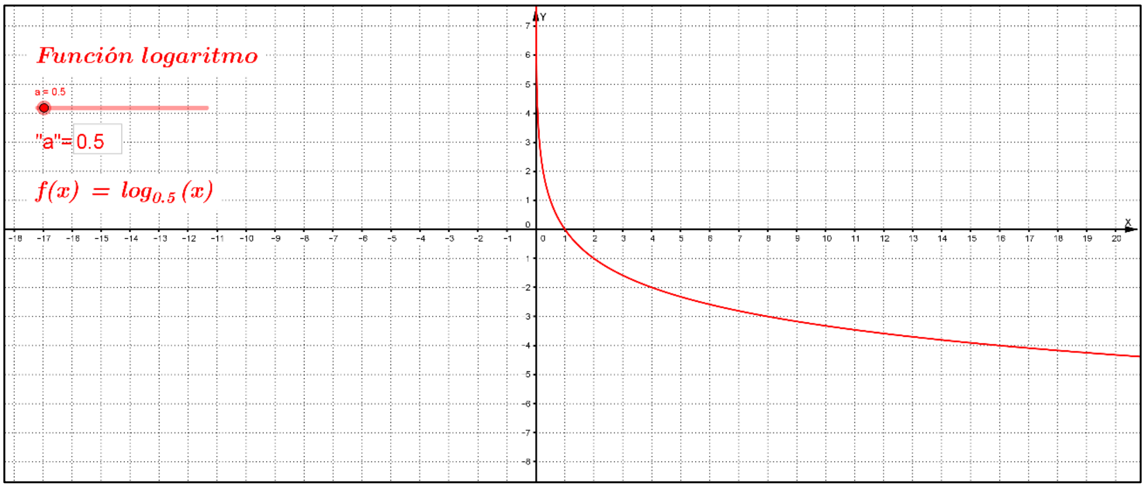


Figura 16.2: Captura de pantalla del applet "Logaritmo" ($0 < \boldsymbol{a} < 1$)

Para el ejercicio 3 se trabajaron con los estudiantes las siguientes definiciones de raíz de una función y de función positiva y función negativa:

La **raíz** de una función es el valor de ***x*** tal que ***y*** = 0. Gráficamente es el valor de ***x*** en el cual la gráfica y el eje ***x*** se cortan.

Una función es **positiva** cuando toma valores positivos, es decir, ***y*** > 0. Por lo tanto, el gráfico queda por encima del eje ***x***.

Una función es **negativa** cuando toma valores negativos, es decir, ***y*** < 0. Por lo tanto, el gráfico queda por debajo del eje ***x***.

En una misma función podemos encontrar intervalos donde la función sea positiva o negativa.

En el cuadro del último ejercicio fue completado trabajando entre todos durante una puesta en común. Así, se buscaba resumir en él la información obtenida en los ejercicios anteriores. En dicha puesta en común, además, se demostró que para la función $y = \log_a x$ la raíz siempre era 1 utilizando el siguiente razonamiento:

(Pues la raíz de una función es el valor de ***x*** tal que ***y*** = 0)

$$0 = \log_a x \iff x = a^0 \iff x = 1$$

(Cualquier número elevado a la cero siempre da 1)

(Por definición de inversa)

Guía de ejercicios – Función logaritmo.

En esta guía de ejercicios se trabajaron los siguientes contenidos: Función logaritmo y noción de función inversa.

<u>Guía de ejercicios n° 2</u>

1- Los siguientes gráficos corresponden a funciones logarítmicas cuya expresión general es $y = log_a x$

Para cada caso determinar:

a) Si son crecientes o decrecientes.

b) Cuál es el punto de corte con el eje ***x.***

c) Cuáles son los intervalos de positividad y negatividad.

d) Si 0 < ***a*** < 1 o ***a*** > 1

e) El dominio y la imagen.

Gráfico 1

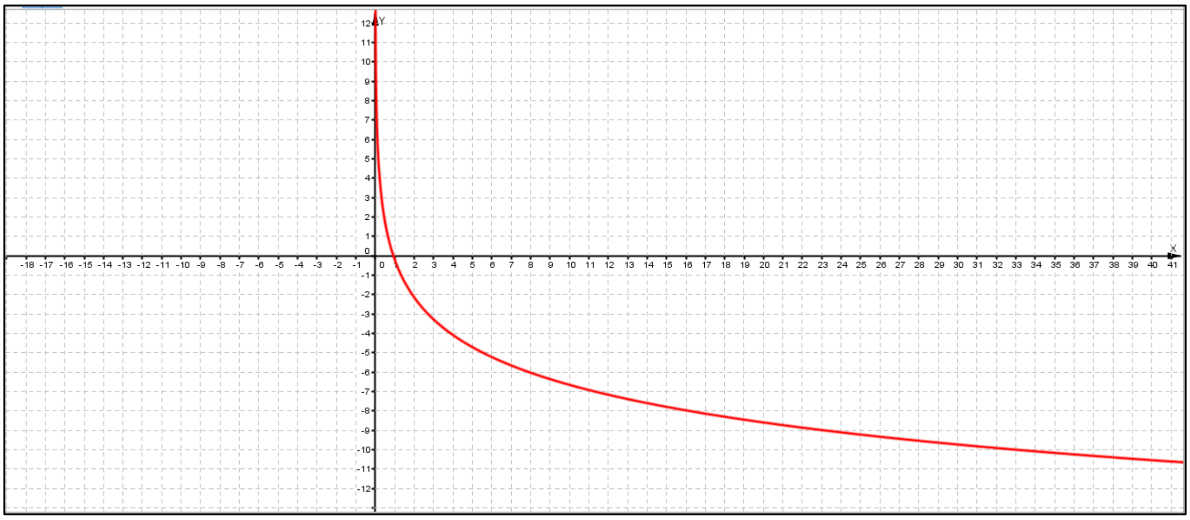
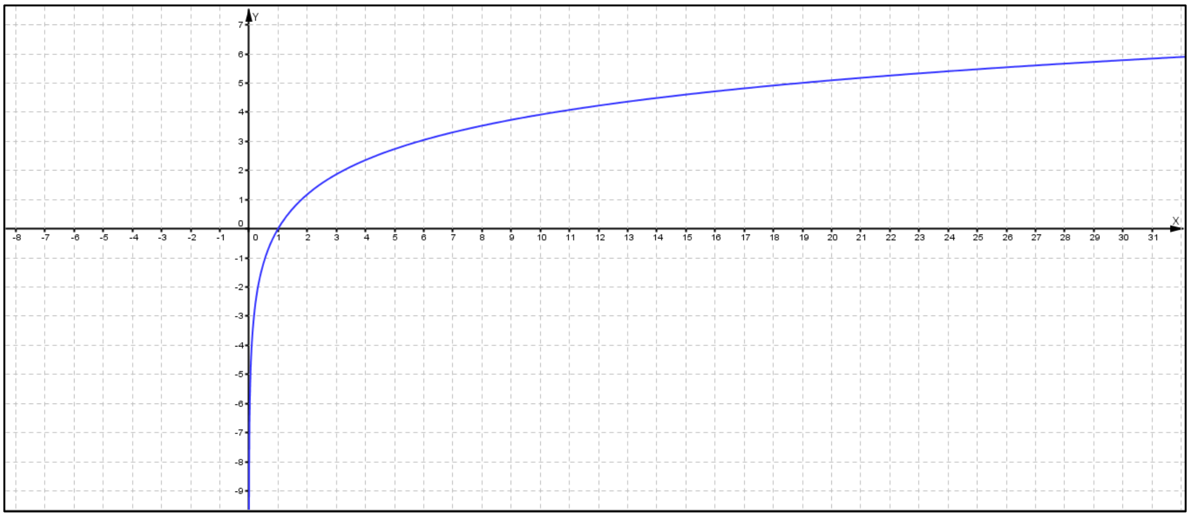


Gráfico 2



2- a) Dada la función exponencial $y = 3^x$

I. Encuentra la fórmula de su función inversa.

II. Grafica ambas funciones en GeoGebra introduciendo sus fórmulas en la barra de Entrada.

III. Analizando los gráficos, ¿Qué puedes decir de la simetría de estas funciones?

b) Repite I. II. III. para la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

c) Repite I. II. III. para la función $y = 3 \cdot 2^x$

3- Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

a) La función $y = 3^x$ es inversa de la función $y = log_4 x$.

b) La función $y = log_{0,34}\, x$ es creciente.

c) La función logarítmica $y = log_a x$, corta al eje ***y***.

d) La función $y = log_6 x$ es positiva para ***x*** > 1.

4- Calcular utilizando la definición.

a) $log_2 128 =$

b) $log_{10} 1000 =$

c) $log_5 625 =$

d) $log_{\frac{2}{3}} \frac{32}{243} =$

Para realizar el ejercicio 2 los alumnos trabajaron agrupados de a dos y utilizaron GeoGebra.

Para realizar el inciso ll. Se les indicó qué comando de GeoGebra debían utilizar para introducir la expresión de la función logaritmo en la Barra de *Entrada*: *y = log (<base>, < argumento>).*
Para responder al inciso lll. Los alumnos recurrieron a la herramienta “Simetría axial” de GeoGebra para verificar que la función exponencial dada y la función inversa encontrada eran simétricas. Así verificaron que la solución era correcta.

Actividades de repaso.

Una clase antes de la evaluación se realizó un repaso. Las actividades que se propusieron giraban en torno a la leyenda del origen del ajedrez.

Leyenda: El origen del ajedrez.

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Iadava. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo. Eso lo dejó profundamente triste y se aisló en su castillo reviviendo una y otra vez la batalla, recreándola de muchas formas, y en ninguna podía salvar a su hijo y a su reino al mismo tiempo. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarlo.
Un joven, llamado Lahur Sessa, que sabía el dolor que el rey sentía pidió una entrevista con él. Luego de muchos intentos logro que el rey lo atendiera. Cuando estuvo frente al rey abrió una caja y aparecieron ante él: un hermoso tablero de madera, con 64 casillas y 32 figuritas también de madera. Tras explicarle a su rey que era un juego de guerra en el que participaban dos personas, y explicarle sus reglas, se pusieron a jugar. Emocionado por el juego que acababa de descubrir, el rey jugó durante horas y días y semanas contra todos sus ministros, consejeros y todo aquel dispuesto a retarle. Sessa había logrado distraer y hacer feliz al rey.
El rey, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sessa que como recompensa pidiera lo que deseara: oro, joyas, un palacio. El joven se negó a pedir una recompensa, pero el rey insistía. Entonces pidió lo siguiente:
- *Deseo que mi recompensa sea en granos de trigo. Me darás dos grano de trigo para la primera casilla del tablero; cuatro para la segunda; ocho para la tercera; dieciséis para la cuarta; y así, doblando sucesivamente hasta la última casilla del tablero.*

El rey, extrañado porque alguien con tanta sabiduría, capaz de crear un juego como aquel, le pidiera tan poco, ordenó a sus ayudantes que calcularan el número total de granos de trigo y se los dieran a Sessa.

Imaginen que son los ayudantes del rey y calculen la cantidad de granos que deberían colocar en cada casilla del tablero para luego calcular la cantidad total de granos que deberían entregarle a Sessa.

Actividades.

1) Realicen una tabla de valores, en la "Hoja de cálculo" de GeoGebra, relacionando el número de casilla del tablero (hasta la número 6) con la cantidad de granos de trigo que le corresponde.
2) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente?
3) Grafiquen los datos obtenidos en la tabla.
4) Deduzcan la función que permite calcular la cantidad de granos de trigo que hay que colocar en cada casilla.
5) Grafiquen la función obtenida.
6) Calcular. Escriban las expresiones en sus carpetas y utilicen la barra "Entrada" para realizar los cálculos.
   a) ¿Cuántos granos habrá que colocar en la última casilla?
   b) ¿Cuántos granos habrá que colocar en la casilla número 16? ¿y en la casilla número 45? ¿y en la casilla número 56?
   c) ¿En qué número de casilla habrá que colocar 4194304 granos de trigo? ¿En qué número de casilla habrá que colocar 33554432 granos de trigo? ¿En qué número de casilla habrá que colocar 1125899906842624?
7) Encuentren la expresión de la función inversa.
8) Grafiquen la función inversa en la misma vista gráfica.
9) a) Supongamos que Sessa le pidió al rey que colocará 3 granos de trigo en la primera casilla y solicitó que se le llenara cada casilla del tablero con el triple de trigo que la casilla anterior ¿Cómo sería la función que modela la situación en este caso?

   b) Ahora, supongamos que Sessa le pidió al rey que colocará 5 granos de trigo en la primera casilla y solicitó que se le llenara cada casilla del tablero con el quíntuple de trigo que el cuadrito anterior ¿Cómo sería la función que modela la situación en este caso?

   c) Grafiquen las funciones obtenidas en a) y en b).

   d) ¿Qué cambio en las funciones obtenidas en a) y en b) en relación con la función obtenida inicialmente? ¿A qué se debe?

En las primeras cinco actividades se pretendía que los alumnos recordaran las herramientas y procedimientos necesarios para realizar tablas, graficar puntos a partir de una tabla e introducir fórmulas en la barra de entrada para graficar funciones. Además, se buscaba que pudieran justificar por qué las soluciones encontradas eran correctas.

La actividad 6 tenía como objetivo trabajar la noción de ecuación exponencial. Teniendo en cuenta la función encontrada en el punto 4) y a partir de las preguntas planteadas en el punto 6), los alumnos debían identificar, mirando las variables $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$, cuál era el dato y cuál representaba al valor desconocido. Así en el inciso c) se vieron obligados a utilizar la relación inversa entre exponencial y logaritmo resolviendo una ecuación exponencial.

En la última actividad los alumnos concluyeron que la base de la función exponencial dependía de la cantidad de granos que se colocaba en la primera casilla y de la relación que existía entre la cantidad de granos de una casilla y la siguiente.

2.2.7 La evaluación.

Para evaluar los aprendizajes de los estudiantes y como cierre de la unidad se tomó una evaluación integradora.

El desarrollo de nuestras prácticas estuvo fuertemente marcado por el trabajo grupal y la utilización de GeoGebra. Por lo tanto, se decidió dividir la evaluación en dos partes: una parte individual y una parte grupal donde los grupos utilizaran GeoGebra. Cada parte tenía como puntuación máxima 50 puntos. Los instrumentos de evaluación se encuentran en el Anexo ll. La nota final se sacaba de la suma de los puntos de las dos partes. La evaluación tuvo una duración de 80 minutos, 40 minutos cada parte.

Resultados.

En la Tabla 11 se presentan los resultados de la evaluación total en cada uno de los cursos:

	5º Año "A"	5º Año "B"
Cantidad de alumnos aprobados	13	21
Cantidad de alumnos desaprobados	3	3
Cantidad de alumnos ausentes	2	0
Total de alumnos	18	24

Tabla 11: Resultados de la evaluación total en cada uno de los cursos.

En los siguientes gráficos se muestran los resultados obtenidos en cada una de las partes y los resultados finales en cada uno de los cursos.

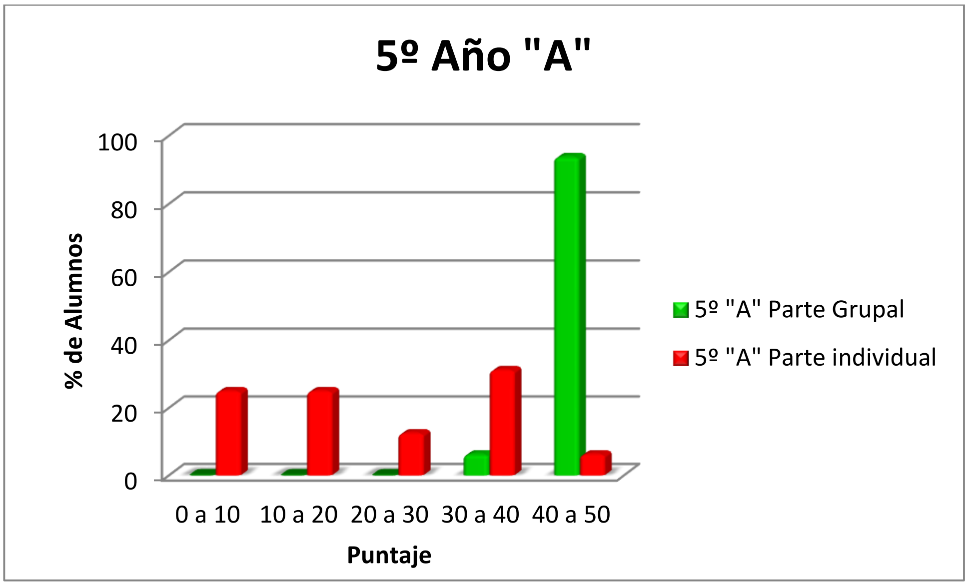


Figura 17.1: Histograma de puntajes obtenidos por los alumnos de 5º “A” en cada una de las partes.

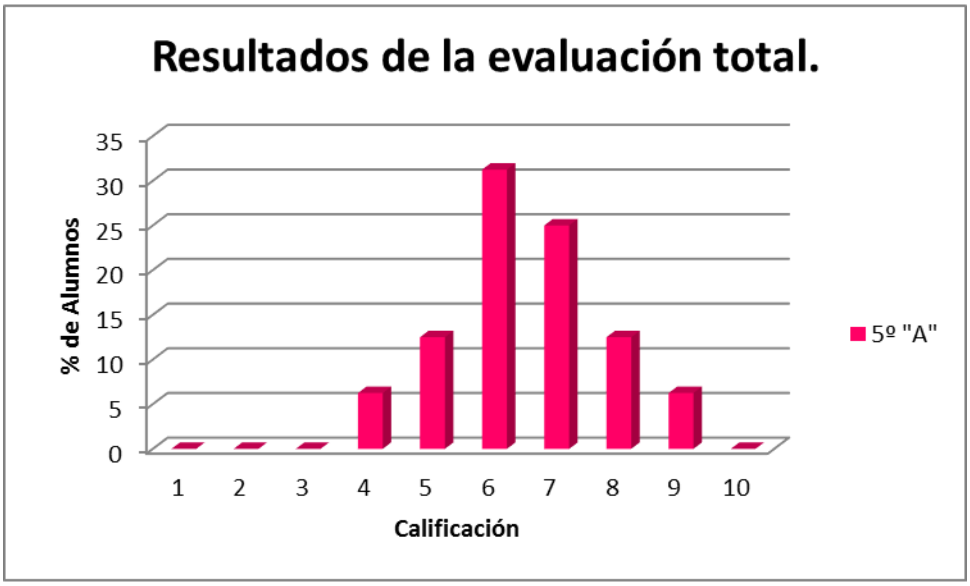


Figura 17.2: Histograma de calificaciones obtenidas por los alumnos de 5º “A” sumando la parte individual y la parte grupal.

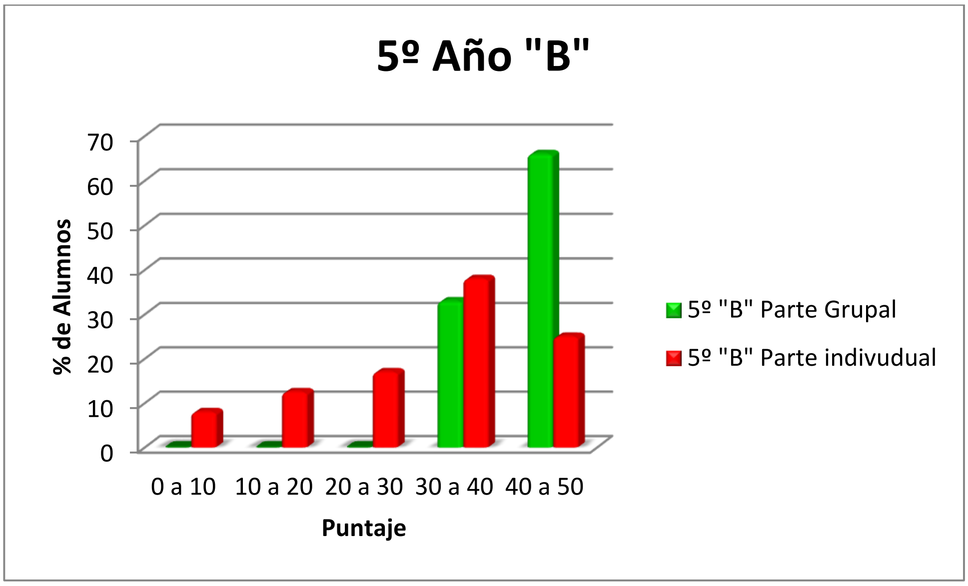


Figura 18.1: Histograma de puntajes obtenidos por los alumnos de 5º "B" en cada una de las partes.

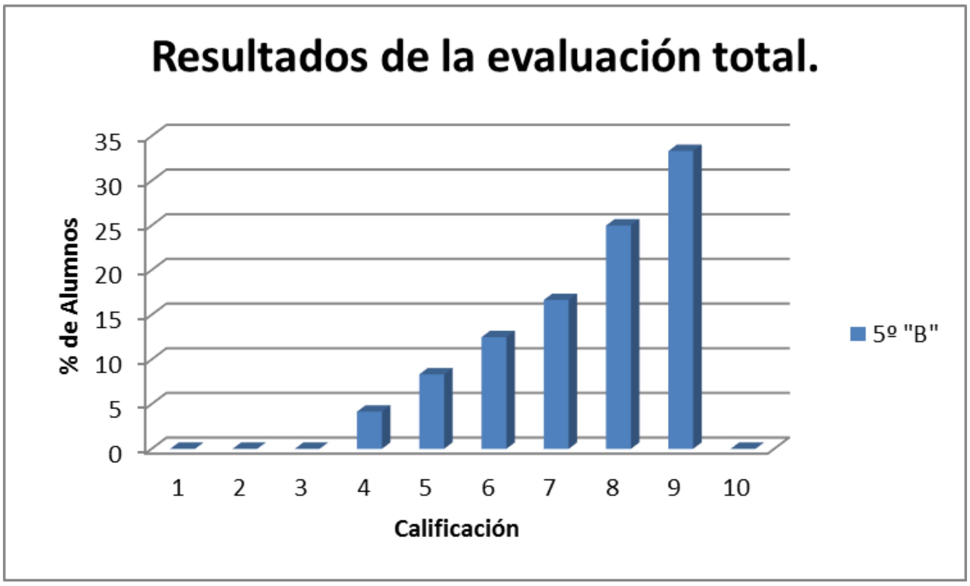


Figura 18.2: Histograma de calificaciones obtenidas por los alumnos de 5º "B" sumando la parte individual y la parte grupal.

En los primeros 40 minutos se tomó la parte grupal de la evaluación. Les dimos libertad a los alumnos para que se agruparan, la mayoría decidió trabajar con el compañero con el que resolvía las actividades en clases. Se les entregaron las consignas en fotocopia y una netbook por grupo. En esta parte se observó a los estudiantes muy involucrados con las actividades propuestas. Cumplido el tiempo guardamos todos los archivos con las soluciones de los alumnos en un pendrive. En los segundos 40 minutos se tomó la parte individual de la evaluación. Para ello, los alumnos separaron los bancos formando filas.

Analizando los histogramas de las figuras 17.1 y 18.1, donde se comparan los resultados de cada parte, podemos observar que en ambos cursos los alumnos se desempeñaron mucho mejor en la parte grupal.

Para corregir cada una de las partes de la evaluación creamos una grilla con los criterios a tener en cuenta. Para la parte grupal se utilizaron los mismos criterios de evaluación en ambos cursos (ver Tabla 12). Mientras que para corregir la parte grupal los criterios fueron diferenciados por curso teniendo en cuenta el desempeño de los estudiantes. En la Tabla 13.1 se muestran los criterios de evaluación para la parte individual de 5º "A" y en la Tabla 13.2 los criterios de evaluación para la parte individual de 5º "B".

Evaluación grupal				
Actividad 1	4p	4p		Realizan bien la tabla
Actividad 2	3p	3p		Identifican bien la variable
Actividad 3	4p	4p		Grafican bien los puntos
Actividad 4	10p	2p		Encuentran la función correcta
		8p		Realizan el procedimiento que permite encontrar la función
Actividad 5	6p	3p		Grafican bien la función
		3p		Justifican con GeoGebra
Actividad 6	6p	a)	2p	Escriben bien la expresión y el resultado
		b)	2p	Escriben bien la expresión y el resultado
		c)	2p	Escriben bien la expresión y el resultado
Actividad 7	3p	3p		Escriben bien la expresión y el resultado
Actividad 8	10p	2p		Encuentran la función inversa
		4p		Justifican con GeoGebra

Tabla 12: Grilla con los criterios de evaluación para la parte grupal.

Evaluación individual				
Ejercicio 1	8p	a)	4p	Identifica bien el tipo de función y justifica.
		b)	4p	Identifica bien el tipo de función y justifica.

Ejercicio 2	20p	a)	2.5p	Determina bien si es creciente o decreciente cada uno de los gráficos.
			0.8p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		b)	2.5p	Escribe bien los intervalos de positividad y negatividad de cada gráfico.
			0.8p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		c)	2.5p	Determina bien la asíntota de cada gráfico.
			0.8p	Justifica bien (por definición).
		d)	3p	Escribe bien el dominio y la imagen de cada gráfico.
			0.3p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		e)	2.5p	Determina bien los valores entre los que se encuentra ***a*** en cada uno de los gráficos.
			0.8P	Justifica bien (según cuadro resumen).
		f)	2.5p	Identifica bien la ordenada al origen y la raíz de cada uno de los gráficos.
			0.8p	Justifica bien (por definición).
Ejercicio 3	10p	a)	2p	Determina bien los parámetros (según el cuadro resumen).
		b)	2p	Escribe bien la ordenada al origen y justifica (según el cuadro resumen).
		c)	2p	Determina bien si es creciente o decreciente y justifica (según el cuadro resumen).
		d)	2p	Realiza bien el gráfico.
		e)	2p	Escribe bien el dominio e imagen.
Ejercicio 4	12p	a)	4p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.
		b)	4p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.
		c)	4p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.

Tabla 13.1: Grilla de criterios de evaluación para la parte individual de 5º "A".

Evaluación individual				
Ejercicio 1	8p	a)	4p	Identifica bien el tipo de función y justifica.
		b)	4p	Identifica bien el tipo de función y justifica.
Ejercicio 2	19p	a)	3p	Determina bien si es creciente o decreciente cada uno de los gráficos.

			1p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		b)	4p	Escribe bien los intervalos de positividad y negatividad de cada gráfico.
			1p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		c)	1.5p	Determina bien la asíntota de cada gráfico.
			0.5p	Justifica bien (por definición).
		d)	3p	Escribe bien el dominio y la imagen de cada gráfico.
			1p	Justifica bien (por definición o cuadro resumen).
		e)	1.5p	Determina bien los valores entre los que se encuentra ***a*** en cada uno de los gráficos.
			0.5	Justifica bien (según cuadro resumen).
		f)	3p	Identifica bien la ordenada al origen y la raíz de cada uno de los gráficos.
			1p	Justifica bien (por definición).
Ejercicio 3	13p	a)	2p	Determina bien los parámetros (según el cuadro resumen).
		b)	3p	Escribe bien la ordenada al origen y justifica (según el cuadro resumen).
		c)	3p	Determina bien si es creciente o decreciente y justifica (según el cuadro resumen).
		d)	3p	Realiza bien el gráfico.
		e)	1p	Escribe bien el dominio e imagen.
Ejercicio 4	10p	a)	4p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.
		b)	3p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.
		c)	3p	Determina bien si es verdadero o falso y justifica.

Tabla 13.2: Grilla de criterios de evaluación para la parte individual de 5º “B”.

CAPÍTULO 3

PROBLEMÁTICA

3.1 INTRODUCCIÓN.

A partir de lo realizado durante nuestra práctica docente, sentimos la necesidad de analizar y reflexionar sobre lo implementado y el modo en que se implementó. Es decir, regresar a la experiencia para reflexionar sobre nuestra práctica en relación a lo ocurrido en el aula. Nuestra intención es identificar aquellas situaciones que llamaron nuestra atención para poderlas analizar buscando así comprenderlas mejor.

Nuestras prácticas se centraron en el estudio de las funciones exponenciales y logarítmicas. A lo largo del Capítulo 2, se puede apreciar que en la mayoría de las actividades se utilizaron los diferentes modos de representar de una función: verbal, tabla, fórmula y gráfica. Entre estos tipos de representación, la gráfica estuvo presente del comienzo al fin. Las gráficas permitieron obtener información sobre las funciones exponenciales y logarítmicas y reflexionar sus propiedades y características. Además, las gráficas posibilitaron trabajar con los alumnos el concepto de función y ciertas nociones matemáticas ligadas a dicho concepto tales como la continuidad y la noción de función creciente y de función decreciente.

3.2 DELIMITACIÓN DE LA PROBLEMÁTICA.

En los párrafos siguientes describiremos algunas situaciones que ocurrieron en el aula y que nos interpelaron de distintas formas como docentes. Dichas situaciones comparten características comunes y será a partir de ellas que definiremos la problemática. La descripción de las situaciones que presentamos a continuación fue reconstruida a partir de los registros de clase de nuestra profesora supervisora.

La primera situación se presentó en ambos cursos durante la clase en la que se formalizó la definición de la función exponencial (clase Nº 3). Luego de la búsqueda de regularidades comunes a las soluciones de la actividad introductoria (ver pág. 32), se escribió en el pizarrón:

> **<u>Función exponencial.</u>**
>
> La expresión general de la función exponencial es:
>
> $$f(x) = k\mathrm{a}^x, con\ \mathrm{a} > 0, \mathrm{a} \neq 1\ y\ k \neq 0$$

Éstas funciones reciben éste nombre porque la variable independiente x aparece en el exponente.
Los parámetros ***a*** y k pertenecen al conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.
El número fijo ***a*** se llama base y la función así definida se denomina **función exponencial en base *a*** con **dominio $\mathbb{R}$.**

Cuando se dijo que ***a*** y ***k*** eran parámetros, los alumnos preguntaron ¿*Qué significa que sean parámetros*? En ese momento, y un poco desconcertados por esta pregunta que no habíamos considerado durante la planificación, respondimos que un parámetro es un valor numérico fijo que aparece en la fórmula de la función, intentando diferenciar la idea de parámetro con la de variables independientes y dependientes. Para explicar esto se escribió un ejemplo de función exponencial en el pizarrón y se indicó cuáles eran los parámetros ***a*** y ***k***. También se realizó una tabla de valores para ese ejemplo y se observó que ***x*** e ***y*** variaban mientras que los parámetros ***a*** y ***k*** para cada par (***x***, ***y***) se mantenían fijos.

La segunda situación surgió en la quinta clase de 5º "A". En las dos clases anteriores los alumnos habían trabajado con la Actividad de parámetros-Función exponencial. La quinta clase se llevó a cabo en sala de video y consistió en una presentación Power Point de un resumen de lo visto sobre función exponencial. Esta actividad se planificó durante la marcha de las prácticas porque se observó que los alumnos estaban un poco desorientados y porque muchos de ellos habían faltado a la clase anterior.
La presentación comenzó con la definición de función exponencial. Como ejemplo se dieron las funciones correspondientes a las situaciones analizadas la primera clase:

$$f(x) = 2^x \quad f(x) = 3^x \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \quad f(x) = 3 \cdot 2^x$$

Vimos que tenían en común que la variable ***x*** estaba en el exponente, pero que sus bases eran diferentes y además la última función tenía un 3 multiplicado.
Por lo tanto, concluimos que la expresión general de la función exponencial era:

$$f(x) = k \cdot a^x$$

Donde ***a*** y ***k*** eran parámetros, ***a*** representaba a la base y ***k*** a la constante multiplicada.
Recordamos las condiciones para los parámetros ***a*** y ***k***:

$$k \neq 0, a > 0 \ y \ a \neq 1$$

Luego, se les dijo que para cada ***a*** y cada ***k*** diferentes se obtienen diferentes funciones exponenciales y, por lo tanto, diferentes gráficos.

Luego, repasamos qué sucedía con el gráfico al variar ***a***, considerando ***k*** = 1. Vimos que cuando ***a*** > 1 la función era creciente y cuando 0 < ***a*** < 1 la función era decreciente. Después, vimos que ***k*** determinaba la imagen de la función y, además, que el valor de ***k*** coincidía con el valor de ***y*** cuando ***x*** era cero. Por lo tanto, ***k*** era la ordenada al origen de la función exponencial $f(x) = k \cdot a^x$.

Entonces se dijo que con esta información era posible realizar un esbozo de la gráfica de la función. Entonces una alumna preguntó: ¿*Qué es un esbozo*? Nuevamente desconcertados ante la pregunta la respuesta que dimos fue que era un gráfico aproximado de la función. Así, resaltamos que con la siguiente información podríamos saber más o menos cómo es el gráfico de la función:

- Si ***a*** > 1 y **k** > 0 la función es creciente;
- Si 0 < ***a*** < 1 y **k** > 0 la función es decreciente;
- Si 0 < ***a*** < 1 y **k** < 0 la función es creciente;
- Si ***a*** > 1 y **k** < 0 la función es decreciente;
- **k** representa a la ordenada al origen

Esta información se complementó con un gráfico donde se muestran los cuatro casos (ver Figura 19)

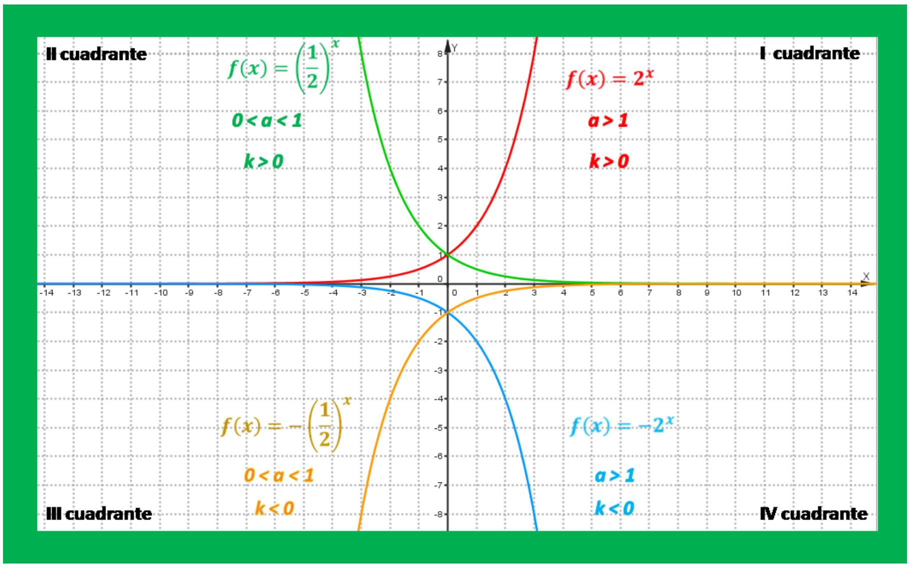


Figura 19: Gráfico donde se muestran los cuatro casos posibles para los parámetros ***a*** y ***k***.

¿*Qué representa **a** en el gráfico*? Preguntó la misma alumna. A lo que se respondió que junto con ***k***, determinaban si la función era creciente o decreciente.

La tercera situación ocurrió en 5º "B" durante la resolución de la Guía de ejercicios Nº 1 (pág. 41). Para resolver el ejercicio 2 se le pidió a un alumno que pasara al frente y que hiciera un esbozo de la gráfica de la función $f(x) = -5 \cdot (0.8)^x$. Él marcó la ordenada al origen y sabiendo que ***k*** < 0 y 0 < ***a*** < 1 determinó que la función era creciente. Pero al realizar el esbozo hizo un gráfico con características similares al que se observa en la Figura 20:

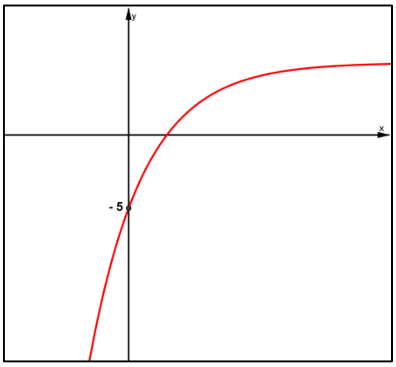


Figura 20: Recreación del gráfico que realizó un alumno de la función $f(x) = -5 \cdot (0.8)^x$.

Él intentó identificar a la intersección de la curva con el eje ***x*** con el valor de ***a*** (en este caso 0.8). Con ayuda del practicante a cargo, el alumno pudo hacer bien el esbozo de la gráfica. Otro alumno pregunto entonces: ¿*Cómo sabemos en qué punto tiene que curvarse la gráfica*? La respuesta fue que eso no importaba porque era un esbozo, un gráfico aproximado de la función. *¡Ah como un croquis!* Exclamó una alumna. Un tercer alumno intervino en ese momento: ¿*El 0.8, de qué me serviría en el gráfico*? Para responder, se relacionó el esbozo realizado con el cuadro resumen y se dijo que el valor de ***a***, junto con el de ***k***, determinaba si la función era creciente o decreciente. Siguiendo con la línea de su compañero un cuarto estudiante preguntó: ¿*No me sirve para saber dónde doblar la curva o algo por el estilo* [se refiere al 0.8]?
Entonces, se dio otro ejemplo de una función con los parámetros enteros, se realizó un gráfico determinando algunos puntos en una tabla de valores y se graficó la curva que pasaba por esos puntos. Luego, se les dijo que determinando unos pocos puntos podían saber cómo se "curvaba el gráfico" de la función.

*¿Qué significa que sean parámetros? ¿Qué es un esbozo? ¿Qué representa **a** en el gráfico? ¿Cómo sabemos en qué punto tiene que curvarse el gráfico? ¿El 0.8, de qué me serviría en el gráfico? ¿No me sirve para saber dónde doblar la curva o algo así?* Todos estos interrogantes surgieron de los alumnos a partir de la propuesta de esbozar la gráfica de una función interpretando los parámetros de su fórmula. Esta situación, a su vez, derivó en la necesidad por parte de los alumnos de encontrarle un sentido al parámetro ***a*** en el gráfico.

Todas estas preguntas también generaron una cierta inquietud en nosotros. Observábamos que, aunque se dieron respuestas a dichas preguntas, no lográbamos convencer del todo a los estudiantes.

Las situaciones antes descriptas son el punto de partida para nuestra problemática.

Enunciamos la problemática a través de la siguiente pregunta general:

¿Qué dificultades/desafíos plantea la traducción desde una fórmula a un gráfico en el caso de las funciones exponenciales y logarítmicas?

A partir de esta pregunta planteamos otras tres preguntas fuertemente relacionadas entre sí:

- ¿Qué es un parámetro de una función?
- ¿Qué es un esbozo de una gráfica? ¿Qué significa construir un esbozo de un gráfico?

Para buscar respuestas a estos interrogantes comenzaremos estudiando los procesos de traducción entre los modos de representación de una función en los que los estudiantes se involucraron identificando las dificultades que enfrentaron. Seguidamente, describiremos los diferentes usos de los gráficos que ocurrieron en nuestras prácticas. Estos dos primeros puntos están vinculados con nuestra pregunta general. Luego, nos centraremos en las preguntas referidas a parámetros y esbozo. Todo este trabajo nos permitirá, al final del capítulo, volver a reflexionar acerca de las respuestas que dimos y las decisiones que tomamos durante nuestras prácticas frente a estas situaciones que nos interpelaron.

3.3 PROCESOS DE TRADUCCIÓN ENTRE LOS MODOS DE REPRESENTACIÓN DE LA FUNCIÓN.

El concepto de función es esencial en matemática y en las ciencias ya que permite, entre otras cosas, modelizar numerosas situaciones de la vida real. Para expresar el concepto de función existen diferentes tipos de representaciones. Una función puede estar representada por:

Descripción verbal: la relación entre dos variables se presenta en el lenguaje natural. Esta descripción puede estar acompañada por un dibujo o esquema.
Tabla: la función se expresa por medio de una tabla de valores.
Gráfica: la función se representa con una curva en el plano cartesiano.
Fórmula: expresión algebraica de la función.

En algunas de las actividades realizadas en la práctica, les planteamos a los estudiantes tareas que requerían ir traduciendo de una representación a otra.

En la Actividad introductoria-Función exponencial (ver pág. 26) cada situación estaba descripta verbalmente o a través de un dibujo o esquema, como era el caso de los applets. Seguidamente, los alumnos debían confeccionar una tabla de valores, donde se podía observar la relación de correspondencia, partiendo de una serie de preguntas relacionadas con el esquema. Esta tabla era limitada ya que incluía unos pocos valores. Después, había que graficar los puntos a partir de la tabla. Hasta aquí los alumnos habían partido una descripción verbal que tradujeron a una tabla y luego, de la tabla al gráfico de puntos. La siguiente traducción era encontrar la fórmula. Para deducirla se valieron principalmente de la tabla. Esta traducción fue la más compleja para los alumnos dado que implicaba un trabajo algebraico a partir del trabajo con pares concretos ***x***, ***y***. Por último, obtuvieron la curva que modelizaba la situación. En el siguiente esquema se muestra el proceso de traducción que los alumnos realizaron:

Expresión verbal → Tabla → Gráfico de puntos → Fórmula → Gráfico de la curva

El trabajo con los diferentes tipos de representación y las traducciones entre ellos se vio favorecido por el uso de GeoGebra, permitiendo visualizar las diferentes representaciones al mismo tiempo. De esta, teníamos en una misma ventana la representación gráfica, la tabla y la expresión algebraica.

Esta sucesión de traducciones también fue realizada en la actividad de repaso "Leyenda del origen del ajedrez" y en la evaluación parte grupal.

En el ejercicio 3 de la parte individual de la evaluación (ver Anexo ll) también involucró una traducción entre dos de las representaciones de la función. Dada la expresión algebraica de una función exponencial, había que identificar y analizar los parámetros. A partir de allí se debía determinar si la función era creciente o no. Haciendo uso de esta información, se les pedía a los alumnos hacer el gráfico aproximado, el esbozo, de la función dada. Así, en este caso la traducción era desde la representación en fórmula a la expresión gráfica.

Fórmula → Gráfico

De acuerdo con los resultados obtenidos en este ejercicio, podemos clasificarlos de la siguiente manera:

- Determinaron bien la ordenada al origen, el crecimiento y graficaron bien.
- Determinaron bien la ordenada al origen y el crecimiento pero no graficaron.
- Determinaron bien la ordenada al origen y el crecimiento pero graficaron mal.
- Determinaron bien la ordenada al origen y mal el crecimiento pero graficaron bien.
- Identificaron bien la ordenada al origen, determinaron mal el crecimiento y no graficaron.
- Identificaron bien la ordenada al origen, determinaron mal el crecimiento y graficaron mal.
- Identificaron bien la ordenada al origen, no determinaron el crecimiento y graficaron mal.
- Identificaron mal la ordenada al origen, no determinaron el crecimiento y graficaron mal.
- No realizaron el ejercicio.

Como observación general se puede decir que una gran cantidad de alumnos pudo identificar bien la ordenada al origen pero muchos tuvieron dificultad para determinar el crecimiento y graficar. Entre los que lograron identificar bien la ordenada al origen y bien el crecimiento realizaron mal el esbozo o directamente no grafiaron. Otros, a pesar de que determinaron mal el crecimiento, graficaron bien. Entre los esbozos realizados, la mayoría tenía la forma de la curva exponencial. Los que más llamaron nuestra atención fueron aquellos gráficos en los que los estudiantes marcaron la ordenada al origen sobre el eje ***y*** e hicieron un punto sobre el eje ***x*** cuya abscisa coincidía con el valor de ***a*** Luego, esbozaron una curva que pasaba por esos dos puntos. Por ejemplo, una alumna hizo un esbozo similar al que se muestra en la Figura 21 para la función $f(x) = -8 \cdot 4.5^x$:

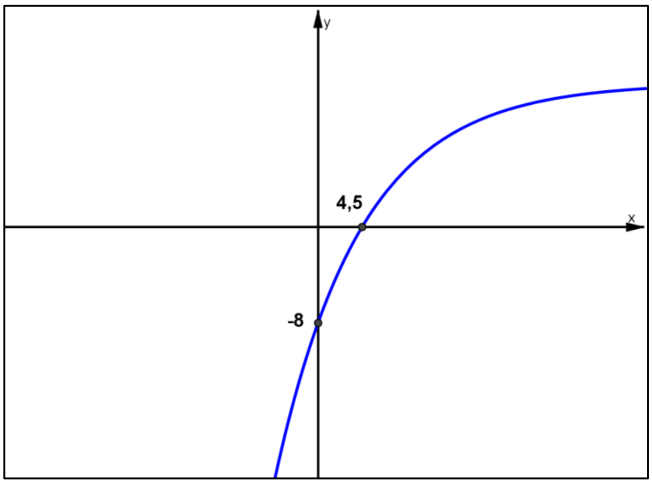


Figura 21: Recreación del gráfico que realizó una alumna de la función $f(x) = -8 \cdot 4.5^x$

La alumna identificó bien la ordenada al origen y determinó correctamente que la función era decreciente. Sin embargo, realizó mal el esbozo. Lo llamativo es que le dio una ubicación al valor de ***a***, lo que la llevó a graficar de esa forma.

Queremos resaltar que la traducción entre diferentes formas de representación fue importante en la enseñanza y en el aprendizaje de las funciones exponenciales y logarítmicas durante nuestras prácticas. Dicha traducción permitió que el alumno aprecie el comportamiento de la función desde diversas formas, observando cómo una misma situación podía ser representada de modos diferentes.

Además, cada modo de representación permitió sacar conclusiones y formular generalizaciones de distinto carácter. Por ejemplo, en la búsqueda de regularidades entre las diferentes situaciones problemáticas de la actividad introductoria, en las tablas de valores se pudo establecer y observar la correspondencia entre las variables. Observando y analizando las distintas expresiones algebraicas que se construyeron a partir de cada situación se concluyó que el exponente era la variable independiente y esto permitió introducir la expresión general de la función exponencial. La representación gráfica permitió apreciar de manera directa las características generales de las funciones exponenciales que modelizaban a cada situación problemática.

Analizando las diferentes traducciones entre las diferentes representaciones de una función que los estudiantes tuvieron que enfrentar podemos decir que hubo traducciones que les resultaron más complejas. Entre ellas la traducción de la tabla a la fórmula y la traducción de la fórmula al gráfico a través de la interpretación de los parámetros.

3.4 USOS DE LOS GRÁFICOS.

En el texto *Las funciones en los gráficos cartesianos* de Eduardo Lacasta Zabalza y José Ramón Pascual Bonis (1998), los autores analizan las diferentes posibilidades de tratamiento de las funciones y su gráfica. Afirman que las representaciones gráficas desempeñan un papel determinante en el proceso de estudio de las funciones e identifican los posibles funcionamientos de los gráficos de las funciones en el aprendizaje de las nociones matemáticas. Algunos de los usos que allí se describen son:

- **Funcionamiento como ábaco:** el gráfico funciona como un instrumento que permite obtener gráficamente el valor de ***y*** para ***x*** dadas y viceversa.
- **Funcionamiento como mensaje topológico:** el gráfico sirve como soporte de características (crecimiento, concavidad, positividad y negatividad, etc.) de funciones genéricas. Se observa al gráfico como una curva referida a los ejes, es decir que no es necesario tener los ejes graduados.
- **Funcionamiento como ideograma:** el gráfico representa una idea de cómo es la gráfica de una función que, si bien contiene los puntos críticos y elementos característicos de un tipo

de función, no sirve para hacer un estudio punto a punto (uso como ábaco) ni para analizar las propiedades del gráfico (uso topológico).

- **Funcionamiento como elemento interactivo:** el gráfico funciona como un instrumento *no algorítmico*, es decir que el alumno debe interactuar con el gráfico para descubrir cómo usarlo, para dar respuesta a un problema, y no involucra procedimientos de rutina que él ya conoce. Según Zabalza & Bonis (1998), "*el mensaje necesario para la resolución* [de la tarea] *no está directamente en el gráfico* [a diferencia del uso como ábaco, mensaje topológico o ideograma]*, es el alumno el que debe construirlo"* (p. 133).

Teniendo en cuenta esta clasificación, haremos un análisis de los diferentes usos de los gráficos que se pusieron en marcha durante nuestras prácticas.

Funcionamiento como ábaco en nuestra práctica docente.

Según Zabalza & Bonis (1998), "*el funcionamiento como ábaco del gráfico aparece cuando los alumnos usan el gráfico como instrumento para obtener gráficamente **y** para **x** dadas [lectura directa] y viceversa [lectura inversa]"* (p. 116). Los gráficos obtenidos por los alumnos en la primera actividad realizada fueron utilizados como ábaco para repasar la noción de función. Se tomaban diferentes valores de ***x*** y se verificaba que existía un único valor de ***y*** asociado. Cuando se explicó la noción de asíntota (ver pág. 39), en la gráfica de la función exponencial del ejemplo que se mostraba en el applet "Asíntota", se podía observar que cada valor de ***x*** se relacionaba con un valor de ***q***ue se hacía cada vez más pequeño pero que nunca daba cero. Por lo tanto, aquí también se utilizó el gráfico como ábaco. Otra ocasión en la que se utilizó del mismo modo, fue en la lectura que los alumnos hacían del gráfico para determinar si la función era creciente o decreciente. A medida que iban tomando valores más grandes para ***x***, determinaban si los valores de ***y*** aumentaban o disminuían. En las tres situaciones antes mencionadas, la lectura era directa, es decir, a partir de los valores de ***x*** se determinaba gráficamente los valores de ***y*** correspondientes.
También hubo situaciones en las que se realizó una lectura inversa del gráfico como ábaco. La Actividad introductoria-Función logaritmo (ver pág. 44) tenía como objetivo introducir la noción de función logaritmo como función inversa de la función exponencial. Para responder las preguntas del inciso 2) era necesario utilizar el gráfico como ábaco. El gráfico utilizado fue el obtenido en la actividad "Tiras de papel" en el que se relacionaba el número de cortes (***x***) con la cantidad de tiras de papel obtenidas (***y***). A partir de la observación de dicho gráfico, los alumnos debían encontrar el valor de ***x*** (el número de cortes) dado el valor de ***y*** (cantidad de tiras de papel). Luego, debían registrar en forma de tabla los datos obtenidos. Después de

realizar la tabla de valores, los alumnos comparaban ésta última con la tabla asociada a la gráfica de la función exponencial con la que estaban trabajando. Para ellos ambas tablas eran "iguales" con las columnas intercambiadas de lugar. Para salvar esta dificultad se compararon las preguntas que dieron origen a cada una de las tablas. En las preguntas que dieron origen a la tabla de la función exponencial se daba como dato el número de cortes y se debía calcular la cantidad de tiras de papel que se obtenían. En las nuevas preguntas se daba como dato la cantidad de tiras de papel que se deseaban obtener y se debía obtener, gráficamente, la cantidad de cortes necesarios para una dada cantidad de tiras. Finalmente, al graficar los nuevos puntos quedó claro que las tablas no eran iguales.

Se puede percibir que para los alumnos la lectura directa fue más fácil que la lectura inversa. Zabalza & Bonis (1998) dan la siguiente justificación de este hecho, con la que coincidimos:

*"En efecto, tras la lectura directa del ábaco se encuentra la sustitución de **x** en la función como conocimiento matemático, mientras que tras la lectura inversa, se tiene el concepto de función inversa, que es un conocimiento de otro nivel"* (p. 119).

También se realizó una lectura inversa del gráfico como ábaco en la Actividad de parámetros-Función logaritmo (ver pág. 48). Los alumnos trabajaron con un applet de GeoGebra en el que debían analizar la gráfica de la función logaritmo para diferentes valores de ***a*** para resolver las actividades. En los incisos 3) y 4), para diferentes valores de ***a***, se preguntaba lo siguiente: ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es igual a cero? ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es mayor que cero? ¿Para qué valores de ***x***, ***y*** es menor que cero? Los alumnos a partir de la observación del gráfico, podían responder que valores tomaba ***x*** para los valores de ***y*** dados.

Funcionamiento del gráfico como mensaje topológico en nuestra práctica docente.

Los diferentes gráficos obtenidos por los alumnos en la Actividad introductoria-Funciones exponenciales, fueron utilizados para determinar ciertas regularidades de entre las funciones que modelizaban las distintas situaciones problemáticas (ver pág. 26), entre ellas: todas las funciones eran continuas, tenían como dominio al conjunto de los números reales, y tenían como representación gráfica una curva. De esta manera, se obtuvieron las características generales de las funciones exponenciales.

Las guías de ejercicios y la evaluación incluían actividades donde se les pedía a los alumnos que realizaran un análisis global de los gráficos presentados, ya sea de la función exponencial o de la función logaritmo. De esta manera, debían obtener información a partir del gráfico vinculada con: el crecimiento y/o decrecimiento, los intervalos de positividad de intervalos de negatividad, el dominio y la imagen, etc.

En todas estas situaciones, el gráfico fue utilizado como soporte para identificar características de orden topológico de las funciones exponenciales y topológicas, es decir, el gráfico funcionó como mensaje topológico.

Funcionamiento como ideograma en nuestra práctica docente.

En el ejercicio 3 de la parte individual de la evaluación (ver Anexo II) los alumnos debían realizar un gráfico aproximado de la función dada, para ello debían identificar primero los puntos característicos y algunas propiedades. En este gráfico se podía observar la ordenada al origen como punto característico y algunas propiedades topológicas como por ejemplo, continuidad, crecimiento, dominio e imagen. Podemos concluir que en esta actividad el gráfico funcionó como ideograma.

Funcionamiento como elemento interactivo en nuestra práctica docente.

Podemos decir que en los ejercicios 1 y 2 de la Actividad de parámetros–Función exponencial (ver pág. 35) el gráfico se utilizó como elemento interactivo. Dichas actividades planteaban preguntas como: ¿Para qué valores de ***a*** la función es creciente? ¿Para qué valores de ***a*** la función es decreciente? El alumno al mover el deslizador para cambiar el valor de ***a*** observaba cómo variaba el gráfico, obteniendo un gráfico diferente para cada valor de ***a***. La respuesta a las preguntas no estaba directamente en los gráficos, los alumnos debían actuar, explorar los gráficos y sacar sus propias conclusiones. Además, el método para encontrar las respuestas no fue enseñado, era la primera vez que se enfrentaban a una tarea de este tipo. Ellos debían descubrir, a través de la interacción directa con los gráficos, la manera de resolver la actividad.

3.5 PARÁMETROS Y ESBOZO.

En esta sección nos abocaremos a profundizar en las tres preguntas secundarias que emergieron de la pregunta general de nuestra problemática.

¿Qué es un parámetro en una función?

Para comenzar nuestro análisis indagaremos sobre las diferentes acepciones que existen de la noción de parámetro desde diferentes fuentes.

Al buscar el significado de esta palabra en Google encontramos que comúnmente, se considera como parámetro al elemento o dato importante desde el que se examina un tema, cuestión o asunto. Así parámetro es un **dato** que se considera como **imprescindible** y

orientativo para lograr evaluar o valorar una determinada situación. A partir de un parámetro, una cierta circunstancia puede comprenderse o ubicarse en perspectiva. Por lo tanto en esta acepción se está considerando al parámetro como un valor fijo que sirve de referencia para ubicar otros.

Mientras que en matemática un parámetro es:

- Según definición de Google: variable que aparece en una ecuación cuyo valor se fija a voluntad.
- Según la RAE: variable que, en una familia de elementos, sirve para identificar cada uno de ellos mediante su valor numérico.

En la primera definición, considera al parámetro como una variable, es decir que puede tomar diferentes valores, pero que es fijado a voluntad.
En la segunda definición un parámetro es una variable, donde cada uno de sus valores identifica a cada elemento particular, es decir, que existe una relación entre un valor numérico y un elemento no numérico.

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto y a partir de nuestras reflexiones podemos dar una conceptualización de la noción de parámetro. Un **parámetro en una función** es una variable de segundo nivel, se trata de una relación que vincula valores numéricos números con familias de fórmulas y, por ende, también de gráficos.

Yves Chevallard [citado en Chevallard, Bosch & Gascón, 1997] considera a la noción de parámetro como una noción paramatemática:

> *"El término de noción paramatemática se debe a Chevallard (1985) y es una noción relativa a la institución que se considera. Así, podemos decir que" demostración", "parámetro" y "ecuación" son nociones paramatemáticas dentro de la matemática enseñada actual (a nivel secundario) donde dichas nociones se utilizan como herramientas transparentes, no cuestionables.(…) En la enseñanza secundaria de las matemáticas, estas nociones no se toman como objeto de estudio"*.

Entonces un mismo objeto matemático puede ser tratado de diferentes maneras: si es objeto de estudio se considera noción matemática, mientras que si es utilizado como una herramienta para definir o desarrollar otros objetos matemáticos se considera noción paramatemática.

¿Qué es un esbozo de una gráfica? ¿Qué significa construir un esbozo de una gráfica?

La idea de esbozo está muy ligada al arte. En el diccionario aparece la noción de esbozo como un diseño o proyecto provisional de una obra artística, que solamente contiene los elementos esenciales. Esta palabra es considera sinónimo de bosquejo, idea vaga de algo, y de croquis, diseño hecho sin precisión ni detalles.

A partir de estas ideas y de nuestras reflexiones podemos ahora dar una mejor conceptualización de la noción de esbozo. El esbozo de una gráfica de una función da una idea de cómo sería el gráfico. Si bien es realizado sin precisión, contiene los elementos característicos de la función. Por lo tanto, para poder esbozar un gráfico de una función es necesario conocer sus elementos característicos. En las funciones exponenciales y logarítmicas, en particular, estos elementos serían la ordenada al origen o raíz, su crecimiento, la asíntota y la forma general de la curva. Estos puntos y características están determinados por los parámetros de la expresión algebraica de la función. En el caso de la función exponencial la expresión general con la que se trabajó fue $f(x) = k \cdot a^x$. El parámetro ***k*** representa a la ordena al origen y definen la imagen de la función. Los parámetros ***k*** y ***a*** determinan su crecimiento. Al ser una función exponencial se puede inferir la forma general de la curva. Finalmente la asíntota horizontal es ***y*** = 0. Con saber esto era suficiente para hacer el esbozo de una función exponencial. Pero a partir de que el parámetro ***k*** representaba a la ordenada al origen, los estudiantes sentían la necesidad de encontrarle un sentido al parámetro ***a*** en el gráfico. Esto se vio reflejado en las preguntas realizadas por los alumnos: *¿Qué representa **a** en el gráfico? ¿Cómo sabemos en qué punto tiene que curvarse el gráfico? ¿El 0.8, de qué me serviría en el gráfico? ¿No me sirve para saber dónde doblar la curva o algo así?* Esta idea también estaba presente en el esbozo realizado por el alumno en el pizarrón y en los resultados del ejercicio 3 de la evaluación, donde los alumnos representaron el valor de ***a*** en el eje ***x***.

Volviendo a reflexionar sobre nuestra práctica.

A partir de la reflexión acerca de qué es un parámetro y haciendo una mirada retrospectiva de nuestro trabajo, podemos decir que la definición que se dio en un principio, cuando se definió función exponencial, fue acotada: "*parámetro es un valor numérico fijo que aparece en la fórmula de la función*". Si bien es cierto que en una función particular el parámetro está fijado, en la expresión general de la función exponencial los parámetros no son fijos, son variables y generan una familia de funciones exponenciales. En la clase del Power Point se explicó que para cada valor diferente de ***a*** y de ***k*** se obtenían diferentes fórmulas (y gráficos), la noción de parámetro estaba por detrás, sin embargo no se trabajó explícitamente.

En las guías de parámetros, los mismos fueron herramientas utilizadas para poder analizar el comportamiento gráfico de las funciones exponenciales y logarítmicas, como dice Chevallard, fueron utilizados como nociones *paramatemáticas,* nos centramos más en analizar lo que sucedía con los gráficos y no tanto en los parámetros.

Antes de comenzar con la guía de parámetros podríamos haber aprovechado los applets para trabajar la idea de parámetro haciendo una introducción explícita de esta noción. Podríamos haberles mostrado que variando los parámetros se obtenían diferentes fórmulas y, por ende, diferentes gráficos. El applet hubiese sido una buena herramienta para este trabajo ya que permitía ver de manera dinámica este hecho.

En cuanto a la manera en que se definió y trabajó la idea de esbozo en las clases, en ese momento podríamos haber trabajado más explícitamente la idea de qué es hacer un esbozo, y trabajar la idea de puntos característicos y el rol de los parámetros en ellos.

CAPÍTILO 4

REFLEXIONES FINALES

El camino transitado durante nuestras prácticas profesionales fue largo y agobiante, pero valió la pena recorrerlo ya que al transitarlo vivimos nuestra primera experiencia como profesores y adquirimos muchos aprendizajes. El camino constó de tres tramos: observación, planificación y puesta en práctica.

El periodo de observaciones nos permitió conocer a los estudiantes, saber qué conocimientos matemáticos previos poseían, cómo trabajaban en la clase de matemática, percibir como la profesora organizaba la clase de matemática y explorar la institución. Esto fue muy positivo e importante para el desarrollo de nuestra planificación de la enseñanza.

La etapa de planificación de las clases fue muy agotadora pero linda a la vez. Agotadora porque no es una tarea a la que estamos acostumbrados, fue necesario leer mucho y redactar. Buscar y crear ideas y actividades para los alumnos fue entretenido y desafiante, especialmente cuando se trataba de utilizar GeoGebra. Esto nos permitió investigar y aprender mucho sobre las herramientas de dicho programa. Aprendimos que planificar no es una tarea mecánica sino que implica tomar decisiones previas a la práctica sobre **qué** es lo que se enseñará, **para qué** se hará (es decir, delinear los objetivos) y **cómo** esto se puede lograr de la mejor manera. Además, aprendimos que planificar implica pensar cuál es la mejor organización y secuenciación de lo que se quiere enseñar y diseñar actividades que puedan resultarle interesantes a los alumnos y que permitan cumplir los objetivos determinados.

Las prácticas nos permitieron enfrentarnos a situaciones reales que repercuten diariamente en la tarea docente y fue allí donde tuvimos que tomar decisiones. Los tiempos planificados para cada actividad no siempre se cumplen en la puesta en práctica, los tiempos se van adecuando al estudiante. Pudimos percibir la importancia de llevar el control del tiempo para poder aprovecharlo y administrarlo lo mejor posible para que todas las actividades puedan concretarse y para que no nos sorprenda el final de la clase. La disponibilidad de recursos en la institución condicionó el diseño de la planificación como así también la implementación de las actividades en el aula. Por ejemplo, hubo situaciones en las que no pudimos utilizar el proyector como lo habíamos planificado dado que ya había sido reservado por otro profesor, por lo tanto, la clase se llevó a cabo en el aula haciendo uso del pizarrón y de la tiza. La cantidad de netbook disponibles fue determinante para definir la modalidad de trabajo. La ausencia de gran cantidad de alumnos hizo necesario que agregáramos una clase de repaso a la planificación para nivelar a todos los alumnos. Los imprevistos que surgen en la clase hacen que no se llegue a dar todo lo que estaba planificado para la clase.

A modo de conclusión, podemos decir que fue un proceso de mucho aprendizaje. Nos dimos cuenta que la tarea docente es compleja pero que a la vez produce mucha satisfacción realizarla. Fue nuestra primera experiencia como docentes, la más importante. Estuvimos en el aula dando clases, relacionándonos con los alumnos y sentimos que era lo que nos gusta. Aunque algunas cosas no salieron como se esperaba esto recién comienza y tendremos más instancias para seguir aprendiendo.

Sentimos la necesidad de agradecer a quienes nos acompañaron en este recorrido y participaron en él. A nuestros familiares y amigos por apoyarnos y estar siempre alentándonos a seguir, a no bajar los brazos y ayudándonos en lo que necesitáramos. A nuestros compañeros de M.O.P.E. con quienes compartimos nuestras vivencias y experiencias de cada día, ayudándonos unos a otros, dándonos consejos. A los profes de M.O.P.E. por su dedicación y las ganas que le ponen a su trabajo, especialmente a quien fue nuestra supervisora de prácticas profesionales Leticia Losano quien nos acompañó y guio en este proceso, que con sus críticas y consejos nos ayudó a mejorar día a día. A la institución donde realizamos nuestras prácticas por abrirnos sus puertas. A los encargados de la biblioteca por su amabilidad y buena atención. A la profesora de los cursos por “prestarnos a sus alumnos” y por permitirnos trabajar con gran libertad. Finalmente a los alumnos de 5º Año por respetarnos y mostrarse con buena predisposición a la hora de trabajar. A todos ellos **GRACIAS**.

BIBLIOGRAFÍA

CHEVALLARD, Yves y otros. (1997) *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Editorial Horsori. Universidad de Barcelona.

DISEÑO CURRICULAR DE EDUCACIÓN SECUNDARIA, ORIENTACIÓN ARTE (MÚSICA) (2013-2015). Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. Secretaría de Educación. Subsecretaría de Promoción de promoción de Igualdad y Calidad Educativa. Dirección General de planeamiento e Información Educativa. Disponible en: http://www.cba.gov.ar/las-ciencias-sociales-en-la-educacion-secundaria/ (10.11.2015)

GVIRTZ, S. y PALAMIDESI, M. (2008) *El ABC de la tarea docente: Curriculum y enseñanza*. Editorial Aique. Buenos Aires. Cap. 6.

LACASTA ZABALZA, E & PASCUAL BONIS, J.R. (1998) *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Editorial Síntesis. Madrid.

PONTE, J. P. (2004). *Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos*. In J. GIMÉNEZ, L. SANTOS, & J. P. PONTE (Eds.), *La actividad matemática en el aula* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

ANEXOS

Anexo I: Actividades introductorias - Función exponencial.

<u>Guía de Actividades N° 1: “Tiras de papel”.</u>

Materiales y recursos.

- Tira de papel de 116 cm.
- Tijera con punta redondeada.
- Netbook-Programa GeoGebra.

Procedimiento:

Anotar la cantidad de tiras de papel, obtenida en cada una de las siguientes cortes.

a. Tomar la tira de papel y cortarla en dos partes iguales.
b. Superponer las dos tiras obtenidas en el paso anterior y nuevamente cortarlas en dos partes iguales.
c. Repetir el inciso b. cuatro veces más.

1) Responder:

a. ¿Cuántas tiras de papel se obtuvieron en el primer corte? ¿Y en el segundo? ¿Y en el tercero?
b. ¿Cuántas tiras de papel se obtuvieron en el sexto corte? ¿Cuántas tiras habría en el séptimo corte? ¿Y cuántas tiras de papel habría en el corte número cincuenta?

2) Registrar en forma de tabla, en GeoGebra, las respuestas a las preguntas del ítem 1).

> Para realizar una tabla ir a la opción “Vista”, del menú ubicado en la parte superior, y seleccionar “Hoja de Cálculo”. Allí introducir los datos obtenidos.

3) Graficar en GeoGebra los datos registrados en la tabla.

> Para graficar seleccionar la tabla completa, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción Crea-Lista de puntos.

4) Encontrar una fórmula que permita calcular la cantidad de tiras de papel que se obtendrían en cualquier número de cortes.

5) Introducir la fórmula encontrada en “Entrada” ubicada en la parte inferior de la ventana de GeoGebra.

6) Guardar el archivo de GeoGebra en la computadora con el nombre “Solución Tiras de papel”.

7) Preparar una presentación, de cinco minutos aproximadamente, donde deberán contar:

- Cuál era el problema a resolver.
- Mostrar los resultados: tabla, fórmula y gráfico.
- Explicar cómo obtuvieron esos resultados.

Guía de Actividades N° 4: "Bacterias".

Materiales y recursos.

- Netbook-Programa GeoGebra.
- Archivo de GeoGebra llamado "Bacterias".

Situación problemática:

La bacteria Escherichia coli se encuentra de forma natural en el intestino de muchos mamíferos. En un experimento de laboratorio, se encuentra que el tiempo que esta bacteria tarda en duplicarse es de 1 minuto. El experimento comienza con una población de 3 bacterias y no hay cambios en el tiempo de duplicación.

1) Abrir el archivo "Bacterias". Observar que sucede.

2) Responder:

   a. ¿Cuántas bacterias hay en el en el minuto cero? ¿Y en el minuto uno? ¿Y a los dos minutos? ¿Y a los tres minutos?
   b. ¿Cuántas bacterias hay a los cuatro minutos? ¿Cuántas bacterias habrá en el siguiente minuto? ¿Cuántas bacterias habrá a los treinta minutos de haber comenzado el experimento?

3) Registrar en forma de tabla, en GeoGebra, las respuestas obtenidas en el ítem 2).

Para realizar una tabla ir a la opción "Vista", del menú ubicado en la parte superior, y seleccionar "Hoja de Cálculo". Allí introducir los datos obtenidos.

4) Graficar en GeoGebra los datos registrados en la tabla.

Para graficar seleccionar la tabla completa, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción Crea-Lista de puntos.

5) Encontrar una fórmula que permita calcular la cantidad de bacterias que habrá en cualquier cantidad de minutos.

6) Introducir la fórmula encontrada en "Entrada" ubicada en la parte inferior de la ventana de GeoGebra.

7) Guardar el archivo de GeoGebra en la computadora con el nombre "Solución Bacterias".

8) Preparar una presentación, de cinco minutos aproximadamente, donde deberán contar:

   - Cuál era el problema a resolver.
   - Mostrar los resultados: tabla, fórmula y gráfico.
   - Explicar cómo obtuvieron esos resultados.

Para visualizar el applet "Bacterias" ir a http://tube.geogebra.org/m/VOtc8Tmv.

<u>Guía de Actividades N° 5: “Triángulos”.</u>

Materiales y recursos.

- Netbook-Programa GeoGebra.
- Archivo de GeoGebra llamado “Triángulos”.

Actividades.

1) Abrir el archivo llamado “Triángulos”. Observar que sucede en cada paso.

2) Responder:

   a. ¿Cuántos triángulos negros hay en el Paso 1? ¿Y en Paso 2? ¿Y en el Paso 3?
   b. ¿Cuántos triángulos negros hay en el Paso 4? ¿Cuántos triángulos negros habría en el siguiente paso? ¿Y en Paso 50?

3) Registrar en forma de tabla las respuestas obtenidas en el ítem 2

Para realizar una tabla ir a la opción “Vista”, del menú ubicado en la parte superior, y seleccionar “Hoja de Cálculo”. Allí introducir los datos obtenidos.

4) Graficar los datos registrados en la tabla.

Para graficar seleccionar la tabla completa, hacer clic con el botón derecho y seleccionar la opción Crea-Lista de puntos.

5) Encontrar una fórmula que permita calcular cuántos triángulos negros habría en cualquier número de pasos.

6) Introducir la fórmula encontrada en “Entrada” ubicada en la parte inferior de la ventana de GeoGebra.

7) Guardar el archivo de GeoGebra en la computadora con el nombre “Solución Triángulos”.

8) Preparar una presentación, de cinco minutos aproximadamente, donde deberán contar:

   - Cuál era el problema a resolver.
   - Mostrar los resultados: tabla, fórmula y gráfico.
   - Explicar cómo obtuvieron esos resultados.

Para visualizar el applet “Triángulos” ir a http://tube.geogebra.org/m/qXeusbPU.

Anexo ll: Instrumentos de evaluación.

Evaluación de Matemática.

Función Exponencial. Función Logaritmo.

$5^{to} Año\ "A"$

TEMA 1

Apellido y nombre de los integrantes del grupo:

Número de Netbook:

Al abrir el programa GeoGebra, deben crear el archivo donde resolverán las actividades. Para ello, deben seguir el siguiente camino: Archivo-Guarda-Mis documentos-MATEMÁTICA 5-Matemática 5to Año A. Como Nombre del archivo deben escribir sus apellidos de la siguiente forma: Apellido1_Apellido2. Por último hacer clic en Guarda.
Al finalizar las actividades ir a Archivo-Guarda. De ese modo se guardará lo que hayan realizado.

Lean la siguiente historia y luego resuelvan las actividades.

Un trato ventajoso.

Un millonario regresaba contento de un viaje, durante el cual había tenido un encuentro con un desconocido que le prometía grandes ganancias.
Se lo contaba así a sus familiares:
-Hagamos, me dijo el desconocido, el siguiente trato. Cada día, durante todo el mes de diciembre le entregaré 100.000 pesos. Claro que no voy a hacerlo gratis, pero el pago es mínimo. El primer día yo debía pagarle 3 pesos y él me entregaría los primeros 100.000 pesos.
No di crédito a lo que oía:
-¡¿3 pesos?!-le pregunté.
-3 pesos-contestó. Por los segundos 100.000 pesos, pagará usted 9 pesos.
-Bien, dije impaciente ¿y después?
-Después por los terceros 100.000 pesos, 27 pesos, por los cuartos, 81; por los quintos, 243.Y así durante todo el mes de diciembre, cada día pagará usted el triple del anterior.
-¿Y qué más?-le pregunté.
-Eso es todo-dijo-no le pediré nada más. Pero debe usted mantener el trato en todos sus puntos; todas las mañanas le llevaré los 100.000 pesos y usted me pagará lo estipulado. No intente romper el trato antes de finalizar el mes.
-¡A no ser que el dinero sea falso este hombre está loco! No puedo dejar escapar esta oportunidad-pensé.
-Está bien-le contesté. Traiga usted el dinero. Por mi parte, le pagaré puntualmente. Y usted no me venga con engaños, traiga dinero bueno.
Durante todo el mes el extraño le entregó 100.000 pesos por cada día al millonario y éste le entregó lo que correspondía por día.

Actividades.

1) Utilizando GeoGebra, realicen una tabla de valores para la primera semana relacionando los días con la cantidad de pesos que debe entregar el millonario al desconocido.

2) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente? Escriban su respuesta en el siguiente espacio.

3) Grafiquen en GeoGebra los datos obtenidos en la tabla.

4) Encuentren la función que permite calcular la cantidad de pesos que el millonario debe pagarle al desconocido por día. Registren, en el siguiente espacio, el procedimiento que utilizaron para encontrar la función.

5) Grafiquen en GeoGebra la función. ¿Cómo pueden justificar que la función encontrada es la correcta? Escriban su respuesta en el siguiente espacio.

6) Respondan.

    a) ¿Cuántos pesos pagó el millonario el día 10? ¿y el día 11? Escriban las expresiones correspondientes y luego calculen.

    b) ¿Cuántos pesos pagó el millonario sólo el último día? Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

    c) ¿Cuántos pesos pagó el desconocido en todo el mes? Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

    d) ¿Para quién fue ventajoso el trato? Justifiquen su respuesta.

7) ¿En qué número de día el millonario debió entregarle 14.348.907 pesos al desconocido? Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

8) ¿Cuál es la función inversa de la función encontrada en el punto 4)? Grafíquenla en GeoGebra. ¿Cómo podrían asegurar, utilizando las herramientas de GeoGebra, que la función inversa encontrada es la correcta? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Evaluación de Matemática.

Función Exponencial. Función Logaritmo.

$5^{to} Año$ "A"

TEMA 2

Apellido y nombre de los integrantes del grupo:

Número de Netbook:

Al abrir el programa GeoGebra, deben crear el archivo donde resolverán las actividades. Para ello, deben seguir el siguiente camino: Archivo-Guarda-Mis documentos-MATEMÁTICA 5-Matemática 5to Año A. Como Nombre del archivo deben escribir sus apellidos de la siguiente forma: Apellido1_Apellido2. Por último hacer clic en Guarda.
Al finalizar las actividades ir a Archivo-Guarda. De ese modo se guardará lo que hayan realizado.

Lean la siguiente historia y luego resuelvan las actividades.

Un trato ventajoso.

Un millonario regresaba contento de un viaje, durante el cual había tenido un encuentro con un desconocido que le prometía grandes ganancias.
Se lo contaba así a sus familiares:
-Hagamos, me dijo el desconocido, el siguiente trato. Cada día, durante todo el mes de diciembre le entregaré 100.000 pesos. Claro que no voy a hacerlo gratis, pero el pago es mínimo. El primer día yo debía pagarle 5 centavos y él me entregaría los primeros 100.000 pesos. No di crédito a lo que oía:
-¡¿5 centavos?!-le pregunté.
-5 centavos-contestó. Por los segundos 100.000 pesos, pagará usted 25 centavos.
-Bien, dije impaciente ¿y después?
-Después por los terceros 100.000 pesos, 125 centavos, por los cuartos, 625 centavos. Y así durante todo el mes de diciembre, cada día pagará usted el quíntuple del anterior.
-¿Y qué más?-le pregunté.
-Eso es todo-dijo-no le pediré nada más. Pero debe usted mantener el trato en todos sus puntos; todas las mañanas le llevaré los 100.000 pesos y usted me pagará lo estipulado. No intente romper el trato antes de finalizar el mes.
-¡A no ser que el dinero sea falso este hombre está loco! No puedo dejar escapar esta oportunidad-pensé.
-Está bien-le contesté. Traiga usted el dinero. Por mi parte, le pagaré puntualmente. Y usted no me venga con engaños, traiga dinero bueno.
Durante todo el mes el extraño le entregó 100.000 pesos por cada día al millonario y éste le entregó lo que correspondía por día.

Actividades.

1) Utilizando GeoGebra, realicen una tabla de valores para la primera semana relacionando los días con la cantidad de centavos que debe entregar el millonario al desconocido.

2) ¿Cuál es la variable independiente? ¿Cuál es la variable dependiente? Escriban su respuesta en el siguiente espacio.

3) Grafiquen en GeoGebra los datos obtenidos en la tabla.

4) Encuentren la función que permite calcular la cantidad de centavos que el millonario debe pagarle al desconocido por día. Registren, en el siguiente espacio, el procedimiento que utilizaron para encontrar la función.

5) Grafiquen en GeoGebra la función. ¿Cómo pueden asegurar que la función encontrada es la correcta? Escriban su respuesta en el siguiente espacio.

6) Respondan.
   e) ¿Cuántos centavos pagó el millonario el día 10? ¿y el día 11? Escriban las expresiones correspondientes y luego calculen.

   f) ¿Cuántos centavos pagó el millonario sólo el último día? Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

   g) ¿Cuántos centavos pagó el desconocido en todo el mes? (Tener en cuenta que 1 peso equivale a 100 centavos, entonces 100.000 pesos son 10.000.000 de centavos). Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

   h) ¿Para quién fue ventajoso el trato? Justifiquen su respuesta.

7) ¿En qué número de día el millonario debió entregarle 30.517.578.125 centavos al desconocido? Escriban la expresión correspondiente y luego calculen.

8) ¿Cuál es la función inversa de la función encontrada en el punto 4)? Grafíquenla en GeoGebra. ¿Cómo podrían asegurar, utilizando las herramientas de GeoGebra, que la función inversa encontrada es la correcta? Escribe tu respuesta en el siguiente espacio.

Evaluación de Matemática.

Función Exponencial. Función Logaritmo.

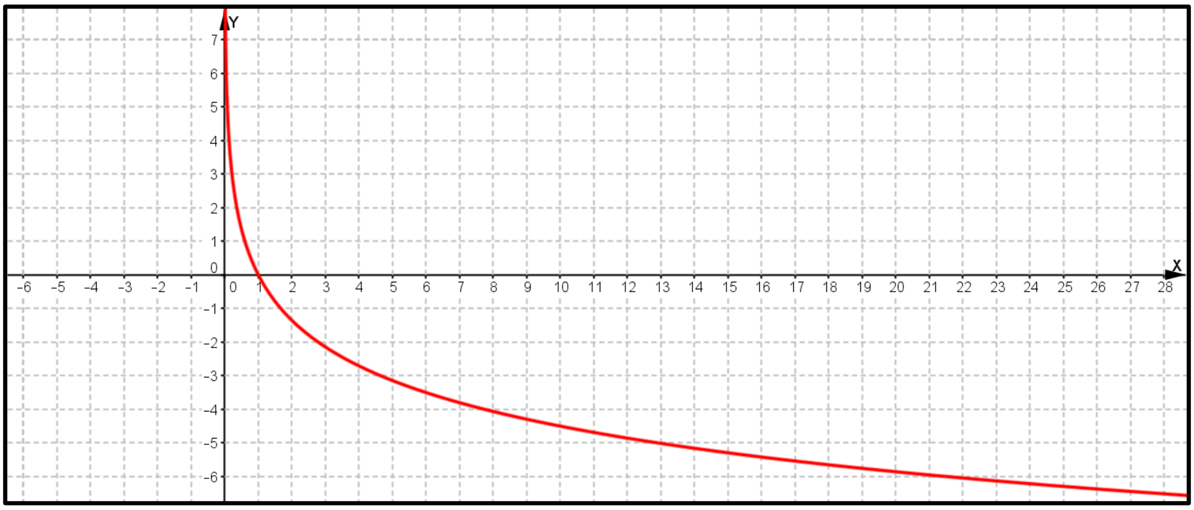
5^{to} Año "A"

TEMA 1

APELLIDO Y NOMBRE:

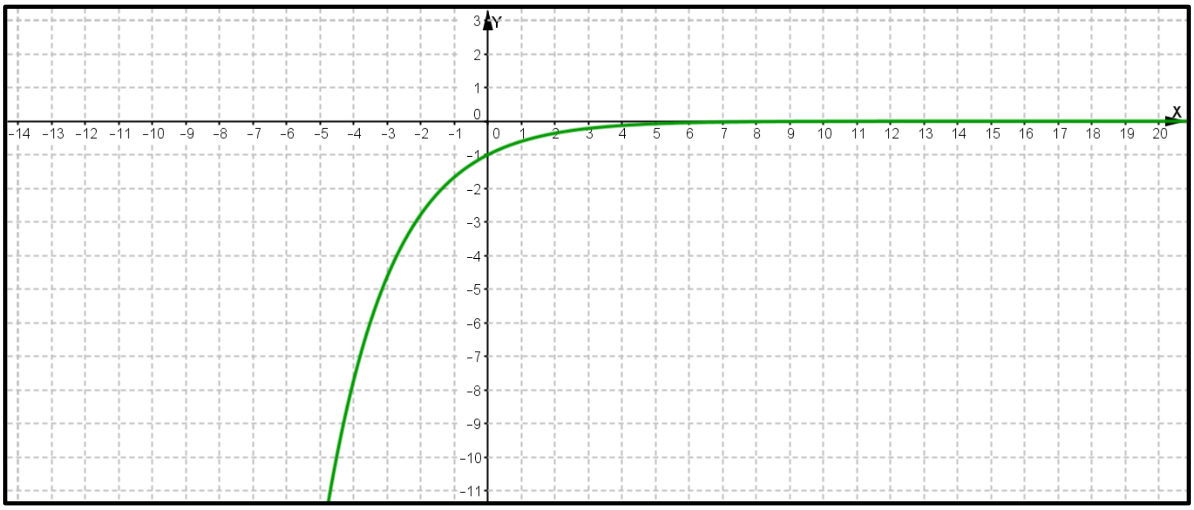
1- Analiza los siguientes gráficos.

Gráfico1



a) ¿El Gráfico1 corresponde a una función exponencial o a una función logarítmica? ¿Por qué?

Gráfico2



b) ¿El Gráfico2 corresponde a una función exponencial o a una función logarítmica? ¿Por qué?

2- Analiza detalladamente los gráficos del punto anterior.

a) ¿Es creciente o decreciente? Justifica.

Gráfico1	Gráfico2

b) ¿Cuáles son los intervalos de positividad y negatividad? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Intervalo de positividad		
Intervalo de negatividad		

c) ¿Cuál es la asíntota? Justifica.

Gráfico1	Gráfico2

d) ¿Cuál es el dominio y la imagen? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Dominio		
Imagen		

e) ¿Entre qué valores está ***a***? justifica.

Gráfico1	Gráfico2

f) ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Cuál es la raíz? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Ordenada al origen		
Raíz		

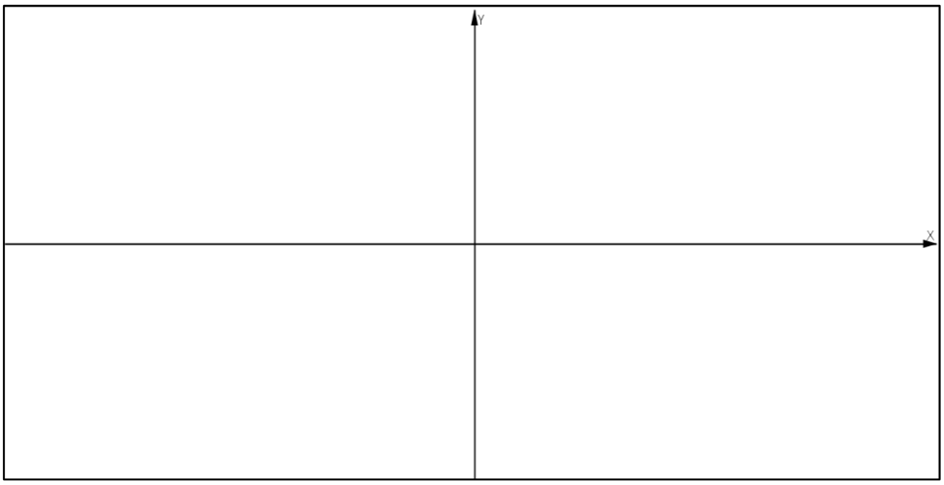
3- Dada la siguiente función $f(x) = -12 \cdot (0.3)^x$

a) Identifica los parámetros y su condición.

b) Cuál es la ordenada al origen. Justifica.

c) Determina si es creciente o decreciente. Justifica.

d) Realiza el gráfico aproximado.



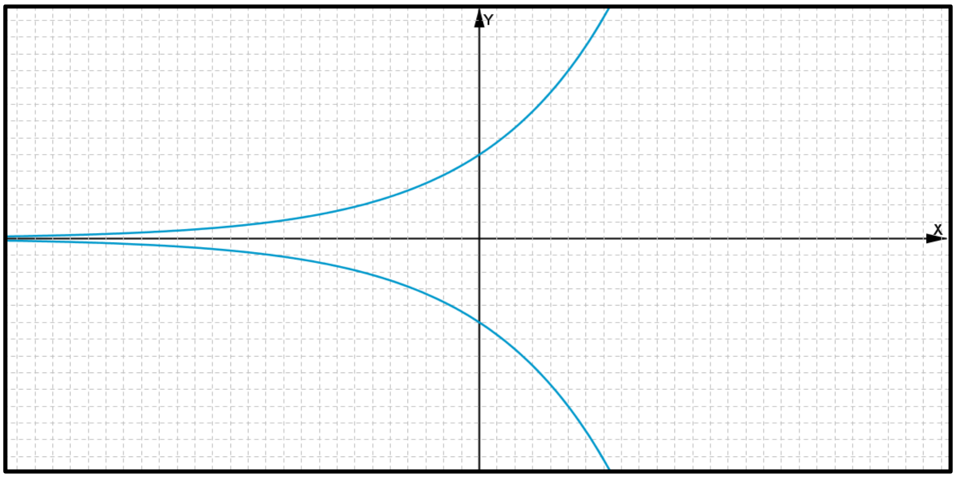
e) Escribe su dominio e imagen.

4- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

a) La función inversa de $y = log_3 x$ es $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

b) Si la función exponencial $y = k \cdot a^x$ cumple que ***k*** > 0 y ***a*** > 1 su inversa logarítmica es creciente.

c) Las curvas que aparecen en el siguiente gráfico corresponden a funciones inversas.



Evaluación de Matemática.

Función Exponencial. Función Logaritmo.

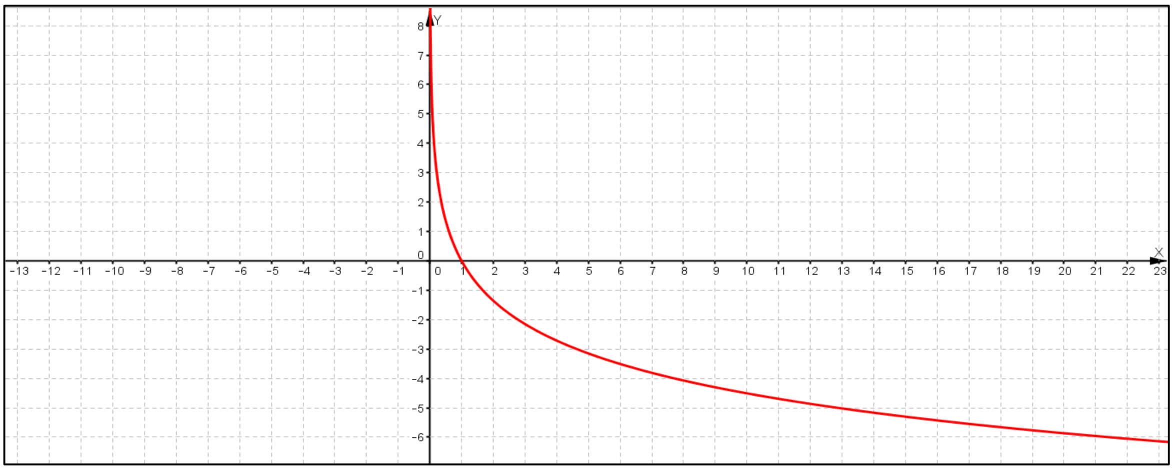
$5^{to} Año\ "A"$

TEMA 2

APELLIDO Y NOMBRE:

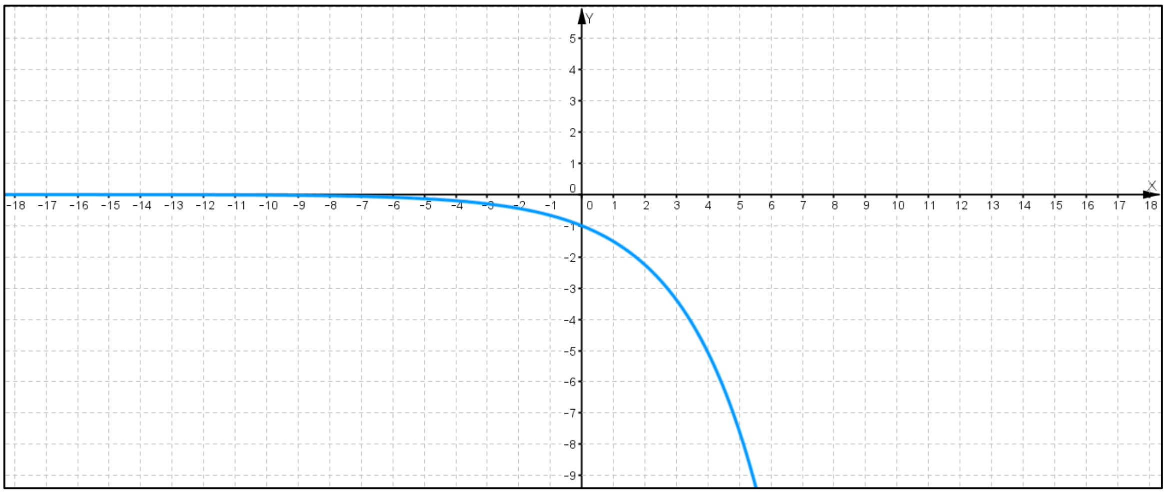
1- Analiza los siguientes gráficos.

Gráfico1



c) ¿El Gráfico1 corresponde a una función exponencial o a una función logarítmica? ¿Por qué?

Gráfico2



d) ¿El Gráfico2 corresponde a una función exponencial o a una función logarítmica? ¿Por qué?

2- Analiza detalladamente los gráficos del punto anterior.

g) ¿Es creciente o decreciente? Justifica.

Gráfico1	Gráfico2

h) ¿Cuáles son los intervalos de positividad y negatividad? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Intervalo de positividad		
Intervalo de negatividad		

i) ¿Cuál es la asíntota? Justifica.

Gráfico1	Gráfico2

j) ¿Cuál es el dominio y la imagen? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Dominio		
Imagen		

k) ¿Entre qué valores está ***a***? Justifica.

Gráfico1	Gráfico2

l) ¿Cuál es la ordenada al origen? ¿Cuál es la raíz? Justifica.

	Gráfico1	Gráfico2
Ordenada al origen		
Raíz		

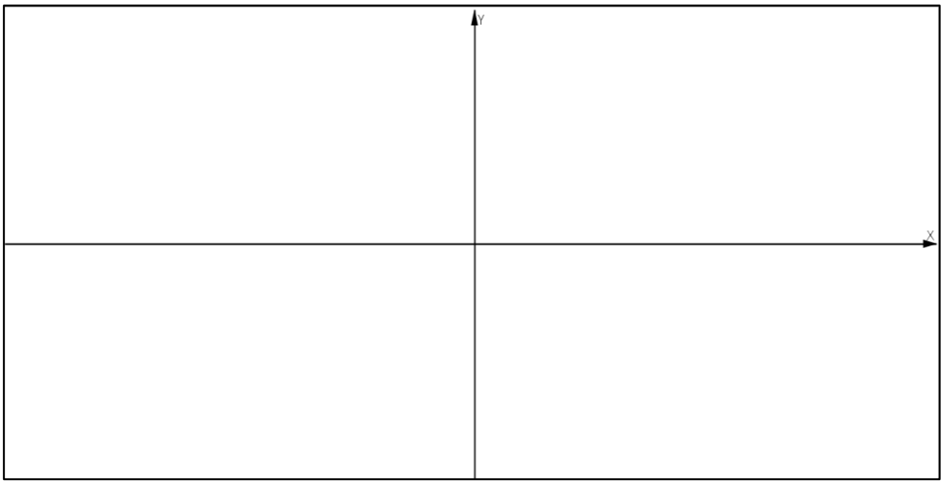
3- Dada la siguiente función $f(x) = -8 \cdot (4.5)^x$

f) Identifica los parámetros y su condición.

g) Cuál es la ordenada al origen. Justifica.

h) Determina si es creciente o decreciente. Justifica.

i) Realiza el gráfico aproximado.



j) Escribe su dominio e imagen.

4- Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica.

d) La función inversa de $y = log_{\frac{1}{5}}x$ es $y = \log_5 x$.

e) Si la función exponencial $y = k \cdot a^x$ cumple que ***k*** > 0 y ***a*** > 1 su inversa logarítmica es creciente.

f) Las curvas que aparecen en el siguiente gráfico corresponden a funciones inversas.