

**Título:** ENSEÑANZA DE POLIEDROS EN LA ESCUELA SECUNDARIA  
**Autores:** Pablo A. Aiassa, Jonathan M. Alonso y Rodrigo Olmos  
**Profesor supervisor de MOPE:** Mónica Villarreal  
**Carrera:** Profesorado en Matemática  
**Fecha:** 20-11-14



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 2.5 Argentina](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/2.5/argentina/).

**Clasificación:**

97 Mathematical Education

**Palabras claves:**

Poliedros - Prismas- Pirámides  
Clasificación - Regularidades - Investigación  
Fórmula de Euler - Poliedros regulares - Proyecto  
Competencias Matemáticas

**Resumen**

El presente informe expone las prácticas realizadas en un colegio de la ciudad de Córdoba. Dichas prácticas se desarrollaron en tres divisiones (A, B y C) de un primer año, donde se trabajó el contenido Cuerpos Geométricos. Para abordarlo, se propusieron dos instancias: primero, una instancia intra-matemática, basada en la construcción, clasificación y descripción de poliedros, búsqueda de regularidades entre sus elementos (vértices, caras y aristas); luego se trabajó de manera extra-matemática, identificando poliedros en el mundo real y realizando un proyecto de construcción asociado a una situación de producción en envases para diferentes productos.

Agradecemos a todas aquellas personas que nos ayudaron en la realización de nuestras prácticas, familiares, amigos, entre otras.

Queremos agradecer a las docentes de Metodología, Observación y Práctica de la Enseñanza (MOPE) por el apoyo y acompañamiento en el transcurso del año, principalmente a Mónica, nuestra profesora supervisora de prácticas, que estuvo presente acompañándonos y apoyándonos en todo momento.

También a la profesora María a cargo de los cursos en donde realizamos nuestras prácticas, por su apoyo, calidez, y sugerencias brindadas durante el transcurso de nuestras prácticas. Al profesor Juan Pablo Rossetti de la Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF) por su colaboración facilitándonos poliedros para la utilización con los alumnos en el colegio.

---

## **Índice de contenidos**

1. Introducción	5
1.1. Acerca de la institución	5
1.2. Acerca de los cursos	5
1.3. Acerca de los recursos	6
1.4. Estilo de trabajo en la clase de matemática	8
2. Diseño de la práctica e implementación en el aula	10
2.1. Planificación de la profesora	10
2.2. Contenidos desarrollados por la docente previo al inicio de prácticas	11
2.3. Tema de práctica en la Planificación Anual del curso	11
3. Planificación realizada por los practicantes	12
3.1. Objetivos generales	12
3.2. Selección de los contenidos	12
3.3. Selección de recursos y materiales	12
3.4. Participación de los alumnos	13
3.5. Organización del escenario áulico	13
3.6. Organización y secuenciación de los contenidos	13
3.7. Cronogramas implementados	17
3.8. Acerca de las actividades	23
3.8.1. Trabajando de manera intra-matemática	23
3.8.2. Trabajando de forma extra-matemática: Proyecto	51
3.9. Acerca de las evaluaciones	56
4. Problemática a analizar	60
5. Bibliografía	71
6. Anexos	73
6.1. Anexo A	74
6.2. Anexo B	76

## **1. Introducción**

En esta sección se presenta una descripción de la institución que permite entender el trabajo realizado en las prácticas. Por un lado, características generales como la ubicación de la institución, su infraestructura, tipo de gestión, especialidad, entre otras; y por otro, características más particulares relacionadas con el interior de la institución, que afectaron directamente a nuestras prácticas, tales como los cursos en los que se trabajó, los alumnos, los medios y recursos disponibles, el estilo de trabajo en el aula, entre varias cosas más.

### **1.1 Acerca de la institución**

El colegio donde realizamos las prácticas es mixto y público de gestión privada, se encuentra en cercanías del centro de la ciudad de Córdoba. Fue fundado en el año 1959. Posee tres niveles: inicial, primario y secundario. Alumnos de estos tres niveles concurren simultáneamente en el edificio, cada uno en pabellones diferenciados. Actualmente en el colegio hay 18 aulas destinadas al nivel secundario, 12 para el nivel primario y 6 salas para pre-jardín y jardín de infantes.

Un equipo de **orientación psicopedagógica institucional** trabaja en forma permanente en la institución, abarcando los tres niveles: inicial, primario y secundario.

El nivel secundario se divide en dos ciclos de 3 años de duración cada uno, el ciclo básico y el ciclo orientado. La especialidad del Ciclo Orientado es la de **Humanidades** con orientación en **Ciencias Sociales**. El título otorgado tiene validez nacional (decreto 1276/96) y es el de **Bachiller en Humanidades con orientación en Ciencias Sociales**.

El colegio cuenta con aulas, biblioteca con sala de estudio y computadoras que tienen acceso a Internet, laboratorio para Ciencias Naturales y Tecnología, gabinete de Informática, gimnasio cubierto polifuncional, natatorio y un campo de deportes al aire libre. También cuenta con una capilla, cantina y comedor.

Las aulas son amplias, con grandes ventanales a los costados; cada una posee una capacidad máxima para 42 alumnos, distribuidos en 6 filas individuales con bancos fijos al piso. En todas hay acceso a Internet, disponible para el uso en clase. Una particularidad de las aulas es que poseen una tarima donde se encuentra el escritorio de la profesora junto a una computadora, a la que le corresponde, como monitor, la pizarra digital, ubicada sobre el pizarrón de tiza de modo que lo divide en dos (esto se ilustra luego, en la Figura 3). Además, en el fondo de cada aula hay varios enchufes que los alumnos pueden utilizar para cargar sus tablets, por ejemplo, entre otros usos particulares.

### **1.2 Acerca de los cursos**

Las prácticas se realizaron en tres cursos de primer año, A, B y C, a cargo de una misma docente de la institución. 1ºA tiene 33 alumnos (20 varones y 13 mujeres) y en este curso el practicante fue Rodrigo, 1ºB tiene 28 alumnos (17 varones y 11 mujeres) y Jonathan fue el practicante; finalmente, 1ºC tiene 25 alumnos (13 varones y 12 mujeres) y Pablo fue el practicante.

Cada curso posee una carga horaria de cinco horas cátedra<sup>1</sup> semanales como se observa en la Figura 1.

---

<sup>1</sup> Cada hora cátedra corresponde a 40 minutos reloj.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	
1	1°B			1°C		7:35 - 8:15
2	1°B			1°C		8:15 - 8:50
3					1°B	8:50 - 9:30
4	1°A	1°C	1°A	1°C	1°A	9:40 - 10:20
5		1°C	1°A		1°A	10:20 - 11:00
6		1°B				11:20 - 12:00
7		1°B				12:00 - 12:35

Figura 1: Horarios.

La distribución de los alumnos en el aula está a cargo de su preceptor, aunque cada profesor puede modificar dicha disposición según lo considere conveniente.

### 1.3 Acerca de los recursos

La institución cuenta con variados recursos tecnológicos y acceso a Internet; los más utilizados y relevantes son la pizarra digital, las tablets de los estudiantes (cada uno posee una y es propia) y la plataforma virtual (también conocida como aula virtual). En general, todos estos recursos son muy utilizados en cada una de las materias.

La pizarra digital funciona como monitor de una computadora y se trabaja sobre ella por medio de un lápiz óptico que vendría a ser el mouse correspondiente; cuenta con editor de texto, hoja de cálculo, calculadora, entre otras aplicaciones; se pueden instalar programas como GeoGebra, Scratch, PolyPro, entre otros; y también posee el software ActivInspire que ofrece numerosos recursos didácticos, como por ejemplo escribir, subrayar sobre los documentos que se encuentran en la pizarra, etc.

Las Figuras 2 y 3 muestran imágenes de la pizarra digital donde se trabajó con el software ActivInspire.

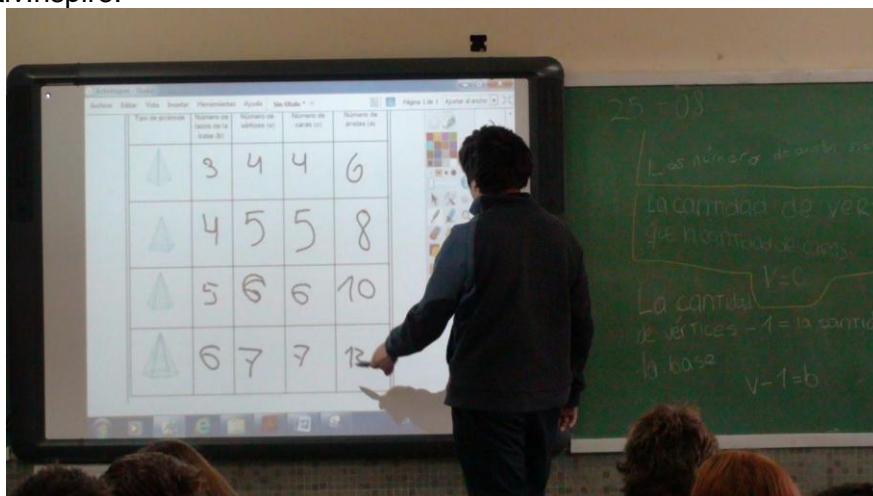


Figura 2: Pizarra digital y actividad donde se trabajó con el programa ActivInspire. Un alumno completando la tabla de búsqueda de regularidades en pirámides.

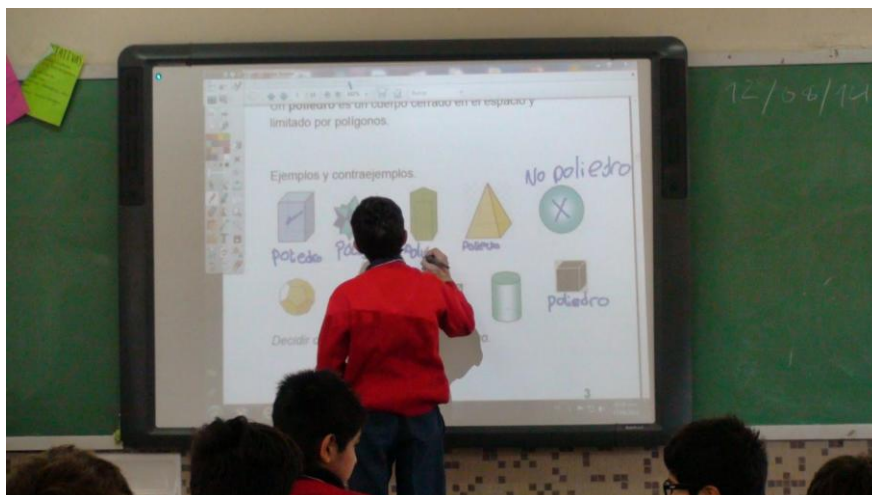


Figura 3: Pizarra digital y actividad donde se trabajó con el programa ActivInspire. Un alumno distinguiendo ejemplos y contraejemplos de poliedros.

Los alumnos cuentan con carpetas donde quedan registradas actividades que realizan, ideas conceptuales, definiciones, tareas, etc. Las tablets (ver Figura 4) son un instrumento complementario a las carpetas donde pueden registrar cada clase, y además brindan la posibilidad de trabajar con determinadas actividades que se plantean teniendo en cuenta las posibilidades de esta herramienta.



Figura 4: Uso de Tablet para realizar una actividad. Un alumno completando la tabla de búsqueda de regularidades en prismas.

El aula virtual pone a disposición de los docentes espacios que les permiten organizar los contenidos y tareas que se llevan adelante en los diferentes cursos. Entre los recursos que ofrece se destaca la posibilidad de subir material de estudio, actividades, novedades, tareas, entre otros.

La institución creó y habilitó a los practicantes el acceso de un aula virtual para cada curso llamada **Cuerpos Geométricos A**, **Cuerpos Geométricos B** y **Cuerpos Geométricos C**, respectivamente. Esto permitió que cada practicante gestionara un aula virtual. La Figura 5 muestra una imagen de una de las aulas virtuales.

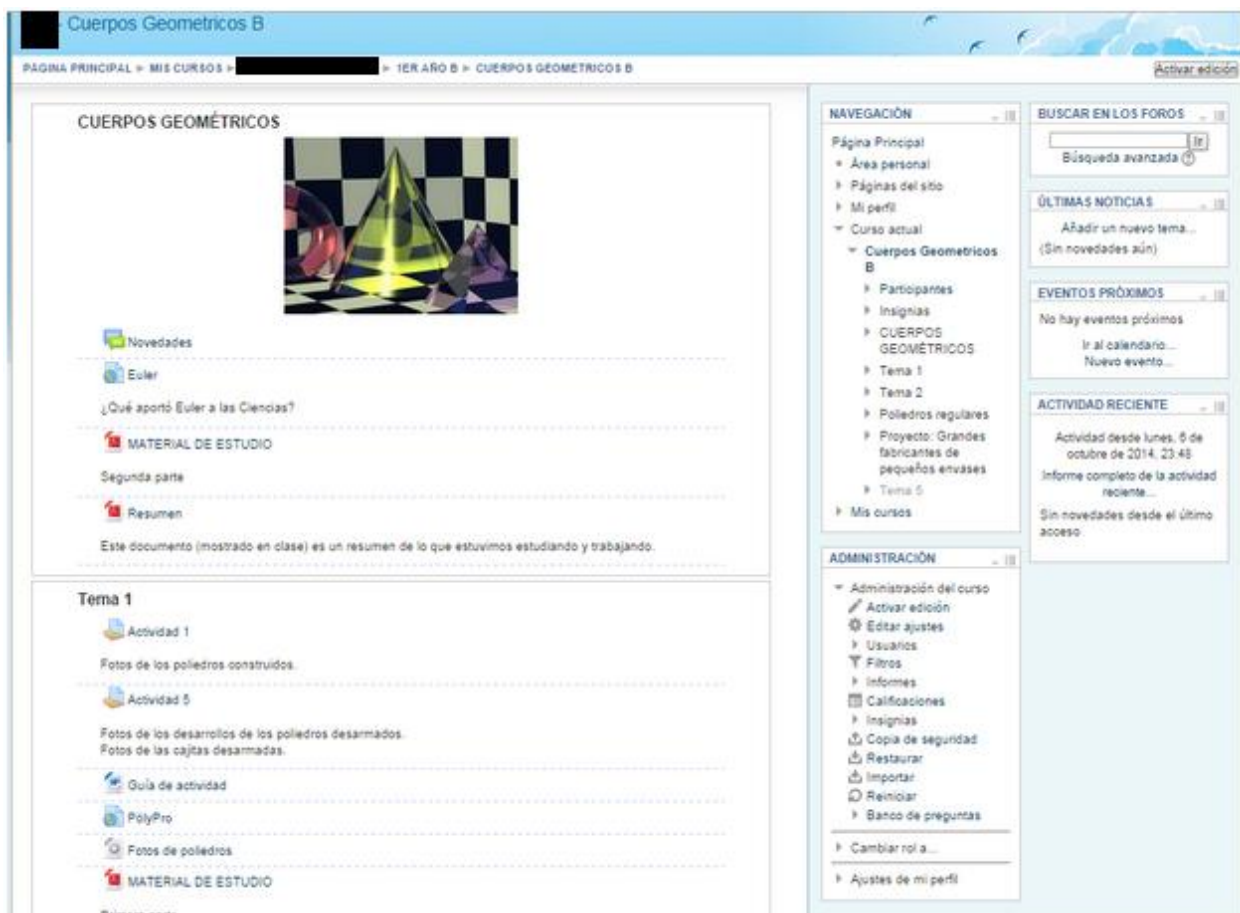


Figura 5: Aula virtual del curso 1° B.

Además de los recursos antes mencionados, en las clases también se emplean elementos didácticos tradicionales como el pizarrón de tiza, utilizado en forma paralela a la pizarra digital, sobre todo en momentos de corrección de una actividad donde varios alumnos pasan al frente, simultáneamente, a exponer sus producciones.

En matemática no se utilizaba un libro de estudio aunque en otras materias sí se empleaban, por ejemplo en Lengua y Literatura, Ética, Física.

Dentro de nuestro período de observaciones hubo un día en el cual cada practicante observó y acompañó un día completo de clase a su curso respectivo. Allí, pudimos notar que la participación de los alumnos se daba de igual manera que en la clase de matemática, como así también el respeto hacia los profesores.

#### 1.4 Estilo de trabajo en la clase de matemática

Las clases de matemática comenzaban con la participación de uno o varios estudiantes que explicaban lo realizado la clase anterior, mientras la docente les hacía preguntas sobre el tema. Posteriormente, trabajaban en la actividad prevista para ese día, que por lo general estaba subida al aula virtual. Luego, la docente circulaba por el curso, hacía pasar a algunos estudiantes para que resolvieran los ejercicios al frente mientras realizaba preguntas para asegurarse que todos comprendieran.

Se pudo observar una relación de mutuo respeto entre profesora y alumnos. Se distinguió una metodología de diálogo y debate constante con los alumnos, buscando siempre que, al desarrollar los contenidos, se parta desde lo que los alumnos aporten, de



sus ideas, sus pensamientos, sus acciones, sus producciones, sus preguntas, sus errores; y se utilizó el error como una instancia clave para construir el proceso de aprendizaje.

Los recursos disponibles son aprovechados al máximo. La pizarra digital funciona como principal medio de exposición de actividades, definiciones, ideas conceptuales, tareas, correcciones, etc., pues cuenta con diferentes programas y softwares tales como los ya mencionados, que tienen un uso constante y pertinente en las clases. El acceso a Internet, además de brindar la posibilidad de uso de otros programas interesantes, permite un trabajo colectivo en el aula, por ejemplo, para completar tablas o realizar gráficos en conjunto.

Hay un uso racional y medido del tiempo, pensando en la demanda que cada actividad conlleva. Se trabaja durante toda la hora respetando los límites de horarios. El contenido que en cada clase se presenta está planificado de modo que pueda ser producido y “entendido” en el tiempo de clase con el que se cuenta.

## **2. Diseño de la práctica e implementación en el aula**

Esta sección presenta la planificación de la profesora, los contenidos que fueron desarrollados antes del inicio de nuestras prácticas y el tema que nos fue asignado.

### **2.1 Planificación de la profesora**

La Planificación Anual de la profesora propuesta para primer año, fue la base y guía para hacer nuestra planificación y desarrollar nuestras prácticas con coherencia en cuanto al trabajo que se venía desempeñando en los cursos. De esta manera, pudimos realizar actividades que captaron la atención de los alumnos y se adecuaron a las expectativas y objetivos generales preestablecidos por la profesora, como la búsqueda de regularidades, su representación, argumentación, comunicación y manipulación. También procuramos trabajar sobre actitudes que se espera desarrollar en los alumnos, en particular, destacamos, de entre las propuestas en la Planificación, las asociadas a nuestras prácticas:

- Reconocer a la Matemática como ciencia que busca regularidades;
- Flexibilidad al explorar ideas matemáticas mediante la búsqueda de regularidades y al representarlas en distintos registros matemáticos;
- Inclinación a revisar y reflexionar sobre sus propias producciones y a comparar con las de sus compañeros, reconociendo en esto una forma importante de aprendizaje.

Los contenidos que los alumnos habían estudiado antes del inicio de nuestras prácticas fueron de utilidad para presentar definiciones, ideas conceptuales, etc. y plantear actividades pertinentes.

Las expectativas generales planteadas en la Planificación Anual son:

- Buscar regularidades en situaciones donde, su principal contenido esté centrado en la matemática o en situaciones fuera de ella pero donde se pueda obtener alguna representación matemática de dicha situación.
- Representar las regularidades encontradas mediante distintos textos propios de la matemática (lenguaje coloquial, lenguaje simbólico, gráficos, tablas, fórmulas, etc.) y traducir de una forma de representación en otra.
- Manipular las distintas representaciones obtenidas y controlar los cambios que esto significa en otra representación disponible.
- Identificar las representaciones óptimas para resolver un problema y seleccionar los recursos materiales apropiados (por ejemplo, papel y lápiz, calculadora, software, útiles de geometría, etc.), reconociéndolas como distintas formas de comunicar una idea a los otros.
- Aprovechar las distintas situaciones que se presenten para repasar, sintetizar y afianzar conceptos aprendidos en el nivel primario, especialmente dándoles mayor grado de formalidad propia de la matemática.
- Escribir pequeños textos argumentativos para justificar ideas o procesos de solución de un ejercicio o construcción, utilizando distintos tipos de lenguajes.
- Valorar la aplicación de la matemática en situaciones que surjan de otras materias y de la experiencia diaria.
- Reconocer el valor de la matemática como herramienta para resolver problemas de la vida cotidiana, y como un lenguaje particular.

Las estrategias metodológicas que la docente propone implementar en aula son: la modelización matemática como estrategia de enseñanza, experimentos matemáticos con

tecnología, heurística, ejercitación de afianzamiento de procedimientos propios de la matemática con recursos digitales a disposición, resolución de problemas, desarrollo de pequeños proyectos de modelización de temas elegidos por los alumnos y construcción de simulaciones usando Scratch.

Los contenidos se agrupan y explicitan en unidades que están divididas en tres trimestres. En su planificación, la docente expresa: “Estos contenidos son presentados aquí agrupados por unidades con coherencia temática, no necesariamente indican un desarrollo lineal de los mismos”. (Planificación Anual)

También se hacen explícitos, en la planificación, los principales procedimientos del quehacer matemático, las actitudes que se espera desarrollar, las principales actividades propuestas, el material de referencia principal para el alumno, la evaluación (actividades y criterios de evaluación) y la bibliografía de la profesora.

Luego de hacer un análisis comparativo entre la planificación de la docente y el Diseño Curricular para Matemática de la Provincia de Córdoba 2011 - 2015, podemos destacar que la planificación se adecua al mismo.

## **2.2 Contenidos desarrollados por la docente previo al inicio de prácticas**

Los contenidos que estudiaron los alumnos previo a nuestras prácticas pertenecen a la Unidad 1: Conjunto de los Números Naturales, a la Unidad 3: Relación entre Variables y a la Unidad 5: Estudios de Figuras Planas. En particular, en las observaciones que se realizaron en las clases de matemática se pudo ver parcialmente el desarrollo de la Unidad 3 (identidades matemáticas) y de la Unidad 5 (polígonos: definición, elementos principales, clasificación según diferentes criterios y búsqueda de regularidades entre sus elementos).

## **2.3 Tema de práctica en la Planificación Anual del curso**

El tema de nuestras prácticas en la Planificación Anual corresponde a la Unidad 7: Cuerpos geométricos. A continuación se detallan los contenidos de dicha unidad:

*Cuerpos geométricos. Poliedros, cilindro, cono y esfera. Poliedros platónicos. Descripción de sus componentes: caras, aristas y vértices. Fórmula de Euler. Representaciones de estos cuerpos en dos dimensiones, en papel y digitalmente.*

Cabe aclarar que durante las prácticas no se abordaron los contenidos referentes a cilindro, cono y esfera. La profesora del curso solicitó que nos concentráramos especialmente en poliedros.

### **3. Planificación realizada por los practicantes**

En esta sección se encuentra la planificación que se pensó para la realización de nuestras prácticas profesionales. Se presentan los objetivos generales, la selección de contenidos, la selección de recursos y materiales, la participación de los alumnos, la organización del escenario áulico, la organización y secuenciación de los contenidos, los cronogramas implementados en cada curso, las actividades y, por último, se muestra la evaluación: tipos de evaluación, criterios tenidos en cuenta y resultados correspondientes.

Destacamos que para la elaboración de la planificación hemos tenido en cuenta, tal como ya lo señalamos antes, la Planificación Anual de la profesora a cargo de los cursos, el Diseño Curricular para la Educación Secundaria de la Provincia de Córdoba 2011 - 2015 y el texto de Gvartz & Palamidessi (2006) "El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza".

#### **3.1 Objetivos generales**

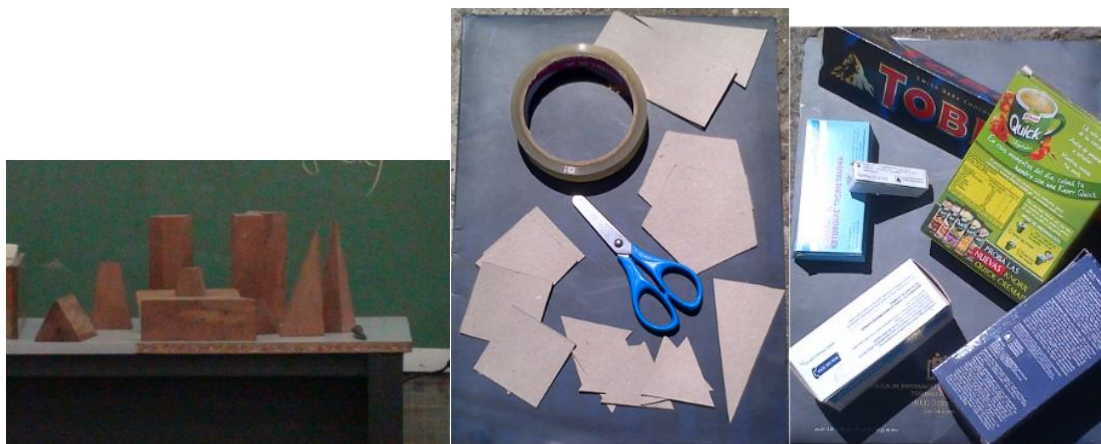
- Construir poliedros regulares e irregulares (con materiales y/o digitalmente).
- Identificar elementos: caras, aristas, vértices.
- Definir y clasificar poliedros convexos.
- Representar poliedros mediante un desarrollo plano.
- Identificar pirámides y prismas.
- Encontrar regularidades en prismas y pirámides relacionando caras, aristas y vértices.
- Reconocer poliedros regulares (sólidos platónicos).
- Buscar regularidades en poliedros convexos, con el fin de arribar, en particular, a la fórmula de Euler.
- Reconocer poliedros en objetos o construcciones de la realidad.
- Desarrollar un proyecto que relacione poliedros con una situación del mundo real, extra-matemático.

#### **3.2 Selección de los contenidos**

Los contenidos seleccionados de la Planificación de la profesora fueron: Poliedros. Elementos de poliedros: caras, aristas y vértices. Desarrollos planos de un poliedro. Clasificación de poliedros: según la cantidad de caras y según convexidad. Pirámides y prismas. Poliedros regulares. Fórmula de Euler. Relación de los anteriores contenidos con la realidad.

#### **3.3 Selección de recursos y materiales**

Los materiales y recursos que se utilizaron fueron: pizarrón, pizarra digital, tablets, software ActivInspire, programas (PolyPro, GeoGebra 3D, Illuminations -Geometric Solids-, etc.), Internet, aula virtual, guía de apoyo, guía de actividades, material de estudio, piezas poligonales de cartón, poliedros contruidos de cartón, poliedros de madera facilitados por el colegio (caja de poliedros), envases de productos comerciales, cinta adhesiva, tijera, materiales que usamos en la realización del proyecto como por ejemplo planchas de cartón, entre otros. Cabe señalar que los programas PolyPro y GeoGebra 3D no se podían utilizar en las tablets porque no poseen una versión para ese soporte, solo fue posible mostrarlos y manipularlos a través de la pizarra digital. En la Figura 6 se muestran algunos de los recursos que se utilizaron.



Poliedros de madera del colegio.

Piezas poligonales de cartón.

Envases de diferentes productos.

Figura 6: Algunos recursos que fueron de gran utilidad en el desarrollo de las actividades.

### 3.4 Participación de los alumnos

En el transcurso de nuestras prácticas procuramos mantener el estilo de trabajo habitual de cada curso, tal como fue descrito en la sección 1.4. La estrategia de discusión y debate a la hora de introducir, realizar y/o corregir las actividades favoreció el compromiso de los estudiantes en la clase. Así también la concentración, la disciplina y la disposición para el trabajo, no eran impuestos desde nuestra autoridad (en la mayoría de los casos) sino que los alumnos asumían un rol activo de manera autónoma. Esto se reflejó en el entusiasmo que mostraban los alumnos ante el desafío de cada actividad, motivados a querer mostrar sus producciones en el momento de la corrección al frente. Allí, el alumno comunicaba lo que había hecho y el resto de los compañeros lo validaba y comparaba con sus propias producciones.

En general en los tres cursos hubo muy buena participación de los alumnos en el trabajo diario de cada día y en cada actividad desarrollada.

### 3.5 Organización del escenario áulico

Las actividades que planteamos fueron variadas y requerían, en algunos casos, el trabajo grupal (de a pares o de a cuatro) y en otros, el trabajo individual permitiendo la discusión con algún compañero. También, en varias ocasiones, la clase funcionaba de manera colectiva, donde se realizaban debates y discusiones entre los alumnos sobre actividades, definiciones, u otras tareas.

Puesto que los bancos estaban atornillados al piso, se presentaron algunas dificultades para realizar alguna actividad grupal o cuando, al momento de la corrección, cada alumno debía regresar a su banco para hacer los registros correspondientes en sus carpetas. Por este motivo, en algunas ocasiones como el momento de la realización del proyecto –que describiremos en la sección 3.8.2–, fue utilizado el laboratorio o la biblioteca para realizar las tareas propuestas.

### 3.6 Organización y secuenciación de los contenidos

En el desarrollo de nuestras prácticas, se distinguen dos instancias. Primero se trabajó en forma **intra-matemática**, mediante la construcción, clasificación y descripción de poliedros, búsqueda de regularidades con ellos, etc.; luego se trabajó de manera **extra-matemática**, identificando poliedros en el mundo real y realizando un proyecto de construcción asociado a una situación de producción de envases para diferentes productos.

Planificamos el abordaje de los contenidos en cuatro etapas o semanas. Si bien las referencias al mundo real estarían presentes a lo largo de toda la práctica, en términos generales puede decirse que en las tres primeras semanas trabajaríamos de forma intra-matemática y en la cuarta semana el trabajo, a partir del proyecto, sería extra-matemático.

A continuación podemos ver la organización y secuenciación<sup>2</sup> general correspondiente a cada semana, detallando las actividades y contenidos a desarrollar. Incluimos también algunas observaciones preliminares en relación a las actividades. Aclaramos que esta propuesta fue preparada inicialmente para cuatro semanas, y al ser implementada se extendió a cinco semanas, debido a imprevistos como feriados o actividades de la institución que impidieron el desarrollo del cronograma planificado inicialmente. Posteriormente mostramos los cronogramas efectivamente implementados en cada uno de los cursos.

### Primera semana

<b>Actividades propuestas para los alumnos</b>	<b>Contenidos asociados a las actividades a ser presentados por el practicante</b>
Actividad de construcción de poliedros con piezas poligonales de cartón (Actividad 1).	Definición de poliedro.
Actividad de descripción de las construcciones (Actividad 2).	Definición de los elementos de un poliedro: caras, aristas y vértices.  Clasificación de poliedros según su cantidad de caras.
<b>Observación:</b> En estas dos primeras actividades hay un proceso de exploración donde la manipulación es central para el reconocimiento de los cuerpos, su construcción, la descripción de sus características y elementos.	
Actividad de selección de poliedros (Actividad 3) con el fin de crear un criterio para clasificarlos (convexidad), distinguiendo los convexos de los no convexos.	Definición de poliedro convexo.
Actividad de distinción de poliedros convexos en el mundo real mediante el uso de sus cámaras (tablets) para afianzar lo anterior (Actividad 4).	
<b>Observación:</b> Con estas actividades se pretende desarrollar la capacidad de clasificar, a través de la creación de criterios que los alumnos entiendan pertinentes.	
Actividad de desarmado para obtener desarrollo de poliedros previamente construidos por nosotros y de envases de productos (por ejemplo caja de té, remedios, etc.) entregados a los alumnos. Registro fotográfico de los poliedros y sus desarrollos en las actividades (Actividad 5).  Visualizar y comparar cada poliedro y su desarrollo plano mediante el uso del software PolyPro, con el fin de ver que no son únicos.  Uso de la página	Definición de desarrollo de un poliedro.  Discusión acerca de la diferencia entre el desarrollo de un poliedro ideal y un poliedro de la realidad (cajitas).

<sup>2</sup> Esta planificación fue realizada antes de comenzar las prácticas, es por eso que está escrita en tiempo futuro.

<a href="http://www.korthalsaltes.com/es/visual_index.php">http://www.korthalsaltes.com/es/visual_index.php</a> ) para analizar las aletas (las partes del desarrollo auxiliares para la construcción) en las imágenes del desarrollo de cada cuerpo que se encuentran en la misma y de las cajitas utilizadas en la actividad de desarmado.	
<b>Observación:</b> Con estas actividades hacemos notar la importancia de hacer referencia a la realidad y no despegarnos de ella en el avance de las actividades, sobre todo, pensando en el proyecto que proponemos para finalizar nuestras prácticas.	
Tarea que consiste en traer ejemplos de poliedros convexos y no convexos (en fotografías) que encuentren en el mundo real, mediante fotos registradas con sus tablets (Actividad 6).	Analizar y debatir en torno a las fotografías.
Actividad que integra lo visto hasta el momento (Actividad 7).	Corregir.

Al finalizar esta semana se habrá trabajado:

- construcción de poliedros;
- definición de poliedros;
- elementos de un poliedro;
- clasificación de poliedros según su cantidad de caras;
- clasificación de poliedros en: convexos y no convexos;
- definición de poliedro convexo;
- desarrollo de poliedros.

### Segunda semana

<b>Actividades propuestas para los alumnos</b>	<b>Contenidos asociados a las actividades y acciones a ser realizadas por el practicante</b>
Actividad de identificación de pirámides y prismas (Actividad 8).	Presentar definición de pirámides y prismas.
<b>Observación:</b> Nuevamente hacemos hincapié en la capacidad de clasificar -creando criterios- como herramienta principal para abordar los contenidos que se pretenden.	
Actividad de búsqueda de regularidades con pirámides, descubriendo características generales. Encontrar relaciones entre el número de caras, aristas y vértices expresándolas en lenguaje coloquial y simbólico (Actividad 9).	Mostrar el desarrollo de pirámides mediante el software GeoGebra 5.0 3D y repasar características de pirámides.
Actividad que tiene como propósito el uso de las regularidades encontradas (Actividad 10).	
Actividad de búsqueda de regularidades con prismas, descubriendo características generales. Encontrar relaciones entre el número de caras, aristas y vértices expresándolas en lenguaje coloquial y simbólico (Actividad 11).	Mostrar el desarrollo de prismas mediante el software GeoGebra 5.0 3D y repasar características de prismas.
Actividad que tiene como propósito el uso de las regularidades encontradas (Actividad 12).	
<b>Observación:</b> En las actividades de búsqueda de regularidad hay un proceso de exploración y análisis que es esencial para encontrar relaciones pertinentes. Se estimula la utilización del lenguaje matemático adecuado para comunicar las producciones y argumentarlas.	

Al finalizar esta semana se habrá trabajado:

- identificación de pirámides y prismas;
- definición de pirámides y prismas;
- búsqueda de regularidades en pirámides;
- relaciones entre el número de caras, aristas y vértices;
- desarrollo de pirámides;
- búsqueda de regularidades en primas;
- relaciones entre el número de caras, aristas y vértices;
- desarrollo de prismas.

### Tercera semana

Actividades propuestas para los alumnos	Contenidos asociados a las actividades y acciones a ser realizadas por el practicante
Actividad de exploración con el propósito de arribar a la fórmula de Euler <sup>3</sup> (explorar una tabla con datos relacionados con número de caras, aristas y vértices que ya han encontrado en actividades anteriores) (Actividad 13).	Discutir la validez de la fórmula de Euler en diferentes poliedros.
Actividad de aplicación de la fórmula de Euler con el objetivo de consolidar y aplicar esta fórmula para predecir y hacer cálculos (Actividad 14).	Presentar definición de poliedros regulares a partir de la investigación realizada por los alumnos.
Actividad de investigación de poliedros regulares usando Internet, con el fin de averiguar su existencia y sus características (Actividad 15).	<b>Observación:</b> En la actividad de investigación en Internet, hay un proceso de búsqueda de información a través de un medio masivo y conocido por todos como es Internet, y es central un análisis cuidadoso de esa información para poder organizarla en un informe, comunicándola en forma coherente a quien corresponda.
Manipular en sus tablets los poliedros regulares con el software Geometric Solids ( <a href="http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521">http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521</a> ).	Explicar la existencia de los únicos cinco poliedros regulares mediante el software Geometric Solids <sup>4</sup> .
Proyecto	Presentar el proyecto de construcción de envases y dar inicio con él.

Al finalizar esta semana se habrá trabajado:

- fórmula de Euler;
- poliedros regulares;
- inicio del proyecto.

### Cuarta semana

A fin de integrar los conocimientos desarrollados en las semanas anteriores, fomentando la imaginación y creatividad del alumno, se propondrá el desarrollo de un

<sup>3</sup> La fórmula de Euler fue descubierta por los alumnos en la actividad de búsqueda de regularidades en pirámides y prismas, por lo cual modificamos y cambiamos esta actividad por otra que tenía como fin la verificación de la fórmula en una gran variedad de poliedros.

<sup>4</sup> Esta actividad no fue realizada debido a que no contábamos con el tiempo suficiente para desarrollarla.



proyecto de construcción de envases para diferentes productos. En este, los alumnos, en grupos de cuatro, deberán diseñar y construir un envase para un determinado producto. Podrán usar programas de sus tablets para el diseño de las construcciones (por ejemplo un programa que permite realizar mediciones de objetos), y otras tecnologías (GeoGebra, por ejemplo). Tendrán que presentar, por grupo, los envases que realizaron y elaborar un informe de su proyecto en función de pautas presentadas. El trabajo desarrollado por los grupos, el envase final y el informe serán evaluados. Los detalles referidos a este proyecto son presentados en la sección 3.8.2 *Trabajando de forma extra-matemática: Proyecto*.

### 3.7 Cronogramas implementados

A continuación se muestran los cronogramas que implementamos en cada curso. Cada uno ilustra la información fiel de cómo se fueron administrando las actividades en cada clase, teniendo en cuenta que ciertos imprevistos como días feriados, actos u otras actividades de la institución, afectaron nuestra planificación original e implicó la eliminación de algunas actividades.

Para facilitar la organización del trabajo en aula, decidimos pensar las clases divididas en “momentos” de 40 minutos de duración. Así, dependiendo de los cursos, algunas clases constarían de un momento, otras de dos y otras, como en el caso de 1°C, de tres momentos. En las tablas que mostramos a continuación se puede ver la distribución de las actividades por semanas, clases y momentos para cada uno de los cursos. También incluimos el número correspondiente de cada actividad. Las actividades serán descritas en detalle en la sección 3.8 *Acerca de las actividades*.

La Tabla 1 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1°A.

Semanas	Clases	Tiempo de duración	Actividades realizadas en cada clase
PRIMERA SEMANA	Clase 1 11/08	Único momento	Actividad de construcción (Actividad 1). Definición de poliedro.
	Clase 2 13/08	Primer momento	Ejemplos y contraejemplos de poliedros. Actividad de descripción (Actividad 2). Identificación y definición de caras, aristas y vértices.
		Segundo momento	Criterios de clasificación según la cantidad de caras. Actividad de selección para distinguir poliedros convexos (Actividad 3). Definición de poliedro convexo. Tarea de toma de fotografías (mundo real).
SEGUNDA SEMANA	Clase 3 20/08	Primer momento	Actividad de reconocimiento de poliedro convexo o no convexo (Actividad 4). Corrección tarea. Actividad de desarmado (Actividad 5): desarrollo de un poliedro. PolyPro y exploración en página de Internet donde hay desarrollos planos de poliedros.

		Segundo momento	Continúa lo anterior. Actividad reconocimiento de poliedros en la realidad (Actividad 6).
	Clase 4 <sup>5</sup> 22/08	Primer momento	Tarea: actividad de identificación de pirámides y prismas.
		Segundo momento	No hubo clases.
TERCERA SEMANA	Clase 5 25/08	Único momento	Actividad de identificación de pirámides y prismas (Actividad 8). Discusión acerca de la base de una pirámide y un prisma.
	Clase 6 27/08	Primer momento	Continúa la discusión de base de las pirámides y los prismas. Definiciones de pirámides y prismas. Nombres de estos poliedros según la forma de la base.
		Segundo momento	Actividad de búsqueda de regularidades en pirámides (Actividad 9). Tarea: actividad de aplicación de estas regularidades (Actividad 10).
	Clase 7 29/08	Primer momento	Actividad de aplicación de regularidades de pirámides (Actividad 10). Corrección actividad usando las regularidades de pirámides.
		Segundo momento	Búsqueda de regularidades en prismas (Actividad 11). Tarea: actividad aplicación de las regularidades de prismas (Actividad 12).
	CUARTA SEMANA	Clase 8 01/09	Único momento
Clase 9 03/09		Primer momento	Corrección clase anterior.
		Segundo momento	Actividad de aplicación de la Fórmula de Euler (Actividad 13). Corrección. Actividad de aplicación de la Fórmula de Euler (Actividad 14).
Clase 10 05/09		Primer momento	Actividad de investigación de poliedros regulares (Actividad 15).
		Segundo	Presentación de resumen como punto de

<sup>5</sup> La clase 4 duro 15 minutos en vez de 80 minutos debido a una actividad en el colegio correspondiente a la feria del libro.

		momento	partida de la parte extra-matemática.
QUINTA SEMANA	Clase 11 08/09	Único momento	Proyecto: comienzo.
	Clase 12 10/09	Primer momento	Realización del proyecto.
		Segundo momento	Realización del proyecto.
	Clase 13 12/09	Primer momento	Realización del proyecto.
		Segundo momento	Finalización del proyecto.

Tabla 1: Cronograma implementado en el curso 1ºA

La Tabla 2 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1ºB

Semanas	Clases	Tiempo de duración	Actividades realizadas en cada clase
PRIMERA SEMANA	Clase 1 11/08	Primer momento	Actividad de construcción (Actividad 1). Definición de poliedro. Ejemplos y contraejemplos.
		Segundo momento	Actividad de descripción (Actividad 2). Corrección.
	Clase 2 12/08	Primer momento	Definición de caras, aristas y vértices. Criterios de clasificación según la cantidad de caras. Actividad de selección (Actividad 3) para distinguir poliedros convexos. Definición de poliedro convexo.
		Segundo momento	Definición de poliedro convexo. Actividad de reconocimiento de poliedros convexos o no convexos (Actividad 4). Tarea: tomar fotografías (mundo real).
SEGUNDA SEMANA	Clase 3 19/08	Primer momento	Actividad de desarmado (Actividad 5): desarrollo de un poliedro. PolyPro y exploración en página de Internet donde hay desarrollos planos de poliedros.
		Segundo momento	Continúa clase anterior. Reconocimiento de poliedros en la realidad (Actividad 6). Corrección de la tarea.
	Clase 4 22/08	Único momento	Actividad de identificación de pirámides y prismas (Actividad 8). Inicio de la

			corrección.
TERCERA SEMANA	Clase 5 25/08	Primer momento	Continúa la corrección. Definiciones de pirámides y prismas. Nombres de estos poliedros según la forma de la base. Actividad de búsqueda de regularidades en pirámides (Actividad 9).
		Segundo momento	Actividad de búsqueda de regularidades en pirámides (Actividad 9). Actividad usando las regularidades de pirámides (Actividad 10). Tarea actividad de búsqueda de regularidades en prismas.
	Clase 6 26/08	Primer momento	Corrección de la actividad.
		Segundo momento	Actividad de búsqueda de regularidades en prismas (Actividad 11). Corrección de la actividad.
	Clase 7 29/08	Único momento	Actividad de aplicación de las regularidades de prismas (Actividad 12) y corrección.
CUARTA SEMANA	Clase 8 01/09	Primer momento	Desarrollo plano de pirámides y prismas mediante el programa GeoGebra 5.0 3D. Actividad de fórmula de Euler (Actividad 13).
		Segundo momento	Actividad aplicación de Euler y corrección (Actividad 14).
	Clase 9 02/09	Primer momento	Continúa la corrección. Actividad de investigación de poliedros regulares (Actividad 15).
		Segundo momento	Continúa la actividad; puesta en común.
Clase 10 05/09	Único momento	Resumen. Inicio del proyecto.	
QUINTA SEMANA	Clase 11 08/09	Primer momento	Realización del proyecto.
		Segundo momento	Realización del proyecto.
	Clase 12 09/09	Primer momento	Realización del proyecto.
		Segundo momento	Realización del proyecto.

	Clase 13 12/09	Único momento	Finalización del proyecto.
--	-------------------	------------------	----------------------------

Tabla 2: Cronograma implementado en el curso 1ºB

La Tabla 3 muestra el cronograma que se implementó en el curso 1ºC.

Semanas	Clases	Duración del tiempo	Actividades realizadas en cada clase
PRIMERA SEMANA	Clase 1 12/08	Primer momento	Actividad de construcción de cuerpos geométricos (Actividad 1). Definición de poliedro. Ejemplos y contraejemplos.
		Segundo momento	Actividad de descripción (Actividad 2). Definiciones de las componentes (caras, aristas y vértices).
	Clase 2 14/08	Primer momento	Clasificación de los poliedros según su cantidad de caras. Actividad de selección (Actividad 3) para distinguir poliedros convexos. Definición de poliedro convexo. Actividad de reconocimiento de poliedros convexos o no convexos (Actividad 4).
		Segundo momento	Actividad de desarmado de poliedros y cajitas (Actividad 5). Desarrollo de un poliedro. PolyPro y página web con desarrollos planos de poliedros. Actividad reconocimiento de poliedros en la realidad (Actividad 6).
	Tercer momento	Actividad integradora (Actividad 7).	
SEGUNDA SEMANA	Clase 3 19/08	Primer momento	Corrección de la actividad integradora. Actividad de identificación de pirámides y prismas (Actividad 8).
		Segundo momento	Corrección. Definiciones de estos poliedros.
	Clase 4 <sup>6</sup> 21/08	Primer momento	Nombres de pirámides y prismas según sus bases. Actividad de búsqueda de regularidades en pirámides (Actividad 9).
		Segundo	Corrección de actividad de búsqueda de

<sup>6</sup> La clase 6 tuvo una duración de 70 minutos y no de 120 minutos debido a que los alumnos se tuvieron que retirar afectados por un acto de la escuela

		momento	regularidades en pirámides.
		Tercer momento	No hubo clases
TERCERA SEMANA	Clase 5 26/08	Primer momento	Actividad de aplicación de regularidades de pirámides (Actividad 10).
		Segundo momento	Corrección actividad de aplicación de regularidades de pirámides. Actividad de búsqueda de regularidades en prismas (Actividad 11). Como tarea: Actividad de aplicación de regularidades de prismas (Actividad 12).
	Clase 6 28/08	Primer momento	Puesta en común y corrección de regularidades en prismas.
		Segundo momento	Corrección actividad de aplicación de las regularidades de prismas. Desarrollo plano de pirámides y prismas mediante el programa GeoGebra 5.0 3D. Tarea: actividad de verificación de la fórmula de Euler (Actividad 13).
		Tercer momento	Actividad de verificación de la fórmula de Euler (Actividad 13).
	CUARTA SEMANA	Clase 7 02/09	Primer momento
Segundo momento			Corrección de lo anterior. Actividad de investigación de poliedros regulares (Actividad 15).
Clase 8 04/09		Primer momento	Puesta en común actividad de investigación de poliedros regulares. Definición de poliedros regulares. Ejemplos y contraejemplos. Resumen de todo lo estudiado, como punto de partida de la parte extra-matemática.
		Segundo momento	Iniciación del proyecto
		Tercer momento	Realización del proyecto.
QUINTA SEMANA	Clase 9 09/09	Primer momento	Realización del proyecto.
		Segundo momento	Finalización del proyecto.

Tabla 3: Cronograma implementado en el curso 1°C

### **3.8 Acerca de las actividades**

A partir de las observaciones realizadas en los cursos y la Planificación Anual de la profesora decidimos desarrollar nuestras clases en torno a actividades que incentiven la exploración y la producción de conocimiento por parte de los alumnos, posicionándolos en un papel activo y responsable de su propio hacer. Dichas actividades atendían a los objetivos planteados con el fin de presentar los contenidos y fueron articulados en dos partes, primero en un ambiente intra-matemático para luego pasar a uno extra-matemático.

Utilizando la matriz de ambientes de aprendizajes que propone (Skovsmose, 2000), podemos decir que las actividades de la primera parte contienen referencias a la matemática pura, la cual se usa como invitación para que los alumnos exploren, investiguen y expliquen. Y en la segunda parte, extra-matemática, desarrollamos un proyecto que incentiva, aún más, la exploración y el análisis, utilizando todo lo estudiado en la primera parte en un contexto vinculado al mundo real. Por este motivo, decimos que las actividades se organizan en un escenario de investigación.

Las actividades se presentaban en la pizarra digital y estaban disponibles en el aula virtual de cada curso para que los alumnos puedan verlas mediante su tablet. Se leía entre todos el enunciado, se hacían las aclaraciones correspondientes y luego se destinaba un tiempo para su realización.

Una vez que los alumnos habían trabajado en las actividades, se realizaba una puesta en común en la cual algunos de ellos pasaban al frente a comunicar sus producciones, ayudándose de la pizarra digital o el pizarrón. Los demás valorábamos lo hecho, lo comparábamos, dábamos tiempo a debates y discusiones con el fin de validar, en caso de que lo realizado fuera correcto, o de mostrar los “errores” en caso de que los hubiera. En cualquiera de los casos, otro alumno podía pasar a mostrar lo producido, mostrando la riqueza de las soluciones. Luego, con las producciones pertinentes introducíamos las definiciones correspondientes para que los alumnos las registraran en sus carpetas.

#### **3.8.1 Trabajando de manera intra-matemática**

En esta sección se muestran explícitamente las actividades que desarrollamos a lo largo de las prácticas, los objetivos que nos propusimos con cada una y breves descripciones donde destacamos cuestiones interesantes que surgieron con ellas, así como aciertos e imprevistos. Cada subtítulo de color bordó informa acerca de los contenidos que se introdujeron con tales actividades.

##### **Poliedros y sus elementos principales (caras, aristas y vértices).**

El inicio de nuestras prácticas se realizó a partir de la **Actividad 1** (de construcción) en la cual se trabajó en grupos de cuatro integrantes. El objetivo fue la construcción de cuerpos con condiciones preestablecidas para poder abordar el tema “poliedros”.

**Actividad 1:**

Con los polígonos que tienen construyan al menos dos cuerpos diferentes teniendo en cuenta las condiciones de construcción que se muestran a continuación:

- Los cuerpos no deben tener huecos.
- El lado de un polígono debe unirse completamente con el lado de otro polígono.
- Al unir dos polígonos y construir el cuerpo, los mismos no pueden quedar apoyados en un mismo plano.
- No es permitido doblar los polígonos.
- Construir el segundo cuerpo sin desarmar el primero.

Registre los cuerpos que construyeron mediante fotos tomadas de diferentes ángulos.

**Materiales:** piezas poligonales de cartón, cinta adhesiva y tijera.

Cada grupo recibió un sobre con una determinada cantidad de piezas poligonales de cartón (triángulos, cuadriláteros y pentágonos) lo que garantizó que los alumnos pudieran construir una diversidad de cuerpos. En el siguiente cuadro se detallan las piezas contenidas en cada sobre y las construcciones que podrían realizarse con esas piezas.

Sobres	Piezas	Posibles construcciones
1	3 pentágonos, 6 triángulos isósceles grandes y 8 cuadrados.	Cubo, pirámide de base cuadrada, pirámide de base pentagonal, prisma pentagonal, entre otros.
2	10 triángulos y 10 cuadrados.	Cubo, tetraedro, pirámide de base cuadrada, octaedro, prisma triangular, entre otros.
3	5 rectángulos, 4 cuadrados y 8 triángulos.	Prisma de base cuadrada, prisma triangular, pirámide de base cuadrada, tetraedro, octaedro, entre otros.
4	4 triángulos isósceles grandes, 5 rectángulos, 4 pentágonos, 2 cuadrados y 2 triángulos.	Prismas de base triangular, cuadrada y pentagonal; y pirámides de base cuadrada y base triangular.

Esta actividad no requería de conocimientos previos para poder desarrollarla; los alumnos pudieron trabajar en forma independiente por grupos y se comenzaron a manipular cuerpos en el espacio. Algunos de los poliedros que lograron construir se muestran en la Figura 7.



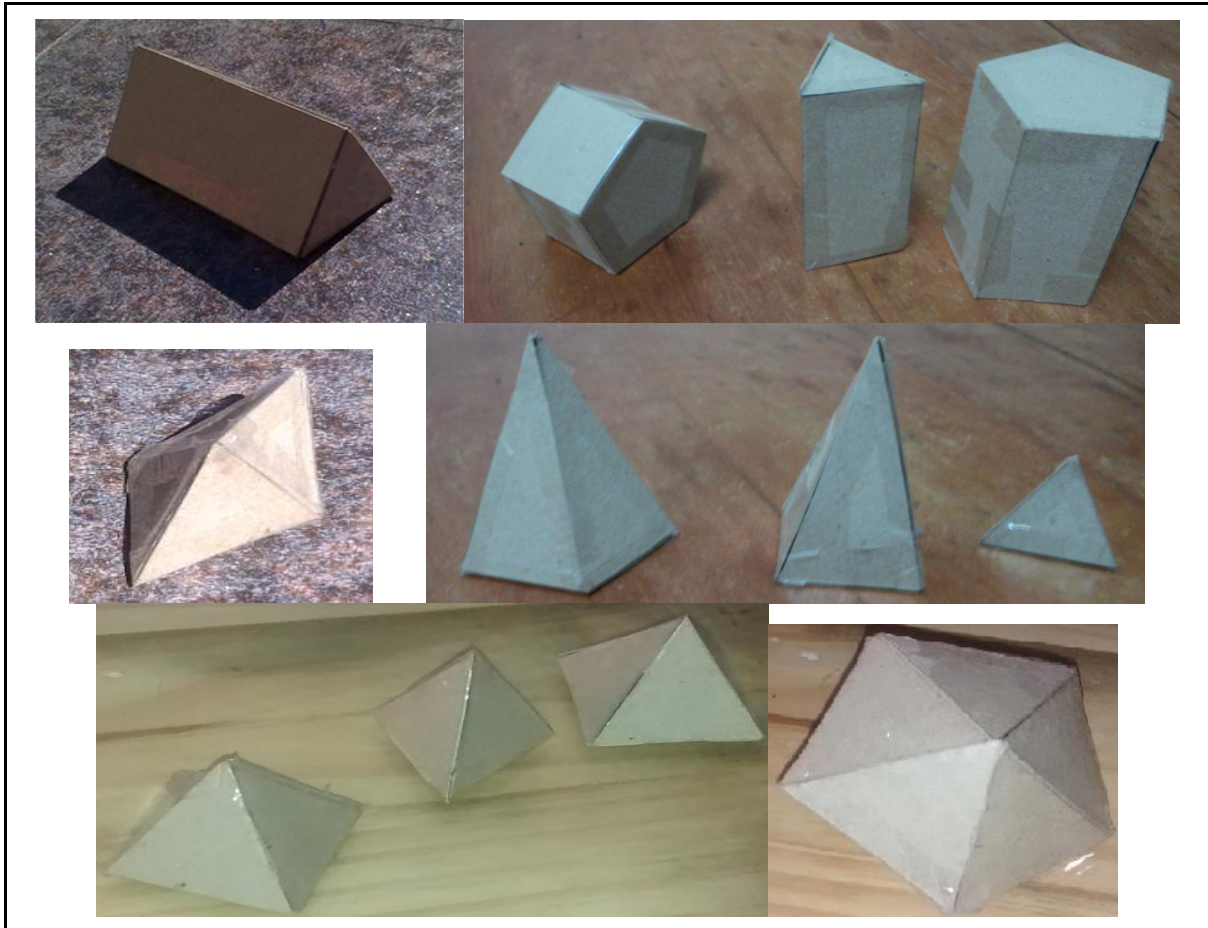


Figura 7: Poliedros construidos por los alumnos en la Actividad 1.

A partir de esta actividad se introdujo la definición de *poliedro*, que quedó registrada en la carpeta. El Cuadro 1 muestra dicha definición y una descripción de la composición de la palabra “poliedros”.

**Un poliedro es un cuerpo cerrado en el espacio y limitado por polígonos. Estos polígonos son las caras del poliedro.**

<b>POLI</b>	<b>EDROS</b>
-------------	--------------

↓

Muchas

↓

Caras

Cuadro 1: Definición de poliedro.

Con esta definición se pudieron distinguir ejemplos y contraejemplos de poliedros, tarea que los alumnos desarrollaron en la pizarra digital para todo el curso. La Figura 8 muestra los cuerpos analizados para distinguir si eran o no eran poliedros:

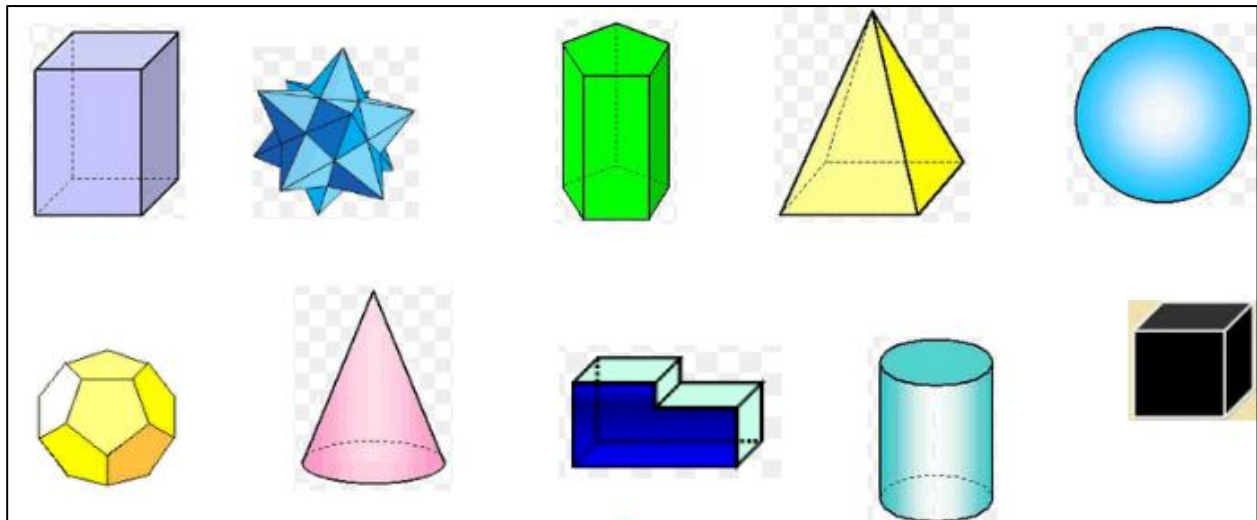


Figura 8: Ejemplos y contraejemplos de poliedros.

La **Actividad 2** (de descripción) se trabajó con los mismos grupos de cuatro integrantes que en la Actividad 1. Su propósito era lograr que los alumnos reconocieran los elementos que conforman un poliedro (vértices, aristas y caras poligonales) y la necesidad de contar con un lenguaje matemático adecuado para describirlo.

**Actividad 2:**

Realizar una descripción escrita de uno de los cuerpos construidos por el grupo, de manera que cualquiera que la lea pueda reconocerlo.

Esta actividad desafió a los alumnos a buscar nombres que desconocían para llamar al poliedro que eligieron describir y sus elementos, pensando en hacer una comunicación escrita que permitiera a otra persona reconocer el cuerpo que se estaba describiendo. En el Cuadro 2 mostramos algunas descripciones de poliedros, resultado elaboradas por alumnos en esta actividad.

**Grupo A:** Cuerpo que describió el grupo A:



Tiene 2 bases cuadradas y 4 lados rectangulares.  
 Sus bases son rectangulares y los lados también. Tiene 8  
 vértices y 6 aristas.

**Grupo B:** Cuerpo que describió el grupo B:

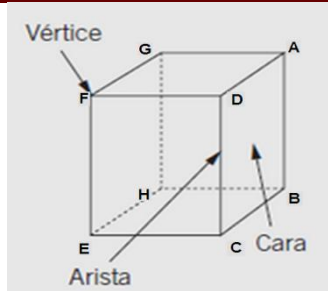
Nosotros hicimos un cono. Este cuerpo tiene las siguientes características:

- Tiene forma de carpa
- Tiene 4 triángulos.
- Un cuadrado de base.
- Es cerrado, y tiene 5 lados.
- Tiene forma de pirámide
- Tiene forma de corona
- Tiene cima puntiaguda como una montaña.

**Cuadro 2: Descripciones de poliedros de la Actividad 2.**

Así, surgieron diferentes denominaciones tales como: vértices, puntos, puntas, segmentos, uniones, lados, caras, carillas, entre otros, que pudimos rescatar y discutir para finalmente presentar la imagen que se muestra en el Cuadro 3, donde se detallan los elementos que constituyen a cualquier poliedro.

**ELEMENTOS PRINCIPALES**

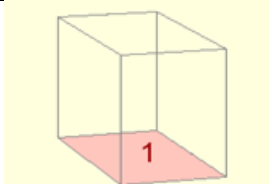


**Vértices:** A, B, C, D, E, F, G y H

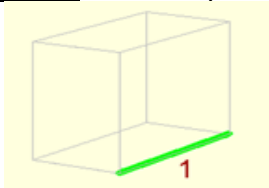
**Aristas:**  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AG}$ ,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{DF}$ ,  $\overline{EH}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$ ,  $\overline{GH}$

**ELEMENTOS PRINCIPALES**

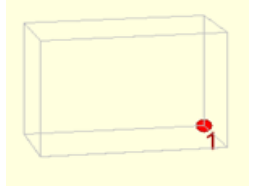
**Caras** son los polígonos que forman el cuerpo.



**Aristas** son cualquier lado común a dos caras.





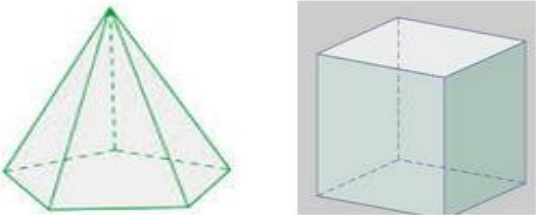
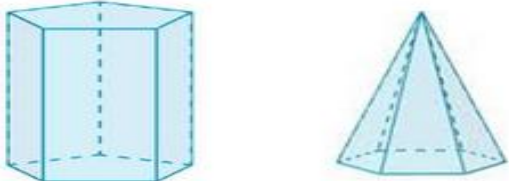
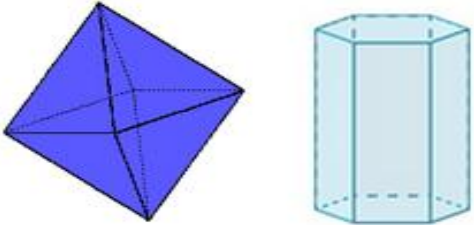
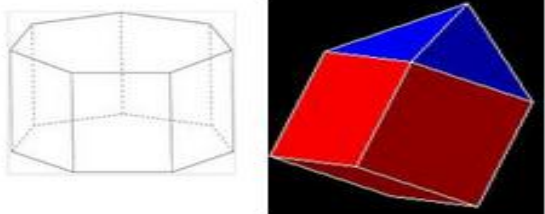
**Vértices** son los puntos donde se juntan más de dos aristas.

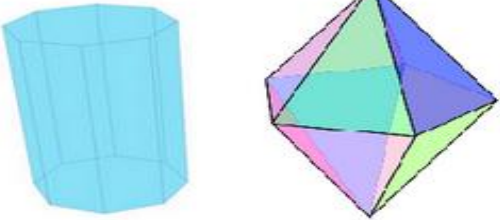
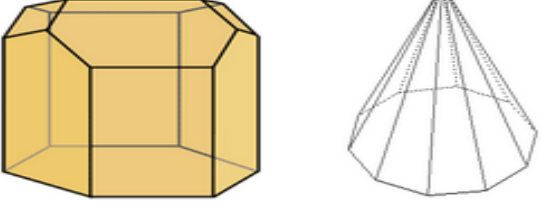
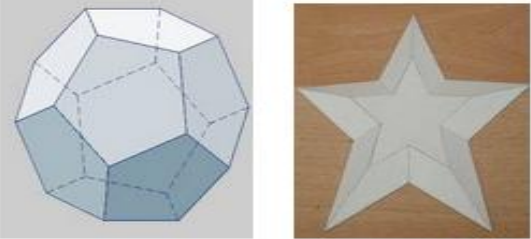
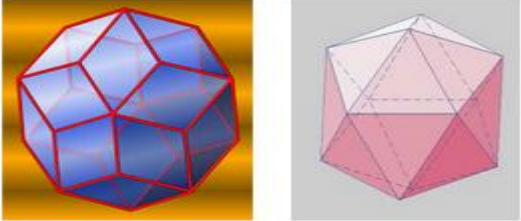


Cuadro 3: Elementos del poliedro y definición de cada uno.

**Clasificaciones según cantidad de caras y según convexidad: poliedros convexos y no convexos.**

En el estudio de polígonos que los alumnos habían realizado inmediatamente antes de comenzar nuestras prácticas, se tuvo en cuenta como criterio de clasificación la cantidad de lados que formaban al polígono. A fin de clasificar los poliedros según la cantidad de caras, se realizó una analogía con los polígonos, destacando los prefijos que ya conocían tales como penta, hexa, hepta, etc. Se presentó la siguiente tabla (Cuadro 4) para detallar la clasificación de poliedros según la cantidad de caras:

<p><u>Tetraedro</u> → 4 caras</p>	
<p><u>Pentaedro</u> → 5 caras</p>	
<p><u>Hexaedro</u> → 6 caras</p>	
<p><u>Heptaedro</u> → 7 caras</p>	
<p><u>Octaedro</u> → 8 caras</p>	
<p><u>Eneaedro</u> → 9 caras</p>	

<p><u>Decaedro</u> → 10 caras</p>	
<p><u>Undecaedro</u> → 11 caras</p>	
<p><u>Dodecaedro</u> → 12 caras</p>	 <p><u>Aclaración:</u> este poliedro tiene como base un polígono con forma de estrella</p>
<p><u>Icosaedro</u> → 20 caras</p>	

Cuadro 4: Clasificación de poliedros según su cantidad de caras.

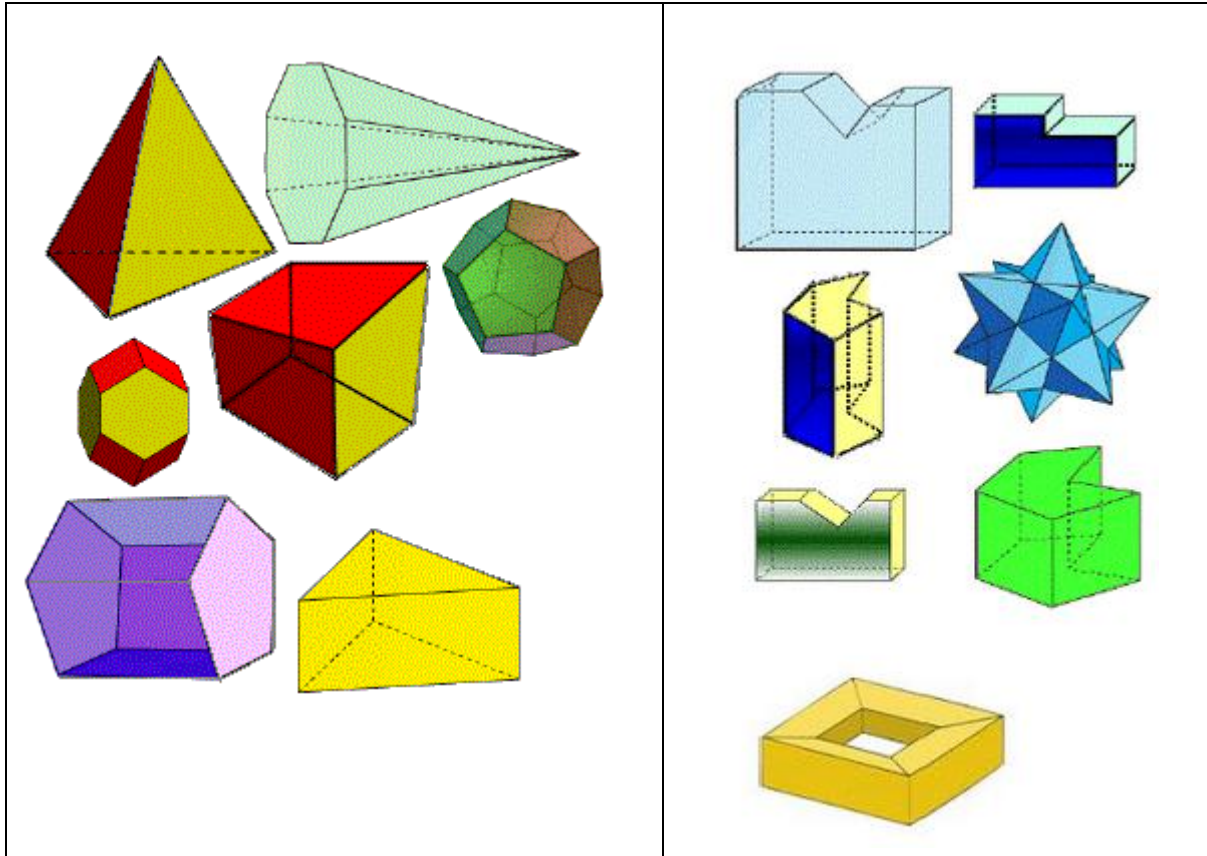
Para poder reconocer poliedros según la cantidad de caras, fue imprescindible la manipulación física de los poliedros (de la caja de poliedros de la institución) puesto que en algunos casos es muy dificultoso contar sus caras a partir de una imagen plana, como las que se muestran en el Cuadro 4.

Además de la clasificación según la cantidad de caras del poliedro, se quería distinguir poliedros convexos de no convexos para lo cual se presentó la **Actividad 3** (de selección) que se trabajó de forma individual, pero pudiendo discutir con sus compañeros.

**Actividad 3:**

Dos alumnos de tercer año encontraron varios poliedros de colores en una caja y decidieron clasificarlos en dos grupos, sin importar el color que tenían.

1. ¿Por qué te parece que los han agrupado de esta manera? ¿Qué criterio/s de clasificación habrán usado?
2. ¿Hay diferencias entre ellos? ¿Cuáles?



Discutan con un compañero las preguntas y anoten en sus cuadernos todas las ideas que surjan.

En esta actividad se puso en juego la capacidad de clasificar, donde los alumnos debieron crear criterios que la justifiquen. El objetivo fue generar un nuevo criterio de clasificación (**convexidad**), para distinguir poliedros **convexos** de **no convexos**. Este criterio había sido estudiado para clasificar polígonos, lo cual favoreció el desarrollo de la actividad, induciendo a los alumnos a establecerlo como criterio que justificaba esta separación. De esta manera, la mayoría de los alumnos llamaron al grupo de la izquierda “poliedros convexos” y al de la derecha “poliedros cóncavos”, justificando que en los poliedros de este último grupo, si se traza una recta contenida en cierta/s cara/s, esa recta atravesaría el poliedro y por eso no sería convexo. La imagen de la Figura 9 ilustra esta idea proveniente de la noción de polígono convexo que los alumnos tenían al haberlo estudiado antes:

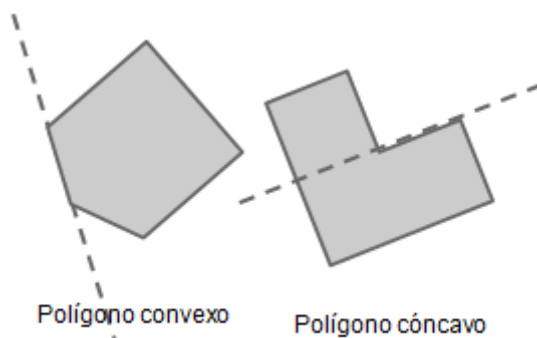


Figura 9: Polígono convexo o cóncavo.

Esta idea fue muy útil y pudimos rescatarla para dar una noción de poliedro convexo, pero en vez de hablar de recta hablaríamos de plano que atraviesa al poliedro.

Las imágenes de la Figura 10 muestran un poliedro no convexo con un plano apoyado sobre una de sus caras y que lo atraviesa:

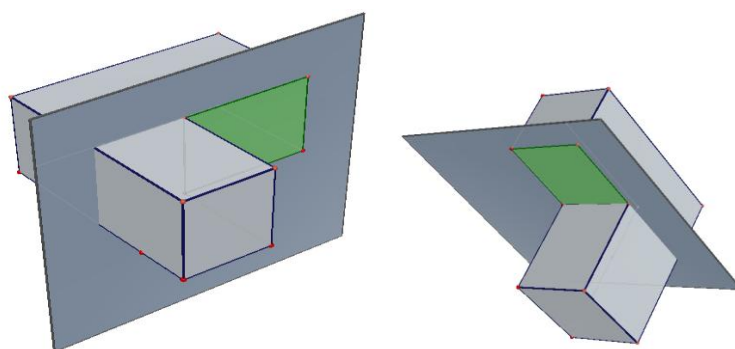


Figura 10: Poliedro no convexo.

Un poliedro no convexo como el que muestra la Figura 10 fue construido por nosotros y nos ayudó en muchos momentos, ya que en la caja de poliedros de madera solo había poliedros convexos. Fue importante poder manipularlo para distinguir con claridad la noción de convexo, que se logró luego de la comunicación de los criterios de clasificación de los alumnos y los debates que surgieron al respecto. En la Figura 11 se muestran imágenes de dicho poliedro.

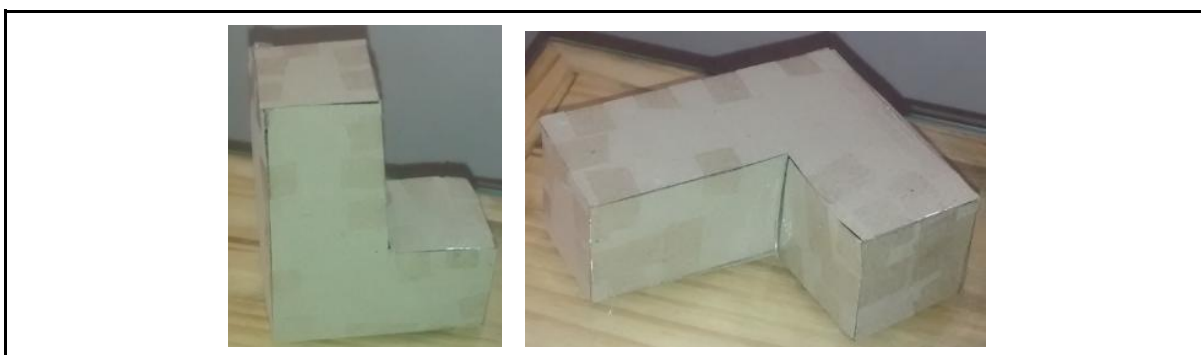


Figura 11: Poliedro no convexo construido con cartón.

El Cuadro 5 muestra la noción de poliedro convexo que introdujimos:

***Un poliedro es convexo si todas sus caras se pueden apoyar sobre un plano y, al mismo tiempo, el poliedro no es cortado o atravesado por el plano.***

Cuadro 5: Noción de poliedro convexo.

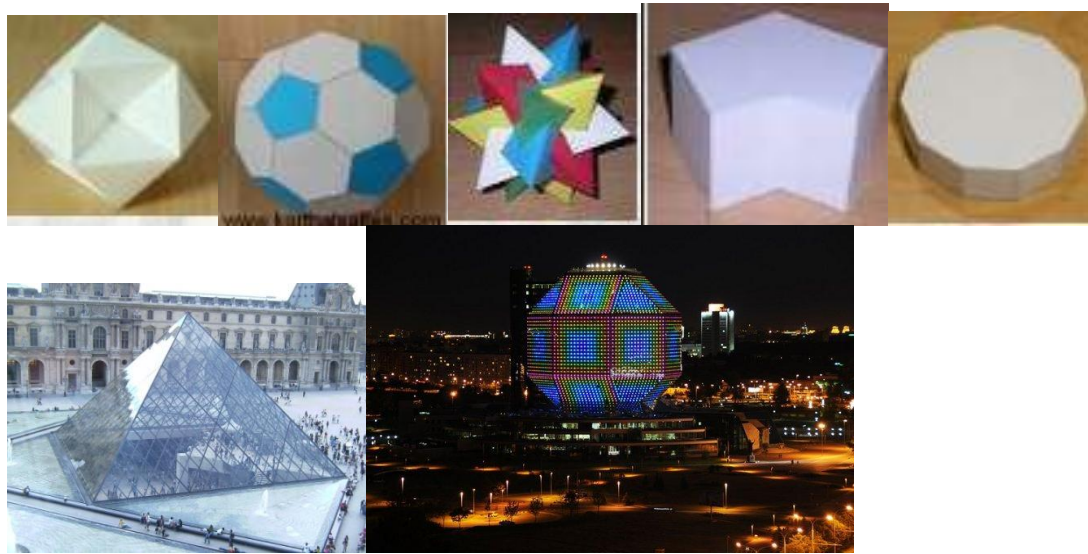


En algunos cursos surgieron dudas (que no fueron profundizadas) en relación a las diagonales de un poliedro, puesto que en polígonos convexos se había visto que sus diagonales quedaban enteramente contenidas dentro del polígono convexo respectivo. Aclaramos brevemente que no estudiaríamos las diagonales de un poliedro e indicamos algún ejemplo de diagonal entre todos en la pantalla digital (preguntamos cuál podría ser una diagonal del poliedro), sin especificar demasiado. Lo mismo ocurrió con los ángulos de un poliedro.

Una vez trabajada la noción de poliedros convexos, se propuso la **Actividad 4** (de reconocimiento de poliedros convexos o no convexos) que se trabajó en la pizarra digital haciendo pasar de a un alumno a decir qué tipo de poliedro es y por qué.

#### **Actividad 4:**

Reconocer entre todos los poliedros presentados cuáles son convexos y cuáles son no convexos.



Con esta actividad se buscó aplicar el criterio de clasificación basado en la convexidad, distinguiendo poliedros convexos de los no convexos e identificando la presencia de poliedros en construcciones del mundo real.

A partir de esta actividad, aclaramos que en las siguientes, sólo íbamos a trabajar con poliedros convexos.

#### **Desarrollo de un poliedro**

A diferencia de lo que veníamos haciendo, que se relacionaba más con la construcción de poliedros, lo que hicimos a continuación, fue proponer una actividad donde hubiera que desarmar poliedros con el fin de encontrar una nueva característica que los representara.

La **Actividad 5** (de desarmado) se trabajó en grupo de dos integrantes.

**Actividad 5:**

Para realizar esta actividad les entregamos un poliedro de cartón y una cajita que se usa como envase de algún producto.

**a)** En el poliedro de cartón se deberán ir haciendo cortes por las aristas (una vez cada alumno) de manera que ninguna de las caras quede separada del poliedro. Se procederá así hasta que no se puedan hacer más cortes, es decir, el corte siguiente dejaría fuera del poliedro una o más caras. Deberán asegurarse entre ambos compañeros si no es posible ningún corte más.

**b)** En cuanto a las cajitas, las deberán ir desarmando a mano (sin el uso de tijeras como antes) y al igual que con los poliedros, ninguna de las caras debe quedar separada.

*(Aclaración: cada cara debe quedar unida a las otras por una o más aristas.)*

Registren fotográficamente el resultado que obtuvieron.

**Materiales:** poliedros convexos (construidos por nosotros), cajitas, cinta adhesiva y tijeras

Para realizar esta actividad construimos previamente cuatro tipos de poliedros diferentes y entregamos uno a cada grupo. En la Figura 12 se muestran los cuatro tipos de poliedros junto a sus desarrollos planos como aparece en el programa PolyPro.

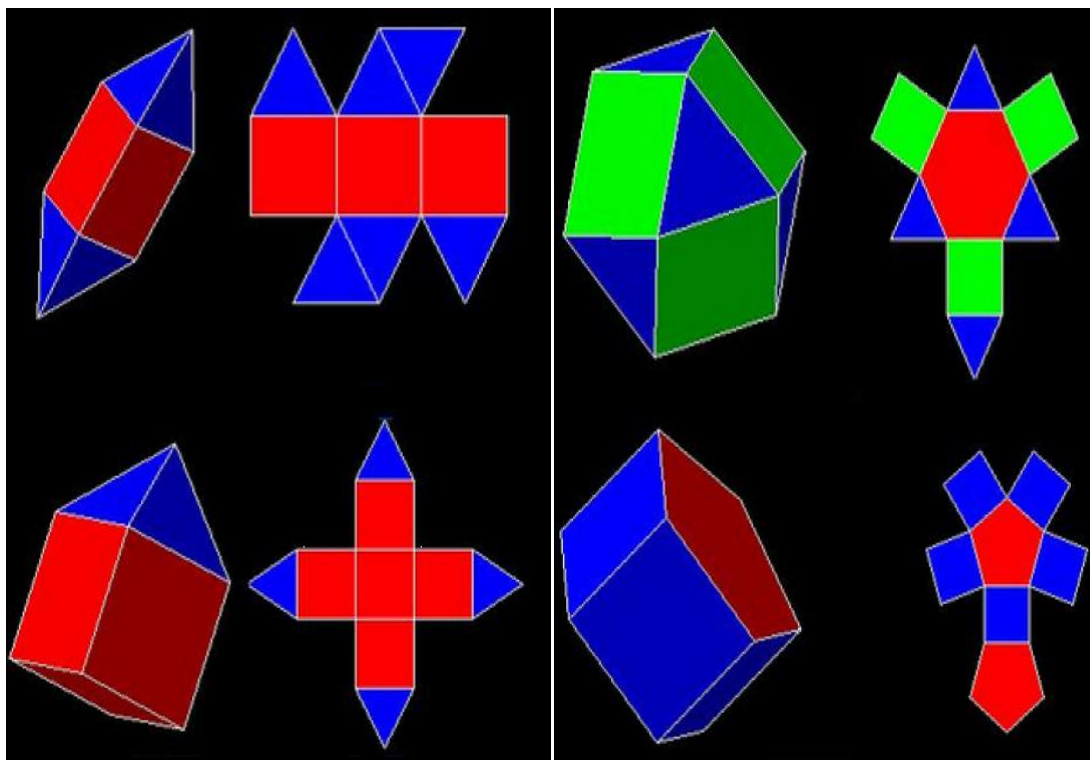
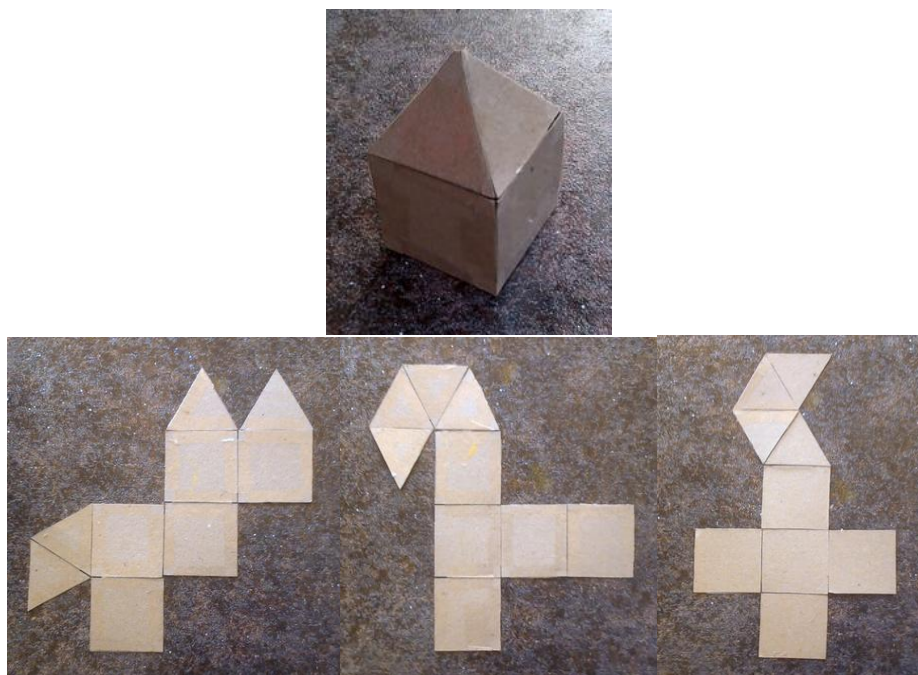


Figura 12: Poliedros que utilizamos en la Actividad 5, representados en el programa PolyPro.

El objetivo de esta actividad fue, a través de la exploración, el ingenio y el juego, obtener una representación de un poliedro en forma plana que se llamó **desarrollo de un poliedro**; y, a través de la discusión y debate en grupos, definir cuestiones como si el desarrollo obtenido a partir de un poliedro es único o si se pueden obtener otros poliedros al

rearmar el desarrollo, encontrando así nuevas características de los poliedros y sus representaciones. Fue interesante ver que cada grupo obtenía distintos desarrollos para un mismo poliedro, incluso diferentes al que mostraba el programa PolyPro. En la Figura 13 se muestran distintos desarrollos obtenidos por los alumnos a partir de un mismo poliedro.



**Figura 13: Desarrollos de un mismo poliedro.**

Un hecho particular de esta actividad ocurrió en uno de los cursos cuando se estaba realizando un debate para encontrar las características de un desarrollo plano y se destacaba que *a partir de un desarrollo sólo se puede construir un poliedro*. En ese momento, uno de los estudiantes pasó al frente cuestionando esta afirmación y mostrando que había podido construir un poliedro diferente al que había desarmado. Fue a partir del desarrollo del cuerpo que muestra la Figura 13 que este alumno pudo construir un poliedro no convexo. En la Figura 14 se muestra el cuerpo no convexo que construyó el alumno.



**Figura 14: Poliedro no convexo construido a partir del desarrollo plano presentado en la Figura 13.**

Este hecho resultó interesante pues, si bien habíamos aclarado que sólo íbamos a trabajar con poliedros convexos, no habíamos tenido en cuenta esta posibilidad en nuestra planificación, lo que nos llevó a modificar lo que estábamos afirmando, es decir, ahora diríamos que *partiendo de un desarrollo plano sólo se puede construir un único poliedro, y hacemos referencia a un único poliedro convexo*.

En el inciso b) de la Actividad 5 se pedía desarmar una cajita bajo ciertas condiciones. La Figura 15 muestra un poliedro matemático y su desarrollo plano, y la Figura 16 muestra un envase, que se corresponde con la forma del poliedro anterior, y el desarrollo plano que se obtuvo al desarmarlo, mostrando la presencia de aletas.

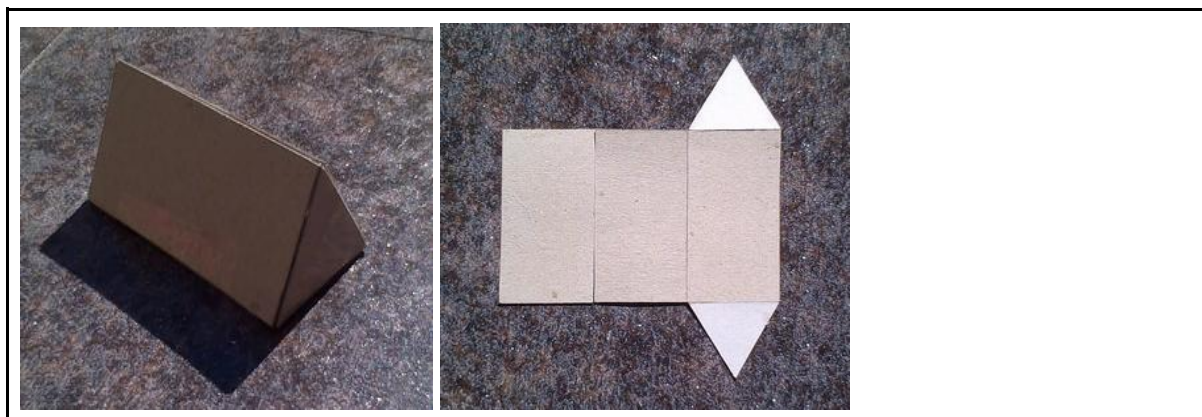


Figura 15: Poliedro y su desarrollo plano ideal.



Figura 16: Cajita y su desarrollo plano con aletas.

Aquí se pudo visualizar que al desarmar el envase, este presentaba partes extras (sombreadas con gris en la Figura 16) cuya presencia respondía a fines prácticos y de diseño: protección del producto pensando en su distribución, almacenaje y venta. Esta distinción se realizó en clases: los alumnos pudieron notarlo al desarmar los envases que tenían a disposición para la actividad. Con esto, íbamos preparando el terreno pensando en el proyecto final, donde deberían tener en cuenta todas estas cuestiones de utilidad y diseño al construir un envase para un determinado producto.

La realización de la Actividad 5 nos permitió introducir la definición de desarrollo de un poliedro, que se muestra en el Cuadro 6.

El **desarrollo de un poliedro** es una representación plana del mismo. Tal desarrollo lo caracteriza, lo representa y permite construirlo.

Cuadro 6: Definición de desarrollo de un poliedro.

Luego de trabajar con esta actividad, se mostró a los alumnos la página [http://www.korthalsaltes.com/es/visual\\_index.php](http://www.korthalsaltes.com/es/visual_index.php) con el propósito de explorar distintos desarrollos de cuerpos que presentaba la misma. Además, brindaba la posibilidad de imprimir desarrollos de poliedros para luego armarlos.

**Poliedros en el mundo real**

La **Actividad 6** (de reconocimiento de poliedros en la realidad) se hizo individualmente y se planteó como tarea para la casa.

**Actividad 6: Tarea**

Toma fotografías de objetos o construcciones que se encuentren en tu entorno cotidiano y que puedas clasificar como ejemplos de poliedros convexos o no convexos.

Esta actividad fue requerida como tarea en los cursos 1°A y 1°B, con el propósito de relacionar los poliedros con el mundo real. Por la distribución de las clases, en el curso 1°C no se pudo realizar la actividad como tarea, por lo que se planificó una actividad alternativa donde se presentaron fotos (objetos de la realidad) de poliedros convexos y no convexos a través de la pantalla digital, con el fin de que los alumnos reconocieran poliedros en la realidad y los clasificaran. Así en este curso la **Actividad 6** fue la siguiente:

**Actividad 6:**

Reconocer entre todos los poliedros presentados cuáles son convexos y cuáles son no convexos.



Se identificaron como poliedros diversos objetos y construcciones de la realidad, salvando algunos “detalles” que podían presentar los mismos, como huecos de ventanas, bordes, etc. que no atendían a la definición matemática de poliedro. Se entendió que para tal identificación se requería ver a los objetos con una mirada matemática. Por ejemplo, en el caso del obelisco de la ciudad de Buenos Aires, este posee una ventana en una de sus

“caras” que genera en el cuerpo un hueco; se analizó y debatió con los alumnos si a pesar de la existencia de ese hueco, el obelisco (por su forma) podía ser considerado como un poliedro. Luego, se llegó a la conclusión de que es necesario abstraerse de algunos detalles de estos cuerpos de la realidad para reconocerlos como poliedros de la matemática, o dicho de otra manera, mirar con ojos de matemático.

La **Actividad 7** (actividad integradora) se trabajó en grupos de cuatro integrantes y para realizarla entregamos uno de los poliedros que habían construido los alumnos en la Actividad 1.

Aclaremos que esta actividad no fue realizada en los cursos 1°A y 1°B debido a que en ellos se hizo este tipo de actividad durante los repasos que se realizaban al comienzo de cada clase.

**Actividad 7:**

Trabajar con el poliedro que les fue entregado:

1. Dibujar un desarrollo del poliedro sin desarmarlo.
2. Reconocer sus partes (caras, aristas y vértices) y contarlas.
3. Decidir porque es un poliedro convexo.
4. Clasificar el poliedro según su cantidad de caras.

Cada integrante del grupo deberá registrar en sus carpetas lo hecho.

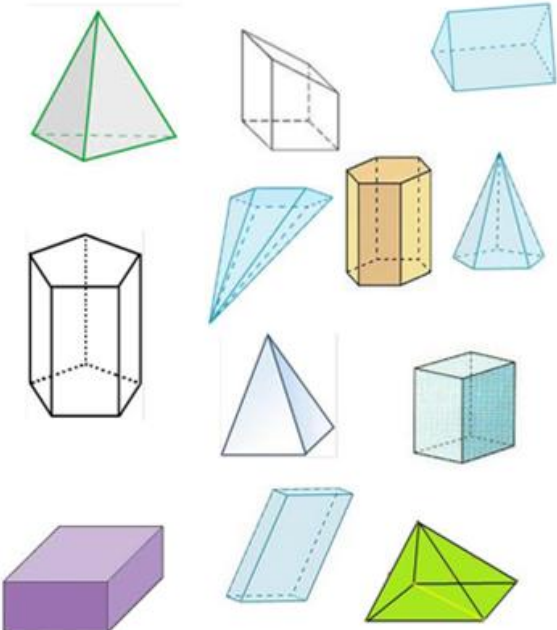
El objetivo de la Actividad 7 fue consolidar los conceptos y el uso del lenguaje en relación a lo que se había estudiado hasta el momento (caras, aristas, vértices, tipo de poliedro según la cantidad de caras, poliedro convexo, desarrollo del poliedro).

**Pirámides y prismas**

La **Actividad 8** (identificación de pirámides y prismas) se trabajó de forma individual pero pudieron discutir con sus compañeros.

**Actividad 8:**

Un alumno encontró un archivo en su tablet que está lleno de poliedros y necesita tu ayuda para acomodarlos, clasificándolos en dos grupos de manera que se pueda reconocer a cada uno por características comunes y quiere que cada poliedro esté solamente en uno de los dos grupos, ¿puedes ayudarlo?

GRUPO 1	POLIEDROS ENCONTRADOS EN LA TABLET	GRUPO 2
		

¿Cuáles son las características comunes que encontraste en cada grupo?  
 Puedes discutir con un compañero.  
 Las características que encuentres debes escribirlas en tu carpeta.

El objetivo de la Actividad 8 fue desarrollar una actividad de clasificación con el fin de que queden establecidos dos grupos nuevos de poliedros: pirámides y prismas. Para esto, era necesario que los alumnos creen sus propios criterios de clasificación, y así aparezcan características que definen a pirámides y prismas.

Los criterios utilizados por los alumnos para separar los poliedros en dos grupos fueron algunos de los siguientes:

**GRUPO 1** (que corresponderían a pirámides):

- *Los poliedros están compuestos, en su mayoría, por triángulos.*
- *La mayoría de sus aristas se unen en un vértice.*
- *Presentan una punta, o cima puntiaguda.*
- *Tienen una base.*

- Son pirámides.

GRUPO 2 (que corresponderían a prismas):

- Los poliedros están compuestos, en su mayoría, por cuadriláteros.
- Tienen dos bases.
- Son prismas.

Es importante destacar el diálogo y debate que se desarrolló cuando los alumnos debieron comunicar el trabajo que habían realizado.

Por ejemplo, en 1ºA se generó un extenso debate sobre lo que era considerado como base de estos poliedros. En este caso hubo que aclarar que en un poliedro no se entiende la noción de base como en la realidad, es decir como un apoyo. Por ejemplo, si una pirámide está apoyada sobre una de sus caras laterales, no significa que esta sea la base, sino que la base sigue siendo la cara opuesta al ápice, el polígono distinto a todas las caras laterales (excepto en el caso de un tetraedro regular, en el cual cualquier cara es base. El Cuadro 7 que se muestra luego aclara esta idea). En el Material de Estudio que se encuentra en Anexo B puede verse un recuadro con título *Comentario sobre la palabra base*, que refiere a la discusión mantenida en esa clase.

También, a la hora de comunicar los criterios de clasificación, se mencionaron algunos interesantes que no eran pertinentes para los fines de nuestra actividad. Por ejemplo, un alumno propuso la siguiente separación: por un lado, los poliedros que tenían algún cuadrilátero entre sus caras y, por otro, los que no tenían ninguno. Otro ejemplo se muestra en la Figura 17. Un alumno puso en el Grupo 1 todos los poliedros cuyas caras eran del mismo tipo de polígono (se puede ver, en ese Grupo, que un poliedro está compuesto sólo por triángulos y los cuatro restantes sólo por cuadriláteros) y en el Grupo 2 todos los poliedros compuestos por caras poligonales no necesariamente con el mismo número de lados. En este caso, destacamos como interesante la clasificación, analizándola y validándola entre todos.

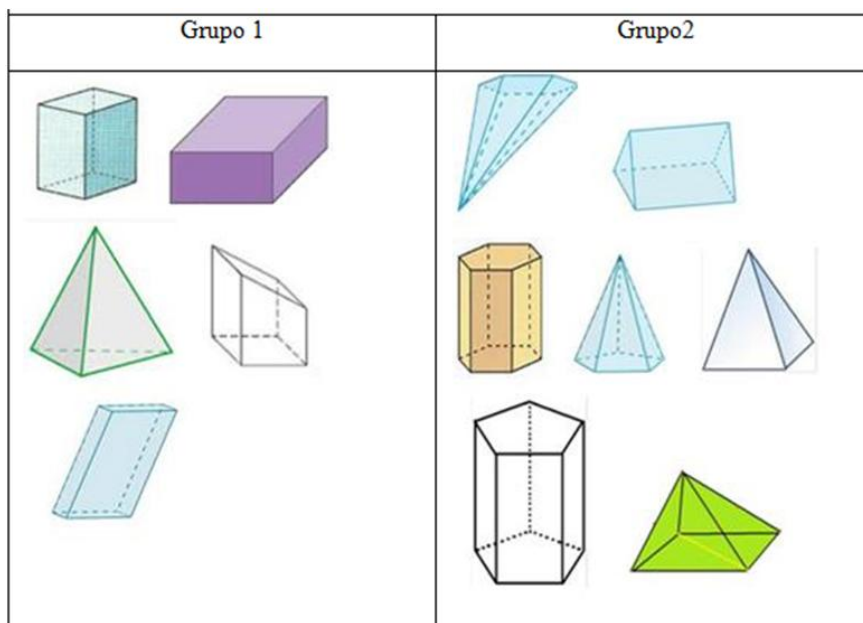
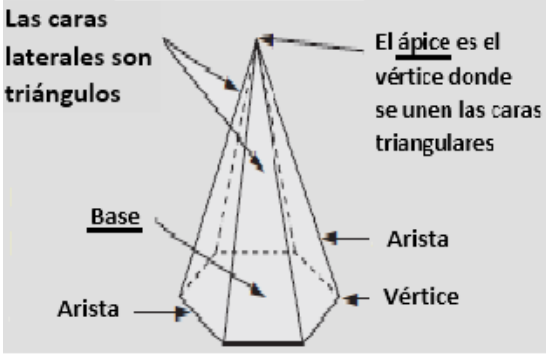


Figura 17: Solución a la Actividad 8 propuesta por un alumno.

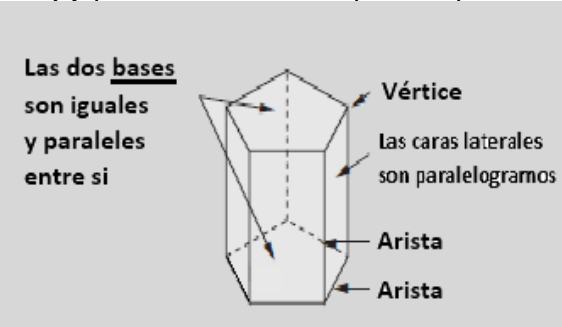


Esta actividad nos permitió introducir las definiciones de pirámides y prismas, que muestra el Cuadro 7:

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base poligonal y por caras laterales triangulares que coinciden en un vértice llamado ápice.

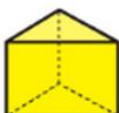

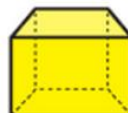

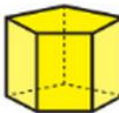

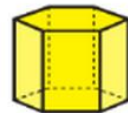



Un **prisma** es un poliedro limitado por dos caras poligonales iguales y paralelas (**bases del poliedro**) y por caras laterales que son paralelogramos.



Cuadro 7: Definiciones de pirámide y prisma.

Así, obtuvimos un conjunto de características que define a pirámides y otro a prismas. Luego, se profundizó en esta caracterización, diciendo que sus nombres dependen del polígono de la base, caracterización que muestra el Cuadro 8.

Las bases son triángulos.		Las bases son cuadriláteros.	
 Prisma triangular	 Pirámide triangular	 Prisma cuadrangular	 Pirámide cuadrangular
Las bases son pentágonos.		Las bases son hexágonos.	
 Prisma pentagonal	 Pirámide pentagonal	 Prisma hexagonal	 Pirámide hexagonal

Cuadro 8: Clasificación de pirámides y prismas según sus bases.



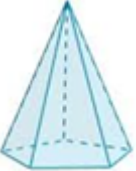
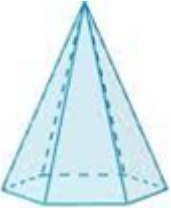
**Búsqueda de regularidades en pirámides y prismas**

Una vez introducidas las características de prismas y pirámides, decidimos proponer

escenarios para la búsqueda de regularidades entre estos cuerpos.

La **Actividad 9** (búsqueda de regularidades en pirámides) se trabajó de forma individual pero pudieron discutir con sus compañeros.

**Actividad 9:**  
 Llenar la siguiente tabla con los números y nombres que faltan.

Tipo de pirámide	Número de lados de la base (b)	Número de vértices (v)	Número de caras (c)	Número de aristas (a)
				
 Pirámide Cuadrangular	4	5	5	8
				
				

Investigar la tabla en busca de regularidades, es decir, en busca de relaciones entre los elementos de las pirámides que aparecen en las columnas de la tabla y enunciarlas en lenguaje coloquial y luego escribirlas en expresiones simbólicas.

El objetivo de la Actividad 9 fue desarrollar un trabajo de exploración y búsqueda de regularidades para encontrar relaciones entre los distintos elementos de una pirámide.

La tabla de esta actividad estaba cargada en las tablets de los alumnos y debieron completarla de forma individual. En caso que no contaran con la tablet teníamos impresa la tabla para que la completen manualmente.

La realización de la actividad fue interesante por el entusiasmo y desafío que causó en los alumnos, y se vio favorecida por el trabajo en búsqueda de regularidades que habían realizado previamente con la profesora, cuando estudiaron polígonos.

Cada regularidad que encontraron los alumnos fue comunicada por ellos al resto del curso y escrita en el pizarrón, para analizar entre todos su validez. Las regularidades que encontraron se muestran en el Cuadro 9:

Para cualquier pirámide se verifican las siguientes regularidades

$$v=c$$

$$v=b+1$$

$$c=b+1$$

$$a=b*2$$

$$v+c-2=a$$

Referencias: **v:** cantidad de vértices de la pirámide  
**c:** cantidad de caras de la pirámide  
**a:** cantidad de aristas de la pirámide  
**b:** cantidad de lados de la base de la pirámide

**Cuadro 9: Regularidades encontradas en pirámides.**

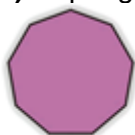
Se mencionó que la fórmula  $v+c-2=a$  fue descubierta por el matemático Leonhard Euler, motivo por el cual lleva su nombre, y se puso a disposición en el aula virtual la página web <https://www.youtube.com/watch?v=Bu52Q2HAVHs> que brinda información sobre aportes que realizó Euler a la matemática.

Con el objetivo de consolidar y hacer uso de algunas regularidades encontradas en las pirámides, se propuso la **Actividad 10** (aplicación de regularidades de pirámides) que se trabajó de forma individual, pero pudieron discutir con sus compañeros.

**Actividad 10:**

**Conteste cada pregunta registrando las respuestas en su carpeta o en un documento en la tablet.**

**a)** Supongamos que hacemos una pirámide con la siguiente base



Sin construirla, ¿podrías decir cuántos vértices, caras y aristas tiene?

**b)** Santiago dice que hizo una pirámide que tiene 20 aristas. ¿Puedes describir cómo sería esa pirámide?

**c)** Julia dice que hizo una pirámide que tiene 13 aristas. ¿Puede describir cómo sería esa pirámide?

**d)** Si la base de la pirámide es un polígono de 1453 lados ¿Cuántos vértices tiene?

Con la corrección de esta actividad se pusieron de manifiesto cosas interesantes. Los alumnos pasaban al pizarrón a mostrar lo producido y luego verificábamos entre todos, validando o no el resultado de la producción. Así, se pudo notar que para resolver un mismo ítem se podían utilizar distintas regularidades encontradas anteriormente. Por ejemplo, en el

ítem **a)**, una vez establecida la cantidad de vértices de la pirámide, algunos alumnos usaban  $v=c$  para averiguar la cantidad de caras mientras que otros aplicaban  $v=b+1$ . Lo mismo sucedía para averiguar la cantidad de aristas, de manera que algunos usaban  $a=v+c-2$  y otros  $a=b.2$ .





Aquí pudimos destacar la importancia de las regularidades que habían encontrado y que no había un sólo camino válido para llegar a la solución, sino que, como los alumnos lo habían hecho, varias regularidades servían indistintamente para lograr responder los ítems.

En la resolución del ítem **c)**, los alumnos pudieron concluir que tal pirámide no existe. Precisamente, en uno de los cursos, una alumna pasó al frente a exponer su producción, mostró que había utilizado la regularidad  $a=b.2$  para calcular el número de lados de la base ( $b$ ), ya que conocía la cantidad de aristas (13), obteniendo como resultado  $b=6,5$ . A partir de ese resultado expuso su conclusión, en respuesta al ítem: “como la base de la pirámide es un polígono, no puede tener 6 lados y medio ya que la figura quedaría abierta, no cerraría; entonces no pudo armar esa pirámide porque su base estaría abierta y no sería un poliedro.”

De forma análoga a lo propuesto para las pirámides se formuló la **Actividad 11** (búsqueda de regularidades en prismas). Se trabajó individualmente pero pudieron discutir con sus compañeros.

**Actividad 11:**

Complete la tabla con los números y nombres que faltan.

Tipo de prisma	Número de lados de una base	Número de vértices	Número de caras	Número de aristas
				
 <p data-bbox="252 1559 435 1626">Prisma Cuadrangular</p>				
				
				

Investigar la tabla en busca de regularidades, es decir, en busca de relaciones entre los elementos de los prismas que aparecen en las columnas de la tabla y enunciarlas en lenguaje coloquial y luego en lenguaje simbólico.

El objetivo de la Actividad 11 fue desarrollar un trabajo de exploración y búsqueda de regularidades para encontrar relaciones entre los distintos elementos de un prisma.

La tabla de esta actividad estaba cargada en las tablets de los alumnos y debieron completarla de forma individual. En caso que no contaran con la tablet teníamos impresa la tabla para que la completen manualmente.

La actividad se desarrolló de manera entusiasta puesto que los alumnos se sintieron desafiados en sus habilidades matemáticas: la obtención de las regularidades presentaba un grado de dificultad apreciable y de distintas características que en la Actividad 9. Esto causó gusto por lograr su descubrimiento.

Cada regularidad que encontraron los alumnos fue comunicada por ellos al resto del curso y escrita en el pizarrón, con el fin de analizar entre todos su validez. Las regularidades que encontraron los alumnos en todos los cursos fueron las que se muestran en el Cuadro 10:

Para cualquier prisma se verifican las siguientes regularidades:

$$a=b+v$$

$$v=b*2$$

$$c=b+2$$

$$a=b*3$$

$$v+c-2=a$$

$$b+c-2=v$$

Referencias: v: cantidad de vértices del prisma

c: cantidad de caras del prisma

a: cantidad de aristas del prisma

b: cantidad de lados de la base del prisma

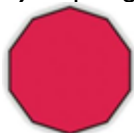
**Cuadro 10: Regularidades encontradas en prismas.**

De manera análoga al caso en pirámides, se propuso la **Actividad 12** (aplicación de regularidades de prismas) para consolidar y hacer uso de algunas regularidades encontradas en la Actividad 11. Se trabajó de forma individual pero pudieron discutir con sus compañeros.

**Actividad 12:**

Responda cada pregunta registrando las respuestas en su carpeta o en un documento en la tablet.

- a) Supongamos que hacemos un prisma cuya con la siguiente base



Sin construirlo, ¿Podrías decir cuántos vértices, caras y aristas tiene el prisma?

- b) María hizo un prisma que tiene 24 aristas. ¿Puedes describirlo?
- c) ¿Podrías construir un cuerpo que sea prisma y pirámide a la vez? Justificar.
- d) Si una de las bases del prisma tiene 19 lados ¿Cuántos lados tendrá la otra base?

Al igual que lo ocurrido en la Actividad 10, en esta actividad se pudo notar que distintas regularidades eran útiles para responder a un mismo ítem. En el ítem **b)**, con el uso de las regularidades los alumnos pudieron encontrar la cantidad de elementos del prisma para poder decir, por ejemplo, que es un prisma octogonal y un decaedro, según la cantidad de caras. Para responder al ítem **c)** se valieron de las definiciones de pirámide y prisma y con esto pudieron argumentar que no se puede construir un cuerpo que sea prisma y pirámide al mismo tiempo, ya que las pirámides tienen caras laterales triangulares y las de los prismas son paralelogramos.

Con el objetivo de dar un cierre a esta parte en la que estudiamos una clase particular de poliedros (pirámides y prismas), decidimos utilizar el programa GeoGebra 5.0 3D -que se encontraba en la pizarra digital- para construirlos y ver sus características, como por ejemplo, sus desarrollos. Primero explicamos brevemente el uso de este soporte tecnológico y luego los alumnos fueron los encargados de explorar estos poliedros en la pizarra digital, para lo cual no tuvieron dificultades puesto que utilizaban el GeoGebra con naturalidad.

En el Figura 18 mostramos imágenes que obtuvimos del GeoGebra 5.0 3D:

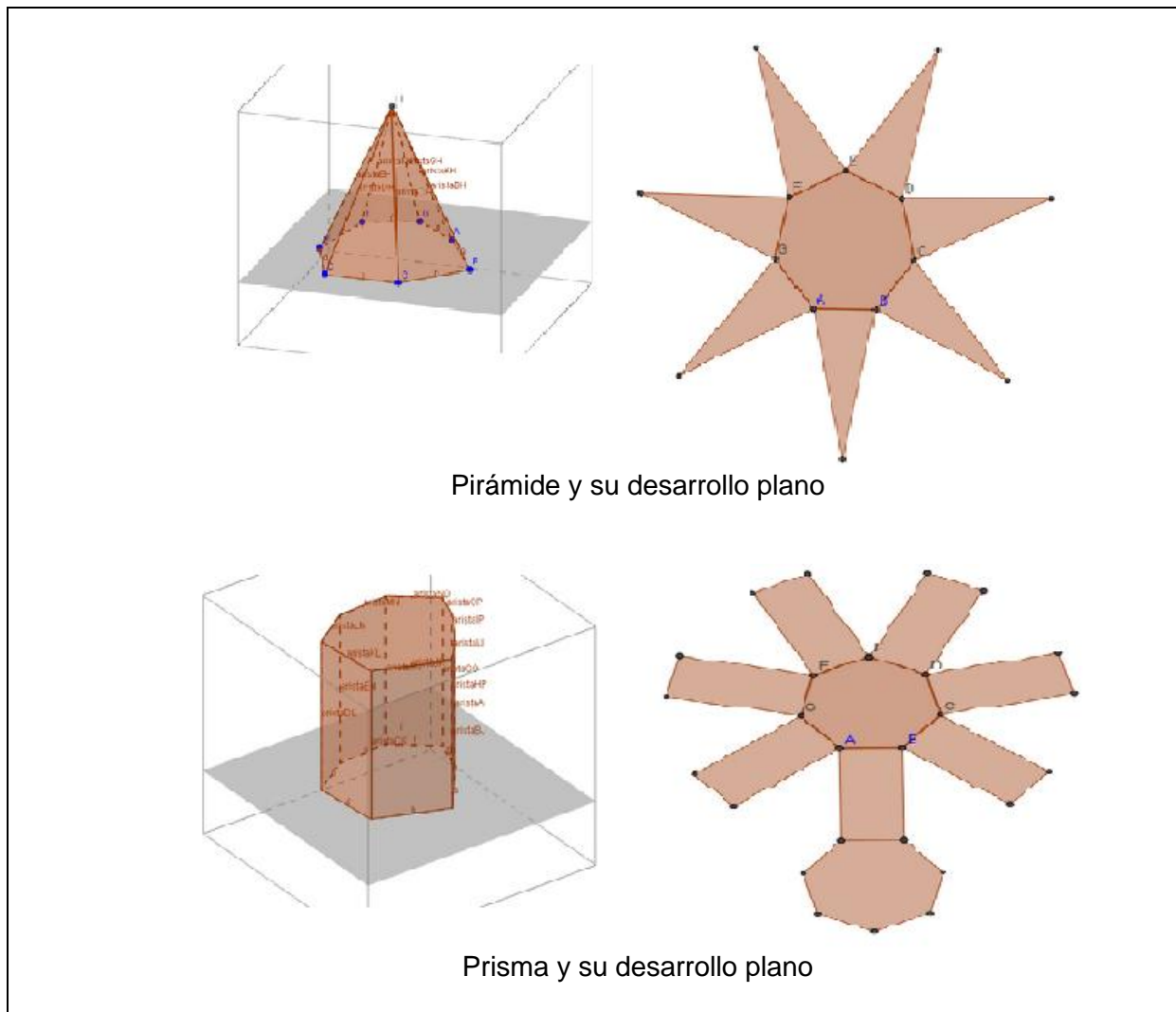


Figura 18: Dos cuerpos (pirámide y prisma) con sus desarrollos planos, realizados con GeoGebra 3D.

### Una regularidad especial: la fórmula de Euler

Dado que se había llegado a descubrir la fórmula de Euler como una regularidad que se cumplía para prismas y pirámides, valía la pena preguntarse acerca de su validez en otros poliedros. Es por esto, que se propuso una actividad de verificación de la fórmula en distintos poliedros convexos. Para ello, se reunió una cantidad importante de poliedros construidos en cartón y se propuso la **Actividad 13** (verificación de la fórmula de Euler). La misma se trabajó en grupos de tres o cuatro integrantes.

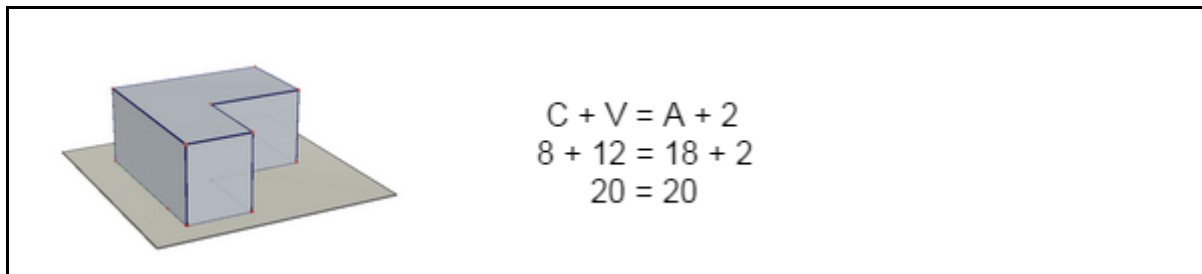
#### **Actividad 13:**

Con los poliedros convexos que le serán entregados verificar si se cumple la fórmula de Euler:  $v+c-2=a$

Elaborar un documento con las imágenes de cada poliedro, las cantidades respectivas de sus elementos (caras, aristas y vértices) y la verificación que realizaron de la fórmula de Euler.



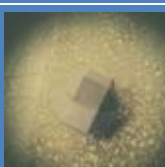

El documento deberá ser subido al aula virtual con los nombres de cada integrante del grupo.

El objetivo de la Actividad 13 fue ver el alcance de la fórmula de Euler, como dijimos antes, verificarla para otros poliedros convexos (distintos de pirámides y prismas) y llegar a ver que se cumple en todos ellos. También vimos que es válida para algunos poliedros no convexos, pero no todos. En el Cuadro 11 se muestra un poliedro no convexo que verifica la fórmula de Euler:



**Cuadro 11: Poliedro no convexo en el que se cumple la fórmula de Euler.**

La Actividad 13 requirió ser subida al aula virtual y en el Cuadro 12 reunimos algunos poliedros en los cuales los alumnos hicieron verificaciones. En el Anexo B, donde se muestra el Material de Estudio, puede verse el cuadro completo con todos los poliedros analizados.

Poliedro	Cantidad de vértices	Cantidad de caras	Fórmula	Cantidad de aristas	Cumple con la fórmula de Euler
	6	8	$v+c-2=a$ $6+8-2=12$	12	Sí
	8	6	$v+c-2=a$ $8+6-2=12$	12	Sí
	24	26	$v+c-2=a$ $24+26-2=48$	48	Sí
	24	14	$v+c-2=a$ $24+14-2=36$	36	Sí

**Cuadro 12: Poliedros en donde los alumnos verificaron la fórmula de Euler.**



Una vez verificada la fórmula de Euler para muchos poliedros convexos, propusimos la **Actividad 14** (aplicación de la fórmula de Euler). El objetivo fue consolidar y aplicar esta fórmula para predecir y hacer cálculos. Se trabajó de forma individual pero pudieron discutir con sus compañeros.

#### **Actividad 14:**

- a) Si un icosaedro tiene 30 aristas, ¿cuántos vértices tiene?
- b) ¿Cuál es el nombre del poliedro, según la cantidad de caras, si tiene 7 vértices y 12 aristas? ¿Podrías dibujar o encontrar una imagen de este poliedro?
- c) Mónica dice que construyó un poliedro con 7 vértices y 8 aristas. ¿Cuántas caras tiene ese poliedro? ¿Cómo es el nombre que recibe según la cantidad de caras?

Con la Actividad 14 se buscó que los alumnos reflexionen sobre las consignas, las interpreten y puedan utilizar los datos que se presentan en el enunciado para aplicar la fórmula de Euler ( $v+c-2=a$ ).

Algo interesante que surgió durante la realización de la actividad fue que algunos alumnos interpretaron que los poliedros de las consignas hacían referencia a pirámides o prismas y no a otros, por lo cual aplicaban las regularidades respectivas que habían encontrado para aquellos y no la fórmula de Euler. Recurrir a este supuesto no siempre servía, por ejemplo en el ítem **a**) se trata de un icosaedro que no es ni pirámide ni prisma. Quizá, el trabajo particular dedicado a estos dos tipos de poliedros influyó para esta consideración de los alumnos.

#### **Poliedros regulares**

Para finalizar la parte intra-matemática y completar todos los contenidos que habíamos planificado, propusimos la **Actividad 15** (de investigación), en la cual los alumnos deberían explorar en Internet si existían poliedros regulares y, en caso de ser así, comunicar sus características mediante un informe. Se trabajó en grupos de dos o tres alumnos.

#### **Actividad 15**

Buscar en Internet, por medio de sus tablets, información sobre poliedros regulares. A partir de la información encontrada, deberán elaborar un texto en el cual se respondan las preguntas planteadas abajo y se incluyan imágenes y datos que consideren interesantes. No olviden consignar los links de las páginas web consultadas.  
 ¿Existen poliedros regulares? ¿Se conocen con algún otro nombre?  
 ¿Qué características tienen? ¿Cuántos hay? ¿Cuáles son?

Cada grupo deberá subir el documento que han elaborado al aula virtual.

#### **Recomendaciones:**

- No limitarse a copiar y pegar toda la información de una página. Analizar y seleccionar aquella que hayan leído y comprendido.
- Consultar varias fuentes y registrar los links correspondientes.

El objetivo de la Actividad 15 fue, utilizando un medio de información masivo como Internet, accesible a los alumnos en el aula, investigar y seleccionar información adecuada sobre poliedros regulares (guiados por las preguntas de la actividad) de modo que los

descubran y empiecen a reconocerlos por sus características.

Fue necesario, como trabajo previo nuestro, explorar las posibles páginas que los alumnos podían investigar, para estar preparados ante posibles preguntas de ellos o posibles respuestas a la actividad.

Los alumnos debieron comunicar al resto de la clase la información que habían encontrado, lo cual fue registrado por nosotros en el pizarrón. La información que encontraron acerca de los poliedros regulares puede sintetizarse así:

- Un poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales entre sí y en cada uno de sus vértices concurre el mismo número de caras.
- Existen 9 tipos de poliedros regulares, y se dividen en 2 familias: los convexos y los no convexos.
- También son denominados Sólidos Platónicos.
- Nombres de los poliedros regulares (convexos): tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

El Cuadro 13 muestra la definición de poliedro regular con la que se acordó trabajar especificando las condiciones que debe cumplir:

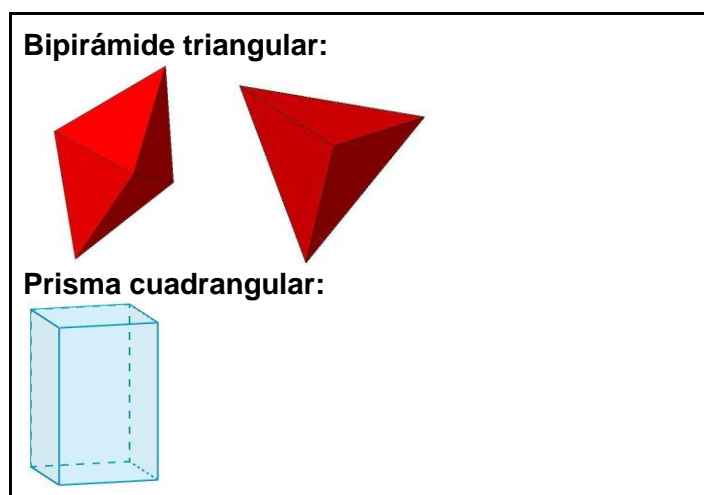
***Un poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se unen el mismo número de caras.***

*Así para que un poliedro sea regular, deben cumplirse dos condiciones simultáneamente:*

- 1) *que las caras sean polígonos regulares iguales;*
- 2) *que en cada vértice del poliedro se una el mismo número de caras.*





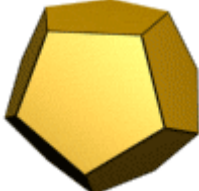
**Cuadro 13: Definición de poliedro regular.**

Se mostraron contraejemplos de poliedro regular, como los que muestra el Cuadro 14. La “**bipirámide triangular**” que se puede ver usando el programa PolyPro no es un poliedro regular porque si bien está formado por caras poligonales iguales (6 triángulos equiláteros), cumpliendo con la primera condición, en algunos vértices se unen 4 caras y en otros 3, con lo cual no se cumple la segunda condición. También se mostró un prisma de base cuadrangular que cumple con la segunda condición: en cada vértice se une la misma cantidad de caras, pero no cumple con la primera condición, pues sus seis caras no son polígonos regulares iguales, que en este caso deberían ser cuadrados; en consecuencia tampoco es un poliedro regular.



**Cuadro 14: Contraejemplos de poliedros regulares.**

En la pizarra digital se mostraron los poliedros regulares que habían encontrado los alumnos, a través de la tabla que se presenta en el Cuadro 15:

<p><b>Tetraedro regular</b></p> <p>Caras: 4 triángulos equiláteros</p>	
<p><b>Octaedro regular</b></p> <p>Caras: 8 triángulos equiláteros</p>	
<p><b>Icosaedro regular</b></p> <p>Caras: 20 triángulos equiláteros</p>	
<p><b>Hexaedro regular (cubo)</b></p> <p>Caras: 6 cuadrados</p>	
<p><b>Dodecaedro regular</b></p> <p>Caras: 12 pentágonos regulares</p>	

Cuadro 15: Poliedros regulares o sólidos platónicos.

### 3.8.2 Trabajando de forma extra-matemática: Proyecto

En la última semana de nuestras prácticas se planificó trabajar de manera extra-matemática, en un escenario de investigación, mediante un proyecto a realizar de manera grupal. Este proyecto integró las capacidades y los conocimientos desarrollados hasta el momento, fomentando la imaginación y creatividad del alumno, y acercándonos directamente a la realidad. Consistió en la construcción de un envase con forma de poliedro para un producto entregado por nosotros o de elección del grupo, y en la elaboración de un informe donde debían documentar el proceso realizado, basándose en pautas que entregamos a los alumnos. Todas las actividades antes desarrolladas serían imprescindibles para un resultado exitoso del proyecto.

La presentación del proyecto se realizó a partir del siguiente texto:

### **Grandes fabricantes de pequeños envases**

Somos una empresa que se encarga de construir envases. Nuestros clientes confían en nosotros para crear los envases y las etiquetas de sus productos que luego lanzarán al mercado. Uno de nuestros clientes más importantes nos ha enviado un nuevo producto para que diseñemos y construyamos su envase y etiqueta.

Este es nuestro desafío y solo tenemos una semana para presentar el resultado de nuestro trabajo al cliente.

A fin de dar cuenta de la demanda del cliente les proponemos realizar el trabajo en varias etapas, pero antes de embarcarnos en esa tarea es necesario que nos informemos acerca del proceso de la creación de envases. Para ello proponemos que cada grupo lea el texto titulado “**Envases y embalajes**”, destaquen y escriban algunas ideas que consideren importantes para llevar adelante el proceso de creación del envase que nos han solicitado.

*Importante: Ustedes podrán elegir el producto.*

*No se olviden de colocar un nombre a su fábrica de envases.*

El texto “Envases y embalajes”, que se encuentra en el *Anexo A* de este informe, se elaboró con el propósito de brindar información que, a nuestra consideración, podía servir para la realización del proyecto. El mismo fue subido al aula virtual para que los alumnos puedan descargarlo y disponer de él cuando fuera necesario.

A continuación, presentamos la secuencia de trabajo que pusimos a disposición de los alumnos como ayuda para la realización del proyecto, junto con objetivos diarios que fueron utilizados para poder ir evaluándolo en forma completa. En cada paso los alumnos debían ir registrando su trabajo en un documento en sus tablets para facilitar el armado del informe final.

#### **Secuencia de trabajo:**

Primero leeremos en clase el texto “Envases y Embalajes” y haremos un debate sobre la importancia de estos.

#### **1) ¿Qué producto?** Eligiendo el producto

Deberán decidir el producto para el cual le van a diseñar y armar un envase.

#### **2) ¿Qué tamaño tiene el producto?** Tomando medidas

Calcular sus dimensiones será importante para poder realizar un envase adecuado al producto, que lo contenga y lo resguarde.

Para esto podrán valerse de las herramientas de medición que poseen sus tablets.

Registrar en fotos el producto, y sus dimensiones.

#### **3) ¿Cómo será el envase?** Eligiendo el envase

Les proponemos que diseñen un envase con forma de poliedro. Puede ser cualquier tipo de poliedro, siempre que sea adecuado a las dimensiones del producto para el cual están creando ese envase. En este proceso de diseño pueden surgir varias opciones, elijan una teniendo en cuenta la información que brinda el texto “Envases y embalajes”.

Una vez decidido el poliedro a partir del cual construirán el envase imaginado, diseñen el desarrollo plano de tal poliedro. Pueden realizar el desarrollo usando GeoGebra. Indiquen qué longitudes tienen los lados de las caras del poliedro.

**4) Realizando un prototipo.**

Antes de realizar el envase definitivo, que será fabricado en cartón, les proponemos realizar un prototipo del mismo usando papel a fin de verificar su correcto armado. La construcción de este prototipo les permitirá decidir dónde es necesario agregar aletas para luego armar con facilidad el envase. Finalmente tendrán el desarrollo plano del envase que podremos entregar a nuestro cliente.

**5) Manos a la obra... Construyendo el envase**

Cada fabricante deberá construir el envase a partir del desarrollo plano que fue obtenido en el ítem 4). Para construir el modelo final del envase utilizaremos cartón.

**6) Etiqueta del producto.**

Para realizar la etiqueta deberán inventar un nombre para su producto. También podrán incluir otras especificaciones tales como el peso del producto, el contenido neto, su vencimiento (en caso de contener un alimento) o cualquier otra información que resulte valiosa para el cliente.

**7) Análisis matemático del envase.**

Realizar un análisis completo del poliedro que sugiere el envase.

Cabe señalar que para los puntos 1, 2 y 3 de la secuencia de trabajo fue destinado un tiempo de 40 minutos, aproximadamente, y para los puntos 4, 5, 6 y 7 un tiempo de 80 minutos.

Para la construcción del envase, nosotros teníamos planchas de cartón de manera que los grupos contaban con este material para trabajar.

A continuación presentamos las pautas entregadas a los alumnos para guiar la realización del informe final del proyecto.

**Pautas para la realización del informe****El informe deberá contener los siguientes ítems:**

1. Portada: incluye el nombre de la escuela, la materia, profesor y los integrantes del grupo; título del trabajo (nombre de la empresa), fecha de entrega.
2. Descripción del producto: dimensiones y fotos del mismo.
3. Descripción del envase (nombre del poliedro) y fundamentos de la decisión de su formato y dimensiones.
4. Desarrollo plano del poliedro ideal que el envase sugiere.
5. Desarrollo plano del envase real (con las aletas), a partir del cual será construido dicho envase, indicando la medida de los lados de las caras.
6. Fotos del envase terminado (ya construido).
7. Análisis completo del poliedro que sugiere el envase, teniendo en cuenta todo los contenidos desarrollados en clase (elementos del poliedro -cantidad y tipo de polígonos que forman las caras, cantidad de vértices y aristas-, nombre del poliedro según las clasificaciones vistas, etc.)
8. Análisis del envase, teniendo en cuenta las características mencionadas en el texto "Envases y embalajes".

**Este informe debe estar acompañado del envase construido.**

En el transcurso de las actividades anteriores al proyecto, cuando analizábamos ejemplos de la realidad, nos abstraíamos, veíamos los objetos con "ojos de matemático",

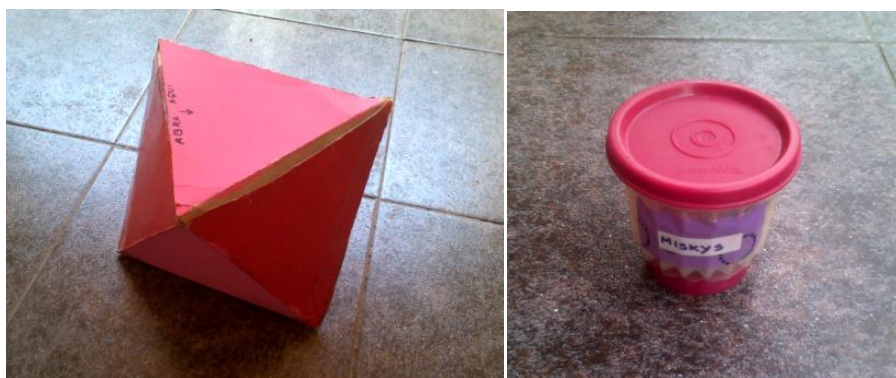
con el fin de reconocer poliedros. En este proyecto proponíamos recorrer un camino inverso, llevando al mundo real un poliedro, “agregándole” partes extras, no solo para poder armarlo sino también pensando en su diseño, y funciones de almacenaje y comercialización.

Algunos de los objetos elegidos por los grupos para fabricar los envases fueron: frascos de perfume, relojes, CDs, alfajores, cubo Rubik, entre otros.

En la Figura 19 se muestra el diseño en papel de un desarrollo plano correspondiente al envase-poliedro elegido por uno de los grupos de alumnos; se visualizan las partes extras (aletas) que responden a los fines del armado para su posterior uso y comercialización. Dicho envase se ilustra en la Figura 20, en la cual, además, se muestra el producto que habían elegido los alumnos, a partir del cual diseñar su envase.



**Figura 19: Desarrollo de un envase-poliedro con sus partes extras.**



Envase-poliedro

Producto

**Figura 20: producto elegido por los alumnos y el envase creado para este.**

Cuando pensamos la actividad supusimos que muchos grupos construirían envases del tipo de prismas rectangulares como los hay mayormente en la realidad. Por el contrario, fueron diseños originales, dentro de los cuales hubo un poliedro no convexo y otros que no habíamos estudiado en clase, por ejemplo, un antiprisma. En las imágenes de la Figura 21 se pueden ver algunos de los poliedros-envases construidos por los alumnos.

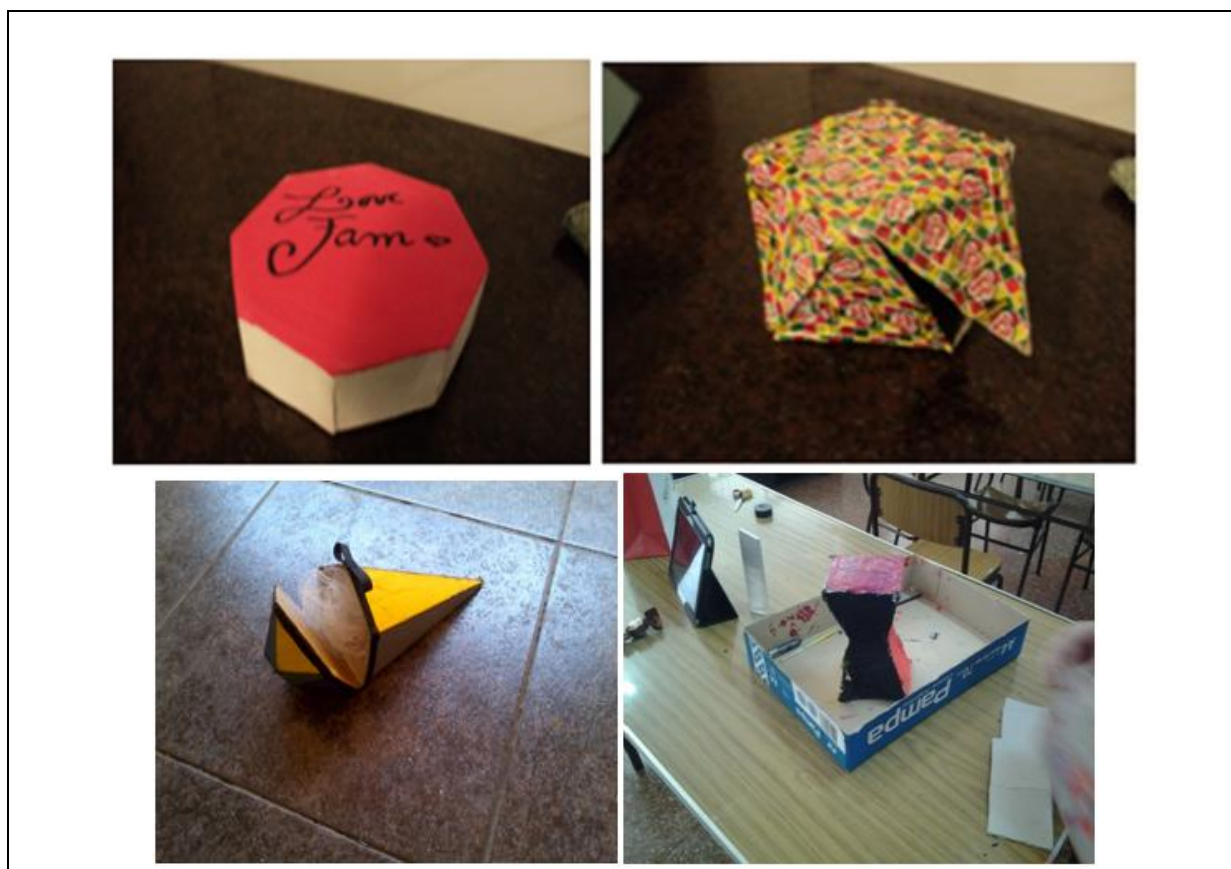


Figura 21: Envases-poliedros contruidos por los alumnos.

En el proceso de construcción tuvieron que afrontar diferentes problemas para los cuales era necesaria una solución. Por ejemplo, los envases debían contar con una capacidad que se adecúe al producto, es decir, había que tener en cuenta el volumen del producto, contenido matemático que no habían estudiado aún. También presentó dificultades la construcción de polígonos regulares (triángulos equiláteros, pentágonos, hexágonos, octógonos) para utilizarlos como caras de los poliedros-envases.

Fue interesante el acercamiento de los envases a la realidad como objetos de mercado, al incluir en ellos informaciones tales como el código de barras; etiquetas que describían nombre de la empresa, del producto, fechas de vencimiento, peso neto; entre otras. En la Figura 22 se pueden ver algunas imágenes que ilustran este reconocimiento de los envases como objetos de mercado.



Figura 22: Informaciones presentes en los envases.

Finalmente, los grupos de alumnos elaboraron los informes donde registraron lo hecho y respondieron a lo pedido en las pautas: descripción del producto y del envase, fotos, desarrollo plano, análisis matemático del poliedro-envase construido, análisis según el texto “Envases y embalajes” y las argumentaciones correspondientes, entre otra información que los alumnos creyeran pertinente. El formato del informe era de libre elección por lo que algunos lo entregaron en formato de PowerPoint, otros hicieron un documento de texto y uno de los grupos lo entregó de forma impresa, más allá de que no era necesario, puesto que la idea era enviarlo a través del aula virtual.

### 3.9 Acerca de la evaluación

Durante todo el período de nuestras prácticas hicimos un seguimiento constante de los alumnos, evaluando cada una de sus producciones, lo que nos sirvió para obtener información sobre el estado en que se encontraban en relación a los aprendizajes pretendidos. Este seguimiento clase a clase, las correcciones colectivas de cada actividad realizada y el requerimiento de entrega de actividades a través del aula virtual nos permitió realizar una **evaluación formativa**.

Realizamos **evaluaciones diagnósticas** informales y breves al inicio de cada clase cuando se pedía que algún alumno pase al frente a comunicar un repaso sobre lo que se había realizado la clase anterior para situarnos en contexto y comenzar a trabajar. También, al inicio de algunas actividades, cuando, antes de presentarlas, preguntábamos a los alumnos, a modo de desafío y para saber si había algunos saberes disponibles para ser



utilizados, *qué sabían de...*, *si conocían algo sobre...*, *si se imaginaban lo que podría ser...*, *si existirían...*, *cómo son...*, etc. Así actuamos en nuestra primera clase, para empezar a hablar de “poliedros”, o en la Actividad 15 para introducir poliedros regulares, entre otras situaciones.

En la última semana de las prácticas trabajamos en un escenario extra-matemático, realizando un **proyecto** de construcción asociado a una situación de producción de envases para diferentes productos. El proyecto procuraba integrar todas las capacidades y los conocimientos que se habían trabajado hasta el momento y era importante hacer uso de esos conocimientos y capacidades para obtener un buen resultado. Entendemos este proyecto como nuestra instancia de **evaluación sumativa**.

Cabe destacar, como lo indica el Documento de apoyo curricular “La evaluación de los aprendizajes en la Educación Secundaria” (2010) que la evaluación sumativa integra a las evaluaciones diagnóstica y formativa.

En función de las distintas instancias de evaluación que describimos antes, decidimos que la nota final para cerrar el trimestre estuviera compuesta de la siguiente manera:

- 25% corresponde a la **participación de los alumnos en clase**. Aquí consideramos el desempeño de los alumnos en cada clase: cuando pasó al pizarrón, el trabajo en las actividades establecidas, los aportes en los momentos de presentación de un tema determinado, entre otras acciones.
- 25% corresponde a la **entrega de las actividades requeridas** por medio del aula virtual, en el tiempo y la forma correspondientes (Actividad 15 en 1ºA, Actividades 13 y 15 en 1ºB y en 1ºC).
- 50% corresponde a la realización del **proyecto**, incluyendo el informe elaborado y el envase construido. Además, se tuvo en cuenta el desempeño del grupo y la participación individual de cada uno de los integrantes.

A continuación, mostramos los criterios de evaluación del proyecto, que fueron informados a los alumnos.

#### **Criterios de evaluación del proyecto:**

- Cumplimiento en los objetivos diarios propuestos por los profesores.
- Originalidad en el envase, tanto la forma como el diseño en general.
- Fundamentaciones realizadas.
- Aplicación de contenidos estudiados en clase.
- Entrega en tiempo y forma, tanto del envase terminado como de su respectivo informe.
- Participación y compromiso de cada integrante del grupo en el desarrollo del trabajo.

**IMPORTANTE:** si el informe no es presentado a tiempo no podrá ser evaluado y corresponderá un uno (1) como nota del proyecto.

Utilizamos la planilla de evaluación que se muestra en el Cuadro 16 para corregir los informes del proyecto que realizó cada grupo. Cabe destacar que esta planilla con las correcciones correspondientes fue entregada a cada alumno, a través del aula virtual, junto con la calificación final.

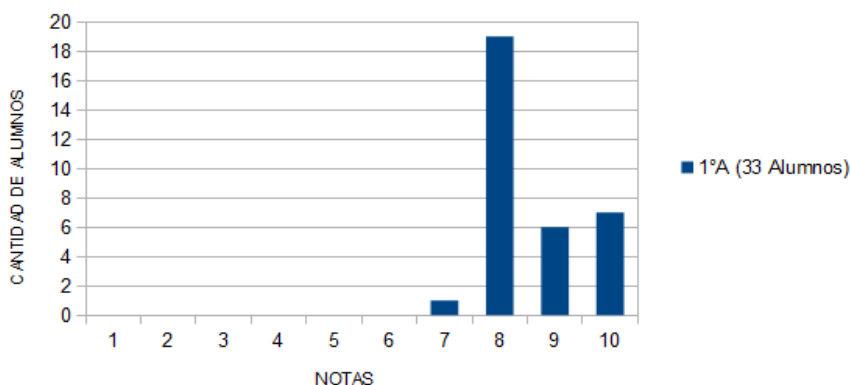
<b><u>Evaluación</u></b>															
<b>Integrantes</b>															
<b>Nombre de la Empresa</b>															
<b>Foto del envase</b>															
<p>La evaluación corresponde al informe realizado del proyecto teniendo en cuentas las pautas para su realización.</p> <p><b>Criterios de evaluación sobre el informe final:</b></p> <table border="1"> <thead> <tr> <th style="text-align: center;">1) Descripción del producto</th> <th style="text-align: center;">apreciaciones*</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td style="text-align: center;">2) Descripción del envase</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">3) Desarrollo plano del poliedro ideal</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">4) Desarrollo plano del poliedro con aletas con sus medidas</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">5) Fotos del envase terminado</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">6) Análisis del poliedro que sugiere el envase</td> <td></td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">7) Análisis del envase según el texto "Envases y embalajes"</td> <td></td> </tr> </tbody> </table>		1) Descripción del producto	apreciaciones*	2) Descripción del envase		3) Desarrollo plano del poliedro ideal		4) Desarrollo plano del poliedro con aletas con sus medidas		5) Fotos del envase terminado		6) Análisis del poliedro que sugiere el envase		7) Análisis del envase según el texto "Envases y embalajes"	
1) Descripción del producto	apreciaciones*														
2) Descripción del envase															
3) Desarrollo plano del poliedro ideal															
4) Desarrollo plano del poliedro con aletas con sus medidas															
5) Fotos del envase terminado															
6) Análisis del poliedro que sugiere el envase															
7) Análisis del envase según el texto "Envases y embalajes"															
<b>Comentario:</b>															

**Cuadro 16: Planilla de evaluación utilizada para corregir los informes del proyecto.**

\*En la columna vacía de la derecha se hacían apreciaciones correspondientes a cada ítem, diciendo si estaba bien, completo, incompleto, o si faltaba algo. Asimismo, al final de la planilla se incluían comentarios pertinentes realizando una evaluación cualitativa global del proyecto y el trabajo del grupo.

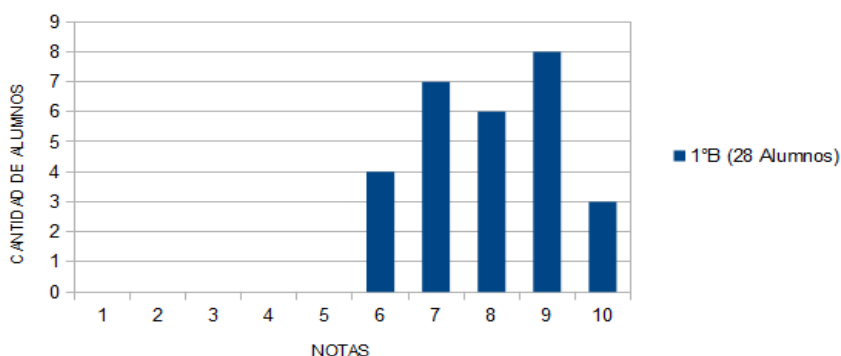
Los Gráficos 1, 2 y 3 muestran la distribución de las notas finales para cada uno de los tres cursos.

NOTAS FINALES DE LA EVALUACIÓN



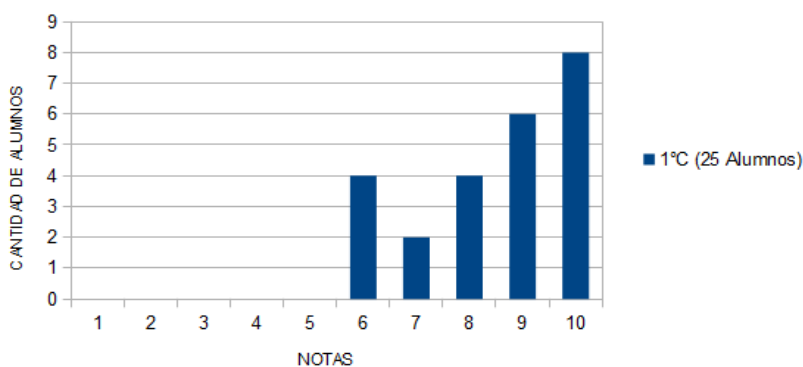
**Gráfico 1: Notas finales del curso 1ºA.**

NOTAS FINALES DE LA EVALUACIÓN



**Gráfico 2: Notas finales del curso 1ºB.**

NOTAS FINALES DE LA EVALUACIÓN



**Gráfico 3: Notas finales del curso 1ºC.**

En el curso 1ºC un alumno no fue evaluado debido a que no estuvo presente cuando se realizó el proyecto. Se informó a la profesora a cargo del curso sobre este imprevisto y ella se encargó de realizar una evaluación cuando ya habían finalizado nuestras prácticas.

En la próxima sección presentamos el análisis de una problemática surgida a partir de nuestras prácticas: el desarrollo de competencias matemáticas.

#### **4. Problemática a analizar**

##### **Competencias matemáticas**

###### **Introducción: primeras observaciones**

En el periodo de observaciones de clases, previo a nuestras prácticas, pudimos ver que a la vez que se desarrollaban los contenidos específicos de una unidad, paralelamente se desarrollaban capacidades que “ayudaban” a abordar dichos contenidos, organizando su producción. Por ejemplo, como parte del material de estudio que la profesora presentó a los alumnos cuando vieron polígonos, se explicaba qué significa clasificar: “*Clasificar es definir grupos de elementos tomados de un conjunto según cierto criterio, de modo tal que cada elemento del conjunto pertenezca a un solo grupo según ese criterio, y no queden grupos sin elementos*”. De manera similar, destacamos el momento en que los alumnos estudiaron una serie de pasos a seguir, presentados por la profesora, para lograr un proceso de búsqueda de regularidades, como un procedimiento no especificado como tal en la unidad que estaban estudiando. Si bien en matemática es común hablar de búsqueda de regularidades, no es frecuente encontrarse con un listado de pasos que sugiera cómo hacer esa búsqueda. Los pasos fueron:

1. *Comenzamos con una pregunta.*
2. *Planteamos proposiciones.*
3. *Analizamos esas proposiciones.*
4. *Buscamos información de los elementos relacionados.*
5. *A partir de los datos, buscamos una regularidad de comportamiento de los elementos relacionados.*
6. *Expresamos la regularidad en lenguaje coloquial y simbólico.*
7. *Analizamos si la regularidad es plausible y se cumple para otros casos.*
8. *Usamos la regularidad para hacer cálculos y predecir.*

Al igual que lo percibimos en las observaciones de las clases de la profesora, al momento de nuestras prácticas también pudimos ver que al realizar las actividades que les proponíamos, más allá del saber, los alumnos estaban desarrollando ciertas capacidades (como las dos descritas arriba y varias más) que no solo son útiles para desempeñarse en la clase de matemática sino también en la vida cotidiana.

Capacidades como debatir, pensar, investigar, argumentar, corroborar, usar diferentes herramientas, comunicar. A esas capacidades se las conoce como **competencias matemáticas** y se definen como “el conjunto de capacidades puestas en juego por los estudiantes cuando resuelven o formulan problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones” (Rico, 2006, p. 50). Creemos valioso el desarrollo de estas competencias en la educación matemática como herramientas para afrontar cualquier problema interno o externo a la clase.

En términos de Skovsmose (2000), la “alfabetización matemática no sólo se refiere a unas destrezas matemáticas, sino también a la competencia para interpretar y actuar en una situación social y política que ha sido estructurada por las matemáticas” (p. 4).

Sadovsky (2005) propone la actividad matemática en tanto actividad de producción como el asunto de la clase, “los alumnos deberán elaborar conocimientos que ya existen en la cultura. Las herramientas conceptuales que dispondrán para hacerlo serán diferentes de las que fueron utilizadas cuando esos conocimientos “ingresaron” en la comunidad científica de la mano de los matemáticos profesionales” (p. 24). Pensamos en las herramientas utilizadas por los alumnos para la producción del conocimiento como las competencias matemáticas.

La evaluación PISA (Programme for International Student Assessment) enfatiza que la educación debe centrarse en la adquisición de competencias generales, entre las que destacan.

- pensar y razonar
- argumentar
- comunicar
- modelar
- plantear y resolver problemas
- representar
- utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones
- usar herramientas y recursos

Cabe destacar que esta enumeración no pretende ser disjunta, es decir, que existen superposiciones y relaciones e interacciones múltiples entre ellas.

Creemos que el desarrollo de competencias matemáticas en los alumnos cobrará verdadero sentido, siempre que no se esperen resultados inmediatos. Dicho desarrollo se entiende como un fin de la educación y es necesario un trabajo a largo plazo para lograrlo con éxito. A partir de estas reflexiones iniciales, nos preguntamos entonces:

*Además de los contenidos matemáticos, ¿qué capacidades desarrollaron los estudiantes al realizar las actividades en la clase de matemática?*

Para responder a esa pregunta, a continuación, analizaremos nuestras prácticas tratando de identificar cómo la forma de trabajo y las características de las actividades planteadas contribuyeron para el desarrollo de las competencias mencionadas.

### **Modo de trabajo en nuestras prácticas**

En la observación de clases pudimos ver que la profesora motivaba la participación de todos los alumnos. Se fomentaba el debate para entender un contenido o para validar las producciones de los alumnos a partir de las actividades; era importante la comunicación. Por ejemplo, en el inicio de cada clase recordar lo hecho anteriormente para situarse en el contexto adecuado y seguir trabajando; o en el caso de corregir tareas en el pizarrón, incentivar a “contar” lo que se escribía para que todos entiendan. Esto ayudaba a crear un clima de clase donde ningún alumno se sintiera excluido. Si bien la mayoría de las actividades se desarrollaban individualmente, tanto la corrección como el debate que se generaba, mostraron el desempeño de un trabajo colectivo del curso como un todo.

Pensamos entonces para nuestras prácticas en un modo de trabajo similar al de la profesora, que tenga como fin la producción de conocimiento partiendo de la participación, el debate y el trabajo colectivo. Para esto planteamos actividades que pensamos serían desafiantes para los alumnos. Según Sadovsky (2005),

Desafiar a un alumno supone proponerle situaciones que él visualice como complejas pero al mismo tiempo posibles, que le generen una cierta tensión, que lo animen a atreverse, que lo inviten a pensar, a explorar, a poner en juego conocimientos que tiene y probar si son o no útiles para la tarea que tienen entre manos, que lo lleven a conectarse con sus compañeros (p.13).

Con estos desafíos intentamos invitar a los estudiantes a formular preguntas y explicaciones, involucrándolos en distintos procesos de exploración y en la producción de conocimiento individual y colectivo. “Cuando los estudiantes se apropian del proceso de exploración y explicación de esta manera, se constituye un escenario de investigación que a su vez genera un nuevo ambiente de aprendizaje. En un escenario de investigación los estudiantes están al mando” (Skovsmose, 2000, p.6).

Así fue que intentamos adoptar una estrategia de enseñanza-aprendizaje exploratoria, que diera el mando a los estudiantes alejándonos de las propuestas tradicionales basadas en el modelo exposición-ejemplos-ejercicios-problemas. Decidimos iniciar cada tema con una actividad que resultara posible de abordar por parte de los alumnos con las herramientas que ya poseían, para después, a partir del debate con la clase completa, introducir terminología específica, definiciones más elaboradas, etc. (Ponte, 2005).

### **Origen de las actividades**

En el proceso de búsqueda de actividades para las prácticas, todas las que encontrábamos en diferentes sitios (Internet, libros de estudio, etc.) consistían en aplicaciones de un contenido que había sido mostrado previamente. Además, muchas actividades de los libros de estudio para la educación secundaria no desarrollaban el tema de práctica que nos había sido asignado para nuestras prácticas: Cuerpos geométricos (ver detalles de la unidad en la p. 11 de este informe), solo lo presentaban para trabajar a partir de él, realizando cálculos relacionados con el volumen de los cuerpos, la superficie de sus caras; medidas de alturas de prismas o pirámides, diagonales, etc. Esta no era nuestra idea, pues, alejándonos de lo tradicional, nuestro fin era la producción de conocimiento a partir de la realización de actividades por parte de los alumnos, como dijimos antes, resolviendo problemas, debatiendo resoluciones, comunicando resultados, etc.

Por este motivo, fue central que nuestras actividades respondieran a procesos de razonamiento, manipulación (de poliedros), exploración, análisis, investigación; actividades que favorecieran el desarrollo de capacidades como clasificar, comunicar ideas matemáticas con lenguaje preciso (coloquial y simbólico), argumentar, buscar regularidades; atendiendo, de esta manera, no sólo a los contenidos propios del tema, sino también al desarrollo de capacidades pertinentes para resolver o formular problemas.

La mayoría de las actividades fueron inventadas por nosotros, teniendo en cuenta sugerencias de las profesoras de MOPE. Dos libros nos fueron de utilidad para extraer ideas: "Curriculum and Evaluation STANDARDS for school mathematics. Geometric in the middle grades" publicación del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) y "Poliedros" de Gregoria Guillén Soler.

### **Características de las actividades**

#### *Posibilidad de diferentes soluciones en las actividades*

Creemos que una de las características principales en el desarrollo de nuestras prácticas fue contar con actividades que admitían distintas soluciones, lo que nos permitió acercarnos a un enfoque investigativo. La condición de que existan varias respuestas correctas, y no una y solo una, como en el paradigma del ejercicio (Skovsmose, 2000), favoreció el proceso de exploración como una actitud necesaria para obtener resultados que puedan ser argumentados, y posibilitó la creación de un ambiente "democrático" en la clase, que se reflejó en la participación activa de todos los alumnos, en igualdad de condiciones, aportando producciones esenciales de contenido.

Las correcciones de las actividades siempre las realizamos al frente, en la pizarra digital o el pizarrón, y tratábamos de averiguar las producciones de los distintos estudiantes. Esta modalidad de trabajo facilitaba la predisposición por parte de los alumnos para exponer sus trabajos, argumentarlos y, por otro lado, permitía al resto de los compañeros analizar una nueva perspectiva, razonarla, compartirla o, en algunas oportunidades, descartarla.

En el caso de las actividades de clasificación (Actividad 3 y Actividad 8), donde los alumnos debían realizar separaciones de poliedros según criterios propios, varios de los criterios que pensaron eran correctos pero no oportunos para abordar el contenido, lo cual era interesante para poder hacer un análisis entre todos e iniciar una discusión que tenga como resultado la validez o no de la respuesta -en la p. 40 de este informe se encuentran algunos criterios propuestos en la Actividad 8-. Luego realizábamos un debate utilizando los criterios que nos interesaban para desarrollar los conceptos que habíamos planificado. En estos casos fueron: la introducción de poliedros convexos y no convexos y la distinción entre prismas y pirámides.

Trabajar desde las producciones de los alumnos, nos ubicaba en un lugar de incertidumbre, pues, si bien habíamos hecho algunas anticipaciones y estábamos atentos a posibles soluciones que podían surgir, algunas veces la exploración de los estudiantes nos sorprendía con situaciones de la actividad que no habíamos tenido en cuenta. Por ejemplo, en la Actividad 5, cuando un alumno logró reconstruir un poliedro no convexo a partir del desarrollo de un poliedro convexo (ver Figura 14); o en la Actividad 9, donde un alumno, además de buscar regularidades entre los elementos de una misma pirámide, trató de encontrar relaciones entre las distintas pirámides. Más precisamente, el alumno había observado que el número resultante de sumar todos los elementos de una pirámide considerados en la tabla (cantidad de lados de la base + número de vértices + número de caras + número de aristas) se diferencia en 5 del número que obtenemos al sumar los elementos de una pirámide cuya base tiene un lado más (o un lado menos) que la primera. Por ejemplo, como se puede ver en la Figura 23, la suma de todos los elementos de la

pirámide triangular es 17 ( $3+4+4+6=17$ ), y en la pirámide cuadrangular es 22 ( $4+5+5+8=22$ ), por lo tanto la diferencia entre ellas es 5. Esta regularidad fue destacada como interesante, aunque se dijo que se buscaba determinar regularidades entre las columnas (elementos de cada pirámide) y no entre las filas (tipo de pirámides) de la tabla.




Tipo de pirámide	Número de lados de la base (b)	Número de vértices (v)	Número de caras (c)	Número de aristas (a)
 Pirámide triangular	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>4</b>	<b>6</b>
 Pirámide cuadrangular	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>5</b>	<b>8</b>
 Pirámide pentagonal	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>6</b>	<b>10</b>

Figura 23: Parte de la tabla de la Actividad 9 completa.

Como dijimos anteriormente, esta característica de las actividades de permitir diferentes formas de resolución, nos ayudó a incentivar una libertad individual de trabajo y notamos también que incentivaba la exploración e investigación de los alumnos en las tareas. Por ejemplo, la Actividad 1, de construcción de poliedros, nos ayudó, no solo a introducir la idea de que existían muchos poliedros diferentes, sino también a empezar a plasmar una forma de trabajo, en la que era posible obtener resultados válidos diferentes a los de los demás: cada grupo tenía un conjunto diferente de piezas para armar cuerpos que serían distintos unos de otros, pues así lo habíamos previsto. Un ejemplo que destacamos en esta actividad es el caso de un grupo que había recibido un sobre cuyas piezas eran 10 cuadrados y 10 triángulos; los alumnos sabían que podían construir un cubo pero manifestaban que era muy “fácil” y se desafiaban a construir otro cuerpo mas “raro”. Por ejemplo, lograron construir el que se muestra en la Figura 24 compuesto por 10 triángulos.





**Figura 24: Poliedro construido por uno de los grupos en la Actividad 1.**

En las actividades de búsqueda de regularidades en prismas y pirámides (Actividad 9 y Actividad 11) surgieron más relaciones de las que nosotros habíamos pensado. Si bien algunos alumnos necesitaban la certeza de saber cuántas había (lo cual no sabíamos con precisión) para detener su búsqueda, otros seguían explorando con entusiasmo en busca de más relaciones. Así se logró que, en algunos casos, surgiera la fórmula de Euler, relación que nos interesaba en particular porque estaba dentro de los contenidos seleccionados para desarrollar y porque relacionaba los tres elementos principales del poliedro (caras, aristas y vértices) en vez de dos como la mayoría de las regularidades que habían encontrado.

Habiendo surgido la fórmula de Euler como producto de la búsqueda de regularidades en prismas y pirámides, no fue necesario que nosotros la presentáramos y pudimos planear actividades a partir de ella, para verificarla y establecer características importantes más generales como, por ejemplo, que se cumple para todos los poliedros convexos.

Por último, la variedad en las soluciones, nos permitía descubrir propiedades y características de poliedros a partir de la producción de todo el curso. Por ejemplo, la Actividad 5 (de desarmado) nos llevó a verificar una de las características del concepto de desarrollo plano de un cuerpo: un mismo poliedro puede estar representado por diferentes desarrollos. Esto resultó interesante, pues causó asombro en los estudiantes y ganas de seguir explorando.

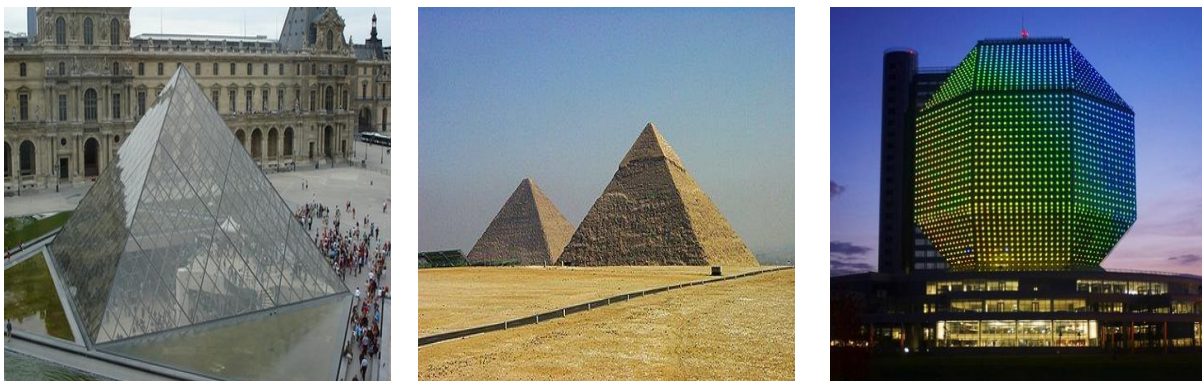
### *Relación de los contenidos matemáticos con la realidad*

A lo largo de todas las prácticas tratamos de relacionar los contenidos vistos en clase con la realidad. Acordamos con Skovsmose (2000) cuando afirma que moverse

...desde la referencia a las matemáticas puras hacia las referencias de la vida real puede ayudar a proveer recursos para reflexionar sobre las matemáticas (...) Las referencias a la vida real parecen ser necesarias para establecer una reflexión detallada sobre la manera como las matemáticas operan como parte de nuestra sociedad (p.23).

Creemos que uno de los aspectos positivos de relacionar la matemática con el mundo real es que los estudiantes vean a las matemáticas en sus entornos cotidianos, a través de ejemplos o de actividades, lo que ayuda de algún modo a dar sentido al saber que estamos estudiando. Desde el primer día tratamos de encontrar y analizar algunos cuerpos

en el aula, como el borrador, las tablets o el aula misma, y así también, en las actividades aparecieron otros ejemplos como la pirámide del museo del Louvre, las pirámides egipcias o una biblioteca de Bielorrusia con forma rombicuboctáedrica, que se muestran en la Figura 25:



**Figura 25: Poliedros en el mundo real.**

Se trabajó también la idea de abstracción, como un recurso necesario para poder reconocer objetos de la realidad como poliedros, más allá de sus detalles. Por ejemplo, en la Actividad 6, tenían que traer fotos de objetos que les sugirieran algún poliedro; esto generó una discusión sobre los detalles que hacían que un determinado cuerpo no fuera considerado un poliedro. Por ejemplo, la tapa de un frasco con forma de cubo reflejada en la Figura 26, o el obelisco de Buenos Aires que tiene ventanas en algunas “caras”, etc. Aquí se especificó esta idea de abstracción proponiendo “ver a los objetos reales con ojos de matemático”, abstrayéndonos de detalles no relevantes para nuestro fin. Nuevamente vemos en esta actividad la exploración matemática de nuestro entorno cotidiano.



**Figura 26: Frascos con forma de cubo.**

En la Actividad 5, por ejemplo, al desarmar cajitas sin cortarlas por las aristas, cuando se observaba la aparición de partes extras (aletas) en los desarrollos de las mismas, los alumnos pudieron captar que la presencia de esas aletas respondían al armado y diseño del envase de un producto para su uso comercial, pero no eran parte del desarrollo del poliedro ideal que las representaba. Se entendió que un envase (realidad) podía ser visto como un poliedro pero que tenía particularidades propias correspondientes a sus fines y funciones, de las cuales era necesario abstraerse para reconocer que un poliedro del mundo real podía representarse como un poliedro del mundo matemático.

En el proyecto “Grandes fabricantes de pequeños envases” desafiamos a los alumnos a llevar los contenidos matemáticos a la realidad -camino inverso al de las actividades anteriores- y, como mencionamos anteriormente, tuvieron que afrontar varios problemas (construcción, decisión acerca de la forma del envase, etc.). Creemos que en la resolución de estos problemas, no solo se pusieron en juego los contenidos estudiados sino también competencias matemáticas.

Primero debieron explorar el producto para el cual debían construir el envase; pensar, discutir y debatir entre los integrantes del grupo cuestiones previas a la construcción del mismo, tales como la forma, el tamaño, etc. de modo que respondiera a un modelo de la realidad que resultara adecuado al producto. Esta decisión (elección) debió ser argumentada en relación a la utilidad y el diseño, pensando en su comercialización y en todas las características que tenía que reunir el envase (aclaradas en el texto “Envases y embalajes”). Luego, debieron analizar matemáticamente el envase construido, esto implicaba volver de la realidad a la matemática, abstraerse, mirar con ojos matemáticos. Por último, debieron registrar todo el proyecto mediante un informe que comunique las características del envase y los análisis realizados.

Este proyecto se planteó al final de la práctica; se intentó trabajar, de algún modo, directamente sobre la realidad. En este caso, no sólo intervinieron procesos matemáticos tales como medir, realizar el desarrollo de un poliedro o darle su nombre matemático, sino también se tuvo que tener en cuenta el análisis del producto a envasar, las características de los potenciales clientes (pensando para quién estaba destinado el producto), la correspondencia del envase para cada producto, su marketing, etc. En la Figura 27 se muestra un envase que se corresponde al producto cubo de Rubik.



Figura 27: Poliedro-envase construido para el cubo de Rubik.

### Debate como parte de la actividad

Todas las actividades estaban pensadas para generar pensamientos, opiniones, argumentos con las discusiones que proponíamos luego en la corrección de las mismas, o en la introducción de nuevos conceptos. Como se mencionó anteriormente, primero presentábamos una actividad y después introducíamos conceptos, a través de debates, construyendo los contenidos colectivamente; con esto destacamos que casi todos los saberes surgieron a partir de la actividad de los estudiantes.

Creemos que aquí hay una fuerte diferencia con el enfoque tradicional, dando voz a los estudiantes, generando discusión en la clase de matemática y abriendo la posibilidad de cuestionar los contenidos, buscando argumentos y explicaciones, y no aceptándolos como una verdad impuesta.

Como primer aspecto positivo de esta característica, creemos que el diálogo permanente y el hecho de que nadie sea “dueño de la verdad” favoreció la comunicación entre todos en el aula, no sólo entre alumno-profesor sino entre estudiantes también.

Muchas de las actividades comenzaban con discusiones en grupos reducidos donde tenían que elegir cómo iban a realizarla. Por ejemplo, en la Actividad 1, de construcción de poliedros, debían antes de construir acordar cómo sería el cuerpo que iban a hacer. En la Actividad 2, antes de realizar la descripción del cuerpo construido sin tener el vocabulario específico, debían discutir las características que iban a tener en cuenta para hacerla.

Por otro lado, el debate favorecía la exposición de las distintas soluciones, característica que buscamos imprimir en las actividades que planteamos. Así, quien compartía su producción debía argumentar y contestar posibles preguntas que surgían de sus compañeros, y a la vez los demás debían analizar estas posturas, compararlas con sus producciones, pensarlas, verificar su validez. Por ejemplo, en las Actividades 9 y 11 de búsqueda de regularidades en prismas y pirámides, algunos estudiantes proponían regularidades que no habían sido obtenidas por sus compañeros y entonces era preciso exponerlas y justificarlas con los debidos argumentos, mientras que los demás analizaban su validez.

### Diversidad de formas de trabajo en las actividades realizadas

Propusimos varias formas de trabajo para desempeñar en la clase, las cuales creímos adecuadas para cada actividad en particular. De esta manera, los alumnos pudieron trabajar en grupos (de a pares, de a 4) o individualmente. Además, como hemos mencionado antes, en ciertos momentos de la clase, el curso entero funcionaba como un todo y se “sumergía” en el debate para validar las producciones.

El trabajo en grupo ayudó a obtener buenos resultados gracias a la coordinación y distribución de la tarea, en la que cada integrante cumplía un rol, como pudimos observarlo en nuestras clases, por ejemplo, en la Actividad 1, de construcción, donde debían construir cuerpos que desconocían con piezas que les habíamos entregado. Fue interesante ver los intercambios de opiniones y argumentaciones de cada uno para lograr el armado de más de

un cuerpo utilizando solo las piezas entregadas; y cómo acordaban roles para llevar adelante la tarea, por ejemplo, uno cortaba cinta, mientras otro iba armando el cuerpo.

Aquí, se vio favorecida la capacidad de comunicar y hacerlo con argumentos con el fin de defender las posturas propias, y también de comprender otras posturas para poder integrarlas. Según Sadovsky (2005),

Elaborar conocimiento en colaboración con otros da en general lugar a un intercambio que permite profundizar las ideas que están en juego en un cierto momento. Decir esto lleva a considerar que es conveniente – porque es de mejor calidad – promover el trabajo en equipo de los alumnos (p. 61).

También consideramos importante el trabajo individual, por más que siempre permitimos la discusión con un compañero en la realización de las actividades. Aquí entendemos este trabajo como trabajo personal, en el sentido que, favorecidos por la variedad de soluciones, no se esperaban las mismas respuestas de todos los alumnos. Por ejemplo, en las actividades de búsqueda de regularidades (Actividades 9 y 11) era necesario que cada alumno, en forma íntima, pudiera llenar las tablas correspondientes y desarrollar un trabajo de exploración, análisis y razonamiento para poder descubrir regularidades, que luego debía verificar y validar, y así poder comunicarlas en el lenguaje matemático preciso, coloquial y simbólico. Así, compartimos las palabras de Sadovsky (2005) cuando expresa:

Considerar a los estudiantes como sujetos pensantes con ideas propias fértiles para producir nuevas ideas, es aceptar que necesitan también pensar “íntimamente”, pensar “en borrador”, ensayar, explorar, garabatear, darse “el lujo” de relacionar sus cuestiones con aquello que es significativo para ellos, apelar a representaciones que los ayudan a “ver” (p. 91).

A la hora de hacer la corrección, en el caso de las actividades anteriores, la clase formaba un “todo” en el cual se exponían las relaciones encontradas, se verificaban entre todos, se validaban o no, se proponían otras regularidades u otras formas de escribir una determinada regularidad (Ejemplo:  $v = b+1$  era equivalente a  $b = v-1$ ).

En síntesis, a partir del análisis de las características de las actividades que propusimos para nuestras prácticas, consideramos que se favoreció el desarrollo de las competencias que mencionamos al inicio. Los alumnos fueron capaces de **explorar, buscar regularidades, comunicar con lenguaje matemático, argumentar, analizar, razonar, compartir, discutir, debatir, clasificar, estimar, relacionar, verificar, modelar, representar.**

### **A modo de conclusión**

A medida que desarrollamos las actividades pudimos notar la construcción de ciertas competencias junto a los contenidos, que funcionaban como herramientas esenciales para producirlos. Creemos que el modo de trabajo propuesto en nuestras prácticas, con las características recién analizadas, favoreció el desarrollo de estas competencias. Además, este modo nos ubicó en una posición de incertidumbre, en una zona de riesgo, que devino

en imprevistos -por ejemplo, en la Actividad 8, aparecieron distintas ideas de “base”, según lo relatamos en la p. 40 de este informe, o en las Actividades 9 y 11 surgieron regularidades que no habíamos pensado-.

Nos parece pertinente plantearnos, entonces, las preguntas que se hace Skovsmose (2000), “¿por qué molestarse con aprender a operar en una zona de riesgo? ¿Por qué no simplemente aceptar el contrato didáctico de la tradición de las matemáticas escolares que ha sido elaborado de manera tan cuidadosa?” (p.17). En respuesta a estas preguntas, Skovsmose (2000) rescata las ideas de otros autores:

Cobb y Yackel (1998), se refieren a la “autonomía intelectual” como una meta explícitamente establecida para sus esfuerzos por instaurar una tradición de indagación matemática que contraste con la tradición de las matemáticas escolares. La autonomía intelectual se caracteriza “en términos de la consciencia de los estudiantes y del deseo de confiar en sus capacidades intelectuales al tomar decisiones y hacer juicios matemáticos” (p. 170). La autonomía intelectual puede asociarse con las actividades de exploración y explicación que los escenarios de investigación facilitan (p.22).

Estamos de acuerdo con esta afirmación de Skovsmose, creemos que hemos fomentado la “autonomía intelectual” de nuestros alumnos y es por esto que estamos conformes con nuestro enfoque de trabajo, donde tuvo lugar el desarrollo de las competencias, que motivó la autonomía de los alumnos, la participación activa y responsable, gracias a las características de las actividades planteadas.

En el tiempo que duraron nuestras prácticas, por su escasa extensión, entendemos que no se puede pretender un desarrollo de estas competencias como fin absoluto; pero destacamos nuestro aporte con cada actividad, que se conjugó con el que la profesora venía haciendo y que continuaría a posteriori. Más aún, nos interesa en un futuro el tratado de estas competencias en el salón de clase de un modo más central, sin dejar de lado los contenidos propios, desarrollando capacidades que hemos nombrado anteriormente, que sirven dentro de la educación pero también para el desempeño fuera de ella, en la vida cotidiana.

## 5. Bibliografía

- Curriculum and Evaluation STANDARDS for school mathematics. Geometric in the middle grades (1992). Publicación del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics). Segunda Edición.
- Guillén Soler, G. (1997). Poliedros. Matemáticas: cultura y aprendizajes. Editorial Síntesis. Madrid.
- Gvirtz, S.; Palamidessi, M. (2008) El ABC de la tarea docente: currículum y enseñanza, Editorial Aique. Buenos Aires.
- Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. PNA, 1(2), p. 47-66.
- Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba (2010). La evaluación de los aprendizajes en secundaria. Documento de apoyo curricular.
- Ministerio de Educación del Gobierno de la Provincia de Córdoba (2011). Diseño Curricular para el Ciclo Básico 2011-2015.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.
- Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Libros del Zorzal. Buenos Aires.
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para Investigação. Boletim de Educação Matemática. Año 13, n. 14, p. 66-91.

### Páginas web<sup>7</sup>:

- [http://www.korthalsaltes.com/es/visual\\_index.php](http://www.korthalsaltes.com/es/visual_index.php) (Página para explorar poliedros y sus desarrollos)
- <http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521> (Geometric Solids)
- <http://www.peda.com/download/> (PolyPro)
- [www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp](http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.jnlp) (GeoGebra 3D)
- [http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/111213\\_poliedros.elp/index.html](http://www.ceibal.edu.uy/UserFiles/P0001/ODEA/ORIGINAL/111213_poliedros.elp/index.html) (Plan Ceibal, imágenes que usamos en actividades)
- <https://www.youtube.com/watch?v=Bu52Q2HAVHs> (“¿Qué aportó Euler a las ciencias?”)

Páginas utilizadas en el proyecto, que contienen imágenes e información que usamos nosotros y que fueron útiles para los alumnos también:

- [https://www.google.com.ar/search?q=paper+craft&es\\_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=Er7zU9aUC9K8oQTk8YDQBA&ved=0CAgQ\\_AUoAQ&biw=1024&bih=667](https://www.google.com.ar/search?q=paper+craft&es_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=Er7zU9aUC9K8oQTk8YDQBA&ved=0CAgQ_AUoAQ&biw=1024&bih=667)
- [https://www.google.com.ar/search?q=paper+packaging+boxes&es\\_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=Vb7zU4b-GMa8oQTctIgoAg&ved=0CAgQ\\_AUoAQ](https://www.google.com.ar/search?q=paper+packaging+boxes&es_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=Vb7zU4b-GMa8oQTctIgoAg&ved=0CAgQ_AUoAQ)
- [https://www.google.com.ar/search?q=packaging+design&es\\_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=o77zU\\_KKEoPooAS6toHQAQ&ved=0CAgQ\\_AUoAQ&biw=1024&bih=667](https://www.google.com.ar/search?q=packaging+design&es_sm=122&source=lnms&tbn=isch&sa=X&ei=o77zU_KKEoPooAS6toHQAQ&ved=0CAgQ_AUoAQ&biw=1024&bih=667)

<sup>7</sup> Las páginas web fueron consultadas por última vez en noviembre de 2014.

- <http://codigovisual.wordpress.com/2009/07/06/que-es-el-packaging/>



## **6. Anexos**

En Anexo A se muestra el texto “Envases y embalajes” que se elaboró con el propósito de brindar información que, a nuestra consideración, podía servir para la realización del proyecto.

En Anexo B se muestra el material de estudio que elaboramos, el cual fue subido a tiempo en el aula virtual para que los alumnos puedan disponer de él y utilizarlo cuando lo deseen, facilitando el trabajo en clases y, más aún, en la realización del proyecto que integraba todos los contenidos vistos. Además de poseer las definiciones, destacamos la recuperación, en este material, de las producciones de los mismos alumnos.

6.1 Anexo A

**ENVASES Y EMBALAJES**

Como diseñadores creativos debemos considerar que el envase tiene como objetivo primario atraer la atención de los clientes y ser la principal ventana de comunicación hacia el consumidor. La presentación de un producto es fundamental, tanto, que puede determinar que el producto sea un éxito o un fracaso.

Un buen embalaje es quizás el elemento que hace más perdurable la imagen de marca de un determinado producto. Aspectos como lo funcional, lo reutilizable que sea y que su diseño sea atractivo son esenciales para que el envase se convierta en un valioso añadido al producto final.

Un buen envase no solo contiene un producto, también lo protege, conserva, transporta, informa, y se vende.



**OBJETIVOS DEL ENVASADO/EMBALAJES**

El envasado y el etiquetado tienen varios objetivos:

**Protección** eficaz durante el transporte.

**Marketing:** pueden ser usados por las marcas para seducir a los clientes potenciales y que terminen comprando el producto. El diseño, tanto gráfico como de forma es un fenómeno que está en constante evolución.

**Información** sobre seguridad y manejo del envase mismo y del producto final.




**DISEÑANDO ENVASES / EMBALAJES**

Para diseñar un embalaje hay que tener muy en cuenta el producto para el que se diseña. El diseño de envases tiene una doble faceta: diseño gráfico y diseño estructural.

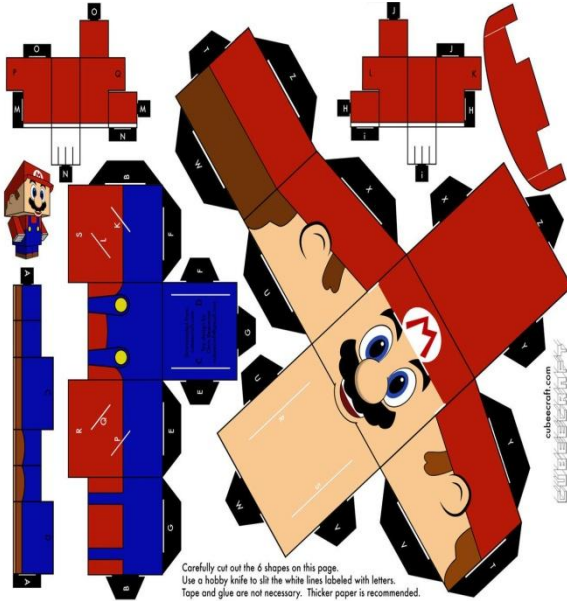
El **diseño gráfico** comprende:

	<p><b>Diseño de identidad.</b> Marca, logotipo de la compañía.</p> <p><b>Diseño emocional.</b> Los colores y las formas también tienen la función de atraer la atención del cliente.</p> <p><b>Diseño de la información a contener.</b> El envase refleja gran cantidad de información sobre su contenido, ingredientes, origen, utilidad, instrucciones de uso, etc.</p>
---	---

Para desarrollar el **diseño estructural** del envase hay que tener en cuenta:

<ul style="list-style-type: none"> <li>• El producto que va a contener.</li> <li>• Tamaño, forma y peso del producto.</li> <li>• Su fragilidad o resistencia.</li> <li>• Su forma de presentación: líquido, en polvo, en tabletas, etc.</li> <li>• Impacto vertical. Riesgo de caída desde una altura.</li> <li>• Impacto horizontal. Golpe lateral producido en el proceso de manipulación o transporte.</li> <li>• Vibración. Tanto en el momento de la producción como en el proceso de envasado o transporte.</li> </ul> <p>Forma de uso del producto. Influye en la dosificación del mismo, sistema de apertura y cierre (por ejemplo en un envase de jugo).</p>	
---	---

Algunas tendencias en envases/embalajes se resumen en los siguientes puntos:

 <p>Carefully cut out the 6 shapes on this page. Use a hobby knife to slit the white lines labeled with letters. Tape and glue are not necessary. Thicker paper is recommended.</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los niños seguirán demandando envases con colores llamativos, alegres, en los que sus personajes o dibujos de moda cobran protagonismo, incluso superior al de la propia marca.</li> <li>• Los jóvenes se verán atraídos por envases innovadores que agreguen diversión a sus vidas. Que reflejen dinamismo y su estilo de vida.</li> <li>• Diseños universales. Creados para incluir a personas con discapacidades motoras y/o sensoriales y llegar a la mayor audiencia posible, más allá de las necesidades y habilidades de un adulto promedio saludable.</li> </ul>
--	---

## 6.2 Anexo B

### Material de Estudio

#### Cuerpos Geométricos

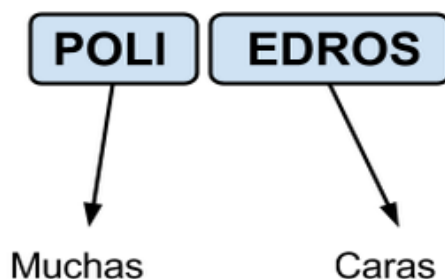


El siguiente material de estudio reúne los contenidos desarrollados en la unidad Cuerpos Geométricos de primer año.

#### Poliedros

En esta unidad estudiaremos los cuerpos geométricos formados por polígonos; veremos sus características, sus elementos, clasificaciones y ejemplos.

La palabra poliedros proviene del griego clásico y se puede analizar descomponiéndola en dos partes.

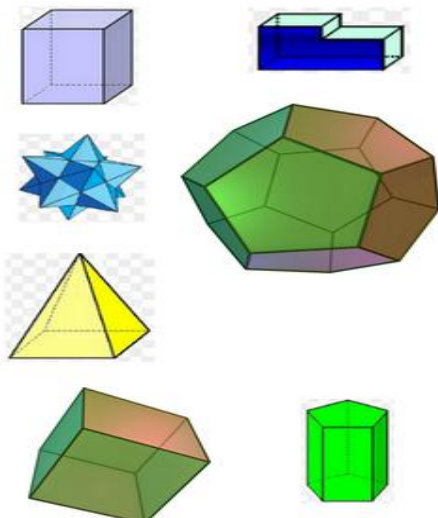
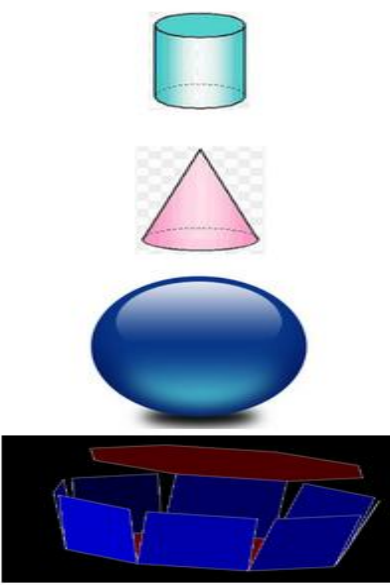


Un **poliedro** es un cuerpo cerrado en el espacio y limitado por polígonos.

*Nota: no se definirá cuerpo cerrado.*

*En la Actividad 1 de la Guía de Actividades que realizamos en clase hemos construido una gran variedad de poliedros utilizando piezas poligonales de cartón (triángulos, cuadriláteros y pentágonos). Así pudimos obtener cuerpos cerrados en el espacio, limitados por dichos polígonos.*

En la siguiente tabla podemos ver algunos ejemplos y contraejemplos de poliedros.

Ejemplos	Contraejemplos
	

*Los contraejemplos no cumplen alguna de las características mencionadas en la definición. Los tres primeros cuerpos que aparecen en la columna de contraejemplos no están conformados por caras poligonales y el último cuerpo no es cerrado.*

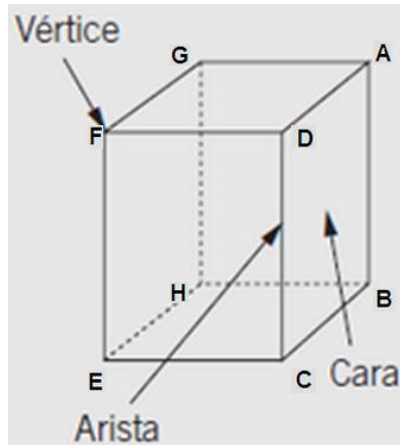
*En clase, ustedes fueron los encargados de realizar esta distinción en ejemplos y contraejemplos de poliedros sobre la pizarra; colocando, en el cuerpo geométrico indicado, si era o no era un poliedro. Además, cada apreciación debió ser justificada, situación en la que surgió que había cuerpos que no están conformados por caras poligonales (en el caso de los tres primeros cuerpos en la columna de contraejemplos) y por ello eran contraejemplos de poliedros.*

### Elementos principales de un poliedro

*Al realizar las descripciones de los poliedros en la Actividad 2 de la Guía de Actividades trabajada en clase surgieron diferentes nombres para hacer referencia a los elementos de los poliedros, tales como: vértices, puntos, puntas, segmentos, uniones, lados, caras, entre otros.*

*Para poder reconocer los poliedros y sus correspondientes elementos es necesario usar un lenguaje preciso y unificado, establecido por la matemática.*

De esta manera, en todos los poliedros podremos identificar los elementos principales que lo componen y que mostramos en la siguiente figura:



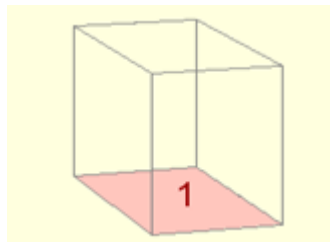
**Caras:** ABCD, AGHB, AGFD, DFEC, GFEH y BHEC

*Nota: el orden de las letras para designar una cara es arbitrario, por ejemplo, la cara ABCD también podría ser nombrada como CDAB.*

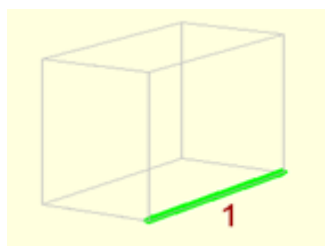
**Vértices:** A, B, C, D, E, F, G y H

**Aristas:**  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CD}$ ,  $\overline{DA}$ ,  $\overline{AG}$ ,  $\overline{BH}$ ,  $\overline{CE}$ ,  $\overline{DF}$ ,  $\overline{EH}$ ,  $\overline{EF}$ ,  $\overline{FG}$ ,  $\overline{GH}$

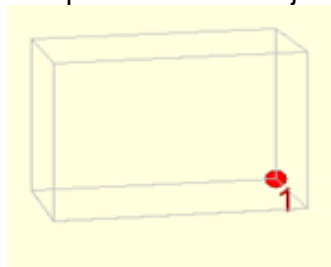
**Caras** son los polígonos que forman el cuerpo.



**Aristas** son cualquier lado común a dos caras.



**Vértices** son los puntos donde se juntan más de dos aristas.



### Clasificación de poliedros

¿Qué es clasificar?

Clasificar es definir grupos de elementos tomados de un conjunto según cierto criterio, de modo tal que cada elemento del conjunto pertenezca a un solo grupo según ese criterio, y no queden grupos sin elementos.

La actividad de clasificar es una de las características esenciales de cualquier rama del pensamiento humano y, en particular, una actividad fundamental en la matemática.

A partir de las características comunes de los distintos poliedros, podremos clasificarlos de acuerdo a diferentes criterios.

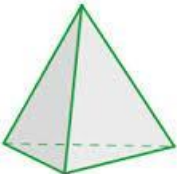

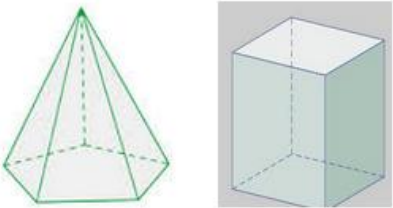
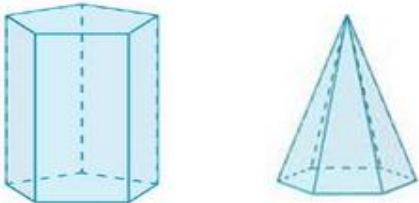
#### Algunos criterios de clasificación:

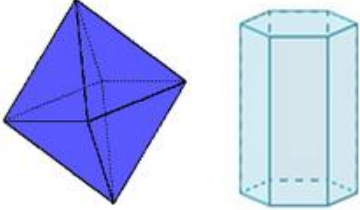
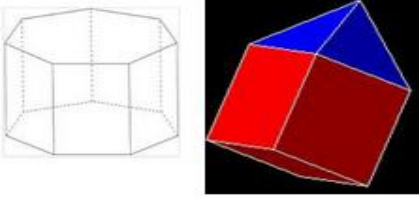
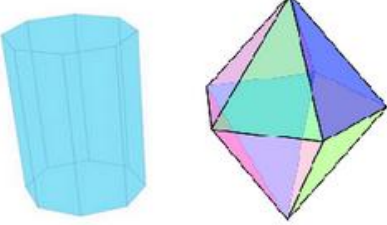
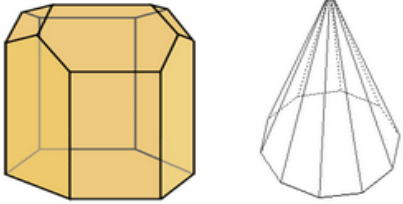
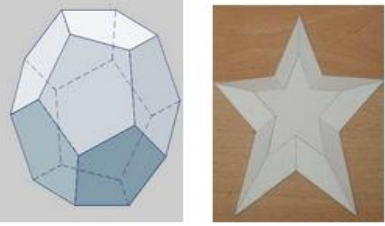
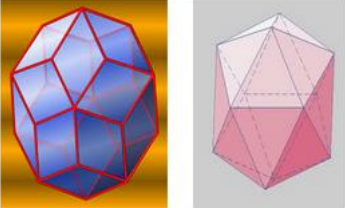
- **Clasificación según cantidad de caras**

No existen poliedros compuestos por tres caras poligonales.

*Nota: no se demostrará esta afirmación.*

Existen poliedros que, a pesar de tener formas diferentes, reciben el mismo nombre (según este criterio) por tener igual cantidad de caras.

<p><u>Tetraedro</u> → 4 caras</p>	
<p><u>Pentaedro</u> → 5 caras</p>	
<p><u>Hexaedro</u> → 6 caras</p>	
<p><u>Heptaedro</u> → 7 caras</p>	

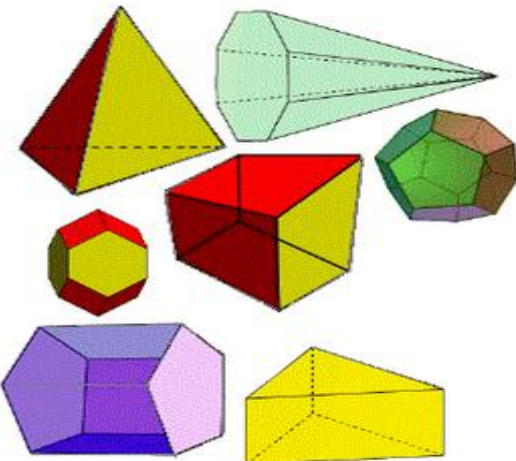
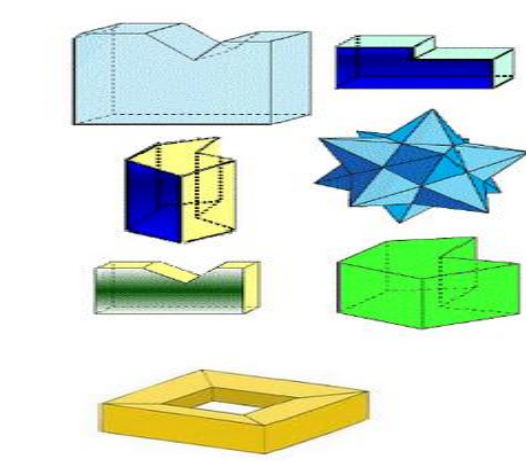
<p><u>Octaedro</u> → 8 caras</p>	
<p><u>Eneaedro</u> → 9 caras</p>	
<p><u>Decaedro</u> → 10 caras</p>	
<p><u>Undecaedro</u> → 11 caras</p>	
<p><u>Dodecaedro</u> → 12 caras</p>	 <p><u>Aclaración:</u> este poliedro tiene como base un polígono con forma de estrella</p>
<p><u>Icosaedro</u> → 20 caras</p>	

- **Clasificación según la convexidad:**
  - convexo
  - no convexo



Un poliedro es **convexo** si todas sus caras se pueden apoyar sobre un plano y, al mismo tiempo, el poliedro no es cortado o atravesado por el plano.

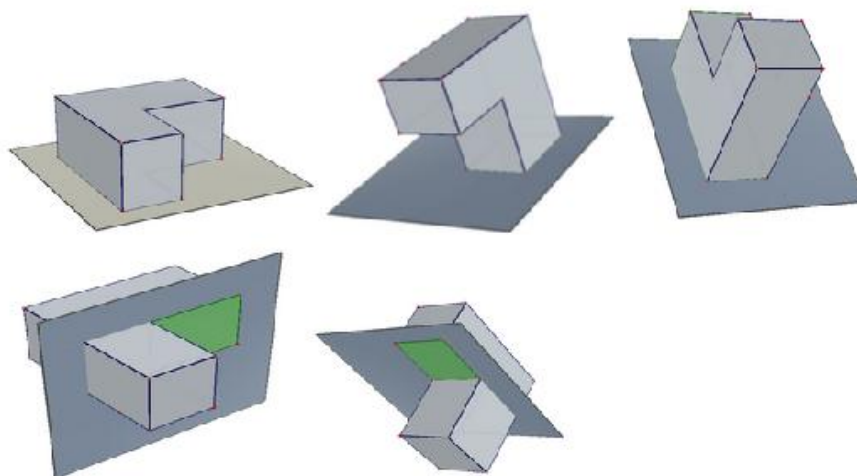
El siguiente cuadro presenta algunos ejemplos de poliedros convexos y otros de poliedros no convexos.

Convexo	No convexo
	

*En la Actividad 3 de la Guía de Actividades que trabajamos en clases, les propusimos buscar un criterio que permitiera separar al conjunto de poliedros de la tabla, de manera que queden dispuestos en dos grupos, tal y como se muestra aquí. De este modo, ustedes encontraron el criterio de convexidad, realizando analogías con el criterio de convexidad visto en polígonos.*

**Contraejemplo de poliedro convexo:**

En este poliedro, que tomamos como contraejemplo, podemos ver que los planos sobre los que se apoyan dos de sus caras, atraviesan al poliedro.



*Para ser no convexo, basta con que el plano sobre el que se apoya al menos una cara, atraviese al poliedro.*

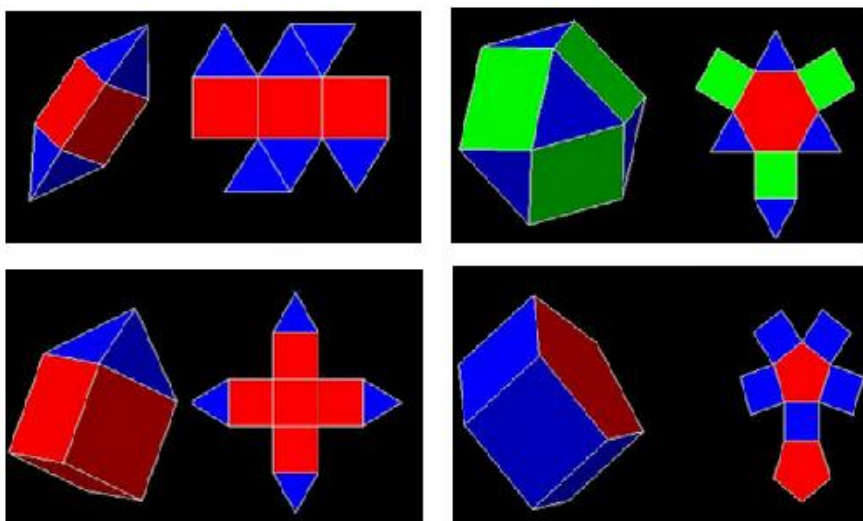
### Desarrollo de un poliedro

Si un poliedro es cortado por el suficiente número de aristas de manera que quede en una sola pieza y completamente extendido en el plano, se obtiene un desarrollo del poliedro.

También se puede proceder a la inversa, es decir, construir cuerpos a partir de su desarrollo.

El **desarrollo de un poliedro** es una representación plana del mismo. Tal desarrollo lo caracteriza, lo representa y permite construirlo.

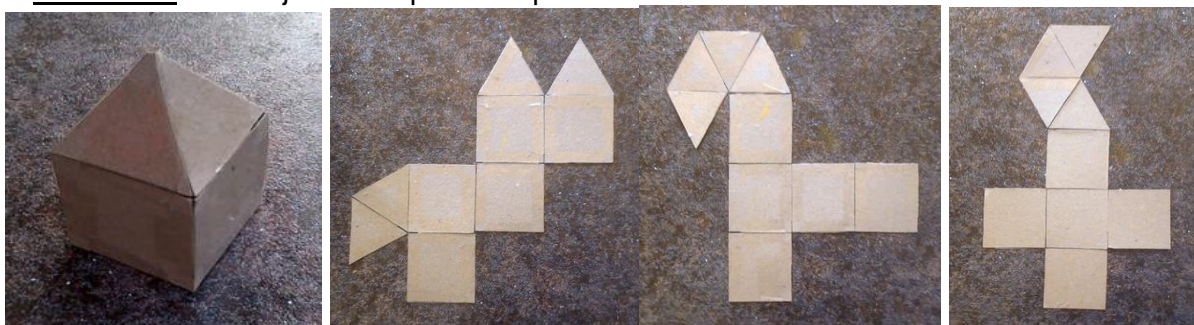
#### Ejemplos de desarrollos:



*Los poliedros y desarrollos que mostramos en estas figuras fueron realizados con el software Poly Pro. Al final de este documento podrás encontrar el link para bajarlo de Internet.*

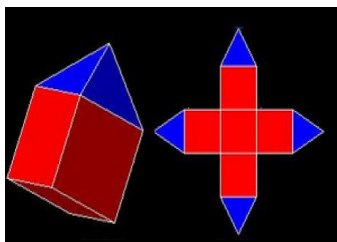
*En clase, a través de la Actividad 5 de la Guía de Actividades pudimos ver que hay varios desarrollos que representan un mismo poliedro, es decir, varios desarrollos a través de los cuales se puede construir el mismo poliedro.*

A continuación, se muestran los desarrollos (planos) a los que llegaron algunos alumnos en la Actividad 5 al trabajar con el poliedro que se muestra a continuación:

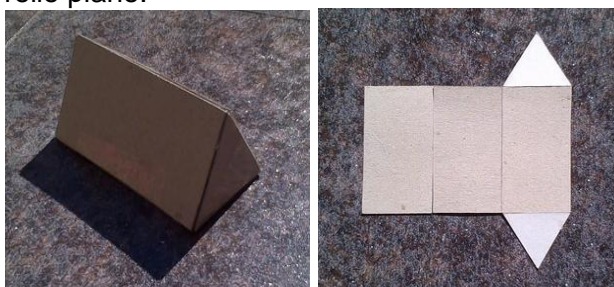


Aquí se puede ver que para un mismo poliedro existe más de un desarrollo.

*Estos desarrollos corresponden a uno de los poliedros vistos en los ejemplos de desarrollo mostrados antes:*



En la siguiente imagen se muestra un poliedro del “mundo matemático” y su correspondiente desarrollo plano:



*Este poliedro fue construido en clase con las piezas poligonales de cartón.*

La imagen siguiente muestra una de las cajitas usadas en la Actividad 5, que fue desarmada y así pudimos visualizar su desarrollo. Esta cajita de “Toblerone” es un envase del mundo real y se corresponde con el poliedro de la imagen anterior, pues ambos son pentaedros con la misma forma (tienen 5 caras: 2 triángulos y 3 rectángulos).



Vemos que el desarrollo de la cajita de “Toblerone” se diferencia del desarrollo del poliedro anterior, pues presenta partes extras (en la imagen están sombreadas en gris) que responden a fines de utilidad y diseño: protección del producto pensando en su distribución, almacenaje y venta.

Finalmente aquí tienen una página de Internet para explorar diferentes poliedros y sus correspondientes desarrollos:

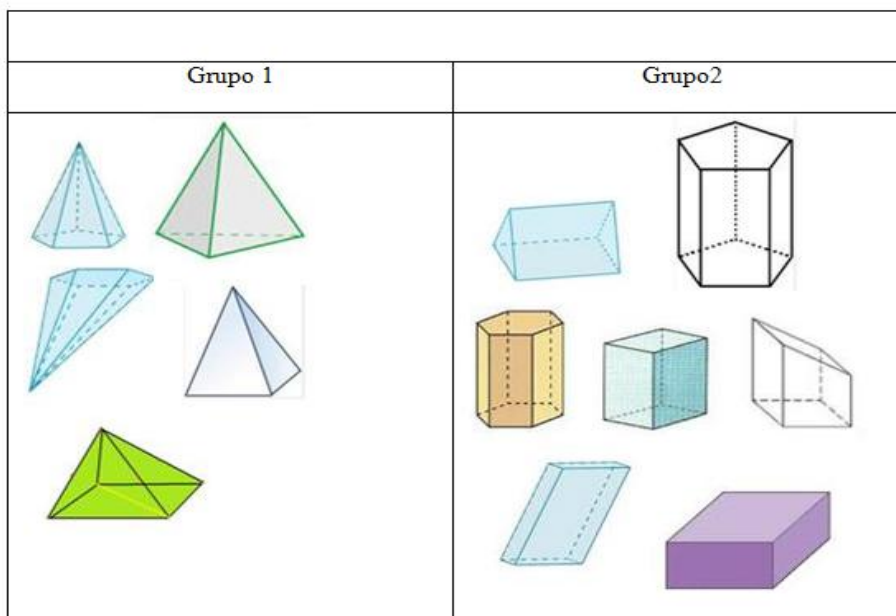
[http://www.korthalsaltes.com/es/visual\\_index.php](http://www.korthalsaltes.com/es/visual_index.php)

Poly Pro es un software que utilizamos en clases para visualizar tridimensionalmente muchos tipos de poliedros desde cualquier perspectiva, distinguir en forma clara sus elementos y visualizar sus desarrollos. En la siguiente página podrán descargar este programa.

<http://www.peda.com/download/>

### Pirámides y prismas

En la Actividad 8 de la Guía de Actividades trabajada en clase les propusimos clasificar en dos grupos un conjunto de poliedros dispuestos en una tabla, de manera que cada grupo tenga características propias que los represente. De este modo, ustedes encontraron distintas clasificaciones, de las cuales nosotros tomamos la que se muestra a continuación:



Los criterios utilizados por ustedes para realizarla fueron algunos de los siguientes:

#### GRUPO 1:

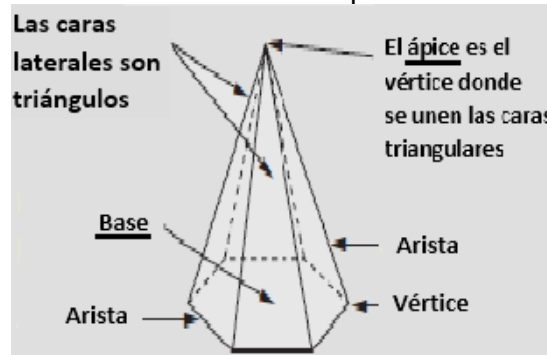
- Los poliedros están compuestos, en su mayoría, por triángulos.
- La mayoría de sus aristas se unen en un vértice.
- Presentan una punta, o cima puntiaguda.
- Tienen una base.
- Son pirámides.

#### GRUPO 2:

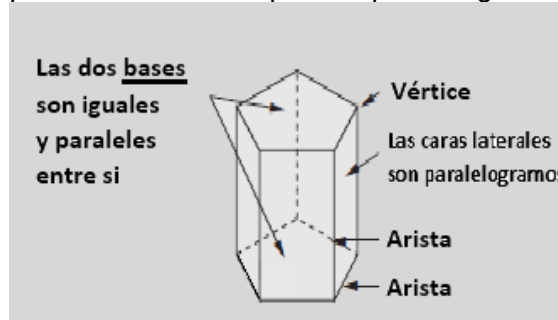
- Los poliedros están compuestos, en su mayoría, por cuadriláteros.
- Tienen dos bases.
- Son prismas.

De esta manera, se fueron acercando a los nombres y las características de estos poliedros. Así llegamos a que los poliedros del Grupo 1 se denominan pirámides y los del Grupo 2 prismas.

Una **pirámide** es un poliedro limitado por una base poligonal y por caras laterales triangulares que coinciden en un vértice llamado ápice.

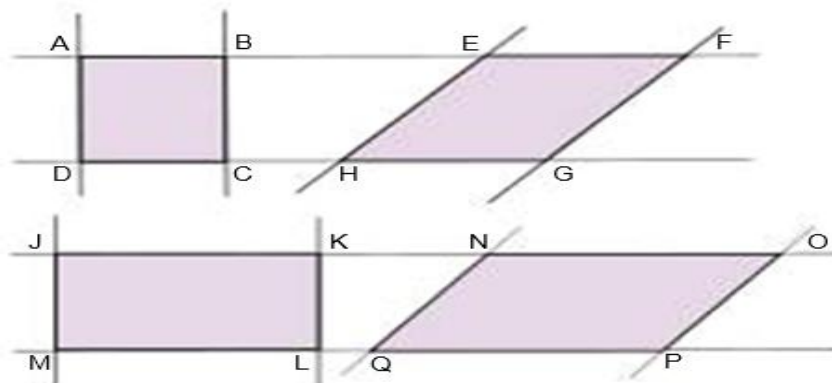


Un **prisma** es un poliedro limitado por dos caras poligonales iguales y paralelas (**bases del poliedro**) y por caras laterales que son paralelogramos\*.



\*Un **paralelogramo** es un cuadrilátero (polígono formado por cuatro lados) cuyos lados opuestos son paralelos.

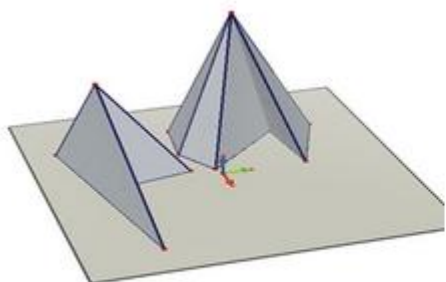
Ejemplos de paralelogramos:



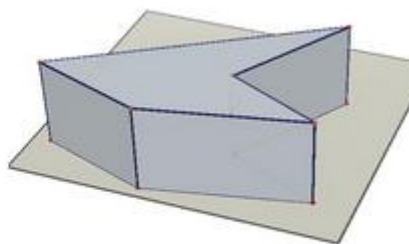
En el cuadrilátero ABCD, el lado AB es paralelo al lado DC y el lado AD es paralelo al BC. En el cuadrilátero EFGH, el lado EF es paralelo al lado HG y el lado EH es paralelo al FG. ¿Podrías indicar cuáles son los pares de lados paralelos en los cuadriláteros JKLM y NOPQ?

Los poliedros presentes en la tabla de la Actividad 8 son todos convexos, pues habíamos dicho que íbamos a trabajar sólo con este tipo de poliedros. Sin embargo, como vimos en clase, también existen pirámides y prismas no convexos.

Ejemplos:

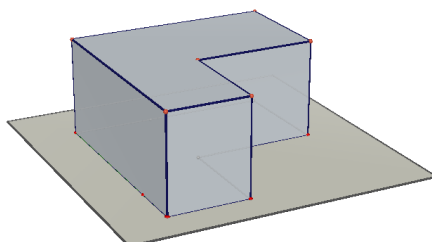


Pirámides no convexas



Prisma no convexo

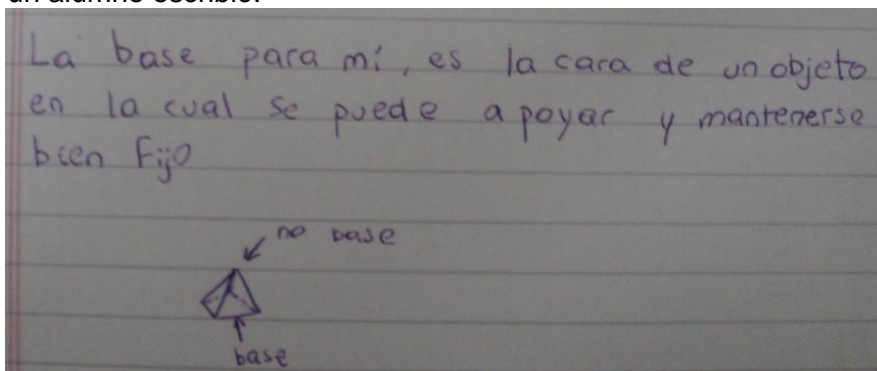
Otro prisma no convexo que pudimos ver y manipular en clase es el siguiente:



**Comentario sobre la palabra Base**

Recordemos que en esta actividad usamos como lenguaje matemático la palabra “base” para nombrar a una cara en las pirámides y a dos de las caras en los prismas.

El uso de la palabra “base” en matemática se diferencia del uso cotidiano que le damos a esa palabra base como la cara o superficie de apoyo. En uno de los cursos de primer año un alumno escribió:



También pudimos analizar entre todos en qué otros ámbitos se usa esta palabra, como una *base* militar, una *base* para sostener un televisor, la *base* como posición de juego en el básquet. Inclusive, dentro de la matemática, tiene otros usos, tal como la *base* de una potencia.



**Exponente**

↑

$$5^2 = 25$$

↑      ↑


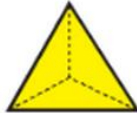
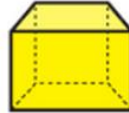



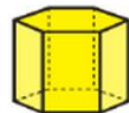

**Base      Potencia**

**$5^2 = 5 \times 5 = 25$**

*\*Este comentario viene de un debate realizado en uno de los cursos sobre el significado de la palabra “base”.*

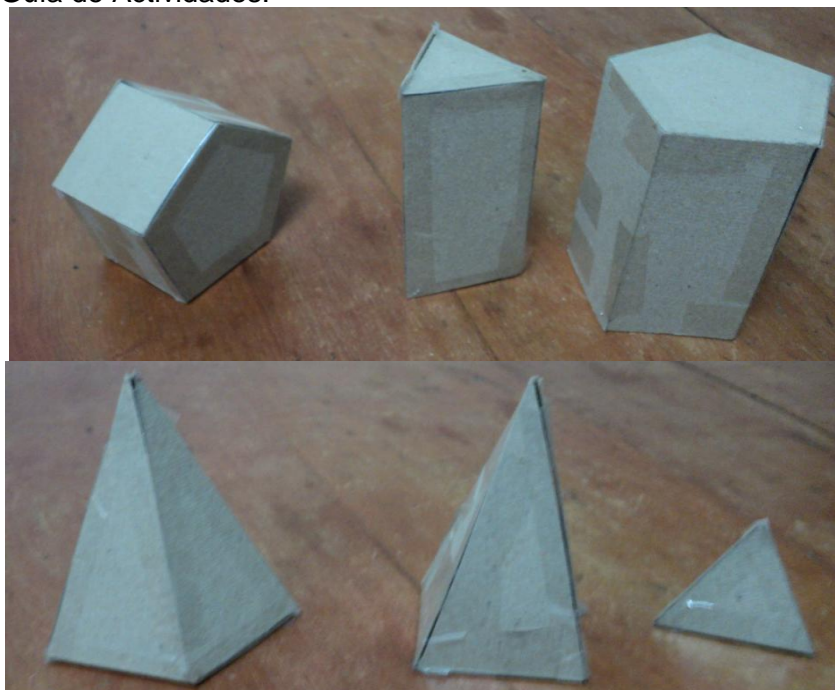
### ¿Cómo distinguimos pirámides y prismas?

Vimos que podíamos especificar aún más el nombre de pirámides y prismas, teniendo en cuenta la forma del polígono de su/s base/s. Lo podemos ver en el siguiente cuadro:

Las bases son triángulos.		Las bases son cuadriláteros.	
			
Prisma triangular	Pirámide triangular	Prisma cuadrangular	Pirámide cuadrangular
Las bases son pentágonos.		Las bases son hexágonos.	
			
Prisma pentagonal	Pirámide pentagonal	Prisma hexagonal	Pirámide hexagonal

Y así sucesivamente para bases heptagonales, octogonales, eneagonales, decagonales, etc.

A continuación vemos algunos prismas y pirámides construidos por ustedes en la Actividad 1 de la Guía de Actividades.

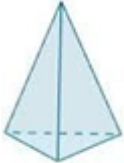


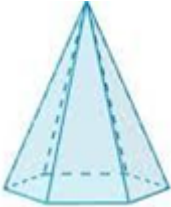


### Búsqueda de regularidades en pirámides y prismas

#### Trabajando con pirámides

Una vez vistas las características de pirámides y prismas, comenzamos con la búsqueda de regularidades en estos poliedros. Primero trabajamos con las pirámides en la Actividad 9 de la Guía de Actividades. La búsqueda se realizó a través de la exploración de una tabla que ustedes tuvieron que completar. Los datos que brinda dicha tabla son la

cantidad de elementos (número de caras, vértices y aristas) que posee cada pirámide y la cantidad de lados de las respectivas bases.

Tipo de pirámide	Número de lados de la base (b)	Número de vértices (v)	Número de caras (c)	Número de aristas (a)
 Pirámide triangular	3	4	4	6
 Pirámide cuadrangular	4	5	5	8
 Pirámide pentagonal	5	6	6	10
 Pirámide hexagonal	6	7	7	12

Una vez completada la tabla, se hizo un buen trabajo de exploración que permitió encontrar varias **regularidades que se cumplen en pirámides**. Esas regularidades fueron escritas en lenguaje coloquial y en lenguaje simbólico, respetando las referencias escritas en la tabla:

**b:** número de lados de la base de la pirámide;

**v:** número de vértices de la pirámide;

**c:** número de caras de la pirámide;

**a:** número de aristas de la pirámide.

Las regularidades encontradas, entre todos los cursos, fueron:

- $v = b + 1$ ; El número de vértices es igual al número de lados de la base más uno.
- $c = b + 1$ ; El número de caras es igual al número de lados de la base más uno.

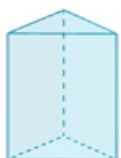
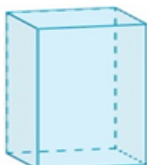
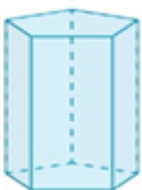
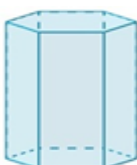


- $a = b \times 2$ ; El número de aristas es igual al número de lados de la base por dos. Es decir, el número de aristas es siempre un múltiplo de 2.
- $v = c$ ; El número de vértices es igual al número de caras.
- $a = v + c - 2$ ; El número de aristas es igual al número de vértices más el número de caras menos dos.

En el caso de las tres primeras regularidades que aparecen arriba, pudimos destacar que permiten calcular la cantidad de elementos de una determinada pirámide, teniendo como único dato la forma de su base, es decir, sabiendo la cantidad de lados que tiene la base. Así fue como estas regularidades nos sirvieron para poder resolver las consignas de la Actividad 10 de la Guía de Actividades trabajada en clase.

**Trabajando con prismas**

De manera análoga se trabajó en prismas, a través de la Actividad 11 de la Guía de Actividades, explorando la tabla que tuvieron que completar, como se muestra a continuación:

Tipo de prisma	Número de lados de la base	Número de vértices	Número de caras	Número de aristas
 Prisma triangular	3	6	5	9
 Prisma cuadrangular	4	8	6	12
 Prisma pentagonal	5	10	7	15
 Prisma hexagonal	6	12	8	18

La exploración de la tabla permitió encontrar varias **regularidades que se cumplen en prismas**. Fueron escritas en lenguaje coloquial y en lenguaje simbólico, respetando las referencias:

- b**: número de lados de la base del prisma;
- v**: número de vértices del prisma;
- c**: número de caras del prisma;
- a**: número de aristas del prisma.

Las regularidades encontradas, entre todos los cursos, fueron:

- **$v = b \times 2$** ; El número de vértices es igual al número de lados de la base por dos.
- **$c = b + 2$** ; El número de caras es igual al número de lados de la base más dos.
- **$a = b \times 3$** ; El número de aristas es igual al número de lados de la base por tres, es decir, el número de aristas es siempre un múltiplo de 3.
- **$a = b + v$** ; El número de aristas es igual al número de lados de la base más el número de vértices.
- **$a = v + c - 2$** ; El número de aristas es igual al número de vértices más el número de caras menos dos.
- **$v = b + c - 2$** ; El número de vértices es igual al número de lados de la base más el número de caras menos dos.

En el caso de las tres primeras regularidades que aparecen arriba, pudimos destacar que permiten calcular la cantidad de elementos de un determinado prisma, teniendo como único dato la forma de sus bases. Así fue como estas regularidades nos sirvieron para poder resolver las consignas de la Actividad 12 de la Guía de Actividades trabajada en clase.

### Una regularidad especial: la fórmula de Euler

Tanto en la exploración de la tabla de pirámides como en la de prismas, surgió una regularidad muy especial que relaciona los tres elementos de esos poliedros (caras (c), vértices (v) y aristas (a)):

$$v + c - 2 = a$$

Esta relación se conoce como *fórmula de Euler* y debe su nombre a su descubridor, Leonhard Euler, quien la hizo pública en 1750.



Nosotros descubrimos esta regularidad al explorar pirámides y prismas, pero además de valer para pirámides y prismas, esta sorprendente fórmula se cumple para cualquier poliedro convexo y para algunos no convexos.




En el siguiente link se muestra un video sobre todos los aportes que hizo Euler, pues esta fórmula fue sólo uno de ellos:







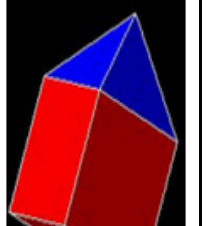
<https://www.youtube.com/watch?v=Bu52Q2HAVHs>

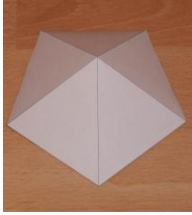


**Verificando la validez de la fórmula de Euler en otros poliedros convexos**

En la realización de la Actividad 13 de la Guía de Actividades, contaron los elementos (caras, aristas y vértices) de algunos poliedros convexos para luego verificar la fórmula de Euler.

A continuación mostramos una tabla de lo realizado en la actividad cuya información fue recolectada a partir de los archivos subidos al aula virtual por los alumnos de primer año.

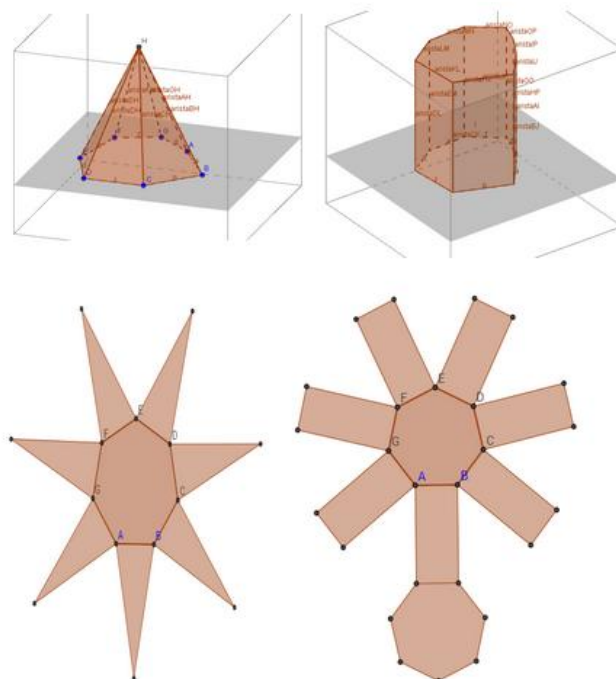
Poliedro	Cantidad de vértices (v)	Cantidad de caras (c)	Cantidad de aristas (a)	Verificación de la Fórmula de Euler: $v + c - 2 = a$	Cumple con la fórmula
	6	8	12	$v + c - 2 = a$ $6 + 8 - 2 = 12$ $12 = 12$	Sí
	8	6	12	$v + c - 2 = a$ $8 + 6 - 2 = 12$ $12 = 12$	Sí
	24	26	48	$v + c - 2 = a$ $24 + 26 - 2 = 48$ $48 = 48$	Sí

	24	14	36	$v + c - 2 = a$ $24 + 14 - 2 = 36$ $36 = 36$	Sí
	6	6	10	$v + c - 2 = a$ $6 + 6 - 2 = 10$ $10 = 10$	Sí
	40	32	70	$v + c - 2 = a$ $40 + 32 - 2 = 70$ $70 = 70$	Sí
	12	20	30	$v + c - 2 = a$ $12 + 20 - 2 = 30$ $30 = 30$	Sí
	5	5	8	$v + c - 2 = a$ $5 + 5 - 2 = 8$ $8 = 8$	Sí
	12	8	18	$v + c - 2 = a$ $12 + 8 - 2 = 18$ $18 = 18$	Sí
	9	9	16	$v + c - 2 = a$ $9 + 9 - 2 = 16$ $16 = 16$	Sí

	6	6	10	$v + c - 2 = a$ $6 + 6 - 2 = 10$ $10 = 10$	Sí
	4	4	6	$v + c - 2 = a$ $4 + 4 - 2 = 6$ $6 = 6$	Sí
	24	38	60	$v + c - 2 = a$ $24 + 38 - 2 = 60$ $60 = 60$	Sí

**Software para construir pirámides y prismas**

Existe software matemático que permite construir algunos poliedros. Vimos en clase la construcción de pirámides y prismas y sus respectivos desarrollos planos utilizando el software GeoGebra 5.0 3D, disponible para descargar en el siguiente link:  
[www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.inlp](http://www.geogebra.org/webstart/5.0/geogebra-50.inlp)



**Pirámides y prismas en el mundo real**

Para terminar esta sección dedicada a pirámides y prismas, mostramos fotos del mundo real en las que, a pesar de algunos detalles que podemos obviar, si las vemos con una mirada matemática podemos identificar pirámides o prismas.

Imágenes de pirámides del mundo real:



Imágenes de prismas en el mundo real:



### Poliedros Regulares

Para iniciar con este tema comenzamos recordando qué características tienen los polígonos regulares, tema ya estudiado por ustedes. Luego, les preguntamos qué pensaban sobre la posible existencia de poliedros regulares. Ustedes respondieron que pensaban que sí existían, y enunciaron posibles características que podrían tener esos poliedros regulares, surgiendo afirmaciones válidas como:

- a) Tienen todas sus caras iguales.
- b) Tienen todas las aristas de la misma longitud.
- c) Están compuestos por polígonos regulares.

Luego, iniciamos la Actividad 15 de la Guía de Actividades que trabajamos en clase, donde tuvieron que buscar información relacionada con *poliedros regulares* para elaborar un informe respondiendo a preguntas que previamente desconocían, como por ejemplo:

*¿Existen poliedros regulares? ¿Se conocen con algún otro nombre? ¿Qué características tienen? ¿Cuántos hay? ¿Cuáles son?*

De esta manera, acordamos dar la siguiente definición de *poliedros regulares*:

**Un poliedro regular es aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cada vértice se unen el mismo número de caras.**



Así para que un poliedro sea regular, deben cumplirse dos condiciones **simultáneamente**:


- 1) que las caras sean polígonos regulares iguales;
- 2) que en cada vértice del poliedro se una el mismo número de caras.

Así podemos decir que las características a), b) y c) se relacionan con la condición 1) que define un poliedro regular y son correctas.

### Los cinco poliedros Regulares (convexos\*)

Los *poliedros regulares*, también conocidos como *sólidos platónicos*, son cinco y se muestran en el siguiente cuadro:

<p><b>Tetraedro regular</b></p> <p>Caras: 4 triángulos equiláteros</p>	
<p><b>Octaedro regular</b></p> <p>Caras: 8 triángulos equiláteros</p>	

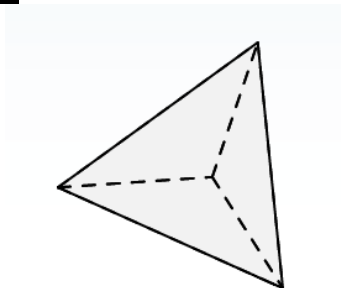
<p><b>Icosaedro regular</b></p> <p>Caras: 20 triángulos equiláteros</p>	
<p><b>Hexaedro regular (cubo)</b></p> <p>Caras: 6 cuadrados</p>	
<p><b>Dodecaedro regular</b></p> <p>Caras: 12 pentágonos regulares</p>	

*\*Estos cinco poliedros regulares (convexos) serán los que tendremos en cuenta. Los no convexos no serán estudiados.*

Además, al comienzo de esta tema, dentro de las características que ustedes enunciaron como correspondientes a poliedros regulares, surgieron algunas otras que no son necesarias para que un poliedro sea regular, tales como:

- d) Tienen un par de caras opuestas y paralelas.

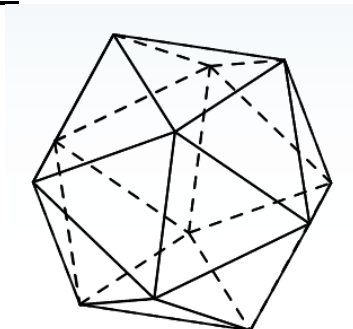
**Contraejemplo:**



*El tetraedro regular no posee ningún par de caras opuestas paralelas.*

- f) Sus ángulos miden  $90^\circ$ .

**Contraejemplo:**



*El icosaedro regular no presenta ángulos de  $90^\circ$ .*



g) Son convexos.

**Contraejemplo:** Al realizar la actividad de buscar información sobre poliedros regulares, muchos de ustedes encontraron 4 poliedros regulares no convexos que se muestran a continuación:



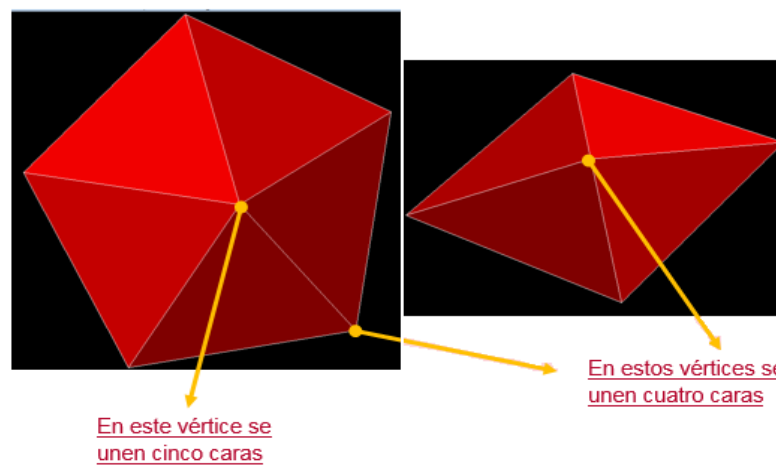
Es muy importante recordar que para que un poliedro sea regular deben cumplirse simultáneamente las dos condiciones antes enunciadas. A continuación veremos algunos contraejemplos de poliedros regulares y analizaremos qué condición o condiciones no cumplen para ser poliedros regulares

**Contraejemplos:**



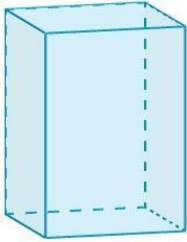
Este es un poliedro compuesto por 6 triángulos equiláteros, es decir, 6 polígonos regulares. Así, se cumple la primera condición para ser regular pero no cumple con la segunda condición de la definición, pues, como se ve en la figura, posee vértices donde se unen 4 caras (figura de la izquierda) y otros vértices donde se unen 3 caras (figura de la derecha).

En consecuencia, este poliedro no es regular.



Este es un poliedro compuesto por 10 triángulos equiláteros, es decir, 10 polígonos regulares. Así, se cumple la primera condición para ser regular pero no cumple con la segunda condición de la definición, pues, como se ve en la figura, posee vértices donde se unen 5 caras y otros vértices donde se unen 4 caras.

En consecuencia este poliedro no es regular.



Este poliedro (prisma cuadrangular) cumple con la segunda condición: en cada vértice se une la misma cantidad de caras: 3. Sin embargo no cumple con la primera condición, pues sus seis caras no son polígonos regulares iguales, que en este caso deberían ser cuadrados.

En consecuencia este poliedro no es regular.

**Cabe destacar que:**

- el *tetraedro regular* es una pirámide, pues, satisface la definición de pirámide: está compuesto por 4 triángulos equiláteros iguales. De esta manera, cualquiera de esos triángulos puede ser elegido como base, y los tres restantes cumplen el rol de caras laterales triangulares.
- el *hexaedro regular (cubo)* es un prisma ya que satisface la definición de prisma: está compuesto por 6 cuadrados iguales (los cuadrados cumplen la condición para ser paralelogramos). De esta manera, cualquier par de caras paralelas pueden ser elegidas como base y las 4 caras restantes cumplen el rol de caras laterales que son paralelogramos.

Finalmente, aquí tienen una página de Internet para explorar los **poliedros regulares** y sus correspondientes desarrollos:

<http://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521>