UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA,
FACULTAD DE MATEMÁTICA,
ASTRONOMÍA Y FÍSICA

Trabajo especial de licenciatura

INTERPOLACIÓN DE OPERADORES EN ESPACIOS L^p

Guillermo Javier Flores
Directora: Dra. Elida Ferreyra

Marzo de 2010

"De Mí obtiene el sol el calor que él emite,
y del mismo modo retengo y rocío la lluvia
sobre la superficie de la tierra".

El Bhagavad Gita
Canto del Señor

46B70. Interpolation between normed linear spaces.
46E30. Spaces of measurable functions (L^p-spaces, Orlicz spaces, Kthe function spaces, Lorentz spaces, rearrangement invariant spaces, ideal spaces, etc.)
46G12. Measures and integration on abstract linear spaces.

Resumen

En el capítulo I presentamos el “Teorema de convexidad de Riesz-Thorin” y diferentes aplicaciones. Y concluimos con el “Teorema de interpolación de Riesz-Stein”.

En el capítulo II, hacemos un breve estudio de “operadores de tipo débil y función distribución”, definimos la clase de Marcinkiewicz y demostramos los “Teoremas de interpolación de Marcinkiewicz. Caso diagonal y caso general”. Damos algunas aplicaciones. Concluimos este capítulo con las “Condiciones de Kolmogoroff y Zygmund”.

Este trabajo contiene un Apéndice donde destacamos variados resultados matemáticos, fundamentales para el entendimiento de los dos capítulos.

Palabras claves: interpolación, transformada de Fourier, operadores de convolución, espacios L^p.

Índice

Introducción

En el campo de la Matemática, se denomina interpolación a la construcción de nuevos puntos a partir de un conjunto discreto de puntos. Problemas de este tipo son comunes en la Física o Análisis Numérico. La teoría de interpolación de operadores en espacios L^p está fuertemente ligada con este concepto y encuentra muchas aplicaciones en análisis funcional y armónico. El amplio conocimiento actual sobre la teoría de la medida e integración en diferentes espacios, y los problemas más destacados de este tema, son los que brindan el argumento de la importancia en el desarrollo de interpolación de operadores.

Frecuentemente, ciertos operadores de distinta clase son estudiados y es importante conocer si son acotados o no desde un espacio de medida en otro. Muchas veces estos operadores, tienen una expresión analítica que toma sentido para un determinado conjunto o tipo de funciones "fácilmente manejables", pero carece de sentido cuando queremos extenteder el dominio del operador a un espacio más general o a otro espacio de funciones. La interpretación de los teoremas de interpolación, puede dar alguna información para la solución de este tipo de problemas. A lo largo de este trabajo, aplicaremos los teoremas de interpolación a operadores destacados como el de Fourier, los de convolución y los potenciales de Riesz.

Nuestro objetivo es hacer una exposición detallada sobre los teoremas de convexidad de Riesz-Thorin y los teoremas de interpolación de Riesz-Stein y Marcinkievicz. También, mostrar importantes aplicaciones sobre operadores y generalización de desigualdades clásicas.

Para comenzar, en el capítulo I damos los preliminares necesarios para poder enunciar el "Teorema de convexidad de Riesz-Thorin". El conocimiento de la teoría de la medida, el análisis funcional de operadores y espacios de Lebegue, son los que nos pemitirán entender esta primera parte. Luego enunciamos el teorema de convexidad y damos diferentes aplicaciones. Seguimos con el desarrollo de la demostración del teorema a través del llamado método complejo. Y concluimos este capítulo con el "Teorema de interpolación de Riesz-Stein".

El capítulo II, básicamente consta de dos partes. En la primera, hacemos un breve estudio de "operadores de tipo débil y función distribución", definimos la clase de Marcinkievicz. Luego demostramos el "Teorema de interpolación de Marcinkievicz. Caso diagonal y mostramos algunas de sus aplicaciones más conocidas. En la segunda parte, nos concentramos en el estudio del "Teorema de interpolación de Marcinkievicz. Caso general" y una de sus importantes aplicaciones. Concluimos este capítulo con las "Condiciones de Kolmogoroff y Zygmund".

Este trabajo contiene una tercera parte, que es el Apéndice. En éste destacamos importantes resultados matemáticos, clásicos y actuales, los cuales son fundamentales para la entendimiento de los dos capítulos. Teoremas como "La desigualdad de Hölder", "Desigualdad integral de Minkowski" y "Desigualdad de Young" son ejemplos de los resultados clásicos. El llamado "Principio del máximo" de Phragmén-Lindelöf y el "Teorema de las tres líneas" son el argumento principal en el desarrollo de la demostración del teorema de Riesz-Thorin a través del método complejo.

Breve reseña histórica

El primer resultado de interpolación de operadores data del año 1911 y es debido a I. Schur. Dos años más tarde, Young prueba un resultado del mismo tipo referente a espacios L^p y a un operador T. La extensión de estos resultados a operadores lineales entre espacios L^p generales son los teoremas de Riesz-Thorin (Riesz en 1926 y Thorin, por el método complejo, en 1948) y Marcinkiewicz (usando el método real en 1939). La demostración de este último teorema, en su caso más general, es debida a Zygmund en el año 1956. En el mismo año A. P. Calderón y Zygmund extienden los teoremas de interpolación al caso de operadores sub-lineales y, E. M. Stein demuestra un teorema de interpolación relativo a familias analíticas de operadores. En la década de los 60, A. P. Calderón, J. L. Lions y J. Peetre desarrollan una teoría que incluye espacios de Banach abstractos y que generaliza los resultados anteriores. Esta teoría puede ser resumida del siguiente modo. Sean (A_0, A_1) y (B_0, B_1) dos pares compatibles de espacios de Banach (esto es, existen dos espacios vectoriales topológicos separados A y B tales que A_0, A_1 están contenidos continuamente en A, y B_0, B_1 en B) y sea $T : A \to B$ un operador tal que su restricción a A_i da un operador continuo de A_i en B_i, $i = 0, 1$. Un método de interpolación consiste en construir espacios de Banach A y B tales que $T : A \to B$ resulte lineal continuo (propiedad de interpolación). Existen dos diferentes puntos de vista según que las técnicas empleadas sean de variable real o de variable compleja. Se llaman respectivamente método real (desarrollado por J. L. Lions, J. Peetre) y método complejo (desarrollado por J. L. Lions, A. P. Calderón).

http://biblioteca.universia.net/html_bura/ficha/params/id/34895540.html

Capítulo I

Teorema de convexidad de Riesz-Thorin

1.Preliminares

Sea $(\mathscr{X},\mu)$ un espacio de medida σ-finito, donde μ es una medida positiva y $L^p = L^p(\mathscr{X},\mu)$ el correspondiente espacio de Lebesgue sobre los números complejos (o reales), de todas las funciones f a valores en $\mathbb{C}$ (o $\mathbb{R}$) y medibles, con $\|f\|_p = (\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu)^{\frac{1}{p}} < \infty$.

Para toda función f y para todo λ >0 cosideremos:

$$f_\lambda(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \lambda \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \lambda \end{cases} \tag{1.1a}$$

$$f^\lambda(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| \leq \lambda \\ f(x) & \text{si } |f(x)| > \lambda \end{cases} \tag{1.1b}$$

Luego

$$f = f_\lambda + f^\lambda, \qquad |f|^p = |f_\lambda|^p + |f^\lambda|^p$$

y

$$|f_\lambda| \leq \lambda, \qquad |f_\lambda| \leq |f|, \qquad |f^\lambda| \leq |f|.$$

Entonces, para $p_1 \geq p$, tenemos que

$$|f_\lambda|^{p_1-p} \leq \lambda^{p_1-p} \qquad \text{implica} \qquad |f_\lambda|^{p_1} \leq \lambda^{p_1-p}|f_\lambda|^p \leq \lambda^{p_1-p}|f|^p,$$

y para $p_0 \leq p$,

$$|f^\lambda|^{p_0-p} \leq \lambda^{p_0-p} \qquad \text{implica} \qquad |f^\lambda|^{p_0} \leq \lambda^{p_0-p}|f^\lambda|^p \leq \lambda^{p_0-p}|f|^p.$$

Ahora consideremos el espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$ (ó $\mathbb{R}$) L^{p_0}+L^{p_1} de todas las funciones de la forma $f = f_0 + f_1$ donde $f_0 \in L^{p_0}$ y $f_1 \in L^{p_1}$.

Lema 1.1 *Sean* $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq \infty$ *y* $\lambda > 0$.
(a) *Si* $f \in L^p$ *entoces* $f_\lambda \in L^{p_0}$ *y* $f^\lambda \in L^{p_1}$.
(b) $L^p \subset L^{p_0} + L^{p_1}$.
(c) *Si* $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ *y* $p_1 < \infty$ *entonces* $||f||_p^p \leq ||f||_{p_0}^{p_0} + ||f||_{p_1}^{p_1}$.

(d) *Si* $f \in L^{p_0} \cap L^\infty$ *entonces* $f \in L^p$.

Demostración: (a) y (b) resultan de los comentarios anteriores al lema.

Para probar (c) tomamos $\lambda = 1$ y usamos

$$|f_1| \leq 1 \quad \text{implica} \quad |f_1|^{p_0-p} \geq 1 \quad \text{implica} \quad |f_1|^{p_0} \geq |f_1|^p$$
$$\text{y} \quad |f^1|^{p-p_1} \leq 1 \quad \text{implica} \quad |f^1|^p \leq |f^1|^{p_1},$$

por lo tanto

$$|f|^p = |f_1|^p + |f^1|^p \leq |f_1|^{p_0} + |f^1|^{p_1} \leq |f|^{p_0} + |f|^{p_1}.$$

Probemos (d): en los casos $p = p_0$ ó $p = \infty$, es inmediato. Veamos el caso $p_0 < p < \infty$, sabemos que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p. $x \in \mathscr{X}$ y tomamos $\mathscr{X} = E_1 \cup E_2$ donde $E_1 = \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| \leq 1\}$ y $E_2 = \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| > 1\}$, entonces

$$\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu = \int_{E_1} |f|^p d\mu + \int_{E_2} |f|^p d\mu \leq$$
$$\int_{E_1} |f|^{p_0} d\mu + \int_{E_2} \|f\|_\infty^p d\mu \leq \|f\|_{p_0}^{p_0} + \|f\|_\infty^p \mu(E_2),$$

como $|f(x)| \geq 1$ en E_2 tenemos

$$\mu(E_2) = \int_{E_2} d\mu \leq \int_{E_2} |f|^{p_0} d\mu \leq \int_{\mathscr{X}} |f|^{p_0} d\mu < \infty,$$

luego $f \in L^p$.

$\square$

De las partes (c) y (d) del Lema 1.1 podemos observar que, en general, si $1 \leq p_0 \leq p \leq p_1 \leq \infty$ y $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, entonces $f \in L^p$.

Fijemos dos espacios de medidas $(\mathscr{X},\mu)$, $(\mathscr{Y},\nu)$ y consideremos operadores lineales T definidos en un subespacio de funciones μ-medibles sobre $\mathscr{X}$ con imagen en el espacio de las funciones ν-medibles sobre $\mathscr{Y}$.

Si $1 \leq p_0 \leq p_1 < \infty$ y T es un operador lineal definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$, entonces T está definido en el conjunto $L^{p_0} \cup L^{p_1}$ y es lineal en L^{p_0} y L^{p_1}. Recíprocamente, si T está definido en el conjunto $L^{p_0} \cup L^{p_1}$ y es lineal en los espacios L^{p_0} y L^{p_1}, existe un único operador lineal T_1 definido en el espacio $L^{p_0} + L^{p_1}$ tal que $T_1 = T$ en $L^{p_0} \cup L^{p_1}$ (dado por $T_1(g + h) = T(g) + T(h)$ para $g \in L^{p_0}$ y $h \in L^{p_1}$).

Por lo tanto, si tenemos un operador lineal T definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$, ó un operador T definido en el conjunto $L^{p_0} \cup L^{p_1}$ tal que es lineal en los espacios L^{p_0} y L^{p_1}, por la parte (b) del Lema 1.1 T se extiende a todo espacio L^p con $p_0 \leq p \leq p_1$.

Un operador lineal T se dice sub-lineal si $T(f+g)$ está unívocamente definido, siempre que $T(f)$ y $T(g)$ estén definidos y además $|T(f+g)| \leq |T(f)| + |T(g)|$.

Definición 1.2 Un operador lineal T (o sub-lineal) definido en un espacio vectorial $L \subset L^p(\mathscr{X}, \mu)$ es de tipo (p,q) sobre L con constante $M_{pq} < \infty$, si $Tf \in L^q(\mathscr{Y}, \nu)$ y

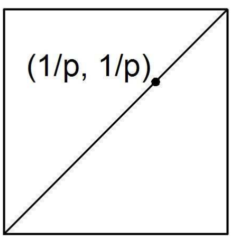
$$||Tf||_q \leq M_{pq}||f||_p \qquad \text{para toda } f \in L.$$

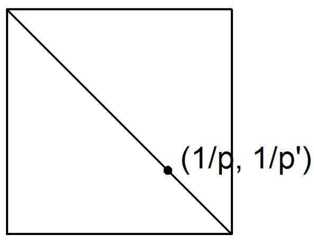
Si $L = L^p$, simplemente diremos que T es de tipo (p,q) con constante M_{pq}, lo cual es equivalente a decir que T es un operador acotado o continuo desde $L^p(\mathscr{X}, \mu)$ en $L^q(\mathscr{Y}, \nu)$ con norma $||T||_{pq} \leq M_{pq}$.

Definición 1.3 El conjunto tipo de T, es el conjunto $\tau(T)$ de todos los puntos $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ en $\mathbb{R}^2$ tales que L^p está contenido en el dominio de definición de T y T es de tipo (p,q).

En general trabajaremos con operadores de tipo (p,q) donde $1 \leq p, q \leq \infty$, y estamos interesados en los conjuntos tipo contenidos en el cuadrado unidad del plano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 1\}$.

Por ejemplo, si sabemos que T es de tipo (p,p), el conjunto $\tau(T)$ contiene el punto $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p})$ el cual pertenece a la diagonal principal. Y si T es de tipo (p,p') donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\tau(T)$ contiene el punto $(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})$ el cual pertenece a la diagonal secundaria: podemos apreciar los siguientes gráficos asociados al ejemplo:





Sean S un subespacio vectorial denso de $L^p = L^p(\mathscr{X},\mu)$ para todo $1 \leq p < \infty$ y T un operador lineal definido en S. Sea $1 \leq q < \infty$, entonces T es de tipo (p,q) sobre S si y sólo si existe un único operador T_1 definido sobre todo el espacio L^p tal que T_1 es de tipo (p,q) y $T_1 = T$ en S (ver 1 del apéndice).

En general, consideraremos:

(i) S la clase de todas las funciones simples definidas en $\mathscr{X}$, esto es

$$S = \left\{ f = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{X}_{A_k} : a_k \in \mathbb{C}, A_k \subset \mathscr{X} \text{ medible y } A_k \cap A_j \neq \emptyset, 1 \leq k,j \leq n \right\}.$$

(ii) En el caso $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$, S es la clase de todas las funciones continuas (o suaves) de soporte compacto, es decir

$$S = \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}, f \text{ función continua (o suave) y de soporte compacto } \right\}$$

Tanto en (i) como en (ii), S es denso en L^p para todo $1 \leq p < \infty$. Más aún, si S es como en (i), entonces es denso en L^∞.

Lema 1.4 *Sea S como en (i) o (ii), T un operador lineal definido en S y $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. Entonces, T es de tipo (p_0,q_0) y de tipo (p_1,q_1) sobre S con constantes M_0 y M_1 respectivamente si y sólo si T se extiende a un operador en $L^{p_0} + L^{p_1}$ tal que la restricción a L^{p_0} es de tipo (p_0,q_0) y la restricción a L^{p_1} es de tipo (p_1,q_1) con las mismas constantes M_0 y M_1 respectivamente.*

Demostración: Primero probaremos la implicación. Como T es de tipo (p_i,q_i) sobre S con $i = 1, 0$; T se extiende a un operador T_0 de tipo (p_0,q_0) en L^{p_0} con constante M_0 y también se extiende a un operador T_1 definido en L^{p_1} de tipo (p_1,q_1) con constante M_1. Definimos el operador T' en $L^{p_0} + L^{p_1}$ de la siguiente manera: supongamos que $T_0 = T_1$ en $L^{p_0} \cap L^{p_1}$, si $h = f_0 + f_1 \in L^{p_0} + L^{p_1}$, entonces $T'h = T_0 f_0 + T_1 f_1$. Veamos que T' esta bien definido, en efecto

$$\text{si } h = f_0 + f_1 \text{ y } h = g_0 + g_1, \qquad 0 = f_0 - g_0 + f_1 - g_1$$

$$\text{luego} \quad f_0 - g_0 = f_1 - g_1, \qquad \text{donde} \quad f_0 - g_0 \in L^{p_0} \text{ y } f_1 - g_1 \in L^{p_1}$$

$$\text{entonces} \quad T_0 f_0 - T_0 g_0 = T_1 f_1 - T_1 g_1 \qquad \text{ó bien} \quad T_0 f_0 + T_1 f_1 = T_0 g_0 + T_1 g_1.$$

Por lo tanto T' está bien definido, siempre que $T_0 = T_1$ en $L^{p_0} \cap L^{p_1}$.

Si S es como en (ii) y $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, existe una sucesión $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ en S tal que f_m converge a f en L^{p_0} y en L^{p_1}, entonces

$$T_i f = \lim_{m\to\infty} T_i f_m = \lim_{m\to\infty} T f_m \qquad \text{en } L^{q_i}, \quad i = 0, 1;$$

y podemos elegir una subsucesión $\{f_{m_k}\}$ de $\{f_m\}$ tal que

$$T_i f = \lim_{k\to\infty} T f_{m_k} \qquad \text{p.p. en } \mathbb{R}^n, \text{ para } i = 0, 1;$$

luego $T_0 = T_1$ (ver 2 del apéndice).

Si S es como en (i), supongamos que $f \geq 0$ y $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$. Existe una sucesión de funciones simples $\{f_m\}$ tal que $0 \leq f_1 \leq f_2 \ldots \leq f_m \leq f$ para todo $m \in \mathbb{N}$ y f_m converge a f p.p. en $\mathscr{X}$. Como

$$\lim_{m\to\infty} |f - f_m|^{p_i} = 0 \quad \text{ p.p. en } \mathscr{X},\ i = 0, 1; \quad \text{ y } |f - f_m|^{p_i} \leq (2|f|)^{p_i},$$

por el teorema de la convergencia dominada f_m converge a f en L^{p_i} para $i = 0, 1$; y podemos concluir, como antes, que $T_0 f = T_1 f$ (ver 2 del apéndice).

La recíproca del lema es bastante inmediata. Sean T el operador lineal definido en S y T' definido en $L^{p_0} + L^{p_1}$ la extensión de T tal que su restricción a L^{p_i} es de tipo (p_i,q_i) con constante M_i para $i = 0, 1$. Como $S \subset L^{p_i}$ $i = 0, 1$ y $T' = T$ en S, entonces T es de tipo (p_i,q_i) sobre S con constante M_i $i = 0, 1$.

$\square$

<u>Definición 1.5</u> Dados $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$. Para cada $t \in [0, 1]$ definimos los intermedios p_t y q_t dados por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

Notemos que el conjunto de todos los intermedios p_t (respectivamente q_t) coincide con el intervalo que tiene como extremos p_0 y p_1 (respectivamente q_0 y q_1).

$$\text{Además} \quad p = p_t \quad \text{si y sólo si} \quad t = \frac{(p_0 - p)}{(p_0 - p_1)} \frac{p_1}{p} \tag{1.5.1}$$

Para otener (1.5.1) hay que despejar t de la ecuación $\frac{1}{p} = \frac{1}{p_t}$.

Si tomamos p_0' y p_1' los conjugados de p_0 y p_1 respectivamente, obtenemos el intermedio p_t', que es el conjugado de p_t, en efecto

$$1-\frac{1}{p_t}=(1-t+t)-(1-t)\frac{1}{p_0}-\frac{t}{p_1}=$$

$$(1-t)\left[1-\frac{1}{p_0}\right]+t\left[1-\frac{1}{p_1}\right]=(1-t)\frac{1}{p_0'}+t\frac{1}{p_1'}=\frac{1}{p_t'}.$$

2. Teorema de Riesz-Thorin

Teorema 2.1 “Teorema de interpolación o convexidad de Riesz-thorin”

(a) *Sea S el conjunto de todas las funciones simples a valores complejos definidas en $\mathscr{X}$ y sea T un operador lineal definido en S, tal que Tf es una función ν-medible en $\mathscr{Y}$. Si T es de tipo (p_0,q_0) y de tipo (p_1,q_1) sobre S con constantes M_0 y M_1 respectivamente, donde $1\leq p_0,p_1,q_0,q_1\leq\infty$. Entonces T es de tipo (p_t,q_t) sobre S para todo $t\in[0,1]$, con constante M_t que satisface*

$$M_t\leq {M_0}^{1-t}{M_1}^{t}. \tag{2.1a}$$

Más aún, T se extiende a un operador lineal T' definido sobre el espacio vectorial generado por

$$\bigcup_{p_t<\infty} L^{p_t},$$

tal que la restricción a cada L^{p_t} es un operador acotado desde L^{p_t} en L^{q_t} de norma $||T'||_{p_tq_t}\leq {M_0}^{1-t}{M_1}^{t}$ siempre que $p_t<\infty$.

(b) *Si T es un operador lineal definido en el espacio vectorial complejo $L^{p_0}+L^{p_1}$, donde la restricción de T a L^{p_i} es de tipo (p_i,q_i) con constante M_i, $i=0,1$; entonces la restricción de T a L^{p_t} es de tipo (p_t,q_t) para todo $t\in[0,1]$ con constante M_t que satisface (2.1a).*

<u>Corolario 2.2</u> *Si S es la clase de todas las funciones continuas (o suaves) a valores complejos y de soporte compacto definidas en $\mathscr{X} = \mathbb{R}^n$ y T es un operador lineal de tipo (p_i, q_i) sobre S, $i = 0, 1$; donde $1 \leq p_0, p_1 < \infty$ y $1 \leq q_0, q_1 \leq \infty$. Entonces T se extiende a un operador lineal T' definido en el espacio vectorial complejo $L^{p_0} + L^{p_1}$ tal que la restricción a L^{p_t} es un operador acotado de L^{p_t} en L^{q_t} con norma $||T'||_{p_t q_t} \leq M_t$ para todo $t \in [0, 1]$ y M_t satisface (2.1a).*

<u>Demostración</u>: usando el <u>Lema 1.4</u> , T se extiende a un operador lineal T' definido $L^{p_0} + L^{p_1}$ tal que la restricción a L^{p_i} es de tipo $(p_i$,$q_i)$ con constante M_i, $i = 0, 1$. Luego T' satisface la parte (b) del <u>Teorema 2.1</u> , lo cual prueba el corolario.

$\square$

Podemos hacer los dos siguientes comentarios, que justifican el nombre de "convexidad"del <u>Teorema 2.1</u>. Bajo las hipótesis de este teorema se cumple:
• $\tau(T)$ es un conjunto convexo contenido en el cuadrado unidad del plano.
• Si (α_0, β_0), $(\alpha_1, \beta_1) \in \tau(T)$ y $\frac{1}{p_t} = (1-t)\alpha_0 + t\beta_0$, $\quad \frac{1}{q_t} = (1-t)\alpha_1 + t\beta_1$, entonces la función $\varphi(t) = \log(||T||_{p_t q_t})$ es una función convexa de t, en efecto:

$$\text{llamemos} \quad M_t = ||T||_{p_t q_t}, \qquad \text{luego} \quad \varphi(t) = \log(M_t),$$

como $M_t \leq {M_0}^{1-t} {M_1}^t$, entonces

$$\varphi(t) \leq (1-t)\log(M_0) + \ t\log(M_1)$$

$$\text{luego} \quad \varphi(t) = \varphi((1-t)0 + t1) \leq (1-t)\varphi(0) + t\ \varphi(1)$$

Por lo tanto φ satisface la definición de función convexa para $t \in (0, 1)$.

3. Aplicaciones del teorema de convexidad

<u>Observación 3.1</u> Consideremos la transformada de Fourier $\mathscr{F}$ actuando en $L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ y en $L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, donde dx es la medida de Lebesgue. Sabemos que $\mathscr{F} : L^1 \to L^\infty$ es lineal y se satisface $||\hat{f}||_\infty \leq ||f||_1$, es decir, $\mathscr{F}$ es de tipo $(1, \infty)$ con constante menor o igual que 1. Por otro lado, $\mathscr{F}$ es una isometría de L^2 en L^2, es decir, $||\hat{f}||_2 = ||f||_2$, luego $\mathscr{F}$ es de tipo (2,2) con constante menor o igual que 1. Estamos en condiciones de probar el siguiente resultado.

Teorema 3.2 "Desigualdad de Hausdorff-Young en $\mathbb{R}^n$"
Si $f \in L^p$ para $1 \leq p \leq 2$, entonces

$$\mathscr{F} f = \hat{f} \in L^{p'} \quad y \quad ||\hat{f}||_{p'} \leq ||f||_p, \quad donde \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

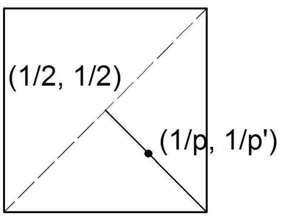
Demostración: Como $\mathscr{F}$ es de tipo $(1, \infty)$ y es de tipo (2,2) con constantes $M_0, M_1 \leq 1$, por el Corolario 2.2 $\mathscr{F}$ es de tipo (p_t, q_t) con constante $M_t \leq 1$. Además se cumple

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{2} = 1 - \frac{t}{2} \quad \text{y} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{t}{2}$$

$$\text{entonces} \qquad \frac{1}{p_t} + \frac{1}{q_t} = 1, \qquad \text{por lo tanto} \qquad q_t = p_t^{'}.$$

□

El teorema anterior afirma que $\mathscr{F}$ es de tipo (p, p') con $1 \leq p \leq 2$, p y p' conjugados. Por lo tanto, el conjunto $\tau(\mathscr{F})$ tiene el siguiente gráfico:



Ahora, consideremos $\mathscr{F}$ actuando en $L^1(\mathrm{T}, d\mu)$ y en $L^2(\mathrm{T}, d\mu)$ donde $\mathrm{T} = \mathbf{S}^1$, $d\mu = (2\pi)^{-1}dx$ y $\mathscr{F} f = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, con $c_n = \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} d\mu(x)$ el coeficiente n-ésimo de Fourier de f, entonces $\mathscr{F} f$ es una función medible en el espacio $(\mathbb{Z}, \nu)$ donde ν es la medida discreta, así $l^p = L^p(\mathbb{Z}, d\nu)$. Asumiendo que $\mathscr{F} : L^1(\mathrm{T}) \to l^\infty$ es continua e inyectiva con $\sup |c_n| \leq \int_0^{2\pi} |f| d\mu$, lo cual nos dice que $\mathscr{F}$ es de tipo $(1, \infty)$ con constante menor o igual que 1. Y que $\mathscr{F} : L^2(\mathrm{T}) \to l^2$ es una isometría, o sea $||\{c_n\}||_2^2 = \sum |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} |f|^2 d\mu = ||f||_2^2$. Entonces, podemos probar el siguiente resultado, usando el Corolario 2.2 de manera análoga a como hicimos en el Teorema 3.2 .

Teorema 3.3 "Desigualdad de Hausdorff-Young para series de Fourier"
Si $f \in L^p(\mathrm{T})$ *y* $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}$ *es la serie de Fourier asociada a* f, *entonces*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \leq \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{donde} \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1 \ y \ 1 \leq p \leq 2.$$

$\square$

Observación 3.4 (i) Sea T un operador de convolución de tipo (p,q) con $p > q$, entonces $T \equiv 0$. En efecto, sabemos que T es lineal y conmuta con las traslaciones, entonces

$$||\tau_h(Tf)+Tf||_q = ||T(\tau_h f+f)||_q \leq M_{pq}||\tau_h f+f||_p \tag{3.4.1}$$

donde consideramos que $M_{pq} = ||T||_{pq}$. Haciendo tender $|h|$ a infinito en la desigualdad (3.4.1) obtenemos

$$2^{\frac{1}{q}}||Tf||_q \leq M_{pq}2^{\frac{1}{p}}||f||_p,$$

(ver 3 del apéndice). Entonces

$$||Tf||_q \leq 2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}M_{pq}||f||_p \quad \text{para toda } f \in L^p,$$

luego, como $M_{pq} = ||T||_{pq}$, resulta

$$2^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}M_{pq} \geq M_{pq},$$

así, si $M_{pq} \neq 0$ se debe cumplir que

$$\frac{1}{p}-\frac{1}{q} \geq 0,$$

entonces $q \geq p$. Esto nos dice que si $p > q$, debe ser $M_{pq} = 0$ y por lo tanto $T \equiv 0$. Esto prueba la afirmación.

(ii) Sea k fijo en L^1 y K el correspondiente operador convolución, entonces K es de tipo (1,1) con constante menor o igual a $||k||_1$; también K es de tipo (∞,∞) con constante menor o igual a $||k||_1$. Luego, por el teorema de convexidad, si $p = p_t$ con $1 \leq p \leq \infty$, K es de tipo (p,p) con constante menor o igual que $||k||_1^{1-t}\ ||k||_1^t = ||k||_1$ (ver 4 del apéndice).

Sean ahora k fijo en L^q $1 \leq q \leq \infty$ y $K : L^1 \to L^q$ el operador convolución definido por $Kf = k * f$, entonces K es de tipo $(1,q)$ con constante menor o igual a $||k||_q$. Además, si $g \in L^{q'}$ con $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = 1$ entonces $||k*g||_\infty \leq ||k||_q||g||_{q'}$, lo cual nos dice que K es un operador de tipo (q', ∞) con constante igual a $||k||_q$. Como K es un operador lineal que está definido en L^1 y en $L^{q'}$, entonces podemos extender K adecuadamente a L^p con $1 \leq p \leq q'$.

Teorema 3.5 "Desigualdad generalizada de Young"

Si $f \in L^p$ *y* $g \in L^q, 1 \leq p, q \leq \infty$, *con* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$, *entonces* $f * g \in L^r$, *y*

$$||f * g||_r \leq ||f||_p \; ||g||_q \quad \textit{donde} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Demostración: fijamos $g \in L^q$ y sea K el operador definido por $Kh = h * g$, entonces K es de tipo $(1,q)$ y de tipo (q', ∞) con constantes M_0 y M_1 iguales a $||g||_q$ donde $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Luego por el teorema de Riesz-Thorin, K es de tipo (p_t, r_t) donde $t \in [0, 1]$ con constante menor o igual que $||g||_q$ y

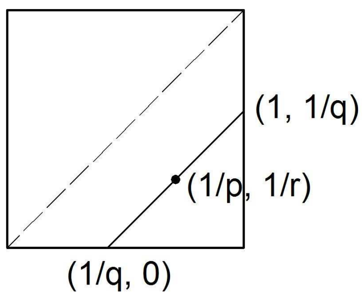
$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'} = 1 - t + \frac{t}{q'} = 1 - \frac{t}{q},$$

$$\frac{1}{r_t} = \frac{1-t}{q} = \frac{1}{q} + \left(1 - \frac{t}{q}\right) - 1 = \frac{1}{q} + \frac{1}{p_t} - 1.$$

Llamamos $p = p_t$ y $r = r_t$, entonces se deduce el teorema.

$\square$

Entonces el teorema anterior afirma que el conjunto $\tau(K)$ tiene el siguiente gráfico:



4. Prueba del teorema de convexidad. Método complejo

Sean $L^p = L^p(\mathscr{X}, \mu)$, $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ y S el conjunto de todas las funciones simples definidas en $\mathscr{X}$. El Teorema 2.2 se refiere a la norma de un oprador T en diferentes espacios L^p, entonces, expresaremos la norma p en términos de las normas p_i $i = 0, 1$. Una manera sencilla de hacer esto, es la siguiente, si $0 \leq f \in L^p$,

$$\int_{\mathscr{X}} f^p d\mu = \int_{\mathscr{X}} \left(f^{\frac{p}{p_0}}\right)^{p_0} d\mu = \int_{\mathscr{X}} \left(f^{\frac{p}{p_1}}\right)^{p_1} d\mu < \infty \quad \text{entonces}$$

$$f_0 = f^{\frac{p}{p_0}} \in L^{p_0}, \quad f_1 = f^{\frac{p}{p_1}} \in L^{p_1} \quad \text{y} \quad ||f||_p^p = ||f_0||_{p_0}^{p_0} = ||f_1||_{p_1}^{p_1}.$$

Más en general, definimos

$$f_{0+iy} = f^{(1+i)\frac{p}{p_0}} \quad \text{y} \quad f_{1+iy} = f^{(1+i)\frac{p}{p_1}} \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}, \text{ esto implica}$$

$$|f_{0+iy}| = f^{Re\left((1+i)\frac{p}{p_0}\right)} = f^{\frac{p}{p_0}} = f_0 \quad \text{y de manera similar} \quad |f_{1+iy}| = f_1.$$

Además se satisface

$$\int_{\mathscr{X}} f^p d\mu = \int_{\mathscr{X}} |f_{0+iy}|^{p_0} d\mu = \int_{\mathscr{X}} |f_{1+iy}|^{p_1} d\mu,$$

entonces

$$||f||_p^p = ||f_{iy}||_{p_0}^{p_0} = ||f_{1+iy}||_{p_1}^{p_1} \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Ahora extenderemos la relación anterior para funciones simples a valores complejos haciendo una leve modificación en la definición de "f_{0+iy} y f_{1+iy}".

Tomamos el conjunto $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1\} \subset \mathbb{C}$, acotado lateralmente por $\Delta_0 = \{z = iy : \ y \in \mathbb{R}\}$ y $\Delta_1 = \{z = 1 + iy : \ y \in \mathbb{R}\}$. Dados $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, para cada z definimos p_z por

$$\frac{1}{p_z} = \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1} \quad \left(\text{entonces} \quad p_z = \frac{p_0 p_1}{z p_0 + (1-z) p_1}\right) \quad \text{si } p_1 < \infty$$

$$\text{y} \quad p_z = p_0 \frac{1}{1-z} \quad \text{si } p_1 = \infty.$$

Fijamos $t \in (0,1)$ de modo que $p_t = p$. Sea $f(x) = \sum a_k \mathcal{X}_{A_k}(x)$ función simple, denotemos el argumento de f por $\phi(x)$, entonces $f(x) = |f(x)| \exp(i\phi(x))$. Para cada $z \in D$ definimos $f_z(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p_z}} \exp(i\phi(x))$, entonces

$$f_z(x) = \sum |a_k|^{\frac{p}{p_z}} e^{i\arg(a_k)} \mathcal{X}_{A_k}(x) \doteq \sum a_k(z) b_k(x),$$

donde $a_k(z) = |a_k|^{\frac{p}{p_z}} \exp(i\arg(a_k))$, función analítica y acotada en D, y $b_k(x) = \mathcal{X}_{A_k}(x)$, por lo tanto f_z es una función simple para cada z fijo, y

$$|f_z(x)| = |f(x)|^{Re\left(\frac{p}{p_z}\right)} \quad \text{donde} \quad Re\left(\frac{p}{p_z}\right) = \left\{ \begin{array}{ll} p/p_0 & \text{si } z = iy \in \Delta_0 \\ p/p_1 & \text{si } z = 1+iy \in \Delta_1 \end{array} \right.$$

Luego

$$\int_{\mathscr{X}} |f_{iy}|^{p_0} d\mu = \int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu \quad \text{para todo } iy \in \Delta_0, \tag{4.1a}$$

$$\int_{\mathscr{X}} |f_{1+iy}|^{p_1} d\mu = \int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu \quad \text{para todo } 1+iy \in \Delta_1 \tag{4.1b}$$

y por lo tanto $||f||_p^p = ||f_{iy}||_{p_0}^{p_0} = ||f_{1+iy}||_{p_1}^{p_1}$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Para continuar, usaremos la siguiente definición, una función a valores en $L^p(\mathscr{X},\mu) = L^p$, $F : D \to L^p$, la cual asigna a cada $z \in D$ una función $F(z) = F_z \in L^p$, se dice analítica, si para toda función simple ψ, la función numérica $< F_z, \psi >= \int F_z(x)\psi(x) d\mu$ es analítica en el sentido usual.

Ahora, definiendo $\Phi(z) = f_z$ para cada $z \in D$, obtenemos:
(a) $\Phi : z \mapsto f_z \in$S $\subset L^{p_0} \cap L^{p_1}$, Φ es una función a valores en L^{p_i}, $i = 0, 1$; acotada y analítica en D.
(b) $\Phi(t) = f$, es decir $f_t = f$, que resulta de $p_t = p$.
(c) definiendo

$$|||\Phi||| = \sup\{||\Phi(iy)||_{p_0}, ||\Phi(1+iy)||_{p_1} \text{ tal que } y \in \mathbb{R}\}, \tag{4.1.1}$$

tenemos que

$$|||\Phi||| = \text{máx}\{\ ||f||_p^{\left(\frac{p}{p_0}\right)},\ ||f||_p^{\left(\frac{p}{p_1}\right)}\ \}$$

entonces

$$|||\Phi||| < 1 \quad \text{si} \quad ||f||_p < 1 \tag{4.1.2}$$

y

$$|||\Phi||| = 1 \quad \text{si} \quad ||f||_p = 1.$$

Probaremos la afirmación (a): Tomamos $\Phi : z \mapsto f_z \in S \subset L^{p_0}$, entonces por la desigualdad de Minkowski y usando que $a_k(z)$ es acotada, otenemos que

$$||\Phi(z)||_{p_0} = ||f_z||_{p_0} = \left(\int_{\mathscr{X}} |f_z(x)|^{p_0} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} =$$

$$\left(\int_{\mathscr{X}} \left| \sum a_k(z) \mathcal{X}_{A_k}(x) \right|^{p_0} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq \sum \left(\int_{\mathscr{X}} |a_k(z)|^{p_0} \mathcal{X}_{A_k}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} \leq$$

$$\sum \left(\int_{\mathscr{X}} c_k^{p_0} \mathcal{X}_{A_k}(x) d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p_0}} = \sum c_k \ \mu(A_k)^{\frac{1}{p_0}} < \infty \quad \text{para todo } z \in D,$$

donde c_k es la constante que acota a $a_k(z)$ en D.

Por lo tanto, Φ es acotada como función de D en L^{p_0}. De manera análoga, se puede ver que Φ es acotada como función de D en L^{p_1}.

Además, sea ψ en S,

$$< f_z, \psi >= \int_{\mathscr{X}} \sum a_k(z) b_k(x) \psi(x) d\mu(x) = \sum a_k(z) \int_{\mathscr{X}} b_k(x) \psi(x) d\mu(x)$$

es analítica en D, pues $a_k(z)$ es analítica en D. Luego tenemos que Φ es analítica en D.

Ahora veremos que $a_k(z)$ es analítica y acotada en D, en efecto

$$a_k(z) = |a_k|^{\frac{p}{p_z}} e^{i \arg(a_k)} \quad \text{y}$$

$$\text{entonces, si} \quad p_1 = \infty \quad a_k(z) = |a_k|^{(1-z)\frac{p}{p_0}} e^{i \arg(a_k)}$$

$$\text{y si} \quad p_1 < \infty \quad a_k(z) = |a_k|^{\left((1-z)\frac{p}{p_0} + z\frac{p}{p_1}\right)} e^{i \arg(a_k)},$$

de donde resulta claro que $a_k(z)$ es analtíca en D.
Como

$$|a_k(z)| = |a_k|^{Re \frac{p}{p_z}}, \quad z = x + iy,$$

tenemos que

$$\text{si} \quad p_1 = \infty \quad Re\left(\frac{p}{p_z}\right) = (1-x)\frac{p}{p_0} \quad \text{con } x \in (0,1),$$

$$\text{si} \quad p_1 < \infty \qquad Re\left(\frac{p}{p_z}\right) = (1-x)\frac{p}{p_0} + x\frac{p}{p_1} \quad \text{con } x \in (0,1).$$

Luego $a_k(z)$ es acotada en D.

Definición 4.2 Dada $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ y t fijo en (0,1),

$$\mathfrak{F}_f(p_0, p_1) = \mathfrak{F}_f = \{\Phi : D \to L^{p_0} \cap L^{p_1} : \Phi \text{ satisface (a) y (b)}\}$$

Para una $\Phi \in \mathfrak{F}_f$, $|||\Phi|||$ está definido como en (4.1.1).

Para una función f simple, podemos deducir que $\mathfrak{F}_f$ es no vacío. Para una función general $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, lo probaremos en la siguiente proposición.

Proposición 4.3 *Sea $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ y t fijo en $(0,1)$. Se cumple:*
(i) $\mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$ es no vacío.
(ii) Si $\Phi \in \mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$, $||\Phi(iy)||_{p_0} \leq M_0$ y $||\Phi(1 + iy)||_{p_1} \leq M_1$ para todo $y \in \mathbb{R}$, entonces $||f||_{p_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t$. En particular, se satisface la recíproca de (4.1.2), esto es, si $|||\Phi||| < 1$ entonces $||f||_{p_t} < 1$.

Demostración: Probemos (i). Del Lema 1.1 sabemos que si $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ y $p_0 < p_t < p_1$ entonces $f \in L^{p_t}$.

Elegimos una sucesión $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ en S tal que $||f - f_k||_{p_i}$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, para $i = 0, t, 1$.

Para cada función simple f_k, existe $\Phi_k \in \mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$. Definimos $\Phi(z) = \Phi_k(z) + f - f_k$.

Luego Φ es acotada y analítica en D, pues Φ_k lo es. Y como $\Phi(t) = \Phi_k(t) + f - f_k = f$, entonces $\Phi \in \mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$.

Probemos (ii): tomamos $p = p_t$ y sean p_0', p_1', p_t' conjugados de p_0, p_1, p_t respectivamente y g simple tal que $||g||_{p_t'} \leq 1$. Entonces existe $\Phi^* \in \mathfrak{F}_f(p_0', p_1')$, con $\Phi^*(t) = g$ y $||\Phi^*(iy)||_{p_0} \leq 1$, $||\Phi^*(1 + iy)||_{p_1} \leq 1$ para todo $y \in \mathbb{R}$.

Consideremos la función $F(z) = \int_{\mathscr{X}} \Phi(z)\Phi^*(z) d\mu$ definida en D. Como Φ^* es de la forma $\Phi^*(z) = g_z$, también $\Phi(z) = f_z$,

$$g_z(x) = \sum a_k(z) b_k(x) \quad \text{con } a_k(z) \text{ analítica en } D,\ b_k \text{ función simple,}$$

además, como $\Phi \in \mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$ entonces $\displaystyle\int_{\mathscr{X}} f_z b_k d\mu$ es analítica en D,

y $\Phi(z)\Phi^*(z) = f_z \sum a_k(z) b_k$, por lo tanto $F(z) = \sum a_k(z) \displaystyle\int_{\mathscr{X}} f_z b_k d\mu$

y cada integral es una función analítica de z en D. Luego F es una función analítica en D.

Por la desigualdad de Hölder,

$$|F(iy)| \leq ||\Phi(iy)||_{p_0}||\Phi^*(iy)||_{p_0'} \leq M_0 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}, \text{ y}$$

$$|F(1+iy)| \leq ||\Phi(1+iy)||_{p_1}||\Phi^*(1+iy)||_{p_1'} \leq M_1 \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Luego, por el "Teorema de las tres líneas" (ver 5 del apéndice), resulta $|F(t)| \leq M_0^{1-t}M_1^t$ para $0 < t < 1$. Como $\Phi(t) = f$ y $\Phi^*(t) = g$, entonces

$$|F(t)| = \left|\int_{\mathscr{X}} \Phi(t)\Phi^*(t)d\mu\right| = \left|\int_{\mathscr{X}} fgd\mu\right| \leq M_0^{1-t}M_1^t,$$

ahora, usando que se satisface

$$||f||_{p_t} = \sup\left\{\left|\int_{\mathscr{X}} fgd\mu\right| : g \in S \text{ y } ||g||_{p_t'} \leq 1\right\}$$

(ver 6 del apéndice), podemos deducir $||f||_{p_t} \leq M_0^{1-t}M_1^t$.

Para demostrar la recíproca de (4.1.2), elegimos $M_0 = |||\Phi|||$ y $M_1 = |||\Phi|||$ y usamos (ii).

□

Demostración del teorema de convexidad 2.2

Parte (a)

Sea T un operador lineal definido en S que satisface $||Tf||_{q_0} \leq M_0||f||_{p_0}$, $||Tf||_{q_1} \leq M_1||f||_{p_1}$ para toda $f \in S$, y sea $p = p_t$.

Dada $f = \sum a_k \mathcal{X}_{A_k} \in S$ con $||f||_p = 1$, tenemos definida $\Phi(z) = f_z$ y satisface $\Phi \in \mathfrak{F}_f(p_0, p_1)$, con $|||\Phi||| = 1 = ||f||_p$.

Como $g = Tf \in L^{q_0} \cap L^{q_1}$, tenemos definida $\Psi(z) = T(\Phi(z)) = \sum a_k(z)T(b_k)$. Ψ es una función analítica y acotada de D en $L^{q_0} \cap L^{q_1}$, con la propiedad $\Psi(t) = T(\Phi(t)) = Tf = g$, y

$$||\Psi(iy)||_{q_0} \leq M_0||\Phi(iy)||_{p_0} \leq M_0|||\Phi||| = M_0||f||_p \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R},$$

$$||\Psi(1+iy)||_{q_1} \leq M_1||\Phi(1+iy)||_{p_1} \leq M_1|||\Phi||| = M_1||f||_p \quad \text{para todo } y \in \mathbb{R}.$$

Luego tenemos que $\Psi \in \mathfrak{F}_g(q_0, q_1)$ y luego por la Proposición 4.3 (ii):

$$||g||_q = ||g||_{q_t} \leq \big(M_0||f||_p\big)^{1-t}\big(M_1||f||_p\big)^t = M_0^{1-t}M_1^t||f||_p$$

$$\text{entonces} \quad ||Tf||_q \leq M_0^{1-t}M_1^t||f||_p, \quad \text{para toda } f \in S \text{ con } ||f||_p = 1.$$

Si $f \in S$ con norma "p" distinta de 1, tomamos $\tilde{f} = f\ ||f||_p^{-1}$ y como T es lineal, se cumple

$$||Tf||_q \leq M_0^{1-t} M_1^t ||f||_p \quad \text{para toda } f \in S.$$

Probemos el "Más aún" de la parte (a) del teorema. Por hipótesis, T está definido en S y es de tipo (p_i, q_i) con constante M_i, $i = 0, 1$. Por la parte (a), T es de tipo (p_t, q_t) sobre S con constante $M_t \leq M_0^{1-t} M_1^t$.

Para cada t fijo en (0,1), existe $T_t : L^{p_t} \to L^{q_t}$ extensión de $T : S \to L^{q_t}$ tal que T_t es de tipo (p_t, q_t) sobre L^{p_t} con la misma constante M_t.

Ahora, dados s y t fijos en (0,1) y $f \in L^{p_t} \cap L^{p_s}$, $f \geq 0$, existe sucesión creciente $\{f_k\}$ en S tales que $0 \leq f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y f_k converge a f en norma "p" y en norma "s" cuando k tiende a infinito. Por lo tanto

$$\lim_{k \to \infty} ||T_t f - T f_k||_{q_t} = \lim_{k \to \infty} ||T_t f - T_t f_k||_{q_t} = 0$$

y de manera análoga

$$\lim_{k \to \infty} ||T_s f - T f_k||_{q_s} = 0$$

luego, existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}_j$ tal que

$$\lim_{j \to \infty} |T_t f - T f_{k_j}| = 0 \quad \text{p.p. en } \mathscr{Y}, \text{ y } \lim_{j \to \infty} |T_s f - T f_{k_j}| = 0 \quad \text{p.p. en } \mathscr{Y}.$$

Entonces T_t y T_s coinciden en $L^{p_t} \cap L^{p_s}$.
Definimos, para J conjunto finito de índices

$$T' : \ < \bigcup_{p_t < \infty} L^{p_t} > \ \longrightarrow \mathscr{Y} \quad \text{como} \quad T'\bigg(\sum_{\theta \in J} c_\theta f_{p_{t_\theta}}\bigg) = \sum_{\theta \in J} c_\theta T_{p_{t_\theta}}(f_{p_{t_\theta}})$$

y T' es la extensión de T que buscamos.

Parte (b)

Por hipótesis T está definida en $L^{p_0} + L^{p_1}$ y es de tipo (p_i, q_i) en L^{p_i} $i = 0, 1$. Queremos ver que la restricción de T a L^{p_t} es de tipo (p_t, q_t). Por la parte (a), sabemos que T restringido a S es de tipo (p_t, q_t) con constante M_t. Luego existe T' extensión continua de T, definida en L^{p_t} y de tipo (p_t, q_t) con la misma constante M_t. Veamos que $T = T'$ en L^{p_t}.

Sea $0 \leq f \in L^{p_t} \subset L^{p_0} + L^{p_1}$, entonces existen $f_0 \in L^{p_0}, f_1 \in L^{p_1}$ tales que $f = f_0 + f_1$. Para f_0 existe sucesión creciente $\{g_k\}$ en S tal que $0 \leq g_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $||f_0 - g_k||_{p_0}$ tiende a cero cuando k tiende a infinito, y g_k converge a f p.p. en $\mathscr{X}$. De la misma forma, para f_1 existe sucesión $\{h_k\}$ con las mismas propiedades. Y entonces se cumplen

$$\lim_{k\to\infty} g_k + h_k = f_0 + f_1 = f,$$

$$\lim_{k\to\infty} ||Tg_k - Tf_0||_{q_0} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} ||Th_k - Tf_1||_{q_1} = 0.$$

Luego existen subsucesiones $\{g_{k_j}\}, \{h_{k_j}\}$ tales que

$$\lim_{j\to\infty} |Tg_{k_j} - Tf_0| = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j\to\infty} |Th_{k_j} - Tf_1| = 0 \quad \text{p.p. en } \mathscr{Y}$$

y por el "teorema de la convergencia dominada"

$$\lim_{j\to\infty} ||g_{k_j} + h_{k_j} - f||_{p_t} = 0.$$

Como T' es continua

$$\lim_{j\to\infty} ||T'\big(g_{k_j} + h_{k_j}\big) - T'f||_{p_t} = 0,$$

de la misma manera que antes, existen subsucesiones $\{g_{k_{j_i}}\}, \{h_{k_{j_i}}\}$ tales que

$$\lim_{i\to\infty} |T'\big(g_{k_{j_i}} + h_{k_{j_i}}\big) - T'f| = 0 \quad \text{p.p. en } \mathscr{Y}.$$

Entonces, para casi todo punto tenemos

$$T'f = \lim_{i\to\infty} T'\big(g_{k_{j_i}} + h_{k_{j_i}}\big) = \lim_{i\to\infty} T'\big(g_{k_{j_i}}\big) + T'\big(h_{k_{j_i}}\big) =$$

$$\lim_{i\to\infty} T\big(g_{k_{j_i}}\big) + T\big(h_{k_{j_i}}\big) = Tf_0 + Tf_1 = Tf, \quad \text{por lo tanto } T' = T.$$

$\square$

Para concluir esta sección, daremos una generalización del teorema de convexidad, dada por E. M. Stein.

Teorema 3.4 "Teorema de interpolación de Riesz-Stein"

Sean $(\mathscr{X},\mu),(\mathscr{Y},\nu)$ dos espacios de medida, S el conjunto de funciones simples definidas en $\mathscr{X}$, T_z un operador que transforma cada $f \in S$ en $T_z f$ medible en $(\mathscr{Y},\nu)$ para cada z fijo en D, y $1 \leq p_0, q_0, p_1, q_1 \leq \infty$. Si $T_z f$ es una función analítica y acotada en D, tal que $T_{iy} f \in L^{q_0}(\mathscr{Y},\nu)$, $T_{1+iy} f \in L^{q_1}(\mathscr{Y},\nu)$ y

$$||T_{iy}f||_{q_0} \leq M_0||f||_{p_0} \quad \textit{para toda } f \in S \textit{ y para todo } iy \in \Delta_0,$$

$$||T_{1+iy}f||_{q_1} \leq M_1||f||_{p_1} \quad \textit{para toda } f \in S \textit{ y para todo } 1+iy \in \Delta_1,$$

entonces, para todo t en $[0,1]$, $T_t f \in L^{q_t}(\mathscr{Y},\nu)$ y

$$||T_t f||_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \; ||f||_{p_t} \quad \textit{para toda } f \in S$$

donde

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad y \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}$$

Demostración: Es suficiente probar el teorema para $f \in S$ con norma p_t igual a uno. En el caso de $f \in S$ con norma distinta de uno, procedemos como en (a) del teorema de convexidad.

Sea $f = \sum a_k \mathcal{X}_{A_k} \in S$ con $||f||_{p_t} = 1$. Y como en la prueba de (a) del teorema de convexidad, sean $\Phi(z) = f_z$ y $\Psi(z) = T_z f_z$ definidas en D, de la siguiente manera

$$f_z(x) = |f(x)|^{\frac{p}{p_z}} \exp\big(i \arg f(x)\big)$$

$$T_z f_z(x) = T_z\bigg(\sum a_k(z) b_k(x)\bigg) = \sum a_k(z) T_z(b_k(x)),$$

donde

$$a_k(z) = |a_k|^{\frac{p}{p_z}} \exp(i \arg(a_k)) \quad \text{y} \quad b_k(x) = \mathcal{X}_{A_k}(x).$$

Por lo tanto Ψ es una función analítica y acotada en D, pues $T_z f_z$ lo es, y tal que $\Psi(t) = T_t(f_t) = T_t f$. Esto implica que $\Psi \in \mathfrak{F}_{T_t f}(q_0, q_1)$. Luego, por las hipótesis sobre T_z y por (4.1a), (4.1b)

$$||\Psi(iy)||_{q_0} = ||T_{iy} f_{iy}||_{q_0} \leq M_0 ||f_{iy}||_{p_0} = M_0\big(||f||_{p_t}\big)^{\frac{p_t}{p_0}} = M_0, \text{ para todo } iy \in \Delta_0,$$

de manera análoga $||\Psi(1+iy)||_{q_1} \leq M_1$ para todo $1+iy \in \Delta_1$. Entonces, por (ii) de la Proposición 4.3 ,

$$||T_t f||_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t = M_0^{1-t} M_1^t ||f||_{p_t}.$$

$\square$

Capítulo II

Teorema de Marcinkievicz

1. Función Distribución y Operadores de tipo débil

Definición 1.1 Sea $(\mathscr{X},\mu)$ espacio de medida y f una función μ-medible definida en $\mathscr{X}$. Para cada $\alpha > 0$ definimos el siguiente conjunto medible

$$E_\alpha = E_\alpha(f) = \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| > \alpha\}$$

y la función $f_* : (0,\infty) \to [0,\infty]$ dada por

$$f_*(\alpha) = \mu(E_\alpha),$$

llamada función distribución de f.

Ejemplo 1.2 Sea $\mathscr{X} = \mathbb{R}$, μ la medida de Lebesgue y $f(x) = x$, entonces $E_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \alpha\}$ y luego $f_*(\alpha) = \infty$ para todo $\alpha > 0$.

Ejemplo 1.3 Sea $\mathscr{X} = \mathbb{R}$, μ la medida de Lebesgue y $f(x) \equiv 1$, entonces

$$f_*(\alpha) = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha < 1 \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Ejemplo 1.4 Sea $A \subset \mathscr{X}$ tal que $\mu(A) = a < \infty$, y sea $f(x) = c\mathcal{X}_A(x)$ con c constante positiva, entonces

$$f_*(\alpha) = \begin{cases} a & \text{si } \alpha < c \\ 0 & \text{si } \alpha \geq c \end{cases}$$

Ejemplo 1.5 Sean $\{A_k\}_{k=1}^m$ una colección de subconjuntos medibles y disjuntos en $\mathscr{X}$ con $\mu(A_k) = a_k < \infty$; $\{c_k\}_{k=1}^m$ colección de constantes tales que $c_1 \geq c_2 \ldots \geq c_m \geq 0$, y

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} c_k \mathcal{X}_{A_k}(x)$$

Entonces, si $\alpha \geq c_1$, $E_\alpha = \emptyset$ luego $f_*(\alpha) = 0$. Si $c_1 > \alpha \geq c_2$, $E_\alpha = A_1$ luego $f_*(\alpha) = a_1$. Si $c_2 > \alpha \geq c_3$, $E_\alpha = A_1 \cup A_2$, luego $f_*(\alpha) = a_1 + a_2$. Siguiendo así, podemos obtener que

$$f_*(\alpha) = a_1 \mathcal{X}_{[c_2,c_1)}(\alpha) + (a_1+a_2)\mathcal{X}_{[c_3,c_2)}(\alpha) + \ldots$$
$$+ (a_1 + a_2 + \ldots + a_m)\mathcal{X}_{[0,c_m)}(\alpha).$$

Proposición 1.6 *Sea f una función μ-medible definida en $\mathscr{X}$, su función distribución f_* tiene las siguientes propiedades:*
(a) *f_* es decreciente y continua a derecha.*
(b) *Si $|f(x)| \leq |g(x)|$, entonces para todo $\alpha > 0$, $f_*(\alpha) \leq g_*(\alpha)$.*
(c) *Si $\{f_k\}$ sucesión creciente de funciones μ-medibles tales que $0 \leq f_k \leq f$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y f_k converge a f p.p. en $\mathscr{X}$, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} (f_k)_* = f_* \quad \text{y } \{(f_k)_*\} \text{ es una sucesión creciente.}$$

(d) *Si $|f(x)| \leq |g(x)| + |h(x)|$ entonces $f_*(\alpha) \leq g_*\big(\frac{\alpha}{2}\big) + h_*\big(\frac{\alpha}{2}\big)$.*

Demostración: (a) Si $\alpha \geq \beta$,

$$E_\alpha = \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| > \alpha\} \subseteq \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| > \beta\} = E_\beta$$

entonces $\mu(E_\alpha) \leq \mu(E_\beta)$, por lo tanto f_* es decreciente.

Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión decreciente que converge a α, entonces $E_\alpha = \cup E_{\alpha_n}$ donde $\{E_{\alpha_n}\}_n$ es una sucesión creciente de conjuntos, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_*(\alpha_n) = f_*(\alpha).$$

(b) $|f(x)| \leq |g(x)|$ implica $E_\alpha(f) \subseteq E_\alpha(g)$.

(c) Como $E_\alpha(f) = \bigcup E_\alpha(f_k)$ y $\{E_\alpha(f_k)\}$ sucesión creciente de conjuntos, entonces

$$\lim_{k\to\infty} (f_k)_*(\alpha) = f_*(\alpha).$$

(d) Sea $x \in \mathscr{X}$ tal que $|f(x)| > \alpha$,

$$|g(x)| > \frac{\alpha}{2} \quad \text{ó} \quad |h(x)| > \frac{\alpha}{2}; \quad \text{luego} \quad E_\alpha(f) \subseteq E_{\frac{\alpha}{2}}(g) \cup E_{\frac{\alpha}{2}}(h),$$

entonces

$$f_*(\alpha) \leq g_*\left(\frac{\alpha}{2}\right) + h_*\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

$\square$

Proposición 1.7 *Sean f y f_* como en la Proposición 1.6, entonces*

(a) "Desigualdad de Chebyshev"
Para cada $0 < p < \infty$, y para todo $\alpha > 0$

$$f_*(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{E_\alpha} |f(x)|^p d\mu.$$

(b) *Si $f \in L^p(\mathscr{X})$, $1 \leq p < \infty$. Entonces, para cada $\alpha > 0$, $f_*(\alpha)$ es finito y*

$$\sup\{\alpha^p f_*(\alpha) : \alpha > 0\} \leq ||f||_p^p.$$

(c) *Si $f \in L^p(\mathscr{X})$, $1 \leq p < \infty$, entonces $\alpha^p f_*(\alpha)$ tiende a cero cuando α tiende a cero.*

(d)

$$\text{Si} \quad \int_0^\infty \alpha^{p-1} f_*(\alpha)\, d\alpha < \infty\ , \quad \text{entonces} \quad \lim_{\alpha\to 0} \alpha^p f_*(\alpha) = 0 \quad y$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p f_*(\alpha) = 0.$$

Demostración: Como $x \in E_\alpha$ si y sólo si $|f(x)| > \alpha$, entonces

$$\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu \geq \int_{E_\alpha} |f|^p d\mu \geq \alpha^p \int_{E_\alpha} d\mu = \alpha^p f_*(\alpha), \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Luego (a) y (b) se satisfacen.

(c) De la parte (b) sabemos que $f_*(\alpha) \leq \alpha^{-p}||f||_p$ para todo $\alpha > 0$. Luego

$$\lim_{\alpha\to\infty} f_*(\alpha) = 0,$$

por la continuidad de la integral

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_{E_\alpha} |f|^p d\mu = 0$$

y usando la parte (a)

$$\lim_{\alpha\to\infty} \alpha^p f_*(\alpha) = 0.$$

Fijamos $\beta > 0$ y sea $\alpha < \beta$,

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^p f_*(\alpha) = \lim_{\alpha\to 0} \alpha^p \big(f_*(\alpha) - f_*(\beta)\big) =$$

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^p\big(\mu(E_\alpha) - \mu(E_\beta)\big) \leq \int_{\{|f|<\beta\}} |f|^p d\mu. \tag{1.7.1}$$

Como, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{\beta\to 0^+} \int_{\{|f|<\beta\}} |f|^p d\mu = 0$$

entonces

$$\lim_{\alpha\to 0} \alpha^p f_*(\alpha) = 0.$$

En (1.7.1) usamos que, $E_\beta \subset E_\alpha$ y $\mu(E_\alpha) < \infty$ entonces $\mu(E_\alpha - E_\beta) = \mu(E_\alpha) - \mu(E_\beta)$, y

$$\mu(E_\alpha - E_\beta) = \mu\{x \in \mathscr{X} : \beta \geq |f(x)| > \alpha\}$$

por lo tanto

$$\int_{\{|f|\leq\beta\}} |f|^p d\mu \;\geq \int_{\{\alpha<|f|\leq\beta\}} |f|^p d\mu \;\geq \int_{E_\alpha - E_\beta} \alpha^p d\mu = \;\alpha^p \mu\big(E_\alpha - E_\beta\big).$$

(d) Si $\eta \in (\frac{\alpha}{2}, \alpha)$ entonces $E_\alpha \subset E_\eta \subset E_{\frac{\alpha}{2}}$, y

$$\int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \eta^{p-1} f_*(\eta)\; d\eta \;\geq \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \eta^{p-1} f_*(\alpha)\; d\eta \;= f_*(\alpha) \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \eta^{p-1} d\eta =$$

$$f_*(\alpha)\; \frac{\eta^p}{p}\bigg|_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} = f_*(\alpha)\left(\frac{\alpha^p}{p} - \frac{\alpha^p}{2^p p}\right) = f_*(\alpha)\; \frac{\alpha^p}{p}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)$$

luego, tenemos que

$$f_*(\alpha)\; \alpha^p \leq p\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)^{-1} \int_{\frac{\alpha}{2}}^{\alpha} \eta^{p-1} f_*(\eta)\; d\eta$$

y la integral tiende a cero, cuando α tiende a cero ó cuando α tiende a infinito.

$\square$

En el siguiente lema, podemos observar una importante relación entre la norma "p" de f y su función distribución.

Lema 1.8 *Si f es una función medible en $(\mathscr{X},\mu)$ y $1\leq p<\infty$, entonces*

$$\int_{\mathscr{X}} |f|^p \; d\mu = p\int_0^\infty \alpha^{p-1} f_*(\alpha) \; d\alpha.$$

Demostración: Como

$$||f||_p^p = \int_{\mathscr{X}} |f|^p \; d\mu = \int_{\mathscr{X}} \int_0^{|f|} p s^{p-1} ds \; d\mu =$$

$$\int_0^\infty p s^{p-1} \int_{\mathscr{X}} \mathcal{X}_{\{|f|>s\}} \; d\mu \; ds = \int_0^\infty p s^{p-1} f_*(s) \; ds.$$

□

Es importante destacar del Lema 1.8 la siguiente conclusión. Dos funciones medibles $f\in L^p(\mathscr{X},\mu)$ y $g\in L^p(\mathscr{Y},\nu)$ con $1\leq p<\infty$, se dicen "equimedibles" si sus funciones distribución coinciden. El Lema 1.8, nos dice que si dos funciones son equimedibles, entonces tienen la misma norma, es decir

$$||f||_{L^p(\mathscr{X})} = ||g||_{L^p(\mathscr{Y})}.$$

Para dar las posteriores definiciones, hacemos primero la siguiente observación. Hemos probado que,

$$||f||_p<\infty \quad \text{implica} \quad \sup\{\alpha\big(f_*(\alpha)\big)^{\frac{1}{p}} : \alpha>0\} \leq ||f||_p<\infty.$$

La recíproca de este resultado, no es cierta en general. Por ejemplo, tomamos

$$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} \quad \text{definida para } x\in(0,1),$$

entonces, para $\alpha>0$

$$E_\alpha = \left\{x\in(0,1) : \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}}>\alpha\right\} = \left\{x\in(0,1) : x<\frac{1}{\alpha^p}\right\}$$

por lo tanto

$$f_*(\alpha) < \frac{1}{\alpha^p} \quad \text{ó bien} \quad \alpha\big(f_*(\alpha)\big)^{\frac{1}{p}} < 1.$$

Sin embargo,

$$|f(x)|^p = \frac{1}{|x|} \quad \text{no es integrable en } (0,1).$$

Definición 1.9 Sea f una función medible en $(\mathscr{X},\mu)$ y $1 \leq p < \infty$, decimos que f pertenece a la clase de Marcinkiewicz L^p_*, o que f satisface la propiedad p de Marcinkiewicz, si

$$\big[f\big]_p \doteq \sup\big\{\alpha\big(f_*(\alpha)\big)^{\frac{1}{p}} : \alpha > 0\big\} < \infty.$$

Para $p = \infty$, definimos $L^\infty_* = L^\infty$.

Notemos que, por la desigualdad de Chebyshev, (a) de la Proposición 1.7, se satisface $\big[f\big]_p \leq ||f||_p$. Entonces, para $1 \leq p < \infty$,

$$f \in L^p \quad \text{implica} \quad \big[f\big]_p \leq ||f||_p < \infty \quad \text{implica} \quad L^p \subset L^p_*.$$

Comentario: Se puede ver que, si $1 < p < \infty$, entonces $\big[\,\cdot\,\big]_p$ define una casi-norma que es equivalente a una norma en el espacio L^p_*, que además lo hace un espacio de Banach. También se puede probar que L^1_* es un espacio completo no normable.

Definición 1.10 Sea T un operador definido en $L^p(\mathscr{X},\mu)$ con valores en la clase de las funciones medibles en $(\mathscr{Y},\nu)$, es decir, Tf es ν-medible en $\mathscr{Y}$. T se dice que es de tipo débil (p,q) con constante A_{pq}, $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, si para todo $\alpha > 0$

$$(Tf)_*(\alpha) = \nu\big\{y \in \mathscr{Y} : |Tf(y)| > \alpha\big\} \leq \left(A_{pq}\frac{||f||_p}{\alpha}\right)^q.$$

En otras palabras, T es un operador de tipo débil (p,q) con constante A_{pq}, si $Tf \in L^p_*$, y

$$\big[Tf\big]_q \leq A_{pq}||f||_p.$$

Como $L_*^\infty = L^\infty$, T de tipo débil (p, ∞) coincide con T de tipo "fuerte" (p, ∞). Esto extiende la definición para $1 \le p, q \le \infty$.

Un operador T de tipo débil (p, q), es un operador acotado de L^p en L_*^q. Por esta razón, la clase de Marcinkievicz L_*^q, es en general, llamada espacio L^q débil.

2. Teorema de interpolación de Marcinkievicz. Caso diagonal

Sean $(\mathscr{X}, \mu)$ y $(\mathscr{Y}, \nu)$ dos espacios de medida, S la clase de funciones simples definidas en $(\mathscr{X}, \mu)$, y T un operador sub-lineal que asigna a cada $f \in S$ una función Tf ν-medible definida en $\mathscr{Y}$. Sean $1 \le p_0 < p_1 \le \infty$ y para cada $t \in (0,1)$, tomamos $p = p_t$ dado por

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}.$$

Teorema 2.1 "Teorema de interpolación de Marcinkievicz"

Sea T un operador sub-lineal definido en S, de tipo débil (p_i, p_i) con constante M_i, $i = 0, 1$; esto es

$$(Tf)_*(\alpha) = \nu\big\{y \in \mathscr{Y} : |Tf(y)| > \alpha\big\} \le \left(M_0 \frac{||f||_{p_0}}{\alpha}\right)^{p_0},$$

$$(Tf)_*(\alpha) = \nu\big\{y \in \mathscr{Y} : |Tf(y)| > \alpha\big\} \le \left(M_1 \frac{||f||_{p_1}}{\alpha}\right)^{p_1}.$$

Entonces, para todo $t \in (0,1)$,

(a) *T es de tipo "fuerte" (p, p), $p = p_t$, es decir*

$$||Tf||_p \le M_t ||f||_p \quad \textit{para toda } f \in S,$$

donde M_t satisface

(b) $M_t \leq K M_0^{1-t} M_1^t$ *y* K *depende de* p_0, p_1, p *(como* $p = p_t$*, en particular* K *depende de* t*) de la siguiente manera*

$$K = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observación 2.2 La parte (a) del teorema de Marcinkievicz, da una condición del tipo del teorema de Riesz-Thorin para el caso $p_i = q_i$, $i = 0, 1$; pero no lo incluye, pues la constante K depende de t, y tiende a infinito cuando t tiende a cero o cuando t tiende a uno. Por lo que el Teorema 2.1, recién enunciado, no es una generalización del teorema de convexidad.

Para probar el Teorema 2.1 usaremos el siguiente resultado.

Lema 2.3 *Sean* $f \in L^p$ *y* f_α, f^α *como en* (1.1*a*) *y* (1.1*b*) *del Capítulo I,* $1 \leq p_0 < p_1 < \infty$ *y* $p = p_t$*. Entonces para todo* $\alpha > 0$*,* $f_\alpha \in L^{p_1} \cap L^p$*,* $f^\alpha \in L^{p_0} \cap L^p$*. Más aún,*

$$||f||_p^p = (p - p_0) \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} ||f^\alpha||_{p_0}^{p_0} \, d\alpha$$

y

$$||f||_p^p = (p_1 - p) \int_0^\infty \alpha^{p-p_1-1} ||f^\alpha||_{p_1}^{p_1} \, d\alpha.$$

Demostración: Como $|f_\alpha| \leq |f|$ y $|f^\alpha| \leq |f|$, entonces $f_\alpha, f^\alpha \in L^p$. Y vimos en el Lema 1.1 del Capítulo I, que $f_\alpha \in L^{p_1}$ y $f^\alpha \in L^{p_0}$. Esto verifica la primera tesis del lema.

Ahora, usando el teorema de Fubini-Tonelli, tenemos

$$\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} ||f^\alpha||_{p_0}^{p_0} \, d\alpha = \int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \left(\int_{\mathscr{X}} |f^\alpha|^{p_0} d\mu \right) d\alpha =$$

$$\int_0^\infty \alpha^{p-p_0-1} \left(\int_{\{|f|>\alpha\}} |f|^{p_0} d\mu \right) d\alpha = \int_0^\infty \int_{\{|f|>\alpha\}} \alpha^{p-p_0-1} |f|^{p_0} d\mu \, d\alpha =$$

$$\int_{\mathscr{X}} \int_0^{|f|} \alpha^{p-p_0-1} |f|^{p_0} d\alpha \, d\mu = \int_{\mathscr{X}} |f|^{p_0} \left(\int_0^{|f|} \alpha^{p-p_0-1} d\alpha \right) d\mu =$$

$$\int_{\mathscr{X}} |f|^{p_0} \frac{|f|^{p-p_0}}{p-p_0}\, d\mu = \frac{1}{p-p_0}\int_{\mathscr{X}} |f|^p \, d\mu.$$

Usando el mismo procedimiento podemos probar que

$$\int_0^{\infty} \alpha^{p-p_1-1}||f^{\alpha}||_{p_1}^{p_1}\, d\alpha = \frac{1}{p_1-p}\int_{\mathscr{X}} |f|^p \, d\mu.$$

$\square$

Demostración del teorema 2.1:

Dado $\alpha > 0$ y $f \in L^p$ podemos escribir $f = f_\alpha + f^\alpha$. Como T es un operador sub-lineal, tenemos

$$|Tf(x)| \leq |Tf^{\alpha}(x)| + |Tf_{\alpha}(x)|$$

y por (d) de la Proposición 1.6

$$(Tf)_*(\lambda) \leq (Tf^{\alpha})_*\left(\frac{\lambda}{2}\right) + (Tf_{\alpha})_*\left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

para todo $\lambda > 0$.

Caso $p_1 < \infty$: Por el Lema 2.3 sabemos que $f^\alpha \in L^{p_0}$ y $f_\alpha \in L^{p_1}$. Y usando el comentario anterior para el operador T, resulta

$$\int_0^{\infty} p\ \alpha^{p-1}(Tf)_*(\alpha)\ d\alpha \leq \int_0^{\infty} p\ \alpha^{p-1}\left[(Tf^{\alpha})_*\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (Tf_{\alpha})_*\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]d\alpha \leq$$

$$\int_0^{\infty} p\ \alpha^{p-1}\left[\left(\frac{2M_0}{\alpha}\ ||f^{\alpha}||_{p_0}\right)^{p_0} + \left(\frac{2M_1}{\alpha}\ ||f_{\alpha}||_{p_1}\right)^{p_1}\right]d\alpha =$$

$$(2M_0)^{p_0}p\int_0^{\infty} \alpha^{p-p_0-1}||f^{\alpha}||_{p_0}^{p_0}\ d\alpha\ +\ (2M_1)^{p_1}p\int_0^{\infty} \alpha^{p-p_1-1}||f_{\alpha}||_{p_1}^{p_1}\ d\alpha =$$

$$\left(p\ \frac{(2M_0)^{p_0}}{p-p_0}\ +\ p\ \frac{(2M_1)^{p_1}}{p_1-p}\right)||f||_p^p. \tag{2.1.1}$$

Notemos que

$$p\ \frac{(2M_0)^{p_0}}{p-p_0}\ +\ p\ \frac{(2M_1)^{p_1}}{p_1-p} \leq \left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1-p}\right)\text{máx}\{(2M_0)^{p_0}, (2M_1)^{p_1}\} =$$

$$C\,\text{máx}\{(2M_0)^{p_0}, (2M_1)^{p_1}\}.$$

Reemplazando T por aT, con $a > 0$, por el Lema 1.8 tenemos

$$a^p||Tf||_p^p \;=\; p\int_0^\infty \alpha^{p-1}(a\;Tf)_*(\alpha)\;d\alpha$$

y por (2.1.1)

$$a^p||Tf||_p^p \;\leq\; C\,\text{máx}\{(2aM_0)^{p_0},(2aM_1)^{p_1}\}\;||f||_p^p.$$

Elegimos a de tal manera que se cumpla

$$(2aM_0)^{p_0} = (2aM_1)^{p_1} \quad \text{es decir} \quad a = \frac{1}{2}\big(M_0^{-p_0}M_1^{p_1}\big)^{\frac{1}{p_0-p_1}},$$

luego

$$a^p||Tf||_p^p \;\leq\; C\;2^{p_0}a^{p_0}M_0^{p_0}||f||_p^p.$$

Como

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \qquad \text{implica} \qquad p_0p_1 = (1-t)p\;p_1 + t\;p\;p_0,$$

entonces

$$p_1\;\frac{p_0-p}{p_0-p_1} = \frac{p_1p_0 - p_1\;p}{p_0-p_1} = \frac{(1-t)p\;p_1 + t\;p\;p_0 - p\;p_1}{p_0-p_1} =$$

$$\frac{t\;p\;p_0 - t\;p\;p_1}{p_0-p_1} = t\;p$$

y de manera similar, se puede ver que

$$-p_0\;\frac{p_0-p}{p_0-p_1} + p_0 = (1-t)p.$$

Por lo tanto

$$\big(M_0^{-p_0}M_1^{p_1}\big)^{\frac{p_0-p}{p_0-p_1}}M_0^{p_0} = \big(M_0^{1-t}M_1^{t}\big)^{p}.$$

Sustituyendo a en

$$||Tf||_p^p \;\leq\; C\;2^{p_0}a^{p_0-p}M_0^{p_0}||f||_p^p,$$

obtenemos

$$||Tf||_p \leq K M_0^{1-t} M_1^t \; ||f||_p,$$

donde

$$K = 2C^{\frac{1}{p}} = 2\left(\frac{p}{p-p_0} + \frac{p}{p_1 - p}\right)^{\frac{1}{p}}$$

y K tiende a infinito cuando t tiende a cero (pues p tiende a p_0), ó cuando t tiende a uno (pues p tiende a p_1).

Caso $p_1 = \infty$: Asumimos que $M_1 = 1$. Por definición, tipo débil (∞, ∞) coincide con tipo "fuerte" (∞, ∞). Recordemos que

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \\ 0 & \text{si } |f(x)| > \alpha \end{cases}$$

$$f^\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |f(x)| \leq \alpha \\ f(x) & \text{si } |f(x)| > \alpha \end{cases}$$

como suponemos $M_1 = 1$

$$||Tf_\alpha||_\infty \leq ||f_\alpha||_\infty \leq \alpha$$

y si $\lambda \geq \alpha$

$$(Tf_\alpha)_*(\lambda) = \nu\{y \in \mathscr{Y} : |Tf_\alpha(y)| > \lambda\} = 0.$$

Por otro lado, como $p < \infty$

$$||Tf||_p^p \; = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} (Tf)_*(\alpha) \; d\alpha.$$

Usando el método de sustitución con $\alpha = 2\beta$ en la ecuación anterior y que T es sub-lineal, obtenemos

$$||Tf||_p^p = p\int_0^\infty (2\beta)^{p-1}(Tf)_*(2\beta)\; 2\; d\beta = 2^p p \int_0^\infty (\alpha)^{p-1}(Tf)_*(2\alpha)\; d\alpha \leq$$

$$2^p p \int_0^\infty (\alpha)^{p-1}(Tf^\alpha)_*(\alpha)\; d\alpha + 2^p p\int_0^\infty (\alpha)^{p-1}(Tf_\alpha)_*(\alpha)\; d\alpha =$$

$$2^p p \int_0^\infty (\alpha)^{p-1}(Tf^\alpha)_*(\alpha)\; d\alpha,$$

como T es de tipo (p_0, p_0)

$$2^p p \int_0^\infty (\alpha)^{p-1} (Tf^\alpha)_*(\alpha)\ d\alpha \ \leq\ 2^p p \int_0^\infty (\alpha)^{p-1} \left(\frac{M_0 ||f^\alpha||_{p_0}}{\alpha} \right)^{p_0} d\alpha$$

y usando el Lema 2.3

$$2^p M_0^{p_0} p \int_0^\infty (\alpha)^{p-p_0-1} ||f^\alpha||_{p_0}^{p_0}\ d\alpha = \frac{2^p M_0^{p_0} p}{p - p_0}\ ||f||_p^p.$$

Entonces, se cumple

$$||Tf||_p \leq 2 \left(\frac{p}{p - p_0} \right)^{\frac{1}{p}} M_0^{\frac{p}{p_0}} ||f||_p \qquad \text{para } p_0 < p < \infty,$$

lo cual concluye el teorema para el caso $p_1 = \infty$, pues $M_1 = 1$ y $p = (1-t)p_0$. Para el caso en que $M_1 \neq 1$ (suponemos $M_1 > 0$, pues en el caso $M_1 = 0$ resulta T el operador nulo), tomamos $T' = M_1^{-t} T$.

$\square$

Una inmediata aplicación del teorema de Riesz-Thorin, fue el teorema de Hausdorff-Young, para series e integrales de Fourier. Ahora también daremos una aplicación del teorema de Marcinkievicz para el análisis de Fourier.

Teorema 2.4 "Teorema de Hardy-Littlewood-Paley en $\mathbb{R}^n$"
(a) *Si $1 < p \leq 2$, existe una constante M_p tal que, para cada $f \in L^p$ se satisface*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^p\ |x|^{(p-2)n} dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq M_p \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

(b) *Si $2 \leq q < \infty$, existe una constante M_q tal que, para cada $f \in L^q$ se satisface*

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \leq M_q \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\ |x|^{(q-2)n} dx \right]^{\frac{1}{q}}.$$

Demostración: Consideramos los dos espacios de medidas dados por $(\mathscr{X}, \mu) = (\mathbb{R}^n, dx)$ y $(\mathscr{Y}, \nu) = (\mathbb{R}^n, |x|^{-2n} dx)$, donde "$dx$" es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$.

Parte (a): Sea T el operador lineal definido por $Tf(x) = \hat{f}(x)|x|^n$, donde f está definida en $(\mathscr{X}, \mu)$ y Tf está definida en $(\mathscr{Y}, \nu)$. Usando el teorema de Plancherel,

$$\int_{\mathscr{Y}} |Tf|^2 d\nu = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 \ |x|^{2n} \frac{dx}{|x|^{2n}} = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(x)|^2 dx =$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathscr{X}} |f|^2 d\mu,$$

por lo tanto, T es de tipo (2,2) con constante $M_0 = 1$.

Ahora veremos que T es de tipo débil (1,1), es decir, que existe una constante M_1 tal que

$$(Tf)_*(\alpha) \leq M_1 \frac{||f||_1}{\alpha} \quad \text{para todo } \alpha > 0.$$

Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$, tenemos que

$$(Tf)_*(\alpha) = \nu\big(E_\alpha(Tf)\big) = \nu\big\{y \in \mathscr{Y} : |Tf(y)| > \alpha\big\} =$$

$$\nu\big\{y \in \mathscr{Y} : |\hat{f}(y)| \ |y|^n > \alpha\big\}.$$

Por otro lado, para $y \in \mathbb{R}^n$ sabemos que $|\hat{f}(y)| \leq ||f||_1$. Para $y \in E_\alpha$

$$\alpha < |\hat{f}(y)| \ |y|^n \leq ||f||_1 \ |y|^n \quad \text{esto es} \quad |y| > \left(\frac{\alpha}{||f||_1}\right)^{\frac{1}{n}} \doteq \beta,$$

entonces $E_\alpha(Tf) \subset B = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x| > \beta\big\}$, luego, usando coordenadas polares y denotando ω_n el área de la superficie de la esfera en $\mathbb{R}^n$ (ver 7 del apéndice)

$$\nu\big(E_\alpha(Tf)\big) = \int_{E_\alpha(Tf)} d\nu \ \leq \int_B d\nu = \int_{\{|x|>\beta\}} \frac{1}{|x|^{2n}} \ dx =$$

$$\int_{S^{n-1}} \int_\beta^\infty r^{n-1} r^{-2n} dr \ d\tilde{x} = \int_{S^{n-1}} d\tilde{x} \int_\beta^\infty r^{-n-1} dr = \int_{S^{n-1}} d\tilde{x} \left(\frac{-1}{nr^n}\right)\Bigg|_\beta^\infty =$$

$$\int_{S^{n-1}} d\tilde{x} \ \frac{||f||_1}{n\alpha} = \left(\frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} d\tilde{x}\right) \frac{||f||_1}{\alpha} = \frac{1}{n} \ \omega_n \frac{||f||_1}{\alpha}.$$

Concluimos que T es de tipo débil (1,1) con constante $M_1 = n^{-1}\omega_n$. Y ya probamos que T es de tipo (2,2) con constante $M_0 = 1$. Usando el Teorema 2.1 para el operador T, existe una constante M_p que satisface la condición (a).

Parte (b): Sea $2 \leq q < \infty$ y llamamos $p = q'$, entonces $1 < p \leq 2$ y se satisface la parte (a) para p. Si $f \in L^p$, por el Teorema 2.2 de Hausdorff-Young $\hat{f} \in L^q$, como

$$||\hat{f}||_q = \sup\left\{\left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\ d\mu\right| : g \in L^{q'} = L^p \text{ y } ||g||_{q'} \leq 1\right\},$$

y el supremo se alcanza, esto es, existe $g \in L^{q'}$ con $||g||_{q'} \leq 1$ tal que

$$||\hat{f}||_q = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\ d\mu\right|.$$

Por la fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier y por la desigualdad de Hölder (ver 6 del apéndice),

$$||\hat{f}||_q = \left|\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}g\ d\mu\right| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f\hat{g}\ d\mu\right| =$$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ |x|^{\frac{n(q-2)}{q}}\ \hat{g}(x)\ |x|^{\frac{-n(q-2)}{q}}\ dx\right| \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q |x|^{n(q-2)}\ dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\hat{g}(x)|^{q'} |x|^{n(q'-2)}\ dx\right)^{\frac{1}{q'}}. \quad (2.4.1)$$

Aplicando (a) para $q' = p$ y usando $||g||_{q'} \leq 1$, obtenemos

$$||\hat{f}||_q \leq M_{q'}||g||_{q'}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\ |x|^{n(q-2)}\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$M_{q'}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q\ |x|^{n(q-2)}\ dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

esto prueba la parte (b).

En (2.4.1) hemos usado que

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1 \quad \text{implica} \quad p=\frac{q}{q-1},$$

entonces

$$\begin{aligned} n(p-2) &= n\left(\frac{q}{q-1}-2\right) = n\,\frac{q-2q+2}{q-1} = \\ n\,\frac{-q+2}{q-1} &= -\,n(q-2)\frac{1}{q-1} = -\,n(q-2)\,\frac{p}{q}. \end{aligned}$$

□

3. Teorema de interpolación de Marcinkievicz. Caso general

En el Lema 1.1 del Capítulo I, vimos que si $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$ y $f \in L^p$, entonces $f^\alpha \in L^{p_0}, f_\alpha \in L^{p_1}$. Y en el Lema 2.3 del Capítulo II, vimos que si $f \in L^p$ y conocemos las normas $||f^\alpha||_{p_0}, ||f_\alpha||_{p_1}$ para todo $\alpha > 0$, entonces podemos expresar $||f||_p$ en términos de $||f^\alpha||_{p_0}, ||f_\alpha||_{p_1}$. El próximo Lema, es un complemento del Lema 2.3.

Lema 3.1 *Sean* $1 \leq p_i \leq q_i,\ i=0,1$*;* $p_0 < p < p_1 < \infty$, $q_0 \leq q \leq q_1 < \infty$ *con* $q_0 \neq q_1$*. Asumiendo que se satisface la siguiente igualdad para* $p = p_t$ *y* $q = q_t$ *con el mismo* t *en* $(0,1)$

$$\frac{q_0}{p_0}\,\frac{p-p_0}{q-q_0}=\frac{q_1}{p_1}\,\frac{p-p_1}{q-q_1}=\frac{1}{v}, \tag{3.1.1}$$

y definiendo

$$|||(g^\lambda, h_\lambda)|||_v = \text{máx}\left\{\left((q-q_0)\int_0^\infty \lambda^{q-q_0-1}||g^{\lambda^v}||_{p_0}^{q_0}\,d\lambda\right)^{\frac{p_0}{q_0}},\right.$$

$$\left.\left((q_1-q)\int_0^\infty \lambda^{q-q_1-1}||h_{\lambda^v}||_{p_1}^{q_1}\,d\lambda\right)^{\frac{p_1}{q_1}}\right\}.$$

Entonces

$$|||(f^{\lambda}, f_{\lambda})|||_v \leq \int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu = ||f||_p^p.$$

Observación 3.2 Para el caso en que $p_i = q_i$ $i = 0, 1$ el Lema 3.1 se reduce al Lema 2.3 de este Capítulo, con $v = 1$.

Demostración del Lema 3.1: Consideremos la siguiente expresión, la cual se corresponde con "f^{λ}",

$$\left[\int_0^{\infty} \lambda^{q-q_0-1} ||f^{\lambda^v}||_{p_0}^{q_0} \, d\lambda\right]^{\frac{p_0}{q_0}} =$$

$$\left[\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathscr{X}} |f^{\lambda^v}|^{p_0} d\mu\right)^{\frac{q_0}{p_0}} \lambda^{q-q_0-1} \, d\lambda\right]^{\frac{p_0}{q_0}} \doteq$$

$$\left[\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathscr{X}} F(\lambda, x) d\mu(x)\right)^r d\nu\right]^{\frac{1}{r}},$$

donde

$$F(\lambda, x) = |f^{\lambda^v}|^{p_0}, \quad r = \frac{q_0}{p_0}, \quad d\nu = \lambda^{q-q_0-1} d\lambda.$$

Aplicando la desigualdad integral Minkowski para $F(\lambda, x)$ (ver 6 del apéndice), obtenemos la siguiente acotación

$$\left[\int_0^{\infty} \left(\int_{\mathscr{X}} F(\lambda, x) d\mu(x)\right)^r d\nu\right]^{\frac{1}{r}} \leq \int_{\mathscr{X}} \left(\int_0^{\infty} |F(\lambda, x)|^r d\nu\right)^{\frac{1}{r}} d\mu(x) =$$

$$\int_{\mathscr{X}} \left(\int_0^{\infty} |f^{\lambda^v}|^{q_0} \lambda^{q-q_0-1} d\lambda\right)^{\frac{p_0}{q_0}} d\mu.$$

Para un x fijo, se satisface

$$f^{\lambda^v}(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{si } \lambda^v \leq |f(x)| \\ 0 & \text{si } \lambda^v > |f(x)| \end{cases}$$

o equivalentemente

$$f^{\lambda^v}(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{si } \lambda \leq |f(x)|^{\frac{1}{v}} \\ 0 & \text{si } \lambda > |f(x)|^{\frac{1}{v}} \end{cases}$$

Luego

$$\int_{\mathscr{X}} \left(\int_0^\infty |f^{\lambda^v}|^{q_0} \lambda^{q-q_0-1} d\lambda \right)^{\frac{p_0}{q_0}} d\mu = \int_{\mathscr{X}} \left(\int_0^{|f|^{\frac{1}{v}}} \lambda^{q-q_0-1} |f|^{q_0} \, d\lambda \right)^{\frac{p_0}{q_0}} d\mu =$$

$$\int_{\mathscr{X}} |f|^{p_0} \frac{1}{(q-q_0)^{\frac{p_0}{q_0}}} \; |f|^{\frac{1}{v}(q-q_0)\frac{p_0}{q_0}} \; d\mu = \frac{1}{(q-q_0)^{\frac{p_0}{q_0}}} \int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu,$$

entonces

$$(q-q_0)^{\frac{p_0}{q_0}} \left[\int_0^\infty \lambda^{q-q_0-1} ||f^{\lambda^v}||_{p_0}^{q_0} d\lambda \right]^{\frac{p_0}{q_0}} \leq \int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu,$$

pues, usando la hipótesis sobre v, se cumple

$$\frac{1}{v}\,(q-q_0)\,\frac{p_0}{q_0} \;=\; \frac{q_0}{p_0}\,\frac{p-p_0}{q-q_0}\,(q-q_0)\,\frac{p_0}{q_0} \;=\; p-p_0.$$

Aplicando el mismo procedimiento para f_λ, se sigue la tesis del lema.

$\square$

<u>Teorema 3.3</u> "Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Caso general"
Sean T un operador sub-lineal definido en S; $1 \leq p_i \leq q_i$, $i = 0,1$; y $p_0 < p < p_1 \leq \infty$, $q_0 \leq q \leq q_1 \leq \infty$ con $q_0 \neq q_1$. Donde $p = p_t, q = q_t$,

$$0 < t < 1, \qquad \frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1}, \qquad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Si T es de tipo débil (p_i, q_i) con constante M_i, $i = 0,1$, es decir

$$(Tf)_*(\alpha) \leq \left(M_i \, \frac{||f||_{p_i}}{\alpha} \right)^{q_i}, \quad i = 0,1,$$

entonces

(a) *T es de tipo (p,q), con $p = p_t, q = q_t$ para todo $t \in (0,1)$, esto es*

$$||Tf||_q \leq M_t ||f||_p \qquad \text{para toda } f \in L^p.$$

(b) *$M_t \leq K M_0^{1-t} M_1^t$, donde $K = K(p_0, q_0, p_1, q_1, t)$ y tiende a infinito cuando t tiende a cero o uno.*

Obervación 3.4 El siguiente ejemplo (dado por R. Panzone) muestra que la condición $q_0 \neq q_1$ es necesaria para que el teorema sea válido.

Tomamos $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ función integrable y sea T definido por

$$Tf(x) \doteq F(x) \doteq \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \int_0^1 f(t)dt.$$

Luego T es lineal y $F : [0,1] \to \mathbb{C}$ es también integrable.

Para cada $\alpha > 0$,

$$E_\alpha = E_\alpha(Tf) = \big\{x \in [0,1] : |Tf(x)| > \alpha\big\} =$$

$$\big\{x \in [0,1] : \alpha x^{\frac{1}{2}} < J\big\},$$

donde

$$J = \int_0^1 f \leq ||f||_1.$$

Si $J = 0$, luego $E_\alpha = \emptyset$. Si $0 \leq J < \alpha$, $x \in E_\alpha$ implica

$$x \leq \left(\frac{J}{\alpha}\right)^2, \text{ y } \quad E_\alpha \subset \left[0, \left(\frac{||f||_1}{\alpha}\right)^2\right],$$

entonces

$$(Tf)_*(\alpha) \leq \left(\frac{||f||_1}{\alpha}\right)^2.$$

Si $J > \alpha$, para todo $x \in [0,1]$ se satisface

$$x \leq \left(\frac{J}{\alpha}\right)^2, \text{ sí y solo sí } \quad |Tf(x)| > \alpha, \text{ y } \quad E_\alpha = [0,1],$$

entonces

$$(Tf)_*(\alpha) = 1 \leq \frac{J}{\alpha} \leq \left(\frac{J}{\alpha}\right)^2 \leq \left(\frac{||f||_1}{\alpha}\right)^2.$$

Por lo tanto, en cualquier caso, obtenemos

$$(Tf)_*(\alpha) \leq \left(\frac{||f||_1}{\alpha}\right)^2.$$

Y más aún, como la medida de $I = [0,1]$ es finita, implica que para todo $p \geq 1$, se cumple $||f||_1 \leq ||f||_p$ y entonces

$$(Tf)_*(\alpha) \leq \left(\frac{||f||_p}{\alpha}\right)^2.$$

Esto nos dice que T es de tipo débil $(p,2)$ para todo $p \geq 1$. Ahora, si suponemos que el Teorema 3.3 es cierto también para $q_0 = q_1$, podríamos aplicar el teorema al operador T en $(1,2)$ y $(2,2)$, y en consecuencia, T resultaría de tipo $(p,2)$ para todo $1 < p < 2$. Pero T no puede ser de tipo $(p,2)$ para cualquier $p > 1$, por que eso nos diría que $||Tf||_2 \leq M_p||f||_p$ y que $|Tf|^2$ es integrable siempre que $|f|^p$ es integrable, lo cual no es cierto si elegimos $f \in L^p$ tal que $J \neq 0$, pues

$$|Tf(x)|^2 = \frac{J^2}{x} \text{ , no integrable en } [0,1].$$

Proposición 3.5 *Si T es un operador lineal (o sub-lineal) que para cada $\alpha > 0$ puede ser descompuesto como $T = T_1 + T_2$ donde T_1 es de tipo (p,∞) con constante $2^{-1}\alpha$ y T_2 es de tipo (p,p) con constante $c\,\alpha^{1-\frac{q}{p}}$, entonces T es de tipo débil (p,q).*

Demostración: Es suficiente considerar $||f||_p = 1$. Como

$$(Tf)_*(\alpha) \leq (T_1 f)_*\left(\frac{\alpha}{2}\right) + (T_2 f)_*\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

y por hipótesis

$$||T_1 f||_\infty \leq \frac{\alpha}{2} \text{ , entonces } \quad (T_1 f)_*\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0,$$

lo cual implica

$$(Tf)_*(\alpha) \leq (T_2 f)_*\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \left(c\,\alpha^{1-\frac{q}{p}}\,\frac{2}{\alpha}\right)^p = \frac{2^p}{\alpha^p}\,c^p\,\alpha^{p-q} = \frac{(2c)^p}{\alpha^q}$$

y entonces

$$\big[Tf\big] = \sup\{\alpha\big((Tf)_*(\alpha)\big)^{\frac{1}{q}} : \alpha > 0\} \leq (2c)^{\frac{p}{q}} = (2c)^{\frac{p}{q}}||f||_p.$$

Si $||f||_p \neq 0$, se puede elegir $\tilde{f} = ||f||_p^{-1} f$ y usando que $\tilde{f}$ tiene norma uno y que el oprador T es lineal (o sub-lineal), se puede ver sencillamente que se cumple la proposición.

□

El resultado anterior nos será útil para probar una fuerte aplicación a los potenciales de Riesz, los cuales tienen una considerada importancia en problemas de funciones armónicas en $\mathbb{R}^n$.

Definición 3.6 Sea $0 < \gamma < n$. El potencial de Riesz de orden γ, denotado por I_γ, está definido por

$$I_\gamma f(x) = a_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} f(t)\ |x-t|^{\gamma-n}\ dt = a_\gamma\ k_\gamma * f(x),$$

donde

$$k_\gamma(x) = |x|^{\gamma-n}\ , \quad a_\gamma = \pi^{\frac{n}{2}}\ 2^\gamma\ \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)}$$

y Γ denota la clásica función "gamma".

Corolario 3.7 *El operador I_γ, $0<\gamma<n$, es de tipo débil (p,q) para*

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n}, \quad \textit{con} \quad 1 \leq p < q < \infty.$$

Demostración: Sea $\lambda > 0$ fijo y tomamos $k'(x) = k_\gamma(x)\mathcal{X}_{B(0,\lambda)}$, donde $\mathcal{X}_{B(0,\lambda)}$ denota la función característica de la bola de centro cero y radio λ, $k''(x) = k_\gamma(x) - k'(x)$, $T'f = k' * f$, $T''f = k'' * f$. (Para los siguientes cálculos, es importante leer 7 del apéndice).

Veamos que $k' \in L^1$,

$$||k'||_1 = \int_{B(0,\lambda)} |x|^{\gamma-n} dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\lambda r^{\gamma-n}\ r^{n-1} dr\ d\tilde{x} =$$

$$\omega_n\ \frac{r^\gamma}{\gamma}\Big|_0^\lambda = \omega_n\ \frac{\lambda^\gamma}{\gamma} = c_1 \lambda^\gamma,$$

y además

$$||T'f||_p = ||k' * f||_p \leq ||k'||_1\ ||f||_p\ =\ c_1\lambda^\gamma ||f||_p, \quad \text{para } 1 \leq p \leq \infty.$$

Esto nos dice que T' es de tipo (p,p) con constante $c_1\lambda^{\gamma}$.

Ahora, veamos que $k'' \in L^{p'}$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |k''|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{(\gamma-n)p'} \mathcal{X}_{B^c(0,\lambda)}(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\left(\int_{S^{n-1}}\int_{\lambda}^{\infty} r^{(\gamma-n)p'} r^{n-1} dr\ d\tilde{x}\right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\omega_n\ \frac{r^{(\gamma-n)p'+n}}{(\gamma-n)p'+n}\bigg|_{\lambda}^{\infty}\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Para poder seguir, probemos que $(\gamma - n)p' + n < 0$, en efecto, usando la hipótesis del corolario que relaciona γ, n, p y q, obtenemos

$$\frac{1}{p'} \ = \ 1 - \frac{1}{p} \ = \ 1 - \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{n} \ = \ \frac{qn - n - q\gamma}{qn} \qquad \text{y} \qquad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Además, como

$$\frac{1}{p'} > 0 \quad \text{y} \quad qn > 0, \quad \text{implica} \quad qn - n - q\gamma > 0,$$

entonces

$$p' - 1 \ = \ \frac{qn}{qn-n-q\gamma} - 1 \ = \ \frac{n+q\gamma}{qn-n-q\gamma},$$

por lo tanto tenemos que

$$(\gamma-n)p' + n \ = \ \gamma p' - n(p'-1) \ = \ \frac{\gamma qn}{qn-n-q\gamma} - \frac{n(n+q\gamma)}{qn-n-q\gamma} \ =$$

$$-\frac{n^2}{qn-n-q\gamma} < 0.$$

Retomando los cálculos para k'',

$$||k''||_{p'} = \left(\omega_n\ \frac{r^{(\gamma-n)p'+n}}{(\gamma-n)p'+n}\bigg|_{\lambda}^{\infty}\right)^{\frac{1}{p'}} = \omega_n\ \frac{\lambda^{\frac{(\gamma-n)p'+n}{p'}}}{-\big((\gamma-n)p'+n\big)^{\frac{1}{p'}}} =$$

$$\omega_n\ \frac{\lambda^{\gamma-\frac{n}{p}}}{-\big((\gamma-n)p'+n\big)^{\frac{1}{p'}}} \qquad \text{pues} \quad \gamma - n + \frac{n}{p'} = \gamma - n + n\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \gamma - \frac{n}{p}.$$

Luego $||k''||_{p'} = c_2 \lambda^{\gamma - \frac{n}{p}}$, de donde

$$||T''f||_\infty = ||k'' * f||_\infty \leq ||k''||_{p'} \; ||f||_p \leq \; c_2 \; \lambda^{\gamma - \frac{n}{p}} \; ||f||_p,$$

lo cual nos dice que T'' es de tipo (p, ∞) con constante $c_2 \; \lambda^{\gamma - \frac{n}{p}}$.

Notar que

$$a_\gamma \big(T' + T'' \big) = a_\gamma (k' * f + k'' * f) =$$
$$a_\gamma (k' * f + k_\gamma * f - k' * f) = a_\gamma \; k_\gamma * f = I_\gamma,$$

por lo tanto $I_\gamma = a_\gamma \; T' + a_\gamma \; T''$. Y como queremos usar la proposición 3.5, planteamos el siguiente sistema de dos ecuaciones para α y λ,

$$\frac{\alpha}{2} = a_\gamma \; c_2 \; \lambda^{\gamma - \frac{n}{p}} \; ; \qquad c \; \alpha^{1 - \frac{q}{p}} = a_\gamma \; c_1 \; \lambda^\gamma .$$

Se puede verificar que, si elegimos

$$c = \frac{(a_\gamma \; c_1)^{\frac{p}{p-q}}}{2 \; a_\gamma \; c_2},$$

entonces el sistema tiene solución, y se satisface

$$2 \; a_\gamma \; c_2 \; \lambda^{\gamma - \frac{n}{p}} = \left(\frac{a_\gamma \; c_1}{c} \right)^{\frac{p}{p-q}} \lambda^{\frac{\gamma p}{p-q}} .$$

Luego podemos concluir que I_γ es de tipo débil (p, q).

$\square$

Se sigue inmediatamente del corolario y del caso general del teorema de Marcinkievicz el próximo resultado.

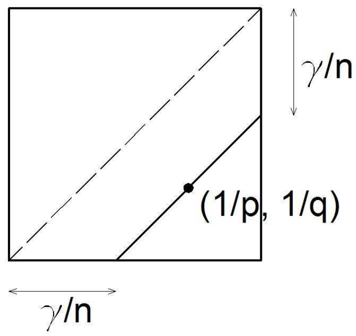
Teorema 3.8 " El teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev sobre los potenciales de Riesz"

El operador I_γ, $0 < \gamma < n$ es de tipo (p, q) para

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{\gamma}{n} \qquad con \; 1 < p < q < \infty .$$

Es decir, I_γ es de tipo "fuerte" sobre el segmento abierto que tiene como puntos extremos $(\frac{\gamma}{n}, 0)$ y $(1, \frac{n-\gamma}{n})$, y es paralelo a la diagonal principal, en el cuadrado unidad; y en el punto $(1, \frac{n}{n-\gamma})$ es de tipo débil.

A partir de los últimos comentarios del teorema sobre los potenciales de Riesz, el conjunto $\tau(I_\gamma)$ tiene el siguiente gráfico:



Para concluir con este capítulo, damos una prueba del caso general del teorema de Marcinkievicz y probamos las condiciones de Kolmogoroff y Zygmund.

Demostración del Teorema 3.3

Primer caso: $p_0 < p_1$ y $q_0 < q_1 < \infty$.

Dada $f \in L^p$, consideramos la descomposición $f = f_\beta + f^\beta$, $f^\beta \in L^{p_0} \cap L^p$, $f_\beta \in L^{p_1} \cap L^p$, donde $\beta = \beta(\alpha)$, es una función que definiremos más adelante. Usando el Lema 1.8 y las hipótesis, tenemos

$$||Tf||_q^q = q \int_0^\infty \alpha^{q-1} (Tf)_*(\alpha)\ d\alpha \leq$$

$$q \int_0^\infty \alpha^{q-1} \left[(Tf^\beta)_* \left(\frac{\alpha}{2} \right) + (Tf_\beta)_* \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right] d\alpha \leq$$

$$q(2M_0)^{q_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} ||f^\beta||_{p_0}^{q_0} d\alpha \ + \ q(2M_1)^{q_1} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} ||f_\beta||_{p_1}^{q_1} d\alpha =$$

$$q(2M_0)^{q_0} \int_0^\infty \alpha^{q-q_0-1} \left(\int_{\mathscr{X}} |f^\beta|^{p_0} d\mu \right)^{\frac{q_0}{p_0}} d\alpha \ +$$

$$q(2M_1)^{q_1} \int_0^\infty \alpha^{q-q_1-1} \left(\int_{\mathscr{X}} |f_\beta|^{p_1} d\mu \right)^{\frac{q_1}{p_1}} d\alpha.$$

Ahora, por hipótesis, podemos elegir v para obtener

$$p_i + \frac{q-q_i}{v} = p_i + p - p_i = p \qquad \text{para } i = 0, 1.$$

En efecto, ambas igualdades son equivalentes a

$$v = \frac{p_0}{q_0}\,\frac{q-q_0}{p-p_0}, \qquad v = \frac{p_1}{q_1}\,\frac{q-q_1}{p-p_1}$$

y esto es cierto, pues es equivalente a

$$\frac{\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{p_1}} = \frac{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{q}}{\frac{1}{q} - \frac{1}{q_1}},$$

lo cual sucede siempre que $p = p_t$ y $q = q_t$ para el mismo t, es decir, siempre que el punto $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ pertenezca al segmento que pasa por los puntos $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ y $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$. Por lo tanto podemos considerar $\beta = \beta(\alpha) = \alpha^v$, y por el Lema 3.1,

$$||Tf||_q^q \leq \frac{q(2M_0)^{q_0}}{q-q_0}\left(\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{q_0}{p_0}} + \frac{q(2M_1)^{q_1}}{q_1-q}\left(\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu\right)^{\frac{q_1}{p_1}}.$$

Si $||f||_p = 1$, entonces podemos escribir $||Tf||_q \leq C||f||_p$, donde

$$C^q = \frac{q}{q-q_0}(2M_0)^{q_0} + \frac{q}{q_1-q}(2M_1)^{q_1}.$$

Para el caso de $f \in L^p$ con $0 < ||f||_p < \infty$, tomamos $\tilde{f} = ||f||_p^{-1} f$ y usamos que T es sub-lineal. Esto prueba la parte (a) de la tesis.

Si $M_0 = M_1 = 1$, podemos reescribir $||Tf||_q \leq C||f||_p = KM_0^{1-t}M_1^t||f||_p$, donde

$$K = \left(\frac{q}{q-q_0} + \frac{q}{q_1-q}\right)^{\frac{1}{q}},$$

lo cual prueba la parte (b) de la tesis.

Veamos para el caso $M_0, M_1 \neq 1$. Como T es un operador sublineal, se satisface $|T(cf)| \leq |c||Tf|$. Definimos $T_1 = c_1 T$ y $d\nu_1 = c_2 d\nu$, donde c_1 y c_2 son constantes positivas, entonces

$$\nu_1\big\{|T_1 f| > \alpha\big\} = c_2\nu\big\{c_1|Tf| > \alpha\big\} = c_2\nu\left\{|Tf| > \frac{\alpha}{c_1}\right\} \leq$$

$$c_2\left(M_i||f||_p\frac{c_1}{\alpha}\right)^{q_i} = \left(c_2^{\frac{1}{q_i}} c_1 M_i \frac{||f||_p}{\alpha}\right)^{\frac{1}{q_i}}, \qquad \text{con } i = 0, 1$$

y podemos elegir c_1, c_2 de tal manera que $c_1 c_2^{\frac{1}{q_0}} M_0 = c_1 c_2^{\frac{1}{q_1}} M_1 = 1$. Ahora, como T_1 es de tipo débil (p_i, q_i) con constantes M_i, $i = 0, 1$; y por lo que probamos anteriormente, resulta $||T_1 f||_{L^q(\nu_1)} \leq K||f||_p$. Desde esta desigualdad, se puede verificar que se satisface la parte (b) de la tesis para el oprador T y la medida ν. El caso en que $p_0 < p_1$ y $q_1 < q_0 < \infty$, se demuestra de manera similar eligiendo $-v$ en lugar de v.

□

Sea T un operador sub-lineal que transforma funciones medibles de $(\mathscr{X}, \mu)$ en funciones medibles de $(\mathscr{Y}, \nu)$. Si T es de tipo débil (p, q), $1 \leq p, q < \infty$, no podemos asegurar que $Tf \in L^q(\mathscr{Y}, \nu)$ para funcines $f \in L^p(\mathscr{X}, \mu)$. El siguiente resultado nos brindará cierto tipo de condiciones para Tf.

Teorema 3.9 "Condición de Kolmogoroff"
(a) *Si T es un operador de tipo débil (p, q), $1 \leq p, q < \infty$, con constante M, entonces, para todo $0 < r < q$, $|Tf|^r$ es localmente integrable para cada $f \in L^p$. Más aún, se satisface la desigualdad de Kolmogoroff*

$$\left(\int_K |Tf(y)|^r d\nu(y) \right)^{\frac{1}{r}} \leq M \left(\frac{q}{q-r} \right)^{\frac{1}{r}} \nu(K)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} ||f||_p,$$

donde K es subconjunto arbitrario de $\mathscr{Y}$ con medida finita respecto de ν.
(b) *Recíprocamente, si existe $0 < r < q$ y una constante positiva M_1 tal que para todo subconjunto K de $\mathscr{Y}$, se satisface la desigualdad*

$$\left(\int_K |Tf(y)|^r d\nu(y) \right)^{\frac{1}{r}} \leq M_1 \nu(K)^{\frac{1}{r} - \frac{1}{q}} ||f||_p$$

para toda función $f \in L^p$, entonces T es de tipo débil (p, q) con constante $M \leq M_1$.

Demostración: Veamos la parte (a), definimos $(Tf)_*(\alpha, K)$ por

$$(Tf)_*(\alpha, K) \doteq \nu\big\{y \in K : |Tf(y)| > \alpha\big\} = \nu\big(E_\alpha(Tf) \cap K\big),$$

luego, $(Tf)_*(\alpha, K) \leq \nu(K)$ y $(Tf)_*(\alpha, K) \leq (Tf)_*(\alpha) \leq (M\alpha^{-1}||f||_p)^q$.

Entonces, tenemos que

$$\int_K |Tf|^r d\nu = r\int_0^\infty \alpha^{r-1}(Tf)_*(\alpha, K)d\alpha =$$

$$r\int_0^N \alpha^{r-1}(Tf)_*(\alpha, K)d\alpha \ + \ r\int_N^\infty \alpha^{r-1}(Tf)_*(\alpha, K)d\alpha \leq$$

$$r\int_0^N \alpha^{r-1}\nu(K)d\alpha \ + \ r\int_N^\infty \alpha^{r-1}(M\alpha^{-1}||f||_p)^q d\alpha =$$

$$\nu(K)N^r + (M||f||_p)^q \frac{r}{q-r}N^{r-q} \leq \nu(K)^{1-\frac{r}{q}}M^r||f||_p^r \frac{q}{q-r}$$

$$\leq \nu(K)^{1-\frac{r}{q}}M^r||f||_p^r$$

eligiendo $N = M||f||_p\nu(K)^{\frac{-1}{q}}$.

Probemos la parte (b). Si $K = E_\alpha(Tf)$, por la desigualdad de Chebyshev,

$$\alpha^r\nu(K) \leq \int_K |Tf(y)|^r d\nu \leq M_1^r\nu(K)^{1-\frac{r}{q}}||f||_p^r$$

y $\nu(K) \leq (M\alpha^{-1}||f||_p)^q$ para todo $\alpha > 0$, entonces T es de tipo débil (p, q).

□

Teorema 3.10 "Condición de Zygmund"
Sea T un operador lineal de tipo débil (p, p) y de tipo débil (q, q) donde $1 \leq p < q < \infty$. Entonces, para toda función $f \in L^p \log^+ L$, $Tf \in L^p(K)$, para todo $K \subset \mathscr{Y}$ con $\nu(K) < \infty$. Más aún, se satisface

$$\int_K |Tf|^p d\nu \leq 2^p p\Bigg[\ \nu(K) \ + \Bigg(M_1^p\int_{\mathscr{X}} |f|^p \log^+ |f| d\mu +$$

$$\frac{1}{q-p}M_2^q\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu\Bigg)\Bigg].$$

Dmostración: Tomamos $(Tf)_*(\alpha, K)$ como en la prueba de la condición de Kolmogoroff. Luego $(Tf)_*(\alpha, K) \leq \nu(K)$ y $(Tf)_*(\alpha, K) \leq (Tf)_*(\alpha)$. Como

$$(Tf)_*(\alpha) \leq \left(M_1\frac{||f||_p}{\alpha}\right)^p \quad \text{y} \quad (Tf)_*(\alpha) \leq \left(M_2\frac{||f||_q}{\alpha}\right)^q,$$

entonces
$$\int_K |Tf|^p d\nu = p\int_0^\infty \alpha^{p-1}(Tf)_*(\alpha, K)d\alpha =$$
$$2^p p\int_0^\infty \alpha^{p-1}(Tf)_*(2\alpha, K)d\alpha =$$
$$2^p p\int_0^1 \alpha^{p-1}(Tf)_*(2\alpha, K)d\alpha \ + \ 2^p p\int_1^\infty \alpha^{p-1}(Tf)_*(2\alpha, K)d\alpha \leq$$
$$2^p p\int_0^1 \alpha^{p-1}\nu(K)d\alpha \ + \ \Bigg[2^p p\int_1^\infty \alpha^{p-1}(Tf^\alpha)_*(\alpha, K)d\alpha +$$
$$2^p p\int_1^\infty \alpha^{p-1}(Tf_\alpha)_*(\alpha, K)d\alpha\Bigg] \leq$$
$$2^p\nu(K) + \Bigg[2^p p\int_1^\infty \alpha^{p-1}\left(\frac{M_1}{\alpha}\right)^p\int_{\mathscr{X}} |f^\alpha|^p d\mu \ d\alpha +$$
$$2^p p\int_1^\infty \alpha^{p-1}\left(\frac{M_2}{\alpha}\right)^q\int_{\mathscr{X}} |f_\alpha|^q d\mu \ d\alpha\Bigg] \leq$$
$$2^p p \ \nu(K) + \Bigg[2^p p M_1^p\int_{\mathscr{X}} |f|^p\left(\int_1^\infty \frac{1}{\alpha}\mathcal{X}_{(0,|f|)}(\alpha) \ d\alpha\right)d\mu +$$
$$2^p p M_2^q\int_{\mathscr{X}} |f|^q\left(\int_{|f|}^\infty \alpha^{p-q-1}d\alpha\right)d\mu\Bigg],$$
como
$$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha}\mathcal{X}_{(0,|f|)}(\alpha) \ d\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } |f| < 1 \\ \log|f| & \text{si } |f| \geq 1 \end{cases}$$
entonces
$$\int_1^\infty \frac{1}{\alpha}\mathcal{X}_{(0,|f|)}(\alpha) \ d\alpha = \log^+|f|.$$
Por lo tanto podemos concluir que
$$\int_K |Tf|^p d\nu \leq 2^p p \ \nu(K) \ + \Bigg[2^p p M_1^p\int_{\mathscr{X}} |f|^p\log^+|f| d\mu +$$
$$2^p\frac{p}{q-p}M_2^q\int_{\mathscr{X}} |f|^p d\mu\Bigg],$$
lo cual prueba el teorema.

□

Comentario: las condiciones de Kolmogoroff y Zygmund, también son ciertas para $q = \infty$. Y el teorema de Marcinkievicz, caso general, es también cierto para $0 \leq p_i \leq q_i \leq \infty$, $i = 0, 1$ y $q_0 \neq q_1$.

Apéndice

1. Lema *Sea S un subespacio $\mathbb{C}$-vectorial normado de $\mathfrak{N}$, ($\mathfrak{N}$ normado) y sea F_0 :$S \to \mathbb{C}$ lineal y continua, entonces existe $F : \mathfrak{N} \to \mathbb{C}$ lineal y continua tal que $F = F_0$ en S y $||F|| = ||F_0||$.*

Teorema *Sea $\mathfrak{N}$ un espacio de Banach y S un subespacio denso de $\mathfrak{N}$. Si $T_0 : S \to \mathbb{C}$ es lineal tal que $||T_0x|| \leq M||x||_{\mathfrak{N}}$ para todo $x \in S$, con M constante. Entonces existe un único operador T lineal y acotado, definido en $\mathfrak{N}$ tal que $T = T_0$ en S y $||Tx|| \leq M||x||_{\mathfrak{N}}$ para todo $x \in \mathfrak{N}$. T se llama extensión continua de T_0.*

2. Definición Sea E conjunto medible en $\mathscr{X}$, f, $\{f_k\}$ funciones medibles definidas en $\mathscr{X}$. Diremos que f_k converge en medida a f en E, si para todo $\epsilon > 0$ se cumple

$$\lim_{k\to\infty} \left|\left\{x \in E : |f(x) - f_k(x)| > \epsilon\right\}\right| = 0.$$

Teorema *Sean E conjunto medible, f, f_k definidas y medibles en E, para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que f_k converge en medida a f. Entonces existe una subsucesión $\{f_{k_j}\}$ que converge a f p.p. en E.*

• Ahora supongamos f, f_k medibles en $\mathscr{X}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tales que f_k converge a f en L^p, esto es

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathscr{X}} |f - f_k|^p d\mu = 0.$$

Consideremos $A_{\epsilon,N} = \{x \in \mathscr{X} : |f(x) - f_N(x)| > \epsilon\}$, entonces, en $A_{\epsilon,N}$, y para todo $\epsilon > 0$, tenemos que

$$\frac{|f(x) - f_N(x)|}{\epsilon} > 1, \quad \text{luego} \quad \frac{|f(x) - f_N(x)|^p}{\epsilon^p} > 1$$

y como

$$|A_{\epsilon,N}| = \int_{A_{\epsilon,N}} 1 \, d\mu \leq \int_{A_{\epsilon,N}} \frac{|f(x) - f_N(x)|^p}{\epsilon^p} \, d\mu \leq \frac{1}{\epsilon^p} \int_{\mathscr{X}} |f - f_N|^p d\mu,$$

obtenemos

$$\lim_{N\to\infty} |A_{\epsilon,N}| = 0 \quad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

Por lo tanto f_N converge a f en medida, y por el teorema anterior, existe una subsucesión $\{f_{N_j}\}$ que converge a f p.p. en $\mathscr{X}$.

Conclusión: "convergencia en $||\cdot||_p$" implica "convergencia en medida" implica "existe subsucesión con convergencia p.p."

En el Lema 1.4 del capítulo I, tenemos una sucesión $\{f_m\}$ tal que $T(f_m)$ converge a $T_0(f)$ en L^{q_0} y que $T(f_m)$ converge a $T_1(f)$ en L^{q_1}. Luego existe subsucesión $\{f_{m_k}\}$ tal que $T(f_{m_k})$ converge a $T_0(f)$ p.p. en $\mathscr{Y}$; y se cumple que $T(f_{m_k})$ converge a $T_1(f)$ en L^{q_1}, por lo tanto, como antes, existe subsucesión $\{f_{m_{k_j}}\}$ tal que $T(f_{m_{k_j}})$ converge, tanto a $T_1 f$ como a $T_0 f$. Así tenemos que

$$|T_1 f - T_0 f| \leq |T_1 f - T(f_{m_{k_j}})| + |T_0 f - T(f_{m_{k_j}})|$$

y el término de la derecha tiende a cero cuando j tiende a infinito. Y entonces $T_0 f = T_1 f$ p.p.

"Teorema de la convergencia dominada"

Sea $\{ f_n\}$ una sucesión de funciones medibles definidas en $\mathscr{X}$ a valores en $\mathbb{C}$ tal que p.p. $x \in \mathscr{X}$ existe

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Si existe $g \in L^1(\mathscr{X}, \mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \mathscr{X}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f \in L^1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}} |f_n - f| d\mu = 0 \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}} f_n d\mu = \int_{\mathscr{X}} f d\mu.$$

"Aproximación de la identidad"

Definición Una familia $\{\varphi_\epsilon\}$ en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es una aproximación de la identidad, si satisface las siguientes condiciones:

(i)

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_\epsilon(x)|dx \leq M \qquad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

(ii)

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\epsilon(x)dx = 1 \qquad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

(iii)

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{\{|x|>\delta\}} |\varphi_\epsilon(x)|dx = 0 \qquad \text{para todo } \delta > 0.$$

Ejemplo: Si $\varphi \in L^1$ con $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)dx = 1$, tomamos $\varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\epsilon^{-1}x)$, entonces la familia $\{ \varphi_\epsilon\}$ es una aproximación de la identidad.

Teorema *Sea $\{\varphi_\epsilon\}$ una aproximación de la identidad. Si $f \in L^p$ con $1 \leq p < \infty$, entonces $f * \varphi_\epsilon$ converge a f en L^p.*

3. Proposición *Toda función $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$ es continua en la norma $||\cdot||_p$, esto es, $||\tau_h f - f||_p$ tiende a cero cuando $|h|$ tiende a cero.*

Prueba: como

$$||\tau_h f - f||_p^p = \int_{\mathscr{X}} |f(x-h) - f(x)|^p d\mu(x),$$

la proposición es cierta para la clase de funciones continuas de soporte compacto. Ahora, tomamos $f \in L^p$. Sea $\epsilon > 0$ y g continua de soporte compacto tal que $||g - f||_p < \epsilon$, entonces

$$||\tau_h f - f||_p = ||\tau_h f - \tau_h g||_p + ||\tau_h g - g||_p + ||g - f||_p < 2\epsilon + ||\tau_h g - g||_p$$

y por lo tanto

$$\lim_{|h|\to 0} ||\tau_h f - f||_p = \lim_{|h|\to 0} ||\tau_h g - g||_p + 2\epsilon \qquad \text{para todo } \epsilon > 0.$$

□

Observación: Si f es continua de soporte compacto, para $|h|$ suficientemente grande, tenemos que

$$||\tau_h f + f||_p^p = \int_{\mathscr{X}} |f(x-h) - f(x)|^p d\mu(x) =$$

$$\int_{\mathscr{X}} |f(x-h)|^p d\mu(x) + \int_{\mathscr{X}} |f(x)|^p d\mu(x),$$

por lo tanto

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p = 2^{\frac{1}{p}} ||f||_p.$$

Probemos que también es cierto este resultado, para $f \in L^p$. Entonces, sea $f \in L^p$ y elegimos una sucesión $\{f_k\}$ de funciones continuas de soporte compacto, que converge a f en norma $||\cdot||_p$. Luego

$$||\tau_h f + f||_p = ||\tau_h f - \tau_h f_k + \tau_h f_k - f_k + f_k||_p \leq$$

$$||\tau_h(f - f_k)||_p + ||\tau_h f_k + f_k||_p + ||f - f_k||_p =$$

$$2||f - f_k||_p + ||\tau_h f_k + f_k||_p,$$

entonces

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p \leq 2||f - f_k||_p + 2^{\frac{1}{2}} ||f||_p$$

y haciendo tender k a infinito

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p \leq 2^{\frac{1}{2}} ||f||_p.$$

Por otro lado

$$||\tau_h f + f||_p \geq ||\tau_h f_k + f_k||_p - ||\tau_h(f - f_k) + f - f_k||_p \geq$$

$$||\tau_h f_k + f_k||_p - ||\tau_h(f - f_k)||_p - ||f - f_k||_p,$$

por lo tanto

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p \geq 2^{\frac{1}{p}} ||f_k||_p - 2||f - f_k||_p$$

y haciendo tender k a infinito

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p \geq 2^{\frac{1}{p}} ||f||_p.$$

Podemos concluir que, para toda $f \in L^p$, se satisface

$$\lim_{|h|\to\infty} ||\tau_h f + f||_p = 2^{\frac{1}{p}}||f||_p.$$

4. Sean f y g funciones medibles según Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. La convolución $f * g$ está definida si para cada x fijo, $f(x-y)g(y)$ es una función integrable de y, p.p. $x \in \mathbb{R}^n$, y está dada por

$$f * g\ (x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Definición: Para cada $y \in \mathbb{R}^n$, τ_y es el operador traslación, definido por $\tau_y f(x) = f(x-y)$ para una función f.

Luego, si $f \in L^1$, $y \in \mathbb{R}^n$, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \tau_y f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

En particular, si $f \in L^p$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\tau_y f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx, \qquad \text{esto es} \qquad ||\tau_y f||_p = ||f||_p.$$

Teorema (a) *Si $f, g \in L^1$, entonces $f(x-y)g(y)$ es una función integrable de y p.p. x, $f * g \in L^1$ y $||f * g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$.*

(b) *Si $f \in L^p$ y $g \in L^{p'}$ con p y p' conjugados, $1 \leq p \leq \infty$, entonces $f * g \in L^\infty$ y $||f * g||_\infty \leq ||f||_p||g||_{p'}$.*

Teorema "Desigualdad de Young"

Si $f \in L^p$ con $1 \leq p \leq \infty$, $g \in L^1$ entonces $f * g \in L^p$ y se satisface $||f * g||_p \leq ||f||_p||g||_1$.

Definición: Sea $k \in L^1$, definimos el operador convolución $K : L^p \to L^p$ por $Kf = f * k$, $1 \leq p \leq \infty$. K es un operador continuo con $||K|| \leq ||k||_1$. (La buena definición, resulta del teorema anterior). Y k es llamado el Núcleo del operador K. Además K, conmuta con las traslaciones, es decir $\tau_y K = K\tau_y$.

5. Como primera instancia, enunciemos el llamado "principio del máximo" para funciones analíticas. Este afirma que, si $f(z)$ es una función analítica en un dominio acotado D abierto y conexo en $\mathbb{C}$, entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar el máximo en D salvo que $f(z)$ sea constante.

Ahora damos una leve extensión de este resultado.

Cosideremos $D = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1, y \in \mathbb{R}\}$, $\Delta_0 = \{z \in \mathbb{C} : z = iy, y \in \mathbb{R}\}$ y $\Delta_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + iy, y \in \mathbb{R}\}$.

Proposición "Pricipio del máximo" de Phragmén-Lindelöf

Sea $f(z)$ analítica en D^0 y continua en D. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Delta_0 \cup \Delta_1$, entonces $|f(z)| \leq M$ en D^0. Más aún, si $f(z_0) = M$ para algún z_0 en D^0, entonces $f(z)$ es una función constante.

Prueba: Supongamos primero el caso en que $f(z) = f(x + iy)$ tiende a cero uniformemente cuando $|y|$ tiende a infinito, para $0 \leq x \leq 1$. Entonces, dado $M' > 0$ existe $N > 0$ tal que $|f(x + iy)| \leq M'$ para $|y| \geq N$.

Por otro lado, podemos usar el pricipio del máximo para la región $\{x+iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x \leq 1, |y| \leq N\}$, oteniendo que $|f(z)| \leq M$ en esta región. Eligiendo $M' = M$, se cumple la proposición.

Para el caso general, definimos para cada k

$$f_k(z) = f(z)e^{\frac{z^2}{k}} = f(z)e^{(x^2-y^2)\frac{1}{k}}e^{2ixy\frac{1}{k}} \quad \text{implica} \quad |f_k(z)| = |f(z)|e^{(x^2-y^2)\frac{1}{k}}$$

y como $|f(z)|$ es acotado en D, entonces

$$\lim_{|y|\to\infty} |f_k(z)| = 0 \text{ uniformemente para } 0 \leq x \leq 1.$$

Además, si $z \in \Delta_0 \cup \Delta_1$, es decir, si $x = 0$ ó $x = 1$, tenemos que

$$e^{(x^2-y^2)\frac{1}{k}} = e^{\frac{x^2}{k}}e^{\frac{-y^2}{k}} \leq e^{\frac{1}{k}} \quad \text{lo cual implica} \quad |f_k(z)| \leq Me^{\frac{1}{k}}$$

y por el caso anterior, resulta

$$|f_k(z)| \leq Me^{\frac{1}{k}} \quad \text{para todo } z \in D^0.$$

Como f_k converge a f, pues

$$\lim_{k\to\infty} |f_k(z) - f(z)| = \lim_{k\to\infty} |f(z)||e^{\frac{z^2}{k}} - 1| = 0.$$

entonces $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D^0$.

$\square$

Lema "Teorema de la tres líneas"

Sea $f(z)$ analítica en D^0, continua y acotada en D. Si $|f(z)| \leq M_0$ para todo $z \in \Delta_0$ y $|f(z)| \leq M_1$ para todo $z \in \Delta_1$, entonces $|f(z)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$ para todo $z \in \Delta_\theta = \{z = \theta + iy : y \in \mathbb{R}\}$ con $\theta \in (0,1)$. En particular $|f(\theta)| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$.

Demostración: Tomamos $g(z) = f(z)e^{az}$ con $a \in \mathbb{R}$, entonces $|g(z)| = |f(z)|e^{Re(az)} = |f(z)|e^{ax}$. Luego tenemos que $|g(iy)| = |f(iy)| \leq M_0$ y también $|g(1+iy)| = |f(1+iy)|e^a \leq M_1 e^a$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Por la Proposición anterior $|g(\theta+iy)| \leq \max\{M_0, M_1 e^a\}$. Eligiendo a tal que $M_0 = M_1 e^a$, o bien $e^a = M_0 M_1^{-1}$, obtenemos

$$|g(\theta+iy)| = e^{a\theta}|f(\theta+iy)| \leq M_0,$$

por lo tanto

$$|f(\theta+iy)| \leq e^{-a\theta} M_0 = \left(\frac{M_1}{M_0}\right)^{\theta} M_0 = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

$\square$

6. Teorema *Sea $f \in L^p(\mathscr{X}, \mu)$, y sean p, p' conjugados, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces*

$$||f||_p = \sup \left| \int_{\mathscr{X}} fg \; d\mu \right|,$$

donde el supremo se toma sobre todas la funciones $g \in L^{p'}$ con $||g||_{p'} \leq 1$.

Demostración: Sea $g \in L^{p'}$ con $||g||_{p'} \leq 1$, por la desigualdad de Hölder

$$\left| \int_{\mathscr{X}} fg \; d\mu \right| \leq ||f||_p ||g||_{p'} \leq ||f||_p,$$

entonces

$$\sup \left| \int_{\mathscr{X}} fg \; d\mu \right| \leq ||f||_p.$$

Probemos la otra desigualdad.

Si $||f||_p = 0$, entonces f es cero p.p. $x \in \mathscr{X}$ y el resultado es trivial.

Primero veamos para $1 < p < \infty$. Si $f \geq 0$ y $||f||_p = 1$, tomamos $g = f^{\frac{p}{p'}}$, y resulta $||g||_{p'} = 1$. Luego

$$\left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| = \left| \int_{\mathscr{X}} f^{\frac{p}{p'}+1} \ d\mu \right| = \left| \int_{\mathscr{X}} f^{p\left(\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}\right)} \ d\mu \right| = \left| \int_{\mathscr{X}} f^p \ d\mu \right| = 1$$

y se cumple que

$$||f||_p = 1 = \sup \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right|.$$

Si $0 < ||f||_p < \infty$, tomamos $\tilde{f} = f \ ||f||_p^{-1}$.

Para el caso $p = 1$ y $p' = \infty$, tomamos $g_0 \equiv 1$, entonces

$$||f||_1 = \int_{\mathscr{X}} f d\mu = \int_{\mathscr{X}} fg_0 d\mu = \left| \int_{\mathscr{X}} fg_0 \ d\mu \right| \leq \sup \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right|.$$

Por último, probemos para el caso $p = \infty$. Sea $f \geq 0$ y $M = ||f||_\infty$, queremos ver que existe $g \in L^1$ con $||g||_1 \leq 1$ tal que $M - \epsilon < \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right|$.

Sea $A = \{x \in \mathscr{X} : |f(x)| > M - \epsilon\}$, resulta $\mu(A) > 0$. Ahora, si $\mu(A) < \infty$ tomamos

$$g(x) = \mathcal{X}_A(x) \frac{1}{\mu(A)} \quad \text{por lo que} \quad ||g||_1 = \frac{1}{\mu(A)} \int_{\mathscr{X}} \mathcal{X}_A(x) d\mu = 1$$

y luego

$$\left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| = \frac{1}{\mu(A)} \int_A f d\mu \geq \frac{1}{\mu(A)} \int_A (M - \epsilon) d\mu = M - \epsilon.$$

Si tenemos que $\mu(A) = \infty$, usamos lo siguiente: como μ es una medida σ-finita, existe una familia de subconjuntos medibles $\mathcal{C} = \{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con la propiedad que

$$\mathscr{X} = \bigcup_k C_k \quad \text{con } \mu(C_k) < \infty, \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

luego

$$A = \bigcup_k \big(C_k \cap A\big).$$

Entonces existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < \mu(A \cap C_{N_0}) < \infty$. Y tomando

$$g(x) = \mathcal{X}_{A \cap C_{N_0}}(x) \frac{1}{\mu(A \cap C_{N_0})},$$

se prueba el teorema para el caso $p = \infty$.

$\square$

Observación: usando las hipótesis del teorema, veamos que

$$||f||_p = \sup \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right|,$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones g simples con $||g||_{p'} \leq 1$.

Es inmediato que

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| : \ g \text{ simple}, ||g||_{p'} \leq 1 \right\} \leq$$

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| : \ g \in L^{p'}, ||g||_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Veamos la otra desigualdad. Por definición del supremo, dado $\epsilon > 0$ existe $g_0 \in L^{p'}$ con $||g_0||_{p'} \leq 1$ tal que

$$\left(\sup \left\{ \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| : \ g \in L^{p'}, ||g||_{p'} \leq 1 \right\} \right) - \epsilon < \left| \int_{\mathscr{X}} fg_0 \ d\mu \right|.$$

Suponiendo que $f \geq 0$, existe una sucesión creciente de funciones simples $\{g_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $0 \leq g_k \leq g_0$, y g_k converge a g_0 cuando k tiende a infinito. Por el teorema de la convergencia monótona

$$\lim_{k \to \infty} \left| \int_{\mathscr{X}} fg_k \ d\mu \right| = \left| \int_{\mathscr{X}} fg_0 \ d\mu \right|,$$

luego, existe g_k simple tal que

$$\left(\sup \left\{ \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| : \ g \in L^{p'}, ||g||_{p'} \leq 1 \right\} \right) - \epsilon \leq \left| \int_{\mathscr{X}} fg_k \ d\mu \right| \leq$$

$$\sup \left\{ \left| \int_{\mathscr{X}} fg \ d\mu \right| : \ g \text{ simple}, ||g||_{p'} \leq 1 \right\}.$$

Teorema "Desigualdad de Hölder"
Si $1 \leq p \leq \infty$ *y* p' *es el conjugado de* p, *entonces* $||fg||_1 \leq ||f||_p ||g||_{p'}$.

Teorema "Desiguladad integral de Minkowski"
Sean $(\mathscr{X}, \mu)$, $(\mathscr{Y}, \nu)$ *dos espacios de medidas positivas,* σ*-finitas, y* $F(x,y)$ *función medible definida en* $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ *que satisface:*
(a) $F(\ \cdot, y) \in L^p(\mathscr{X}, \mu)$ *p.p.* $y \in \mathscr{Y}$, $1 \leq p \leq \infty$, *es decir*

$$||F(\ \cdot, y)||^p_{(p,d\mu)} = \int_{\mathscr{X}} |F(x,y)|^p d\mu(x) < \infty \quad p.p.\ y \in \mathscr{Y}.$$

(b)

$$\int_{\mathscr{Y}} ||F(\ \cdot, y)||_{(p,d\mu)}\ d\nu(y) < \infty,$$

o equivalentemente

$$\int_{\mathscr{Y}} \left(\int_{\mathscr{X}} |F(x,y)|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y) < \infty.$$

Entonces $\int_{\mathscr{Y}} F(x,y) d\nu(y)$ *converge p.p.* $x \in \mathscr{X}$ *y se cumple*

$$\left|\left| \int_{\mathscr{Y}} F(\cdot, y) d\nu(y) \right|\right|_{(p,d\mu)} \leq \int_{\mathscr{Y}} ||F(\ \cdot, y)||_{(p,d\mu)}\ d\nu(y).$$

7. Sea S^{n-1} la esfera en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, ω_n el área de la superficie de S^{n-1} y Ω_n el volumen de S^{n-1}.

Para $x = (x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$, cosideramos:

$$\begin{aligned}
x_1 &= x_1(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}) = r \cos \varphi_1 \\
x_2 &= x_2(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}) = r \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \\
&\vdots \\
x_k &= x_k(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}) = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{k-1} \cos \varphi_k,\ \ k \leq n-2 \\
&\vdots \\
x_n &= x_n(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_{n-1}) = r \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \dots \sin \varphi_{n-1}
\end{aligned}$$

donde $0 \leq \varphi_k \leq \pi$, con $k = 1, \dots (n-2)$; $0 \leq \varphi_{n-1} \leq 2\pi$; $r = |x|$.

Ahora, consideramos la transformación $T : [0,\infty)\times[0,\pi]^{n-2}\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^n$ dada por $T(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1}) = (x_1,x_2,\ldots x_n)$, donde x_k está definido como hicimos en 7. Luego, tenemos que

$\det(J_T(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1})) = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}$.

Si tomamos f integrable en $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\big(T(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1})\big)r^{n-1}dr\ d\tilde{x},$$

donde $d\tilde{x} = \sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\ldots\sin\varphi_{n-2}\ d\varphi_1 d\varphi_2\ldots d\varphi_{n-1}$ y

$$\int_0^{\pi}\ldots\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} d\tilde{x} \doteq \int_{S^{n-1}} d\tilde{x} = \omega_n,$$

luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = \int_{S^{n-1}}\int_0^{\infty} f\big(T(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1})\big)r^{n-1}dr\ d\tilde{x}.$$

<u>Lema</u>

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \pi.$$

<u>Demostración</u>: sea $z = x+iy$,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2}e^{y^2}dxdy =$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-|z|^2}dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\varphi,$$

donde en la última desigualdad hemos usado el cambio de coordenadas polares.

Ahora, aplicando el método de sustitución, con $u = -r^2$, $du = -2rdr$, obtenemos

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2}drd\varphi = 2\pi\int_0^{-\infty} -\frac{1}{2}\ e^u du =$$

$$-\pi e^u\Big|_0^{-\infty} = \pi.$$

$\square$

Definición: La función Gamma $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ está dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Algunas de sus propiedades son:
(i) $\Gamma(1) = 1$.
(ii) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
(iii) $\Gamma(n+1) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema "Área de la superficie de la esfera en $\mathbb{R}^n$"

$$\omega_n = 2\pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Demostración: Por el teorema de Fubini y el lema anterior

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt \right)^n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Por otro lado,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \; d\tilde{x}.$$

Aplicando el método de sustitución, con $u = r^2$, $du = 2rdr$, tenemos que

$$\int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \; d\tilde{x} = \omega_n \int_0^\infty \frac{1}{2} \; e^{-u} u^{\frac{n}{2}-1} du = \frac{\omega_n}{2} \; \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Por lo tanto, deducimos

$$\frac{\omega_n}{2} \; \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

$\square$

Corolario "Volumen de la esfera en $\mathbb{R}^n$"

$$\Omega_n = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Prueba del corolario: usando la propiedad (ii) para la función Gamma, otenemos

$$\Omega_n = \int_{\{|x|\leq 1\}} dx = \int_{S^{n-1}} \int_0^1 r^{n-1} dr \, d\tilde{x} =$$

$$\omega_n \frac{1}{n} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\frac{n}{2}} = \pi^{\frac{n}{2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

□

Por último, sea $f(x) = |x|^{\lambda}$ con $x \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \neq -n$. Entonces, para $0 < a < b < \infty$,

$$\int_{\{a<|x|<b\}} f(x) dx = \int_{S^{n-1}} \int_a^b r^{n-1+\lambda} dr d\tilde{x} = \frac{\omega_n}{n+\lambda}(b^{n+\lambda} - a^{n+\lambda}).$$

Luego, podemos observar que si $\lambda > -n$, $f(x)$ es integrable sobre cualquier bola acotada con centro en el origen. Y si $\lambda < -n$, $f(x)$ es integrable sobre el complemento de cualquier bola acotada con centro en el origen.

Referencias

[1] H. L. Royden, *Real Analysis*, MacMillan New York, 1964.

[2] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, Mc. Graw-Hill Inc., 1974.

[3] C. Sadosky, *Interpolation of operators and singular integrals*, Marcel Dekker Inc., 1979.

[4] E. Stain, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press, 1970.

[5] E. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton Univ. Press, 1971.

[6] R. L. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker Inc., 1977.