

UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA  
Facultad de Matemática, Astronomía y Física

Trabajo Especial de Licenciatura en Física

**EVOLUCIÓN ASINTÓTICA DE SISTEMAS  
CUÁNTICOS ABIERTOS**

Pablo René Zangara  
Director: Guido A. Raggio

Diciembre de 2009



A Norma y Roque.

## **Agradecimientos**

A mi familia.

A Guido, mi director, por todo lo que aprendí y por la paciencia.

A mis amigos, y todas las personas especiales que me acompañaron a lo largo de estos cinco años.

A la FaMAF, y toda la gente que forma parte de esta institución.

## Resumen

La forma de la dinámica más general posible para un sistema cuántico abierto (irreversible) se conoce desde 1976 (Gorini, Kossakowski & Sudarshan; Lindblad). Discutiremos la problemática del comportamiento a tiempos grandes (asintótica). Estudiaremos resultados (ajenos) sobre la convergencia para  $t$  tendiendo a infinito de la evolución para cualquier estado inicial. Se ejemplificarán diversas situaciones posibles. Presentaremos resultados propios para la reducción del estudio de la dinámica asintótica. Finalmente, se discuten las aplicaciones a la problemática de la evolución temporal del entrelazamiento cuántico.

### Palabras clave

Sistemas cuánticos abiertos. Semigrupos markovianos. Evolución asintótica. Entrelazamiento cuántico.

### Clasificación

03.65.-w

05.30.-d

03.65.Aa

03.65.Ud

# Índice

<b>Introducción</b>	<b>vi</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Punto de Partida . . . . .	1
1.2 Estados . . . . .	3
1.2.1 Ejemplos . . . . .	3
1.3 Proyectores y Soporte de un Estado . . . . .	4
<b>2 Nociones de Entrelazamiento y Separabilidad</b>	<b>7</b>
2.1 Producto Tensorial de Espacios de Hilbert . . . . .	7
2.2 Producto Tensorial de Operadores . . . . .	8
2.3 Estados Marginales y Estados Producto . . . . .	8
2.4 Estados Separables y Estados Entrelazados . . . . .	10
2.5 Correlato en Matrices Densidad . . . . .	10
2.6 Algunos criterios de separabilidad para casos bipartitos . . . . .	11
2.6.1 Criterio de la “traspuesta parcial positiva” (PPT) . . . . .	11
2.6.2 Mapas Positivos pero no Completamente Positivos . . . . .	11
2.6.3 Separabilidad por testigo de entrelazamiento . . . . .	12
<b>3 Semigrupos Dinámicos</b>	<b>13</b>
3.1 Imagen de Heisenberg . . . . .	13
3.2 Imagen de Schrödinger . . . . .	13
3.3 Equivalencia . . . . .	14
3.4 Generadores de Dinámica . . . . .	14
3.5 Estados Estacionarios y Asintótica: Introducción . . . . .	16
<b>4 Resultados Generales</b>	<b>20</b>
4.1 Enunciados Básicos . . . . .	20
4.2 Sobre las Nociones de Irreducibilidad I . . . . .	23
4.3 Dinámica de Proyectores y Aspectos Geométricos . . . . .	25
4.4 Proyectores Subarmónicos . . . . .	28
4.5 Reduciendo la Dinámica . . . . .	30
<b>5 Familia Fiel de Estados Estacionarios</b>	<b>35</b>
5.1 Teoremas de Relajación . . . . .	35
5.2 Sobre las Nociones de Irreducibilidad II . . . . .	37
5.3 Reducción de la dinámica . . . . .	38

<b>6 Asintótica y Entrelazamiento</b>	<b>39</b>
6.1 Panorama General . . . . .	39
6.2 Análisis Geométrico . . . . .	39
<b>Conclusiones Finales</b>	<b>42</b>
<b>A Equivalencia: Lindblad y forma normal de Kossakowski</b>	<b>43</b>
<b>B Dinámica con Generadores Simples</b>	<b>45</b>
<b>C Generadores Simples: casos de dimensión baja</b>	<b>49</b>
C.1 Caso $3 \times 3$ . . . . .	49
C.1.1 Bloque Indisociable . . . . .	49
C.1.2 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 1$ . . . . .	52
C.1.3 Bloque disociable diagonalizable . . . . .	54
C.2 Caso $4 \times 4$ . . . . .	55
C.2.1 Bloque indisociable . . . . .	55
C.2.2 Bloque disociable no diagonalizable $3 \oplus 1$ . . . . .	55
C.2.3 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 2$ . . . . .	56
C.2.4 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 1 \oplus 1$ . . . . .	57
C.2.5 Bloque disociable diagonalizable . . . . .	58
<b>D Función Disipación</b>	<b>61</b>
<b>E Algunos Ejemplos de Interés</b>	<b>63</b>
E.1 Ejemplo 1 . . . . .	63
E.2 Ejemplo 2 . . . . .	64
<b>Bibliografía</b>	<b>68</b>
<b>Índice Alfabético</b>	<b>70</b>

# Introducción

El presente trabajo tiene por objeto analizar el comportamiento asintótico de dinámicas irreversibles, para sistemas cuánticos abiertos. El marco matemático apropiado para estudiar tal evolución, es el de los semigrupos dinámicos completamente positivos.

Desde 1976 (Gorini, Kossakowski, Sudarshan; Lindblad) se conoce la forma general del generador de tales semigrupos. Tales generadores serán una de las herramientas fundamentales de nuestro estudio.

La asintótica de estos semigrupos fue objeto de estudio durante mucho tiempo, en virtud de su aplicación para el análisis de la aproximación al equilibrio termodinámico, en un sistema cuántico abierto.

Hoy por hoy, el estudio de estos semigrupos (también conocidos como Semigrupos Markovianos) está motivado por el surgimiento de nuevas áreas dentro de la Física, como lo son la Información Cuántica y la Computación Cuántica, en las que, por ejemplo, la evolución del *entrelazamiento* de sistemas compuestos resulta un fenómeno que ha despertado mucho interés.

La estructura del trabajo está dada por 6 capítulos. Los capítulos 1 y 2 tienen por objeto introducir la notación empleada, así como dar un marco teórico mínimo en cuanto a herramientas que han de manejarse para comprender todo lo que se expondrá en el resto de los capítulos. A tales fines, se introducen algunas nociones elementales del análisis funcional, algunas referencias geométricas y del análisis convexo (capítulo 1), y luego se introduce la formulación del problema de separabilidad de estados cuánticos compuestos (capítulo 2).

El capítulo 3 introduce el estudio de los semigrupos dinámicos responsables de la evolución temporal. Luego de plantear la estructura general de estos semigrupos, el capítulo plantea el panorama general y las interrogantes que naturalmente surgen en asintótica, convergencia y estados estacionarios, mediante la presentación de algunos ejemplos.

El capítulo 4 se planteó con carácter exploratorio, es decir, consiste en una recopilación de una basta (y dispersa) colección de resultados generales existentes, y su reformulación en torno a una notación común. Además, se complementa con algunas demostraciones alternativas propias. Asimismo, se incluyen resultados propios que se orientan en la búsqueda de formas para simplificar o *reducir* la dinámica (al menos en lo que refiere a su asintótica).

El capítulo 5 analiza el caso particular en el que se asegura la existencia de una familia fiel de estados estacionarios. Sin entrar en detalles de lo que ello quiere decir matemáticamente, este caso tiene muchas particularidades, por las que merece un tratamiento separado. Además, desde un punto de vista físico, un estado fiel tendría como correlato el equilibrio termodinámico.

El capítulo 6 sirve de motivación para todo estudio realizado. Si bien el problema de separabilidad y entrelazamiento sigue siendo abierto, más complicado aún resultaría dar una caracterización acabada de la evolución del entrelazamiento. Por ello, en tal capítulo, nos remitiremos a plantear, con la ayuda de publicaciones ya existentes, el panorama general, y las posibles conexiones con el estudio de los semigrupos dinámicos.

El trabajo culmina con las conclusiones finales y se complementa con una serie de apéndices, en los que se incluyen algunas demostraciones y enunciados auxiliares. Asimismo, los apéndices C y E



presentan un estudio detallado de ciertos ejemplos, que si bien son de dimensión baja, ilustran una interesante variedad de situaciones. Recomendamos leer esos ejemplos en paralelo a los capítulos 4 y 5.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Punto de Partida

A continuación se exponen una serie de definiciones y enunciados elementales con el objeto de introducir al lector la notación empleada a lo largo del presente trabajo. Los detalles y demostraciones de tales enunciados pueden consultarse en [1], [2] y [3].

Como punto de partida debemos considerar:

1. Un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  separable (es decir, que exista una base ortonormal denumerable). Eventualmente podría ser de dimensión infinita, pero trabajaremos en dimensión **finita**.
2. El conjunto  $B(\mathcal{H})$  de operadores lineales acotados<sup>1</sup> (o continuos) de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{H}$ . Llamaremos a este conjunto como “observables”.
3. Funcionales lineales  $f : B(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ . En particular nos interesan los funcionales acotados (o continuos, lo cual resulta equivalente). El espacio de funcionales es el *dual* de  $B(\mathcal{H})$ .

**Definición 1.1.1.**  $A \in B(\mathcal{H})$  se dice acotado si:  $\sup_{\psi \in \mathcal{H}, \psi \neq 0} \|A\psi\|/\|\psi\|$  es finito. En tal caso, este número es la norma de  $A$ , y se denota  $\|A\|$ .

**Definición 1.1.2.**  $f$  funcional lineal se dice acotada si:  $\sup_{A \in B(\mathcal{H}), A \neq 0} |f(A)|/\|A\|$  es finito. En tal caso, este número es la norma de  $f$ , y se denota  $\|f\|$ .

**Teorema 1.1.1.** Si  $A \in B(\mathcal{H})$  entonces  $A$  acotado  $\Leftrightarrow A$  continuo.

Un resultado análogo también es cierto para funcionales lineales.

**Definición 1.1.3.** Una  $C^*$  álgebra  $\mathcal{A}$  está dada por:

1. Un álgebra lineal asociativa sobre el cuerpo de escalares complejos  $\mathbb{C}$ , es decir, un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$  con un producto (en principio no conmutativo) asociativo lineal en ambos factores.

---

<sup>1</sup>Automático en dimensión finita.

2. Una norma que satisface:

$$\|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0, \forall A \in \mathcal{A}$$

$$\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|, \forall A \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$$

por la cual el producto es continuo:

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|, \forall A, B \in \mathcal{A}$$

y  $\mathcal{A}$  es un espacio completo respecto a la topología definida por la norma.

3. Hay una involución  $*$  :  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  con:

$$(A + B)^* = A^* + B^*, (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*, (AB)^* = B^* A^*, (A^*)^* = A,$$

4. Se satisface la propiedad:

$$\|A^* A\| = \|A\|^2$$

$$\text{De aquí se obtiene: } \|A^*\| = \|A\|$$

De la definición anterior puede verse que  $B(\mathcal{H})$  es una  $C^*$  álgebra.

**Definición 1.1.4.**  $A \in B(\mathcal{H})$  es positivo (se denota  $A \geq 0$ ) si:  
 $\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq 0, \forall \Psi \in \mathcal{H}$ .

**Teorema 1.1.2.** Dado  $A \in B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $A \geq 0$

2.  $\exists B \in B(\mathcal{H})$  tal que  $B^* B = A$

3.  $\exists C = C^*$  tal que  $C^2 = A$ . En tal caso,  $C$  es único,  $C \geq 0$ , y  $C := \sqrt[2]{A}$ .

4.  $A = A^*$ ,  $\sigma(A) \subset [0, \infty)$ .

**Definición 1.1.5.**  $f$  funcional lineal es positivo si cumple:

$$f(A) \geq 0, \forall A \geq 0, A \in B(\mathcal{H}).$$

El siguiente enunciado nos asegura que toda sucesión creciente y acotada de operadores autoadjuntos es convergente:

**Teorema 1.1.3.** Dada una sucesión de operadores  $A_n \in B(\mathcal{H})$ ,  $A_n = A_n^*$ ,  $A_{n+1} - A_n \geq 0$ , y  $\exists C \in \mathbb{R}$  tal que  $\|A_n\| \leq C \forall n \in \mathbb{N}$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$  existe (en  $\|\cdot\|$ ) y es igual a  $B = \sup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ .

---

<sup>2</sup>El supremo de una sucesión de operadores se construye sobre la relación de orden  $C > D$  si  $C - D > 0$ . Ver Reed y Simon [1].

Será necesario establecer el concepto de Operadores Tipo Traza (que es Ideal en  $B(\mathcal{H})$ ):

**Definición 1.1.6** (Operadores Tipo Traza. Ideales (ver [5] y [1])). *Diremos que  $D$  es un Operador Tipo Traza (se denota  $D \in \tau(\mathcal{H})$ ) si  $\text{tr}|D| < \infty$ . Además  $\tau(\mathcal{H})$  es un Ideal en  $B(\mathcal{H})$ , ya que es un espacio vectorial y se verifica que si  $X \in B(\mathcal{H})$  y  $Z \in \tau(\mathcal{H})$ , entonces  $XZ \in \tau(\mathcal{H})$  y  $ZX \in \tau(\mathcal{H})$ .*

## 1.2 Estados

**Definición 1.2.1.** *Un estado es un funcional lineal  $f$  positivo y que cumple  $f(\mathbb{I}) = 1$ , donde  $\mathbb{I}$  es el operador Identidad. Denotaremos  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  como el conjunto de los estados.*

Es fácil verificar que  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  es un conjunto convexo. Esto se puede ver tomando  $A \in B(\mathcal{H})$ ,  $f, g \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,  $0 \leq t \leq 1$  definimos:  
 $[tf + (1-t)g](A) := tf(A) + (1-t)g(A)$   
 Este último es un funcional lineal (y acotado), positivo y normalizado (pues  $tf(\mathbb{I}) + (1-t)g(\mathbb{I}) = 1$ ). Luego es un estado y por lo tanto  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  es un conjunto convexo. Más aun, es cerrado respecto de  $\|\cdot\|$  definida en 1.1.2.

### 1.2.1 Ejemplos

1.  $f(A) := \langle \psi, A\psi \rangle$ , con  $\psi \in \mathcal{H}$ ,  $\|\psi\| = 1$ .

Queda claro que  $f$  es una funcional lineal. Está acotada pues:

$$|f(A)| \leq \|\psi\| \|A\psi\| \leq \|A\| \|\psi\|^2 = \|A\|$$

Luego como  $A$  es acotado,  $f$  también lo es.

Por otra parte,  $f$  es positiva y normalizada, ya que:

$$f(A) = f(B^*B) = \langle \psi, B^*B\psi \rangle = \|B\psi\|^2 \geq 0, \text{ donde hemos usado el teorema 1.1.2.}$$

$$f(\mathbb{I}) = \|\psi\|^2 = 1.$$

Diremos que  $f$  definida de esta forma es un estado Puro o Extremal. Está asociada a un subespacio unidimensional en  $\mathcal{H}$ .

2. Tomamos  $D \in B(\mathcal{H})$ ,  $D \geq 0$ ,  $\text{tr}(D) = 1$ . Es decir,  $D \in \tau(\mathcal{H})$ . Definimos el funcional:  
 $f(A) := \text{tr}(DA)$ ,  $\forall A \in B(\mathcal{H})$ .

- (a) En primer lugar, afirmamos que  $f$  está bien definida, en virtud de la definición 1.1.6. Cualquier operador (tenga o no traza), al multiplicarlo por  $D \in \tau(\mathcal{H})$  tiene traza bien definida.

- (b)  $f$  es lineal.

- (c)  $f$  es positivo, pues:

$$D \geq 0, A \geq 0 \Rightarrow \exists Y, X \in B(\mathcal{H}) \text{ tal que } D = X^*X \text{ y } A = Y^*Y$$

$$\text{tr}(AD) = \text{tr}(Y^*YX^*X) = \text{tr}(YX^*XY^*) = \text{tr}(\underbrace{(XY^*)^*(XY^*)}_{\geq 0}) \geq 0.$$

- (d)  $f(\mathbb{I}) = \text{tr}(\mathbb{I}D) = \text{tr}(D) = 1$ .

(e)  $f$  es acotada pues:  $|f(A)| = |tr(AD)| \leq \|A\| \|D\|_1 = \|A\|$ , donde hemos introducido la norma traza<sup>3</sup>.

Notar que si definimos  $D := |\psi\rangle\langle\psi| = P_\psi =$  proyector ortogonal sobre el subespacio unidimensional generado por  $\psi$ ; entonces el ejemplo 1 es un caso particular del ejemplo 2.

Llamaremos a toda  $D \in B(\mathcal{H})$ ,  $D \geq 0$ ,  $tr(D) = 1$  ( $D \in \tau(\mathcal{H})$ ), un *Operador Densidad*, y analogamente, via la identificación con matrices  $n \times n$  sobre  $\mathbb{C}$ :  $B(\mathcal{H}) \leftrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ , mencionaremos a  $D$  como *Matriz Densidad*.

Haciendo uso del teorema espectral, tenemos que:

$D = \sum_{j \geq 1} \lambda_j P_j$ , con  $\lambda_{j+1} \leq \lambda_j$ ,  $P_j P_k = \delta_{jk} P_k$ .  
 $\sum_{j (\lambda_j \neq 0)} P_j = S(D)$ , y  $rank(P_j) = 1$ , ( $S(D)$  es el Soporte de  $D$ ).  
 Entonces  $f(A) = \sum_{j \geq 1} \lambda_j f_j(A)$ , con  $f_j(A) = tr(AP_j)$ .

Luego hemos descompuesto un estado arbitrario como suma convexa de estados puros<sup>4</sup>.

Ligada al teorema 1.1.3 tenemos la siguiente definición:

**Definición 1.2.2.** *Un estado es Normal si cumple:  $f(\sup_n A_n) = \sup_n (f(A_n))$  para toda sucesión de operadores que satisfacen el teorema 1.1.3.*

A lo largo del presente trabajo, siempre se considerarán estados Normales. Esta hipótesis se cumple trivialmente en dimensión finita.

**Teorema 1.2.1** (Teorema Fundamental de Representación). *Todo estado normal es de la forma del ejemplo 2. Vale decir,  $\forall$  estado  $f$  normal,  $\exists D_f \in \tau(\mathcal{H})$ , con  $D_f \geq 0$ ,  $tr(D_f) = 1$  y se cumple que:*

$$f(A) = tr(D_f A), \quad \forall A \in B(\mathcal{H})$$

*La convexidad de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  es equivalente a la convexidad del conjunto de Matrices Densidad.*

$$\|f - g\| = \|D_f - D_g\|_1 = tr(|D_f - D_g|)$$

*Es decir, se tiene el siguiente isomorfismo:*

$$\mathcal{S}(\mathcal{H}) \cong \tau(\mathcal{H})_1^+, \quad \text{donde } \tau(\mathcal{H})_1^+ \text{ significa Operadores Tipo Traza positivos y de traza 1.}$$

Si bien es cierto que el espacio de Banach dado por  $(\tau(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$  tiene como dual continuo a  $(B(\mathcal{H}), \|\cdot\|)$ , en el caso particular de  $\mathcal{H}$  con dimensión infinita, existen funcionales lineales continuos sobre  $B(\mathcal{H})$  que no son de la forma  $\phi(A) = tr(DA) \quad \forall A \in B(\mathcal{H})$ .

### 1.3 proyectores y Soporte de un Estado

Sean  $p$  y  $q \in B(\mathcal{H})$  proyectores ortogonales<sup>5</sup>, es decir  $p = p^* = p^2$ , y  $q = q^* = q^2$ . Definimos la relación de orden:

**Definición 1.3.1.** *Dados dos proyectores  $p, q \in P(\mathcal{H})$  diremos  $p \leq q$  si  $pq = p$ .*

Dados  $p$  y  $q \in P(\mathcal{H})$ , existe un proyector ortogonal  $r \in B(\mathcal{H})$  tal que:

$p \geq r$ ,  $q \geq r$  y si  $s = s^* = s^2$  satisface  $p \geq s$ ,  $q \geq s$  entonces  $r \geq s$ . Se denota:  $r = p \wedge q$ .

La interpretación geométrica es que  $r$  proyecta a la intersección de los subespacios asociados con

<sup>3</sup>La norma traza se define por:  $\|X\|_1 = tr(|X|)$ . La desigualdad expuesta no es trivial, ver por ejemplo Strocchi [3]. El razonamiento a seguir es básicamente si  $\|A\|I - A \geq 0 \Rightarrow tr(\|A\|I - AD) \geq 0 \Rightarrow \|A\| \|D\|_1 - tr(AD) \geq 0$ .

<sup>4</sup>Sin embargo, dado un estado no puro, existen no denumerablemente infinitas formas de descomponerlo, una de las cuales es la espectral.

<sup>5</sup>Se escribe  $P(\mathcal{H})$  para los proyectores ortogonales de  $\mathcal{H}$  en  $\mathcal{H}$ .

los proyectores  $q$  y  $p$  (y naturalmente dicha intersección también es subespacio). Vale decir:  $r = \text{projector ortogonal al subespacio } \{\psi \in \mathcal{H} : p\psi = q\psi = \psi\}$

**Proposición 1.3.1** (Fórmula de von Neumann). *Si  $p$  y  $q$  son proyectores ortogonales, entonces:  $p \wedge q = s.\lim_{n \rightarrow \infty} (pqp)^n$ , i.e.  $\|(pqp)^n \psi - (p \wedge q)\psi\| \xrightarrow{(n \rightarrow \infty)} 0$*

**Proposición 1.3.2.** *Si  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , entonces  $\forall A, B \in B(\mathcal{H})$  se tiene:  $|\rho(A^*B)|^2 \leq \rho(A^*A) \rho(B^*B)$*

**Proposición 1.3.3.** *Si  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $p \in B(\mathcal{H})$ ,  $p = p^* = p^2$ ,  $\rho(p) = 1$ , entonces  $\forall A \in B(\mathcal{H})$  se tiene:  $\rho(Ap) = \rho(pA) = \rho(A)$ .*

**Corolario 1.3.1.** *Dados  $p = p^* = p^2$ ,  $q = q^* = q^2$  y  $\rho(p) = \rho(q) = 1$  entonces:  $\rho(p \wedge q) = 1$ .*

$$\begin{aligned} \text{Demostración. } \rho(p \wedge q) &\stackrel{1.3.1}{=} s.\lim_{n \rightarrow \infty} \rho((pqp)^n) = s.\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underbrace{pqp \ pqp \ pqp \ \dots \ pqp}_n) \\ &\stackrel{1.3.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underbrace{qp \ pqp \ pqp \ \dots \ pqp}_n) \stackrel{1.3.3}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underbrace{p \ pqp \ pqp \ \dots \ pqp}_n) \\ &\stackrel{1.3.3}{=} s.\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(\underbrace{pqp \ pqp \ \dots \ pqp}_{n-1}) = \dots = \rho(p) = 1 \end{aligned}$$

□

**Definición 1.3.2.** *Dado un estado  $\rho$ , entre todos los proyectores ortogonales en  $B(\mathcal{H})$ , hay uno llamado el soporte de  $\rho$ , que se denota  $s(\rho)$ , y que se define según:  $s(\rho) = \wedge \{p = p^* = p^2 / \rho(p) = 1\}$*

Esta definición es coherente con lo que ya adelantamos antes para Matrices Densidad. Es decir, si  $D \in B(\mathcal{H})_1^+$  está asociada al estado  $\rho$  entonces el soporte de tal estado es:

$$s(\rho) = \sum_{\lambda \in \sigma(D), \lambda \neq 0} P_\lambda$$

Adelantándonos a la definición de “estados producto”<sup>6</sup>, tenemos el siguiente lema:

**Lema 1.3.1** (Soporte de un Estado Producto).  $s(\rho \otimes \varphi) = s(\rho) \otimes s(\varphi)$

**Lema 1.3.2** (Soporte de una Combinación Convexa). *Dado  $0 \leq t \leq 1$ ,  $s(t\rho + (1-t)\varphi) = s(\rho) \vee s(\varphi) = 1 - [1 - s(\rho)] \wedge [1 - s(\varphi)]$*

Resulta útil disponer de ciertas herramientas geométricas, y algunas nociones que ya hemos introducido (como la convexidad y extremal). En tal sentido tenemos las siguientes definiciones<sup>7</sup>:

**Definición 1.3.3.** *Dado un conjunto  $X$  convexo, diremos que  $x \in X$  es un punto extremal de  $X$  si se tiene que  $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ , con  $y, z \in X$ ,  $0 < \lambda < 1 \implies y = z = x$ . Denotaremos a los puntos extremales de  $X$  como  $\text{ext}(X)$ .*

<sup>6</sup>Ver capítulo 2.

<sup>7</sup>Ver Asimov y Ellis [6].

**Definición 1.3.4.** *Un subconjunto convexo  $F$  de  $X$ , es una Cara si  $\forall x \in F$  con  $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ ,  $y, z \in X$ , entonces se tiene que  $y, z \in F$ . En otras palabras, una Cara es un conjunto estable bajo descomposición convexa.*

**Definición 1.3.5** (Cápsula Convexa). *Dado un conjunto convexo  $X$ , y  $B \subset X$  se define la cápsula convexa,  $co(B)$ , como el subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $B$  y es mínimo con esta propiedad. Es decir:*

*Si  $B \subset E$ ,  $E \subset X$ ,  $E$  convexo  $\Rightarrow co(B) \subset E$ .*

Si se dispone de una topología, se puede definir el  $\overline{co(B)}$ , la *Cápsula Convexa Cerrada*, que como su nombre lo indica, es el cierre de  $co(B)$  respecto a dicha topología.

**Teorema 1.3.1** (Krein-Milman). *Si  $X$  es un conjunto compacto convexo entonces  $X = \overline{co(ext(X))}$ . Además si  $X = co(Y)$ , con  $Y$  compacto, entonces  $ext(X) \subset Y$ .*

Es posible afirmar que existe una correspondencia 1 a 1 entre Caras de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  y Proyectores.

En efecto:

$F_p = \{f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) / f(p) = 1, p \in P(\mathcal{H})\}$  es un cara, pues:

Si  $f \in F_p$ ,  $0 < t < 1$ ,  $f = tg + (1 - t)h$ , con  $g, h \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

$$\Rightarrow f(p) = 1 = tg(p) + (1 - t)h(p)$$

$$\Rightarrow f(\mathbb{I} - p) = f(\mathbb{I}) - f(p) = 0 = \underbrace{tg(\mathbb{I} - p)}_{\geq 0} + \underbrace{(1 - t)h(\mathbb{I} - p)}_{\geq 0} \Rightarrow g(\mathbb{I} - p) = h(\mathbb{I} - p) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(p) = 1, h(p) = 1 \Rightarrow g, h \in F_p.$$

Está implícito en este razonamiento que  $F_{\mathbb{I}-p}$  también es una cara y que  $F_0 = \emptyset$ .

Llamaremos  $\varepsilon_p = \{\psi \in B(\mathcal{H}) / p\psi = \psi\}$  al subespacio unidimensional asociado con el proyector.

De acuerdo con la relación de orden establecida en la definición 1.3.1, si  $p \leq q$ , equivalentemente tendremos que  $\varepsilon_p \subseteq \varepsilon_q$ .

Si  $F$  es una cara en  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $p \in P(\mathcal{H})$  el proyector asociado a esta cara y  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$  entonces:  $f \in F \Leftrightarrow s(f) \leq p \Leftrightarrow R(D_f) \subseteq \varepsilon_p$ , donde  $R(D_f)$  es el espacio imagen (*Range*) de la matriz densidad  $D_f$ .

## Capítulo 2

# Nociones de Entrelazamiento y Separabilidad

Originalmente el Entrelazamiento fue descrito por Einstein, Podolsky y Rosen [8], como un fenómeno extraño de la mecánica cuántica, cuestionando la completitud de la teoría. Muchos años más tarde, y con el advenimiento de la Teoría de Información Cuántica, el Entrelazamiento se convirtió en un recurso para desarrollar una gran variedad de tareas y experimentos (ver, por ejemplo, [9]).

En este capítulo se presentará una breve y básica formulación matemática del tema.

### 2.1 Producto Tensorial de Espacios de Hilbert <sup>1</sup>

Dados dos espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  consideraremos el producto topológico  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$  consistente en los pares de vectores  $\{\psi_1, \psi_2\}$  con  $\psi_1 \in \mathcal{H}_1$  y  $\psi_2 \in \mathcal{H}_2$ . A partir de esto, definimos:

**Definición 2.1.1.** *Dados  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$  espacios de Hilbert, para cada  $\phi_1 \in \mathcal{H}_1$ ,  $\phi_2 \in \mathcal{H}_2$  denotaremos  $\phi_1 \otimes \phi_2$  a la forma bilineal conjugada que actúa sobre  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$  en la forma:*

$$(\phi_1 \otimes \phi_2)(\psi_1, \psi_2) = \langle \psi_1, \phi_1 \rangle_1 \langle \psi_2, \phi_2 \rangle_2.$$

*El subíndice  $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$  en el segundo miembro de la igualdad anterior significa que el producto interno considerado es el correspondiente a cada espacio de Hilbert ( $i = 1, 2$ ).*

*Supongamos  $\mathcal{E}$  sea el conjunto de las combinaciones lineales finitas de tales formas bilineales conjugadas, definimos un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sobre  $\mathcal{E}$  de la siguiente manera:*

$$\langle \phi \otimes \psi, \eta \otimes \mu \rangle = \langle \phi, \eta \rangle_1 \langle \psi, \mu \rangle_2$$

*y extendemos por linealidad sobre  $\mathcal{E}$ .*

**Definición 2.1.2.** *Definimos el producto de tensorial de  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , denotado por  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ , como aquel espacio de Hilbert obtenido al completar  $\mathcal{E}$  respecto a la norma asociada al producto interno definido en 2.1.1.*

Si  $\{\phi_k\}$  y  $\{\psi_l\}$  son bases ortonormales para  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , entonces  $\{\phi_k \otimes \psi_l\}$  es una base ortonormal para  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ .

La extensión de lo dicho para el producto tensorial de  $n$  espacios de Hilbert es inmediata.

---

<sup>1</sup>Vease Reed y Simon [1].



## 2.2 Producto Tensorial de Operadores

Supongamos  $A$  y  $B$  son operadores definidos sobre los espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , cuyos dominios son  $D(A)$  y  $D(B)$ , respectivamente. En primer lugar vamos a denotar  $D(A) \otimes D(B)$  como el conjunto de las combinaciones lineales finitas de vectores de la forma  $\phi \otimes \psi$ , donde  $\phi \in D(A)$  y  $\psi \in D(B)$ . Definimos  $A \otimes B$  sobre  $D(A) \otimes D(B)$  de la siguiente manera:

$$(A \otimes B)(\phi \otimes \psi) = A\phi \otimes B\psi$$

y extendemos por linealidad.

Entonces tenemos:

**Definición 2.2.1.** *Dados  $A$  y  $B$  dos operadores sobre espacios de Hilbert  $\mathcal{H}_1$  y  $\mathcal{H}_2$ , el producto tensorial de  $A$  y  $B$  es la clausura del operador  $A \otimes B$  sobre  $D(A) \otimes D(B)$  (y se denota de la misma forma:  $A \otimes B$ ). Además, usualmente  $A + B$  denotará la clausura de  $A \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_1 \otimes B$  sobre  $D(A) \otimes D(B)$ .*

## 2.3 Estados Marginales y Estados Producto

Por simplicidad, continuaremos trabajando con sistemas bipartitos, es decir, el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  considerado será el producto tensorial de otros dos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

Tendremos entonces el conjunto  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  de estados sobre  $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$ <sup>2</sup>.

Introducimos ahora el concepto de “estado marginal”. A partir de un estado en  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , se obtienen dos estados, cada uno de los cuales pertenece a  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$  y  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  respectivamente.

**Definición 2.3.1** (Estados Marginales). *Dado un estado  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , se definen:*

$$f^{(1)}(C) := f(C \otimes \mathbb{I}), \quad \forall C \in B(\mathcal{H}_1).$$

$$f^{(2)}(D) := f(\mathbb{I} \otimes D), \quad \forall D \in B(\mathcal{H}_2).$$

Naturalmente, las funcionales así definidas son estados en  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$  y  $\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  respectivamente<sup>3</sup>.

Es importante recalcar que  $f^{(1)}$  y  $f^{(2)}$  NO determinan a  $f$  unívocamente. Es decir, dados  $g \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$  y  $h \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$ , existen infinitos estados  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  tal que  $f^{(1)} = g$  y  $f^{(2)} = h$ .

**Definición 2.3.2** (Estado Producto). *Dado  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  diremos que es Estado Producto si:*

$$f(C \otimes D) = f(C \otimes \mathbb{I})f(\mathbb{I} \otimes D), \quad \forall C \in B(\mathcal{H}_1), \quad \forall D \in B(\mathcal{H}_2).$$

Es decir,  $f(C \otimes D) = f^{(1)}(C)f^{(2)}(D)$ .

**Lema 2.3.1.** *Si  $g \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$  y  $h \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  entonces existe un único  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  que es estado producto y que satisface  $f^{(1)} = g$  y  $f^{(2)} = h$ . Se denota:  $f = g \otimes h$ .*

El enunciado anterior resulta natural al considerar la acción del objeto  $g \otimes h$ :

$$(g \otimes h)(\sum_j A_j \otimes B_j) := \sum_j g(A_j)h(B_j)$$

<sup>2</sup>Existe el isomorfismo  $B(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2) \cong B(\mathcal{H}_1) \otimes B(\mathcal{H}_2)$ .

<sup>3</sup>La positividad, por ejemplo, es fácilmente verificable:  $f^{(1)}(A^*A) = f(A^*A \otimes \mathbb{I}) = f(\underbrace{(A \otimes \mathbb{I})^*(A \otimes \mathbb{I})}_{\geq 0}) \geq 0$ .

extendiendo por continuidad a ambos miembros.

Observaciones:

1. El conjunto de los estados producto se denotará por  $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$ .

2.  $f \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}) \Leftrightarrow f = f^{(1)} \otimes f^{(2)}$ .

3.  $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$  no es un conjunto convexo.

Vale decir, si  $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1)$  y  $g_1, g_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2)$  entonces el estado definido como la combinación convexa:  $\phi = t \underbrace{f_1 \otimes g_1}_{\in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})} + (1-t) \underbrace{f_2 \otimes g_2}_{\in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})}$ , con  $0 \leq t \leq 1$ , no necesariamente es un

estado producto.

En efecto:

$$\begin{aligned} \phi(A \otimes B) - \phi^{(1)}(A) \phi^{(2)}(B) &= \\ &= t (f_1 \otimes g_1)(A \otimes B) + (1-t) (f_2 \otimes g_2)(A \otimes B) - \{ t (f_1 \otimes g_1)(A \otimes \mathbb{I}) + (1-t) (f_2 \otimes g_2)(A \otimes \mathbb{I}) \} \cdot \{ t (f_1 \otimes g_1)(\mathbb{I} \otimes B) + (1-t) (f_2 \otimes g_2)(\mathbb{I} \otimes B) \} \\ &= \dots = t(1-t) [f_1(A) - f_2(A)] \cdot [g_1(B) - g_2(B)] \end{aligned}$$

Esta última expresión es cero (lo cual significaría que  $\phi \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$ ) si se cumple alguna de las siguientes situaciones:

(a)  $t = 0$ . Caso trivial.

(b)  $t = 1$ . Caso trivial.

(c)  $f_1 = f_2$ . En este caso  $\phi = f \otimes [t g_1 + (1-t) g_2]$ .

(d)  $g_1 = g_2$ . En este caso  $\phi = [t f_1 + (1-t) f_2] \otimes g$ .

Por lo tanto, exceptuando esas situaciones triviales (en las que  $\phi$  de entrada ya es estado producto), una combinación convexa de estados producto no es estado producto.

Consideremos, por ejemplo, el estado puro  $f_\psi(C) := \langle \psi, C\psi \rangle$ , con  $\psi = \psi_1 \otimes \psi_2$ . En esta situación  $f_\psi \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$ , es decir:  $f_\psi(C \otimes D) = f_\psi^{(1)}(C) f_\psi^{(2)}(D)$ .

Sin embargo, cuando definimos  $f_\psi$  de la misma manera pero con:

$\psi = m_1 \psi_1 \otimes \psi_2 + m_2 \varphi_1 \otimes \varphi_2$  resulta imposible afirmar que  $f_\psi$  sea estado producto para una elección arbitraria de  $m_1, m_2, \psi_1, \psi_2, \varphi_1, \varphi_2$ .

4.  $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$  es un conjunto cerrado. Naturalmente,  $\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$ .

5. Desde un punto de vista físico, un estado producto no muestra correlación entre los subsistemas 1 y 2. En tal caso, el estado  $f$  del sistema compuesto puede reconstruirse a partir de los estados marginales.

Dado un sistema compuesto, en algún estado, al medir las observables  $C$  y  $D$  sobre el mismo, lo mejor que podemos hacer es reconstruir un estado producto, que no necesariamente sea el estado real del sistema compuesto.

## 2.4 Estados Separables y Estados Entrelazados

Supongamos ahora que tenemos algún vector  $\psi \in \mathcal{H}$ , escrito en la forma:  $\sum_{j,k} \gamma_{jk} (\zeta_j \otimes \eta_k)$ .

Diremos que  $\psi$  es separable si factoriza, es decir:  $\gamma_{jk} = \alpha_j \cdot \beta_k$ .

**Definición 2.4.1.** *Un estado  $f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2)$  es separable si es límite de sumas convexas de estados producto. Es decir:*

$$\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H}) = \overline{\text{co}(\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}))}^{\|\cdot\|}$$

donde hemos usado la definición 1.3.5 y estamos tomando el cierre o clausura respecto a la métrica asociada a la norma de funcionales lineales continuos <sup>4</sup>.

Dicho “límite de sumas convexas” queda más claro con el lema y el comentario siguientes:

**Lema 2.4.1.** *Si  $t_j \geq 0 \forall j$ ,  $\sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1$  y  $\{f_j\} \subset \mathcal{S}(\mathcal{H})$  entonces:  $\sum_{j=1}^{\infty} t_j f_j$  existe en  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  como límite en  $\|\cdot\|$ .*

Haciendo uso de este lema, podemos usar la notación:

$$\sigma - \text{co}(\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} t_j f_j \mid \sum_{j=1}^{\infty} t_j = 1, t_j \geq 0, f_j \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}) \right\}.$$

Y entonces:

$$\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H}) = \overline{\text{co}(\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}))}^{\|\cdot\|} = \sigma - \text{co}(\mathcal{S}_\pi(\mathcal{H}))$$

Observaciones:

1.  $f \in \text{ext}(\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})) \Leftrightarrow f \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$ , y  $f^{(1)}, f^{(2)}$  son puros.

2. Si:

$$f = \sum_{j=1}^N t_j g_j \otimes h_j, \text{ con: } g_j \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_1), h_j \in \mathcal{S}(\mathcal{H}_2), \text{ dados por:}$$

$$g_j = \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(j)} \zeta_{\mu}^{(j)}, \quad \zeta_{\mu}^{(j)} \in \text{ext}(\mathcal{S}(\mathcal{H}_1)) \text{ (i.e. puro),}$$

$$h_j = \sum_{\nu} \beta_{\nu}^{(j)} \eta_{\nu}^{(j)}, \quad \eta_{\nu}^{(j)} \in \text{ext}(\mathcal{S}(\mathcal{H}_2)) \text{ (i.e. puro),}$$

Entonces:

$$f = \sum_{j,\mu,\nu} \alpha_{\mu}^{(j)} \beta_{\nu}^{(j)} t_j \underbrace{(\zeta_{\mu}^{(j)} \otimes \eta_{\nu}^{(j)})}_{\text{extremales}} \in \mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$$

hemos escrito a  $f$  como combinación convexa de extremales (estados puros).

Habiendo ya definido los estados separables, basta decir:

**Definición 2.4.2.** *Todo estado que no es separable, es entrelazado.*

## 2.5 Correlato en Matrices Densidad

Teniendo presente el teorema de representación 1.2.1, planteamos brevemente la separabilidad de estados en términos de las correspondientes matrices densidad.

<sup>4</sup> $d(f, g) = \|f - g\|$ ,  $\forall f, g$  funcionales lineales continuos.

Un estado  $f \in \mathcal{S}_\pi(\mathcal{H})$  se corresponde al operador densidad  $D \in \tau(\mathcal{H})_1^+$  de la forma:  $D = D_1 \otimes D_2$ ,  $D_j \in \tau(\mathcal{H}_j)_1^+$ .

Un estado es separable si su matriz densidad es de la forma:

$$\sum_j t_j D_1^{(j)} \otimes D_2^{(j)}, \quad \text{con: } D_k^{(j)} \in \tau(\mathcal{H}_k)_1^+, \quad \sum_j t_j = 1.$$

Y además:

$$\overline{\text{co}(\{D_1 \otimes D_2 / D_j \in \tau(\mathcal{H}_j)_1^+\})}^{\|\cdot\|} = \sigma - \text{co}(\{D_1 \otimes D_2 / D_j \in \tau(\mathcal{H}_j)_1^+\}).$$

## 2.6 Algunos criterios de separabilidad para casos bipartitos

Continuaremos pensando en sistemas compuestos por dos subsistemas, que ahora llamaremos A y B ( $\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ ). Si bien la pregunta acerca de si un dado estado de un sistema compuesto es separable o entrelazado sigue siendo abierta (ver por ejemplo Raggio [10]), existen algunos criterios útiles para detectar entrelazamiento o separabilidad en ciertos casos. Haciendo uso de la recopilación publicada por Horodecki *et al.* [11], expondremos algunos de tales criterios.

El enunciado de los criterios se establece sobre matrices densidad.

### 2.6.1 Criterio de la “traspuesta parcial positiva” (PPT)<sup>5</sup>

Este criterio establece que si el estado  $\varrho_{AB}$  es separable, entonces la nueva matriz  $\varrho_{AB}^\Gamma$  cuyos elementos de matriz están definidos (en alguna base producto) según:

$$\langle m | \langle \mu | \varrho_{AB}^\Gamma | n \rangle | \nu \rangle := \langle m | \langle \nu | \varrho_{AB} | n \rangle | \mu \rangle$$

es una matriz densidad; es decir,  $\varrho_{AB}^\Gamma$  es también un estado.

La operación  $\Gamma$  es una forma de representar  $T_B$ , es decir, la trasposición de índices correspondientes al segundo subsistema (de aquí el nombre del criterio).

El criterio PPT es condición necesaria y suficiente para la separabilidad en los casos  $2 \otimes 2$  y  $2 \otimes 3$ .

### 2.6.2 Mapas Positivos pero no Completamente Positivos

Introducimos primero el concepto de mapa completamente positivo (CP):

**Definición 2.6.2.1.** Sea  $\gamma : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$  un mapa positivo. Consideremos  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  (matrices cuadradas sobre  $\mathbb{C}$ ), además de  $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) : z_j \in \mathbb{C}\}$ , y la relación de equivalencia<sup>6</sup>  $B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n) \cong B(\mathcal{H}) \otimes \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \cong \mathbb{M}_n(B(\mathcal{H}))$ .

Tomemos los mapas:  $\gamma \otimes \mathbb{I}_n : B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n) \rightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$ . Este mapa actúa en la forma:  $(\gamma \otimes \mathbb{I})(\sum_n A_n \otimes B_n) := \sum_n \gamma(A_n) \otimes B_n$ .

Diremos que  $\gamma$  es  $n$ -positivo si el mapa  $\gamma \otimes \mathbb{I}_n : B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n) \rightarrow B(\mathcal{H} \otimes \mathbb{C}^n)$  es positivo. Diremos que  $\gamma$  es Completamente Positivo (denotado como C.P.) si  $\gamma$  es  $n$ -positivo  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

El estado  $\varrho_{AB}$  es separable si y sólo si la condición  $[\mathbb{I}_A \otimes \Lambda_B] \varrho_{AB} \geq 0$  se satisface para todo mapa  $\Lambda$  positivo (P) pero no completamente positivo (CP), donde  $\Lambda : B(\mathcal{H}_B) \rightarrow B(\mathcal{H}_A)$ , con  $\mathcal{H}_A$ ,  $\mathcal{H}_B$  los espacios de Hilbert correspondientes a los subsistemas A y B respectivamente.

<sup>5</sup>Desarrollado por Asher Peres, 1996.

<sup>6</sup>Tal equivalencia debe leerse cuidadosamente, pues el primer producto tensorial es distinto al segundo.

### 2.6.3 Separabilidad por testigo de entrelazamiento

Los “testigos de entrelazamiento” son observables que caracterizan completamente a un estado separable y permiten detectar el entrelazamiento físicamente.

El estado  $\varrho_{AB}$  será separable si se verifica que  $\text{tr}(W\varrho_{AB}) \geq 0$  para todos los observables  $W$  que cumplen:

1. tienen al menos un autovalor negativo,
2. tienen valor medio no negativo sobre estados producto, es decir, satisfacen la condición  $\langle \psi_A | \langle \phi_B | W | \psi_A \rangle | \phi_B \rangle \geq 0$ , para todo estado producto puro  $|\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\phi_B\rangle\langle\phi_B|$ .

## Capítulo 3

# Semigrupos Dinámicos

En este capítulo presentaremos el estudio de los semigrupos de la Dinámica Cuántica desde dos enfoques equivalentes. En términos simples, estos enfoques están dados por las *Imágenes* de la Dinámica Cuántica: Schrödinger y Heisenberg. En la primera, la evolución corresponde a los estados (con observables “estáticos”), y en la segunda, la evolución recae sobre las observables. Usaremos indistintamente ambas “imágenes”.

### 3.1 Imagen de Heisenberg

Si pensamos que los operadores en  $B(\mathcal{H})$  (i.e. las observables) son los que evolucionan, la dinámica está dada por un semigrupo  $\alpha_t : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{H})$  que satisface:

1.  $\alpha_s \alpha_t(A) = \alpha_{t+s}(A)$ ,  $\forall A \in B(\mathcal{H})$ ,  $s, t \geq 0$
2.  $\alpha_t(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$ ,  $\forall t \geq 0$
3.  $\alpha_t$  es Completamente Positivo.
4.  $\alpha_t$  es normal, es decir,  $\alpha_t(\sup(a_n)) = \sup(\alpha_t(a_n))$
5.  $\alpha_t$  es un mapa continuo en  $t = 0$ .

Para la tercera condición, conviene tener presente la definición 2.6.2.1 de mapas Completamente Positivos.

### 3.2 Imagen de Schrödinger

Dado  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , definimos el semigrupo dinámico  $\nu_t$  como una familia de operadores lineales mono-parametrizados  $\nu_t : \mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , definidos  $\forall t \geq 0$ , y que satisfacen:

1.  $\text{tr}[\nu_t \rho] = \text{tr}[\rho]$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $t \geq 0$
2.  $\nu_s \nu_t \rho = \nu_{t+s} \rho$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $s, t \geq 0$
3.  $\lim_{t \rightarrow 0} \|\nu_t \rho - \rho\| = 0$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$

La primera condición está ligada a la conservación de probabilidad. La segunda se conoce como Condición de Markov. La tercera asegura la continuidad en  $t = 0$ , y por lo tanto para todo  $t \geq 0$  (haciendo uso de la segunda condición).

A las anteriores debe agregarse una cuarta condición, de modo tal que se incluya la completa positividad del semigrupo. En la imagen de Schrödinger formular esta condición resulta algo complicado, por lo que pediremos simplemente que el dual continuo del semigrupo  $\nu_t$  (i.e.  $\alpha_t$ ) sea un mapa completamente positivo.<sup>1</sup>

### 3.3 Equivalencia

Tal como ya se dijo, los estados son elementos del dual de  $B(\mathcal{H})$ . Es decir,  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  es un espacio de Banach que expande linealmente al predual de  $B(\mathcal{H})$ . Usando que la dimensión es finita, la propiedad de reflexividad asegura que, uno es dual del otro y que cada uno es el doble dual de sí mismo. Por lo tanto, el trabajo en cualquiera de las dos Imágenes, en tal sentido resulta equivalente<sup>2</sup>.

En tal sentido,  $\alpha_t = \nu_t'$  y se tiene que  $(\nu_t \rho)(A) = \rho(\alpha_t A)$ ,  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $\forall A \in B(\mathcal{H})$ . Haciendo uso de la identificación entre estados y matrices densidad expuesta en el teorema 1.2.1, podemos expresar la dinámica de Schrödinger en la forma:

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_t : D \in B(\mathcal{H})_1^+ &\rightarrow B(\mathcal{H})_1^+ \\ \text{tr}(\bar{\nu}_t(D)A) &= \text{tr}(D\alpha_t(A)), \quad \forall A \in B(\mathcal{H}), \quad D \in B(\mathcal{H})_1^+ \end{aligned}$$

### 3.4 Generadores de Dinámica

Hacia la década de 1970 se sabía que para una dinámica reversible<sup>3</sup>  $\alpha_t$  que satisface las condiciones expuestas en la sección 3.1, y que además cumple con:

$$\alpha_t(AB) = \alpha_t(A)\alpha_t(B) \quad (3.1)$$

la forma del generador estaba dada por:

$$L(A) = -i[A, H], \quad H = H^* \quad (3.2)$$

Y por lo tanto:

$$\dot{\alpha}_t(A) = L(\alpha_t(A)) = \alpha_t(L(A)) \quad (3.3)$$

$$\Rightarrow \alpha_t(A) = u_t^* A u_t, \quad u_t = e^{-itH} \quad (3.4)$$

En 1976, Gorini, Kossakowski y Sudarshan [12], y de manera simultánea, Lindblad [13], expusieron la forma general de los generadores de los semigrupos dinámicos completamente positivos. En tal situación, la dinámica no necesariamente cumple la expresión (3.1), y el generador tiene una parte reversible (o “hamiltoniana”) y una parte irreversible. Una forma de escribir los generadores

<sup>1</sup>Podríamos haber omitido esta sección y simplemente definir la evolución de  $\nu_t$  usando que es el predual de  $\alpha_t$  (i.e.,  $\alpha_t = \nu_t'$ ). En tal caso,  $\nu_t(\rho) := \rho \circ \alpha_t$ .

<sup>2</sup>El trasfondo de las Imágenes radica en la *dualidad*, que es un tema elemental en el álgebra lineal. Ver, por ejemplo, [1], [7].

<sup>3</sup>En general, la teoría de sistemas cuánticos abiertos hasta esa época puede estudiarse desde el texto de Davies [4].

en ambas Imágenes es la siguiente:

$$L(\cdot) = i[H, \cdot] + \sum_j (V_j^* \cdot V_j - \frac{1}{2}[V_j^* V_j, \cdot]_+) \quad (3.5)$$

$$\mathcal{L}(\cdot) = -i[H, \cdot] + \sum_j (V_j \cdot V_j^* - \frac{1}{2}[V_j^* V_j, \cdot]_+) \quad (3.6)$$

donde  $[\cdot, \cdot]_+$  denota el anticonmutador.

La separación entre partes reversibles e irreversibles no es única y por lo tanto conviene generalizar aún más la forma del generador. Por ello, a continuación, reacomodando algunos términos, se presenta una notación ligeramente distinta:

$$L(A) = Y^* A + A Y + \sum_{j \geq 1} V_j^* A V_j \quad (3.7)$$

$$\mathcal{L}(\varrho) = \varrho Y^* + Y \varrho + \sum_{j \geq 1} V_j \varrho V_j^* \quad (3.8)$$

aquí  $\varrho$  representa una matriz densidad (en adelante no distinguiremos entre  $\bar{\nu}_t$  y  $\nu_t$ ) y la conexión con las expresiones (3.5) y (3.6) viene dada por:

$$Y = -\frac{1}{2} \sum_{j \geq 1} V_j^* V_j - i H \quad (3.9)$$

Como ya dijimos, el operador  $\alpha_t$  es el dual de  $\nu_t$ . Podemos mostrar ahora explícitamente que una evolución es la *adjunta* o *dual* de la otra. Para ello, tomamos el espacio vectorial de las matrices, y lo dotamos con un producto interno  $\langle \sigma | \rho \rangle = \text{tr}[\sigma^* \rho]$  (Hilbert-Schmidt). Luego (aplicando en la tercera igualdad la invariancia de la traza ante permutaciones cíclicas):

$$\begin{aligned} \langle C | L(D) \rangle &= \text{tr}[C^* (Y^* D + D Y + \sum_{j \geq 1} V_j^* D V_j)] \\ &= \text{tr}[(C^* Y^* D + C^* D Y + \sum_{j \geq 1} C^* V_j^* D V_j)] \\ &= \text{tr}[(C^* Y^* D + Y C^* D + \sum_{j \geq 1} V_j C^* V_j^* D)] \\ &= \text{tr}[(C^* Y^* + Y C^* + \sum_{j \geq 1} V_j C^* V_j^*) D] \\ &= \text{tr}[\mathcal{L}(C^*) D] \\ &= \text{tr}[(\mathcal{L}(C))^* D] \\ &= \langle \mathcal{L}(C) | D \rangle \end{aligned}$$



### 3.5 Estados Estacionarios y Asintótica: Introducción

El propósito esencial del resto de este capítulo radica en plantear un panorama que sirva de motivación para el estudio de la asintótica y estados estacionarios de la dinámica.

Los siguientes capítulos, se centrarán en explorar de manera sistemática los enunciados en cuanto a la existencia y caracterización de estados estacionarios, su rol como atractores en la dinámica y la convergencia (o no) hacia los atractores.

Debe tenerse presente que, tal como se dijo en el primer capítulo, se trabaja bajo la hipótesis de Normalidad. Además, si bien gran parte de los resultados que se expondrán son válidos en dimensión infinita, reiteramos que en general nuestra hipótesis de trabajo será dimensión finita.

Conviene aclarar también, que casi nada podría decirse si la dinámica fuera “puramente hamiltoniana” (es decir, sin partes irreversibles). Una dinámica reversible (pensando en un sistema cerrado), por su comportamiento asintótico cuasi periódico, no resulta de interés a los fines del presente trabajo.

Por lo tanto, nuestro panorama se constituye por sistemas abiertos, con dinámicas cuyos generadores están dados por las expresiones (3.5) y (3.6) (o equivalentemente (3.7) y (3.8)).

La ecuación de movimiento que se plantea es la siguiente:

$$\partial_t(\nu_t(\rho)) = \mathcal{L}(\nu_t(\rho)) \quad (3.10)$$

Un estado  $\rho$  será estacionario<sup>4</sup> si se cumple:

$$\mathcal{L}(\rho) = 0 \quad (3.11)$$

Análogamente, en la imagen de Heisenberg, los puntos fijos quedan definidos por:

$$L(A) = 0 \quad (3.12)$$

Llamaremos  $\mathcal{F}(\alpha)$  al conjunto de invariantes en la dinámica Heisenberg y  $\mathcal{F}(\nu)$  denotará el conjunto de estados estacionarios (dinámica Schrödinger).

La construcción de  $\mathcal{F}(\nu)$ , de acuerdo con (3.11), se reduce a encontrar la intersección entre el *kernel* de  $\mathcal{L}$  y el conjunto de estados  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ . En el apéndice C se presenta un estudio explícito de casos simples, en los que se exponen los conjuntos  $\mathcal{F}(\nu)$ .

La primer interrogante que nos podemos plantear radica en que si, dada la dinámica (es decir, alguien nos entregó un generador) y dado un estado inicial  $\rho^{(0)}$ , ¿existirá o no un estado final “límite”  $\rho^{(\infty)}$ ? (y que evidentemente sería un estado independiente del tiempo). De aquí se desprenden otras preguntas: ¿hay un único estado final -estacionario- posible? ¿cómo se relaciona  $\rho^{(\infty)}$  con las propiedades del generador? ¿en qué medida el estado final depende del estado inicial?.

Comenzamos con una caracterización de las posibles situaciones que se pueden plantear<sup>5</sup>:

1. El semigrupo es “única o genuinamente relajante” si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\rho)$  existe siempre, y no depende del estado inicial  $\rho^{(0)}$ .

Expondremos un ejemplo. Consideremos el generador escrito de acuerdo a la expresión (3.6), y por simplicidad pensamos en sumas donde hay un sólo  $V_j$  no nulo, y la parte Hamiltoniana es nula:<sup>6</sup>

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<sup>4</sup>Usaremos indistintamente los términos *estacionario* e *invariante*. También usaremos el término *punto fijo* para referirnos a un invariante, por lo general en la imagen de Heisenberg.

<sup>5</sup>Tal panorama es planteado por Lendi (ver [14] y [15]), y similares situaciones presenta Groh (ver [21]).

<sup>6</sup>Esto se conoce como “generadores simples”.

Fácilmente se resuelve la ecuación de movimiento, obteniéndose:

$$\begin{aligned}\rho_{2,2}(t) &= [\rho_{3,3}(0)t + \rho_{2,2}(0)]e^{-t} \\ \rho_{3,3}(t) &= \rho_{3,3}(0)e^{-t} \\ \rho_{1,1}(t) &= -\rho_{2,2}(t) - \rho_{3,3}(t) + 1 \\ \overline{\rho_{2,1}(t)} &= \rho_{1,2}(t) = -2\rho_{2,3}(0)e^{-t} + [\rho_{1,2}(0) + 2\rho_{2,3}(0)]e^{-\frac{t}{2}} \\ \overline{\rho_{3,1}(t)} &= \rho_{1,3}(t) = \rho_{1,3}(0)e^{-\frac{t}{2}} \\ \overline{\rho_{3,2}(t)} &= \rho_{2,3}(t) = \rho_{2,3}(0)e^{-t}\end{aligned}$$

El comportamiento asintótico está dado por:

$$\rho(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \rho_{\infty} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Evidentemente, estado final resulta independiente de  $\rho(0)$ .

- El semigrupo es “relajante” si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\rho)$  existe siempre, pero depende del estado inicial  $\rho^{(0)}$ .

El ejemplo que daremos también se corresponde con un generador simple, donde establecemos:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La dependencia en las condiciones iniciales se ve explícitamente, en la siguiente situación. Tomamos dos estados iniciales diferentes  $\rho^I(0)$  y  $\rho^{II}(0)$ :

$$\begin{aligned}\rho^I(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \rho^I(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \rho^{II}(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \rho^{II}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

- El semigrupo es “parcialmente relajante” si  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\rho)$  no existe, pero existe una descomposición en términos de dos proyectores ortogonales  $P$  y  $Q$ , ( $P + Q = \mathbb{I}$ ) tal que:  $\lim_{t \rightarrow \infty} Q\nu_t(\rho)Q = \rho^{[Q]}$  y  $P\nu_t(\rho)P \rightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \nu_t(\rho)^{[P]}$  donde  $\nu_t(\rho)^{[P]}$  es una matriz cuyos elementos no nulos son funciones puramente periódicas del tiempo.

El ejemplo que planteamos en este caso es el siguiente:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La integración del sistema da por resultado:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{1,1}(0)}{\rho_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}}} & \rho_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}} & \rho_{1,3}(0)e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \\ \frac{\rho_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}}}{\rho_{1,3}(0)e^{(-\frac{1}{2}-i)t}} & \frac{\rho_{2,2}(0)}{\rho_{2,3}(0)e^{-it}} & \rho_{2,3}(0)e^{it} \\ \rho_{1,3}(0)e^{(-\frac{1}{2}-i)t} & \rho_{2,3}(0)e^{-it} & \rho_{3,3}(0) \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \begin{pmatrix} \rho_{1,1}(0) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{2,2}(0)}{\rho_{2,3}(0)e^{-it}} & \rho_{2,3}(0)e^{it} \\ 0 & \rho_{2,3}(0)e^{-it} & \rho_{3,3}(0) \end{pmatrix}$$

Obteniendo entonces un bloque unidimensional estacionario y un bloque bidimensional con componentes oscilatorias en el tiempo (i.e. el límite no existe).

Si bien los ejemplos expuestos están muy lejos de corresponderse con algún fenómeno físico, se presentaron para que el lector se convenza de que la pregunta, acerca de la asintótica de la dinámica, resulta altamente no trivial.

Evidentemente, una posible vía para atacar el problema consiste en resolver directamente la ecuación de autovalores correspondiente:  $\mathcal{L}x = \lambda x$ . En tal caso, si  $Re(\lambda) < 0$ , podríamos asegurar que el sistema es relajante. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que para un sistema  $N$ -dimensional, el problema anterior tiene dimensionalidad  $N^2$ , y esto eventualmente traería complicaciones de cálculo a medida que el sistema es mayor.

Nos interesa entonces encontrar condiciones simples (por ejemplo estudiando alguna propiedad del generador) que nos permitan inferir alguna (o parte) de las respuestas a las preguntas que hemos planteado.

En tal sentido, una manera didáctica de comenzar el estudio de los invariantes y la asintótica de estos semigrupos dinámicos, radica en el análisis de la forma más simplificada del generador, conocida como *Generadores Simples*. Como ya advertimos antes, la expresión que adoptarían sería la siguiente:

$$L(A) = V^*AV - \frac{1}{2}(V^*VA + AV^*V) \quad (3.13)$$

$$\mathcal{L}(\varrho) = V\varrho V^* - \frac{1}{2}(V^*V\varrho + \varrho V^*V) \quad (3.14)$$

En el apéndice B presentamos una síntesis de resultados acerca de los generadores simples, en los que es posible hacer algunas afirmaciones con base a un análisis espectral. En el apéndice C se expone un estudio y cálculo explícito de la dinámica para tales generadores, en casos de dimensión baja<sup>7</sup>.

Si bien los generadores simples constituyen una fuente de ejemplos para muchas situaciones, no son demasiado interesantes, habida cuenta de su estructura por demás simplificada. Queremos apuntar a criterios generales que nos permitan decir algo respecto de la asintótica y estados estacionarios. Adelantándonos al próximo capítulo, exponemos uno de tales criterios o afirmaciones (que históricamente resulta ser uno de los primeros establecidos).

Una condición suficiente para el que semigrupo sea genuinamente relajante fue establecida por Spohn en 1976 (ver [16]). Para enunciar la condición se hace necesario reescribir el generador de la siguiente manera (*forma normal de Kossakowski*<sup>8</sup>):

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^M a_{ik} ([F_i, \rho F_k^*] + [F_i \rho, F_k^*]) \quad (3.15)$$

<sup>7</sup>Se recomienda leer los próximos capítulos en paralelo a tales ejemplos.

<sup>8</sup>Introducida en el trabajo original de Gorini, Kossakowski & Sudarshan [12]. Véase en el apéndice A la equivalencia con las otras formulaciones.

donde:

$$\begin{aligned}
 H &= H^* & Tr[H] &= 0 \\
 M &= N^2 - 1 & A &= \{a_{ik}\}_1^M & A &= A^* \geq 0 \\
 Tr[F_i] &= 0 & Tr[F_i F_k^*] &= \delta_{ik} & 1 \leq i, k \leq M
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

El criterio de Spohn establece que, dada la matriz  $A$  (definida en (3.16), conocida bajo el nombre de *matriz de relajación*), y siendo  $n_0$  la degeneración del autovalor cero de tal matriz, entonces:

Si  $2n_0 < M \implies \nu_t$  es únicamente relajante.

## Capítulo 4

# Resultados Generales

Habiendo ya planteado un panorama introductorio, nos adentraremos ahora en el caso general, y los enunciados formales existentes.

Una primera serie de resultados e investigaciones sobre los semigrupos dinámicos se desarrolló entre 1977 y principios de la década de los '80, con motivaciones diferentes a las potenciales aplicaciones actuales de los semigrupos GKS-Lindblad. Estudiaremos entonces los aportes de Frigerio ([17], [20]), Evans ([19]) y Groh ([21]).

Una segunda serie de resultados referida a los semigrupos dinámicos, se ha desarrollado en la última década (y obviamente con una motivación diferente a la de 30 años atrás). Nos centraremos entonces en los trabajos de Fagnola y Rebolledo ([23], [24], [25]), Mohari ([18], [22]), Baumgartner y Narnhofer ([27], [28]).

### 4.1 Enunciados Básicos

Será necesario tener presente dos ideas que se repetirán (con distintos matices) en los razonamientos de los distintos autores. Éstas son: la irreducibilidad y la existencia de una familia fiel de estados estacionarios. Esta segunda hipótesis será nuestro objeto de estudio en el próximo capítulo.

**Definición 4.1.1.** *Una familia de estados normales  $\{w_i\}$  se llama fiel, si dado  $A \geq 0$ ,  $w_i(A) = 0 \forall i \Rightarrow A = 0$ .*

Introducimos la irreducibilidad según Evans [19]:

**Definición 4.1.2** (Reducción de semigrupos dinámicos. Irreducibilidad según Evans.). *Dado un proyector  $p \in P(\mathcal{H})$ , una subálgebra hereditaria de  $B(\mathcal{H})$  es de la forma  $pB(\mathcal{H})p$ . Dicha subálgebra reduce<sup>1</sup> a  $\alpha_t$  si el semigrupo  $\alpha_t$  la deja globalmente invariante y además la restricción de  $\alpha_t$  a  $pB(\mathcal{H})p$  es un semigrupo dinámico (notese que  $pB(\mathcal{H})p$  reduce a  $\alpha_t \Leftrightarrow \alpha_t(p) = p$ ,  $\forall t \geq 0 \Rightarrow \alpha_t(pAp) = p\alpha_t(A)p$ ,  $\forall t \geq 0 \forall A \in B(\mathcal{H})$ ).*

*Un semigrupo dinámico se dice irreducible si no puede reducirse por alguna subálgebra propia (i.e.  $p \neq 0$ ,  $p \neq \mathbb{I}$ ) hereditaria. Es decir,  $\alpha_t$  es irreducible si:  $\alpha_t(p) = p$  para  $p \in P(\mathcal{H}) \Rightarrow p = 0$  ó  $p = \mathbb{I}$ .*

De acuerdo con Frigerio & Verri [20] si  $p \in P(\mathcal{H})$  y  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , se denota por  $p\varphi p$  al elemento de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  definido por  $(p\varphi p)(A) = \varphi(pAp) \forall A \in B(\mathcal{H})$ , y se denota por  $p\mathcal{S}(\mathcal{H})p$  al conjunto

<sup>1</sup>Diremos indistintamente que la subálgebra o que el proyector es el que reduce al semigrupo.

de tales elementos. Entonces la irreducibilidad antes definida tiene como consecuencia que: si un proyector  $p$  no nulo reduce a  $\nu_t$  entonces  $p\mathcal{S}(\mathcal{H})p$  es globalmente invariante bajo  $\nu_t$ .

La idea de trasfondo que introducen Frigerio & Verri radica en el concepto de Cara Invariante. Retomaremos entonces el concepto de Cara, introducido en la sección 1.3. Allí, afirmamos que las Caras están en correspondencia 1 a 1 con los proyectores. Además, dado un proyector, construimos explícitamente su Cara asociada:

$$F_P = \{f \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) / f(P) = 1, P \in P(\mathcal{H})\}$$

Dijimos también que  $f \in F_P \Leftrightarrow s(f) \leq P$ . Introducimos ahora la noción de cara invariante:

**Definición 4.1.3.** *Una cara es globalmente invariante para  $\nu_t$  si se cumple  $\nu_t(F_P) \subseteq F_P$ . Es decir, si su proyector  $P$  asociado satisface que  $\forall \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}): P\nu_t(P\rho P)P = \nu_t(P\rho P)$ .*

De acuerdo con Evans, si el semigrupo es irreducible, entonces no hay caras invariantes no triviales. La recíproca no es cierta (al menos sin hipótesis adicionales), lo cual llevará a otra formulación de irreducibilidad:

**Definición 4.1.4** (Irreducibilidad según Groh.). *El semigrupo  $\nu_t$  es irreducible si no tiene caras invariantes no triviales.*

El soporte  $S(w)$  de cualquier estado  $w \in \mathcal{F}(\nu)$  reduce a  $\nu_t$ . Otro proyector que reduce a  $\nu_t$  es el llamado *proyector recurrente*:

$$R = \sup \{S(w) : w \in \mathcal{F}(\nu)\}.$$

Tendremos que  $R = 0$  cuando el semigrupo dinámico no tiene ningún estado normal estacionario, y  $R = \mathbb{I}$  si existe una familia fiel de estados estacionarios.

Exponemos a continuación los resultados más importantes presentes en [20], que es uno de los trabajos más importantes en el tema.

**Teorema 4.1.1.** *Dado un semigrupo dinámico  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ , actuando sobre  $B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \nu_s(\varphi) ds \quad \text{existe en } \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad (4.1)$$

2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \alpha_s(R) ds = \mathbb{I} \quad (4.2)$$

3.  $\mathcal{F}(\nu)$  separa a  $\mathcal{F}(\alpha)$ .

La dinámica reducida estará dada por:

$$\alpha_t^R(A) = R\alpha_t(A)R, \quad \forall A \in RB(\mathcal{H})R \quad (4.3)$$

$$E(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t R\alpha_s(A)R ds, \quad \forall A \in RB(\mathcal{H})R \quad (4.4)$$

Entonces se sigue el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.2.** *Dado un semigrupo dinámico  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ , actuando sobre  $B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(R) = \mathbb{I} \quad y \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi \circ \alpha_t^R = \psi \circ E, \quad \forall \psi \in R\mathcal{S}(\mathcal{H})R \quad (4.5)$$

2.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\varphi) \text{ existe en } \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad (4.6)$$

Si se usa la hipótesis de dimensión finita, se tiene que la primera condición en el teorema 4.1.1 se cumple automáticamente<sup>2</sup>; por lo tanto el límite ergódico existe siempre, y entonces siempre se tiene al menos un estado estacionario.

Ahora exploraremos el trabajo de Groh [21], que distingue tres situaciones para la asintótica de  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ :

1. El promedio Cesàro  $\frac{1}{s} \int_0^s \alpha_t dt$  converge fuertemente a un proyector  $P$  sobre  $\mathcal{F}(\alpha)$ .
2. Los mapas  $\alpha_t$  convergen fuertemente a  $P$ .
3. Los mapas  $\alpha_t$  se comportan como un grupo periódico.

Si ahora asumimos irreducibilidad (según Groh), tenemos el siguiente enunciado:

**Teorema 4.1.3** (Proposición 3.4 de [21]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , las siguientes afirmaciones resultan equivalentes:*

1.  $\nu_t$  es irreducible y  $p\sigma(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$ , donde  $p\sigma(\mathcal{L})$  significa “espectro puntual del generador”.
2.  $\nu_t$  es fuertemente ergódico, es decir,  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s \nu_t(X) dt$  existe  $\forall X \in B(\mathcal{H})$ ; y  $\mathcal{F}(\nu)$  es generado por un estado fiel.
3.  $\mathcal{F}(\nu)$  es generado por un estado fiel.

Fuera de la condición de irreducibilidad, asintóticamente la dinámica puede presentarse de manera parcialmente periódica (y obviamente el límite no existe). En tal sentido, tenemos el siguiente enunciado:

**Teorema 4.1.4** (Teorema 3.11 de [21]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , uniformemente ergódico, y asumiendo que  $\sigma(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} \neq \{0\}$ , entonces existe un semigrupo  $\mu_t$  parcialmente periódico (y que también preserva identidad), tal que:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\nu_t - \mu_t] = \mathbf{0}$$

En el apéndice E (Ejemplo 2) presentamos una situación que se enmarca en el teorema anterior.

Veamos ahora algunos aportes de Fagnola & Rebolledo. Más adelante, daremos un argumento geométrico por el cual la dimensionalidad finita nos permite asegurar la existencia de un estado normal invariante (estacionario). En dimensión infinita, tal afirmación no es automática, y requiere de un estudio más detallado. Básicamente, y a modo de comentario, en [23] se plantea que existe un estado normal estacionario, si es posible encontrar dos operadores autoadjuntos  $X$  e  $Y$ ,

<sup>2</sup>Más aún, en dimensión finita se puede asegurar que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(R) = \mathbb{I}$ .

con  $X \geq 0$ ,  $Y$  acotado por debajo, con proyectores espectrales de dimensión finita asociados con intervalos acotados, tal que sucede:

$$\int_0^\infty \alpha_s(Y) ds \leq X \quad (4.7)$$

o bien:

$$L(X) \leq -Y \quad (4.8)$$

con  $L(\cdot)$  dado por 3.7.

Introducimos ahora un concepto de fundamental importancia en el estudio de los semigrupos dinámicos:

**Definición 4.1.5.** *Un operador positivo  $a \in B(\mathcal{H})$  es armónico para el semigrupo dinámico, si  $\alpha_t(a) = a$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Definición 4.1.6.** *Un operador positivo  $a \in B(\mathcal{H})$  es subarmónico para el semigrupo dinámico, si  $\alpha_t(a) \geq a$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

**Definición 4.1.7.** *Un operador positivo  $a \in B(\mathcal{H})$  es superarmónico para el semigrupo dinámico, si  $\alpha_t(a) \leq a$ ,  $\forall t \geq 0$ .*

Aclaremos que cuando digamos “ $P$  es un proyector subarmónico” la relación de orden debe entenderse en el sentido  $\alpha_t(P) - P \geq 0$  (y no en el sentido de la definición 1.3.1). Recordar que  $\alpha_t(P)$  no tiene por qué ser un proyector.

Se plantea nuevamente la irreducibilidad del semigrupo  $\alpha_t$ :

**Definición 4.1.8** (Irreducibilidad según Fagnola & Rebolledo.). *El semigrupo dinámico  $\alpha_t$  es irreducible si no existen proyectores subarmónicos no triviales.*

## 4.2 Sobre las Nociones de Irreducibilidad I

En la exploración de resultados que hemos efectuado surgieron diferentes definiciones de *irreducibilidad*, de acuerdo con los distintos autores citados. Veremos la relación existente entre ellas.

Ya mencionamos que la irreducibilidad según Evans establece que el semigrupo dinámico  $\alpha_t$  es irreducible si  $\alpha_t(P) = P \Rightarrow P = 0, \mathbb{I}$ . Esto significa que no existen proyectores *armónicos* no triviales (Mohari [18]).

La irreducibilidad según Groh se basa en la inexistencia de Caras invariantes. Por otra parte, según Fagnola y Rebolledo, el semigrupo dinámico  $\alpha_t$  es irreducible si se tiene que  $\alpha_t(P) \geq P \Rightarrow P = 0, \mathbb{I}$ . Veamos ahora que estas nociones son equivalentes. Para ello, comenzamos con un lema auxiliar y luego demostramos la proposición de la que se desprende la equivalencia.

**Lema 4.2.1.** *Si  $0 \leq x \leq \mathbb{I}$  y  $p = p^* = p^2$  entonces:*

$$pxp = p \Leftrightarrow x \geq p$$



*Demostración.* ( $\Leftarrow$ )

$$\mathbb{I} \geq x \geq p \Rightarrow p = p^2 \geq pxp \geq p^3 = p \Rightarrow pxp = p$$

( $\Rightarrow$ )

$$\begin{aligned} 0 = p - pxp &= p(\mathbb{I} - x)p = p \sqrt{\mathbb{I} - x} \sqrt{\mathbb{I} - x} p \\ &= (\sqrt{\mathbb{I} - x} p)^* (\sqrt{\mathbb{I} - x} p) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\mathbb{I} - x} p = 0 \quad \& \quad p \sqrt{\mathbb{I} - x} = 0$$

Luego:

$$0 = \sqrt{\mathbb{I} - x} (\sqrt{\mathbb{I} - x} p) = (\mathbb{I} - x) p \quad \& \quad 0 = \dots = p (\mathbb{I} - x)$$

$$\Rightarrow p = xp = px \quad \& \quad xp^\perp = p^\perp x$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} x - p &= (p + p^\perp) (x - p) (p + p^\perp) \\ &= (px - p + p^\perp x) (p + p^\perp) \\ &= pxp + pxp^\perp - p + p^\perp xp + p^\perp xp^\perp \\ &= p + (xp)p^\perp - p + p^\perp(px) + p^\perp xp^\perp \\ &= p^\perp xp^\perp \geq 0 \end{aligned}$$

En el primer término de la cuarta igualdad usamos que  $pxp = p$ , en el segundo y cuarto términos se usó que  $xp = px$ . □

**Proposición 4.2.1.** *Dado el semigrupo dinámico  $\alpha_t$  (y su correspondiente mapa predual  $\nu_t$ ), entonces:*

$$\alpha_t(P) \geq P \quad \forall t \Leftrightarrow \nu_t(F_P) \subseteq F_P$$

*Demostración.* Para ver ( $\Leftarrow$ ), planteamos la siguiente equivalencia:

$$\begin{aligned} \nu_t(F_P) \subseteq F_P &\Leftrightarrow P\nu_t(P\rho P)P = \nu_t(P\rho P) \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}[P\nu_t(P\rho P)Pa] = \text{Tr}[\nu_t(P\rho P)a] \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}[\nu_t(P\rho P)PaP] = \text{Tr}[P\rho P\alpha_t(a)] \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}[P\rho P\alpha_t(PaP)] = \text{Tr}[\rho P\alpha_t(a)P] \\ &\Leftrightarrow \text{Tr}[\rho P\alpha_t(PaP)P] = \text{Tr}[\rho P\alpha_t(a)P], \quad \forall \rho, \forall t \geq 0, \forall a \in B(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow P\alpha_t(PaP)P = P\alpha_t(a)P \end{aligned}$$

Entonces queremos ver que:

$$P\alpha_t(PaP)P = P\alpha_t(a)P \Rightarrow \alpha_t(P) \geq P$$

Para lo cual basta tomar  $a = \mathbb{I}$ . Entonces por el lema 4.2.1:

$$P\alpha_t(P)P = P \Rightarrow \alpha_t(P) \geq P$$

( $\Rightarrow$ ) Sea  $\rho \in F_P$ :

$$\begin{aligned} \nu_t(\rho)(P) &= \rho(\alpha_t(P)) \geq \rho(P) = 1 \\ \Rightarrow s(\nu_t(\rho)) &\leq P \Leftrightarrow \nu_t(\rho) \in F_P \end{aligned}$$

□

Con esta proposición demostramos la equivalencia entre las nociones de irreducibilidad de Groh y de Fagnola & Rebolledo. En otras palabras, hablar de proyectores subarmónicos y de Caras invariantes es esencialmente lo mismo.

Asimismo, es evidente que:

Irreducibilidad según Fagnola & Rebolledo  $\Rightarrow$  Irreducibilidad según Evans

La recíproca es falsa (al menos sin hipótesis adicionales). El contraejemplo que justifica tal afirmación se encuentra en el apéndice C.1.1 (caso  $a = 0$ ). Ese ejemplo es uno de los más significativos pues ilustra muchas de las situaciones que se describen en éste y el próximo capítulo, por lo que conviene tenerlo siempre presente.

### 4.3 Dinámica de Proyectores y Aspectos Geométricos

Estudiaremos ahora la dinámica sobre proyectores, haciendo especial énfasis en aspectos geométricos (como el concepto de Cara).

Asimismo, incorporaremos un estudio más reciente realizado por Baumgartner & Narnhofer [28] sobre los semigrupos dinámicos que estamos considerando, si bien reescribiremos sus resultados desde una perspectiva más geométrica.

Ya advertimos que la dimensionalidad finita aseguraba la existencia de al menos un estado estacionario. Tal afirmación puede ser fundamentada en base a argumentos geométricos. En la sección 1.2 mostramos que el conjunto de estados  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  es convexo. Además, por definición, el semigrupo dinámico  $\nu_t$  mapea  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  en sí mismo. Consideremos entonces la aplicación  $\rho(0) \rightarrow \rho(\Delta t)$ , para algún intervalo de tiempo fijo  $\Delta t$ . Haciendo uso del teorema de punto de fijo de Brouwer<sup>3</sup>, existe al menos un punto fijo  $\rho(\Delta t) = \rho(0)$ . Luego el estado estacionario dado por:

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \rho(s) ds \quad (4.9)$$

satisface  $\mathcal{L}(\bar{\rho}) = 0$ .

Exponemos ahora una serie de lemas simples, con el objeto de encontrar una caracterización para proyectores invariantes. Seguiremos para el ello el trabajo de Baumgartner & Narnhofer [28], pero reescribiremos sus resultados en nuestra notación. Algunos de los lemas siguientes pueden resultar triviales (o ya demostrados antes), pero se incluyen para darle completitud y simplicidad al argumento.

**Lema 4.3.1.** *Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\rho$  matriz densidad, entonces<sup>4</sup>:  $P\rho P = \rho \Leftrightarrow P \geq s(\rho)$*

<sup>3</sup>El teorema de Brouwer constituye uno de los enunciados topológicos más importantes y usados. Su versión más simple establece que todo mapa continuo definido sobre un disco cerrado en sí mismo, tiene un punto fijo.

<sup>4</sup>Conviene tener presente la definición 1.3.2 de soporte de un estado.

*Demostración.*  $(\Leftarrow) P\rho P = P s(\rho) \rho s(\rho) P \stackrel{P \geq s(\rho)}{=} s(\rho) \rho s(\rho) = \rho$

$(\Rightarrow) \text{tr}[\rho P] = \text{tr}[\rho P^2] = \text{tr}[P\rho P] \stackrel{P\rho P = \rho}{=} \text{tr}[\rho] = 1 \Rightarrow \rho(P) = 1 \Rightarrow s(\rho) \leq P$   $\square$

**Lema 4.3.2.** *Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  ( $\Leftrightarrow L(P) = 0$ ) entonces:  
 $P\rho P = \rho \Rightarrow P\nu_t(\rho)P = \nu_t(\rho)$*

*Demostración.*  $\text{tr}[P\nu_t(\rho)P] = \text{tr}[\nu_t(\rho)P] = \text{tr}[\rho\alpha_t(P)] = \text{tr}[\rho P] = \text{tr}[P\rho P] = \text{tr}[\rho] = 1 \Rightarrow$   
 $s(\nu_t(\rho)) \leq P \stackrel{\text{Lema 4.3.1}}{\Rightarrow} P\nu_t(\rho)P = \nu_t(\rho)$   $\square$

La igualdad  $P\nu_t(\rho)P = \nu_t(\rho)$  tiene su versión equivalente en términos del generador de la dinámica:  $P\mathcal{L}(\rho)P = \mathcal{L}(\rho)$ . Esto implica que bajo las hipótesis del lema 4.3.2:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho)P^\perp &= 0 \\ P^\perp \mathcal{L}(\rho)P^\perp &= 0 \\ P^\perp \mathcal{L}(\rho) &= 0 \\ P^\perp \mathcal{L}(\rho)P &= 0 \\ P\mathcal{L}(\rho)P^\perp &= 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

El siguiente lema es un breve paréntesis en nuestro razonamiento, pero será de utilidad en lo inmediato.

**Lema 4.3.3.** *Si  $XAX^* = 0$ ,  $\forall A \geq 0 \Rightarrow X = 0$ .*

*Demostración.*  $0 = \text{tr}[XAX^*] \Rightarrow \text{tr}[AX^*X] = 0$ ,  $\forall A \geq 0 \Rightarrow X^*X = 0$   
 $\Rightarrow \langle \psi, X^*X\psi \rangle = 0 \forall \psi \Rightarrow \langle X\psi, X\psi \rangle = 0 \forall \psi \Rightarrow \|X\psi\| = 0 \forall \psi \Rightarrow X = 0$ .  $\square$

**Lema 4.3.4.** *Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  entonces:*

$$V_j P = P V_j P \quad \forall j \tag{4.11}$$

donde  $V_j$  son los operadores presentes en el generador 3.7, 3.8.

*Demostración.* Tomamos  $\rho = P\rho P$ . Por el lema 4.3.2 y las expresiones (4.10) tenemos que:

$$\begin{aligned} 0 &= P^\perp \mathcal{L}(\rho)P^\perp \\ &= P^\perp \left\{ -i[H, \rho] + \sum_j V_j \rho V_j^* - \frac{1}{2}(V_j^* V_j \rho + \rho V_j^* V_j) \right\} P^\perp \\ &= P^\perp (-iHP\rho P)P^\perp + iP^\perp (P\rho PH)P^\perp + \sum_j P^\perp V_j P \rho P V_j^* P^\perp \\ &\quad - \frac{1}{2}(P^\perp V_j^* V_j P \rho P P^\perp + P^\perp P \rho P V_j^* V_j P^\perp) \\ &= \sum_j P^\perp V_j P \rho P V_j^* P^\perp \\ &= \sum_j \underbrace{(P^\perp V_j P) \rho (P^\perp V_j P)^*}_{\geq 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= (P^\perp V_j P) \rho (P^\perp V_j P)^* \forall j \quad \underbrace{\Rightarrow}_{\text{Lema 4.3.3}} \quad P^\perp V_j P = 0 \Rightarrow (\mathbb{I} - P) V_j P = 0 \\ \Rightarrow V_j P &= P V_j P \quad \forall j \quad \square \end{aligned}$$

**Corolario 4.3.1.** Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  entonces:  
 $P^\perp \rho P^\perp = \rho \Rightarrow P^\perp \nu_t(\rho) P^\perp = \nu_t(\rho)$

*Demostración.*  $\alpha_t(P^\perp) = \alpha_t(\mathbb{I} - P) = \alpha_t(\mathbb{I}) - \alpha_t(P) = \mathbb{I} - P = P^\perp$   
 El enunciado se sigue del Lema 4.3.2. □

**Corolario 4.3.2.** Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  entonces:  
 $V_j P^\perp = P^\perp V_j P^\perp \quad \forall j$

*Demostración.* Por el razonamiento expuesto en el Corolario 4.3.1 tenemos  $\alpha_t(P^\perp) = P^\perp$ . El enunciado se sigue del Lema 4.3.4. □

Observación:

$$\begin{aligned} V_j P^\perp &= P^\perp V_j P^\perp \\ V_j(\mathbb{I} - P) &= (\mathbb{I} - P) V_j(\mathbb{I} - P) \\ \Rightarrow P V_j &= P V_j P \quad \forall j \end{aligned} \quad (4.12)$$

Se sigue del Lema 4.3.4 y la observación anterior:

**Corolario 4.3.3.** Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  entonces:  $[P, V_j] = 0 \quad \forall j$

**Lema 4.3.5.** Dado  $P = P^* = P^2$ ,  $\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0$  entonces:  $[P, H] = 0$

*Demostración.* Nuevamente, usando el lema 4.3.2 y las expresiones 4.10 tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &= P \mathcal{L}(\rho) P^\perp \\ 0 &= P(-iHP\rho P)P^\perp + iP(P\rho PH)P^\perp \\ 0 &= iP\rho PHP^\perp \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos usado que conforme a las hipótesis dadas, se cumple (Corolario 4.3.3)  $[P, V_j] = 0 \quad \forall j$ . De la última igualdad se desprende que:

$$PHP^\perp = 0.$$

Luego:

$$PH = PHP$$

Análogamente, repetimos el razonamiento:  $0 = P^\perp \mathcal{L}(\rho) P \Rightarrow HP = PHP$ .

Por lo tanto,  $[P, H] = 0$ . □

Es evidente que si un proyector  $P$  conmuta con  $H$  y con  $V_j \forall j$ , entonces, inspeccionando de manera directa el generador, concluimos que tal proyector resulta invariante. Llegamos entonces al siguiente enunciado, que resulta fundamental a los fines de caracterizar los proyectores invariantes:

**Corolario 4.3.4.** Dado  $P = P^* = P^2$ , entonces:

$$\alpha_t(P) = P \forall t \geq 0 \Leftrightarrow P \in \{H, V_j; \forall j\}'$$

## 4.4 Proyectores Subarmónicos

Los proyectores subarmónicos son de fundamental importancia en el estudio de los semigrupos dinámicos. El primer aspecto importante al respecto es el siguiente resultado, que fue presentado por primera vez por Groh (ver [21]).

**Lema 4.4.1** (El soporte de un estado estacionario es Subarmónico). *Dado  $\rho$  estacionario (i.e.  $\rho = \nu_t(\rho) \forall t \geq 0$ ), y  $s(\rho)$  su soporte, entonces  $P = s(\rho)$  es subarmónico.*

*Demostración.* Por la proposición 4.2.1 tenemos que:

$$\alpha_t(P) \geq P \forall t \Leftrightarrow \nu_t(F_P) \subseteq F_P \Leftrightarrow P\nu_t(P\rho P)P = \nu_t(P\rho P)$$

La última igualdad es fácilmente verificable, pues para  $\rho$  estacionario:

$$P\nu_t(P\rho P)P \underbrace{=}_{P=s(\rho)} P\nu_t(\rho)P \underbrace{=}_{\rho=\nu_t(\rho)} P\rho P \underbrace{=}_{P=s(\rho)} \rho \underbrace{=}_{\rho=\nu_t(\rho)} \nu_t(\rho) \underbrace{=}_{P=s(\rho)} \nu_t(P\rho P)$$

□

Estudiando los subarmónicos minimales, encontraremos una caracterización del espacio de acuerdo a una estructura de caras invariantes minimales. Para ello, presentamos primero un enunciado auxiliar<sup>5</sup>, que resultará de gran utilidad:

**Lema 4.4.2.** *Si  $C, D \in B(\mathcal{H})$ , positivos, con  $C$  invertible y  $D \neq 0$ , entonces el operador  $T(t) = C - tD$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , es autoadjunto. Existe un  $t_0 > 0$  tal que  $T(t_0)$  es positivo pero no invertible, mientras que para todo  $t < t_0$ ,  $T(t)$  es positivo e invertible. Además,  $T(t_0) = 0$  si y sólo si  $D = \alpha C$  con  $\alpha > 0$ ; en caso contrario  $T(t_0)$  no es nulo.*

*Demostración.* Como  $C$  es positivo e invertible  $\inf \sigma(C) > 0$ . Sea  $\lambda(t)$  el ínfimo del espectro de  $T(t)$ , que es manifiestamente autoadjunto. Por el Teorema Variacional,

$$\lambda(t) := \inf \{ \langle f, T(t)f \rangle : f \in \mathcal{H}, \|f\| = 1 \}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Como ínfimo de un conjunto de funciones afines y continuas,  $\mathbb{R} \ni t \rightarrow \lambda(t)$  es cóncava y superiormente semicontinua. De esto se desprende que es continua. Además, si  $s > t$  entonces  $T(t) - T(s) = (s - t)D$  es positivo y por lo tanto  $\langle f, T(t)f \rangle \geq \langle f, T(s)f \rangle$  para todo  $f \in \mathcal{H}$ ; y entonces  $\lambda(t) \geq \lambda(s)$ . Luego  $\lambda$  es por ende no creciente. Para todo  $t \leq 0$ , tenemos:

$$\langle f, T(t)f \rangle = \langle f, Cf \rangle + |t|\langle f, Df \rangle \geq \langle f, Cf \rangle \geq \lambda(0) > 0$$

Ya que  $D \neq 0$  existe  $g \in \mathcal{H}$  con  $\|g\| = 1$  y  $\langle g, Dg \rangle > 0$ ; tome  $s > \|C\|/\langle g, Dg \rangle$ . Entonces:

$$\langle g, T(t)g \rangle = \langle g, Cg \rangle - s\langle g, Dg \rangle \leq \|C\| - s\langle g, Dg \rangle < 0$$

y por lo tanto  $\lambda(s) < 0$ .

Por la continuidad y el no crecimiento de  $\lambda$ , hay  $t_0$  con  $\lambda(t_0) = 0$  y  $\lambda(t) > 0$  para todo  $t < t_0$ . Por la definición de  $\lambda$ , tenemos que  $T(t_0)$  es positivo pero no invertible, mientras que para  $t < t_0$ ,  $T(t)$  es positivo e invertible.

Suponga que  $D = \alpha C$  con  $\alpha > 0$  entonces  $T(t) = (1 - \alpha t)C$  y esto es: positivo e invertible para todo  $t < \alpha^{-1}$ ; nulo para  $t = \alpha^{-1} = t_0$  (y negativo e invertible para todo  $t > \alpha^{-1}$ ). Si  $T(t_0) = 0$  entonces  $D = t_0 C$ . □

<sup>5</sup>De [29].

De este Lema auxiliar se desprende la siguiente consecuencia:

**Corolario 4.4.1.** *Si  $D_1, D_2$  son operadores densidad distintos pero de idéntico soporte  $P$  entonces existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que  $D_1 - \alpha D_2$  es positivo, no nulo y de soporte estrictamente inferior a  $P$ .*

El siguiente enunciado resulta de gran importancia para nuestro estudio:

**Lema 4.4.3** (Teorema 13 de [28]). *Sea  $P$  proyector subarmónico, y minimal subarmónico (es decir, si  $Q \leq P$ ,  $Q$  subarmónico  $\Rightarrow Q = P$ ). Entonces existe un único estado estacionario  $\rho$  tal que  $s(\rho) = P$ , y obviamente se tiene que  $\text{rango}(\rho) = \text{dim}(P\mathcal{H})$ .*

*Demostración.* Como  $P$  es subarmónico, basta pensar en la dinámica sobre un espacio de Hilbert reducido  $P\mathcal{H}$ . La evolución en ese subespacio es independiente de lo que ocurre fuera de él.

Ahora podemos asegurar en esa dinámica reducida, la existencia de al menos un estado estacionario, habida cuenta de la dimensión finita (bien podemos hacer uso del comentario que dimos al comienzo de esta sección respecto del teorema de Brouwer).

Supongamos que tenemos un estado estacionario  $\rho$  cualquiera, con  $s(\rho) \leq P$ . Luego, por el Lema 4.4.1,  $s(\rho)$  es subarmónico. Usando la hipótesis de minimalidad, concluimos que  $s(\rho) = P$ .

Si existiera otro estado estacionario  $\varphi$  (distinto), entonces por el mismo argumento  $s(\varphi) = P$ . Entonces, en términos de operadores densidad  $D_\rho, D_\varphi$  serían distintos, pero de idéntico soporte ( $P$ ).

Conforme al Corolario 4.4.1, existe  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  tal que  $D_\rho - \alpha D_\varphi$  es positivo, no nulo y de soporte estrictamente inferior a  $P$ . Pero evidentemente, por la linealidad en las ecuaciones (3.8) y (3.11),  $D_\rho - \alpha D_\varphi$  también es estacionario. Esto contradice la minimalidad de  $P$ . Luego  $\rho$  es el único estado estacionario en esa cara.  $\square$

Dada una Cara globalmente invariante, sabemos que su proyector asociado es subarmónico. Si tal proyector no es minimal, buscamos un proyector menor que sí lo sea, de modo que contemos con una cara invariante minimal. De acuerdo con el Lema 4.4.3, existe un estado estacionario  $\rho_\infty$  cuyo soporte es igual a ese proyector minimal y además  $\rho_\infty$  es fiel (en ese subespacio) y único.

Luego, cualquier estado  $\rho$  que pertenezca a esa cara invariante minimal, satisface que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \nu_t(\rho) = \rho_\infty$ . Esta afirmación se justificará en el capítulo 5: habida cuenta que la dinámica reducida a esa cara invariante es irreducible (pues no hay otra cara invariante estrictamente contenida) se aplica el Corolario 5.1.1.

En pocas palabras, dentro de una cara invariante minimal, hay un único estado estacionario, es fiel, y además la dinámica reducida es única o genuinamente relajante hacia tal estado. La existencia del estado fiel y la irreducibilidad son las hipótesis suficientes para asegurar la *relajación*. Este será nuestro objeto de estudio en el capítulo 5.

Con este último enunciado queda claro el papel fundamental que juegan los proyectores subarmónicos. Continuamos entonces con el estudio de los mismos, dando una caracterización de cualquier proyector subarmónico, usando la forma explícita del generador. La *receta* está dada por:

**Lema 4.4.4.** *Un proyector  $P$  es Subarmónico si y sólo si se satisfacen:*

$$V_j P = P V_j P \quad \forall j \quad (4.13)$$

$$P \left( iH - \frac{1}{2} \sum_j V_j^* V_j \right) P^\perp = 0 \quad (4.14)$$

La demostración de este lema puede consultarse en [28], (Lemas 9 y 11); o bien de [24].

Con base en el trabajo de Mohari ([18] y [22]) enunciaremos ahora algunas propiedades básicas de los proyectores subarmónicos:

**Proposición 4.4.1.** *Sea  $p$  un proyector subarmónico. Entonces se sigue que:*

1.  $\forall t \geq 0, p\alpha_t(p) = \alpha_t(p)p = p$
2.  $\alpha_t(x(1-p))p = 0, \forall x \in B(\mathcal{H}), t \geq 0$

**Proposición 4.4.2.** *Sea  $p$  un proyector subarmónico, y sea  $g := \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(p)$ . Entonces  $\forall x \in B(\mathcal{H})$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $gx = 0$
2.  $\alpha_t(p)x = 0, \forall t \geq 0$

Veamos ahora qué se puede decir respecto a la evolución asintótica de estos proyectores. La subarmonicidad y la cota superior dada por la identidad ( $P \leq \alpha_t(P) \leq \mathbb{I}$ ) traen como consecuencia que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(P)$  siempre existe. En tal sentido, tenemos los siguientes enunciados<sup>6</sup>:

**Teorema 4.4.1** (Teorema 2.5 de [18]). *Si  $p$  es un proyector subarmónico y existe  $\lambda > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(p) = g \geq \lambda \mathbb{I}$  (i.e.  $g$  invertible), entonces  $g = \mathbb{I}$ .*

**Teorema 4.4.2** (Corolario 2.6 de [18]). *Sea  $p$  proyector subarmónico (no trivial, i.e.  $p \neq \mathbb{I}$ ) maximal, y  $(\mathbb{I} - p)$  es de dimensión finita, entonces  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(p) = \mathbb{I}$ .*

**Teorema 4.4.3** (Teorema 3.12 de [22]). *Sea  $\varphi_0$  un estado estacionario, y  $p$  su soporte, tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(p) = \mathbb{I}$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1.  $\forall x \in B(\mathcal{H}), \lim_{t \rightarrow \infty} p\alpha_t(pxp)p = \varphi_0(x)p$
2.  $\forall x \in B(\mathcal{H}), \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(x) = \varphi_0(x)\mathbb{I}$

Los siguientes enunciados de Umanitá (& Fagnola) y de Mohari respectivamente, resultarán muy útiles en lo inmediato:

**Proposición 4.4.3** (Ver [26]). *Sea  $\{p_i\}$  una familia de proyectores subarmónicos para  $\alpha_t$ . Entonces el proyector  $p := \bigvee_i p_i$  también es subarmónico para  $\alpha_t$  (i.e. el supremo de la familia de subarmónicos es subarmónico).*

**Proposición 4.4.4** (Proposición 2.3 de [18]). *Sea  $x \in B(\mathcal{H}), x \geq 0, \alpha_t(x) = x$ , y sea  $s(x)$  el soporte<sup>7</sup> de  $x$ . Entonces  $1 - s(x)$  es subarmónico.*

## 4.5 Reduciendo la Dinámica

Sobre la base del estudio de los proyectores subarmónicos, construiremos un proyector particular que nos permita, de alguna manera *reducir* el estudio asintótico de la dinámica. El primer teorema importante al respecto es el siguiente:

**Teorema 4.5.1.** *Sea  $P_0 := \sup\{P / P \text{ es proyector subarmónico minimal}\}$ . Entonces:*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(P_0) = \mathbb{I} \quad (4.15)$$

<sup>6</sup>No incluiremos las respectivas demostraciones, pero pueden consultarse en los artículos citados.

<sup>7</sup>Entendido como la suma de los proyectores espectrales del operador asociados a autovalores no nulos.

*Demostración.* Por la proposición 4.4.3,  $P_0$  es subarmónico. Es decir,  $\alpha_t(P_0) \geq P_0$ .

Sea  $g := \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(P_0)$ . Obviamente  $\alpha_t(g) = g \ \forall t \geq 0$ .

Si  $g$  es invertible, entonces por el teorema 4.4.1 tenemos  $g = \mathbb{I}$  y no hay nada que demostrar.

Supongamos  $g$  no invertible. Sean  $s_g$  el soporte de  $g$ , y  $q$  el proyector al kernel de  $g$ . Esto significa que:

$$qg = gq = 0; \quad q = 1 - s_g \quad (4.16)$$

Luego, por la proposición 4.4.4  $q$  es un proyector subarmónico.

Si  $q$  no es minimal, entonces sea  $q' \leq q$  minimal subarmónico (obviamente no nulo). Ahora bien:

$$\begin{aligned} q'q = q' &\Rightarrow q'g = q'qg = 0 \\ P_0 \leq \alpha_t(P_0) &\leq g \\ \Rightarrow 0 \leq q'P_0 &\leq q'\alpha_t(P_0) \leq q'g = 0 \\ &\Rightarrow q'P_0 = 0 \end{aligned}$$

Por otra parte,  $q'$  es minimal subarmónico, y por la definición de  $P_0$  tenemos que  $q' \leq P_0$ , es decir,  $q'P_0 = q'$ . Del razonamiento anterior se desprende que  $q' = 0$ . Por lo tanto  $q = 0$  y  $s_g = \mathbb{I}$ . Luego  $g$  invertible, en contradicción con el supuesto anterior.  $\square$

Introducimos ahora el concepto de proyector decadente (tomado desde [28]).

**Definición 4.5.1.** *Un proyector es decadente si  $\alpha_t(P) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} 0$ .*

Resulta natural plantearse la pregunta ¿qué relación existe entre un proyector decadente y un proyector subarmónico (o superarmónico)? Es obvio que  $P$  es subarmónico si y sólo si  $P^\perp$  es superarmónico<sup>8</sup>.

Si  $P$  es subarmónico, ¿entonces  $P^\perp$  es decadente?. La respuesta es no. En el apéndice E (ejemplo 2) estudiamos un caso en el que  $P$  es subarmónico, y  $P^\perp$  también lo es. Por lo tanto ambos son invariantes (en particular  $P^\perp$  no es decadente).

Ahora bien, en [28] Baumgartner & Narnhofer afirman que si un proyector  $P$  es decadente entonces  $P^\perp$  es subarmónico<sup>9</sup>. Tal afirmación es falsa. El contraejemplo que damos está desarrollado en el apéndice C.1.1 (caso  $a = 0$ ).

Reformulando la afirmación anterior, uno sí puede decir algo respecto a un proyector subarmónico muy particular:  $P_0$ . Del teorema 4.5.1 se desprende que  $P_0^\perp$  es decadente. Y ello nos será de utilidad en el siguiente razonamiento, que nos permitirá simplificar el estudio de la dinámica:

Sea  $x \in B(\mathcal{H})$ ,  $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $Q = P_0^\perp$ . Entonces:

$$\begin{aligned} |\rho(\alpha_t(xQ))| &= |\nu_t(\rho)(xQ)| \leq \sqrt{\nu_t(\rho)(xx^*) \nu_t(\rho)(Q^*Q)} = \sqrt{\nu_t(\rho)(xx^*) \rho(\alpha_t(Q))} \leq \\ &\leq \|x\| \sqrt{\rho(\alpha_t(Q))} \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

En la segunda igualdad hemos empleado la desigualdad general (ver la Proposición 1.3.2):

$$|\varphi(ab)| \leq \sqrt{\varphi(aa^*) \varphi(b^*b)} \quad (4.17)$$

Por medio de argumentos análogos, concluimos que:

<sup>8</sup> $\alpha_t(P) \geq P \Leftrightarrow -P \geq -\alpha_t(P) \Leftrightarrow \alpha_t(P^\perp) = \mathbb{I} - \alpha_t(P) \leq \mathbb{I} - P = P^\perp$ .

<sup>9</sup>“Colector” en su notación. Ver en [28], página 8, último párrafo.



$$\begin{aligned}
\alpha_t(Qx) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0 \\
\alpha_t(xQ) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0 \\
\alpha_t(QxQ) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0 \\
\alpha_t(QxP_0) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0 \\
\alpha_t(P_0xQ) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0
\end{aligned}$$

Esto nos dice que basta analizar del bloque  $P_0xP_0$ , pues para un observable  $x$  cualquiera:

$$\begin{aligned}
x &= P_0xP_0 + P_0xQ + QxP_0 + QxQ \\
\alpha_t(x) &= \alpha_t(P_0xP_0) + \alpha_t(P_0xQ) + \alpha_t(QxP_0) + \alpha_t(QxQ) \\
\alpha_t(x) &\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \alpha_t(P_0xP_0)
\end{aligned}$$

Ahora, si bien uno debe analizar cómo evoluciona sólo el bloque  $P_0xP_0$ , cabe aclarar que la dinámica puede extenderse desde ese bloque hacia los otros. Es decir:

$$\alpha_t(P_0xP_0) = P_0\alpha_t(P_0xP_0)P_0 + P_0\alpha_t(P_0xP_0)Q + Q\alpha_t(P_0xP_0)P_0 + Q\alpha_t(P_0xP_0)Q$$

y a priori no podemos decir nada de cada uno de estos sumandos. En el apéndice C.1.1 (caso  $a = 0$ ), se plantea una situación en la cual hay un único subarmónico no trivial (un proyector unidimensional). Ese mismo proyector es  $P_0$ . Y su evolución se *extiende afuera*, es decir, el bloque  $P_0^\perp \alpha_t(P_0) P_0^\perp$  es asintóticamente no nulo.

El siguiente teorema establece otra propiedad fundamental de  $P_0$ .

**Teorema 4.5.2.** *Sea  $P_0 := \sup\{P / P \text{ es proyector subarmónico minimal}\}$ . Entonces:*

$$P_0 = \inf\{P / \alpha_t(P) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \mathbb{I}\} \quad (4.18)$$

*Demostración.* Comenzamos por definir el siguiente conjunto:

$$J = \{a \in B(\mathcal{H}) / \alpha_t(a^*a) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0\}$$

Primero demostraremos que  $J$  es un ideal a izquierda. Veamos entonces que  $J$  es un espacio lineal:

Sean  $x, y \in J$ ;  $\gamma, \delta \in \mathbb{C}$ .

$$\begin{aligned}
\alpha_t((\gamma x + \delta y)^*(\gamma x + \delta y)) &= \alpha_t(|\gamma|^2 x^*x + \bar{\gamma}\delta x^*y + \gamma\bar{\delta}y^*x + |\delta|^2 y^*y) \\
&= |\gamma|^2 \alpha_t(x^*x) + \bar{\gamma}\delta \alpha_t(x^*y) + \gamma\bar{\delta} \alpha_t(y^*x) + |\delta|^2 \alpha_t(y^*y) \\
&\longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0
\end{aligned}$$

El primer y último término se anulan pues  $x, y \in J$ ; y los términos cruzados se anulan por razonamiento similar al expuesto más arriba, aplicando un estado arbitrario  $\rho$  y usando la desigualdad (4.17).

Ahora tomamos  $x \in J$ ;  $a \in B(\mathcal{H})$ . Queremos ver que  $ax \in J$ . En efecto:

$$\begin{aligned}
|\rho[\alpha_t((ax)^*(ax))]| &= |\rho[\alpha_t(x^*a^*ax)]| = |\nu_t(\rho)(x^*a^*ax)| \leq \\
&\leq \sqrt{\nu_t(\rho)((x^*a^*a)(x^*a^*a)^*) \nu_t(\rho)(x^*x)} \leq \\
&\leq \sqrt{\|x^*a^*a\|^2 \nu_t(\rho)(x^*x)} = \sqrt{\|x^*a^*a\|^2 \rho(\alpha_t(x^*x))} \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0 \\
&\implies ax \in J
\end{aligned}$$

(Nuevamente usamos la desigualdad (4.17)).

Habiendo ya demostrado que  $J$  es un ideal a izquierda, podemos asegurar que existe un único proyector  $z$  tal que <sup>10</sup> :

$$\begin{aligned} J &= B(\mathcal{H})z, & z &= z^* = z^2 \\ J &= \{ x \in B(\mathcal{H}) : xz = x \} \end{aligned}$$

y naturalmente se cumple que:

$$z = \sup\{q = q^* = q^2 / \alpha_t(q) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0\}$$

Por lo tanto:

$$z^\perp = \mathbb{I} - z = \inf\{q = q^* = q^2 / \alpha_t(q) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \mathbb{I}\} \quad (4.19)$$

Por el teorema 4.5.1,  $\alpha_t(P_0) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \mathbb{I}$ , entonces:

$$z^\perp \leq P_0 \quad (4.20)$$

Ahora tomamos una cara invariante minimal, y su único estado estacionario asociado (ver lema 4.4.3):  $\varphi_\mu \in F_\mu$ .

Por definición de  $P_0$  tenemos que  $s(\varphi_\mu) \leq P_0$  (recordar que  $s(\varphi_\mu)$  es minimal subarmónico). Además:

$$\varphi_\mu(z) \underset{\varphi_\mu \text{ estacionario}}{=} \nu_t(\varphi_\mu)(z) = \varphi_\mu(\alpha_t(z)) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} 0$$

Pero como el primer miembro no depende de  $t$  tenemos que:  $\varphi_\mu(z) = 0$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &\leq (s(\varphi_\mu))^\perp \quad \forall \mu \Rightarrow z^\perp \geq s(\varphi_\mu) \quad \forall \mu \\ \Rightarrow z^\perp &\geq \bigvee_{\mu} s(\varphi_\mu) = P_0 \end{aligned} \quad (4.21)$$

De acuerdo con (4.20) y (4.21), tenemos:

$$z^\perp \leq P_0, z^\perp \geq P_0, \Rightarrow z^\perp = P_0 \quad (4.22)$$

y por (4.19) llegamos a lo que queríamos:

$$P_0 = \inf\{q = q^* = q^2 / \alpha_t(q) \longrightarrow_{(t \rightarrow \infty)} \mathbb{I}\}$$

□

Este teorema termina por darle una importancia preponderante al proyector  $P_0$  en el estudio asintótico de la dinámica, pues determina el menor bloque sobre el que hay que estudiar la dinámica para poder conocer completamente el comportamiento asintótico.

Cabe preguntarse la relación entre el proyector  $P_0$  y el proyector Recurrente  $R$ , ya definido antes<sup>11</sup>:

<sup>10</sup>Tal afirmación se demuestra en [30] para Ideales en  $W^*$ -álgebras.

<sup>11</sup>Y que ha sido muy estudiado en las publicaciones existentes.

$$R = \sup \{s(w) : w \in \mathcal{F}(\nu)\} \quad (4.23)$$

Para deducir la relación entre tales proyectores, basta escribir cuidadosamente sus definiciones:

$$\begin{aligned} K &:= \{P / P \text{ es proyector subarmónico minimal}\}, P_0 = \sup(K) \\ M &:= \{s(w) : w \in \mathcal{F}(\nu)\}, R = \sup(M) \end{aligned}$$

Si  $p \in K$  entonces por el lema 4.4.3 existe un estado estacionario  $\varphi$  tal que  $s(\varphi) = p$ . Luego  $p \in M$ , y por lo tanto  $K \subset M$ . Se sigue que  $P_0 \leq R$ .

La contención anterior es estricta, pues hay elementos de  $M$  que no están en  $K$ . Por ejemplo, citamos el apéndice C.1.2 (caso  $a = 0$ ): en tal situación podemos construir un subarmónico no minimal, que sea soporte de un estado estacionario, dado por una combinación convexa de los dos estacionarios minimales que existen.

La consecuencia automática de la desigualdad  $P_0 \leq R$  (y teorema 4.5.1), es:

$$\alpha_t(R) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} \mathbb{I}$$

Este resultado es un corolario inmediato de nuestro razonamiento, pero la demostración de tal afirmación en publicaciones anteriores (ver [20]) no es trivial.

## Capítulo 5

# Familia Fiel de Estados Estacionarios

En este capítulo trabajaremos el caso particular en el que existe una familia fiel de estados estacionarios. Recordamos entonces la definición:

**Definición 5.0.1.** Una familia de estados normales  $\{w_i\}$  se llama fiel, si dado  $A \geq 0$ ,  $w_i(A) = 0 \forall i \Rightarrow A = 0$ .

### 5.1 Teoremas de Relajación

Se define:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\alpha) &= \{A \in B(\mathcal{H}) : \alpha_t(A^*A) = \alpha_t(A^*)\alpha_t(A), \\ &\quad \alpha_t(AA^*) = \alpha_t(A)\alpha_t(A^*), \forall t \geq 0\} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Notar que  $\mathcal{N}(\alpha) \neq \emptyset$  pues  $\mathbb{I} \in \mathcal{N}(\alpha)$ .

El siguiente teorema, de Frigerio & Verri, es de fundamental importancia, pues plantea una equivalencia para relajación del semigrupo:

**Teorema 5.1.1** (Teorema 3.4 de [20]). *Dado un semigrupo dinámico  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ , actuando sobre  $B(\mathcal{H})$ , y asumiendo la existencia de una familia fiel de estados estacionarios, entonces:*

$$E(A) = w. \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha_t(A) \quad \forall A \in B(\mathcal{H}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha) \quad (5.2)$$

De acuerdo con este último teorema, teniendo presentes los teoremas 4.1.1 y 4.1.2 (y la expresión para  $E(A)$  dada por (4.4)), bajo la hipótesis de *existencia de una familia fiel de estados estacionarios*, para poder asegurar convergencia (relajación) de la evolución dada por  $\alpha_t$ , se requiere chequear la igualdad  $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$ , algo que a priori puede ser una tarea muy complicada. En tal sentido, y de acuerdo con Frigerio [17], conviene definir la siguiente herramienta:

**Definición 5.1.1.** Dado un semigrupo dinámico  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ , se define la función disipación sobre  $B(\mathcal{H}) \times B(\mathcal{H})$  con valores en  $B(\mathcal{H})$ , de la siguiente forma:

$$D_t(A, B) = \alpha_t(A^*B) - \alpha_t(A^*)\alpha_t(B)$$

Resulta evidente que:

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{A \in B(\mathcal{H}) : D_t(A, A) = 0 = D_t(A^*, A^*), \forall t \geq 0\}$$

Ahora bien, dada la forma explícita del generador (3.7); si  $A \in \mathcal{N}(\alpha)$ , entonces:

$$\dot{D}(A, A) \equiv L(A^*A) - L(A^*)A - A^*L(A) = \frac{d}{dt}D_t(A, A)|_{t=0} = 0. \quad (5.3)$$

Luego  $\mathcal{N}(\alpha) \subset \text{Ker}(\dot{D}) = \{V_j\}'$ , donde  $\{\cdot\}'$  representa la conmutante<sup>1</sup>. En el apéndice D damos una prueba de esta última afirmación (la contención es trivial, pero la igualdad no).

Esta idea puede resultar útil, pues restringe la búsqueda de elementos<sup>2</sup> de  $\mathcal{N}(\alpha)$ . Sin embargo, aún restan complicaciones: conocer todos los puntos fijos de la dinámica en Heisenberg (es decir, construir  $\mathcal{F}(\alpha)$ ).

Siguiendo la línea de Frigerio y Verri ([20]), Fagnola & Rebolledo presentan (ver [25]) un resultado muy útil para atacar el problema de la convergencia bajo la hipótesis de este capítulo.

El teorema 5.1.1 de Frigerio y Verri dice que  $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$  es condición necesaria y suficiente para asegurar convergencia. En tal sentido, Fagnola & Rebolledo establecen el siguiente enunciado sobre la base de la forma (3.7) ó (3.8) del generador:

**Teorema 5.1.2.** *Dado un semigrupo dinámico  $\alpha_t$ ,  $t \geq 0$ , asumiendo la existencia de una familia fiel de estados invariantes, entonces:*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \{H, V_k, V_k^*; k \geq 1\}' \quad (5.4)$$

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{V_k, V_k^*; k \geq 1\}' \quad (5.5)$$

Conviene detenerse aquí para asimilar esto último. Bastará calcular y comparar las conmutantes del teorema 5.1.2 para decir si hay o no relajación (recordar que por el teorema 5.1.1, la condición  $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$  es necesaria y suficiente para la convergencia).

Bajo la hipótesis de la familia fiel de estados estacionarios, también es posible afirmar que  $\mathcal{F}(\alpha)$  es una  $*$ álgebra.

En el apéndice E (Ejemplo 1) plantaremos un caso en el que no hay una familia fiel de estados estacionarios, pero si hay convergencia (el sistema es relajante), aun cuando  $\mathcal{N}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\alpha)$ . En tal ejemplo,  $\mathcal{F}(\alpha)$  *no* es un álgebra.

Por otra parte, el trabajo de Groh, en cierta manera es fundamental (aunque casi “olvidado” en la historia), en virtud de ser el primero que da como condiciones suficientes la irreducibilidad y la familia fiel de estados estacionarios, para asegurar la relajación.

Expondremos entonces una serie de enunciados en tal dirección<sup>3</sup>:

**Teorema 5.1.3** (Proposición 3.7 de [21]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , irreducible, y asumiendo la existencia de una familia fiel de estados estacionarios, resultan equivalentes:*

I.  $p\sigma(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$

II.  $\lim_{s \rightarrow \infty} \nu_s = P_*$ , siendo  $P_*$  el proyector sobre  $\mathcal{F}(\nu)$ <sup>4</sup>.

<sup>1</sup>La conmutante de un operador  $A$  está dada por el conjunto de operadores  $B$  que satisfacen  $AB = BA$ , es decir, los operadores que conmutan con  $A$ .

<sup>2</sup>Vale decir: “calcule primero la conmutante  $\{V_j\}'$ , y sobre esos elementos busque construir  $\mathcal{N}(\alpha)$ ”.

<sup>3</sup>Ver [21].

<sup>4</sup>Tal proyector está definido de la siguiente manera: si  $\phi_\infty$  es el estado fiel que genera  $\mathcal{F}(\nu)$ , entonces  $P_*\phi = \phi(\mathbb{1})\phi_\infty = \phi_\infty \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ .

**Teorema 5.1.4** (Teorema 3.8 de [21]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , irreducible, y asumiendo la existencia de una familia fiel de estados estacionarios, entonces:  $p\sigma(\mathcal{L}) \cap i\mathbb{R} = \{0\}$*

Luego la condición I del teorema 5.1.3 se cumple siempre (bajo las hipótesis del teorema), y por lo tanto se desprende:

**Corolario 5.1.1** (Corolario 3.9 de [21]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , irreducible, y asumiendo la existencia de una familia fiel de estados estacionarios, entonces:*

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s(A) = \mathbb{I}\phi_\infty(A), \quad \forall A \in B(\mathcal{H}), \quad \text{con } \phi_\infty \in \mathcal{F}(\nu).$$

Este último resultado está escrito en términos de la dinámica Heisenberg. En la imagen de Schrödinger esto se traduce a afirmar la convergencia hacia los estados estacionarios fieles:  $\lim_{s \rightarrow \infty} \nu_s(\phi) = \phi_\infty$ ,  $\forall \phi \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$ , con  $\phi_\infty \in \mathcal{F}(\nu)$ .

En resumen, Groh plantea que si hay irreducibilidad y una familia fiel de estados estacionarios, entonces la dinámica es relajante.

Años más tarde, Fagnola & Rebolledo (en [24]) recuperan un resultado similar:

**Teorema 5.1.5** (Corolario III.1 de [24]). *Dado un semigrupo dinámico  $\nu_t$ ,  $t \geq 0$ , irreducible, y asumiendo la existencia de un estado normal estacionario  $\rho$ , entonces  $\rho$  es el único estado normal fiel estacionario, y  $\nu_t(\sigma)$  converge en norma-traza a  $\rho$  cuando  $t \rightarrow \infty$  para cualquier estado inicial  $\sigma$ .*

Notar la similitud de este último enunciado con lo establecido en el trabajo de Groh. Ya demostramos que las nociones de irreducibilidad de Groh y Fagnola & Rebolledo son equivalentes. Asimismo, de acuerdo con el lema 4.4.3 (y comentarios siguientes) sabemos que tal estado irremediamente es fiel. Recordar además que la existencia de un estado estacionario es automática en dimensión finita.

## 5.2 Sobre las Nociones de Irreducibilidad II

En la sección 4.2, ya dijimos que irreducibilidad según Groh (equivalentemente Fagnola & Rebolledo) implica la irreducibilidad según Evans. Y dijimos que la recíproca es falsa, argumentando un ejemplo (apéndice C.1.1, caso  $a = 0$ ).

Tal contraejemplo es un caso en el que no hay una familia fiel de estados estacionarios. ¿Qué sucede si existe tal familia? Para responder a esta pregunta, comenzamos haciendo una referencia al trabajo de Evans [19]:

**Teorema 5.2.1.** *Un semigrupo dinámico  $\alpha_t$  es irreducible (Evans) si y sólo si:*

$$\{A \in B(\mathcal{H}) : \alpha_t(A^*A) = A^*A; \alpha_t(AA^*) = AA^*; \alpha_t(A) = A; \forall t\} = \mathbb{C} \mathbb{I} \quad (5.6)$$

Agregamos la hipótesis de existencia de una familia fiel de estados estacionarios:

**Lema 5.2.1.** *Dado el semigrupo dinámico  $\alpha_t$ , y existe una familia fiel de estados estacionarios, entonces:  $A \in \mathcal{F}(\alpha) \Rightarrow A^*A \in \mathcal{F}(\alpha)$ ,  $AA^* \in \mathcal{F}(\alpha)$ .*

*Demostración.* Sea  $A \in \mathcal{F}(\alpha)$  ( $\Rightarrow A^* \in \mathcal{F}(\alpha)$ ), entonces por la completa positividad se satisface:

$$A^*A = \alpha_t(A^*)\alpha_t(A) \leq \alpha_t(A^*A)$$

Luego, para todo estado  $\rho$  fiel y estacionario:

$$\begin{aligned} 0 \leq \text{tr}[\rho(\alpha_t(A^*A) - A^*A)] &= \text{tr}[\nu_t(\rho)(A^*A) - \rho(A^*A)] \\ &= \text{tr}[\rho(A^*A) - \rho(A^*A)] = 0 \end{aligned}$$

Y esto implica que:  $\alpha_t(A^*A) = A^*A$ .

El razonamiento se aplica análogamente para  $AA^*$ .  $\square$

Automáticamente tenemos que:

**Corolario 5.2.1.** *Bajo la hipótesis de existencia de una familia fiel de estados estacionarios, el semigrupo dinámico  $\alpha_t$  es irreducible (Evans) si y sólo si:*

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathbb{C} \mathbb{I} \quad (5.7)$$

Ahora podemos responder a la pregunta formulada más arriba, con el siguiente enunciado:

**Teorema 5.2.2.** *Sea un semigrupo dinámico  $\nu_t$  que admite una familia fiel de estados estacionarios, y además  $\mathcal{F}(\alpha) = \mathbb{C} \mathbb{I}$ . Entonces  $\nu_t$  satisface la irreducibilidad según Groh.*

*Demostración.* Sean  $P$  proyector subarmónico,  $g = \sup_{t \geq 0} \alpha_t(P)$  y  $\Phi$  la familia fiel de estados estacionarios.

$\forall \varphi \in \Phi$  es cierto que:

$$\varphi(g) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(\alpha_t(P)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(P) = \varphi(P) \quad (5.8)$$

En la primera igualdad hemos usado la normalidad, y en la segunda usamos la dualidad de la dinámica, y que  $\varphi$  es estacionario.

Por otro lado, tenemos que  $g \in \mathcal{F}(\alpha)$ , y por ende  $g = z\mathbb{I}$ ,  $0 \leq z \leq 1$ .

Si  $z = 0$  entonces  $\varphi(P) = 0 \forall \varphi \in \Phi \Rightarrow P = 0$ .

Supongamos ahora  $z \neq 0$ . Entonces por el teorema 4.4.1 tenemos que  $g = \mathbb{I}$ . Entonces por la ecuación (5.8):  $\varphi(P) = 1 \forall \varphi \in \Phi \Rightarrow P = \mathbb{I}$ .  $\square$

De acuerdo con estos resultados, si existe una familia fiel de estados estacionarios, entonces todas las nociones de irreducibilidad son equivalentes. Es decir, en tal situación cualquiera de las siguientes condiciones son equivalentes<sup>5</sup>:

1.  $\alpha_t(P) \geq P \Rightarrow P = 0, \mathbb{I}$  (Fagnola & Rebolledo).
2.  $\alpha_t(P) = P \Rightarrow P = 0, \mathbb{I}$  (Evans, Mohari).
3. No existen caras invariantes no triviales para  $\nu_t$  (Groh).
4.  $\mathcal{F}(\alpha) = \mathbb{C} \mathbb{I}$ .

### 5.3 Reducción de la dinámica

Un comentario aparte merece nuestro proyector  $P_0$  de la sección 4.5. Trivialmente, bajo la hipótesis de trabajo de este capítulo,  $P_0 = R = \mathbb{I}$ . Y además, el único proyector decadente es  $P = 0$ .

En definitiva, no es posible *reducir* la dinámica. Pero los resultados de este capítulo son muy fuertes en el sentido de asegurar relajación.

<sup>5</sup>Recordar que la equivalencia entre las nociones de Groh y Fagnola & Rebolledo se demostrará en la próxima sección.

## Capítulo 6

# Asintótica y Entrelazamiento

### 6.1 Panorama General

Habida cuenta de la importancia e interés que ha adquirido el *entrelazamiento* en los últimos años, existe una gran variedad de artículos acerca de cómo preservar el entrelazamiento de un sistema compuesto durante algún tiempo, cómo aumentarlo, e incluso cómo generarlo.

En la mayoría de los casos se asume que durante la evolución dinámica existe un inevitable acople a algún ambiente que provoca efectos de decoherencia y destrucción del entrelazamiento.

Fuera de la problemática del entrelazamiento, existen trabajos (como el de Dietz [31]) en los que se analiza la la decoherencia y la entropía en sistemas cuya dinámica está descrita por semigrupos Markovianos.

Lendi & van Wonderen ([32]), trabajan bajo la hipótesis de una dinámica *genuinamente relajante*, para analizar la evolución del entrelazamiento de un sistema bipartito. Mediante el análisis de la medida de entrelazamiento de Wootters, se puede estudiar un caso en el que la evolución temporal provoca que un estado inicialmente separable y puro, se hace entrelazado durante un tiempo finito, y asintóticamente se vuelve nuevamente separable y puro. El análisis también considera temperaturas finitas, y su incidencia en la evolución del entrelazamiento.

Otro artículo interesante en la misma línea, de Benatti *et al* ([33]), busca usar el ambiente (dinámica irreversible) para generar entrelazamiento. Se trabaja sobre estados inicialmente separables, y se estudia la creación de entrelazamiento vía el criterio PPT.

La generación de estados entrelazados mediante dinámicas disipativas ha sido objeto de estudio últimamente. Kraus *et al* ([34]) parten desde un estado mezcla arbitrario, y llegan asintóticamente a un estado puro entrelazado, haciendo uso de una dinámica Markoviana.

### 6.2 Análisis Geométrico

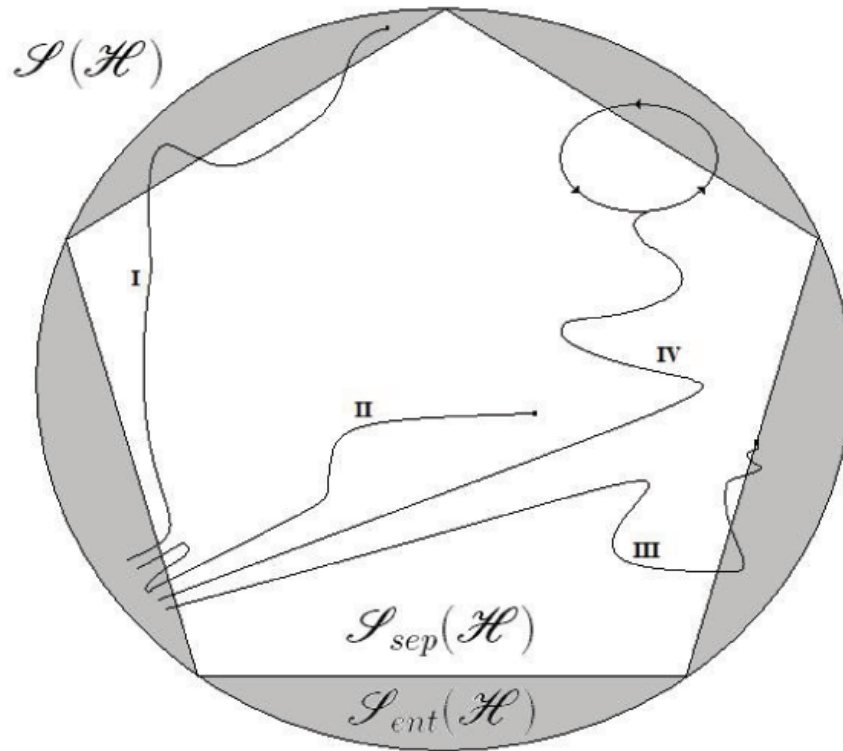
Abordaremos ahora el análisis de la evolución del entrelazamiento desde una perspectiva eminentemente geométrica. En tal dirección se sitúa un trabajo de Terra Cunha [35], el cual servirá como guía de nuestro breve análisis.

La siguiente imagen intenta representar el conjunto  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  de estados<sup>1</sup>. Claramente, los bordes de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  son los extremales (estados puros). Dentro de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$  tenemos el conjunto  $\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$  de estados separables, donde cada vértice de ese polígono imaginario denota un estado puro separable (i.e. debería haber infinitos vértices).

---

<sup>1</sup>Sin entrar en la discusión acerca de cómo debería ser realmente el dibujo de  $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ ,  $\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$  y  $\mathcal{S}_{ent}(\mathcal{H})$ , el esquema es meramente ilustrativo.





En la imagen se incluyen cuatro trayectorias posibles para la dinámica de un sistema cuántico abierto. Asumimos que inicialmente partimos de un estado entrelazado.

En la situación I el sistema evoluciona, volviéndose separable y entrelazado varias veces, hasta que asintóticamente alcanza un estado estacionario entrelazado. Este sistema es relajante.

En la situación II, también tenemos un sistema relajante, pero el estado final asintótico (y estacionario) es separable.

En la situación III el sistema relaja a un estado separable (que está en el borde del conjunto  $\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$ , recordar que tal conjunto es *cerrado*). La sistema *oscila* entre estados separables y entrelazados infinitas veces hasta “llegar” al límite.

En la situación IV, a diferencia de las anteriores, no existe el límite. En el dibujo se “describe” (ilustrativamente) un caso en el que el entrelazamiento y la separabilidad se suceden indefinidamente. Obviamente también podría suceder que no exista el límite, pero la trayectoria siempre esté dentro del conjunto  $\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$  o de  $\mathcal{S}_{ent}(\mathcal{H})$ . Este tipo de situaciones podrían encontrarse al contemplar casos correspondientes al teorema 4.1.4 (Groh).

Las tres primeras situaciones, se corresponden entonces con sistemas relajantes. En el marco del estudio realizado en capítulos anteriores, tal situación podría corresponderse con dinámicas irreducibles y existencia de una familia fiel de estados estacionarios (bastaría pedir que exista un estado fiel estacionario).

En [35] se considera además el caso en el que existe más de un estado asintótico. Por ejemplo, si existiera una familia fiel de estados estacionarios (compuesta por más de un estado) este sería el caso. Como  $\mathcal{F}(\nu)$  es convexo<sup>2</sup>, y por lo tanto pueden darse toda una variedad de resultados.

<sup>2</sup>Cualquier combinación convexa de estados estacionarios es un estado estacionario, previa normalización de la traza.

Supongamos que la dinámica relaja al conjunto  $\mathcal{F}(\nu)$ , entonces pueden presentarse las siguientes situaciones:

1.  $\mathcal{F}(\nu) \subset \mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$  y además  $\mathcal{F}(\nu) \cap \partial\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H}) = \emptyset$  (no toca el borde).
2.  $\mathcal{F}(\nu) \subset \mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$  pero  $\mathcal{F}(\nu) \cap \partial\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H}) \neq \emptyset$ .
3.  $\mathcal{F}(\nu) \subset \mathcal{S}_{ent}(\mathcal{H})$ .
4.  $\mathcal{F}(\nu) \cap \mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H}) \neq \emptyset$  y también  $\mathcal{F}(\nu) \cap \mathcal{S}_{ent}(\mathcal{H}) \neq \emptyset$  (hay estados estacionarios separables y entrelazados).

Como vemos, cualquier análisis asintótico del entrelazamiento, debe incluir primero un estudio pormenorizado de la dinámica asintótica, estados estacionarios y relajación, tal como hemos realizado en los capítulos anteriores.

Definamos ahora:

$$t_{ent} := \inf\{ t \geq 0 / \forall s > t, \nu_s(\rho) \text{ es entrelazado } \} \quad (6.1)$$

$$t_{sep} := \inf\{ t \geq 0 / \forall s > t, \nu_s(\rho) \text{ es separable } \} \quad (6.2)$$

Los valores de  $t_{ent}$  y  $t_{sep}$  están definidos *siempre* en  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ .

En la situación I antes descrita, como  $\mathcal{S}_{ent}(\mathcal{H})$  es abierto, el conjunto sobre el que se toma ínfimo en (6.1) es no vacío. Luego  $t_{ent}$  es finito, y  $t_{sep} = \infty$ .

En II, como el límite está en el interior de  $\mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$ , entonces el conjunto sobre el que se toma el ínfimo en (6.2) tampoco es vacío, y por lo tanto  $t_{sep} < \infty$  ( $t_{ent} = \infty$ ).

En la situación III, sólo se puede decir que  $t_{sep} = t_{ent} = \infty$ . Lo mismo debe decirse para el caso IV.

Una pregunta interesante radica en plantearse la existencia de cotas para  $t_{ent}$  y  $t_{sep}$  dada alguna dinámica en un sistema abierto particular.

# Conclusiones Finales

En el presente trabajo se estudiaron los comportamientos asintóticos de dinámicas regidas por semigrupos Markovianos. Primeramente, se planteó un panorama general, con ejemplos que ilustran diferentes situaciones posibles (y en los apéndices la exploración de casos particulares constituye un interesante compendio de ejemplos).

Se introdujeron varias nociones de irreducibilidad y se analizaron las relaciones entre ellas. Tal noción resulta fundamental para asegurar la relajación del semigrupo. Fuera de la condición de irreducibilidad, hay un resultado de Groh que establece la posibilidad que el semigrupo se comporte de manera cuasi periódica.

Se expuso además una caracterización para proyectores invariantes. Por otra parte, se introdujo el concepto de subarmonicidad para proyectores, algo que tiene una importancia muy relevante tanto para los estados invariantes (su soporte es subarmónico) como para la asintótica del semigrupo. Tales proyectores fueron caracterizados en base a propiedades algebraicas, asintóticas y con relación al generador del semigrupo.

El análisis de la dinámica también fue presentado con base a argumentos geométricos, en términos de caras invariantes minimales, cada una de las cuales presenta un único estado normal invariante (y es fiel en esa cara).

Un aporte interesante (y de alguna manera innovador) de este trabajo radica en la forma de *reducir* la dinámica (asintótica), con los resultados originales que se demostraron en tal dirección. Vimos que si  $P_0$  es el supremo de los subarmónicos minimales, entonces él también es subarmónico, y demostramos que tiende asintóticamente a la identidad y que es el ínfimo de los proyectores que lo hacen. Tal como mostramos, esto ayuda a la reducción de la dinámica asintótica.

Un caso aparte lo constituye la existencia de una familia fiel de estados estacionarios, situación en el cual ya existen criterios sencillos para dar afirmaciones acerca de la relajación de la dinámica. En tal situación, nuestros enunciados para la reducción de la dinámica, no son útiles.

Finalmente, se planteó, a modo de motivación para eventuales trabajos en el área, su relación con la evolución asintótica del *entrelazamiento* cuántico de sistemas compuestos, un fenómeno de gran interés actual.

## Apéndice A

# Equivalencia: Lindblad y forma normal de Kossakowski

: Si bien a lo largo del presente trabajo se hace uso de la formulación de Lindblad ([13]) para los generadores, presentaremos aquí su equivalencia con la formulación del trabajo de Gorini, Kossakowski y Sudarshan ([12]), lo cual resulta necesario para establecer la condición de Spohn (suficiente para asegurar que el semigrupo sea genuinamente relajante).

La *forma normal de Kossakowski* establece:

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^M a_{ik} ([F_i, \rho F_k^*] + [F_i \rho, F_k^*]) \quad (\text{A.1})$$

donde:

$$\begin{aligned} H &= H^* & Tr[H] &= 0 \\ M &= N^2 - 1 & A &= \{a_{ik}\}_1^M & A &= A^* \geq 0 \\ Tr[F_i] &= 0 & Tr[F_i F_k^*] &= \delta_{ik} & 1 \leq i, k \leq M \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Podemos llegar a esta formulación desde la expresión (3.6) mediante el siguiente razonamiento. Asumimos que la dimensión de las matrices densidad es  $N \times N$ , pero bajo la restricción de normalización (traza 1), la dimensión del espacio considerado resulta ser de  $N^2 - 1$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\rho) &= -i[H, \rho] + \sum_j (V_j \rho V_j^* - \frac{1}{2} [V_j^* V_j, \rho]_+) \\ \mathcal{L}(\rho) &= -i[H, \rho] + \sum_j (V_j \rho V_j^* - \frac{1}{2} V_j^* V_j \rho - \frac{1}{2} \rho V_j^* V_j) \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Ahora, sin pérdida de generalidad, tomamos una base ortonormal del espacio considerado, constituido por  $\{F_i\}_1^M$ , con  $M = N^2 - 1$ . Esta dimensión menor nos permite elegir como condición  $Tr[F_i] = 0$ .

Luego:

$$V_j = \sum_{m=1}^M \gamma_m^j F_m \quad (\text{A.4})$$

$$V_j^* = \sum_{n=1}^M \overline{\gamma_n^j} F_n^* \quad (\text{A.5})$$

Introduciendo esto en (A.3) tenemos:

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{j,m,n=1}^M \gamma_m^j \overline{\gamma_n^j} (F_m \rho F_n^* - \frac{1}{2} F_n^* F_m \rho - \frac{1}{2} \rho F_n^* F_m) \quad (\text{A.6})$$

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \frac{1}{2} \sum_{j,m,n=1}^M \gamma_m^j \overline{\gamma_n^j} ([F_m, \rho F_n^*] + [F_m \rho, F_n^*]) \quad (\text{A.7})$$

Esta última expresión resulta equivalente a (A.1), definiendo:

$$a_{mn} = \sum_{j=1}^M \gamma_m^j \overline{\gamma_n^j} \quad (\text{A.8})$$

Lo cual automáticamente asegura que  $A = A^*$ .

## Apéndice B

# Dinámica con Generadores Simples

Una manera didáctica y sencilla de comenzar a entender acerca de estados estacionarios y asintótica de la dinámica, radica en el estudio de la versión simplificada de los generadores. Entonces realizaremos ahora una exploración de los resultados existentes respecto a los llamados generadores simples (tomando como base el artículo de Baumgartner, Narnhofer y Thirring [27]). Por definición, un generador es simple si se construye de sólo un término en las sumas de (3.5) y (3.6), y asumiendo que no hay parte reversible o hamiltoniana. Es decir:

$$L(A) = V^*AV - \frac{1}{2}(V^*VA + AV^*V) \quad (\text{B.1})$$

$$\mathcal{L}(\varrho) = V\varrho V^* - \frac{1}{2}(V^*V\varrho + \varrho V^*V) \quad (\text{B.2})$$

Nos interesan entonces ahora los resultados sobre asintótica y estados estacionarios de la dinámica asociada a estos generadores. Con tales fines, recurrimos primero a un análisis espectral: estudiamos los autovalores de  $V$ .

En primer lugar, si  $V$  no tiene a cero como autovalor, automáticamente podemos construir un estado estacionario:

$$\varrho_\infty = \frac{(V^*V)^{-1}}{\text{tr}[(V^*V)^{-1}]} \quad (\text{B.3})$$

Basta evaluar el generador en este estado, para verificar que se cumple la condición (3.11), es decir es estacionario.

Tal como se advierte en [27], resulta importante estructurar  $\mathcal{H}$  y la acción de los operadores según un conjunto de proyectores que conmuten con  $V$ :

**Proposición B.0.1.** *La separación  $V = \bigoplus_i V_i$  de acuerdo a un conjunto de proyectores ortogonales  $P_i$  que conmutan con  $V$  es única, excepto por un reordenamiento unitario de autoespacios  $\mathcal{H}_i = P_i\mathcal{H}$  sobre los cuales actúan partes equivalentes  $V_i$ .*

*La acción del generador se separa en la forma:*

$$\mathcal{L}(P_j\varrho P_k) = P_j\mathcal{L}(\varrho)P_k \quad (\text{B.4})$$

Los proyectores que conmutan con  $V$  crean una subálgebra de observables estacionarios:  $L(P_i) = 0$ . La evolución dentro del subespacio está dada por  $\mathcal{L}_{[V_i]}$ . El conocimiento de la acción total de  $\mathcal{L}_{[V]}$  consiste en la acción de cada  $\mathcal{L}_{[V_i]}$  con  $V_i$  indisociable<sup>1</sup> y estudiando la evolución de las relaciones de fase entre los diferentes subespacios  $\mathcal{H}_i$ .

**Proposición B.0.2.** *Dado  $V$  indisociable y sin autovalores nulos, entonces  $\mathcal{L}_{[V]}$  no tiene estados estacionarios en el borde (entendiéndose por “borde” al conjunto de matrices densidad cuya dimensión del espacio imagen es menor que la dimensión de  $\mathcal{H}$ ).*

El siguiente es uno de los resultados principales de [27]. A continuación, daremos una demostración alternativa propia.

**Proposición B.0.3.** *Si  $V$  es indisociable y tiene a cero como autovalor, entonces el autovector asociado a tal autovalor corresponde a un estado estacionario puro. Tal estado es un atractor, y ningún otro estado es estacionario.*

*Demostración.* Asumimos que tenemos a  $V$  escrito como un bloque  $q \times q$  en la forma canónica de Jordan, e integramos el sistema de manera directa:

$$\dot{\varrho}_{j,k} = [\mathcal{L}_{[V]}(\varrho)]_{j,k} \quad (\text{B.5})$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.6})$$

$$V_{j,k} = \delta_{j,k-1} \quad V_{j,k}^* = \delta_{j,k+1}$$

$$(V\varrho)_{j,k} = \sum_s V_{j,s} \varrho_{s,k} = \sum_s \delta_{j,s-1} \varrho_{s,k} = \varrho_{j+1,k}$$

$$(V\varrho V^*)_{j,k} = \sum_s (V\varrho)_{j,s} V_{s,k}^* = \sum_s \varrho_{j+1,s} \delta_{s,k+1} = \varrho_{j+1,k+1}$$

Por otra parte:

$$(V^*V)_{n,m} = \sum_s V_{n,s}^* V_{s,m} = \sum_s \delta_{n,s+1} \delta_{s,m-1} = \delta_{n-1,m-1}$$

Es decir:

$$V^*V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$(\varrho V^*V)_{j,k} = \sum_s \varrho_{j,s} (V^*V)_{s,k} = \sum_s \varrho_{j,s} \delta_{s-1,k-1}$$

$$(\varrho V^*V)_{j,k} = \begin{cases} \varrho_{j,k} & \text{si } k > 1 \\ 0 & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

<sup>1</sup>Traducido del término inglés *indecomposable*, “no susceptible de ser descompuesto”. Esta terminología es simplemente una manera de decir que  $V_i$  es un bloque de Jordan, dentro de la descomposición de  $V$  en su correspondiente forma canónica de Jordan.

Analogamente:

$$(V^*V\varrho)_{j,k} = \sum_s (V^*V)_{j,s} \varrho_{s,k} = \sum_s \delta_{j-1,s-1} \varrho_{s,k}$$

$$(V^*V\varrho)_{j,k} = \begin{cases} \varrho_{j,k} & \text{si } j > 1 \\ 0 & \text{si } j = 1 \end{cases}$$

Entonces la ecuación (B.5) queda constituida de la siguiente manera:

$$\dot{\varrho}_{1,1} = \varrho_{2,2} \quad (\text{B.7})$$

$$\dot{\varrho}_{1,k} = \varrho_{2,k+1} - \frac{1}{2} \varrho_{1,k} \quad (k > 1) \quad (\text{B.8})$$

$$\dot{\varrho}_{j,1} = \varrho_{j+1,2} - \frac{1}{2} \varrho_{j,1} \quad (j > 1) \quad (\text{B.9})$$

$$\dot{\varrho}_{j,k} = \varrho_{j+1,k+1} - \varrho_{j,k} \quad (k > 1 \text{ y } j > 1) \quad (\text{B.10})$$

La ecuación (B.10) corresponde a un bloque  $(q-1) \times (q-1)$ , cuya resolución es un ejemplo típico de sistemas autónomos lineales. Fácilmente se ve que la solución está dada por:

$$\varrho_{q,k}(t) = a_{q,k} e^{-t} \quad (k > 1) \quad (\text{B.11})$$

$$\varrho_{j,q}(t) = a_{j,q} e^{-t} \quad (j > 1) \quad (\text{B.12})$$

$$\varrho_{j,k}(t) = e^{-t} \sum_{h=1}^{q-\max(j,k)} \frac{a_{j+h,k+h}}{h!} t^h \quad (j > 1, k > 1, j \neq q, k \neq q) \quad (\text{B.13})$$

con  $a_{m,n}$  complejos arbitrarios.

Por otra parte, analizando las ecuaciones (B.8) y (B.9), tenemos que:

$$\varrho_{1,q}(t) = a_{1,q} e^{\frac{-t}{2}} \quad (\text{B.14})$$

$$\varrho_{q,1}(t) = a_{q,1} e^{\frac{-t}{2}} \quad (\text{B.15})$$

$$\varrho_{1,k}(t) = \left( e^{-t} \sum_{h=0}^{q-k} \tilde{a}_{1+h,k+h} t^h \right) + b e^{\frac{-t}{2}} \quad (k > 1, k \neq q) \quad (\text{B.16})$$

$$\varrho_{j,1}(t) = \left( e^{-t} \sum_{h=0}^{q-j} \tilde{a}_{j+h,1+h} t^h \right) + c e^{\frac{-t}{2}} \quad (j > 1, j \neq q) \quad (\text{B.17})$$

Y por último, la resolución de (B.7) resulta muy sencilla (la constante de integración es igual a 1, algo que quedará más claro cuando hagamos tender  $t \rightarrow \infty$ ):

$$\varrho_{1,1}(t) = \left( e^{-t} \sum_{h=0}^{q-2} \tilde{a}_{1+h,1+h} t^h \right) + 1 \quad (\text{B.18})$$

De acuerdo con las expresiones (B.11) ... (B.18), tenemos que:

$$\varrho(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \varrho_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$



Notar que  $\text{tr}[\varrho_\infty] = 1$ , por lo que es una matriz densidad. Además, claramente es el proyector espectral asociado al autovalor cero de (B.6). Como hemos resuelto el sistema, vemos que todo estado tiende a  $\varrho_\infty$ , por lo tanto éste es atractor, y es el único.  $\square$

De acuerdo con [27], los resultados acerca de estados estacionarios para generadores simples se pueden sintetizar según el siguiente teorema:

**Teorema B.0.1.** *Dado el generador de la dinámica según (B.2):*

1. *Disipación. Si  $V$  es indisociable, y tiene autovalores no nulos, hay un único estado estacionario en el “interior”, y está dado por (B.3).*
2. *Decaimiento. Si  $V$  indisociable, con cero como autovalor, hay un único estado estacionario, es atractor, y corresponde al autovector asociado al autovalor nulo.*
3. *Defase elemental. Si  $V$  es diagonalizable, los estados invariantes están dados por el conjunto de matrices densidad que conmutan con  $V$ .*
4. *Separación estacionaria. Si  $V$  es disociable,  $V = \bigoplus_i V_i$ , con cada bloque  $V_i$  indisociable, entonces las sumas directas de estados estacionarios  $\varrho_i$  de cada bloque, forman el conjunto de todos los estados estacionarios que no tienen relaciones de fase entre subespacios independientes  $\mathcal{H}_i$ .*
5. *Defase de partes. Si  $V$  es disociable, hay un conjunto de “relaciones de fase” invariantes  $\varrho_{j,k}$  entre los subespacios que son dominio de definición de  $V_j$  y  $V_k$ , si y sólo si ambos  $V_j$  y  $V_k$  tienen autovalor cero, o bien  $V_j \cong V_k$  (son equivalentes). En el primer caso los bloques invariantes (fuera de la diagonal) son  $\varrho_{j,k} = \sum_{\alpha,\beta} c_{\alpha,\beta} |v_{j,\alpha}\rangle\langle w_{k,\beta}|$  donde  $|v_{j,\alpha}\rangle$  y  $|w_{k,\beta}\rangle$  son los autovectores (asociados al autovalor nulo) propios de  $V_j$  y  $V_k$ . En el segundo caso, cualquier relación de fase invariante  $\varrho_{j,k}$  es equivalente a  $\varrho_j$  multiplicado por algún número complejo, donde  $\varrho_j \cong \varrho_k$  es el estado estacionario.*

Un último enunciado de [27] establece que dado un estado  $\varrho$  puro o con matriz densidad (no constante) cuya dimensión de su espacio imagen sea igual a la de  $\mathcal{H}$ , entonces existe un semigrupo dinámico con un generador simple GKS-Lindblad cuyo único estado estacionario es  $\varrho$ .

## Apéndice C

# Generadores Simples: casos de dimensión baja

Analizaremos la dinámica a partir de generadores simples en casos de dimensión baja (matrices densidad  $3 \times 3$  y  $4 \times 4$ ), buscando el conjunto  $\mathcal{F}(\nu)$  de estados estacionarios. En los casos más simples, daremos toda la información posible que pueda calcularse: la solución exacta de la dinámica en ambas imágenes,  $\mathcal{F}(\alpha)$ ,  $\mathcal{N}(\alpha)$ , etc., o bien estableceremos alguna conexión con los argumentos expuestos en los capítulos 4 y 5, y el apéndice B.

Teniendo presente la forma del generador (B.2), subdividiremos cada caso de acuerdo a la estructura de bloques de Jordan de  $V$ .

### C.1 Caso $3 \times 3$

#### C.1.1 Bloque Indisociable

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1.  $a \neq 0$

Introducimos primero la notación:

$$\mathbb{B}_a^{3 \times 3} = \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2+|a|^4}{1+2|a|^2+3|a|^4} & \frac{-|a|^2(1+|a|^2)}{a(1+2|a|^2+3|a|^4)} & \frac{|a|^4}{a^2(1+2|a|^2+3|a|^4)} \\ \frac{-|a|^2(1+|a|^2)}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4)} & \frac{|a|^2(1+|a|^2)}{1+2|a|^2+3|a|^4} & \frac{-|a|^4}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4)} \\ \frac{|a|^4}{\bar{a}^2(1+2|a|^2+3|a|^4)} & \frac{-|a|^4}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4)} & \frac{|a|^4}{1+2|a|^2+3|a|^4} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Entonces:

$$\mathcal{F}(\nu) = \{\mathbb{B}_a^{3 \times 3}\} \quad (\text{C.2})$$

Nótese que  $\text{tr}[\mathbb{B}_a^{3 \times 3}] = 1$  y además  $(\mathbb{B}_a^{3 \times 3})^* = \mathbb{B}_a^{3 \times 3}$ .

Este invariante es el predice la ecuación (B.3), es decir:

$$\mathbb{B}_a^{3 \times 3} = \frac{(V^*V)^{-1}}{\text{tr}[(V^*V)^{-1}]}$$

La integración en este caso no es sencilla, habida cuenta de la cantidad de ecuaciones

acopladas que resultan. Sin embargo, observamos que  $\mathcal{F}(\nu)$  está generado por un único estado fiel (ya que no tiene autovalores nulos, i.e.  $0 \notin \sigma(\mathbb{B}_a^{3 \times 3})$ ), y por lo tanto, de acuerdo a los argumentos de Groh (sección 4), podemos asegurar que la dinámica converge a ese estado estacionario, sin importar el estado inicial.

Los puntos fijos de la dinámica Heisenberg y el conjunto  $\mathcal{N}(\alpha)$  son iguales, resultando ser triviales:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{N}(\alpha) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{C.3})$$

2.  $a = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{C.4})$$

La integración explícita es:

$$\begin{aligned} \rho_{2,2}(t) &= [\rho_{3,3}(0)t + \rho_{2,2}(0)]e^{-t} \\ \rho_{3,3}(t) &= \rho_{3,3}(0)e^{-t} \\ \rho_{1,1}(t) &= -\rho_{2,2}(t) - \rho_{3,3}(t) + 1 \\ \overline{\rho_{2,1}(t)} &= \rho_{1,2}(t) = -2\rho_{2,3}(0)e^{-t} + [\rho_{1,2}(0) + 2\rho_{2,3}(0)]e^{-\frac{t}{2}} \\ \overline{\rho_{3,1}(t)} &= \rho_{1,3}(t) = \rho_{1,3}(0)e^{-\frac{t}{2}} \\ \overline{\rho_{3,2}(t)} &= \rho_{2,3}(t) = \rho_{2,3}(0)e^{-t} \end{aligned}$$

Y de allí sabemos que la dinámica converge hacia el único estado estacionario, independientemente del estado inicial.

Nótese que el soporte de este estado estacionario es el mismo (en sentido matricial). Entonces haciendo uso del Lema 4.4.1, tenemos que el siguiente proyector es subarmónico<sup>1</sup>:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora pensemos en la dinámica Heisenberg. La evolución de un observable  $A$  está dada por:

---

<sup>1</sup>De hecho, es posible verificar explícitamente que tal proyector cumple la definición 4.1.3.

$$\begin{aligned}
 A_{1,1}(t) &= A_{1,1}(0) \\
 A_{1,2}(t) &= A_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}} \\
 A_{1,3}(t) &= A_{1,3}(0)e^{-\frac{t}{2}} \\
 A_{2,1}(t) &= \overline{A_{1,2}(0)}e^{-\frac{t}{2}} \\
 A_{2,2}(t) &= A_{1,1}(0) + [A_{2,2}(0) - A_{1,1}(0)]e^{-t} \\
 A_{2,3}(t) &= 2A_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}} + [A_{2,3}(0) - 2A_{1,2}(0)]e^{-t} \\
 A_{3,1}(t) &= \overline{A_{1,3}(0)}e^{-\frac{t}{2}} \\
 A_{3,2}(t) &= 2\overline{A_{1,2}(0)}e^{-\frac{t}{2}} + [\overline{A_{2,3}(0)} - 2\overline{A_{1,2}(0)}]e^{-t} \\
 A_{3,3}(t) &= A_{1,1}(0) + [(A_{2,2}(0) - A_{1,1}(0))t + A_{3,3}(0) - A_{1,1}(0)]e^{-t}
 \end{aligned}$$

Los puntos fijos de la dinámica son:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$$

De la integración anterior se observa que hay convergencia hacia el espacio unidimensional  $\mathcal{F}(\alpha)$ .

La matriz identidad  $\mathbb{I}^{3 \times 3}$  es un proyector invariante. Y es minimal, pues no hay ningún otro proyector conservado. Por otra parte, si tomamos el proyector subarmónico  $P_1$  definido más arriba, claramente no es invariante, y su evolución está dada por:

$$\alpha_t(P_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - (t+1)e^{-t} \end{pmatrix}$$

Lo primero que advertimos es que tenemos un proyector  $P_1$  subarmónico (está asociado a una cara invariante), pero él mismo no es invariante (dinámica Heisenberg).

Veamos entonces qué podemos decir respecto a las nociones de irreducibilidad (sección 4.2). Tenemos que  $\alpha_t(P_1) \geq P_1$ , siendo  $P_1$  un proyector no trivial (subarmónico). Luego, este semigrupo es *reducible* desde el punto de vista de Fagnola y Rebolledo (equivalentemente Groh). Además, como ya dijimos, el único proyector invariante (armónico) es trivial (i.e. la identidad): entonces el semigrupo es *irreducible* según Evans. Este es entonces el contraejemplo por el cual la irreducibilidad según Evans *no implica* la irreducibilidad según Fagnola y Rebolledo (equivalentemente Groh).

Otro detalle que conviene marcar radica en que  $\mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{N}(\alpha) = \lambda\mathbb{I}$ . Este es un ejemplo entonces en el que se satisface tal igualdad, no hay una familia fiel de estados estacionarios, y el sistema es única o genuinamente relajante. Además,  $\mathcal{F}(\alpha)$  trivialmente forma un álgebra<sup>2</sup>.

Ahora usaremos este ejemplo para justificar otra de las afirmaciones que dijimos antes. En la sección 4.5, aseveramos que si  $P$  decadente no implica  $\alpha_t(P^\perp) \geq P^\perp$  (i.e.  $P$  superarmónico), contrariando lo que dicen Baumgartner & Narnhofer en [28]. Sea el siguiente proyector:

<sup>2</sup>Tal como ya dijimos, en el apéndice E (vease el ejemplo 1 de tal apéndice) plantearemos un caso en el que tampoco hay una familia fiel de estados estacionarios, pero hay convergencia (el sistema es relajante), aun cuando  $\mathcal{N}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\alpha)$ . En ese ejemplo,  $\mathcal{F}(\alpha)$  *no* es un álgebra.

$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con la integración expuesta más arriba, la integración da por resultado:

$$\alpha_t(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & t e^{-t} \end{pmatrix}$$

Claramente  $\alpha_t(P_2) \xrightarrow{(t \rightarrow \infty)} 0$ , es decir,  $P_2$  es decadente. Veremos que  $P_2$  no es superarmónico. De hecho,

$$P_2 - \alpha_t(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & -t e^{-t} \end{pmatrix}$$

y como  $-t e^{-t} < 0$ , el operador definido como  $P_2 - \alpha_t(P_2)$  no puede ser positivo (tiene un autovalor negativo), y por lo tanto  $P_2$  no es superarmónico.

### C.1.2 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 1$

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Nuevamente introducimos notación:

$$\mathbb{B}_a^{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2}{1+2|a|^2} & \frac{-|a|^2}{a(1+2|a|^2)} \\ \frac{-|a|^2}{\bar{a}(1+2|a|^2)} & \frac{|a|^2}{1+2|a|^2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

1.  $a \neq 0$ ,  $b$  arbitrario (puede o no ser nulo)

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \left( \begin{array}{c|c} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) \right\}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (\text{C.6})$$

La integración se traduce en la resolución de 3 sistemas de ecuaciones. En primer lugar, tenemos un sistema lineal de ecuaciones acopladas para  $\rho_{1,1}$ ,  $\rho_{1,2}$ ,  $\rho_{2,1}$ ,  $\rho_{2,2}$ , en el que se presenta un autovalor nulo y otros tres autovalores negativos. Luego, tenemos un sistema lineal de ecuaciones acopladas para  $\rho_{1,3}$ ,  $\rho_{2,3}$  y otro para  $\rho_{3,1}$ ,  $\rho_{3,2}$ , en los cuales la parte real de los autovalores resulta siempre negativa. Conviene aclarar que  $\rho_{3,3}(t) = \rho_{3,3}(0)$ .

Dejando de lado la integración directa, podemos afirmar que  $\mathcal{F}(\nu)$  está constituido por una familia fiel de estados invariantes<sup>3</sup> para  $\nu_t$ . Resulta interesante notar que el correspondiente semigrupo  $\alpha_t$  (dinámica Heisenberg) no es irreducible (según definiciones 4.1.2 y 4.1.8), pues hay proyectores invariantes no triviales:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \beta \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{C.7})$$

<sup>3</sup>Los bloques  $\mathbb{B}_a$  no tienen autovalores nulos.

Calculamos la conmutante:

$$\{V\}' = \left\{ \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}, \quad x, y, z \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{C.8})$$

A partir de ésta construimos explícitamente  $\mathcal{N}(\alpha)$ , que resulta ser:

$$\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$$

y por lo tanto, como disponemos de una familia fiel de estados estacionarios, sabemos que el sistema es relajante.

2.  $a = 0, b \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.9})$$

La integración del sistema es posible, obteniéndose:

$$\begin{aligned} \rho_{1,1}(t) &= -\rho_{2,2}(0) e^{-t} + [1 - \rho_{3,3}(0)] \\ \rho_{1,2}(t) &= \rho_{1,2}(0) e^{-\frac{t}{2}} \\ \rho_{1,3}(t) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|b|^2 t\right\} \cdot \left[ \rho_{1,3}(0) - \frac{b \rho_{2,3}(0)}{\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)} \left(-1 + \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)t\right\}\right) \right] \\ \rho_{2,1}(t) &= \overline{\rho_{1,2}(0)} e^{-\frac{t}{2}} \\ \rho_{2,2}(t) &= \rho_{2,2}(0) e^{-t} \\ \rho_{2,3}(t) &= \rho_{2,3}(0) \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)t\right\} \\ \rho_{3,1}(t) &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|b|^2 t\right\} \cdot \left[ \overline{\rho_{1,3}(0)} - \frac{b \overline{\rho_{2,3}(0)}}{\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)} \left(-1 + \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)t\right\}\right) \right] \\ \rho_{3,2}(t) &= \overline{\rho_{2,3}(0)} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2} + |b|^2\right)t\right\} \\ \rho_{3,3}(t) &= \rho_{3,3}(0) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

La convergencia a  $\mathcal{F}(\nu)$  se desprende de la solución expuesta, vale decir el sistema es relajante. Además, en este caso  $\mathcal{N}(\alpha) = \mathcal{F}(\alpha)$  (e iguales al ejemplo anterior). Sin embargo aquí no hay una familia fiel de estados invariantes.

3.  $a = b = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,3}} & 0 & 1 - \rho_{1,1} \end{pmatrix} : \quad 0 \leq \rho_{1,1} \leq 1, \quad |\rho_{1,3}|^2 \leq \rho_{1,1}(1 - \rho_{1,1}) \right\} \quad (\text{C.11})$$

Este caso se corresponde con el inciso 5 del teorema B.0.1.

La integración del sistema resulta en:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} -\rho_{2,2}(0)e^{-t} + [1 - \rho_{3,3}(0)] & \rho_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}} & \rho_{1,3}(0) \\ \frac{\rho_{1,2}(0)e^{-\frac{t}{2}}}{\rho_{1,3}(0)} & \frac{\rho_{2,2}(0)e^{-t}}{\rho_{2,3}(0)e^{-\frac{t}{2}}} & \rho_{2,3}(0)e^{-\frac{t}{2}} \\ \rho_{1,3}(0) & \rho_{2,3}(0)e^{-\frac{t}{2}} & \rho_{3,3}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Aquí también se observa que el sistema es relajante.

### C.1.3 Bloque disociable diagonalizable

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Este sistema es fácilmente integrable:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{1,1}(0) & \rho_{1,2}(0) \exp[t(a\bar{b} - \frac{|a|^2+|b|^2}{2})] & \rho_{1,2}(0) \exp[t(a\bar{c} - \frac{|a|^2+|c|^2}{2})] \\ \frac{\rho_{1,2}(0) \exp[t(b\bar{a} - \frac{|a|^2+|b|^2}{2})]}{\rho_{1,3}(0) \exp[t(c\bar{a} - \frac{|a|^2+|c|^2}{2})]} & \rho_{2,2}(0) & \rho_{2,3}(0) \exp[t(b\bar{c} - \frac{|b|^2+|c|^2}{2})] \\ \rho_{1,3}(0) \exp[t(c\bar{a} - \frac{|a|^2+|c|^2}{2})] & \rho_{2,3}(0) \exp[t(c\bar{b} - \frac{|c|^2+|b|^2}{2})] & \rho_{3,3}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Notar que los exponentes tienen siempre parte real negativa, por lo que todas las exponenciales tienden a cero cuando  $t \rightarrow \infty$ .

Los correspondientes estados estacionarios son:

1.  $a \neq b$ ,  $a \neq c$ ,  $b \neq c$ , eventualmente alguno (y sólo uno) nulo.

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} = 1, \rho_{i,i} \geq 0 \right\} \quad (\text{C.14})$$

2.  $a = b = c$  (y eventualmente nulos)

Este caso es trivial.  $\mathcal{F}(\nu)$  es igual al conjunto de matrices densidad.

3.  $a = b$  (y eventualmente ambos nulos),  $c \neq a$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & 0 \\ \frac{\rho_{1,2}}{\rho_{1,3}} & \rho_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{2,2}\rho_{1,1} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right\} \quad (\text{C.15})$$

4.  $a = c$  (y eventualmente ambos nulos),  $b \neq a$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 \\ \frac{\rho_{1,3}}{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{3,3}\rho_{1,1} \geq |\rho_{1,3}|^2 \right\} \quad (\text{C.16})$$

5.  $b = c$  (y eventualmente ambos nulos),  $a \neq b$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} \\ 0 & \frac{\rho_{2,3}}{\rho_{3,3}} & \rho_{3,3} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{2,2}\rho_{3,3} \geq |\rho_{2,3}|^2 \right\} \quad (\text{C.17})$$

En todos los casos anteriores, se verifica que  $\mathcal{F}(\nu) = \{V\}' \cap \tau(\mathcal{H})_1^\dagger$ , verificando el inciso 3 del teorema B.0.1.

## C.2 Caso $4 \times 4$

### C.2.1 Bloque indisociable

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Nuevamente definimos:

$$\mathbb{B}_a^{4 \times 4} = \begin{pmatrix} \frac{1+|a|^2+|a|^4+|a|^6}{1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6} & \frac{-|a|^2(1+|a|^2+|a|^4)}{a(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^4(1+|a|^2)}{a^2(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{-|a|^6}{a^3(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} \\ \frac{-|a|^2(1+|a|^2+|a|^4)}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^2(1+|a|^2+|a|^4)}{1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6} & \frac{-|a|^4(1+|a|^2)}{a(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^6}{a^2(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} \\ \frac{|a|^4(1+|a|^2)}{\bar{a}^2(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{-|a|^4(1+|a|^2)}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^4(1+|a|^2)}{1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6} & \frac{-|a|^6}{a(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} \\ \frac{-|a|^6}{\bar{a}^3(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^6}{\bar{a}^2(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{-|a|^6}{\bar{a}(1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6)} & \frac{|a|^6}{1+2|a|^2+3|a|^4+4|a|^6} \end{pmatrix} \quad (\text{C.18})$$

1.  $a \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \{\mathbb{B}_a^{4 \times 4}\} \quad (\text{C.19})$$

Nuevamente,  $\text{tr}[\mathbb{B}_a^{4 \times 4}] = 1$ ,  $(\mathbb{B}_a^{4 \times 4})^* = \mathbb{B}_a^{4 \times 4}$  y además es el invariante predicho en (B.3), es decir:

$$\mathbb{B}_a^{4 \times 4} = \frac{(V^*V)^{-1}}{\text{tr}[(V^*V)^{-1}]}$$

Aquí pueden aplicarse los mismos argumentos expuestos en C.1.1 (con  $a \neq 0$ ) para asegurar la convergencia hacia tal estado estado estacionario.

2.  $a = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \quad (\text{C.20})$$

(Proposición B.0.3).

### C.2.2 Bloque disociable no diagonalizable $3 \oplus 1$

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$



1.  $a \neq 0$ ,  $b$  arbitrario (eventualmente nulo, o igual a  $a$ )

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{ccc|c} \mathbb{B}_a^{3 \times 3} & & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.21})$$

2.  $a = 0$ ,  $b \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.22})$$

3.  $a = b = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & \rho_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & 0 & 1 - \rho_{1,1} \end{pmatrix} : \quad 0 \leq \rho_{1,1} \leq 1, \quad |\rho_{1,4}|^2 \leq \rho_{1,1}(1 - \rho_{1,1}) \right\} \quad (\text{C.23})$$

Este caso se corresponde con el inciso 5 del teorema B.0.1.

### C.2.3 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 2$

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

1.  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $a \neq b$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + (1 - \lambda) \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{B}_b^{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.24})$$

2.  $a = 0$ ,  $b \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (1 - \lambda) \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{B}_b^{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right), \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.25})$$

3.  $a \neq 0$ ,  $b = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \right\} \quad (\text{C.26})$$

4.  $a = b = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{1,3}}{\rho_{1,3}} & 0 & 1 - \rho_{1,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : 0 \leq \rho_{1,1} \leq 1, \quad |\rho_{1,3}|^2 \leq \rho_{1,1}(1 - \rho_{1,1}) \right\} \quad (\text{C.27})$$

5.  $a = b \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nu) = \{ & u \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) + v \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & & \end{array} \right) + \\ & + x \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & & \\ \hline \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) + y \left( \begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & i\mathbb{B}_a^{2 \times 2} & \\ 0 & 0 & & \\ \hline -i\mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ tal que :} \\ & u, v, x, y \in \mathbb{R}, \quad u \geq 0, \quad v \geq 0, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq uv \} \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

#### C.2.4 Bloque disociable no diagonalizable $2 \oplus 1 \oplus 1$

$$V = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

1.  $a \neq 0$ ,  $b \neq c$ . Eventualmente  $b$  ó  $c$  podrían ser nulos (aunque no simultáneamente nulos), o bien uno de ellos podría ser igual a  $a$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nu) = \{ & u \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) + v \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) + \\ & + w \left( \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ tal que : } u, v, w \in \mathbb{R}^+, \quad u + v + w = 1 \} \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

2.  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $c \neq 0$ ,  $b \neq c$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \quad \rho_{i,i} \geq 0 \right\} \quad (\text{C.30})$$

3.  $a = b = 0$ ,  $c \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\rho_{1,3}}{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \quad \rho_{i,i} \geq 0, \quad \rho_{1,1}\rho_{3,3} \geq |\rho_{1,3}|^2 \right\} \quad (\text{C.31})$$

4.  $a = c = 0, b \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & \rho_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{4,4} \geq |\rho_{1,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.32})$$

5.  $a \neq 0, b = c$  (incluyendo  $b = c = 0$  y  $b = c \neq 0$ )

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \lambda \left( \begin{array}{cc|cc} \mathbb{B}_a^{2 \times 2} & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \end{array} \right) + (1 - \lambda) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ 0 & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix}, \right. \\ \left. \text{tal que : } 0 \leq \lambda \leq 1, \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{3,3}\rho_{4,4} \geq |\rho_{3,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.33})$$

6.  $a = 0, b = c \neq 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ 0 & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{3,3}\rho_{4,4} \geq |\rho_{3,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.34})$$

7.  $a = b = c = 0$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{1,1} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{3,3} - |\rho_{1,3}|^2, \right. \\ \left. 0 \leq \rho_{1,1}(\rho_{4,4}\rho_{3,3} - |\rho_{3,4}|^2) - \rho_{1,3}(\overline{\rho_{1,3}}\rho_{4,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{3,4}) + \rho_{1,4}(\overline{\rho_{1,3}}\rho_{3,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{3,3}) \right\} \quad (\text{C.35})$$

### C.2.5 Bloque disociable diagonalizable

$$V = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

1.  $a \neq b, a \neq c, a \neq d, b \neq c, b \neq d, c \neq d$ , es decir “todos distintos” (puede alguno ser nulo).

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0 \right\} \quad (\text{C.36})$$

2. “Todos distintos”, a excepción de  $a = b$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,2}} & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{2,2} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right\} \quad (\text{C.37})$$

3. “Todos distintos”, a excepción de  $b = c$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & 0 \\ 0 & \overline{\rho_{2,3}} & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{3,3}\rho_{2,2} \geq |\rho_{2,3}|^2 \right\} \quad (\text{C.38})$$

4. “Todos distintos”, a excepción de  $c = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ 0 & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{3,3}\rho_{4,4} \geq |\rho_{3,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.39})$$

5. “Todos distintos”, a excepción de  $a = c$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{3,3} \geq |\rho_{1,3}|^2 \right\} \quad (\text{C.40})$$

6. “Todos distintos”, a excepción de  $a = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & \rho_{1,4} \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{4,4} \geq |\rho_{1,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.41})$$

7. “Todos distintos”, a excepción de  $b = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & \rho_{2,4} \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & \overline{\rho_{2,4}} & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{2,2}\rho_{4,4} \geq |\rho_{2,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.42})$$

8.  $a \neq b = c = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & \rho_{2,4} \\ 0 & \overline{\rho_{2,3}} & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ 0 & \overline{\rho_{2,4}} & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{2,2}\rho_{3,3} \geq |\rho_{2,3}|^2 \right. \\ \left. \rho_{2,2}[\rho_{3,3}\rho_{4,4} - |\rho_{3,4}|^2] - \rho_{2,3}[\overline{\rho_{2,3}}\rho_{4,4} - \overline{\rho_{2,4}}\rho_{3,4}] + \rho_{2,4}[\overline{\rho_{2,3}}\rho_{3,4} - \overline{\rho_{2,4}}\rho_{3,3}] \geq 0 \right\} \quad (\text{C.43})$$

9.  $b \neq a = c = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & \rho_{1,4} \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{3,3} \geq |\rho_{1,3}|^2 \right. \\ \left. \rho_{1,1}[\rho_{3,3}\rho_{4,4} - |\rho_{3,4}|^2] - \rho_{1,3}[\overline{\rho_{1,3}}\rho_{4,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{3,4}] + \rho_{1,4}[\overline{\rho_{1,3}}\rho_{3,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{3,3}] \geq 0 \right\} \quad (\text{C.44})$$

10.  $c \neq a = b = d$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & 0 & \rho_{1,4} \\ \overline{\rho_{1,2}} & \rho_{2,2} & 0 & \rho_{2,4} \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,4}} & \overline{\rho_{2,4}} & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{2,2} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right. \\ \left. \rho_{1,1}[\rho_{2,2}\rho_{4,4} - |\rho_{2,4}|^2] - \rho_{1,2}[\overline{\rho_{1,2}}\rho_{4,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{2,4}] + \rho_{1,4}[\overline{\rho_{1,2}}\rho_{2,4} - \overline{\rho_{1,4}}\rho_{2,2}] \geq 0 \right\} \quad (\text{C.45})$$

11.  $d \neq a = b = c$ .

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & \rho_{1,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,2}} & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,3}} & \overline{\rho_{2,3}} & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{2,2} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right. \\ \left. \rho_{1,1}[\rho_{2,2}\rho_{3,3} - |\rho_{2,3}|^2] - \rho_{1,2}[\overline{\rho_{1,2}}\rho_{3,3} - \overline{\rho_{3,4}}\rho_{2,3}] + \rho_{1,3}[\overline{\rho_{1,2}}\rho_{2,3} - \overline{\rho_{1,3}}\rho_{2,2}] \geq 0 \right\} \quad (\text{C.46})$$

12.  $a = b = c = d$ , (pueden ser todos nulos).

Este caso es trivial.  $\mathcal{F}(\nu)$  es igual al conjunto de matrices densidad.

13.  $a = b \neq c = d$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & 0 & 0 \\ \overline{\rho_{1,2}} & \rho_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{3,3} & \rho_{3,4} \\ 0 & 0 & \overline{\rho_{3,4}} & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{2,2} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right. \\ \left. \rho_{3,3}\rho_{4,4} \geq |\rho_{3,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.47})$$

14.  $a = c \neq b = d$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & \rho_{1,3} & 0 \\ 0 & \rho_{2,2} & 0 & \rho_{2,4} \\ \overline{\rho_{1,3}} & 0 & \rho_{3,3} & 0 \\ 0 & \overline{\rho_{2,4}} & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{1,1}\rho_{3,3} \geq |\rho_{1,3}|^2 \right. \\ \left. \rho_{2,2}\rho_{4,4} \geq |\rho_{2,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.48})$$

15.  $a = d \neq b = c$

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & 0 & 0 & \rho_{1,4} \\ 0 & \rho_{2,2} & \rho_{2,3} & 0 \\ 0 & \overline{\rho_{2,3}} & \rho_{3,3} & 0 \\ \overline{\rho_{1,4}} & 0 & 0 & \rho_{4,4} \end{pmatrix} : \rho_{1,1} + \rho_{2,2} + \rho_{3,3} + \rho_{4,4} = 1, \rho_{i,i} \geq 0, \rho_{2,2}\rho_{3,3} \geq |\rho_{2,3}|^2 \right. \\ \left. \rho_{1,1}\rho_{4,4} \geq |\rho_{1,4}|^2 \right\} \quad (\text{C.49})$$

## Apéndice D

# Función Disipación

En la sección 4, introdujimos la función disipación, la cual está dada por:

$$D_t(A, B) = \alpha_t(A^*B) - \alpha_t(A^*) \alpha_t(B)$$

Además, advertimos que su relación con  $\mathcal{N}(\alpha)$  viene dada según:

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{A \in B(\mathcal{H}) : D_t(A, A) = 0 = D_t(A^*, A^*), \forall t \geq 0\}$$

Dada la forma explícita del generador (3.7); si  $A \in \mathcal{N}(\alpha)$ , entonces:

$$\dot{D}(A, A) \equiv L(A^*A) - L(A^*)A - A^*L(A) = \frac{d}{dt}D_t(A, A) |_{t=0} = 0.$$

Luego trivialmente  $\mathcal{N}(\alpha) \subset Ker(\dot{D})$ .

Queremos ver ahora que  $Ker(\dot{D}) = \{V_j\}'$ , donde  $\{\cdot\}'$  representa la conmutante.

Obviamente es cierto que:

$$A \in \{V_j\}' \Rightarrow L(A^*A) - L(A^*)A - A^*L(A) = 0$$

Ahora:

$$\begin{aligned} L(A^*A) - L(A^*)A - A^*L(A) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_i V_i^* A^* A V_i + K^* A^* A + A^* A K - \sum_i V_i^* A^* V_i A - K^* A^* A - A^* K A + \\ &\quad - \sum_i A^* V_i^* A V_i - A^* K^* A - A^* A K = 0 \\ \Leftrightarrow \sum_i [V_i^* A^* A V_i - V_i^* A^* V_i A - A^* V_i^* A V_i] - A^* (K^* + K) A &= 0 \end{aligned}$$

Usando la definición de  $K$ :

$$\begin{aligned} K &= iH - \frac{1}{2} \sum_i V_i^* V_i \\ \Rightarrow K^* + K &= - \sum_i V_i^* V_i \end{aligned}$$

Volvemos a la cuenta anterior:

$$\begin{aligned}
 & L(A^*A) - L(A^*)A - A^*L(A) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \dots \\
 & \Leftrightarrow \sum_i V_i^* A^* A V_i - V_i^* A^* V_i A - A^* V_i^* A V_i + A^* V_i^* V_i A = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum_i [(V_i^* A^* - A^* V_i^*) A V_i - (V_i^* A^* - A^* V_i^*) V_i A] = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum_i (V_i^* A^* - A^* V_i^*) (A V_i - V_i A) = 0 \\
 & \Leftrightarrow \sum_i \underbrace{(A V_i - V_i A)^* (A V_i - V_i A)}_{\geq 0} = 0 \\
 & \Leftrightarrow A V_i - V_i A = 0 \quad \forall i \\
 & \Leftrightarrow A \in \{V_j\}'
 \end{aligned}$$

## Apéndice E

# Algunos Ejemplos de Interés

Expondremos aquí algunos casos “no simples”, que pueden ilustrar algunos comportamientos.

### E.1 Ejemplo 1

Supongamos que el generador según la expresión (3.8) está dado solamente por dos operadores no nulos  $V_+$  y  $V_-$ , según<sup>1</sup>:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

La integración directa arroja como resultado:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\rho_{3,3}(0)(1 - e^{-3t}) + \rho_{1,1}(0) & \frac{1}{3}\rho_{3,3}(0)(1 - e^{-3t}) + \rho_{1,2}(0) & \rho_{1,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} \\ \frac{1}{3}\rho_{3,3}(0)(1 - e^{-3t}) + \rho_{1,2}(0) & \frac{1}{3}\rho_{3,3}(0)(1 - e^{-3t}) + \rho_{2,2}(0) & \rho_{2,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} \\ \rho_{1,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} & \rho_{2,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} & \rho_{3,3}(0)e^{-3t} \end{pmatrix} \quad (\text{E.2})$$

Los estados estacionarios están descritos por:

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \rho_{1,1} & \rho_{1,2} & 0 \\ \rho_{1,2} & \rho_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_{1,1} + \rho_{2,2} = 1, \quad \rho_{1,1}\rho_{2,2} \geq |\rho_{1,2}|^2 \right\} \quad (\text{E.3})$$

Los puntos fijos de la dinámica Heisenberg son<sup>2</sup>:

$$\mathcal{F}(\alpha) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\text{E.4})$$

Claramente  $\mathcal{F}(\alpha)$  no es un álgebra, pues, por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{9} \end{pmatrix} \notin \mathcal{F}(\alpha)$$

<sup>1</sup>Este ejemplo está tomado de [28].

<sup>2</sup>Usamos la notación  $\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  para referirnos al espacio expandido por los vectores  $v_j$ ,  $j = 1 \dots n$ .



Por otra parte, la conmutante de los operadores  $V_+$ ,  $V_-$  es:

$$\{V_+, V_-\}' = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & z \\ 0 & x & y \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{E.5})$$

La dinámica Heisenberg completa está dada por:

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{1,1}(0) & A_{1,2}(0) & A_{1,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} \\ A_{2,1}(0) & A_{2,2}(0) & A_{2,3}(0)e^{-\frac{3}{2}t} \\ A_{3,1}(0)e^{-\frac{3}{2}t} & A_{3,2}(0)e^{-\frac{3}{2}t} & A_{3,3}(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.6})$$

con:

$$A_{3,3}(t) = \frac{1}{3} [2A_{1,1}(0) + A_{2,1}(0) + A_{1,2}(0) + A_{2,2}(0)](1 - e^{-3t}) + A_{3,3}(0)e^{-3t}$$

y usando la conmutante antes expuesta, calculamos ahora  $\mathcal{N}(\alpha)$ :

$$\mathcal{N}(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & ce^{-\frac{3}{2}t} \\ 0 & a & be^{-\frac{3}{2}t} \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{C} \right\} \quad (\text{E.7})$$

Claramente,  $\mathcal{N}(\alpha) \neq \mathcal{F}(\alpha)$ . Sin embargo, el sistema es relajante (tal como se observa en la integración directa). Obviamente, no hay una familia fiel de estados invariantes.

## E.2 Ejemplo 2

Consideramos ahora el caso:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad V_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{E.8})$$

Para escribir la dinámica completa, dividimos la matriz densidad bloques  $2 \times 2$ , de la siguiente forma:

$$\rho_t = \begin{pmatrix} S_1(t) & S_2(t) \\ S_2^*(t) & S_3(t) \end{pmatrix} \quad (\text{E.9})$$

Entonces:

$$S_1(t) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\rho_{1,1}(0) + \rho_{2,2}(0)}{2} + \frac{\rho_{1,1}(0) - \rho_{2,2}(0)}{2} \right) e^{-2t} & \frac{\rho_{1,2}(0) e^{-t}}{\left( \frac{\rho_{1,1}(0) + \rho_{2,2}(0)}{2} \right) - \left( \frac{\rho_{1,1}(0) - \rho_{2,2}(0)}{2} \right) e^{-2t}} \end{pmatrix}$$

$$S_3(t) = \begin{pmatrix} \left( \frac{\rho_{3,3}(0) + \rho_{4,4}(0)}{2} + \frac{\rho_{3,3}(0) - \rho_{4,4}(0)}{2} \right) e^{-2t} & \frac{\rho_{3,4}(0) e^{-t}}{\left( \frac{\rho_{3,3}(0) + \rho_{4,4}(0)}{2} \right) - \left( \frac{\rho_{3,3}(0) - \rho_{4,4}(0)}{2} \right) e^{-2t}} \end{pmatrix}$$

$$S_2(t) = \begin{pmatrix} \left( \Delta_{(+)} e^{-it} + \Delta_{(-)} e^{(-i-2)t} \right) & \frac{\rho_{1,4}(0) e^{(-i-1)t}}{\Delta_{(+)} e^{-it} - \Delta_{(-)} e^{(-i-2)t}} \end{pmatrix}$$

con:

$$\begin{aligned}\Delta_{(+)} &= \frac{\rho_{1,3}(0) + \rho_{2,4}(0)}{2} \\ \Delta_{(-)} &= \frac{\rho_{1,3}(0) - \rho_{2,4}(0)}{2}\end{aligned}$$

Lo primero que notamos es que este sistema es asintóticamente cuasi periódico, ya que en el límite  $t \rightarrow \infty$ ,  $S_2(t)$  presenta un comportamiento puramente oscilatorio. Por lo tanto, el límite no existe. Los estados estacionarios están dados por:

$$\mathcal{F}(\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad 2\lambda + 2\beta = 1 \right\} \quad (\text{E.10})$$

Ahora bien, los elementos de este conjunto puede escribirse como una combinación convexa de dos estados estacionarios:

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \rho_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Como ya sabemos sus soportes son proyectores subarmónicos:

$$s(\rho_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad s(\rho_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la subarmonicidad:

$$\alpha_t[s(\rho_1)] \geq s(\rho_1); \quad \alpha_t[s(\rho_2)] \geq s(\rho_2)$$

Trivialmente vemos que  $s(\rho_1)^\perp = [\mathbb{I} - s(\rho_1)] = s(\rho_2)$ . Luego, en este ejemplo tenemos un proyector  $P$  subarmónico, en el que  $P^\perp$  también es subarmónico y por lo tanto no decadente (recordar que proyector decadente significa que  $\alpha_t(P) \rightarrow \infty$ ).

Este es el contraejemplo por el cual  $P$  subarmónico no implica que  $P^\perp$  sea decadente.

Realizaremos ahora un análisis más detallado de este ejemplo, desde el punto de vista asintótico. Para tiempos grandes, se tiene:

$$\nu_t(\rho) \rightarrow \beta_t(\rho) = \begin{pmatrix} \frac{\rho_{1,1}(0) + \rho_{2,2}(0)}{2} & 0 & \left(\frac{\rho_{1,3}(0) + \rho_{2,4}(0)}{2}\right)e^{-it} & 0 \\ 0 & \frac{\rho_{1,1}(0) + \rho_{2,2}(0)}{2} & 0 & \left(\frac{\rho_{1,3}(0) + \rho_{2,4}(0)}{2}\right)e^{-it} \\ \left(\frac{\rho_{1,3}(0) + \rho_{2,4}(0)}{2}\right)e^{it} & 0 & \frac{\rho_{3,3}(0) + \rho_{4,4}(0)}{2} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\rho_{1,3}(0) + \rho_{2,4}(0)}{2}\right)e^{it} & 0 & \frac{\rho_{3,3}(0) + \rho_{4,4}(0)}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora tomamos el dual de  $\beta_t$ , que actúa sobre las observables. Usaremos la siguiente notación para tal semigrupo:  $\eta_t = \beta_t'$ .

Con poco trabajo se obtiene la forma de  $\eta_t$ :

$$\eta_t(A) = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}(0)+A_{2,2}(0)}{2} & 0 & (\frac{A_{1,3}(0)+A_{2,4}(0)}{2})e^{it} & 0 \\ 0 & \frac{A_{1,1}(0)+A_{2,2}(0)}{2} & 0 & (\frac{A_{1,3}(0)+A_{2,4}(0)}{2})e^{it} \\ (\frac{A_{3,1}(0)+A_{4,2}(0)}{2})e^{-it} & 0 & \frac{A_{3,3}(0)+A_{4,4}(0)}{2} & 0 \\ 0 & (\frac{A_{3,1}(0)+A_{4,2}(0)}{2})e^{-it} & 0 & \frac{A_{3,3}(0)+A_{4,4}(0)}{2} \end{pmatrix}$$

El generador de  $\eta_t$  está dado por  $\frac{d}{dt}(\eta_t)_{t=0}$ . Tal generador es:

$$\mathfrak{L}(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i(\frac{A_{1,3}(0)+A_{2,4}(0)}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i(\frac{A_{1,3}(0)+A_{2,4}(0)}{2}) \\ -i(\frac{A_{3,1}(0)+A_{4,2}(0)}{2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i(\frac{A_{3,1}(0)+A_{4,2}(0)}{2}) & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Veamos cómo construir  $\eta_t$ , en términos de mapas más simples. Primero definimos:

$$\tau \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \text{Tr} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \mathbb{I} = \left( \frac{a_{1,1} + a_{2,2}}{2} \right) \mathbb{I}$$

Básicamente hemos introducido el operador Traza.

El siguiente paso consiste en definir:

$$\gamma := \mathbb{I} \otimes \tau$$

Este mapa es Completamente Positivo. Sobre un tensor simple actúa en la forma:

$$\gamma(A \otimes B) = \mathbb{I} \otimes \tau(A \otimes B) = A \otimes \tau(B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{1,1}(b_{1,1} + b_{2,2})\mathbb{I} & a_{1,2}(b_{1,1} + b_{2,2})\mathbb{I} \\ a_{2,1}(b_{1,1} + b_{2,2})\mathbb{I} & a_{2,2}(b_{1,1} + b_{2,2})\mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Sobre una matriz  $A$  cualquiera  $4 \times 4$  actúa en la forma:

$$\gamma(A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{1,1} + a_{2,2} & 0 & a_{1,3} + a_{2,4} & 0 \\ 0 & a_{1,1} + a_{2,2} & 0 & a_{1,3} + a_{2,4} \\ a_{3,1} + a_{4,2} & 0 & a_{3,3} + a_{4,4} & 0 \\ 0 & a_{3,1} + a_{4,2} & 0 & a_{3,3} + a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$\gamma(A) = \begin{pmatrix} \tau(A^{1,1}) & \tau(A^{1,2}) \\ \tau(A^{2,1}) & \tau(A^{2,2}) \end{pmatrix}$$

Denotando con  $A^{i,j}$  cada uno de los 4 bloques  $2 \times 2$  en que dividimos  $A$ .

Introducimos ahora otro mapa, dado por el siguiente conmutador:

$$\delta(A) = i \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, A \right]$$

Entonces podemos escribir:

$$\eta_t(A) = e^{\delta t} \gamma A$$

En efecto, es fácil verificar que el generador es el que corresponde (escrito más arriba), pues:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\eta_t)_{t=0}(A) &= \delta\gamma(A) \\
 &= i \left[ \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau(A^{1,1}) & \tau(A^{1,2}) \\ \tau(A^{2,1}) & \tau(A^{2,2}) \end{pmatrix} \right] \\
 &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & i\tau(A^{1,2}) \\ -i\tau(A^{2,1}) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\
 &= \mathfrak{L}(A)
 \end{aligned}$$

Podemos ahora mostrar que  $\gamma$  y  $\delta$  conmutan. Ya calculamos  $\delta\gamma(A)$ . Lo que falta es:

$$\begin{aligned}
 \gamma\delta(A) &= \gamma \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & iA^{1,2} \\ -iA^{2,1} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & i\tau(A^{1,2}) \\ -i\tau(A^{2,1}) & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix} \\
 &= \mathfrak{L}(A)
 \end{aligned}$$

Usando entonces que  $[\gamma, \delta] = 0$  y que  $\gamma^2 = \gamma$  mostramos la siguiente propiedad:

$$\eta_t \eta_s = e^{\delta t} \gamma e^{\delta s} \gamma = e^{\delta t} \gamma \gamma e^{\delta s} = e^{\delta t} \gamma e^{\delta s} = e^{\delta(t+s)} \gamma = \eta_{t+s}$$

$\eta_t$  es Completamente Positivo (pues  $\gamma$  y  $\delta$  lo son). Concluimos entonces que es un semigrupo.

Este caso resulta interesante, en el siguiente sentido: partimos de una dinámica dada por algún semigrupo  $\alpha_t$ , que asintóticamente se comporta como un semigrupo cuasiperiódico  $\eta_t$ . Lo importante a destacar es que  $\eta_t$  no es reversible, sencillamente porque  $\gamma$  es un proyector (ya dijimos que es idempotente, y verificarlo es trivial).

Asimismo, este ejemplo debe considerarse en el marco del teorema 4.1.4, resultado que pertenece a Groh.

Un último comentario tiene que ver con el problema de la separabilidad. Si pensamos en un sistema compuesto  $2 \otimes 2$ , entonces podemos pensar que la dinámica está dada básicamente por el operador  $\gamma$  definido más arriba y un Hamiltoniano  $H$  de la forma:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{I}$$

Entonces aplicamos el criterio PPT<sup>3</sup>, tomando la traposición parcial, y verifica que  $\Gamma(\beta_t(\rho)) = \beta_t(\rho)$ . Por lo tanto  $\Gamma(\beta_t(\rho))$  es un estado, de lo que se desprende que  $\beta_t(\rho)$  es separable. Concluimos que  $\beta_t$  mapea estados en estados separables ( $\mathcal{S}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S}_{sep}(\mathcal{H})$ ). Sin embargo, la separabilidad como propiedad del semigrupo asintótico, no permite a priori inferir nada acerca de la separabilidad de  $\nu_t(\rho)$  para tiempos grandes.

Este último punto deja abierta muchas preguntas para seguir trabajando en línea con el capítulo 6 del presente trabajo.

---

<sup>3</sup>Ver, en el capítulo 2, la sección 2.6.1.

# Bibliografía

- [1] Reed, M., Simon, B.: Functional Analysis, Methods of Modern Mathematical Physics I, Academic Press, 1980.
- [2] Weidmann, J.: Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer, 1980.
- [3] Strocchi, F.: An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics -A Short Course for Mathematicians-, Advanced Series in Mathematical Physics 28, World Scientific, 2008.
- [4] Davies, E.B.: Quantum Theory of Open Systems, Academic Press, 1976.
- [5] Simon, B.: Trace Ideals and their Applications, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1979.
- [6] Asimov, L., Ellis, A.J.: Convexity Theory and its Applications in Functional Analysis, London Mathematical Society Monographs 16, Academic Press, 1980.
- [7] Hoffman, K., Kunze, R.: Álgebra Lineal, Prentice Hall, 1973.
- [8] Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N.: Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Physical Review, vol 47, 777, 1935.
- [9] Werner, R.F.: Quantum Information Theory - an Invitation, Institut für Mathematische Physik, TU Braunschweig, arXiv: quant-ph/0101061v1, 2001.
- [10] Raggio, G.A., The problem of Entanglement of Quantum States, Revista de la Unión Matemática Argentina, vol 49, n° 2, 111-119, 2008.
- [11] Horodecki, R., Horodecki, P., Horodecki, M., Horodecki, K., Quantum entanglement, quant-ph/0702225, 2007.
- [12] Gorini, V., Kossakowski, A., Sudarshan, E.C.G.: Completely positive dynamical semigroups of N-level systems, Journal of Mathematical Physics, vol 17, 821-825, 1976.
- [13] Lindblad, G.: On the generators of quantum dynamical semigroups, Communications in Mathematical Physics, vol 48, 119-130, 1976.
- [14] Alicki, R., Lendi, K., Quantum Dynamical Semigroups and Applications, Lecture Notes in Physics 286, Springer-Verlag, 1986.
- [15] Lendi, K., Evolution matrix in a coherence vector formulation for quantum Markovian master equations of N-level systems, Journal of Physics A: Mathematical and General, 20, 15-23, 1986.

- [16] Spohn, H. Approach to Equilibrium for Completely Positive Dynamical Semigroups of N-Level Systems, Reports in Mathematical Physics 10, 189-194, 1976.
- [17] Frigerio, A., Stationary States of Quantum Dynamical Semigroups, Communications in Mathematical Physics, vol 63, 269-276, 1978.
- [18] Mohari, A., A resolution of quantum dynamical semigroups, S.N. Bose Center for Basic Sciences, arXiv: math/0505384v1, 2005.
- [19] Evans, D.E., Irreducible Quantum Dynamical Semigroups, Communications in Mathematical Physics, vol 54, 293-297, 1977.
- [20] Frigerio, A., Verri, M., Long-Time Asymptotic Properties of Dynamical Semigroups on  $W^*$ -algebras, Mathematische Zeitschrift, 180, 275-286, 1982.
- [21] Groh, U., Positive Semigroups on  $C^*$ - and  $W^*$ -algebras, Lecture Notes in Mathematics 1184, 369-425, Springer-Verlag, 1986.
- [22] Mohari, A., Markov shift in non-commutative probability, Journal of Functional Analysis 199, 189-209, 2003.
- [23] Fagnola, F., Rebolledo, R., On the existence of stationary states for quantum dynamical semigroups, Journal of Mathematical Physics, vol 42, n°3, 2001.
- [24] Fagnola, F., Rebolledo, R., Subharmonic projections for a quantum Markov semigroup, Journal of Mathematical Physics, vol 43, n°2, 2002.
- [25] Fagnola, F., Rebolledo, R., Open Quantum Systems III - Recent Developments-, Lecture Notes in Mathematics 1882, Springer, 2006.
- [26] Umanitá, V., Classification and decomposition of Quantum Markov Semigroups. Probab. Theory Relat. Fields 134, 603-623, 2006.
- [27] Baumgartner, B., Narnhofer, H., Thirring, W., Analysis of quantum semigroups with GKS-Lindblad generators: I. Simple generators, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41, 2008.
- [28] Baumgartner, B., Narnhofer, H., Analysis of quantum semigroups with GKS-Lindblad generators: II. General, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41, 2008.
- [29] Raggio, G., Comunicación personal.
- [30] Sakai, S.,  $C^*$ -Algebras and  $W^*$ -Algebras, Springer-Verlag, 1971.
- [31] Dietz, K.: Decoherence by Lindblad motion, Journal of Physics A: Mathematical and General, 37, 6143-6155, 2004.
- [32] Lendi, K., van Wonderen, A. J., Davies theory for reservoir-induced entanglement in a bipartite system, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 40, 279-288, 2007.
- [33] Benatti, F., Floreanini, R., Piani, M., Environment Induced Entanglement in Markovian Dissipative Dynamics, Physical Review Letters, vol 91, n° 7, 2003.
- [34] Kraus, B., Büchler, H.P., Diehl, S., Kantian, A., Micheli, A., Zoller, P., Preparation of Entangled States by Quantum Markov Processes, arXiv:0803.1463v3 [quant-ph], 2008.
- [35] Terra Cunha, M., The geometry of entanglement sudden death, New Journal of Physics 9, 237, 2007.

# Índice Alfabético

- $P_0$ , 30
- $\mathcal{N}(\alpha)$ , 35
- $\mathcal{L}_{ent}(\mathcal{H})$ , 39
- $\mathcal{L}_{sep}(\mathcal{H})$ , 39
- $B(\mathcal{H})$ , 1
- $C^*$  álgebra, 1
- $\alpha_t$ , 13
- $\mathcal{F}(\alpha)$ , 16
- $\mathcal{F}(\nu)$ , 16
- $\mathcal{H}$ , 1
- $\mathcal{S}(\mathcal{H})$ , 3
- $\nu_t$ , 13
  
- Asintótica y Entrelazamiento, 39, 67
  
- Cápsula Convexa, 6
- Cara, 6
  - invariante, 21
- Completamente Positivos, Mapas, 11
- Conmutante, 36
- Criterio “testigos de entrelazamiento”, 12
- Criterio de Spohn, 19
- Criterio PPT, 11
  
- Estado, 3
  - Entrelazado, 10
  - Estacionario, 16
  - Familia Fiel, 20, 35
  - Marginal, 8
  - Producto, 8
  - Separable, 10
- Evans, irreducibilidad según, 20
- Extremal, Punto, 5
  
- Fagnola & Rebolledo, irreducibilidad según, 23
- Familia Fiel de Estados Estacionarios, 20, 35
- Forma Normal de Kossakowski, 18, 43
- Función Disipación, 35, 61
  
- Generador Simple, 18, 45, 49
  
- Generadores, Semigrupos Dinámicos, 14
- Genuinamente relajante, Semigrupo dinámico, 16
- Groh, irreducibilidad según, 21
  
- Irreducibilidad según Evans, 20
- Irreducibilidad según Fagnola & Rebolledo, 23
- Irreducibilidad según Groh, 21
  
- Kossakowski, Forma Normal de, 18, 43
  
- Límite Ergódico, 21
  
- Mapas Completamente Positivos, 11
- Marginal, Estado, 8
- Matriz Densidad, 4
  
- Observable Invariante, 16
- Operador Densidad, 4
  
- Parcialmente relajante, Semigrupo dinámico, 17
- PPT, Criterio, 11
- Producto Tensorial de Espacios de Hilbert, 7
- Producto Tensorial de Operadores, 8
- Proyector Ortogonal, 4
  - Decadente, 31
  - Recurrente, 33
  - Subarmónico, 23
  - Superarmónico, 23
- Punto Extremal, 5
  
- Recurrente, Proyector, 33
- Reducción de la Dinámica, 32
- Relajante, Semigrupo dinámico, 17
  
- Semigrupos Dinámicos, 13
  - relajante, 17
    - Generadores, 14
    - genuinamente relajante, 16
    - Imagen de Heisenberg, 13

- Imagen de Schrödinger, 13
  - parcialmente relajante, 17
- Soporte de un Estado, 5
  - Combinación Convexa, 5
  - Estacionario, 28
  - Producto, 5
- Spohn, Criterio de, 19
- Subarmonicidad, 23, 28
- Superarmonicidad, 23
  
- Tensorial, Producto de Espacios de Hilbert, 7
- Tensorial, Producto de Operadores, 8





