La energía de las secciones unitarias normales de la grassmanniana asociadas a productos cruz

por Ruth Paola Moas

Presentado ante la
Facultad de Matemática, Astronomía y Física
como parte de los requerimientos para la obtención
del grado de Doctora en Matemática de la

Universidad Nacional de Córdoba

Julio 2020

Director: Marcos Salvai

Índice general

Resumen

Sea $G(k,n)$ la grassmanniana de subespacios orientados de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k con su métrica riemanniana canónica. Estudiamos la energía de funciones que asignan a cada $P \in G(k,n)$ un vector unitario normal a P. Son secciones de un fibrado esférico $E^1_{k,n}$ sobre $G(k,n)$. Los productos cruz doble y triple octoniónicos inducen de manera natural secciones de ese tipo para $k = 2, n = 7$ y $k = 3, n = 8$, respectivamente. Probamos que son aplicaciones armónicas en $E^1_{k,n}$, munido de la métrica de Sasaki. Esto, junto con el resultado bien conocido de que los campos vectoriales de Hopf en esferas de dimensión impar son aplicaciones armónicas en su fibrado tangente unitario, nos permite concluir que todas las secciones normales unitarias de las grassmannianas asociadas a productos cruz son armónicas. También mostramos que estos fibrados esféricos no tienen secciones paralelas, que trivialmente habrían tenido energía mínima.

En una segunda instancia analizamos la energía de aplicaciones que asignan a cada $P \in G(2,8)$ una estructura compleja ortogonal $J(P)$ en $P^\perp$. Estas asignaciones son secciones del subfibrado esférico unitario del fibrado vectorial sobre $G(2,8)$ cuya fibra en cada P consiste esencialmente de las transformaciones antisimétricas de $P^\perp$. Probamos que la sección naturalmente inducida por el producto cruz triple octoniónico es una aplicación armónica. Comentamos la relación con la armonicidad de la estructura casi compleja canónica de S^6.

Mathematics Subject Classification (2010): 17A35 Division algebras, 53C15 General geometric structures on manifolds, 53C30 Homogeneous manifolds, 53C43 Differential geometric aspects of harmonic maps, 58E20 Harmonic maps.

Palabras y frases claves: energía de secciones, aplicación armónica, sección verticalmente armónica, combadura total, laplaciano burdo, grassmanniana, fibrado esférico, octoniones, producto cruz, estructura compleja ortogonal, campo de Hopf, grupo de Lie excepcional.

Abstract

Let $G(k,n)$ be the Grassmannian of oriented subspaces of $\mathbb{R}^n$ of dimension k with its canonical symmetric Riemannian metric. We study the energy of maps assigning a unit vector normal to P to each $P \in G(k,n)$. They are sections of a sphere bundle $E^1_{k,n}$ over $G(k,n)$. The octonionic double and triple cross products induce in a natural way such sections for $k = 2, n = 7$ and $k = 3, n = 8$, respectively. We prove that they are harmonic maps into $E^1_{k,n}$ endowed with the Sasaki metric. This, together with the well-known result that Hopf vector fields on odd dimensional spheres are harmonic maps into their unit tangent bundles, allows us to conclude that all unit normal sections of the Grassmannians associated with cross products are harmonic. We also show that these sphere bundles do not have parallel sections, which trivially would have had minimum energy.

In a second instance we analyze the energy of maps assigning an orthogonal complex structure $J(P)$ on $P^\perp$ to each $P \in G(2,8)$. They are sections of the unit sphere bundle over $G(2,8)$ whose fiber at each P consists essentially of the skew-symmetric transformations on $P^\perp$. We prove that the section naturally induced by the octonionic triple product is a harmonic map. We comment on the relationship with the harmonicity of the canonical almost complex structure of S^6.

Mathematics Subject Classification (2010): 17A35 Division algebras, 53C15 General geometric structures on manifolds, 53C30 Homogeneous manifolds, 53C43 Differential geometric aspects of harmonic maps, 58E20 Harmonic maps.

Key words and phrases: energy of sections, harmonic map, vertically harmonic section, total bending, rough Laplacian, Grassmannian, spherical fiber bundle, octonions, cross product, orthogonal complex structure, Hopf vector field, exceptional Lie group.

Agradecimientos

En el largo camino recorrido, que condujo a la culminación de esta tesis, transitaron a mi lado muchas personas a quienes quiero reconocer y dar mi gratitud. No es mi intención hacer una lista de nombres de todas ellas. Solamente voy a destacar una, mi director, Marcos, quien me supo guiar durante todos estos años. Le agradezco por aceptar dirigirme, por su generosidad y paciencia, por la formación que me brindó, tanto matemática como humana, lo que me resulta muy valioso, y por todo el esfuerzo para con este trabajo.

Agradezco a los miembros del tribunal, los profesores Carlos E. Olmos, Silvio Reggiani y Juan Pablo Rossetti, que dedicaron tiempo a estudiar esta tesis y realizaron sugerencias y correcciones que la mejoraron.

También quiero agradecer a aquellas personas que desde su lugar fueron importantes para mi formación, profesores, compañeros, colegas. A Conicet, por otorgarme una beca, que me brindó la posibilidad de independizarme y que fue parte de mi motivación para hacer este doctorado.

Finalmente agradezco a mi familia y amigos que fueron mi pilar emocional fundamental.

Capítulo 1

Introducción y presentación de los resultados

Se puede decir que Herman Gluck y Wolfgang Ziller iniciaron la búsqueda de la mejor organización entre todas las estructuras geométricas de cierto tipo en una variedad, cuando probaron que los campos vectoriales de Hopf en S^3 tienen volumen mínimo entre todos los campos vectoriales unitarios en S^3 [17]. Poco después, Eugenio Calabi y Herman Gluck descubrieron que la estructura casi compleja en S^6 inducida por el producto cruz octoniónico es la mejor estructura casi compleja ortogonal en S^6, también respecto del volumen [9]. Más tarde surgieron, y se estudiaron ampliamente, otros criterios que permiten distinguir ciertas estructuras geométricas en una variedad M (pensadas como secciones de un fibrado sobre M). Por ejemplo, puntos críticos o mínimos para la combadura total (un funcional que indica en qué medida la sección se aparta de ser paralela), comenzando con Gerrit Wiegmink [34], y también puntos críticos o mínimos de la energía. Las contribuciones en este sentido para una amplia variedad de estructuras (principalmente para campos vectoriales unitarios, pero también, por ejemplo, para distribuciones, estructuras de contacto métricas, etc.), fueron hechas, entre otros, por Mohamed Abbassi, Gil Bor, Vincent Borrelli, Fabiano Brito, Giovanni Calvaruso, Pablo Chacón, Sorin Dragomir, Olga Gil Medrano, Carmelo González Dávila, Luis Hernández Lamoneda, Elisa Llinares Fuster, Eric Loubeau, Francisco Martín Cabrera, Domenico Perrone, Lieven Vanhecke, Esther Vergara Diaz, Christopher Wood [18, 2, 27, 19, 11, 33, 6, 7, 14, 16, 15] y otros artículos citados en otras partes de la tesis.

A continuación mencionamos el objetivo de este trabajo. La pregunta general, planteada vagamente, es la siguiente:

¿Cuál es la mejor manera de asignar un vector unitario $u \in P^\perp$
a cada subespacio orientado P de dimensión k en $\mathbb{R}^n$?

La misma pregunta en un sentido diferente: ¿En qué dirección normal unitaria $u(P)$ debe ser movido cada subespacio P de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k para obtener la mejor disposición de k-subespacios afines a distancia unitaria del origen?

Dentro de este ámbito podemos formular otra pregunta general:

¿Cuál es la mejor forma de asignar
a cada subespacio orientado P de dimensión k en $\mathbb{R}^{k+2m}$
una transformación ortogonal $J(P) : P^{\perp} \to P^{\perp}$ con $J(P)^2 = -\operatorname{id}$?

Estas cuestiones se plantean con mayor precisión considerando secciones de fibrados esféricos sobre grassmannianas y eligiendo el criterio para la buena organización, normalmente energía o volumen mínimos o críticos.

A veces no existen asignaciones como las de la primera pregunta si se requiere que sean continuas. Por ejemplo, los subespacios unidimensionales orientados de $\mathbb{R}^3$ pueden identificarse con puntos de la esfera de dimensión 2 y sus planos ortogonales con los correspondientes espacios tangentes, pero S^2 no admite un campo vectorial unitario continuo. Aprovechamos la oportunidad para mencionar que el volumen y la energía de ciertos campos vectoriales unitarios no continuos han sido estudiados con provecho, por ejemplo en [**28**, **10**, **5**].

Para la segunda pregunta, también puede que no haya una asignación continua así, por ejemplo para los casos $k = 1$, $2m \neq 2, 6$. En efecto, la existencia contradiría el resultado probado en [**4**], que la esfera S^n admite una estructura casi compleja si y sólo si $n = 2$ ó $n = 6$ (identificando $u \in S^n$ con el subespacio orientado $(\mathbb{R}u, \{u\})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ y $T_u S^n$ con $u^{\perp}$).

Estamos lejos de responder las preguntas en general: Encontramos asignaciones distinguidas geométricamente en vez de óptimas. Nuestra contribución al problema en la primera pregunta es la siguiente: Nos concentramos en los casos en que las asignaciones se dan en términos de productos cruz y demostramos que son aplicaciones armónicas de la grassmanniana en un conveniente fibrado esférico definido sobre ella.

Uno de nuestros teoremas principales generaliza ampliamente el resultado clásico que afirma que los campos vectoriales de Hopf sobre esferas de dimensión impar son aplicaciones armónicas en el fibrado tangente unitario dotado de la métrica de Sasaki [24] (ver también [29, 1]). Tal campo vectorial unitario es un punto crítico de la funcional energía si se consideran variaciones a través de *todas* las funciones diferenciables. Observamos que esta condición es más fuerte que otra, que también ha sido muy estudiada, y que a veces se llama *verticalmente armónica*, donde sólo se consideran las variaciones a través de los campos vectoriales unitarios. Las aplicaciones verticalmente armónicas resultan ser críticas para la funcional combadura total.

En cuanto a la segunda pregunta, nuestro aporte es el siguiente: Sea $G(2,8)$ la grassmanniana de subespacios orientados de dimensión 2 en $\mathbb{R}^8$. Consideramos aplicaciones que asignan a cada $P \in G(2,8)$ una transformación antisimétrica T en $P^{\perp}$ con $\operatorname{tr}(T^2) = -6$, donde tr denota la traza. Probamos que la aplicación distinguida de este tipo inducida por el producto cruz triple octoniónico (aquí T es en particular una estructura compleja ortogonal) es armónica llegando a cierto fibrado esférico sobre $G(2,8)$. El problema similar con el producto cruz doble octoniónico se traduce en la armonicidad de la estructura casi compleja canónica de la esfera S^6, resuelto en [20], y está relacionado con el teorema probado en [3] de que esta estructura tiene energía mínima (pero variando sólo entre entre estructuras casi complejas).

El antecedente inmediato de esta tesis es el Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática de Francisco Ferraris [13]. Incorporamos lo que se estudió allí en favor de una mejor presentación, y su procedencia se explicita cuando se menciona. Se trata, básicamente, de una versión débil de un caso particular del Teorema 3 y de la parte central de la Proposición 5.

En el resto de la introducción presentamos un ejemplo motivador y los resultados obtenidos, precedidos, de manera sucinta, de las definiciones estrictamente necesarias para enunciarlos. En el capítulo 2 de los preliminares se dan los detalles correspondientes. En los capítulos 3 y 4 se prueban los teoremas objeto de la tesis, nuestros aportes relacionados con la primera y la segunda pregunta de arriba, respectivamente.

1.1. Ejemplo motivador

En esta sección presentamos un ejemplo de una situación elemental, que sin ser un caso particular, es análoga a la de los problemas que se discuten en la tesis. También es una aplicación básica de una herramienta importante para probar armonicidad vertical en casos generales, que usaremos en repetidas oportunidades.

Comenzamos recordando que si tenemos una curva $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ de rapidez unitaria y u_0 un vector ortogonal a $\alpha'(t_0)$, entonces existe un único campo paralelo V a lo largo de α tal que $V(t_0) = u_0$. Ahora queremos un campo unitario U a lo largo de α normal a α', esto es, $U(t) \perp \alpha'(t)$ para todo t, con $U(t_0) = u_0$ y "lo más paralelo posible" a lo largo de α, es decir que U' no tenga componente normal en α' (equivalentemente, $U'(t) = \lambda(t)\,\alpha'(t)$ para cierta función $\lambda : (a,b) \to \mathbb{R}$, ó $\nabla^{\perp}_{\alpha'(t)} U = 0$). Suponemos que α tiene curvatura nunca nula y consideramos el marco de Frenet-Serret $\{T, N, B\}$ para α. Tenemos que $\{N(t), B(t)\}$ es una base ortonormal de $\alpha'(t)^{\perp}$ y entonces

$$U(t) = \cos\theta(t)\ N(t) + \operatorname{sen}\theta(t)\ B(t)$$

para cierta función $\theta : (a,b) \to \mathbb{R}$. Luego, si κ y τ son las funciones de curvatura y torsión de α, respectivamente, usando que $N' = -\kappa T + \tau B$ y $B' = -\tau N$, tenemos que

$$\begin{aligned}
U' &= -\theta' \operatorname{sen}\theta\ N + \cos\theta\ N' + \theta'\cos\theta\ B + \operatorname{sen}\theta\ B' \\
&= \theta'(\cos\theta\ B - \operatorname{sen}\theta\ N) + \cos\theta\ (-\kappa T + \tau B) - \operatorname{sen}\theta\ \tau N \\
&= \theta'(\cos\theta\ B - \operatorname{sen}\theta\ N) + \tau(\cos\theta\ B - \operatorname{sen}\theta\ N) - \cos\theta\ (\kappa T) \\
&= (\theta' + \tau)(\cos\theta\ B - \operatorname{sen}\theta\ N) - \kappa\cos\theta\ T.
\end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Por lo tanto la condición de que U' sea tangente se traduce en

$$\theta' = -\tau.$$

Supongamos además que α es periódica, digamos, con período 2π. Si ahora requerimos como arriba que U sea "lo más paralelo posible" a lo largo de α y también periódico, ya no podremos tener en general que U' sea tangente a α, ya que si Θ es una primitiva de $-\tau$, no necesariamente se cumplirá que $\Theta(0)$ y $\Theta(2\pi)$ difieren en un múltiplo de 2π. Como $\frac{D^{\perp}U}{dt} \equiv 0$ impide en general la periodicidad de U, lo más adecuado es pedir que

$$\int_0^{2\pi} \left\| \frac{D^{\perp}U}{dt} \right\|^2 dt \tag{1.1.2}$$

sea mínimo.

El Teorema 15 en la Sección 2.4 da un criterio que permitirá encontrar el campo U buscado. Los argumentos de cómo se aplica en concreto a la solución de este problema se presentan como una digresión a continuación del enunciado de ese teorema.

1.2. La combadura total y la energía de secciones unitarias

Sea M una variedad riemanniana orientada y compacta. Sea $E \to M$ un fibrado vectorial riemanniano sobre M con una conexión métrica ∇ y sea $E^1 = \{v \in E \mid \|v\| = 1\}$ el correspondiente fibrado esférico.

La funcional $\mathcal{B}$, llamada *combadura total*, asigna a cada sección $\sigma \in \Gamma(M, E^1)$ el número

$$\mathcal{B}(\sigma) = \int_M \|\nabla\sigma\|^2 \, dv, \tag{1.2.1}$$

el cual indica en qué medida la sección σ se aparta de ser paralela. Aquí dv es la forma de volumen de M y $\|T\|^2 = \operatorname{tr}(T^tT)$ (T^t denota la adjunta de T) para $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita con producto interno.

La *energía* de una aplicación suave $F : M \to N$, con N una variedad riemanniana, es por definición la integral

$$\mathcal{E}(F) = \frac{1}{2}\int_M \left\|(dF)_p\right\|^2 dv(p).$$

Los puntos críticos de la funcional energía se llaman *aplicaciones armónicas*. Claramente, las funciones constantes son ejemplos triviales. Aparte de ellas, el caso más simple se da para $M = S^1$, y las aplicaciones armónicas asociadas son las geodésicas periódicas de N.

Ahora tomamos en E^1 la métrica de Sasaki inducida por ∇. Entonces tiene sentido considerar la energía de las secciones $\sigma : M \to E^1$. Se cumple que $\mathcal{E}(\sigma)$ difiere de $\mathcal{B}(\sigma)$ en un par de constantes que involucran la dimensión y el volumen de M.

Si una sección es una aplicación armónica, entonces es crítica para $\mathcal{B}$, pero queremos destacar que el concepto de sección crítica para la energía es en general mucho más fuerte que la noción correspondiente para la combadura total, ya que en el primer caso se admiten como variaciones funciones suaves arbitrarias de la base en el fibrado esférico, no sólo variaciones por secciones.

1.3. Secciones normales unitarias de la grassmanniana

Sea $G(k,n)$ la grassmanniana de subespacios orientados de $\mathbb{R}^n$ de dimensión k dotada de la métrica riemanniana canónica. Sea

$$E_{k,n} = \{(P,v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n \mid v \text{ es ortogonal a } P\}, \tag{1.3.1}$$

el cual es el espacio total de un fibrado vectorial riemanniano sobre $G(k,n)$ con fibra típica $\mathbb{R}^{n-k}$ (la fibras heredan el producto interno de $\mathbb{R}^n$).

Observación 1. *El fibrado vectorial anterior no es en general topológica ni geométricamente trivial: Por un lado, hemos mencionado que $E_{1,3} \to G(1,3)$ no admite secciones unitarias continuas; por otra parte, la Proposición 5 abajo afirma que $E_{2,7} \to G(2,7)$ y $E_{3,8} \to G(3,8)$ no admiten secciones paralelas.*

Observación 2. *Las secciones de este fibrado vectorial pueden considerarse como disposiciones de subespacios afines a distancia unitaria del origen, identificando $(P, u(P))$ con $u(P) + P$.*

El fibrado vectorial riemanniano $E_{k,n} \to G(k,n)$ tiene una *conexión métrica* canónica, cuya derivada covariante asociada es la siguiente: Si $Q : I \to G(k,n)$ es una curva suave de subespacios orientados en $\mathbb{R}^n$ y $x : I \to \mathbb{R}^n$ es una curva suave tal que $x_t \perp Q_t$ para todo t, entonces

$$\frac{D}{dt}(Q_t, x_t) = (Q_t, \pi_t(x_t')), \tag{1.3.2}$$

donde x' es la derivada usual de x en $\mathbb{R}^n$ y π_t es la proyección ortogonal sobre $(Q_t)^{\perp}$.

Buscamos secciones normales unitarias de la grassmanniana $G(k,n)$, esto es, secciones del fibrado esférico

$$E^1_{k,n} = \{(P,v) \in E_{k,n} \mid \|v\| = 1\} \to G(k,n)\,, \tag{1.3.3}$$

que posean energía crítica.

1.3.1. Secciones normales unitarias asociadas a productos cruz

Los productos cruz proveen ejemplos distinguidos de secciones del fibrado esférico $E^1_{k,n} \to G(k,n)$, para ciertos (k,n). Recordamos de [8] y [22] la definición y clasificación de los mismos. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión n y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno definido positivo sobre V. Un *producto cruz sobre* V es una aplicación multilineal $X : V^r \to V$ $(1 \leq r \leq n)$ que satisface

$$\langle X(u_1, \dots, u_r), u_i \rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \|X(u_1, \dots, u_r)\|^2 = \det(\langle u_i, u_j \rangle)$$

para cualquier r-upla $u_1, \dots, u_r$ en V.

Los productos cruz existen sólo cuando (r,n) son $(1,2m)$, $(m,m+1)$ (para cualquier $m \in \mathbb{N}$), $(2,7)$ y $(3,8)$. En el primer caso, X es una transformación ortogonal que satisface $X^2 = -\,\mathrm{id}$, esto es, una estructura compleja lineal ortogonal. Aparte de los casos triviales $r = m$, $n = m+1$ con $m \in \mathbb{N}$, por la clasificación de Brown y Gray quedan (salvo (anti-)isomorfismo) sólo los productos cruz canónicos $X_{2,7}$ y $X_{3,8}$ en $\mathbb{R}^7 = \mathrm{Im}\,\mathbb{O}$ y $\mathbb{O}$, respectivamente, dados por

$$X_{2,7}(u,v) = u \times v = uv + \langle u, v \rangle\,, \tag{1.3.4}$$

$$X_{3,8}(u,v,w) = -u(\overline{v}w) + \langle u, v \rangle w + \langle v, w \rangle u - \langle w, u \rangle v \tag{1.3.5}$$

(uv denota la multiplicación en los octoniones $\mathbb{O}$). Ellos son llamados productos cruz doble y triple, respectivamente y serán el objeto de la mayor parte de nuestro trabajo.

Un producto cruz $X : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}^n$ sobre $\mathbb{R}^n$ induce naturalmente la sección σ_X del fibrado esférico $E^1_{k,n} \to G(k,n)$,

$$\sigma_X(Q) = (Q, X(u_1, \dots, u_k))\,,$$

con $E^1_{k,n}$ como en (1.3.1), donde $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es cualquier base ortonormal positivamente orientada de Q. Las propiedades del producto cruz implican que σ_X está bien definida.

Estamos en condiciones de presentar uno de nuestros resultados principales.

TEOREMA 3. *Las secciones del fibrado esférico $E^1_{k,n} \to G(k,n)$ asociadas a los productos cruz son aplicaciones armónicas.*

OBSERVACIÓN 4. *El teorema generaliza el resultado clásico de que los campos vectoriales de Hopf sobre esferas de dimensión impar son aplicaciones armónicas (ver [24] y también [29, 1]). En efecto, en el caso $(1, 2m)$, el producto cruz X es una estructura compleja lineal ortogonal y puede considerarse como un campo vectorial de Hopf en S^{2m-1}: $X(p) \in p^\perp = T_p S^{2m-1}$. Previamente, Wiegmink había probado en [34] que los campos de Hopf son críticos para la combadura total (ver también [35]).*

En [13] se prueba el caso particular $(2, 7)$ del teorema en una versión débil (que la sección correspondiente es crítica para la combadura total, en vez de armónica).

Por la observación, nos concentramos sólo en los restantes casos no triviales: Demostraremos en los Teoremas 42 y 40 que las siguientes secciones son aplicaciones armónicas: las secciones $\sigma_2 : G(2,7) \to E^1_{2,7}$ definida por

$$\sigma_2(u \wedge v) = (u \wedge v, u \times v) \tag{1.3.6}$$

para subconjuntos ortonormales $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^7$ y $\sigma_3 : G(3,8) \to E^1_{3,8}$ dada por

$$\sigma_3(u \wedge v \wedge w) = (u \wedge v \wedge w, X_{3,8}(u, v, w)) \tag{1.3.7}$$

para subconjuntos ortonormales $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^8$.

Si existiera una sección paralela μ de $E^1_{k,n} \to G(k,n)$, entonces la energía alcanzaría trivialmente un mínimo en μ, pero este no es el caso, como afirma la siguiente proposición, cuya parte central fue demostrada en [13].

PROPOSICIÓN 5. *Los fibrados esféricos $E^1_{2,7} \to G(2,7)$ y $E^1_{3,8} \to G(3,8)$ no poseen secciones paralelas, ni siquiera locales.*

1.4. Secciones complejas ortogonales normales de la grassmanniana

Sea V un espacio vectorial de dimensión par. Una estructura compleja j en V es una transformación lineal $j : V \to V$ con $j^2 = -\operatorname{id}$. Además, si V tiene un producto interno y j es ortogonal, j resulta antisimétrica.

Llamamos $\operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$ al espacio vectorial de los operadores antisimétricos de $\mathbb{R}^8$, con el producto interno cuya norma está definida por $\|T\|^2 = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(T^t T)$. Dado $P \in G(2,8)$, sea

$$\operatorname{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right) = \left\{T \in \operatorname{Skew}\left(\mathbb{R}^8\right) \mid T|_P = 0\right\}.$$

Observemos que si $T \in \operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$, entonces $T\left(P^\perp\right) \subset P^\perp$, pues dado $w \in P^\perp$, se tiene que $\langle T(w), z\rangle = -\langle w, T(z)\rangle = -\langle w, 0\rangle = 0$ para todo $z \in P$. Luego $\operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$ se identifica de manera canónica con el conjunto de los operadores antisimétricos definidos sólo en $P^\perp$.

La proyección canónica

$$E =_{\text{def}} \left\{(P,T) \mid P \in G(2,8) \ \text{ y } \ T \in \operatorname{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right)\right\} \to G(2,8)$$

admite una estructura de fibrado vectorial riemanniano (la fibras heredan el producto interno de $\operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$). En este fibrado tenemos una conexión métrica canónica, cuya derivada covariante asociada es la siguiente: Si $P : I \to G(2,8)$ es una curva suave de planos orientados en $\mathbb{R}^8$ y $t \mapsto T_t$ es una curva suave en $\operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$, entonces

$$\frac{D}{dt}(P_t, T_t) = \left(P_t, \Pi_{P_t}\left(\frac{d}{dt}T_t\right)\right), \tag{1.4.1}$$

donde Π_P es la proyección ortogonal de $\operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$ sobre el subespacio $\operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$.

De [12] tomamos una sección distinguida del fibrado E, asociada al producto cruz triple: Se define la sección

$$\mathfrak{J} : G(2,8) \to E^1, \qquad \mathfrak{J}(u \wedge v) = (u \wedge v, J_{u\wedge v}),$$

donde

$$J_{u\wedge v} \in \operatorname{Skew}_{u\wedge v}\left(\mathbb{R}^8\right), \qquad J_{u\wedge v}(w) = X_{3,8}(u,v,w).$$

Nuestro resultado principal en relación con $\mathfrak{J}$ es el siguiente.

Teorema 6. *La sección $\mathfrak{J}$ es una aplicación armónica.*

Para los demás productos cruz de Brown-Gray se pueden construir de manera análoga secciones complejas ortogonales normales de grassmannianas. Aparte de los casos vacíos o triviales, resta uno solo, que corresponde, vía una identificación adecuada, a la estructura casi compleja canónica de la esfera S^6, cuya armonicidad es conocida de [20] (ver también [3]).

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Conexiones métricas en fibrados vectoriales riemannianos

Sea $\Pi : E^{m+n} \to M^m$ una submersión diferenciable (o sea, Π es suryectiva y $d\Pi_v : T_vE \to T_{\Pi(v)}M$ es suryectiva para todo $v \in E$) y denotamos $E_p = \Pi^{-1}(\{p\})$. Se dice que $\Pi : E \to M$ es un *fibrado vectorial* sobre M de rango n (o con fibra típica $\mathbb{R}^n$) si E_p es un espacio vectorial para todo $p \in M$ y existen un cubrimiento de M por abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ y difeomorfismos

$$I_\alpha : \Pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

de la forma

$$I_\alpha(u) = (\Pi(u), A_q(u)), \tag{2.1.1}$$

donde $A_q : E_q \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo de espacios vectoriales ($q = \Pi(u)$). Los difeomorfismos I_α se llaman *trivializaciones locales* de $\Pi : E \to M$.

Sea $\Pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una función suave $\sigma : M \to E$ es, por definición, una *sección* de Π si $\Pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$, o equivalentemente, si $\sigma(p) \in E_p$ para todo $p \in M$. Se define

$$\Gamma(M, E) = \{\text{secciones suaves de } \Pi : E \to M\}.$$

Por ejemplo, tenemos la sección nula σ, dada por $\sigma(p) = 0_p$ (vector nulo de E_p) para todo $p \in M$. También, $\Gamma(M, TM) = \mathfrak{X}(M)$, el conjunto de los campos vectoriales en M (nos referimos a campos de clase $\mathcal{C}^\infty$, como serán todas las funciones que consideraremos en la tesis).

Definición 7. *Sea $\Pi : E \to M$ un fibrado vectorial. Una* conexión afín *de $\Pi : E \to M$ es una aplicación $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \to \Gamma(M, E)$ que cumple las siguientes propiedades (donde se denota $\nabla_X V = \nabla(X, V)$)*

$\nabla_{fX+Y}V = f\nabla_X V + \nabla_Y V,$
$\nabla_X (V + W) = \nabla_X V + \nabla_X W,$
$\nabla_X fV = X (f) V + f\nabla_X V,$

para todo par de campos vectoriales X, Y en M, toda función suave $f : M \to \mathbb{R}$ y todo par de secciones V, W de Π.

Como ejemplos tenemos las conexiones afines en TM (en particular la conexión de Levi Civita si M es riemanniana) y la conexión normal en el fibrado normal de una subvariedad de una variedad riemanniana.

Sea $\Pi : E \to M$ un fibrado vectorial con una conexión afín ∇ y sea $\alpha : I \to M$ una curva en M. Llamamos

$$\Gamma (\alpha) = \left\{V : I \to E \mid V \text{ es suave y } V (t) \in E_{\alpha(t)} \text{ para todo } t \in I\right\}.$$

Los elementos de $\Gamma (\alpha)$ se llaman *secciones de* Π *a lo largo de* α.

Definición 8. *La* derivada covariante $\frac{D}{dt} : \Gamma (\alpha) \to \Gamma (\alpha)$ *asociada a* ∇ *se define de manera análoga al caso $E = TM$. En particular, si Y es una sección de E, entonces $\frac{D}{dt} (Y \circ \alpha) = \nabla_{\alpha'} Y$. Una sección $V \in \Gamma (\alpha)$ se dice* paralela *a lo largo de α si $\frac{DV}{dt} = 0$.*

La siguiente proposición introduce el concepto de operador de conexión, el cual usaremos más adelante en la definición de la métrica de Sasaki en E.

Proposición 9. *Sea $\Pi : E^{n+m} \to M^m$ un fibrado vectorial con una conexión afín ∇ y sea $v \in E_p$. El* operador de conexión *$\mathcal{K}_v : T_v E \to E_p$ está bien definido mediante*

$$\mathcal{K}_v (\xi) = \frac{DV}{dt} (0),$$

donde V es una curva suave en E con $V (0) = v$, $V' (0) = \xi$ y $\frac{D}{dt}$ denota la derivada covariante asociada a ∇ a lo largo de la curva pie de V. Además $\mathcal{K}_v$ es una transformación lineal.

Demostración. Sea V una curva como en el enunciado. Veamos que $\mathcal{K}_v (\xi)$ no depende de la elección de la curva. Sea $(U, \varphi = (x_1, \ldots, x_m))$ un entorno coordenado en M con $p \in U$. Como Π es un fibrado vectorial existe una trivialización local de Π, que podemos suponer de la forma

$$I : \Pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^n, \quad I(u) = \left(\Pi(u), A_{\Pi(u)}(u)\right)$$

(ver (2.1.1)), reduciendo U si es necesario. Llamamos $X^i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, m)$ y, para cada $q \in U$,

$$Y_q^j := I^{-1}(q, e_j) \in E_q \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Así tenemos que $\left\{Y_q^j \mid j = 1, \ldots, n\right\}$ es una base de E_q. Tomando $c = \Pi \circ V$ la curva pie de V, tenemos que $V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t)\, Y_{c(t)}^i$ para ciertas funciones suaves v_i y también que $\varphi(c(t)) = ((x_1 \circ c)(t), \ldots, (x_m \circ c)(t)) =_{\text{def}} (c_1(t), \ldots, c_m(t))$.

Luego

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt}(0) &= \left.\frac{D}{dt}\right|_0 \left(\sum_{i=1}^n v_i(t)\, Y_{c(t)}^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(v_i'(0)\, Y_p^i + v_i(0) \left.\frac{D}{dt}\right|_0 Y_{c(t)}^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(v_i'(0)\, Y_p^i + v_i(0) \sum_{j=1}^m c_j'(0) \left(\nabla_{X^j} Y^i\right)_p\right). \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} A_{c(t)}(V(t)) &= A_{c(t)}\left(\sum_{i=1}^n v_i(t)\, Y_{c(t)}^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(t)\, A_{c(t)}\left(Y_{c(t)}^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^n v_i(t)\, e_i \\ &= (v_1(t), \ldots, v_n(t)), \end{aligned}$$

pues los $Y_{c(t)}^j$ forman una base de $E_{c(t)}$ y $A_{c(t)}$ es lineal. Además,

$$I(V(0)) = I(v) = (\Pi(v), A_p(v)) = (p, v_1(0), \ldots, v_n(0))$$

y también

$$(I \circ V)'(t) = \frac{d}{dt}\left(\Pi(V(t)), A_{c(t)}(V(t))\right) = \frac{d}{dt}(c(t), v_1(t), \ldots, v_n(t)).$$

Así, si

$$\widetilde{\varphi} =_{\text{def}} (\varphi, \mathrm{id}) \circ I = (\widetilde{x}_1, \ldots, \widetilde{x}_m, y_1, \ldots, y_n) : \Pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^{m+n} \tag{2.1.3}$$

son las coordenadas canónicas de E (en particular, $\widetilde{x}_i = x_i \circ \Pi$), tenemos que

$$d\widetilde{\varphi}_v(\xi) = (\widetilde{\varphi} \circ V)'(0) = (c_1'(0), \ldots, c_m'(0), v_1'(0), \ldots, v_n'(0)),$$

que son las coordenadas de ξ en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_1}\Big|_v, \ldots, \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_m}\Big|_v, \frac{\partial}{\partial y_1}\Big|_v, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}\Big|_v \right\}$. Entonces, la expresión (2.1.2) depende sólo de los valores de $V(0) = v$ y $V'(0) = \xi$ y en consecuencia, $\mathcal{K}_v$ está bien definida.

Ahora verificamos la linealidad de $\mathcal{K}_v : T_vE \to E_p$. Llamando $Z_{i,j} = v_i(0)\left(\nabla_{X^j} Y^i\right)_p$, observamos a partir de (2.1.2) y (2.1.3) que

$$\mathcal{K}_v \circ (d\widetilde{\varphi}_v)^{-1}(a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(b_i Y_p^i + \sum_{j=1}^{m} a_j Z_{i,j} \right), \tag{2.1.4}$$

que es lineal en a_j y b_i (hemos nombrado $a_j = c_j'(0)$ y $b_i = v_i'(0)$, que son arbitrarios). Como $d\widetilde{\varphi}_v : T_vE \to \mathbb{R}^{m+n}$ es un isomorfismo, $\mathcal{K}_v$ resulta lineal, como se deseaba. $\square$

Un fibrado vectorial $\Pi : E \to M$ se dice *riemanniano* si en cada fibra $E_p = \Pi^{-1}(\{p\})$ está definido un producto interno g_p que varía suavemente con p. O sea, para todo par de secciones suaves X, Y la función $H : M \to \mathbb{R}$, $H(q) = g_q(X_q, Y_q)$ es suave.

Dado un fibrado vectorial riemanniano $\Pi : E \to M$, el *fibrado esférico asociado* es la restricción de Π a $E^1 = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$, que es una subvariedad diferenciable.

Si el fibrado vectorial $\Pi : E \to M$ es riemanniano, una conexión ∇ en Π se dice *métrica* si para toda curva $\alpha : I \to M$ y todo par $\sigma_1 : I \to E$, $\sigma_2 : I \to E$ de secciones paralelas a lo largo de α se cumple que $t \to \langle \sigma_1(t), \sigma_2(t) \rangle_{\alpha(t)}$ es constante. Equivalentemente, si

$$\frac{d}{dt}\langle \sigma_1(t), \sigma_2(t) \rangle_{\alpha(t)} = \left\langle \frac{D}{dt}\sigma_1(t), \sigma_2(t) \right\rangle_{\alpha(t)} + \left\langle \sigma_1(t), \frac{D}{dt}\sigma_2(t) \right\rangle_{\alpha(t)}$$

para toda curva $\alpha : I \to M$ y todo par $\sigma_1 : I \to E$, $\sigma_2 : I \to E$ de secciones a lo largo de α ($\frac{D}{dt}$ denota la derivada covariante a lo largo de α). Por la fórmula de polarización, esto es equivalente a ver que

$$\frac{d}{dt} \langle \sigma(t), \sigma(t) \rangle_{\alpha(t)} = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \sigma(t), \sigma(t) \right\rangle_{\alpha(t)} \tag{2.1.5}$$

vale para toda sección σ a lo largo de α.

2.2. La métrica de Sasaki

Sea $\Pi : E \to M$ un fibrado vectorial riemanniano con una conexión métrica ∇. La variedad E admite una métrica riemanniana que generaliza la métrica de Sasaki del fibrado tangente.

Definición 10. *La* estructura riemanniana de Sasaki en E *es aquella tal que la aplicación*

$$(d\Pi_v, \mathcal{K}_v) : T_vE \to T_pM \times E_p \tag{2.2.1}$$

es una isometría lineal para todo $v \in E$, donde $\mathcal{K}_v$ es el operador de conexión, $p = \Pi(v)$ y en $T_pM \times E_p$ se considera el producto interno inducido por los productos internos de cada factor, que se requieren ortogonales.

Observación 11. *La aplicación dada en (2.2.1) es un isomofismo lineal. Ya probamos que $\mathcal{K}_v$ es lineal y por (2.1.4), tomando $a_j = 0$ para todo j, $\mathcal{K}_v$ resulta suryectiva. Dado que Π es un fibrado vectorial, Π es submersión, por lo tanto $d\Pi_v$ es lineal y suryectiva. Así, $(d\Pi_v, \mathcal{K}_v)$ es lineal. Como $\dim T_vE = m + n = \dim (T_pM \times E_p)$, la afirmación es verdadera.*

Proposición 12. *La métrica de Sasaki en E es la única estructura riemanniana tal que para toda curva suave $V : [a, b] \to E$, su longitud es*

$$\operatorname{long}(V) = \int_a^b \sqrt{\|c'(t)\|^2 + \left\| \frac{DV}{dt}(t) \right\|^2} dt, \tag{2.2.2}$$

donde $c = \Pi \circ V$ y $\frac{D}{dt}$ denota la derivada covariante a lo largo de c.

DEMOSTRACIÓN. Sea $V : [a,b] \to E$ como en el enunciado. Sabemos que

$$\operatorname{long}(V) = \int_a^b \|V'(t)\|\, dt,$$

y como $\left(d\Pi_{V(t)}, \mathcal{K}_{V(t)}\right)$ es una isometría, se cumple que

$$\begin{aligned} \|V'(t)\|^2 &= \left\|\left(d\Pi_{V(t)}, \mathcal{K}_{V(t)}\right)(V'(t))\right\|^2 \\ &= \left\|\left(d\Pi_{V(t)} V'(t), \mathcal{K}_{V(t)}(V'(t))\right)\right\|^2 \\ &= \left\|\left(c'(t), \frac{DV}{dt}(t)\right)\right\|^2 \\ &= \|c'(t)\|^2 + \left\|\frac{DV}{dt}(t)\right\|^2. \end{aligned}$$

Entonces (2.2.2) es válida.

Ahora nos ocupamos de la unicidad. Resulta del hecho general de que una estructura riemanniana en una variedad diferenciable N está determinada unívocamente por las longitudes de sus curvas. En efecto, sean $v \in TN$ y una curva $\gamma : [0,\delta] \to N$ con $\gamma'(0) = v$. Derivando $\operatorname{long}\left(\gamma|_{[0,\delta]}\right) = \int_0^\delta \|\gamma'(t)\|\, dt$ respecto de δ en $\delta = 0$, tenemos que

$$\left.\frac{d}{d\delta}\right|_0 \operatorname{long}\left(\gamma|_{[0,\delta]}\right) = \|\gamma'(0)\| = \|v\|,$$

por el teorema fundamental del cálculo. □

2.3. La energía y la combadura total

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita con productos internos b_1 y b_2, respectivamente. Se define $\|T\|^2 = \operatorname{tr}(T^t T)$, donde T^t denota la transpuesta de T, es decir, la transformación $T^t : W \to V$ que satisface $b_2(Tv, w) = b_1(v, T^t w)$ para todo $v \in V$ y $w \in W$. Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V, entonces

$$\|T\|^2 = \sum_{j=1}^n b_2(T(v_j), T(v_j)).$$

Definición 13. *La* energía de una aplicación *suave $f : M \to N$ entre variedades riemannianas, con M compacta y orientada, es la integral*

$$\mathcal{E}(f) = \frac{1}{2}\int_M \|df_p\|^2\, dv(p)\,, \tag{2.3.1}$$

donde dv denota la forma de volumen en M.

Los puntos críticos de la funcional $\mathcal{E}$ sobre $C^\infty(M,N)$ se conocen como aplicaciones armónicas.

Definición 14. *La funcional* combadura total (total bending *en inglés) asigna a cada sección $\sigma \in \Gamma(M, E^1)$ el número*

$$\mathcal{B}(\sigma) = \int_M \|\nabla\sigma\|^2\,.$$

Aquí, $(\nabla\sigma)_p : T_pM \to E_p$ y se integra respecto de la forma de volumen asociada a la métrica riemanniana de M.

El número $\mathcal{B}(\sigma)$ indica en qué medida la sección σ se aparta de ser paralela. La funcional $\mathcal{B}$ fue introducida por G. Wiegmink en [34] para secciones del fibrado tangente, es decir, campos vectoriales. Fue extendida a secciones de fibrados esféricos generales en [32]. Notar que la definición no requiere que E^1 posea una métrica riemanniana. Si la tiene, por ejemplo la de Sasaki, tiene sentido considerar la energía de una sección $\sigma : M \to E^1$, y vale la identidad (ver por ejemplo [21])

$$\mathcal{E}(\sigma) = \frac{n}{2}\,\mathrm{vol}(M) + \frac{1}{2}\int_M \|\nabla\sigma\|^2\, dv = \frac{n}{2}\,\mathrm{vol}(M) + \frac{1}{2}\mathcal{B}(\sigma)\,.$$

Una sección σ de E^1 se dice *paralela* si $\frac{D}{dt}\sigma(c(t)) = 0$ a lo largo de cualquier curva c en M. Claramente, si una tal sección existe, entonces es un mínimo global de la combadura total.

2.4. Secciones críticas para la combadura total y la energía

2.4.1. Secciones críticas para la combadura total

En esta subsección recordamos condiciones suficientes para que una sección de un fibrado esférico sea crítica para la funcional combadura total $\mathcal{B}$.

Sea $E \to M$ un fibrado vectorial riemanniano con una conexión métrica ∇ y sea $E^1 \to M$ el fibrado esférico asociado. Sea $\sigma_0 \in \Gamma(M, E^1)$ una sección suave. Una *variación vertical* de σ_0 es una función suave $\sigma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times M \to E^1$ tal que $\sigma(t,p) \in E^1_p$ y $\sigma(0,p) = \sigma_0(p)$ para todo $|t| < \varepsilon$, $p \in M$. Llamamos $\sigma_t : M \to E^1$, $\sigma_t(p) = \sigma(t,p)$.

Una sección σ_0 se dice *crítica para la funcional combadura total* $\mathcal{B}$ (también llamada *verticalmente armónica*) si para toda variación vertical σ de σ_0, la función

$$\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}, \qquad \beta(t) = \mathcal{B}(\sigma_t)$$

tiene un punto crítico en cero.

Presentamos el *laplaciano burdo* Δ, el cual actúa sobre secciones suaves de E de la siguiente manera (bien definida): Sean γ_i $(i = 1, \ldots, m)$ geodésicas de M con rapidez unitaria y $\gamma_i(0) = p$ tales que $\{\gamma_i'(0) \mid i = 1, \ldots, m\}$ es una base ortonormal de T_pM. Entonces

$$(\Delta\sigma)(p) = \sum_{i=1}^{m} \left.\frac{(D^i)^2}{dt^2}\right|_0 \sigma(\gamma_i(t)), \tag{2.4.1}$$

donde $\frac{D^i}{dt}$ denota la derivada covariante a lo largo de γ_i.

Teorema 15. [34] *Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial riemanniano con una conexión métrica sobre una variedad riemanniana orientada compacta. Una sección $\sigma : M \to E^1$ es verticalmente armónica si y sólo si existe una función real suave f en M tal que*

$$\Delta\sigma = f\sigma. \tag{2.4.2}$$

Esta condición fue probada para el caso particular donde E es un fibrado tangente, por Wiegmink [34] y Wood [35] para variedades compactas y por Gil-Medrano [15] para variedades (no necesariamente compactas) en general (con una presentación diferente). La primera aplicación para fibrados esféricos generales (no necesariamente espacios tangentes unitarios) fue dada en [32]. El concepto de sección verticalmente armónica aparece también, en diferentes contextos, por ejemplo en [3, 7, 21].

2.4.2. Digresión: Solución al problema del ejemplo motivador

Interrumpimos el hilo de la tesis para presentar una aplicación sencilla del teorema, resolviendo el problema del ejemplo motivador de la Sección 1.1. En ese caso $M \equiv S^1$, la trayectoria de α, E es el fibrado normal de α y el campo U juega el rol de σ. Nuestro objetivo es encontrar un mínimo de (1.1.2) y para ello hallamos primero los puntos críticos recurriendo al Teorema 15.

Para cada t denotamos por p_t la proyección ortogonal sobre $\alpha'(t)^{\perp}$. Se deduce de (1.1.1) que

$$\frac{D^{\perp}U}{dt} = p_t\left(U'\right) = \left(\theta' + \tau\right)\left(-\operatorname{sen}\theta\ N + \cos\theta\ B\right).$$

Derivando, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(p_t\left(U'\right)\right)' &= \left(\theta'' + \tau'\right)\left(-\operatorname{sen}\theta\ N + \cos\theta\ B\right) \\
&\quad + \left(\theta' + \tau\right)\left(-\cos\theta\ \theta' N - \operatorname{sen}\theta\ \left(-\kappa T + \tau B\right) + \left(-\operatorname{sen}\theta\ \theta' B - \cos\theta\ \tau N\right)\right) \\
&= \left(\theta'' + \tau'\right)\left(-\operatorname{sen}\theta\ N + \cos\theta\ B\right) \\
&\quad + \left(\theta' + \tau\right)\left(-\cos\theta\ \theta' N + \operatorname{sen}\theta\ \kappa T - \operatorname{sen}\theta\ \tau B - \operatorname{sen}\theta\ \theta' B - \cos\theta\ \tau N\right) \\
&= \left(\theta' + \tau\right)\operatorname{sen}\theta\ \kappa T \\
&\quad + \left(-\operatorname{sen}\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \cos\theta\ \left(\theta' + \tau\right)^2\right) N \\
&\quad + \left(\cos\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \operatorname{sen}\theta\ \left(\theta' + \tau\right)^2\right) B.
\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{\left(D^{\perp}\right)^2 U}{dt^2} &= p_t\left(\left(p_t\left(U'\right)\right)'\right) \\
&= \left(-\operatorname{sen}\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \cos\theta\ \left(\theta' + \tau\right)^2\right) N \\
&\quad + \left(\cos\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \operatorname{sen}\theta\ \left(\theta' + \tau\right)^2\right) B.
\end{aligned}$$

Por el Teorema 15, buscamos condiciones sobre θ para que esta expresión sea, punto a punto, un múltiplo f de $U = \cos\theta\ N + \operatorname{sen}\theta\ B$, o sea,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{sen}\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \cos\theta\ \left(\theta'\tau\right)^2 &= f\cos\theta \\
\cos\theta\ \left(\theta'' + \tau'\right) - \operatorname{sen}\theta\ \left(\theta' + \tau\right)^2 &= f\operatorname{sen}\theta.
\end{aligned}$$

Notemos que si multiplicamos por $\cos\theta$ en ambos miembros de la segunda igualdad y por $\operatorname{sen}\theta$ en la primera y luego restamos, resulta

$$\begin{aligned}
\cos\theta\left(\cos\theta\left(\theta''+\tau'\right)-\operatorname{sen}\theta\left(\theta'+\tau\right)^2\right) &= \operatorname{sen}\theta\left(-\operatorname{sen}\theta\left(\theta''+\tau'\right)-\cos\theta\left(\theta'+\tau\right)^2\right),\\
\cos^2\theta\left(\theta''+\tau'\right)-\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\left(\theta'+\tau\right)^2 &= -\operatorname{sen}^2\theta\left(\theta''+\tau'\right)-\operatorname{sen}\theta\ \cos\theta\left(\theta'+\tau\right)^2,\\
\cos^2\theta\left(\theta''+\tau'\right) &= -\operatorname{sen}^2\theta\left(\theta''+\tau'\right),\\
\theta'' &= -\tau'.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\theta' = -\tau + c$, con $c \in \mathbb{R}$, y luego

$$\theta(s) = \theta_0 + cs - \int_0^s \tau(t)\ dt.$$

Además, como U debe ser periódico, se tiene que cumplir que $\theta(2\pi)$ difiere de $\theta(0)$ en un múltiplo entero k de 2π. Así,

$$2k\pi = \theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi c - \int_0^{2\pi} \tau(t)\ dt.$$

Entonces los valores posibles de c son

$$c = k + T,$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y $T = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tau(t)\, dt$ es el valor medio de la torsión de α.

Luego, para que (1.1.2) sea mínimo basta tomar el valor de c que hace que $\int_0^{2\pi} \|c\|^2\, dt = 2\pi c^2$ sea mínimo, o sea, que hace $|k+T|$ mínimo. Los otros valores de c proveen puntos críticos para (1.1.2).

2.4.3. Secciones críticas para la energía

Recordamos de [21] condiciones suficientes para que una sección de un fibrado esférico sea armónica, o sea, crítica para la funcional energía $\mathcal{E}$.

Sea σ una sección suave de un fibrado esférico $E^1 \to M$. La 1-forma $\mathcal{R}_\sigma$ sobre M está definida por

$$\mathcal{R}_\sigma(X) = \sum_{i=1}^m \langle R_{X,e_i}\sigma, \nabla_{e_i}\sigma\rangle \tag{2.4.3}$$

para cualquier campo vectorial X sobre M, donde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ es un marco local ortonormal (m es la dimensión de M) y

$$R_{X,Y}\sigma = \nabla_{[X,Y]}\sigma - \nabla_X \nabla_Y \sigma + \nabla_Y \nabla_X \sigma$$

es el tensor de curvatura. Verificamos la buena definición, esto es, que $\mathcal{R}_\sigma$ no depende de la elección de la base. Si $\{f_1, \ldots, f_m\}$ es otra base ortonormal de campos locales, entonces para cada $j = 1, \ldots, m$ se tiene que $f_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} e_i$, con a_{ij} funciones suaves tales que la matriz de coeficientes $a_{ij}(p)$ es ortogonal para todo p. Usando que R es trilineal, tenemos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^m \left\langle R_{X,f_j}\sigma, \nabla_{f_j}\sigma \right\rangle &= \sum_{j=1}^m \left\langle \sum_{i=1}^m a_{ij} R_{X,e_i}\sigma, \sum_{k=1}^m a_{kj} \nabla_{e_k}\sigma \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m a_{ij} a_{kj} \left\langle R_{X,e_i}\sigma, \nabla_{e_k}\sigma \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^m a_{ij} a_{jk}^t \left\langle R_{X,e_i}\sigma, \nabla_{e_k}\sigma \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^m \left\langle R_{X,e_i}\sigma, \nabla_{e_i}\sigma \right\rangle .
\end{aligned}$$

Así, $\mathcal{R}_\sigma$ está bien definida.

Teorema 16. [21] *Sea* $\Pi : E^1 \to M$ *un fibrado esférico con una conexión métrica sobre una variedad riemanniana orientada y compacta y* $\sigma \in \Gamma(M, E^1)$. *Entonces la función* $\sigma : M \to E^1$ *es una aplicación armónica si y sólo si es una sección verticalmente armónica y además* $\mathcal{R}_\sigma \equiv 0$.

2.5. Octoniones

Esta sección se basa principalmente en el capítulo 6 de [25]. Los octoniones son un álgebra de división normada sobre los números reales, usualmente representada por $\mathbb{O}$. Un álgebra de división normada A es un álgebra de dimensión finita (no necesariamente asociativa) sobre $\mathbb{R}$ con unidad multiplicativa 1, y con un producto interno definido positivo cuya norma satisface la propiedad multiplicativa $\|xy\| = \|x\| \|y\|$ para todo $x, y \in A$, y tal que todo elemento no nulo tiene inverso multiplicativo.

Hay sólo cuatro de tales álgebras, las otras tres son los números reales, los números complejos, y los cuaterniones $\mathbb{H}$. La de los octoniones es la mayor, con dimensión 8, el doble de los cuaterniones, de los que es una extensión. Además, $\mathbb{O}$ no es conmutativa ni asociativa, pero responde a una forma débil de la asociatividad.

Explícitamente (ver 17.2 de [30]), los octoniones son el espacio euclídeo $\mathbb{R}^8$ con su producto interno canónico y con una multiplicación definida en la base canónica $\{e_i \mid i = 0, \ldots, 7\}$ mediante

$$e_0 e_i = e_i e_0 = e_i \tag{2.5.1}$$

para $i = 0, ..., 7$ (en particular e_0 es la unidad del producto), y además

$$e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \varepsilon_{ijk} e_k \tag{2.5.2}$$

para $i, j, k \geq 1$, donde ε_{ijk} es un tensor completamente antisimétrico con valor $+1$ cuando

$$ijk = 123, 145, 176, 246, 257, 347, 365,$$

extendido de manera bilineal a $\mathbb{R}^8 \times \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$.

Recordemos el concepto de conjugación: Si A es un álgebra normada, se denota $\operatorname{Re} A = \operatorname{span}\{1\}$ e $\operatorname{Im} A$ el complemento ortogonal de $\operatorname{Re} A$ en A. Luego cada $v \in A$ tiene una única descomposición ortogonal $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in \operatorname{Re} A$ y $v_2 \in \operatorname{Im} A$. Denotamos $\operatorname{Re} v = v_1$ e $\operatorname{Im} v = v_2$. El *conjugado* de v se define por $\overline{v} = v_1 - v_2$. En particular, $\operatorname{Re} v = \frac{1}{2}(v + \bar{v})$. También, para todo $u, v \in A$ se cumple que

$$\overline{uv} = \bar{v}\bar{u} \qquad \text{y} \qquad \langle u, v \rangle = \operatorname{Re} \bar{u} v.$$

Volviendo a la tabla, si en (2.5.2) y (2.5.1) consideramos sólo i, j, $k = 0, 1, 2, 3$, obtenemos la multiplicación cuaterniónica, con lo que $\mathbb{H} = \operatorname{span}\{e_i \mid i = 0, \ldots, 3\}$.

Presentamos a continuación una propiedad básica de los octoniones. Si $\{u, v\}$ es un subconjunto ortogonal de $\operatorname{Im} \mathbb{O}$, entonces $\{u, v, uv\}$ también es ortogonal y

$$uv = -vu \qquad \text{y} \qquad u(uv) = -v. \tag{2.5.3}$$

Otra propiedad de los octoniones resulta del Corolario 6.13 en [25]:

COROLARIO 17. [25] *Si* $u \perp v$, *entonces* $u\bar{v} = -v\bar{u}$,

$$u(\bar{v}w) = -v(\bar{u}w) \quad y \quad (w\bar{v})u = -(w\bar{u})v, \text{ para todo } w.$$

Aplicando repetidas veces este corolario se tiene que

$$-w(\bar{v}u) = u(\bar{v}w)$$

para todo $u, v, w \in \mathbb{O}$ ortogonales, y de allí,

$$-(\bar{w}v)\bar{u} = (\bar{u}v)\bar{w}, \tag{2.5.4}$$

una identidad que será usada con frecuencia en los capítulos siguientes.

2.6. Productos cruz

Esta sección se basa en los artículos [8] y [22], y las pruebas de los resultados que se exponen se pueden encontrar allí.

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre $\mathbb{R}$ y sea $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un producto interno en V (definido positivo) con norma $\|\cdot\|$. Un *producto cruz* en V es, por definición, una aplicación multilineal $X : V^r \to V$ $(1 \leq r \leq n)$, que satisface que

$$\langle X(a_1, \ldots, a_r), a_i \rangle = 0, \text{ para } 1 \leq i \leq r \quad \text{y} \quad \|X(a_1, \ldots, a_r)\|^2 = \det(\langle a_i, a_j \rangle)$$

para todo $a_1, \ldots, a_r$ en V.

En [8] se clasifican dichos productos cruz en un contexto más general, con un cuerpo de característica distinta de dos en vez de $\mathbb{R}$ y para una forma bilineal simétrica no degenerada (no necesariamente definida positiva).

Sea $\delta = \pm 1$. Se dice que dos productos cruz X y X' definidos con respecto a la misma forma bilineal son *δ-isomorfos* si existe una isometría lineal $F : V \to V$ que satisface

$$F(X(a_1, \ldots, a_r)) = \delta X'(Fa_1, \ldots, Fa_r) \tag{2.6.1}$$

para todo $a_1, \ldots, a_r$ en V. Para $\delta = -1$ se dice también que F es un *anti-isomorfismo.*

El siguiente teorema asegura que el producto cruz sólo existe en los casos listados.

Teorema 18. [8] *Un producto cruz existe exactamente en los siguientes casos:*

$$\begin{aligned}&r = 1,\ n \text{ par},\\&r = m \text{ arbitrario},\ n = m+1,\\&r = 2,\ n = 7,\\&r = 3,\ n = 8.\end{aligned}$$

Proposición 19. *Un producto cruz con $r = 1$ en V es una estructura casi compleja ortogonal, es decir, es una transformación lineal ortogonal J tal que $J^2 = -\operatorname{id}$. En particular n es par.*

Demostración. Sea $J : V \to V$ un producto cruz, en particular J es una aplicación lineal que satisface

$$\langle J(a), a\rangle = 0 \qquad \text{y} \qquad \langle J(a), J(a)\rangle = \det(\langle a, a\rangle) = \langle a, a\rangle \tag{2.6.2}$$

para todo $a \in V$. La última igualdad indica que J es una transformación ortogonal. Mostremos que $J^2 = -\operatorname{id}$. Como J es ortogonal, basta verificar que $J = -J^t$, y eso se deduce de la primera igualdad.

Supongamos ahora que J es una estructura casi compleja ortogonal y veamos que resulta un producto cruz. Como J es una transformación ortogonal, entonces la segunda expresión en (2.6.2) vale para todo a. Por otro lado, como $J^tJ = \operatorname{id} = -J^2$, tenemos que $J^t = -J$, y así

$$\langle J(a), a\rangle = \left\langle a, J^t(a)\right\rangle = \langle a, -J(a)\rangle = -\langle J(a), a\rangle$$

para todo $a \in V$, de donde se deduce la primera identidad en (2.6.2). □

Observación 20. *Sea V un espacio vectorial de dimensión $m+1$ con producto interno. Supongamos además que V está orientado. Un producto cruz en V con $r = m$ resulta ser la extensión m-lineal de la aplicación (bien definida) que a un subconjunto ortonormal $\{a_1, \ldots, a_m\}$ le asigna, o bien el único vector unitario a_{m+1} en V ortogonal a cada a_i tal que $\{a_1, \ldots, a_{m+1}\}$ está positivamente orientada, o bien, su opuesto.*

Dada una base ortonormal positiva $\{e_1, \ldots, e_{m+1}\}$ *de* V*, una fórmula conocida para el primer caso es*

$$(a_1, \ldots, a_m) \mapsto \det \begin{pmatrix} (e_1, \ldots, e_{m+1}) \\ A \end{pmatrix},$$

donde A *es la matriz* $m \times (m+1)$ *cuyas fila* i*-ésima consiste de las componentes del vector* a_i *respecto de esa base.*

Proposición 21. [8] *Los productos cruz con* $r = 2$*,* $n = 7$ *son, salvo isomorfismos, de la forma*

$$a \times b = ab + \langle a, b \rangle ,$$

donde $a, b \in \operatorname{Im} \mathbb{O} = \mathbb{R}^7$ *con el producto interno canónico* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *y la multiplicación octoniónica. Se denomina producto cruz doble.*

Proposición 22. [8] *Los productos cruz con* $r = 3$*,* $n = 8$ *son, salvo isomorfismos, de las formas*

$$X(a, b, c) = -a\left(\bar{b}c\right) + \langle a, b \rangle c + \langle b, c \rangle a - \langle c, a \rangle b, \tag{2.6.3}$$

$$Y(a, b, c) = -\left(a\bar{b}\right)c + \langle a, b \rangle c + \langle b, c \rangle a - \langle c, a \rangle b, \tag{2.6.4}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{O} = \mathbb{R}^8$*, con el producto interno canónico* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *y la multiplicación octoniónica.*

Observación 23. *Los productos cruz* X *e* Y *son anti-isomorfos. En efecto, sea* $\phi : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ *dada por* $\phi(x) = \bar{x}$*, la función conjugación, entonces*

$$\langle \phi(a), \phi(b) \rangle = \langle \bar{a}, \bar{b} \rangle = \operatorname{Re}\left(a\bar{b}\right) = a_1 b_1 - a_2 b_2 = \operatorname{Re}(\bar{a}b) = \langle a, b \rangle ,$$

donde a_1 *y* a_2 *son las partes real e imaginaria de* a*, respectivamente (y de manera similar para* b*). Luego* ϕ *es isometría lineal. Para probar la segunda condición (2.6.1) observamos que* $\phi(X(a, b, c))$ *e* $Y(\phi(a), \phi(b), \phi(c))$ *son alternantes, luego basta probarla sólo para* $a, b, c \in \mathbb{O}$ *ortogonales. Usando la propiedad (2.5.4) tenemos:*

$$\phi(X(a, b, c)) = \overline{X(a, b, c)} = -\overline{a\left(\bar{b}c\right)} = -(\bar{c}b)\,\bar{a} = (\bar{a}b)\,\bar{c} = -Y(\phi(a), \phi(b), \phi(c)).$$

Por la observación anterior vamos a trabajar sólo con el producto (2.6.3), que denominamos producto cruz triple. En lo que sigue enunciamos algunas propiedades que serán de utilidad.

Mencionamos una propiedad del producto cruz triple (2.6.3), ver por ejemplo (5.22) en [31]:

$$\langle X(u,v,w), z\rangle = -\langle X(z,v,w), u\rangle, \tag{2.6.5}$$

que se cumple para cualquier conjunto ortonormal $\{z,u,v,w\}$ en $\mathbb{R}^8$. También vale que

$$e_i \times e_j = X(e_0, e_i, e_j) \tag{2.6.6}$$

para todo $i,j = 0,\ldots,7$. Luego, por la ecuación (2.5.2) y la definición de producto cruz doble, tenemos que

$$X(e_0,e_1,e_2) = e_1 \times e_2 = e_3.$$

Estas identidades serán usadas frecuentemente en los capítulos posteriores.

2.7. Grassmannianas de subespacios orientados

Sea $G(k,n)$ el conjunto de todos los subespacios vectoriales orientados de dimensión k en $\mathbb{R}^n$. Dado un subconjunto ortonormal $\{u_1,\ldots,u_k\} \subset \mathbb{R}^n$, definimos el subespacio orientado

$$u_1 \wedge \cdots \wedge u_k = \left(\operatorname{span}\{u_1,\ldots,u_k\}, u^1 \wedge \cdots \wedge u^k\right),$$

donde $\left\{u^1,\ldots,u^k\right\}$ es la base dual de $\{u_1,\ldots,u_k\}$.

Luego

$$G(k,n) = \{u_1 \wedge \cdots \wedge u_k \mid u_1,\ldots,u_k \in \mathbb{R}^n \text{ ortonormales}\}.$$

Proposición 24. *La grassmanniana $G(k,n)$ es un espacio homogéneo. Más precisamente, se identifica de manera natural con*

$$\frac{SO(n)}{SO(k)\times SO(n-k)}.$$

Demostración. Mostramos que el grupo

$$SO(n) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^t = I \quad \text{y} \quad \det A = 1 \right\}$$

actúa transitivamente en $G(k,n)$. Sean $P_0 = e_1 \wedge \cdots \wedge e_k \in G(k,n)$ fijo y $P = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in G(k,n)$ arbitrario. Completamos $\{v_1, \ldots, v_k\}$ a una base y luego aplicamos el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal positiva $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. La matriz cuyos vectores columna son los v_i, para $i = 1, \ldots, n$, está en $SO(n)$ y lleva P_0 en P.

Veamos ahora que el subgrupo de isotropía G_{P_0} de $SO(n)$ en P_0 es

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \mid A_{11} \in SO(k)\,,\, A_{22} \in SO(n-k) \right\} \simeq SO(k) \times SO(n-k)\,,$$

que es cerrado en $SO(n)$. Claramente $H \subset G_{P_0}$. Para verificar la otra inclusión, notamos que las matrices representativas de P_0 son de la forma $\begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}$, donde $C \in SO(k)$. Si $T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in G_{P_0}$, se tiene que $A_{21} = 0$, pues

$$TP_0 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}C \\ A_{21}C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado, como T es ortogonal tenemos

$$I_n = T^tT = \begin{pmatrix} A_{11}^t & 0 \\ A_{12}^t & A_{22}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}^tA_{11} & A_{11}^tA_{12} \\ A_{12}^tA_{11} & A_{12}^tA_{12} + A_{22}^tA_{22} \end{pmatrix}.$$

Igualando cada bloque obtenemos

$$\begin{aligned} &A_{11}^tA_{11} = I_k \Rightarrow A_{11} \in O(k)\,; \\ &A_{11}^tA_{12} = 0 \Rightarrow A_{12} = 0; \\ &A_{12}^tA_{12} + A_{22}^tA_{22} = I_{n-k} \Rightarrow A_{22} \in O(n-k)\,. \end{aligned}$$

Luego $T = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$. Como $\{A_{11}e_1, \ldots, A_{11}e_k\}$ está orientado positivamente, $\det A_{11} = 1$ y de allí, $A_{11} \in SO(k)$. Además, $\det T = \det A_{11} \det A_{22} = 1$, de donde tenemos que $\det A_{22} = 1$. Luego resulta que $A_{22} \in SO(n-k)$. Por lo tanto $T \in H$.

De este modo probamos que

$$G(k,n) \simeq \frac{SO(n)}{SO(k) \times SO(n-k)},$$

en particular, $G(k,n)$ es un espacio homogéneo. $\square$

A continuación definimos la métrica riemanniana normal en $G(k,n)$. Llamamos $G = SO(n)$ y denotamos

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n) = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A + A^t = 0 \right\}$$

y

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A \in \mathfrak{so}(k),\ B \in \mathfrak{so}(n-k) \right\}$$

las álgebras de Lie de G y H, respectivamente. Sea

$$\mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \mid A \in \mathbb{R}^{(n-k)\times k} \right\}, \tag{2.7.1}$$

que se identifica naturalmente con $T_{P_0}G(k,n)$ mediante el isomorfismo $d\pi_I|_{\mathfrak{m}} : \mathfrak{m} \to T_{P_0}G(k,n)$, donde $\pi : G \to G(k,n)$ es la proyeción canónica

$$\pi(g) = gP_0 = ge_1 \wedge \cdots \wedge ge_k \simeq gH.$$

Se tiene que $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{m}$ es la descomposición de Cartan correspondiente.

Verificamos que $\mathfrak{m}$ es un complemento $\mathrm{Ad}(H)$-invariante de $\mathfrak{h}$. Sean

$$h = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \in H \qquad \text{y} \qquad a = \begin{pmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{m}, \tag{2.7.2}$$

y calculamos

$$\mathrm{Ad}(h)(a) = hah^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -H_1A^tH_2^t \\ H_2AH_1^t & 0 \end{pmatrix},$$

que está en $\mathfrak{m}$, como queríamos.

Para definir la métrica riemanniana en $G(k,n)$ basta dar un producto interno en $\mathfrak{m}$ que sea $\mathrm{Ad}(H)$-invariante. A continuación escribimos la justificación.

Por la identidad de polarización definimos sólo la norma en $T_{gH}G/H$, como sigue: Para un elemento cualquiera $d\bar{L}_g(X)$ de este espacio vectorial, donde $X = d\pi_I(\xi) \in$

$T_H G/H$ con $\xi \in \mathfrak{m}$, se define $\left\|d\bar{L}_g(X)\right\| = \|\xi\|$. Veamos que la definición es buena. Comenzamos notando que si $d\bar{L}_g(X) = d\bar{L}_{gh}(Y)$ con $Y = d\pi_I(\eta)$ ($Y \in \mathfrak{m}$), entonces $\xi = \operatorname{Ad}(h)\,\eta$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned}
d\bar{L}_g\left(d\pi_I\left(\operatorname{Ad}(h)\,\eta\right)\right) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \bar{L}_g\pi\left(e^{t\operatorname{Ad}(h)\eta}\right) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g e^{t\operatorname{Ad}(h)\eta}H \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 g h e^{t\eta} h^{-1} H = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (gh)\, e^{t\eta} H \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_0 \bar{L}_{gh}\pi\left(e^{t\eta}\right) = d\bar{L}_{gh}\left(d\pi_I(\eta)\right) \\
&= d\bar{L}_{gh}(Y) = d\bar{L}_g(X) = d\bar{L}_g\left(d\pi_I \xi\right),
\end{aligned}$$

ya que $d\bar{L}_g$ y $\left.d\pi_I\right|_{\mathfrak{m}}$ son isomorfismos. Así, $\left\|d\bar{L}_g(X)\right\| = \|\xi\| = \|\operatorname{Ad}(h)\,\eta\| = \|\eta\| = \left\|d\bar{L}_{gh}(Y)\right\|$, y en consecuencia el producto interno está bien definido.

Tomamos $\langle a, b\rangle = -\operatorname{tr}(ab)$ para $a, b \in \mathfrak{m}$. Verificamos que $\operatorname{Ad}(h)$ es una isometría lineal para todo $h \in H$. Por la identidad de polarización basta ver que preserva normas. Sean $h \in H$ y $a \in \mathfrak{m}$ como en (2.7.2). Calculamos

$$\begin{aligned}
\|\operatorname{Ad}(h)(a)\|^2 &= \left\|\begin{pmatrix} 0 & -H_1 A^t H_2^t \\ H_2 A H_1^t & 0 \end{pmatrix}\right\|^2 \\
&= -\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -H_1 A^t H_2^t \\ H_2 A H_1^t & 0 \end{pmatrix}^2\right) = \operatorname{tr}\begin{pmatrix} H_1 A^t A H_1^t & 0 \\ 0 & H_2 A A^t H_2^t \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr}\left(H_1 A^t A H_1^t\right) + \operatorname{tr}\left(H_2 A A^t H_2^t\right) = \operatorname{tr}\left(A A^t\right) + \operatorname{tr}\left(A^t A\right) \\
&= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} A^t A & 0 \\ 0 & A A^t \end{pmatrix} = -\operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & -A^t \\ A & 0 \end{pmatrix}^2\right) \\
&= \|a\|^2.
\end{aligned}$$

Esto induce una métrica riemanniana en $G(k, n)$.

Un *espacio simétrico riemanniano* es una variedad riemanniana M tal que para todo punto $q \in M$ existe una isometría s_q de M que fija q y tal que $\left(ds_q\right)_q = -\operatorname{id}_{T_q M}$. Una condición suficiente para que el espacio homogéneo G/K con una métrica riemanniana G-invariante sea simétrico es que exista un automorfismo involutivo τ de

G tal que K sea un subgrupo abierto del conjunto de puntos fijos de τ (ver por ejemplo el capítulo 9 de [26]).

PROPOSICIÓN 25. *La grassmanniana $G(k,n)$ es espacio simétrico.*

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 24, $G(k,n) \simeq G/H$ donde $G = SO(n)$ y $H = SO(k) \times SO(n-k)$. Se define $\tau : G \to G$ por $\tau(g) = AgA$, donde $A = \operatorname{diag}(I_k, -I_{n-k})$. Calculamos

$$\tau(gk) = AgkA = AgAAkA = \tau(g)\,\tau(k) \quad \text{ y } \quad \tau(\tau(g)) = \tau(AgA) = AAgAA = g$$

para todo $g, k \in G$. Luego τ es un automorfismo involutivo. Llamamos H_F al conjunto de puntos fijos de τ. Entonces, por lo discutido antes de la prueba, basta verificar que H es la componente conexa de la identidad de H_F. Veamos que

$$\begin{aligned} H_F &= S(O(k) \times O(n-k)) \\ &= \{X \in SO(n) \mid X = \operatorname{diag}(A,B) \text{ con } A \in O(k) \text{ y } B \in O(n-k)\}. \end{aligned}$$

En efecto, si $g = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \in G$ es un punto fijo de τ entonces

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & -A_{12} \\ -A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Igualando por bloque obtenemos que $A_{12} = A_{21} = 0$. Luego $g \in S(O(k) \times O(n-k))$. La otra inclusión se ve de manera similar.

La prueba concluye notando que H es la componente conexa de la identidad de H_F. Comentamos que G/H_F es la grassmanniana de subespacios no orientados. $\square$

OBSERVACIÓN 26. *Si $M = G/H$ es un espacio simétrico, dado $v \in T_H M$, es bien conocido que la curva $\gamma_v(t) = \exp(tv)\,H$, vía la identificación $\mathfrak{m} \simeq T_H M$, es una geodésica en M y toda geodésica con valor inicial H es de esa forma. Además, el transporte paralelo de $u \in T_H M$ a lo largo de γ_v entre 0 y t está dado por $(d\exp(tv))_H(u)$.*

2.7.1. Geodésicas de las grassmannianas

Para $0 \leq \ell < k$, $k \leq j < n$ consideramos las curvas en $G(k,n)$ definidas por

$$\gamma_j^\ell(t) = e_0 \wedge \cdots \wedge (\cos t\ e_\ell + \operatorname{sen} t\ e_j) \wedge \cdots \wedge e_{k-1} \tag{2.7.3}$$

($\cos t\ e_\ell + \operatorname{sen} t\ e_j$ ocupa el lugar ℓ en el producto exterior). Sus velocidades iniciales

$$e_j^\ell = e_j \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^j \in \mathfrak{m} \tag{2.7.4}$$

forman una base ortonormal de $T_{e_0\wedge\ldots\wedge e_{k-1}}G(k,n)$ (aquí, $\{e^0,\ldots,e^{n-1}\}$ es la base canónica dual).

Proposición 27. *Las curvas γ_j^ℓ con $0 \leq \ell < k$, $k \leq j < n$ son geodésicas de $G(k,n)$.*

Demostración. Como $G(k,n)$ es un espacio simétrico, dado $X \in T_{P_0}G(k,n)$, basta ver que las curvas γ_j^ℓ para $0 \leq \ell < k$, $k \leq j < n$ son de la forma $\exp(tX)P_0$, por la Observación 26.

Para $t \in \mathbb{R}$, consideramos $A_{j\ell}(t)$ el operador ortogonal de $\mathbb{R}^n$ que rota el plano orientado $e_\ell \wedge e_j$ en un ángulo t y fija el complemento ortogonal de $e_\ell \wedge e_j$. Claramente $\det A_{j\ell}(t) = 1$ y así $A_{j\ell}(t) \in SO(n)$.

Sea e_j^ℓ el operador lineal en $\mathbb{R}^n$ como en (2.7.4). Tenemos que

$$A_{j\ell}(0) = I \qquad \text{y} \qquad \left.\frac{d}{dt}\right|_0 A_{j\ell}(t) = e_j^\ell.$$

Se ve fácilmente que $A_{j\ell}(t+s) = A_{j\ell}(t)A_{j\ell}(s)$ para todo s,t, con lo cual $A_{j\ell}(t)$ es un subgrupo monoparamétrico. De allí resulta que $\exp\left(te_j^\ell\right) = A_{j\ell}(t)$, pues $\exp\left(te_j^\ell\right)$ es el único subgrupo monoparamétrico cuya derivada en cero es e_j^ℓ.

Se verifica que $\exp\left(te_j^\ell\right)P_0 = \gamma_j^\ell(t)$ para $0 \leq \ell < k$, $k \leq j < n$, y así las curvas $\gamma_j^\ell(t)$ son geodésicas de $G(k,n)$. $\square$

Capítulo 3

Secciones normales unitarias armónicas de la grassmanniana asociadas a productos cruz

3.1. Secciones normales unitarias de la grassmanniana

En este capítulo consideraremos aplicaciones que a subespacios orientados P de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ les asignan vectores unitarios ortogonales a P, de manera suave. Más precisamente, si $G(k,n)$ denota la grassmanniana de todos los subespacios orientados de dimensión k en $\mathbb{R}^n$, una tal aplicación es una sección del subfibrado esférico unitario $\Pi : E^1_{k,n} \to G(k,n)$ del fibrado vectorial $E_{k,n} \to G(k,n)$, donde

$$E_{k,n} = \{(P,v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n \mid v \text{ es ortogonal a } P\}.$$

Proposición 28. *Si $\Pi : E_{k,n} \to G(k,n)$ es la proyección canónica, entonces Π admite una estructura de fibrado vectorial riemanniano.*

Demostración. Es similar a la de la Proposición 17 de [13]. Para cada $P \in G(k,n)$, sea $E_P = \{(P,x) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ x \perp P\}$. Cada E_P es un espacio vectorial con producto interno mediante la identificación natural con $P^\perp \subset \mathbb{R}^n$, y vale $E_{k,n} = \bigcup_{P\in G(k,n)} E_P$.

Para encontrar trivializaciones locales de $\Pi : E_{k,n} \to G(k,n)$ hacemos lo siguiente. Para $1 \leq \alpha_1 < \cdots < \alpha_k \leq n$ y $\alpha = \{\alpha_1,\ldots,\alpha_k\}$, sean $E_\alpha = e_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e_{\alpha_k}$ subespacios de dimensión k en $\mathbb{R}^n$ con la orientación dada por la base $\{e_{\alpha_1},\ldots,e_{\alpha_k}\}$. Sea π_α la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre E_α. Se define $U^+_\alpha \subset G(k,n)$ como el conjunto de todos los subespacios orientados en $G(k,n)$ tales que sus proyecciones a E_α son suryectivas y preservan la orientación. El conjunto U^-_α se define análogamente, pero con inversión de la orientación. Buscamos biyecciones

$$F^\varepsilon_\alpha : \Pi^{-1}(U^\varepsilon_\alpha) \to U^\varepsilon_\alpha \times \mathbb{R}^{n-k}.$$

Lo haremos sólo para el caso U_α^+ con $\alpha = \{1, \ldots, k\}$, los demás son análogos a éste.

Sea $P \in U_\alpha^+$. Para $i = 1, \ldots, k$, llamamos $u_i = \left(\Pi_\alpha|_P\right)^{-1}(e_i)$. Así, $\{u_1, \ldots, u_k\}$ es una base ordenada positiva de P. Luego $u_1 = (1, 0, \ldots, 0, a_{k+1}, \ldots, a_n)$, $\ldots$, $u_k = (0, \ldots, 0, 1, b_{k+1}, \ldots, b_n)$ para ciertos a_i, b_j, y $\mathcal{A} = \{u_1, \ldots, u_k, e_{k+1}, \ldots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$. Luego de aplicarle el proceso de ortogonalización de Gram Schmidt a $\mathcal{A}$ obtenemos una base $\mathcal{B} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ tal que $\{w_1, \ldots, w_k\}$ genera P y $\mathcal{C} = \{w_{k+1}, \ldots, w_n\}$ es base del complemento ortogonal de P en $\mathbb{R}^n$. Ahora estamos en condiciones de definir

$$F_\alpha^+(P, x) = (P, c_{k+1}, \ldots, c_n) \in U_\alpha^+ \times \mathbb{R}^{n-k}$$

($P \in U_\alpha^+$ y $x \perp P$), donde $c_{k+1}, \ldots, c_n$ son las coordenadas de x según la base $\mathcal{C}$. Esta aplicación F_α^+ resulta biyectiva. No verificamos la compatibilidad de las trivializaciones, que serán sistemas coordenados de una estructura diferenciable en $E_{k,n}$. $\square$

En el fibrado vectorial $\Pi : E_{k,n} \to G(k, n)$ tenemos una *conexión métrica canónica*. Sean Y un campo vectorial en $G(k, n)$ y sea $\sigma \in \Gamma(G(k, n), E_{k,n})$. Se define

$$(\nabla_Y \sigma)_P = \left(P, \pi_P\left((dx_\sigma)_P(Y_P)\right)\right), \tag{3.1.1}$$

donde $\sigma(Q) = (Q, x_\sigma(Q)) \in (E_{k,n})_Q$, con $x_\sigma : G(k, n) \to \mathbb{R}^n$, y π_P es la proyección ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre $P^\perp$.

Proposición 29. *La asignación*

$$\nabla : \mathfrak{X}(G(k, n)) \times \Gamma(G(k, n), E_{k,n}) \to \Gamma(G(k, n), E_{k,n})$$

definida arriba es una conexión métrica en el fibrado $E_{k,n}$.

Demostración. Sean Y, Z campos en $G(k, n)$ y σ, σ_1 y σ_2 en $\Gamma(G(k, n), E_{k,n})$. Es claro que para cada $P \in G(k, n)$, $\pi_P(dx_\sigma)_P(Y_P) \in E_P$. Restaría ver que $\nabla_Y \sigma$

cumple las propiedades de la Definición 7.

$$\begin{aligned}(\nabla_{fY+Z}\sigma)_P &= (P, \pi_P (dx_\sigma)_P (f(P) Y_P + Z_P)) \\ &= (P, f(P)\pi_P (dx_\sigma)_P (Y_P) + \pi_P (dx_\sigma)_P (Z_P)) \\ &= f(P)(\nabla_Y \sigma)_P + (\nabla_Z\sigma)_P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\nabla_Y (\sigma_1+\sigma_2))_P &= (P, \pi_P (d(x_{\sigma_1}+x_{\sigma_2})_P (Y_P))) \\ &= (P, \pi_P (d(x_{\sigma_1})_P (Y_P) + d(x_{\sigma_2})_P (Y_P))) \\ &= (P, \pi_P d(x_{\sigma_1})_P (Y_P) + \pi_P d(x_{\sigma_2})_P (Y_P)) \\ &= (\nabla_Y\sigma_1)_P + (\nabla_Y\sigma_2)_P\end{aligned}$$

La propiedad restante se demuestra análogamente.

Sea $\frac{D}{dt}$ la derivada covariante asociada a ∇. Verificamos ahora que la conexión es métrica, es decir, que para toda curva $\alpha : I \to M$ y toda sección suave σ a lo largo de α se cumple (2.1.5). En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle\sigma(t), \sigma(t)\rangle_{\alpha_t} &= \frac{d}{dt}\langle(\alpha_t, x_\sigma(\alpha_t)), (\alpha_t, x_\sigma(\alpha_t))\rangle_{\alpha_t} \\ &= \frac{d}{dt}\langle x_\sigma(\alpha_t), x_\sigma(\alpha_t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\|x_\sigma(\alpha_t)\|^2,\end{aligned}$$

que es igual a

$$\begin{aligned}2\left\langle\nabla_{\alpha'_t}\sigma, \sigma(t)\right\rangle_{\alpha_t} &= 2\langle(\alpha_t, \pi_{\alpha_t}(dx_\sigma)(\alpha'_t)), (\alpha_t, x_\sigma(\alpha_t))\rangle \\ &= 2\langle\pi_{\alpha_t}(dx_\sigma)(\alpha'_t), x_\sigma(\alpha_t)\rangle \\ &= 2\langle(dx_\sigma)(\alpha'_t), x_\sigma(\alpha_t)\rangle,\end{aligned}$$

como se deseaba. □

Proposición 30. *La* derivada covariante *asociada a la conexión* ∇ *es la siguiente: Si* $Q : I \to G(k,n)$ *es una curva suave de subespacios orientados en* $\mathbb{R}^n$ *y* $x : I \to \mathbb{R}^n$ *es una curva suave tal que* $x_t \perp Q_t$ *para todo* t*, entonces*

$$\frac{D}{dt}(Q_t, x_t) = (Q_t, \pi_t(x'_t)), \tag{3.1.2}$$

donde x' es la derivada usual de x en $\mathbb{R}^n$ y π_t es la proyección ortogonal sobre $(Q_t)^{\perp}$.

Demostración. Las propiedades distributivas se verifican fácilmente. Sólo mostramos que si $(Q_t, x_t) = \sigma(Q_t) = (Q_t, x_\sigma(Q_t))$ entonces

$$\frac{D}{dt}(Q_t, x_t) = \left(\nabla_{Q'_t}\sigma\right)_{Q_t},$$

o equivalentemente, por (3.1.1), que

$$(Q_t, \pi_t(x'_t)) = \left(Q_t, \pi_{Q_t}\left((dx_\sigma)_{Q_t}\left((Q'_t)_{Q_t}\right)\right)\right).$$

De hecho,

$$\begin{aligned}\pi_t(x'_t) &= \pi_t\left(\frac{d}{dt}x_t\right) = \pi_t\left(\frac{d}{dt}(x_\sigma(Q_t))\right)\\ &= \pi_{Q_t}\left((dx_\sigma)_{Q_t}\left((Q'_t)_{Q_t}\right)\right),\end{aligned}$$

como deseábamos. □

A continuación probamos un lema que será de utilidad para los cálculos posteriores.

Lema 31. *Sea $P : \mathbb{R}^2 \to G(k,n)$ una superficie parametrizada y sea $\sigma = (\mathrm{id}, x)$ una sección suave de $\Pi : E^1_{k,n} \to G(k,n)$, con $x : G(k,n) \to \mathbb{R}^n$. Por comodidad escribimos $P(t,s) = P_{t,s}$. Denotamos*

$$S_1 = \tfrac{d}{ds}\big|_0 x_{P_{0,s}} \qquad y \qquad S_2 = \tfrac{\partial^2}{\partial t \partial s}\Big|_{(0,0)} x_{P_{t,s}},$$

y sea π_t la proyección ortogonal en $\mathbb{R}^n$ sobre $(P_{t,0})^{\perp}$. Entonces

$$\tfrac{D}{ds}\big|_0 \sigma(P_{t,s}) = \left(P_{t,0}, \pi_t \circ \tfrac{d}{ds}\big|_0 x_{P_{t,s}}\right) \tag{3.1.3}$$

$$\tfrac{D^2}{dtds}\Big|_{(0,0)} \sigma(P_{t,s}) = \left(P_{0,0}, \pi_0 \circ (\pi'_0 \circ S_1 + S_2)\right), \tag{3.1.4}$$

donde π'_0 denota la derivada en $t=0$ de la función $t \mapsto \pi_t \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Demostración. Derivando covariantemente la sección $\sigma(P_{t,s}) = \left(P_{t,s}, x_{P_{t,s}}\right)$ en $s=0$ tenemos

$$\tfrac{D}{ds}\big|_0 \sigma(P_{t,s}) = \tfrac{D}{ds}\big|_0 \left(P_{t,s}, x_{P_{t,s}}\right) = \left(P_{t,0}, \pi_t \circ \tfrac{d}{ds}\big|_0 x_{P_{t,s}}\right),$$

con lo cual (3.1.3) es válida. Derivando por segunda vez,

$$\left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \sigma\left(P_{t,s}\right) = \left(P_{0,0}, \pi_0\left(\left.\tfrac{d}{dt}\right|_0\left(\pi_t \circ \left.\tfrac{d}{ds}\right|_0 x_{P_{t,s}}\right)\right)\right).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\pi_0\left(\left.\tfrac{d}{dt}\right|_0\left(\pi_t \circ \left.\tfrac{d}{ds}\right|_0 x_{P_{t,s}}\right)\right) &= \pi_0 \circ \left(\pi_0' \circ S_1 + \pi_0 \circ S_2\right) \\
&= \pi_0 \circ \pi_0' \circ S_1 + \pi_0 \circ S_2 \\
&= \pi_0 \circ \left(\pi_0' \circ S_1 + S_2\right).
\end{aligned}$$

Así, hemos verificado (3.1.4). □

3.2. Armonicidad de secciones asociadas a productos cruz

El Teorema 3 afirma que las secciones del fibrado esférico $E^1_{k,n} \to G(k,n)$ asociadas a los productos cruz son aplicaciones armónicas. Por el Teorema 18 sólo debemos estudiar los casos $(1,2m)$, $(m,m+1)$, $(2,7)$ y $(3,8)$. En esta sección comenzamos la prueba del Teorema 3, considerando los dos primeros casos, conocido y trivial, respectivamente. Los restantes casos, a saber $(3,8)$ y $(2,7)$, serán demostrados en las dos secciones a continuación.

Para el caso $(1,2m)$ observemos que la grassmanniana $G(1,2m)$ de rectas orientadas en $\mathbb{R}^{2m}$ se identifica de manera natural con S^{2m-1}, así como también $E_{1,2m}$ con TS^{2m-1}. Por la Proposición 19, un producto cruz de este tipo es una estructura compleja lineal ortogonal J en $\mathbb{R}^{2m}$, que vía las identificaciones mencionadas, es un campo de Hopf, $p \in S^{2m-1} \mapsto J(p) \in p^\perp = T_pS^{2m-1}$. En estos términos, el teorema dice que los campos de Hopf sobre esferas de dimensión impar son aplicaciones armónicas y este es un resultado clásico demostrado en [24] (ver también [29, 1]).

El caso $(m,m+1)$ resulta trivial, pues por la Observación 20 hay sólo dos maneras continuas de asignar a cada subespacio orientado P de dimensión m en $\mathbb{R}^{m+1}$ un vector unitario ortogonal a P (ya que $\dim P^\perp = 1$).

3.3. Armonicidad de σ_3

Recordamos de (2.7.3) las geodésicas γ_j^ℓ de $G(3,8)$ y sus velocidades iniciales e_j^ℓ ($\ell = 0,1,2$ y $j = 3,\dots,7$). Denotamos por E_j^ℓ el campo vectorial en un entorno normal de $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$ en $G(3,8)$, tal que $E_j^\ell (e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) = e_j^\ell$ y es paralelo a lo largo de geodésicas radiales que parten de $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$.

De ahora en adelante, para simplificar la notación, a veces omitimos indicar el punto pie de un elemento de $E_{k,n}^1$. También, en esta sección, en varias ocaciones escribimos X en lugar de $X_{3,8}$.

Lema 32. *Para $k, \ell = 0,1,2$ e $i,j = 3,\ldots,7$, se cumple*

$$\nabla_{e_i^k} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3 = \left.\frac{D^{\gamma_i^k}}{dt}\right|_0 \left(\left.\frac{D}{ds}\right|_0 \sigma_3 (P_{t,s}) \right),$$

donde $P_{t,s} = \exp\left(te_i^k\right) \gamma_j^\ell (s)$.

Demostración. La expresión se sigue del hecho de que γ_j^ℓ es la geodésica en $G(3,8)$ por $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$ con velocidad inicial e_j^ℓ y de que $P_{t,0}$ toma el valor $\gamma_i^k(t)$ con velocidad inicial $E_j^\ell\left(\gamma_i^k(t)\right)$. En efecto, como $G(3,8)$ es un espacio simétrico y $e_j^\ell \in \mathfrak{m}$, por la Observación 26, el transporte paralelo a lo largo de la curva $t \mapsto \gamma_i^k(t) = \exp\left(te_i^k\right)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2)$ entre 0 y t es realizado por $d\exp\left(te_i^k\right)_{e_0\wedge e_1 \wedge e_2}$. Por lo tanto,

$$E_j^\ell \left(\gamma_i^k(t)\right) = d\exp\left(te_i^k\right)_{e_0\wedge e_1\wedge e_2}\left(e_j^\ell\right) = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \exp\left(te_i^k\right)\gamma_j^\ell(s),$$

como deseábamos. □

Lema 33. *Para $\ell = 0,1,2$ y $j = 3,\ldots,7$, se cumple que $\nabla_{e_j^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3 = (\delta_{j3} - 1)\, e_3$.*

Demostración. Por el lema anterior con $i = j$, $k = \ell$, consideramos

$$P_{t,s} = \exp\left(te_j^\ell\right)\gamma_j^\ell(s) = \gamma_j^\ell(t+s). \tag{3.3.1}$$

De ahora en adelante, por conveniencia de notación, indicamos ℓ módulo 3 (así, por ejemplo, $e_{\ell+2} = e_0$ si $\ell = 1$).

Evaluamos σ_3 en $P_{t,s}$ y, como $X(e_\ell, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}) = e_3$, obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_3(P_{t,s}) &= \sigma_3\left(\gamma_j^\ell(t+s)\right) = \sigma_3\left((\cos(t+s)\ e_\ell + \operatorname{sen}(t+s)\ e_j) \wedge e_{\ell+1} \wedge e_{\ell+2}\right) \\ &= X\left(\cos(t+s)\ e_\ell + \operatorname{sen}(t+s)\ e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\ &= \cos(t+s)\ e_3 + \operatorname{sen}(t+s)\ X(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}).\end{aligned}$$

Por el Lema 31,

$$\nabla_{e_j^\ell}\nabla_{E_j^\ell}\sigma_3 = \left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \sigma_3(P_{t,s}) = \left(P_{0,0}, \pi_0 \circ \left(\pi_0' \circ S_1 + S_2\right)\right),$$

donde

$$\begin{aligned} S_1 &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \left(\cos s\, e_3 + \operatorname{sen} s\, X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right)\right) = X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right), \\ S_2 &= \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{(0,0)} \left(\cos\left(t+s\right)\, e_3 + \operatorname{sen}\left(t+s\right)\, X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right)\right) = -e_3 \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

y

$$\pi_t = \mathrm{id} - \left(\cos t\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, e_j\right) \otimes \left(\cos t\, e^\ell + \operatorname{sen} t\, e^j\right) - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2},$$

en particular,

$$\pi_0 = \mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}. \tag{3.3.3}$$

Luego $\pi_0' = -e_j \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^j$. Calculamos

$$\begin{aligned} \pi_0 \circ \pi_0' &= \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}\right)\left(-e_j \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^j\right) \\ &= \left(-e_j \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^j\right) + \left(e_\ell \otimes e^j\right) \\ &= -e_j \otimes e^\ell. \end{aligned}$$

Ahora, por la propiedad (2.6.5),

$$\begin{aligned} \pi_0 \circ \pi_0' \circ S_1 &= -\left(e_j \otimes e^\ell\right) X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\ &= \left(e_j \otimes e^j\right) X\left(e_\ell, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\ &= \left(e_j \otimes e^j\right) e_3 \\ &= \delta_{3j} e_j. \end{aligned}$$

También,

$$\pi_0 \circ S_2 = \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}\right)\left(-e_3\right) = -e_3.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ \pi_0' \circ S_1 + \pi_0 \circ S_2 &= \delta_{3j} e_j - e_3 \\ &= (\delta_{3j} - 1)\, e_3.\end{aligned}$$

La última igualdad se cumple ya que $\delta_{3j} e_j - e_3$ se anula si $j = 3$ y vale $-e_3$ en los otros casos. □

Lema 34. *Para $\ell = 0, 1, 2$ e $i, j = 3, \ldots, 7$ con $i \neq j$, se cumple que*

$$\nabla_{e_i^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3 = \delta_{j3} e_i.$$

Demostración. Sea $P_{t,s}$ como en el Lema 32 con $k = \ell$ e $i \neq j$, esto es,

$$P_{t,s} = \exp\left(t e_i^\ell\right) \gamma_j^\ell (s) = (\cos t\, \cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, \cos s\, e_i + \operatorname{sen} s\, e_j) \wedge e_{\ell+1} \wedge e_{\ell+2},$$

con el índice ℓ módulo 3 como en el lema anterior.

Evaluamos σ_3 en $P_{t,s}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}\sigma_3 (P_{t,s}) &= X (\cos t\, \cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, \cos s\; e_i + \operatorname{sen} s\, e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}) \\ &= \cos t\, \cos s\, X (e_\ell, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}) \\ &\quad + \operatorname{sen} t\, \cos s\, X (e_i, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}) + \operatorname{sen} s\, X (e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}) \\ &= \cos s\, \left(\cos t\, e_3 + \operatorname{sen} t\, X (e_i, e_{\ell+1}, e_{\ell+2})\right) + \operatorname{sen} s\, X (e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}).\end{aligned}$$

Para hallar $\nabla_{e_i^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3$ recurrimos al Lema 31, así que calculamos

$$\begin{aligned}S_1 &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 (\cos s\, e_3 + \operatorname{sen} s\, X (e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2})) = X (e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}), \\ S_2 &= \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{(0,0)} \sigma_3 (P_{t,s}) = 0, \\ \pi_t &= \mathrm{id} - (\cos t\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, e_i) \otimes \left(\cos t\, e^\ell + \operatorname{sen} t\, e^i\right) - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}.\end{aligned}$$

Luego $\pi_0' = -e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i$ y tenemos

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ \pi_0' &= \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}\right) \left(-e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i\right) \\ &= \left(-e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i\right) + \left(e_\ell \otimes e^i\right) \\ &= -e_i \otimes e^\ell.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ \pi_0' \circ S_1 &= -\left(e_i \otimes e^\ell\right) X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right)\\ &= \left(e_i \otimes e^j\right) X\left(e_\ell, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right)\\ &= \left(e_i \otimes e^j\right) e_3\\ &= \delta_{j3} e_i.\end{aligned}$$

En consecuencia, la identidad del enunciado es válida. □

LEMA 35. *Para $k, \ell = 0, 1, 2$ e $i, j = 3, \ldots, 7$ con $k \neq \ell$ se cumple que*

$$\nabla_{e_i^k} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3 = r_{k,\ell}\left(\mathrm{id} - e_k \otimes e^k - e_\ell \otimes e^\ell\right) X\left(e_i, e_j, e_m\right),$$

donde $m \in \{0, 1, 2\}$ y $r_{k,\ell} = \pm 1$ tal que $e_k \wedge e_\ell \wedge e_m = r_{k,\ell} e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$.

DEMOSTRACIÓN. Para $k \neq \ell$, por el Lema 32, consideramos la superficie parametrizada dada por

$$P_{t,s} = \exp\left(t e_i^k\right) \gamma_j^\ell(s) = r_{k,\ell}\left(\cos t\, e_k + \operatorname{sen} t\, e_i\right) \wedge \left(\cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} s\, e_j\right) \wedge e_m,$$

con índices k, ℓ módulo 3 como en los lemas anteriores.

Evaluamos σ_3 en $P_{t,s}$:

$$\begin{aligned}\sigma_3\left(P_{t,s}\right) &= r_{k,\ell} X\left(\cos t\, e_k + \operatorname{sen} t\, e_i, \cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} s\, e_j, e_m\right)\\ &= r_{k,\ell} \cos s\, \left(\cos t\, X\left(e_k, e_\ell, e_m\right) + \operatorname{sen} t\, X\left(e_i, e_\ell, e_m\right)\right)\\ &\quad + r_{k,\ell} \operatorname{sen} s\, \left(\cos t\, X\left(e_k, e_j, e_m\right) + \operatorname{sen} t\, X\left(e_i, e_j, e_m\right)\right).\end{aligned}$$

Para aplicar el Lema 31, calculamos

$$\begin{aligned}S_1 &= \left.\frac{d}{ds}\right|_0 \left(r_{k,\ell}\left(\cos s\, X\left(e_k, e_\ell, e_m\right) + \operatorname{sen} s\, X\left(e_k, e_j, e_m\right)\right)\right) = r_{k,\ell} X\left(e_k, e_j, e_m\right),\\ S_2 &= \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{(0,0)} \sigma_3\left(P_{t,s}\right) = r_{k,\ell} X\left(e_i, e_j, e_m\right),\\ \pi_t &= \mathrm{id} - \left(\cos t\, e_k + \operatorname{sen} t\, e_i\right) \otimes \left(\cos t\, e^k + \operatorname{sen} t\, e^i\right) - e_\ell \otimes e^\ell - e_m \otimes e^m.\end{aligned}$$

Luego $\pi_0' = -e_i \otimes e^k - e_k \otimes e^i$ y

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ \pi_0' \circ S_1 &= r_{k,\ell} \left(\mathrm{id} - e_k \otimes e^k - e_\ell \otimes e^\ell - e_m \otimes e^m\right) \left(-e_i \otimes e^k - e_k \otimes e^i\right) X\left(e_k, e_j, e_m\right) \\ &= r_{k,\ell} \left(\left(-e_i \otimes e^k - e_k \otimes e^i\right) + \left(e_k \otimes e^i\right)\right) X\left(e_k, e_j, e_m\right) \\ &= -r_{k,\ell} \left(e_i \otimes e^k\right) X\left(e_k, e_j, e_m\right) = 0.\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\pi_0 \circ S_2 &= r_{k,\ell} \left(\mathrm{id} - e_k \otimes e^k - e_\ell \otimes e^\ell - e_m \otimes e^m\right) X\left(e_i, e_j, e_m\right) \\ &= r_{k,\ell} \left(\mathrm{id} - e_k \otimes e^k - e_\ell \otimes e^\ell\right) X\left(e_i, e_j, e_m\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto se cumple la identidad del enunciado. $\square$

3.3.1. Invariancia por la acción de $\mathrm{Spin}\,(7)$

Sea $\mathrm{Spin}\,(7)$ el grupo de automorfismos del producto cruz triple $X_{3,8}$, esto es,

$$\mathrm{Spin}\,(7) = \left\{g \in SO\,(8) \mid X_{3,8}(gu, gv, gw) = gX_{3,8}(u, v, w) \text{ para todo } u, v, w \in \mathbb{R}^8\right\}.$$

El siguiente resultado es el Teorema 8.2 en [31], y será utilizado en la prueba de la proposición siguiente.

TEOREMA 36. [31] *El grupo* $\mathrm{Spin}\,(7)$ *actúa transitivamente sobre el conjunto*

$$\mathscr{S} = \left\{(u, v, w, x) \in \mathbb{R}^8 \mid u, v, w, X_{3,8}\,(u, v, w)\,, x \text{ son ortonormales}\right\}.$$

La acción canónica de $SO\,(8)$ sobre $G\,(3, 8)$ induce una acción sobre el espacio total del fibrado esférico $E^1_{3,8} \to G\,(3, 8)$ como en (1.3.3) dada por

$$g \cdot (u \wedge v \wedge w, x) = (gu \wedge gv \wedge gw, gx)$$

para todo $u \wedge v \wedge w \in G\,(3, 8)$ y $x \perp u \wedge v \wedge w$.

Recordamos de (1.3.7) la sección $\sigma_3 : G\,(3, 8) \to E^1_{3,8}$ asociada al producto cruz triple:

$$\sigma_3\,(u \wedge v \wedge w) = (u \wedge v \wedge w, X_{3,8}\,(u, v, w))$$

para subconjuntos ortonormales $\{u, v, w\}$ de $\mathbb{R}^8$.

PROPOSICIÓN 37. *El grupo* $\mathrm{Spin}\,(7)$ *actúa transitivamente en* $G\,(3, 8)$ *y deja invariante a la sección unitaria* $\sigma_3 : G\,(3, 8) \to E^1_{3,8}$.

Demostración. Primero verificamos la transitividad de la acción. Observemos que $(e_0, e_1, e_2, e_4) \in \mathscr{S}$ pues $X_{3,8}(e_0, e_1, e_2) = e_3$. Ahora, sea $v_1 \wedge v_2 \wedge v_3 \in G(3,8)$ y tomamos $v_4 \in \mathbb{R}^8$ de modo que $\{v_1, v_2, v_3, X_{3,8}(v_1, v_2, v_3), v_4\}$ es un conjunto ortonormal. Entonces $(v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathscr{S}$. Por el teorema anterior, existe $g \in \mathrm{Spin}(7)$ tal que $g(e_0) = v_1$, $g(e_1) = v_2$, $g(e_2) = v_3$ y $g(e_4) = v_4$. Esto implica que $g(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$. En consecuencia, $\mathrm{Spin}(7)$ actúa transitivamente sobre $G(3,8)$. La invarianza de σ_3 por $\mathrm{Spin}(7)$ se sigue inmediatamente de la definición de este grupo. □

3.3.2. Armonicidad vertical de σ_3

Proposición 38. *La sección unitaria σ_3 de $E^1_{3,8} \to G(3,8)$ es verticalmente armónica.*

Demostración. Usaremos el Teorema 15. Primero verificamos el criterio en el punto $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \in G(3,8)$. Tomamos como γ_i las curvas γ_j^ℓ definidas en (2.7.3), con $\ell = 0, 1, 2$ y $j = 3, \ldots, 7$, cuyas velocidades iniciales forman una base ortonormal de $T_{e_0 \wedge e_1 \wedge e_2} G(3,8)$. Calculamos

$$
\begin{aligned}
(3.3.4) \qquad (\Delta\sigma_3)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) &= \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{j=3}^{7} \left.\frac{D^{\ell,j}}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^{\ell,j}}{ds}\right|_t \left(\sigma_3 \circ \gamma_j^\ell\right)(s) \\
&= \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{j=3}^{7} \nabla_{e_j^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3,
\end{aligned}
$$

donde $\dfrac{D^{\ell,j}}{ds}$ es la derivada covariante a lo largo de la curva γ_j^ℓ. Por el Lema 33, el término $\nabla_{e_j^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \sigma_3$ es distinto de cero sólo cuando $j \neq 3$, y en este caso es igual a $-e_3$. Entonces,

$$
(\Delta\sigma_3)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) = \sum_{\ell=0}^{2} \sum_{j=4}^{7} (-e_3) = -12 e_3 = -12 \sigma_3 (e_0 \wedge e_1 \wedge e_2).
$$

Ahora, sea $\{u, v, w\}$ un subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^8$. Queda por ver que (2.4.2) es válido en nuestro caso en $u \wedge v \wedge w \in G(3,8)$. Por la Proposición 37, existe $g \in \mathrm{Spin}(7)$ tal que $g(e_0) = u$, $g(e_1) = v$ y $g(e_2) = w$. Calculamos $(\Delta\sigma_3)(u \wedge v \wedge w)$ usando las curvas $g \circ \gamma_j^\ell$, para $\ell = 0, 1, 2$ y $j = 3, \ldots, 7$, cuyas velocidades iniciales forman una base ortonormal de $T_{u\wedge v\wedge w}G(3,8)$, pues $\mathrm{Spin}(7)$ actúa sobre $G(3,8)$ por isometrías. También por la Proposición 37, $\sigma_3 = g\sigma_3 g^{-1}$ y por la invariancia de la conexión por la acción de $\mathrm{Spin}(7)$ tenemos

$$(\Delta\sigma_3)(u\wedge v\wedge w) = \sum_{\ell=0}^{2}\sum_{j=3}^{7} \left.\frac{D^j}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^j}{ds}\right|_t g\sigma_3 g^{-1}\left(g\left(\gamma_j^\ell(s)\right)\right) \tag{3.3.5}$$

$$= g\left((\Delta\sigma_3)(e_0\wedge e_1\wedge e_2)\right) = g\left(-12\sigma_3(e_0\wedge e_1\wedge e_2)\right)$$

$$= -12\sigma_3(ge_0\wedge ge_1\wedge ge_2) = -12\sigma_3(u\wedge v\wedge w),$$

como deseábamos, con $f=-12$. □

3.3.3. Prueba de la armonicidad de σ_3

En la prueba del teorema principal necesitaremos la curvatura que calculamos en el siguiente lema.

Lema 39. *Para $k,\ell = 0,1,2$ (módulo 3) e $i,j=3,\dots,7$, la curvatura $R_{e_i^k e_j^\ell}\sigma_3$ es igual a $\delta_{i3}e_j - \delta_{j3}e_i$ si $k=\ell$ y 0 si $k\neq\ell$.*

Demostración. Recordemos que la curvatura viene dada por

$$R_{e_i^k e_j^\ell}\sigma_3 = \nabla_{\left[E_i^k, E_j^\ell\right](e_0\wedge e_1\wedge e_2)}\sigma_3 - \nabla_{e_i^k}\nabla_{E_j^\ell}\sigma_3 + \nabla_{e_j^\ell}\nabla_{E_i^k}\sigma_3. \tag{3.3.6}$$

De la definición de los campos E_i^k y de que la conexión es libre de torsión, se sigue que $\left[E_i^k, E_j^\ell\right](e_0\wedge e_1\wedge e_2) = 0$. Entonces, el primer término de (3.3.6) se anula. Por el Lema 34 sabemos que $\nabla_{e_i^\ell}\nabla_{E_j^\ell}\sigma_3 = \delta_{j3}e_i$ si $i\neq j$. Luego

$$R_{e_i^\ell e_j^\ell}\sigma_3 = -\nabla_{e_i^\ell}\nabla_{E_j^\ell}\sigma_3 + \nabla_{e_j^\ell}\nabla_{E_i^\ell}\sigma_3 = -\delta_{j3}e_i + \delta_{i3}e_j,$$

como queríamos ver (incluso si $i=j$). Cuando $k\neq\ell$, obtenemos

$$\begin{aligned}
R_{e_i^k e_j^\ell}\sigma_3 &= -\nabla_{e_i^k}\nabla_{E_j^\ell}\sigma_3 + \nabla_{e_j^\ell}\nabla_{E_i^k}\sigma_3\\
&= -r_{k,\ell}\left(\mathrm{id} - e_k\otimes e^k - e_\ell\otimes e^\ell\right)X(e_i,e_j,e_m)\\
&\quad + r_{\ell,k}\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_k\otimes e^k\right)X(e_j,e_i,e_m)\\
&= (r_{k,\ell}+r_{\ell,k})\left(\mathrm{id} - e_k\otimes e^k - e_\ell\otimes e^\ell\right)X(e_j,e_i,e_m) = 0
\end{aligned}$$

(la segunda igualdad se cumple por el Lema 35). □

Teorema 40. *La sección unitaria $\sigma_3 : G(3,8) \to E^1_{3,8}$ es una aplicación armónica.*

Demostración. Por la Proposición 38 sabemos que σ_3 es verticalmente armónica, con lo cual, por la Proposición 16, resta probar que la 1-forma $\mathcal{R}_{\sigma_3}$ definida en (2.4.3) es idénticamente cero. Por la invariancia de la acción de Spin (7), es suficiente verificarlo en $e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$. Por el lema anterior tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\sigma_3}\left(e_i^\ell\right) &= \sum_{k=0}^{2}\sum_{j=3}^{7}\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^k}\sigma_3, \nabla_{e_j^k}\sigma_3\right\rangle = \sum_{j=3}^{7}\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^\ell}\sigma_3, \nabla_{e_j^\ell}\sigma_3\right\rangle \\
&= \sum_{j=3}^{7}\left\langle \delta_{i3}e_j - \delta_{j3}e_i, \nabla_{e_j^\ell}\sigma_3\right\rangle.
\end{aligned}$$

Ahora calculamos $\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3$ para $\ell = 0,1,2$ (módulo 3) y $j = 3,\dots,7$. Por (3.1.3) sabemos que

$$\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3 = \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \sigma_3\left(P_{0,s}\right) = \left(P_{0,0}, \pi_0 \circ S_1\right),$$

donde $P_{0,s} = (\cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} s\, e_j) \wedge e_{\ell+1} \wedge e_{\ell+2}$ por (3.3.1).

De (3.3.3) y (3.3.2) tenemos

$$\begin{aligned}
\pi_0 \circ S_1 &= \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+2} \otimes e^{\ell+2}\right) X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\
&= X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) - \left(e_\ell \otimes e^\ell\right) X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\
&= X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) + \left(e_\ell \otimes e^j\right) X\left(e_\ell, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) \\
&= X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) + \left(e_\ell \otimes e^j\right) e_3 \\
&= X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) + \delta_{j3}e_\ell.
\end{aligned}$$

Observemos que $\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3$ se anula si $j = 3$, pues en este caso $X\left(e_3, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) = -e_\ell$ para $\ell = 0,1,2$. Por lo tanto

$$\mathcal{R}_{\sigma_3}\left(e_i^\ell\right) = \sum_{j=4}^{7}\left\langle \delta_{i3}e_j, X\left(e_j, e_{\ell+1}, e_{\ell+2}\right) + \delta_{j3}e_\ell\right\rangle = 0 \tag{3.3.7}$$

para todo ℓ, i. $\square$

3.4. Armonicidad de σ_2

Recordamos de (1.3.6) la sección $\sigma_2 : G(2,7) \to E^1_{2,7}$ definida por

$$\sigma_2 (u \wedge v) = (u \wedge v, u \times v)$$

para subconjuntos ortonormales $\{u, v\}$ de $\mathbb{R}^7$.

Comentamos que en el Trabajo Especial [13] se demostró para σ_2 la condición más débil de armonicidad vertical, de manera directa.

Presentamos una de las tantas definiciones equivalentes del grupo excepcional G_2 (ver por ejemplo el Problema 11 en la página 121 de [25]),

$$G_2 = \{g \in GL(7, \mathbb{R}) \mid g(x \times y) = g(x) \times g(y)\},$$

donde $\times$ es el producto cruz doble y $\mathbb{R}^7 \equiv \operatorname{Im}\mathbb{O}$. Por el Problema 9 (b) de la página 121 de [25] (ver también la Proposición 16 de [13]), G_2 actúa transitivamente en la grassmanniana $G(2,7)$, y por isometrías, ya que el Corolario 6.77 en [25] afirma que $G_2 \subset SO(7)$. De allí resulta también que los elementos de G_2 determinan morfismos del fibrado vectorial riemanniano $E_{2,7} \to G(2,7)$. Claramente, la sección σ_2 es preservada por esta acción. La identidad (2.6.6) provee una inclusión natural de G_2 en $\operatorname{Spin}(7)$ como subgrupo.

3.4.1. Prueba de la armonicidad de σ_2

La prueba de que la sección σ_2 es una aplicación armónica se sigue de la armonicidad de la sección σ_3. Consideremos la inmersión

$$\phi : G(2,7) \to G(3,8), \quad \phi(u \wedge v) = e_0 \wedge u \wedge v \tag{3.4.1}$$

para todo u, v ortonormales en $\operatorname{Im}\ \mathbb{O}$ (que es una incrustación totalmente geodésica) y el morfismo de fibrados vectoriales riemannianos

$$\Phi : E_{2,7} \to E_{3,8}, \quad \Phi(u \wedge v, x) = (e_0 \wedge u \wedge v, x), \tag{3.4.2}$$

donde identificamos $\mathbb{R}^7 = e_0^{\perp} \subset \mathbb{R}^8$.

Ahora, como $X(e_0,u,v)=u\times v$ para cualquier u,v, el siguiente diagrama es conmutativo.

(3.4.3)
$$\begin{array}{ccc} E^1_{2,7} & \xrightarrow{\Phi} & E^1_{3,8} \\ \uparrow \sigma_2 & & \uparrow \sigma_3 \\ G(2,7) & \xrightarrow{\phi} & G(3,8)\,. \end{array}$$

Para $\ell=1,2$, $j=3,\ldots,7$ llamamos $\beta^\ell_j:\mathbb{R}\to G(2,7)$ a las curvas

$$\beta^1_j(t)=(\cos t\, e_1+\operatorname{sen} t\, e_j)\wedge e_2 \qquad \text{y} \qquad \beta^2_j(t)=e_1\wedge(\cos t\, e_2+\operatorname{sen} t\, e_j)\,,$$

las cuales son geodésicas de $G(2,7)$ por la Proposición 27. Es claro que para estos valores de j y ℓ se cumple

$$\phi\circ\beta^\ell_j(s)=\gamma^\ell_j(s)\,,$$

donde γ^ℓ_j son las geodésicas de $G(3,8)$ como en (2.7.3).

Lema 41. *Sean X e Y campos vectoriales en $G(2,7)$ y $G(3,8)$, respectivamente, que están ϕ-relacionados. Dada una sección $\sigma: G(2,7)\to E^1_{2,7}$, para todo $P\in G(2,7)$ se cumple*

$$\Phi(\nabla_X\sigma)_P=(\nabla_Y\Phi(\sigma))_{\phi(P)}\,.$$

Demostración. Sea $P=u\wedge v\in G(2,7)$. Sea α una curva en $G(2,7)$ con $\alpha(0)=P$ y $\alpha'(0)=X$.

Calculamos el miembro izquierdo de la igualdad

$$\begin{aligned}\Phi(\nabla_X\sigma)_P &= \Phi\left(\left.\frac{D^\alpha}{dt}\right|_0 \sigma\circ\alpha\right)\\ &= \Phi\left(P,\pi_P\left((x_\sigma\circ\alpha)'\right)\right)\\ &= \left(\phi(P),\pi_P\left((x_\sigma\circ\alpha)'\right)\right).\end{aligned}$$

Como $\Phi(\sigma\circ\alpha)(q)=\Phi(q,(x_\sigma\circ\alpha)(q))=(\phi(q),(x_\sigma\circ\alpha)(q))$, tenemos que el miembro derecho es

$$\begin{aligned}(\nabla_Y\Phi(\sigma))_{\phi(P)} &= \left.\frac{D^{\phi\circ\alpha}}{dt}\right|_0 \Phi(\sigma\circ\alpha)\\ &= \left(\phi(P),\pi_{\phi(P)}\left((x_\sigma\circ\alpha)'\right)\right),\end{aligned}$$

que coincide con el miembro izquierdo, pues $(x_\sigma\circ\alpha)'$ toma valores en $e_0^\perp$. $\square$

Aplicando reiteradamente el lema anterior y usando que los corchetes de Lie de campos ϕ-relacionados están ϕ-relacionados, se tiene que

$$\Phi\left(R_{X_1,X_2}\sigma\right) = R_{Y_1,Y_2}\Phi\left(\sigma\right) \tag{3.4.4}$$

si el campo X_i está ϕ-relacionado con Y_i (con $i = 1, 2$).

Teorema 42. *La sección unitaria σ_2 es una aplicación armónica.*

Demostración. Probaremos que

$$\Phi \circ \Delta_{E_{2,7}}\sigma_2 = -8\Phi \circ \sigma_2 \qquad \text{y} \qquad \mathcal{R}_{\sigma_2} = \phi^*\mathcal{R}_{\sigma_3}. \tag{3.4.5}$$

De la primera identidad, por la inyectividad de Φ, σ_2 resultará verticalmente armónica por el Teorema 15. La verificamos primero en $e_1 \wedge e_2$. Escribiendo por separado los términos con $\ell = 0$ en (3.3.4), obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\Delta_{E_{3,8}}\sigma_3\right)\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) &= \sum_{j=3}^{7} \left.\frac{D^{0,j}}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^{0,j}}{ds}\right|_t \left(\sigma_3 \circ \gamma_j^0\right)(s) \\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j=3}^{7} \left.\frac{D^{\ell,j}}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^{\ell,j}}{ds}\right|_t \left(\sigma_3 \circ \left(\phi \circ \beta_j^\ell\right)\right)(s) \\
&= -4e_3 + \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j=3}^{7} \left.\frac{D^{j}}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^{j}}{ds}\right|_t \left(\Phi \circ \sigma_2 \circ \beta_j^\ell\right)(s) \\
&= -4\sigma_3\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) + \Phi\left(\left(\Delta_{E_{2,7}}\sigma_2\right)\left(e_1 \wedge e_2\right)\right)
\end{aligned}$$

(la segunda igualdad se sigue del Lema 33 con $\ell = 0$). Luego, por (3.3.5),

$$\begin{aligned}
\Phi\left(\left(\Delta_{E_{2,7}}\sigma_2\right)\left(e_1 \wedge e_2\right)\right) &= \left(\Delta_{E_{3,8}}\sigma_3\right)\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) + 4\sigma_3\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) \\
&= -12\sigma_3\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) + 4\sigma_3\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) \\
&= -8\sigma_3\left(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2\right) \\
&= -8\sigma_3 \circ \phi\left(e_1 \wedge e_2\right) \\
&= -8\Phi \circ \sigma_2\left(e_1 \wedge e_2\right).
\end{aligned}$$

Sea ahora $\{u, v\}$ un subconjunto ortonormal de $\mathbb{R}^7$. Resta ver la validez de la primera igualdad en (3.4.5) evaluada en $u \wedge v \in G(2,7)$. Por las propiedades de la acción de G_2 detalladas al comienzo de la sección, existe $g \in G_2$ tal que $g(e_1) = u$ y $g(e_2) = v$.

Calculamos $\left(\Delta_{E_{2,7}}\sigma_2\right)(u\wedge v)$ recurriendo a las curvas $g\circ\beta_j^\ell$, $\ell=1,2$, $j=3,\dots,7$, cuyas velocidades forman una base ortonormal de $T_{u\wedge v}G(2,7)$, ya que G_2 actúa en $G(2,7)$ por isometrías. Además, $\sigma_2=g\sigma_2 g^{-1}$ y por la G_2-invariancia de la conexión, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\Delta_{E_{2,7}}\sigma_2\right)(u\wedge v) &= \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j=3}^{7}\left.\frac{D^{\ell,j}}{dt}\right|_0\left.\frac{D^{\ell,j}}{ds}\right|_t g\sigma_2 g^{-1}\left(g\left(\beta_j^\ell(s)\right)\right)\\ &= g\left(\left(\Delta_{E_{2,7}}\sigma_2\right)(e_1\wedge e_2)\right)\\ &= g\left(-8\sigma_2(e_1\wedge e_2)\right)\\ &= -8\sigma_2(ge_1\wedge ge_2)\\ &= -8\sigma_2(u\wedge v),\end{aligned}$$

como se deseaba. Así, la sección σ_2 resulta verticalmente armónica. Por el Teorema 16 sólo falta ver que $\mathcal{R}_{\sigma_2}$ es idénticamente nula, para esto veremos que $\mathcal{R}_{\sigma_2}=\phi^*\mathcal{R}_{\sigma_3}$, y así resultará nula por (3.3.7).

Por conveniencia, llamaremos $Q_0=e_1\wedge e_2$, pensado como elemento de la grassmanniana $G(2,7)$, y para $k=1,2$, $i=3,\dots,7$, sea $f_i^k=e_i\otimes e^k-e_k\otimes e^i$, análoga a la expresión en (2.7.4), pero pensada como transformación antisimétrica en $\mathbb{R}^7$. Tenemos

$$(d\phi)_{Q_0}f_i^k=\left.\frac{d}{dt}\right|_0\phi\left(\beta_i^k(t)\right)=\left.\frac{d}{dt}\right|_0\gamma_i^k(t)=e_i^k.$$

Denotamos por F_i^k al único campo vectorial en un entorno normal de Q_0 en $G(2,7)$, paralelo a lo largo de geodésicas radiales que parten de Q_0, tal que $F_i^k(Q_0)=f_i^k$. Como $\phi:G(2,7)\to G(3,8)$ es totalmente geodésica, resulta que F_i^k está ϕ-relacionado con E_i^k.

Por un lado

$$\mathcal{R}_{\sigma_2}\left(f_i^k\right)=\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j=3}^{7}\left\langle R_{f_i^k,f_j^\ell}\sigma_2,\nabla_{f_j^\ell}\sigma_2\right\rangle$$

y por el otro,

$$\begin{aligned}\left(\phi^*\mathcal{R}_{\sigma_3}\right)\left(f_i^k\right)=\mathcal{R}_{\sigma_3}\left((d\phi)f_i^k\right) &= \sum_{\ell=0}^{2}\sum_{j=3}^{7}\left\langle R_{(d\phi)f_i^k,e_j^\ell}\sigma_3,\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3\right\rangle\\ &= \sum_{\ell=1}^{2}\sum_{j=3}^{7}\left\langle R_{e_i^k,e_j^\ell}\sigma_3,\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3\right\rangle.\end{aligned}$$

La tercera igualdad vale por el Lema 39, ya que $R_{e_i^k, e_j^0}\sigma_3 = 0$, pues como $k \neq 0$, el término correspondiente a $\ell = 0$ se anula. Luego, si hacemos abuso de notación empleando las mismos símbolos R y ∇ para la curvatura y la conexión en $G(3,8)$ y $G(2,7)$, basta probar que

$$\left\langle R_{e_i^k, e_j^\ell}\sigma_3, \nabla_{e_j^\ell}\sigma_3 \right\rangle = \left\langle R_{f_i^k, f_j^\ell}\sigma_2, \nabla_{f_j^\ell}\sigma_2 \right\rangle$$

para todo $k, \ell = 1, 2$, $i, j = 3, \ldots, 7$, o equivalentemente que

$$\nabla_{e_j^\ell}\sigma_3 = \Phi\left(\nabla_{f_j^\ell}\sigma_2\right) \qquad \text{y} \qquad R_{e_i^k, e_j^\ell}\sigma_3 = \Phi\left(R_{f_i^k f_j^\ell}\sigma_2\right). \tag{3.4.6}$$

Así tendremos que

$$\left\langle R_{e_i^k, e_j^\ell}\sigma_3, \nabla_{e_j^\ell}\sigma_3 \right\rangle = \left\langle \Phi\left(R_{f_i^k f_j^\ell}\sigma_2\right), \Phi\left(\nabla_{f_j^\ell}\sigma_2\right) \right\rangle = \left\langle R_{f_i^k, f_j^\ell}\sigma_2, \nabla_{f_j^\ell}\sigma_2 \right\rangle,$$

como queremos. Dado que el diagrama (3.4.3) es conmutativo (es decir $\Phi \circ \sigma_2 = \sigma_3 \circ \phi$) y que los campos F_i^k y E_i^k están ϕ-relacionados, por el Lema 41 se satisface la primera igualdad de (3.4.6). La segunda igualdad se sigue de (3.4.4), pues como los campos F_i^k y E_i^k están ϕ-relacionados, sus corchetes también lo están. □

3.5. Inexistencia de secciones paralelas

En [13] se probó que el fibrado $E_{2,7} \to G(2,7)$ no admite secciones paralelas. A continuación hacemos la prueba para el fibrado $E_{3,8} \to G(3,8)$ con ideas muy similares.

Demostración de la proposición 5. Suponemos que existe una sección paralela unitaria V. Llamando $P_0 = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2$, sea $V(P_0) = (P_0, v)$. En particular, para $\ell = 0, 1, 2$, $v \perp e_\ell$ y v es unitario. Sea $w \in \mathbb{R}^8$ un vector unitario y ortogonal a v y a e_ℓ con $\ell = 0, 1, 2$.

Para cada $a \in \mathbb{R}$ consideramos la base ortonormal $\{e_0, u_a, v_a\}$ de P_0, donde

$$u_a = \cos a \; e_1 + \operatorname{sen} a \; e_2 \qquad \text{y} \qquad v_a = -\operatorname{sen} a \; e_1 + \cos a \; e_2,$$

y la curva γ_a en $G(3,8)$ definida por

$$\gamma_a(t) = e_0 \wedge (\cos t \; u_a + \operatorname{sen} t \; v) \wedge (\cos t \; v_a + \operatorname{sen} t \; w).$$

Como V es una sección paralela, $V(\gamma_a(t))$ es paralela a lo largo de $\gamma_a(t)$. Veamos que $V(\gamma_a(t)) = -\operatorname{sen} t\ u_a + \cos t\ v$. Claramente esta expresión vale v en $t = 0$. Luego, por la unicidad del transporte paralelo, basta mostrar que $-\operatorname{sen} t\ u_a + \cos t$ v es paralela a lo largo de γ_a. Calculamos

$$\left.\frac{D}{ds}\right|_t (-\operatorname{sen} s\ u_a + \cos s\ v) = \pi_t(-\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v),$$

donde π_t es la proyección ortogonal sobre el complemento ortogonal de $\gamma_a(t)$. O sea, si llamamos

$$z = -\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v, \quad z_1 = \cos t\ u_a + \operatorname{sen} t\ v, \quad z_2 = \cos t\ v_a + \operatorname{sen} t\ w,$$

tenemos que

$$\left.\frac{D}{ds}\right|_t (-\operatorname{sen} s\ u_a + \cos s\ v) = z - \langle z, e_0\rangle e_0 - \langle z, z_1\rangle z_1 - \langle z, z_2\rangle z_2.$$

Como

$$\langle z, e_0\rangle = \langle -\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v, e_0\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}\langle z, z_1\rangle &= \langle -\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v, \cos t\ u_a + \operatorname{sen} t\ v\rangle \\ &= \langle -\cos t\ u_a, \cos t\ u_a\rangle - \langle \operatorname{sen} t\ v, \operatorname{sen} t\ v\rangle \\ &= -\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t = -1\end{aligned}$$

$$\langle z, z_2\rangle = \langle -\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v, \cos t\ v_a + \operatorname{sen} t\ w\rangle = 0,$$

resulta que

$$\left.\frac{D}{ds}\right|_t (-\operatorname{sen} s\ u_a + \cos s\ v) = -\cos t\ u_a - \operatorname{sen} t\ v + \cos t\ u_a + \operatorname{sen} t\ v = 0,$$

como se deseaba.

Ahora, como estamos suponiendo que V es una sección paralela, fijado $0 < t < \pi$, tenemos que $V \circ c$ es paralelo a lo largo de la curva $c : \mathbb{R} \to G(3,8)$, $c(a) = \gamma_a(t)$. Pero sin embargo,

$$\frac{D}{da}(V(c(a))) = \pi_a\left(\frac{d}{da}V(c(a))\right) = \pi_a(-\operatorname{sen} t\ v_a) \neq 0.$$

pues $\frac{d}{da}u_a = v_a$ y v_a no está en el núcleo de π_a. Llegamos así a un absurdo. Tomando t tan pequeño como se quiera, se comprueba que no hay secciones paralelas en ningún entorno de P_0. $\square$

Capítulo 4

La energía de la sección compleja normal de la 2-grassmanniana asociada al producto cruz triple

Sea V un espacio vectorial de dimensión par. Una estructura compleja j en V es una transformación lineal $j : V \to V$ tal que $j^2 = -\operatorname{id}$. Además si V tiene un producto interno y j es ortogonal, j resulta antisimétrica.

Sea $G(2,8)$ la grassmanniana de subespacios orientados de dimensión 2 en $\mathbb{R}^8$. En este capítulo consideramos aplicaciones que asignan a cada $P \in G(2,8)$ una estructura compleja ortogonal $J(P)$ en $P^\perp$. Probamos que la aplicación distinguida de este tipo, inducida por el producto cruz triple octoniónico, es armónica en cierto fibrado esférico sobre $G(2,8)$.

4.1. Secciones antisimétricas ortogonales normales

Llamamos $\operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$ al conjunto de los operadores antisimétricos de $\mathbb{R}^8$ con el producto interno cuya norma está definida por $\|T\|^2 = \frac{1}{6}\operatorname{tr}(T^tT)$. Dado $P \in G(2,8)$, sea

$$\operatorname{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right) = \left\{T \in \operatorname{Skew}\left(\mathbb{R}^8\right) \mid T|_P = 0\right\}. \tag{4.1.1}$$

Observemos que si $T \in \operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$, entonces $T\left(P^\perp\right) \subset P^\perp$, pues dado $w \in P^\perp$, se tiene que $\langle T(w), z\rangle = -\langle w, T(z)\rangle = -\langle w, 0\rangle = 0$ $\forall z \in P$. Luego $\operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$ se identifica de manera canónica con el conjunto de los operadores antisimétricos definidos sólo en $P^\perp$.

La proyección canónica

$$E =_{\text{def}} \left\{(P,T) \mid P \in G(2,8) \ \text{ y } \ T \in \operatorname{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right)\right\} \to G(2,8)$$

admite una estructura de fibrado vectorial riemanniano (la fibras heredan el producto interno de $\mathrm{Skew}\left(\mathbb{R}^8\right)$). Denotamos por

$$E^1 = \{(P,T) \in E \mid \|T\| = 1\} \to G\left(2,8\right) \tag{4.1.2}$$

al subfibrado esférico de $E \to G\left(2,8\right)$.

En este fibrado tenemos una conexión métrica canónica: Llamamos Π_P a la proyección ortogonal de $\mathrm{Skew}\left(\mathbb{R}^8\right)$ sobre el subespacio $\mathrm{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right)$. Para un campo Y en $G\left(2,8\right)$ y $\mathfrak{T} \in \Gamma\left(G\left(2,8\right), E\right)$ se define:

$$\left(\nabla_Y \mathfrak{T}\right)_P = \left(P, \Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(Y_P\right)\right)\right),$$

donde $\mathfrak{T}\left(P\right) = \left(P, T\left(P\right)\right) \in E_P$ con $T : G\left(2,8\right) \to \mathrm{Skew}\left(\mathbb{R}^8\right) \subset \mathbb{R}^{8\times 8}$.

Proposición 43. *La asignación*

$$\nabla : \mathfrak{X}\left(G\left(2,8\right)\right) \times \Gamma\left(G\left(2,8\right), E\right) \to \Gamma\left(G\left(2,8\right), E\right)$$

definida arriba es una conexión métrica en el fibrado E.

Demostración. Sea Y un campo en $G(2,8)$ y sea $\mathfrak{T} \in \Gamma(G(2,8),E)$. Para cada $P \in G\left(2,8\right)$ consideramos $\mathfrak{T}\left(P\right) = \left(P, T\left(P\right)\right) \in E_P$, luego $\Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(Y_P\right)\right) \in \mathrm{Skew}_P\left(\mathbb{R}^8\right)$ por definición de Π_P. Restaría ver que ∇ cumple las propiedades de la Definición (7). Tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_{fX+Y}\mathfrak{T}\right)_P &= \left(P, \Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(f\left(P\right)X_P + Y_P\right)\right)\right) \\
&= \left(P, f\left(P\right)\Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(X_P\right)\right) + \Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(Y_P\right)\right)\right) \\
&= f\left(P\right)\left(\nabla_X \mathfrak{T}\right)_P + \left(\nabla_Y \mathfrak{T}\right)_P.
\end{aligned}$$

Ahora, como $f\mathfrak{T}\left(P\right) = \left(P, f\left(P\right)T\left(P\right)\right)$,

$$\begin{aligned}
\left(\nabla_Y\left(f\,\mathfrak{T}\right)\right)_P &= \left(P, \Pi_P\left(d\left(f\,T\right)_P\left(Y_P\right)\right)\right) \\
&= \left(P, \Pi_P\left(Y\left(f\right)\left(P\right)T\left(P\right) + f\left(P\right)\left(dT\right)_P\left(Y_P\right)\right)\right) \\
&= \left(P, Y\left(f\right)\left(P\right)T\left(P\right) + f\left(P\right)\Pi_P\left(\left(dT\right)_P\left(Y_P\right)\right)\right) \\
&= Y\left(f\right)\left(P\right)T\left(P\right) + f\left(P\right)\left(\nabla_Y \mathfrak{T}\right)_P.
\end{aligned}$$

De la misma manera se verifica que $\left(\nabla_Y\left(\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2\right)\right)_P = \left(\nabla_Y \mathfrak{T}_1\right)_P + \left(\nabla_Y \mathfrak{T}_2\right)_P$.

Sea $\frac{D}{dt}$ la derivada covariante asociada a ∇. Verificamos ahora que la conexión es métrica, es decir, que para toda curva $\alpha : I \to G(2,8)$ y toda sección suave $\mathfrak{T}(t) = (\alpha_t, T(\alpha_t))$ a lo largo de α se cumple (2.1.5). En efecto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \mathfrak{T}(t), \mathfrak{T}(t)\rangle_{\alpha_t} &= \frac{d}{dt}\langle (\alpha_t, T(\alpha_t)), (\alpha_t, T(\alpha_t))\rangle_{\alpha_t} \\ &= \frac{d}{dt}\langle T(\alpha_t), T(\alpha_t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}\|T(\alpha_t)\|^2,\end{aligned}$$

que es igual a

$$\begin{aligned}2\left\langle \nabla_{\alpha_t'}\mathfrak{T}(t), \mathfrak{T}(t)\right\rangle_{\alpha_t} &= 2\langle (\alpha_t, \Pi_{\alpha_t}((dT)(\alpha_t'))), (\alpha_t, T(\alpha_t))\rangle \\ &= 2\langle \Pi_{\alpha_t}(dT)(\alpha_t'), T(\alpha_t)\rangle \\ &= 2\langle (dT)(\alpha_t'), T(\alpha_t)\rangle,\end{aligned}$$

pues $T(\alpha_t) \in \mathrm{Skew}_{\alpha_t}(\mathbb{R}^8)$. □

La derivada covariante asociada a la conexión ∇ en el fibrado $E \to G(2,8)$ es la siguiente: Si $P : I \to G(2,8)$ es una curva suave de planos orientados en $\mathbb{R}^8$ y $T_t \in \mathrm{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$, entonces

$$\frac{D}{dt}(P_t, T_t) = \left(P_t, \Pi_{P_t}\left(\frac{d}{dt}T_t\right)\right). \tag{4.1.3}$$

En efecto, si $\alpha : I \to G(2,8)$ es una curva suave y $\mathfrak{T} \in \Gamma(G(2,8), E)$ con $\mathfrak{T} = (\mathrm{id}, T)$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{D}{dt}(\alpha(t), T(\alpha(t))) &= \left(\alpha(t), \Pi_{\alpha(t)}\left(\frac{d}{dt}(T\circ\alpha)\right)\right) \\ &= \left(\alpha(t), \Pi_{\alpha(t)}\left((dT)_{\alpha(t)}(\alpha'(t))\right)\right) \\ &= \nabla_{\alpha'(t)}\mathfrak{T}.\end{aligned}$$

A continuación demostramos dos lemas que facilitarán los cálculos posteriores.

Lema 44. *Sea $P \in G(2,8)$ y sea π_P la proyección ortogonal sobre $P^\perp$ en $\mathbb{R}^8$. Entonces $\Pi_P(T) = \pi_P \circ T \circ \pi_P$ para $T \in \mathrm{Skew}(\mathbb{R}^8)$.*

Demostración. Llamamos $\mathcal{P}(T) = \pi_P \circ T \circ \pi_P$, el cual está en $\operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$ pues π_P es autoadjunta. Primero probamos que $\mathcal{P}$ es una proyección ortogonal, es decir, que $\mathcal{P}^2 = \mathcal{P}$ y que $\mathcal{P}$ es autoadjunta. La primera es cierta ya que $(\pi_P)^2 = \pi_P$, y para la última tomamos $S, T \in \operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$ y calculamos

$$\langle \mathcal{P}S, T\rangle = -\tfrac{1}{6}\operatorname{tr}(\pi_P \circ S \circ \pi_P \circ T) = -\tfrac{1}{6}\operatorname{tr}(S \circ \pi_P \circ T \circ \pi_P) = \langle S, \mathcal{P}T\rangle .$$

Verificamos ahora que el conjunto de puntos fijos de $\mathcal{P}$ es $\operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$. Para $S \in \operatorname{Skew}(\mathbb{R}^8)$, escribimos $w \in \mathbb{R}^8$ como $w = u + v$, con $u \in P$ y $v \in P^\perp$ y tenemos por un lado $S(w) = S(u+v) = S(u) + S(v)$, y por el otro,

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(S)(w) &= \mathcal{P}(S)(u+v) = \mathcal{P}(S)(u) + \mathcal{P}(S)(v)\\ &= (\pi_P \circ S \circ \pi_P)(u) + (\pi_P \circ S \circ \pi_P)(v)\\ &= \pi_P(S(v)) .\end{aligned}$$

Si $\mathcal{P}(S) = S$, en particular coinciden en P, es decir cuando $w = u$ y $v = 0$. Resulta que $S(u) = 0$ y así $S \in \operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$. Ahora, si S está en este subespacio, tenemos que S y $\mathcal{P}(S)$ son 0 en P, lo que implica que $S\left(P^\perp\right) \subset P^\perp$ por la antisimetría de S. Luego, dado $v \in P^\perp$, $\mathcal{P}(S)(v) = \pi_P(S(v)) = S(v)$. Por lo tanto, $\mathcal{P}(S) = S$. En consecuencia $\mathcal{P}(S) = S$ si y sólo si $S \in \operatorname{Skew}_P(\mathbb{R}^8)$, como deseábamos. □

Lema 45. *Sea $P : \mathbb{R}^2 \to G(2,8)$ una superficie parametrizada y sea $\mathfrak{T} = (\mathrm{id}, T)$ una sección suave de $E \to G(2,8)$. Denotamos por*

$$T_1 = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 T_{P_{0,s}} \qquad y \qquad T_2 = \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{(0,0)} T_{P_{t,s}}$$

(ambas en $\mathbb{R}^{8\times 8}$) y sea π_t la proyección ortogonal sobre $(P_{t,0})^\perp$. Entonces

$$\left.\frac{D}{ds}\right|_0 \mathfrak{T}(P_{t,s}) = \left(P_{t,0}, \pi_t \circ \left.\frac{d}{ds}\right|_0 T_{P_{t,s}} \circ \pi_t\right) \tag{4.1.4}$$

$$\left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \mathfrak{T}(P_{t,s}) = \left(P_{0,0}, \pi_0 \circ (\pi_0' \circ T_1 + T_2 + T_1 \circ \pi_0') \circ \pi_0\right) . \tag{4.1.5}$$

Demostración. Consideremos la sección $\mathfrak{T}(P_{t,s}) = \left(P_{t,s}, T_{P_{t,s}}\right)$. Calculamos

$$\left.\frac{D}{ds}\right|_0 \mathfrak{T}(P_{t,s}) = \left.\frac{D}{ds}\right|_0 \left(P_{t,s}, T_{P_{t,s}}\right) = \left(P_{t,0}, \Pi_{P_{t,0}}\left(\left.\frac{d}{ds}\right|_0 T_{P_{t,s}}\right)\right)$$

y (4.1.4) es inmediata del lema anterior. Derivando de nuevo,

$$\left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \mathfrak{T}\left(P_{t,s}\right) = \left(P_{0,0}, \Pi_{P_{0,0}}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\pi_t \circ \left.\frac{d}{ds}\right|_0 T_{P_{t,s}} \circ \pi_t\right)\right)\right).$$

Calculamos

$$\begin{aligned}\Pi_{P_{0,0}}\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0 \left(\pi_t \circ \left.\frac{d}{ds}\right|_0 T_{P_{t,s}} \circ \pi_t\right)\right) &= \pi_0\left(\pi_0' T_1 \pi_0 + \pi_0 T_2 \pi_0 + \pi_0 T_1 \pi_0'\right)\pi_0 \\ &= \pi_0 \pi_0' T_1 \pi_0 + \pi_0 T_2 \pi_0 + \pi_0 T_1 \pi_0' \pi_0 \\ &= \pi_0\left(\pi_0' T_1 + T_2 + T_1 \pi_0'\right)\pi_0.\end{aligned}$$

Así, hemos verificado (4.1.5). □

4.2. Armonicidad de $\mathfrak{J}$

En esta sección llamamos simplemente X al producto cruz triple $X_{3,8}$. También, a veces omitiremos indicar los planos pies de elementos de E.

La siguiente definición fue extraída de [12].

Definición 46. *Se define la sección*

$$\mathfrak{J} : G(2,8) \to E^1, \qquad \mathfrak{J}(u \wedge v) = \left(u \wedge v, J_{u \wedge v}\right), \tag{4.2.1}$$

donde

$$J_{u\wedge v} \in \mathrm{Skew}_{u\wedge v}\left(\mathbb{R}^8\right), \qquad J_{u\wedge v}(w) = X(u, v, w).$$

El grupo $\mathrm{Spin}(7)$ actúa de manera canónica en $G(2,8)$ mediante $g(u \wedge v) = gu \wedge gv$, y también en E^1 a través de $g(u \wedge v, T) = \left(g(u \wedge v), gTg^{-1}\right)$ para $T \in \mathrm{Skew}_{u\wedge v}(\mathbb{R}^8)$, pues $\mathrm{Spin}(7) \subset SO(8)$.

Lema 47. *La sección $\mathfrak{J} : G(2,8) \to E^1$ es invariante por la acción de* $\mathrm{Spin}(7)$.

Demostración. Queremos probar que $\mathfrak{J}(g(u \wedge v)) = g\mathfrak{J}(u \wedge v)$. Por un lado tenemos

$$\mathfrak{J}(g(u \wedge v)) = \mathfrak{J}(gu \wedge gv) = \left(gu \wedge gv, J_{gu\wedge gv}\right)$$

y por el otro,

$$g\mathfrak{J}(u \wedge v) = g\left(u \wedge v, J_{u\wedge v}\right) = \left(gu \wedge gv, gJ_{u\wedge v}g^{-1}\right).$$

Pero

$$J_{gu\wedge gv}(w) = X(gu, gv, w) = gX\left(u, v, g^{-1}w\right) = gJ_{u\wedge v}g^{-1}(w)$$

para todo $w \in (u \wedge v)^{\perp}$. □

Por la Proposición 27, las curvas

$$\gamma_j^0(t) = (\cos t\, e_0 + \operatorname{sen} t\, e_j) \wedge e_1 \quad \text{y} \quad \gamma_j^1(t) = e_0 \wedge (\cos t\, e_1 + \operatorname{sen} t\, e_j) \tag{4.2.2}$$

o equivalentemente,

$$\gamma_j^\ell(t) = (-1)^\ell (\cos t\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, e_j) \wedge e_{\ell+1}$$

para $j = 2, \ldots, 7$ con $\ell = 0, 1 \bmod 2$, son geodésicas de $G(2,8)$. En lo que sigue consideraremos siempre $\ell \bmod 2$.

Consideramos campos vectoriales E_j^ℓ en un entorno normal de $e_0 \wedge e_1$ en $G(2,8)$ análogos a los de $G(3,8)$ en la sección anterior.

Lema 48. *Para $k, \ell = 0, 1$ e $i, j = 2, \ldots, 7$ se cumple que*

$$\nabla_{e_i^k} \nabla_{E_j^\ell} \mathfrak{J} = \left.\frac{D^{\gamma_i^k}}{dt}\right|_0 \left(\left.\frac{D^{s\mapsto P_{t,s}}}{ds}\right|_0 \mathfrak{J}(P_{t,s}) \right),$$

donde $P_{t,s} = \exp(te_i^k)\gamma_j^\ell(s)$.

Demostración. Es análoga a la prueba del Lema 32. □

Lema 49. *Sea $P : \mathbb{R}^2 \to G(2,8)$ la superficie parametrizada dada por $P_{t,s} = \exp(te_i^k)\gamma_j^\ell(s)$. Con la notación del Lema 45, para la sección $\mathfrak{J} = (\mathrm{id}, J)$ de $E \to G(2,8)$ asociada al producto cruz triple se cumple*

$$J_1 = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 J_{P_{0,s}} = (-1)^\ell J_{e_j \wedge e_{\ell+1}}. \tag{4.2.3}$$

Demostración. Para calcular $J_{P_{0,s}}$ observamos que $P_{0,s} = \gamma_j^\ell(s)$ y luego evaluamos en $w \in \mathbb{R}^8$:

$$\begin{aligned} J_{P_{0,s}}(w) &= (-1)^\ell X(\cos s\, e_\ell + \operatorname{sen} s\, e_j, e_{\ell+1}, w) \\ &= (-1)^\ell \cos s\, X(e_\ell, e_{\ell+1}, w) + \operatorname{sen} s\, X(e_j, e_{\ell+1}, w) \\ &= \cos s\, J_{e_0\wedge e_1}(w) + (-1)^\ell \operatorname{sen} s\, J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}(w). \end{aligned}$$

De este modo nos queda

$$J_{P_{0,s}} = \cos s\, J_{e_0\wedge e_1} + (-1)^{\ell} \operatorname{sen} s\, J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}. \tag{4.2.4}$$

Ahora, derivando respecto de s y evaluando en cero obtenemos

$$J_1 = \left.\frac{d}{ds}\right|_0 J_{P_{0,s}} = (-1)^{\ell} J_{e_j\wedge e_{\ell+1}},$$

como queríamos. □

Sea $\{e^0, \ldots, e^7\}$ la base dual canónica de $\mathbb{R}^8$. De (2.6.5) se deducen las siguientes propiedades de J, que luego usaremos sin más.

Propiedades:

1) $J_{e_i\wedge e_j} = -J_{e_j\wedge e_i}$.
2) $e^k \circ J_{e_i\wedge e_j} = -e^i \circ J_{e_k\wedge e_j}$.
3) $e^k \circ J_{e_i\wedge e_j} = -e^j \circ J_{e_i\wedge e_k}$.
4) $e^k \circ J_{e_i\wedge e_j} = -\left\langle J_{e_i\wedge e_j}(e_k), \cdot\right\rangle$.

Por conveniencia, dados $A, B \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^8)$, denotamos $A \odot B = AB + BA$.

Lema 50. *Para $\ell = 0, 1$ y $j = 2, \ldots, 7$ se satisface*

$$\nabla_{e_j^{\ell}} \mathfrak{J} = (-1)^{\ell} \left(J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} - \left(e_\ell \otimes e^\ell\right) \odot J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right), \tag{4.2.5}$$

$$\nabla_{e_j^{\ell}} \nabla_{E_j^{\ell}} \mathfrak{J} = -J_{e_0\wedge e_1} + \left(e_j \otimes e^j\right) \odot J_{e_0\wedge e_1}. \tag{4.2.6}$$

Demostración. Por el Lema 48 consideramos la superficie parametrizada

$$P_{t,s} = \exp\left(t e_j^{\ell}\right) \gamma_j^{\ell}(s) = \gamma_j^{\ell}(t+s).$$

Por (4.2.4) tenemos que

$$\mathfrak{J}(P_{t,s}) = \left(P_{t,s}, J_{P_{t,s}}\right) = \Big(P_{t,s}, \cos(t+s)\, J_{e_0\wedge e_1} + (-1)^{\ell} \operatorname{sen}(t+s)\, J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\Big).$$

El Lema 45 nos dice que

$$\nabla_{e_j^{\ell}} \nabla_{E_j^{\ell}} \mathfrak{J} = \left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \mathfrak{J} = \left(P_{0,0}, \pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 + \pi_0 J_2 \pi_0 + \pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0\right),$$

donde J_1 está dada por (4.2.3) y

$$\pi_t = \mathrm{id} - \left(\cos t\, e_\ell + \operatorname{sen} t\, e_j\right) \otimes \left(\cos t\, e^\ell + \operatorname{sen} t\, e^j\right) - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1}.$$

Calculamos

$$\begin{aligned} J_1\pi_0 &= \left((-1)^\ell J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right)\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_{\ell+1}\otimes e^{\ell+1}\right) \\ &= (-1)^\ell J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell\right), \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

pues $J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}(e_{\ell+1}) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi_0 J_1\pi_0 &= \left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_{\ell+1}\otimes e^{\ell+1}\right)(-1)^\ell J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell\right) \\ &= (-1)^\ell\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell\right)\left(J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} - J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(e_\ell\otimes e^\ell\right)\right), \end{aligned}$$

que es igual a la expresión deseada en (4.2.5), ya que $e^\ell J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}(e_\ell) = 0$.

Ahora verificamos la segunda identidad. Usamos (4.2.3) para J_1 como arriba y

$$J_2 = \left.\frac{\partial^2}{\partial t\partial s}\right|_{(0,0)} J_{P_{t,s}} = -J_{e_0\wedge e_1}.$$

Tenemos que $\pi_0' = -e_j\otimes e^\ell - e_\ell\otimes e^j$ y

$$\begin{aligned} \pi_0\pi_0' &= \left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_{\ell+1}\otimes e^{\ell+1}\right)\left(-e_j\otimes e^\ell - e_\ell\otimes e^j\right) \\ &= -e_j\otimes e^\ell - e_\ell\otimes e^j + e_\ell\otimes e^j = -e_j\otimes e^\ell. \end{aligned}$$

Usando (4.2.7) y las propiedades mencionadas anteriormente nos queda

$$\begin{aligned} \pi_0\pi_0' J_1\pi_0 &= -\left(e_j\otimes e^\ell\right)(-1)^\ell J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell\right) = (-1)^\ell\left(e_j\otimes e^j\right)\left(J_{e_\ell\wedge e_{\ell+1}}\right) \\ &= \left(e_j\otimes e^j\right)\left(J_{e_0\wedge e_1}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 J_2\pi_0 &= \left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_{\ell+1}\otimes e^{\ell+1}\right)\left(-J_{e_0\wedge e_1}\right)\left(\mathrm{id} - e_\ell\otimes e^\ell - e_{\ell+1}\otimes e^{\ell+1}\right) \\ &= -J_{e_0\wedge e_1}. \end{aligned}$$

Ahora

$$\pi_0 J_1\pi_0'\pi_0 = -\left(\pi_0\pi_0' J_1\pi_0\right)^t = -\left(\left(e_j\otimes e^j\right)\left(J_{e_0\wedge e_1}\right)\right)^t = \left(J_{e_0\wedge e_1}\right)\left(e_j\otimes e^j\right),$$

pues π_0 y π_0' son autoadjuntas y J_1 es antisimétrica. Por lo tanto

$$\pi_0\left(\pi_0' J_1 + J_2 + J_1\pi_0'\right)\pi_0 = \left(e_j\otimes e^j\right)J_{e_0\wedge e_1} - J_{e_0\wedge e_1} + J_{e_0\wedge e_1}\left(e_j\otimes e^j\right),$$

como queríamos ver en (4.2.6). □

Lema 51. *Para $\ell = 0, 1$, $i, j = 2, \ldots, 7$ con $i \neq j$, se tiene*

$$\nabla_{e_i^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \mathfrak{J} = \left(e_i \otimes e^j\right) J_{e_0 \wedge e_1} + J_{e_0 \wedge e_1} \left(e_j \otimes e^i\right).$$

Demostración. Si $i \neq j$, por el Lema 48, consideramos la superficie parametrizada

$$P_{t,s} = \exp\left(t e_i^\ell\right) \gamma_j^\ell(s) = (-1)^\ell \left(\cos t \cos s \, e_\ell + \operatorname{sen} t \cos s \, e_i + \operatorname{sen} s \, e_j\right) \wedge e_{\ell+1}.$$

Luego, $\mathfrak{J}(P_{t,s}) = \left(P_{t,s}, J_{P_{t,s}}\right)$ con

$$\left(P_{t,s}, (-1)^\ell \left(\cos t \, \cos s \, J_{e_\ell \wedge e_{\ell+1}} + \operatorname{sen} t \cos s \, J_{e_i \wedge e_{\ell+1}} + \operatorname{sen} s \, J_{e_j \wedge e_{\ell+1}}\right)\right).$$

Por el Lema 45,

$$\nabla_{e_i^\ell} \nabla_{E_j^\ell} \mathfrak{J} = \left.\frac{D^2}{dtds}\right|_{(0,0)} \mathfrak{J} = \left(P_{0,0}, \pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 + \pi_0 J_2 \pi_0 + \pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0\right),$$

donde J_1 está dada por (4.2.3), $J_2 = \left.\frac{\partial^2}{\partial t \partial s}\right|_{(0,0)} J_{P_{t,s}} = 0$ y

$$\pi_t = \mathrm{id} - \left(\cos t \, e_\ell + \operatorname{sen} t \, e_i\right) \otimes \left(\cos t \, e^\ell + \operatorname{sen} t \, e^i\right) - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1}.$$

Luego, $\pi_0' = -e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i$. Calculamos

$$\begin{aligned} \pi_0 \pi_0' &= \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1}\right) \left(-e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i\right) \\ &= -e_i \otimes e^\ell - e_\ell \otimes e^i + e_\ell \otimes e^i = -e_i \otimes e^\ell. \end{aligned}$$

Usando (4.2.7) y las propiedades mencionadas arriba tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 &= -\left(e_i \otimes e^\ell\right) (-1)^\ell J_{e_j \wedge e_{\ell+1}} \left(\mathrm{id} - e_\ell \otimes e^\ell\right) \\ &= (-1)^\ell \left(e_i \otimes e^j\right) J_{e_\ell \wedge e_{\ell+1}} = \left(e_i \otimes e^j\right) J_{e_0 \wedge e_1}. \end{aligned}$$

Ahora, como en el lema anterior

$$\pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0 = -\left(\pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0\right)^t = -\left(\left(e_i \otimes e^j\right) J_{e_0 \wedge e_1}\right)^t = J_{e_0 \wedge e_1} \left(e_j \otimes e^i\right).$$

Por lo tanto

$$\pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 + \pi_0 J_2 \pi_0 + \pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0 = \left(e_i \otimes e^j\right) J_{e_0 \wedge e_1} + J_{e_0 \wedge e_1} \left(e_j \otimes e^i\right),$$

como se deseaba. □

LEMA 52. *Para* $\ell = 0, 1$, $i, j = 2, \ldots, 7$, *tenemos*

$$\nabla_{e_i^{\ell+1}} \nabla_{E_j^{\ell}} \mathfrak{J} = (-1)^{\ell+1} \left(\pi_0 \circ J_{e_i \wedge e_j} \circ \pi_0 \right),$$

donde π_0 *es como arriba la proyección ortogonal sobre el plano* $(e_0 \wedge e_1)^{\perp}$.

DEMOSTRACIÓN. Si $i \neq j$, por el Lema 48, consideramos la superficie parametrizada

$$P_{t,s} = \exp\left(t e_i^{\ell+1}\right) \gamma_j^{\ell}(s) = (-1)^{\ell+1} (\cos t\, e_{\ell+1} + \operatorname{sen} t\, e_i) \wedge (\cos s\, e_{\ell} + \operatorname{sen} s\, e_j).$$

Luego, la segunda componente de $\mathfrak{J}(P_{t,s}) = \left(P_{t,s}, J_{P_{t,s}}\right)$ es igual a

$$(-1)^{\ell+1} \left(\cos s \left(\cos t\, J_{e_{\ell+1} \wedge e_{\ell}} + \operatorname{sen} t\, J_{e_i \wedge e_{\ell}} \right) + \operatorname{sen} s \left(\cos t\, J_{e_{\ell+1} \wedge e_j} + \operatorname{sen} t\, J_{e_i \wedge e_j} \right) \right).$$

Por el Lema 45,

$$\nabla_{e_i^{\ell+1}} \nabla_{E_j^{\ell}} \mathfrak{J} = \left. \frac{D^2}{dtds} \right|_{(0,0)} \mathfrak{J} = \left(P_{0,0}, \pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 + \pi_0 J_2 \pi_0 + \pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0 \right),$$

donde J_1 está dada por (4.2.3),

$$J_2 = \left. \frac{\partial^2}{\partial t \partial s} \right|_{(0,0)} J_{P_{t,s}} = (-1)^{\ell+1} J_{e_i \wedge e_j}$$

y

$$\pi_t = \mathrm{id} - (\cos t\, e_{\ell+1} + \operatorname{sen} t\, e_i) \otimes \left(\cos t\, e^{\ell+1} + \operatorname{sen} t\, e^i \right) - e_{\ell} \otimes e^{\ell}.$$

Luego, $\pi_0' = -e_i \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+1} \otimes e^i$. Calculamos

$$\begin{aligned} \pi_0 \pi_0' &= \left(\mathrm{id} - e_{\ell} \otimes e^{\ell} - e_{\ell+1} \otimes e^{\ell+1} \right) \left(-e_i \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+1} \otimes e^i \right) \\ &= -e_i \otimes e^{\ell+1} - e_{\ell+1} \otimes e^i + e_{\ell+1} \otimes e^i = -e_i \otimes e^{\ell+1}. \end{aligned}$$

Usando (4.2.7) y las propiedades mencionadas arriba obtenemos que

$$\pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 = (-1)^{\ell+1} \left(e_i \otimes e^{\ell+1} \right) J_{e_j \wedge e_{\ell+1}} \left(\mathrm{id} - e_{\ell} \otimes e^{\ell} \right) = 0.$$

Ahora $\pi_0 J_1 \pi_0' \pi_0 = -\left(\pi_0 \pi_0' J_1 \pi_0 \right)^t = 0$. Por lo tanto

$$\pi_0 \left(\pi_0' J_1 + J_2 + J_1 \pi_0' \right) \pi_0 = \pi_0 J_2 \pi_0 = (-1)^{\ell+1} \pi_0 J_{e_i \wedge e_j} \pi_0,$$

como se deseaba. □

PROPOSICIÓN 53. *El grupo* Spin (7) *actúa transitivamente en* $G(2, 8)$.

Demostración. Es similar a la prueba de la Proposición 36. □

Proposición 54. *La sección $\mathfrak{J} : G(2,8) \to E^1_{2,8}$ es verticalmente armónica.*

Demostración. Veamos que $\Delta\mathfrak{J}(u \wedge v) = f\, \mathfrak{J}(u \wedge v)$ para alguna función real suave f. Así, $\mathfrak{J}$ resultará verticalmente armónica por el Teorema 15. Primero lo probamos para $u \wedge v = e_0 \wedge e_1$. Consideremos las geodésicas γ^ℓ_j como en (4.2.2). Recordemos que

$$\Delta\mathfrak{J}(e_0 \wedge e_1) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=2}^{7} \left.\frac{D^{\ell,j}}{dt}\right|_0 \left.\frac{D^{\ell,j}}{ds}\right|_t \mathfrak{J}(\gamma^\ell_j(s)) = \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=2}^{7} \nabla_{e^\ell_j}\nabla_{E^\ell_j}\mathfrak{J},$$

donde $\dfrac{D^{\ell,j}}{ds}$ es la derivada covariante a lo largo de la curva γ^ℓ_j correspondiente. Pero por (4.2.6), para $\ell = 0, 1$ y $j = 2, \ldots, 7$ se tiene que

$$\nabla_{e^\ell_j}\nabla_{E^\ell_j}\mathfrak{J} = -J_{e_0\wedge e_1} + \left(e_j \otimes e^j\right) J_{e_0\wedge e_1} + J_{e_0\wedge e_1}\left(e_j \otimes e^j\right).$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\Delta\mathfrak{J}(e_0 \wedge e_1) &= 2\sum_{j=2}^{7}\left(-J_{e_0\wedge e_1} + \left(e_j \otimes e^j\right) J_{e_0\wedge e_1} + J_{e_0\wedge e_1}\left(e_j \otimes e^j\right)\right) \\
&= 2\left(-\sum_{j=2}^{7} J_{e_0\wedge e_1} + \sum_{j=2}^{7}\left(e_j \otimes e^j\right) J_{e_0\wedge e_1} + \sum_{j=2}^{7} J_{e_0\wedge e_1}\left(e_j \otimes e^j\right)\right) \\
&= 2\left(-6\, J_{e_0\wedge e_1} + J_{e_0\wedge e_1} + J_{e_0\wedge e_1}\right) = -8\, J_{e_0\wedge e_1}.
\end{aligned}$$

Usamos el hecho de que $\sum_{j=2}^{7}(e_j \otimes e^j)$ vale cero en span $\{e_0, e_1\}$ y la identidad en el complemento ortogonal de span $\{e_0, e_1\}$ (para verificarlo basta evaluar en e_m con $m = 0, \ldots, 7$). De este modo probamos que $\Delta\mathfrak{J}(e_0 \wedge e_1) = -8\, J_{e_0\wedge e_1}$.

Sea ahora $\{u, v\}$ un conjunto ortonormal de $\mathbb{R}^8$. Veamos que la proposición vale para $u \wedge v \in G\,(2, 8)$. Como Spin (7) actúa transitivamente en $G\,(2, 8)$, existe $g \in$ Spin (7) tal que $ge_0 = u$ y $ge_1 = v$. Calculamos $\Delta\mathfrak{J}\,(u \wedge v)$ recurriendo a las curvas $g\left(\gamma^j_i\right)$

$j=0,1$, $i=2,\dots 7$. Vimos que $\mathfrak{J}=g\mathfrak{J}g^{-1}$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\Delta\mathfrak{J}(u\wedge v) &= \sum_{\ell=0}^{1}\sum_{j=2}^{7}\left.\frac{D}{dt}\right|_0\left.\frac{D}{ds}\right|_t g\mathfrak{J}g^{-1}\left(g\left(\beta_j^{\ell}(s)\right)\right)\\ &= g\left(\Delta\mathfrak{J}(e_0\wedge e_1)\right)\\ &= g\left(-8\mathfrak{J}(e_0\wedge e_1)\right)\\ &= -8\mathfrak{J}(ge_0\wedge ge_1)\\ &= -8\mathfrak{J}(u\wedge v).\end{aligned}$$

□

En el siguiente lema calculamos curvaturas que luego usaremos en la prueba del Teorema 6. Para abreviar escribimos $A^{i,j}=e_i\otimes e^j-e_j\otimes e^i$.

Lema 55. *Para $2\le i,j\le 7$ y $\ell=0,1$ se tiene que $\left(R_{e_i^{\ell}e_j^{\ell+1}}\mathfrak{J}\right)_{e_0\wedge e_1}=0$ y*

$$\left(R_{e_i^{\ell}e_j^{\ell}}\mathfrak{J}\right)_{e_0\wedge e_1}=\left[J_{e_0\wedge e_1},A^{i,j}\right].$$

Demostración. Recordemos que

$$R_{e_i^{\ell}e_j^{\ell+1}}\mathfrak{J}=\nabla_{\left[E_i^{\ell},E_j^{\ell+1}\right](e_0\wedge e_1)}\mathfrak{J}-\nabla_{e_i^{\ell}}\nabla_{E_j^{\ell+1}}\mathfrak{J}+\nabla_{e_j^{\ell+1}}\nabla_{E_i^{\ell}}\mathfrak{J}.$$

Por definición de los campos E_i^{ℓ}, como la conexión ∇ tiene torsión cero, el primer término se anula. Calculamos los demás casos:

El Lema 51 nos dice que $\nabla_{e_i^{\ell}}\nabla_{E_j^{\ell}}\mathfrak{J}=(e_i\otimes e^j)J_{e_0\wedge e_1}+J_{e_0\wedge e_1}(e_j\otimes e^i)$. Entonces

$$\begin{aligned}R_{e_i^{\ell}e_j^{\ell}}\mathfrak{J} &= -\nabla_{e_i^{\ell}}\nabla_{E_j^{\ell}}\mathfrak{J}+\nabla_{e_j^{\ell}}\nabla_{E_i^{\ell}}\mathfrak{J}\\ &= -\left(e_i\otimes e^j\right)J_{e_0\wedge e_1}-J_{e_0\wedge e_1}\left(e_j\otimes e^i\right)+\left(e_j\otimes e^i\right)J_{e_0\wedge e_1}+J_{e_0\wedge e_1}\left(e_i\otimes e^j\right)\\ &= \left(e_j\otimes e^i-e_i\otimes e^j\right)J_{e_0\wedge e_1}+J_{e_0\wedge e_1}\left(e_i\otimes e^j-e_j\otimes e^i\right)=\left[J_{e_0\wedge e_1},A^{i,j}\right].\end{aligned}$$

Por el Lema 52 sabemos que $\nabla_{e_i^{\ell+1}}\nabla_{E_j^{\ell}}\mathfrak{J}=(-1)^{\ell+1}\left(\pi_0J_{e_i\wedge e_j}\pi_0\right)$. Luego, por la antisimetría del producto cruz tenemos que

$$R_{e_i^{\ell}e_j^{\ell+1}}\mathfrak{J}=(-1)^{\ell+1}\left(\pi_0J_{e_i\wedge e_j}\pi_0\right)+(-1)^{\ell+1}\left(\pi_0J_{e_j\wedge e_i}\pi_0\right)=0,$$

como queríamos probar. □

Teorema 6. *La sección $\mathfrak{J}$ es una aplicación armónica.*

Demostración. La Proposición 54 nos asegura que $\mathfrak{J}$ es verticalmente armónica, luego por la Proposición 16 resta ver que $\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}$ es nula. Por la invariancia por la acción de Spin (7), basta verificarlo sólo en $e_0 \wedge e_1$. Recordemos que

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}\left(e_i^\ell\right) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=2}^{7}\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^k}\mathfrak{J}, \nabla_{e_j^k}\mathfrak{J}\right\rangle .$$

Ahora, notemos que si $k \neq \ell$ entonces $k = \ell + 1$ y en el Lema 55 vimos que $R_{e_i^\ell e_j^{\ell+1}}\mathfrak{J} = 0$, luego $\left\langle R_{e_i^\ell e_j^k}\mathfrak{J}, \nabla_{e_j^k}\mathfrak{J}\right\rangle = 0$. En consecuencia

$$\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}\left(e_i^\ell\right) = \sum_{k=0}^{1}\sum_{j=2}^{7}\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^k}\mathfrak{J}, \nabla_{e_j^k}\mathfrak{J}\right\rangle = \sum_{j=2}^{7}\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^\ell}\mathfrak{J}, \nabla_{e_j^\ell}\mathfrak{J}\right\rangle .$$

Por (4.2.5) y por el Lema 55, tenemos que

$$\begin{aligned}(-1)^\ell\left\langle R_{e_i^\ell, e_j^\ell}\mathfrak{J}, \nabla_{e_j^\ell}\mathfrak{J}\right\rangle &= \left\langle\left[J_{e_0\wedge e_1}, A^{i,j}\right], \left(J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} - \left(e_\ell \otimes e^\ell\right)\odot J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right)\right\rangle \\ &= S_1 + S_2,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}S_1 &= -\left\langle A^{i,j}, \left[J_{e_0\wedge e_1}, J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right]\right\rangle, \\ S_2 &= \left\langle A^{i,j}, \left[J_{e_0\wedge e_1}, \left(e_\ell\otimes e^\ell\right)\odot J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right]\right\rangle .\end{aligned}$$

Observemos que si B es antisimétrica, entonces

$$\left\langle A^{i,j}, B\right\rangle = 2\left\langle Be_j, e_i\right\rangle = -2e^i\left(Be_j\right) = 2e^j\left(Be_i\right).$$

Deducimos de las propiedades listadas anteriormente y del Corolario 6.22 de [31] que

$$\begin{aligned}J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}J_{e_0\wedge e_1}e_j &= J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}J_{e_j\wedge e_0}e_1 = X\left(e_j, e_{\ell+1}, X\left(e_j, e_0, e_1\right)\right) \\ &= -\left\langle e_{\ell+1}, e_0\right\rangle e_1 + \left\langle e_{\ell+1}, e_1\right\rangle e_0 = (-1)^\ell e_\ell .\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}S_1 &= 2e^i\left(\left[J_{e_0\wedge e_1}, J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\right]e_j\right) = 2e^i\left(J_{e_0\wedge e_1}J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}e_j - J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}J_{e_0\wedge e_1}e_j\right) \\ &= -2e^i\left(J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}J_{e_0\wedge e_1}e_j\right) = -2e^i\left((-1)^\ell e_\ell\right) = 0,\end{aligned}$$

y usando que $J_{e_0\wedge e_1}(e_\ell)$, $e^\ell(e_j)$ y $e^\ell(J_{e_0\wedge e_1})$ se anulan,

$$\begin{aligned}
S_2 &= -2e^i\left(\left[J_{e_0\wedge e_1}, \left(e_\ell\otimes e^\ell\right) J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} + J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(e_\ell\otimes e^\ell\right)\right] e_j\right)\\
&= -2e^i\left(J_{e_0\wedge e_1}\left(\left(e_\ell\otimes e^\ell\right) J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} + J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(e_\ell\otimes e^\ell\right)\right) e_j\right)\\
&+ 2e^i\left(\left(\left(e_\ell\otimes e^\ell\right) J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} + J_{e_j\wedge e_{\ell+1}}\left(e_\ell\otimes e^\ell\right)\right) J_{e_0\wedge e_1} e_j\right)\\
&= 2e^i\left(\left(e_\ell\otimes e^\ell\right) J_{e_j\wedge e_{\ell+1}} J_{e_0\wedge e_1} e_j\right)\\
&= 2e^i\Big(\left(e_\ell\otimes e^\ell\right)(-1)^\ell e_\ell\Big) = (-1)^\ell\, 2e^i(e_\ell) = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{R}_{\mathfrak{J}}\left(e_i^\ell\right)$ se anula para $\ell = 0, 1$ e $i = 2, \ldots, 7$, como deseábamos. □

4.3. Le energía de la estructura casi compleja ortogonal en S^6

Para los demás productos cruz de Brown-Gray también se pueden construir secciones complejas ortogonales normales de grassmannianas. Llamando $\mathfrak{J}_{2,8}$ a nuestra $\mathfrak{J}$ de (4.2.1), para el caso (r, n) del Teorema 18 se tiene que la análoga $\mathfrak{J}_{r-1,n}$ estaría definida en la grassmanniana $G(r-1, n)$ y tomaría valores en estructuras complejas ortogonales normales de espacios vectoriales de dimensión $d := n - (r-1)$. Surge la pregunta si es una aplicación armónica en

$$\{(P, T) \mid P \in G(r-1, n) \ \text{ y } \ T \in \mathrm{Skew}_P(\mathbb{R}^n)\}, \tag{4.3.1}$$

donde $\mathrm{Skew}_P(\mathbb{R}^n)$ es como en (4.1.1), remplazando 8 por n, y con norma con coeficiente $1/d$ en vez de $1/6$.

Se ve entonces que las situaciones análogas para el caso $(1, 2m)$ es vacía (pues $r - 1 = 0$) y para el caso $(m, m+1)$ es trivial (ya que en dimensión $d = 2$ existen exactamente dos estructuras complejas ortogonales, la asociada al producto cruz y la opuesta).

Resta sólo el caso $(r, n) = (2, 7)$, que a cada $u \in G(1, 7) \equiv S^6$ le asigna la transformación compleja ortogonal J_u en $u^\perp = T_u S^6$ dada por $J_u(v) = u \times v$, que es la estructura casi compleja canónica de S^6. Éste fue estudiado en [20]: En el Teorema 4.1 (ver también la Proposición 4.7) se demuestra que esa sección es armónica, identificando, con la notación análoga a (4.1.1), $\mathrm{Skew}_u(\mathbb{R}^7)$ con $\Lambda^2\left(u^\perp\right)$.

Entonces se puede concluir de lo anterior y del Teorema 6 que todas las secciones complejas ortogonales de las grassmannianas asociadas a productos cruz son aplicaciones armónicas como secciones del fibrado correspondiente (4.3.1), salvo el caso vacío $(1, 2m)$.

Por otro lado, en [3] se prueba que J tiene energía mínima entre todas la estructuras casi complejas ortogonales de S^6, y en particular es verticalmente armónica entre las casi complejas ortogonales (comentamos de paso que este resultado contradice el de [36], que afirma que esta estructura ni siquiera es un mínimo local). Notar que este resultado es fuerte, porque provee un mínimo absoluto, pero no es comparable con el de [20] citado arriba, donde se estudian únicamente puntos críticos, pero respecto de variaciones por aplicaciones arbitrarias (no sólo por secciones, o sea, estructuras casi complejas ortogonales) y además, las fibras en el caso de [20] son estrictamente mayores de las de [3] (que consisten de transformaciones antisimétricas de traza constante y antisimétricas ortogonales, respectivamente).

Bibliografía

[1] Abbassi, Mohamed T. K.; Calvaruso, Giovanni; Perrone, Domenico. *Harmonic sections of tangent bundles equipped with Riemannian g-natural metrics*. Q. J. Math. **62** (2011), 259–288.

[2] Benyounes, Michele; Loubeau, Eric; Wood, Christopher M. *Harmonic vector fields on space forms*. Geom. Dedicata **177** (2015), 323–352.

[3] Bor, Gil; Hernández-Lamoneda, Luis; Salvai, Marcos. *Orthogonal almost-complex structures of minimal energy*. Geom. Dedicata **127** (2007), 75–85.

[4] Borel, Armand; Serre, Jean-Pierre. *Groupes de Lie et puissances réduites de Steenrod*. Amer. J. Math. **75** (1953), 409–448.

[5] Borrelli, Vincent; Gil-Medrano, Olga. *Area-minimizing vector fields on round 2-spheres*. J. Reine Angew. Math. **640** (2010), 85–99.

[6] ——— *A critical radius for unit Hopf vector fields on spheres*. Math. Ann. **334** (2006), 731–751.

[7] Brito, Fabiano; Salvai, Marcos. *Solenoidal unit vector fields with minimum energy*. Osaka J. Math. **41** (2004), 533–544.

[8] Brown, Robert B.; Gray, Alfred. *Vector cross products*. Comment. Math. Helv. **42** (1967), 222–236.

[9] Calabi, Eugenio; Gluck, Herman. *What are the best almost-complex structures on the 6-sphere?* Differential geometry: geometry in mathematical physics and related topics (Los Angeles, CA, 1990), 99–106, Proc. Sympos. Pure Math., **54**, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.

[10] Chacón, Pablo M.; Nunes, Giovanni da Silva. *Energy and topology of singular unit vector fields on S^3*. Pacific J. Math. **231** (2007), 27–34.

[11] Dragomir, Sorin; Perrone, Domenico. *Harmonic vector fields. Variational principles and differential geometry*. Elsevier, Inc., Amsterdam, 2012.

[12] Fei, Teng. *Stable forms, vector cross products and their applications in geometry*. arXiv:1504.02807v2 [math.DG].

[13] Ferraris, Francisco. *Disposiciones armónicas de planos orientados en $\mathbb{R}^7$ a distancia unitaria del origen*. Trabajo Especial de Licenciatura en Matemática en FaMAF, 2014.

[14] Gil-Medrano, O.; González-Dávila, J. C.; Vanhecke, L. *Harmonicity and minimality of oriented distributions*. Israel J. Math. **143** (2004), 253–279.

[15] Gil-Medrano, Olga. *Relationship between volume and energy of vector fields*. Differential Geom. Appl. **15** (2001), 137–152.

[16] Gil-Medrano, Olga; Llinares-Fuster, Elisa *Second variation of volume and energy of vector fields. Stability of Hopf vector fields*. Math. Ann. **320** (2001), 531–545.

[17] Gluck, Herman; Ziller, Wolfgang. *On the volume of a unit vector field on the three-sphere*. Comment. Math. Helv. **61** (1986), 177–192.

[18] González Dávila, José Carmelo. *Harmonicity and minimality of complex and quaternionic radial foliations*. Forum Math. **30** (2018), 785–798.

[19] ______ *Harmonicity and minimality of distributions on Riemannian manifolds via the intrinsic torsion*. Rev. Mat. Iberoam. **30** (2014), 247–275.

[20] González Dávila, José Carmelo; Martín Cabrera, Francisco. *Harmonic G-structures*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **146** (2009), 435–459.

[21] González Dávila, José Carmelo; Martín Cabrera, Francisco; Salvai, Marcos. *Harmonicity of sections of sphere bundles*. Math. Zeitschrift **261** (2009), 409–430.

[22] Gray, Alfred. *Vector cross products on manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. **141** (1969), 465–504.

[23] Grigorian, Sergey. *G_2-structures and octonion bundles*. Adv. Math. **308** (2017), 142–207.

[24] Han, Dong-Soong; Yim, Jin-Whan. *Unit vector fields on spheres, which are harmonic maps*. Math. Z. **227** (1998), 83–92.

[25] Harvey, F. Reese. *Spinors and calibrations*. Perspectives in Mathematics, **9**. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.

[26] Kobayashi, Shoshichi; Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry. Vol. II.* Reprint of the 1969 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996.

[27] Loubeau, Eric; Vergara-Diaz, Esther. *The harmonicity of nearly cosymplectic structures*. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 5301–5327.

[28] Pedersen, Sharon L. *Volumes of vector fields on spheres*. Trans. Amer. Math. Soc. **336** (1993), 69–78.

[29] Perrone, Domenico. *Unit vector fields on real space forms which are harmonic maps*. Pacific J. Math. **239** (2009), 89–104.

[30] Sabinin, Lev V.; Sbitneva, Larissa; Shestakov, Ivan P. *Non-associative algebra and its applications*. CRC Press, Boca Raton, 2006.

[31] Salamon, Dietmar A.; Walpuski, Thomas. *Notes on the octonions*. Proceedings of the Gökova Geometry-Topology Conference 2016, 1–85, Gökova Geometry/Topology Conference (GGT), Gökova, 2017.

[32] Salvai, Marcos. *On the energy of sections of parallelizable sphere bundles*. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **60** (2002), 147–155.

[33] Vergara-Diaz, Esther; Wood, Christopher M. *Harmonic contact metric structures and submersions*. Internat. J. Math. **20** (2009), 209–225.

[34] Wiegmink, Gerrit. *Total bending of vector fields on Riemannian manifolds*. Math. Ann. **303** (1995), 325–344.

[35] Wood, Christopher M. *On the energy of a unit vector field*. Geom. Dedicata **64** (1997), 319–330.

[36] ——— *Instability of the nearly-Kähler six-sphere*. J. Reine Angew. Math. **439** (1993), 205-212.