



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CORDOBA  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS FISICAS Y NATURALES

## SIMULACIÓN DINÁMICA ESTRUCTURAL DE UN AUTOMOVIL DE COMPETICIÓN

Autor: Beltramo, Emmanuel; DNI: 34338165

Trabajo de grado para obtener el título de Ingeniero Mecánico  
Escuela de Ingeniería Mecánica Electricista

Directores: Dr. Ing. José Enrique Stuardi

Msc. Ing. Guillermo Chiappero

Córdoba, Marzo de 2015



# I. Prólogo

La actividad deportiva mecánica en la República Argentina data del año 1906. Sin embargo fue recién en 1931 en que se fundó la Comisión Argentina Automovilística (C.D.A.) y la Asociación Argentina de Volantes (A.A.V.) dedicadas al control y reglamentación de las competencias.

La preparación de los coches, tanto la planta impulsora como el chasis, estuvo desde sus comienzos hasta la década del 80 a cargo de los mismos pilotos.

A partir del año 2000, fueron surgiendo los equipos de competición como verdaderas empresas dedicadas a la preparación y puesta a punto de un auto de carreras. Éstas cuentan con ingenieros y técnicos dedicados a la investigación y desarrollo de mejoras, tanto en el rendimiento mecánico del motor como en la dinámica del chasis.

Hoy el Súper TC 2000 es una de las categorías de automóviles de competición de la República Argentina con mayor desarrollo ingenieril y la más avanzada tecnológicamente de toda Sudamérica. La misma cuenta con equipos oficiales que representan a una marca específica como asimismo pilotos de nivel internacional.

En base a lo expuesto, resulta de interés un estudio de la estructura de seguridad del vehículo, -conocida vulgarmente como jaula de seguridad-. La misma reviste importancia en dos aspectos diferentes pero muy significativos al mismo tiempo. Por un lado su *influencia en el comportamiento dinámico del coche*, ya que un diseño adecuado de ella permite obtener una magnitud adecuada de rigidez torsional, la cual es una propiedad mecánica de la jaula. La capacidad dinámica en la pista, medida por la performance del coche, se vincula directamente con esta propiedad. El otro punto relevante se relaciona con la *seguridad del piloto*; ya que la jaula es un componente que debe ser capaz de soportar los impactos del vehículo contra diferentes obstáculos, como ser otros coches o bien colisiones contra el propio terreno, sin sufrir deformaciones excesivas que dañen la integridad física del conductor.

Este Proyecto Integrador está enfocado en el desarrollo de un software que permita conocer el desempeño dinámico del automóvil, como asimismo servir de herramienta

en la determinación de la magnitud mínima suficiente de rigidez torsional de la estructura de seguridad.

## II. Índice

|         |   |    |
|---------|---|----|
| I.      | Prólogo .....   | 3  |
| II.     | Índice.....   | 5  |
| III.    | Tabla de símbolos .....   | 9  |
| 1.      | Resumen .....   | 12 |
| 2.      | Introducción .....  | 14 |
| 3.      | Objetivos.....  | 17 |
| 4.      | Antecedentes .....  | 18 |
| 4.1     | Cambios en la concepción del chasis de un Súper TC 2000.....            | 18 |
| 5.      | Dinámica del automóvil.....   | 19 |
| 5.1     | Introducción.....   | 19 |
| 5.2     | Sistemas de referencia y movimientos del vehículo .....                 | 20 |
| 5.2.1   | Sistema de referencia inercial fijo en la tierra .....                  | 20 |
| 5.2.2   | Sistema de referencia del vehículo.....                                 | 20 |
| 5.2.3   | Movimientos del vehículo.....   | 22 |
| 5.3     | Dinámica de neumáticos .....  | 25 |
| 5.3.1   | Introducción .....  | 25 |
| 5.3.2   | Sistema de referencia de la rueda .....                                 | 27 |
| 5.3.3   | Sistema de fuerzas sobre el neumático .....                             | 28 |
| 5.3.4   | Propiedades mecánicas y curvas características.....                     | 34 |
| 5.3.5   | Otros factores influyentes en el comportamiento de los neumáticos ..... | 47 |
| 5.3.5.1 | Presión de inflado de los neumáticos .....                              | 47 |
| 5.3.5.2 | Temperatura de los neumáticos .....                                     | 47 |
| 5.3.5.3 | Velocidad de los neumáticos .....                                       | 47 |
| 5.4     | Estabilidad del vehículo .....  | 48 |
| 5.4.1   | Introducción .....  | 48 |
| 5.4.2   | Modelo vehicular adoptado .....   | 49 |
| 5.4.3   | Cinemática de dirección .....   | 50 |
| 5.4.4   | Estabilidad en estado de curva .....                                    | 53 |
| 5.4.4.1 | Vehículo de actitud neutra .....  | 54 |
| 5.4.4.2 | Vehículo de actitud subviradora.....                                    | 57 |
| 5.4.4.3 | Vehículo de actitud sobreviradora .....                                 | 59 |
| 5.4.5   | Ecuaciones de movimiento.....   | 61 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 5.4.6   | Factor de estabilidad K .....                                       | 66  |
| 5.5     | Carga sobre los neumáticos .....                                    | 68  |
| 5.5.1   | Introducción .....  | 68  |
| 5.5.2   | Carga estática.....   | 69  |
| 5.5.3   | Transferencia lateral de carga.....                                 | 70  |
| 5.5.4   | Transferencia longitudinal de carga.....                            | 72  |
| 5.5.5   | Distribución de la transferencia lateral de carga .....             | 74  |
| 5.6     | Rigidez del chasis.....   | 76  |
| 5.6.1   | Introducción .....  | 76  |
| 5.6.2   | Rigidez a flexión del chasis.....                                   | 77  |
| 5.6.3   | Rigidez torsional del chasis .....                                  | 77  |
| 5.6.4   | Método práctico para el cálculo de la rigidez torsional.....        | 78  |
| 5.7     | Sistemas de suspensión.....   | 80  |
| 5.7.1   | Introducción .....  | 80  |
| 5.7.2   | Componentes del sistema de suspensión.....                          | 81  |
| 5.7.3   | Suspensión independiente.....                                       | 82  |
| 5.7.3.1 | Suspensión de doble brazo o de paralelogramo deformable.....        | 82  |
| 5.7.4   | Suspensión dependiente.....   | 88  |
| 5.8     | Amortiguadores .....  | 91  |
| 5.8.1   | Introducción .....  | 91  |
| 5.8.2   | Amortiguadores hidráulicos telescópicos .....                       | 91  |
| 6.      | Método matricial de la rigidez.....                                 | 93  |
| 6.1     | Generalidades .....   | 93  |
| 6.2     | Tipos de estructuras .....  | 94  |
| 6.3     | Solución completa de problemas de mecánica estructural .....        | 96  |
| 6.4     | Sistemas de coordenadas .....                                       | 97  |
| 6.5     | Matrices de rigidez.....  | 100 |
| 6.6.1   | Introducción .....  | 100 |
| 6.6.2   | Matriz de rigidez para una barra de reticulado plano .....          | 100 |
| 6.6.3   | Matriz de rigidez para una barra de pórtico plano.....              | 109 |
| 6.6.4   | Matriz de rigidez para una barra de reticulado tridimensional ..... | 115 |
| 6.6.5   | Matriz de rigidez para una barra de pórtico tridimensional.....     | 116 |
| 6.6.6   | Condensación estática de la matriz de rigidez .....                 | 120 |
| 6.6     | Ensamble y resolución .....   | 121 |
| 6.6.1   | Introducción .....  | 121 |

|         |   |     |
|---------|---|-----|
| 6.6.2   | Compatibilidad y equilibrio.....  | 122 |
| 6.6.3   | Ensamblaje de la matriz de rigidez global.....                              | 123 |
| 7.      | Modelo vehicular .....  | 124 |
| 7.1     | Introducción.....   | 124 |
| 7.2     | Estructura de seguridad.....  | 124 |
| 7.3     | Sistema de suspensión delantero .....                                       | 125 |
| 7.4     | Sistema de suspensión trasero .....   | 127 |
| 7.5     | Neumáticos .....  | 128 |
| 8.      | Desarrollo del programa: SimuDinamic -Simulador Dinámico Estructural- ..... | 130 |
| 8.1     | Introducción.....   | 130 |
| 8.2     | Desarrollo del programa. Algoritmos .....                                   | 131 |
| 8.3     | Utilidades de SimuDinamic .....   | 147 |
| 8.4     | Manual de usuario -SimuDinamic-.....  | 150 |
| 8.4.1   | Introducción .....  | 150 |
| 8.4.2   | Consideraciones generales.....  | 151 |
| 8.4.3   | Ingreso de datos .....  | 153 |
| 8.4.3.1 | Introducción .....  | 153 |
| 8.4.3.2 | Entrada de datos mediante teclado y archivos de datos .....                 | 154 |
| 8.4.3.3 | Entrada de datos mediante archivos de datos.....                            | 159 |
| 8.4.4   | Resolución.....   | 159 |
| 8.4.5   | Resultados .....  | 160 |
| 8.5     | Validación de SimuDinamic.....  | 161 |
| 9.2.1   | Introducción.....   | 161 |
| 8.5.2   | Primer ejercicio.....   | 162 |
| 8.5.3   | Segundo ejercicio.....  | 164 |
| 8.5.4   | Tercer ejercicio .....  | 166 |
| 9.      | Aplicación de SimuDinamic.....  | 168 |
| 9.1     | Introducción.....   | 168 |
| 9.2     | Determinación de la rigidez torsional mínima suficiente .....               | 168 |
| 9.2.1   | Objetivos .....   | 168 |
| 9.2.2   | Condiciones de análisis.....  | 168 |
| 9.2.3   | Parámetros de evaluación .....  | 171 |
| 9.2.4   | Procedimiento de evaluación .....   | 173 |
| 9.2.5   | Resultados .....  | 177 |
| 9.2.6   | Comentarios finales .....   | 199 |

|        |   |     |
|--------|---|-----|
| 10.    | Conclusiones.....   | 200 |
| 11.    | Trabajos futuros.....   | 202 |
| 11.1   | Introducción.....   | 202 |
| 11.2   | Futuras mejoras en el código de SimuDinamic.....                | 202 |
| 11.3   | Vinculación con otro software.....                              | 203 |
| 12.    | Referencias.....  | 205 |
| 13.    | Anexo.....  | 207 |
| 13.1   | Procedimiento para ejecutar validaciones.....                   | 207 |
| 13.1.1 | Primer ejercicio.....   | 207 |
| 13.1.2 | Segundo ejercicio.....  | 207 |
| 13.1.3 | Tercer ejercicio.....   | 208 |
| 13.2   | Estructuras de seguridad.....                                   | 208 |
| 13.2.1 | Introducción.....   | 208 |
| 13.2.2 | Parámetros que influyen en la rigidez.....                      | 209 |
| 13.2.3 | Estructuras utilizadas en el estudio de rigidez torsional.....  | 210 |
| 13.3   | Procedimiento para ejecutar una simulación con SimuDinamic..... | 213 |
| 13.4   | Contenido del CD adjunto al trabajo.....                        | 216 |



### III. Tabla de símbolos

| Símbolo  | Descripción  | Unidad [S.I.]       |
|----------|--|---------------------|
| X-Y-Z    | Sistema de referencia fijo en la tierra definido por la SAE  | -                   |
| x-y-z    | Sistema de referencia fijo al vehículo y sistema de referencia fijo al neumático. Ambos definidos por la SAE | -                   |
| $u$      | Velocidad de avance del vehículo   | [m/s]               |
| $v$      | Velocidad lateral del vehículo   | [m/s]               |
| $r$      | Velocidad de guiñada del vehículo  | [m/s]               |
| $p$      | Velocidad de rolido del vehículo   | [m/s]               |
| $q$      | Velocidad de cabeceo del vehículo  | [m/s]               |
| $w$      | Velocidad vertical del vehículo  | [m/s]               |
| $F_x$    | Fuerza sobre el vehículo en dirección x  | [N]                 |
| $F_y$    | Fuerza sobre el vehículo en dirección y  | [N]                 |
| $F_z$    | Fuerza sobre el vehículo en dirección z  | [N]                 |
| $M_x$    | Momento de rolido sobre el vehículo y momento de vuelco sobre el neumático                                   | [Nm]                |
| $M_y$    | Momento de cabeceo sobre el vehículo y momento resistente a rolido del neumático                             | [Nm]                |
| $M_z; N$ | Momento de guiñada del vehículo y momento autoalineante del neumático  | [Nm]                |
| $F_x$    | Fuerza longitudinal sobre el neumático   | [N]                 |
| $F_y; Y$ | Fuerza lateral sobre el neumático  | [N]                 |
| $F_z$    | Fuerza normal sobre el neumático   | [N]                 |
| $M_x$    | Momento de vuelco sobre el neumático   | [Nm]                |
| $M_y$    | Momento resistente a rolido del neumático  | [Nm]                |
| $M_z$    | Momento autoalineante del neumático  | [Nm]                |
| $a_x$    | Aceleración longitudinal o en dirección x  | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $a_y$    | Aceleración lateral o en dirección y   | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $a_z$    | Aceleración normal o en dirección z  | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $a_c$    | Aceleración centrípeta   | [m/s <sup>2</sup> ] |
| $\psi$   | Ángulo de dirección  | [rad]               |
| $\alpha$ | Ángulo de deriva   | [rad]               |
| $u$      | Ángulo de curso  | [rad]               |
| $\phi$   | Ángulo de rolido   | [rad]               |
| $\theta$ | Ángulo de cabeceo  | [rad]               |
| $\gamma$ | Ángulo de comba  | [rad]               |
| $R_a$    | Relación de aspecto  | -                   |
| $h_t$    | Altura del perfil del neumático  | [m]                 |
| $w_T$    | Ancho del neumático  | [m]                 |
| $V$      | Velocidad lineal   | [m/s]               |

|                               |  |         |
|-------------------------------|--|---------|
| $R$                           | Radio del neumático rodando libremente y radio de curva  | [m]     |
| $\Omega$                      | Velocidad angular del neumático rodando libremente   | [rad/s] |
| $M_t$                         | Momento torsor aplicado sobre el eje de giro del neumático   | [Nm]    |
| $F_t$                         | Fuerza tractiva  | [N]     |
| $t_r$                         | Avance neumático   | [m]     |
| $T$                           | Torque   | [Nm]    |
| $F_R$                         | Fuerza de rozamiento por rodadura libre del neumático  | [N]     |
| $\varepsilon$                 | Distancia desde el punto de aplicación de una fuerza a un eje de referencia medida sobre plano z-y | [m]     |
| $F_{zR}$                      | Reacción a la fuerza normal actuante sobre un neumático  | [N]     |
| $d$                           | Distancia desde el punto de aplicación de una fuerza a un eje de referencia medida sobre plano z-y | [m]     |
| $F_{T'}$                      | Fuerza requerida para que un neumático ruede a velocidad constante                                 | [N]     |
| $SR$                          | Relación de patinamiento   | -       |
| $R_l$                         | Radio de un neumático cargado  | [m]     |
| $k_x$                         | Rigidez longitudinal del neumático   | [N/m]   |
| $k_y$                         | Rigidez lateral del neumático  | [N/m]   |
| $k_z$                         | Rigidez vertical del neumático   | [N/m]   |
| $\Delta_x$                    | Desplazamiento longitudinal del neumático  | [m]     |
| $\Delta_y$                    | Desplazamiento lateral del neumático   | [m]     |
| $\Delta_z$                    | Desplazamiento vertical del neumático  | [m]     |
| $C_\alpha$                    | Rigidez de deriva del neumático  | [N/rad] |
| $C_y$                         | Rigidez de comba del neumático   | [N/rad] |
| $\mu_y$                       | Coeficiente de fricción longitudinal del neumático   | -       |
| $\mu_y$                       | Coeficiente de fricción lateral del neumático  | -       |
| $F_{resultante}$              | Fuerza resultante  | [N]     |
| $\delta$                      | Ángulo de dirección de los neumáticos  | [rad]   |
| $V$                           | Velocidad de avance del vehículo   | [m/s]   |
| $F_R$                         | Fuerza lateral desarrollada por neumático trasero  | [N]     |
| $F_F$                         | Fuerza lateral desarrollada por neumático delantero  | [N]     |
| $\beta'$                      | Ángulo de deriva del vehículo  | [rad]   |
| $l$                           | Distancia entre ejes del automóvil   | [m]     |
| $w_t$                         | Distancia entre ejes de las ruedas directrices   | [m]     |
| $a_2; b$                      | Distancia entre el eje trasero y el centro de gravedad del coche                                   | [m]     |
| $\alpha_F$                    | Ángulo de deriva neumático delantero   | [rad]   |
| $\alpha_R$                    | Ángulo de deriva neumático trasero   | [rad]   |
| $Y_F$                         | Fuerza lateral desarrollada por neumático delantero  | [N]     |
| $Y_R$                         | Fuerza lateral desarrollada por neumático trasero  | [N]     |
| $C_F$                         | Rigidez de deriva neumático delantero  | [N/rad] |
| $C_R$                         | Rigidez de deriva neumático trasero  | [N/rad] |
| $N_F$                         | Momento de guiñada desarrollado por el neumático delantero   | [Nm]    |
| $N_R$                         | Momento de guiñada desarrollado por el neumático trasero   | [Nm]    |
| $N_{\beta'}; N_{\delta}; N_r$ | Derivadas de estabilidad y control   |         |

|                               |  |                                      |
|-------------------------------|--|--------------------------------------|
| $Y_{\beta'}; Y_{\delta}; Y_r$ |  |                                      |
| $I_z$                         | Momento de inercia del vehículo respecto al eje z fijo al coche  | [kgm <sup>2</sup> ]                  |
| $K$                           | Factor de estabilidad  | [s <sup>2</sup> rad/m <sup>2</sup> ] |
| $g$                           | Aceleración de la gravedad   | [m/s <sup>2</sup> ]                  |
| $W$                           | Peso del vehículo  | [N]                                  |
| $m_v$                         | Masa del vehículo  | [Kg]                                 |
| $h_{cg}$                      | Altura del centro de gravedad del vehículo   | [m]                                  |
| $F_{zr}$                      | Carga estática sobre el tren trasero   | [N]                                  |
| $F_{zf}$                      | Carga estática sobre el tren delantero   | [N]                                  |
| $F_{z1l}$                     | Carga sobre neumático interno en transferencia lateral de carga  | [N]                                  |
| $F_{z12}$                     | Carga sobre neumático externo en transferencia lateral de carga  | [N]                                  |
| $F_{zlf}$                     | Carga sobre el tren delantero en transferencia longitudinal de carga   | [N]                                  |
| $F_{zlr}$                     | Carga sobre el tren trasero en transferencia longitudinal de carga   | [N]                                  |
| $TCLT$                        | Transferencia de carga lateral total   | [N]                                  |
| $TCL_oT$                      | Transferencia de carga longitudinal total  | [N]                                  |
| $F$                           | Fuerza aplicada en portamasa libre en ensayo torsional   | [N]                                  |
| $\varphi$                     | Ángulo rotado por tren delantero en ensayo torsional   | [rad]                                |
| $h$                           | Altura alcanzada en ensayo torsional por el portamasa libre  | [m]                                  |
| $IC$                          | Centro instantáneo de rotación del sistema de suspensión   | -                                    |
| $RC$                          | Centro de rolido del sistema de suspensión delantero y/o trasero   | -                                    |
| $RCH$                         | Altura del centro de rolido del sistema de suspensión delantero y/o trasero  | [m]                                  |
| $\Phi_F$                      | Ángulo conformado entre la línea construida por el IC delantero y el centro del parche de contacto delantero y el plano de la tierra | [rad]                                |
| $\Phi_R$                      | Ángulo conformado entre la línea construida por el IC trasero y el centro del parche de contacto trasero y el plano de la tierra     | [rad]                                |
| $\sigma$                      | Tensión axial en ensayo de tracción  | [N/m <sup>2</sup> ]                  |
| $E$                           | Módulo de elasticidad longitudinal del acero   | [N/m <sup>2</sup> ]                  |
| $\varepsilon$                 | Deformación axial  | -                                    |
| $G$                           | Módulo de elasticidad transversal  | [N/m <sup>2</sup> ]                  |
| $K_t$                         | Rigidez torsional del chasis vehicular   | [Nm/rad]                             |
| $R_t$                         | Relación de transferencia  | -                                    |
| $S_e$                         | Sensibilidad   | [N]                                  |
| $TTD$                         | Transferencia lateral de carga tren delantero  | [N]                                  |
| $TTT$                         | Transferencia lateral de carga tren trasero  | [N]                                  |
| $d_p$                         | Distancia entre puntos de anclaje de parrilla delantera inferior derecha e izquierda   | [mm]                                 |
| $h_D$                         | Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza derecha en ensayo de rigidez.  | [mm]                                 |
| $h_I$                         | Desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza izquierda en ensayo de rigidez.  | [mm]                                 |

# 1. Resumen

En este Proyecto Integrador se estudia, se analiza y se determina la influencia que posee la rigidez a torsión del chasis de un vehículo de Súper TC 2000 en su comportamiento dinámico, fundamentalmente en condición de curva. En tal circunstancia los neumáticos internos a la trayectoria descrita por el coche reducen su carga normal sobre el terreno y los externos incrementan dicha magnitud, lo cual es conocido como transferencia lateral de carga. En esta categoría de automóviles la rigidez torsional del chasis está determinada por la rigidez a torsión que presenta la estructura de seguridad. La misma es el corazón del chasis de un Súper TC 2000, conectando tren trasero y delantero como así también los restantes componentes. Por otro lado, la carrocería cumple funciones únicamente aerodinámicas y de estética, sin efectuar aportes estructurales al coche.

La rigidez torsional de la estructura de seguridad incide notablemente en la distribución, entre el tren delantero y trasero del vehículo, de la transferencia lateral de carga. Un manejo adecuado de la distribución de transferencia permite obtener el máximo rendimiento de los neumáticos, motivo por el cual la rigidez torsional de la jaula es una propiedad tan relevante. Además, la capacidad de adherencia del neumático al terreno está íntimamente relacionada con la carga normal que actúa sobre el neumático.

El presente trabajo se concentra en estudiar la influencia que presenta el valor de la rigidez torsional de la estructura de seguridad en la distribución de transferencia lateral de carga. Para ello, se desarrolla un software computacional que calcula la carga normal sobre cada neumático. El mencionado programa constituye un simulador, ya que alimentado con los datos adecuados, determina la distribución de

carga normal sobre cada neumático a lo largo de una vuelta en un circuito o un tramo del mismo especificado por el usuario.

El objetivo fundamental consiste entonces en desarrollar un programa informático que determine, para diversas condiciones, la carga normal actuante sobre cada neumático del automóvil, con la finalidad de utilizarlo como herramienta para determinar la magnitud mínima suficiente de rigidez torsional de la jaula de un automóvil de Súper TC 2000. Las mediciones de rigidez se ejecutan mediante un software de elementos finitos. Se adopta como punto de partida la estructura de seguridad que equipó al Renault Fluence de Súper TC 2000 durante la temporada 2013.

## 2. Introducción

Durante los últimos veinte años, el desarrollo de ordenadores cada vez más potentes ha permitido la creación de software computacional que han hecho posible la resolución de problemas de ingeniería que antes se consideraban casi imposibles debido a su elevada complejidad.

Por otro lado, el crecimiento del profesionalismo y el aumento de la competitividad ha transformado a los equipos de competición en verdaderas empresas. La división de tareas; especialización; incorporación de técnicos e ingenieros en los equipos, son fundamentales para alcanzar el éxito en el deporte motor.

Lo expuesto en el primer párrafo junto con esto último ha llevado a ejecutar desarrollos muy complejos y precisos que han permitido ganar décimas de segundo por vuelta, logros de suma importancia en las competencias de automovilismo.

En la concepción actual de un automóvil de Súper TC 2000 el chasis es un componente que requiere un gran desarrollo, fundamentalmente la estructura de seguridad que es el núcleo principal del chasis. Un diseño preciso y criterioso de la jaula permite corregir actitudes no deseadas del vehículo, logrando un coche altamente competitivo.

Los sistemas de suspensión de un vehículo tienen como función principal absorber las irregularidades del terreno y garantizar el contacto permanente de la rueda con la carretera. Se encuentran constituidos, entre otros elementos, por resortes lineales vulgarmente conocidos como espirales y resortes torsionales denominados barras anti-rolido, estabilizadoras o de torsión. Mediante un manejo adecuado de los constituyentes elásticos mencionados es posible modificar la distribución de la transferencia de carga lateral entre el tren delantero y el trasero, siempre y cuando el automóvil disponga de una jaula cuya rigidez torsional posea un valor adecuado. El

rendimiento de los neumáticos está directamente relacionado con la distribución de la transferencia lateral de carga. Un manejo eficiente de la misma permite generar una carga normal sobre los neumáticos que proporcione el máximo rendimiento de ellos y así poder transitar una curva a máxima velocidad.

Durante una fracción del año 2012, en el marco del desarrollo de la Práctica Profesional Supervisada en el equipo Renault Sport de Súper TC 2000, he dibujado mediante un software de diseño mecánico una serie de estructuras de seguridad. Esto fue una motivación para seleccionar el tema del Proyecto debido a la gran insistencia por parte de los miembros del equipo sobre la importancia que reviste la jaula de seguridad en la dinámica del coche, fundamentalmente su rigidez a torsión.

El trabajo Integrador consiste en el desarrollo de un programa computacional que sirva de herramienta para evaluar la magnitud de la rigidez torsional de la estructura de seguridad de un automóvil de Súper TC 2000, y además permita simular el estado de carga normal sobre los neumáticos del coche.

El presente Proyecto Integrador se encuentra dividido en trece capítulos. En el capítulo 1 se presenta un resumen del trabajo orientando al lector sobre su contenido. En el capítulo 2 se mencionan los temas a estudiar y se explica la importancia que reviste la rigidez torsional del chasis en un coche de competición. En el capítulo 3 se definen claramente los objetivos que se pretenden alcanzar con este Proyecto Integrador. En el capítulo 4 se menciona brevemente una evolución en el tiempo de la concepción de un coche de Súper TC 2000. En el capítulo 5 se presentan conceptos generales sobre la dinámica automotriz, necesarios para una adecuada comprensión del trabajo. En el capítulo 6 se presenta brevemente el método matricial de la rigidez, utilizado en el desarrollo del software. En el capítulo 7 se presenta cómo se modela cada sub-estructura del coche a través del método de la rigidez. En el capítulo 8 se detalla la estructura interna del programa desarrollado y se valida su funcionamiento a través de la resolución de ejercicios de resultados conocidos, esto se efectúa por medio de las funciones que constituyen el núcleo de cálculo del programa. En el capítulo 9 se presenta una aplicación del software: determinación de la magnitud de rigidez torsional óptima de la estructura de seguridad de un Súper TC 2000. En el

capítulo 10 se concluye sobre el trabajo realizado. En el capítulo 11 se presentan posibles trabajos futuros a desarrollar; en el capítulo 12 se presentan las referencias. Y finalmente en el capítulo 13 se anexan un procedimiento para ejecutar las validaciones, las estructuras de seguridad utilizadas en la aplicación práctica del programa y el procedimiento para ejecutar una simulación.



### 3. Objetivos

El presente Proyecto Integrador tiene como finalidad desarrollar un programa computacional que determine, para diversas condiciones, la carga normal actuante sobre cada neumático del automóvil, con el propósito de utilizarlo como herramienta en la determinación de la magnitud mínima suficiente de rigidez torsional que debe disponer la estructura de seguridad de un vehículo de Súper TC 2000.

Específicamente los objetivos del presente son:

- ✓ Desarrollar un software computacional interactivo basado en el método matricial de la rigidez, y que constituya una herramienta para evaluar la rigidez torsional de la estructura de seguridad de un automóvil de Súper TC 2000. Este programa debe ser de uso relativamente sencillo, interfaz agradable, versátil, correcta lectura de resultados y que viabilice la modificación de parámetros geométricos y mecánicos del vehículo.
- ✓ Aplicar el software informático para determinar la magnitud mínima suficiente de la rigidez torsional de la estructura de seguridad de un coche de Súper TC 2000.

## 4. Antecedentes

### 4.1 Cambios en la concepción del chasis de un Súper TC 2000

Desde los orígenes de la categoría TC 2000 hasta el año 2004, la tarea de los equipos de competición se concentraba en adquirir un coche estándar y construir en su interior la estructura de seguridad, la cual permitía proteger al piloto ante alguna colisión e incrementar la rigidez torsional del chasis del vehículo. En tal concepción, la jaula aporta un plus de rigidez a la que posee el chasis original del automóvil. Sin embargo, a partir de dicho año se produce una modificación en el diseño base del chasis; la jaula de protección se convirtió en un componente de suma importancia ya que deja de ser construida en el interior del vehículo para fabricarse fuera del mismo y sobre ella colocar la carrocería vinculándola a los nodos estructurales de la jaula.

La principal ventaja de esta nueva forma de concebir el chasis de un coche de competición es la facilidad de trabajo; la carrocería puede ser desmontada con relativa simplicidad.

Aerodinámicamente también trajo beneficios, permitiendo orientar la carrocería según sea conveniente para ubicar el centro de presiones en el lugar más adecuado. Cabe destacar que a velocidades elevadas las fuerzas aerodinámicas juegan un rol muy importante.

En esta nueva concepción la carrocería dejó de cumplir funciones estructurales. Teniendo en cuenta que los motores que equipan a estos coches son diseñados específicamente para competición, los automóviles de competición únicamente se asemejan al vehículo de calle que representan por su apariencia exterior.

## 5. Dinámica del automóvil

### 5.1 Introducción

La dinámica es la rama de la física que describe la evolución en el tiempo de un sistema físico en relación con las causas que provocan los cambios de estado físico y/o estado de movimiento. El objetivo de la dinámica es describir los factores capaces de producir alteraciones en un sistema físico, cuantificarlos y plantear ecuaciones de movimiento o de evolución para dicho sistema.

La dinámica del automóvil tiene como objetivo el estudio del movimiento de los vehículos sobre la superficie de rodadura y el comportamiento dinámico de los mismos frente a acciones del conductor sobre los elementos de control, teniendo en cuenta la interacción con el medio: calzada y aire, e incluyendo las excitaciones que tienen como origen dicha interacción.

El capítulo comienza con la definición de dos sistemas de referencia: uno sobre el vehículo y el otro fijo en la superficie terrestre, necesario para facilitar la comunicación en lenguaje técnico. Asimismo se definen los movimientos del automóvil respecto del sistema de coordenadas. Posteriormente se estudia en detalle un componente fundamental: el neumático, propiedades mecánicas, curvas características e importancia de las mismas; a posteriori se analiza la conducta del vehículo en condiciones de reposo, aceleración, frenado y tránsito en curva; el chasis del vehículo, sus componentes y sus propiedades mecánicas más relevantes. Y en última instancia se hace una introducción a los sistemas de suspensión, fundamentalmente a los que equipan a un coche de Súper TC 2000.

## 5.2 Sistemas de referencia y movimientos del vehículo

En cualquier instante de tiempo, sobre un vehículo en movimiento actúan una serie de fuerzas cuyos orígenes obedecen a diferentes fenómenos físicos. Fuerzas desarrolladas por los neumáticos, aerodinámicas, gravitacionales actúan en diferentes sectores del coche y con diferentes direcciones relativas al chasis del vehículo.

Se requiere la definición de un sistema de coordenadas para poder referenciar aceleraciones, velocidades, fuerzas y momentos. Resulta conveniente adoptar la convención establecida por la Sociedad de Ingenieros Automotrices -SAE- la cual considera dos sistemas de referencia: un sistema inercial fijo en la tierra y otro vinculado al coche.

### 5.2.1 Sistema de referencia inercial fijo en la tierra

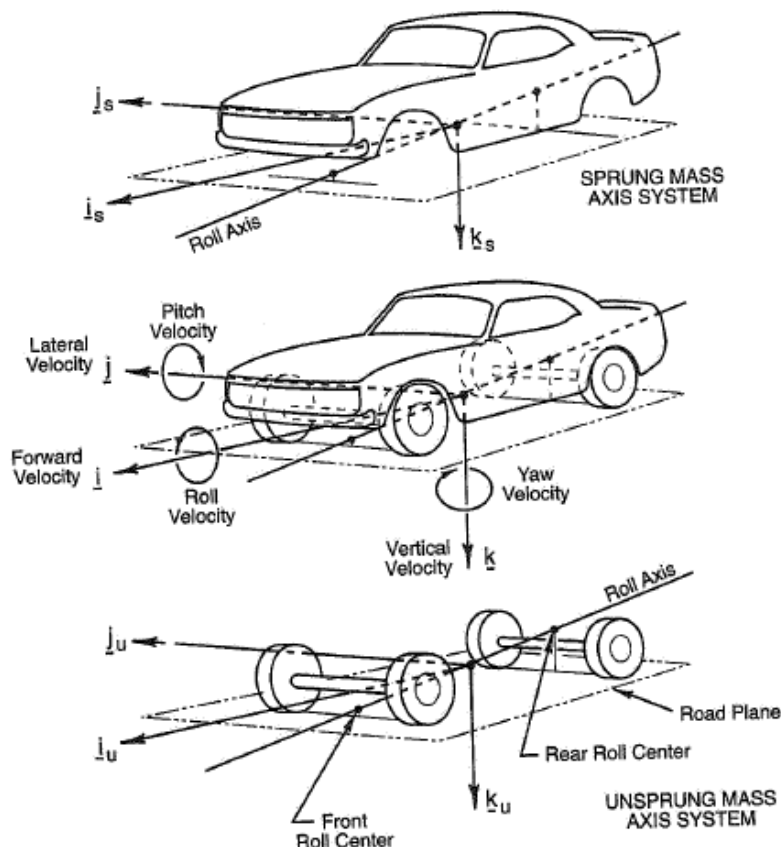
Es un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal fijo en la superficie terrestre, las letras  $X$ - $Y$ - $Z$  son empleadas para denotar las tres direcciones principales;  $X$  e  $Y$  conforman un plano horizontal mientras que  $Z$  es perpendicular a dicho plano. En problemas vinculados al movimiento de vehículos sobre la superficie terrestre es común que los orígenes de ambos sistemas de referencia sean coincidentes en el instante inicial.

### 5.2.2 Sistema de referencia del vehículo

El sistema de referencia del vehículo se encuentra fijo al coche y se mueve con él. Su definición es de suma utilidad ya que, por ejemplo, las propiedades de inercia permanecerán constantes respecto de él pero no si se mide dicha propiedad según el sistema fijo en la tierra.

Un automóvil es pensado como un sistema de dos masas: la masa suspendida y la no suspendida, ambas consideradas como un cuerpo rígido. Estos elementos másicos están articulados por el eje de rolido (roll axis) y mediante el ángulo de rolido

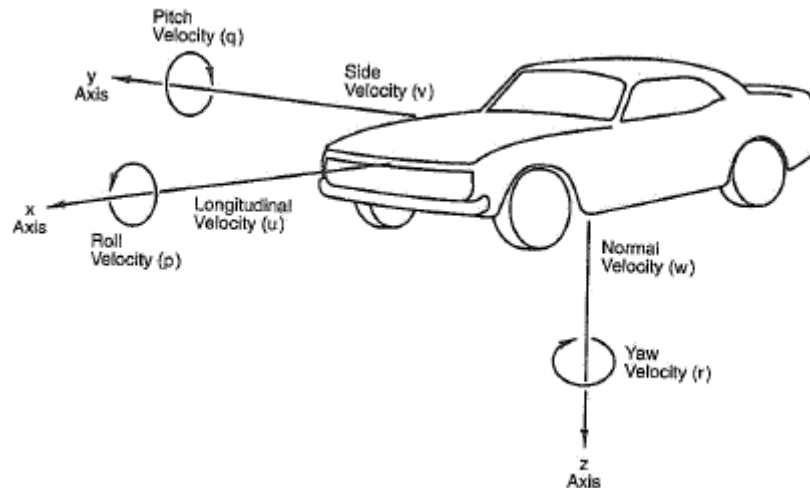
se especifica la relación entre ellas. En la Figura 5.1 se observa ambas masas por separado y que juntas constituyen el automóvil completo.



**Figura 5.1**  
Ejes utilizados en la definición del sistema de ejes vehicular (extraído Ref. [1]).

Los ejes  $i_s$  y  $i_u$  se unen en el automóvil completo y forman  $i$ , similarmente  $j_s$  y  $j_u$  convergen en  $j$  y  $k_s$  y  $k_u$  en  $k$ . En el sistema establecido por la SAE los ejes  $i, j$  y  $k$  son representados por  $x, y, z$ . El eje  $x$  es horizontal y positivo en la dirección de movimiento del coche cuando se mueve en línea recta, se ubica en el plano de simetría del vehículo. El eje  $y$  atraviesa transversalmente al automóvil y su dirección positiva es hacia la derecha del conductor. Finalmente el eje  $z$  es perpendicular al plano formado por los dos anterior y su dirección positiva es hacia abajo, apuntando hacia la superficie de la carretera. El origen del sistema de ejes vehicular es el mismo para la masa suspendida y la no suspendida como indica la Figura 5.2, está localizado en la intersección del eje de rolado del vehículo y una línea que atraviese el centro de

gravidad y sea perpendicular a la superficie de la carretera, para un ángulo cero de rolido de la masa suspendida.



**Figura 5.2**  
Sistema de ejes de un vehículo establecido por la SAE -Society of Automotive Engineers- (extraído Ref. [1]).

### 5.2.3 Movimientos del vehículo

En el estudio dinámico vehicular, resulta necesario definir ciertas variables como ser velocidad longitudinal, fuerza tractiva/frenado, aceleración o desaceleración longitudinal, entre otras. El movimiento de la masa no suspendida puede ser estudiado como una perturbación desde un estado de velocidad constante; igualmente el rolido de la masa suspendida se puede analizar en relación a la masa no suspendida. Las perturbaciones tienen orígenes diferentes, pueden iniciarse por una acción de control por parte del conductor, alteraciones ocasionadas por acción del viento, irregularidades del terreno. Para estudios sobre la estabilidad del automóvil resultan de interés las siguientes velocidades, mostradas en la Figura 5.2.

- ✓ Velocidad de avance (longitudinal velocity)  $u$
- ✓ Velocidad lateral (side velocity)  $v$
- ✓ Velocidad de guiñada (yaw velocity)  $r$
- ✓ Velocidad de rolido (roll velocity)  $p$

Para estudios de estabilidad se desprecia los movimientos de cabeceo (pitch velocity)  $q$  y desplazamiento vertical (normal velocity)  $w$ .

Las componentes de velocidad lineal y angular definidas en el sistema de ejes del vehículo debe ser medido respecto a un sistema fijo. Es conveniente pensar en un sistema ortogonal que coincida en todo instante de tiempo con el sistema del vehículo pero momentáneamente fijo en el espacio y así referenciar las velocidades a dicho sistema. Observando la Figura 5.3, la cual muestra un vehículo describiendo una trayectoria arbitraria, se definen las componentes de aceleración, fuerzas y momentos. El sistema X-Y representa el sistema fijo en la tierra, mientras que x-y fijo al coche.

- ✓ **Aceleración longitudinal  $a_x$ :** es la componente del vector aceleración de un punto del vehículo en la dirección x.
- ✓ **Aceleración lateral  $a_y$ :** es la componente del vector aceleración de un punto del vehículo en la dirección y.
- ✓ **Aceleración normal  $a_z$ :** es la componente del vector aceleración de un punto del vehículo en la dirección z.
- ✓ **Aceleración centrípeta  $a_c$ :** es la componente del vector aceleración de un punto del vehículo perpendicular a la tangente de la trayectoria descrita por dicho punto y paralelo al plano de la carretera.

En condiciones de estado estacionario, la aceleración lateral es igual al producto de la aceleración centrípeta por el coseno del ángulo de deriva.

- ✓ **Ángulo de dirección  $\psi$ :** es el ángulo formado entre el eje X del sistema fijo en la tierra y el eje x del vehículo sobre el plano X-Y.
- ✓ **Ángulo de deriva  $\alpha$ :** es el ángulo formado entre el eje x del vehículo y el vector velocidad de algún punto especificado del vehículo sobre el plano X-Y.
- ✓ **Ángulo de curso  $u$ :** es el ángulo entre el vector velocidad y el eje X del sistema fijo en la tierra.
- ✓ **Ángulo de rolido  $\phi$ :** es ángulo formado entre el eje y del vehículo y el plano de la tierra.
- ✓ **Ángulo de cabeceo  $\theta$ :** es el ángulo formado entre el eje x del vehículo y el plano de la tierra.

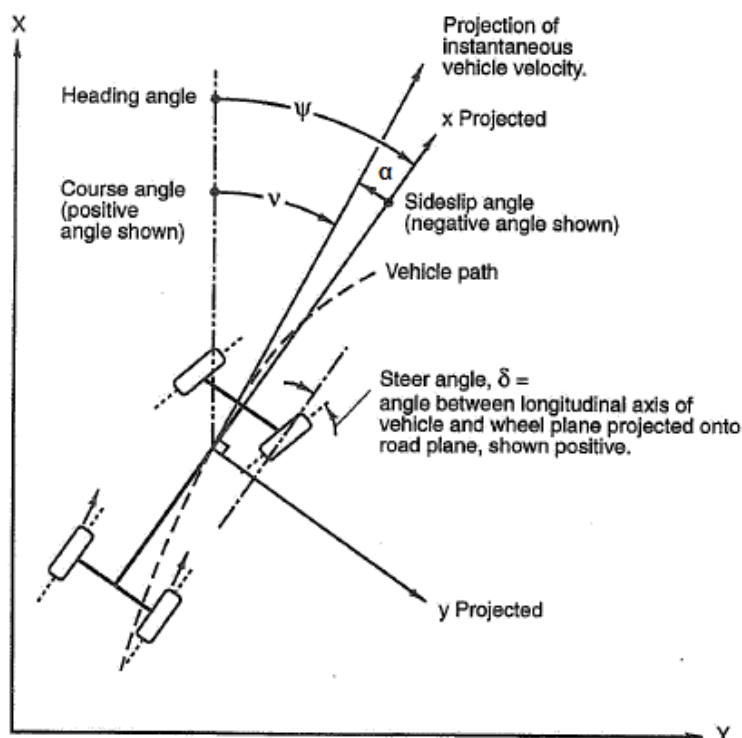


Figura 5.3  
Ángulos de dirección, patinamiento o deriva y de curso (extraído Ref. [1]).

Las fuerzas externas que actúan sobre el automóvil pueden ser resumidas en un vector fuerza con los siguientes componentes.

- ✓ **Fuerza longitudinal  $F_x$ :** es el componente del vector fuerza en la dirección x.
- ✓ **Fuerza lateral  $F_y$ :** es el componente del vector fuerza en la dirección y.
- ✓ **Fuerza normal  $F_z$ :** es el componente del vector fuerza en la dirección z.

Los momentos externos actuantes sobre el sobre el automóvil pueden resumirse en un vector momento con los siguientes componentes.

- ✓ **Momento de rolido  $M_x$ :** es el componente del vector momento tendiente a rotar el coche respecto al eje x, positivo en la dirección del eje x del vehículo.
- ✓ **Momento de cabeceo  $M_y$ :** es el componente del vector momento tendiente a rotar el vehículo respecto al eje y, positivo en la dirección y del sistema de ejes del vehículo.
- ✓ **Momento de guiñada  $M_z$ :** es el componente del vector momento tendiente a rotar el vehículo respecto al eje z, positivo en la dirección z del sistema de ejes del vehículo.



## 5.3 Dinámica de neumáticos

### 5.3.1 Introducción

Las ruedas representan un componente esencial de todo automóvil aunque revisten mayor importancia en un coche de carreras; sus funciones pueden resumirse en:

- ✓ soportar el peso del vehículo generando fuerzas verticales sobre la superficie de la carretera,
- ✓ generar sobre la superficie de rodadura fuerzas longitudinales capaces de mover o detener el vehículo,
- ✓ desarrollar fuerzas laterales para controlar la trayectoria del coche.

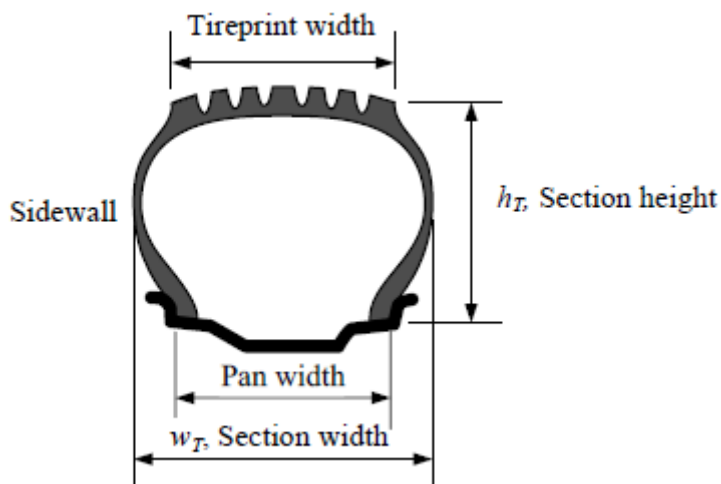
Las ruedas empleadas por los vehículos están compuestas por dos elementos: la llanta y el neumático. Las llantas se construyen de acero estampado o soldado, o bien magnesio, aluminio o una combinación de ambos con la finalidad de reducir su peso y obtener propiedades especiales. Poseen diferentes aberturas para permitir la refrigeración de los frenos y en su parte central orificios para vincular la rueda al portamasas del coche. Una característica única de ellas es que permite la sustitución rápida y sencilla del neumático. Sus dimensiones están normalizadas con el fin de ser intercambiables. Por otro lado, los neumáticos están constituidos por una estructura compuesta de caucho y una serie de materiales sintéticos. Cables de fibra y acero son algunos de los componentes que revisten el interior de los neumáticos permitiéndole disponer de rigidez adecuada para transferir los esfuerzos hacia la llanta. Posee compuestos adecuados para evitar la pérdida de aire y mantener la presión de inflado.

Una propiedad de un neumático es su relación de aspecto, definida como la relación entre la altura del perfil del neumático y el ancho del neumático.

$$R_a = \frac{h_t}{w_t} \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) permite determinar la relación de aspecto  $R_a$ ,  $w_t$  y  $h_t$  corresponden con el ancho del perfil y su altura respectivamente tal como muestra la

Figura 5.4. Un neumático con una relación de aspecto baja posee una rigidez de deriva  $C_a$  elevada, generando una mayor adherencia pero reduciendo el confort de marcha. Asimismo en la Figura 5.4 se muestra el ancho del parche de contacto, el ancho de la llanta y la pared lateral definidos por medio de los términos tireprint width, pan width y sidewall respectivamente provenientes del inglés.



**Figura 5.4**  
Sección esquemática de un neumático (extraído Ref. [2]).

La información más importante que se debe conocer sobre un neumático se ubica en su pared lateral. A modo de ejemplo se tiene.

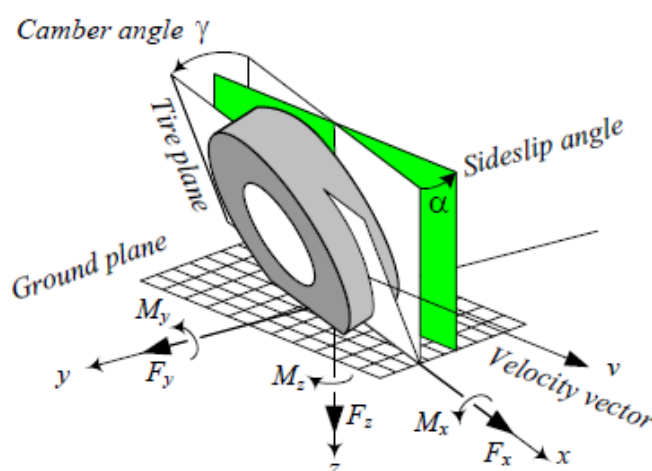
**P 215/ 60 R 15 96 H**

La primera letra representa el tipo de neumático, **P** corresponde a un vehículo de pasajeros. Otros tipos pueden ser **ST** (remolque especial), **T** (temporal), **LT** (camiones ligeros), entre otros. El siguiente número, en el ejemplo **215**, representa el ancho del neumático expresado en milímetros. El número siguiente, **60**, simboliza la relación de aspecto expresada en porcentaje, adopta valores que van desde 35 para coches de competición hasta 75 para utilitarios. La letra siguiente representa el tipo de construcción del neumático, **R** significa construcción radial, el número que la acompaña es el diámetro de la llanta expresado en pulgadas. El siguiente número, **96**, es el índice de carga que representa la capacidad de carga del neumático. Finalmente la última letra, en el ejemplo **H**, es la tasa de velocidad; indica la máxima velocidad que puede ser sometido el neumático durante diez minutos sin dañarse.

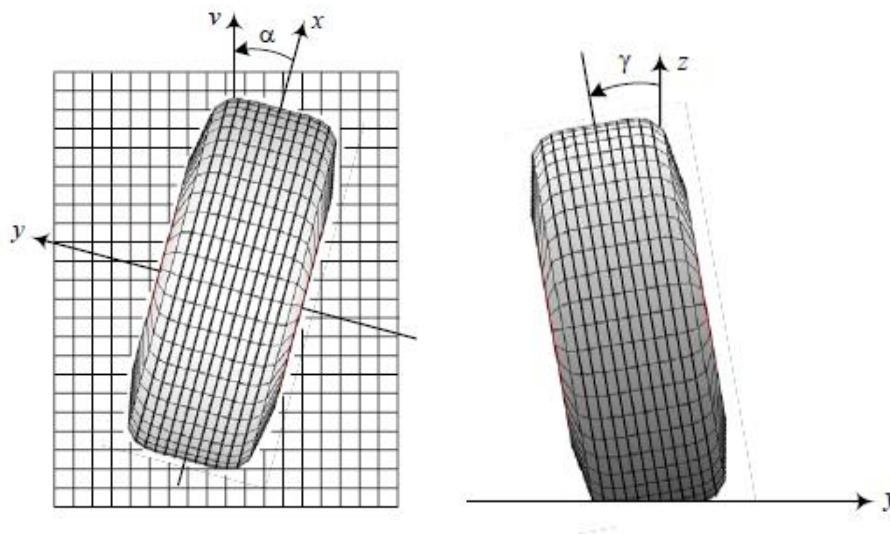
### 5.3.2 Sistema de referencia de la rueda

Para describir la interacción entre el neumático y la superficie de rodadura se requiere de un sistema referencia. Resulta adecuado adoptar el sistema de ejes establecido por la SAE. Su origen se sitúa en el centro del parche de contacto, definido como el punto de contacto teórico entre el neumático no deformado y el plano de la carretera. El eje  $x$  resulta de la intersección del plano de la rueda y el plano de la tierra, su dirección es positiva en el sentido de avance del vehículo; el eje  $z$  es perpendicular a la superficie de rodadura con dirección positiva en sentido de la aceleración gravitatoria; y finalmente el eje  $y$  se ubica en el plano de la tierra y es perpendicular al eje  $x$ . La Figura 5.5 muestra el sistema de ejes de la rueda, el plano de la tierra (ground plane), el plano del neumático (tire plane) y los ángulos característicos.

La orientación del neumático queda definida por el empleo de dos ángulos: el ángulo de deriva  $\alpha$  y el ángulo de comba  $\gamma$ . El primero de ellos es el comprendido entre el vector velocidad  $v$  y el eje  $x$  medido alrededor del eje  $z$ ; el segundo es el ángulo conformado por el plano de la rueda y el plano vertical medido entorno al eje  $x$ . La Figura 5.6 muestra una vista superior de un neumático donde se observa el ángulo de deriva y una vista frontal donde se reconoce el ángulo de comba. Por convención se considera un ángulo de deriva  $\alpha$  positivo cuando la rueda patina hacia la derecha y un ángulo de comba  $\gamma$  positivo cuando el neumático se inclina hacia la derecha. En la Figura 5.6 tanto la comba como la deriva son negativas.



**Figura 5.5**  
Sistema de referencia de la rueda (extraído Ref. [2]).

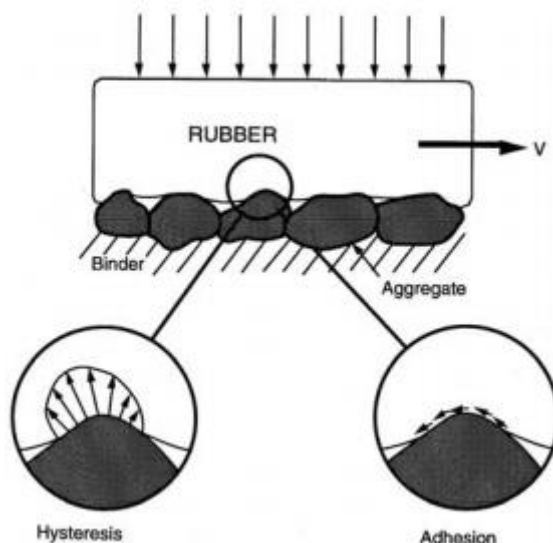


**Figura 5.6**  
Izquierda: vista superior, definición ángulo de deriva. Derecha: vista frontal, definición ángulo de comba (extraído Ref. [2]).

### 5.3.3 Sistema de fuerzas sobre el neumático

Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el vehículo son la gravitatoria, las aerodinámicas y las fuerzas sobre los neumáticos. Estas últimas surgen de la interacción del neumático con la carretera. La Figura 5.7 muestra un neumático, representado por un rectángulo, con cierta carga normal en contacto con una carretera asfáltica; en dicha figura se presentan los mecanismos principales de adherencia del neumático al terreno. Estos mecanismos son la adhesión a nivel intermolecular entre el caucho y la carretera y la histéresis debida a la deformación del neumático. En superficies secas, el fenómeno predominante es la adhesión intermolecular, pero a medida que se moja la superficie de rodadura este mecanismo disminuye su intensidad. La histéresis representa una pérdida de energía por parte del caucho a medida que se deforma cuando desliza sobre el asfalto. Este fenómeno no se ve tan afectado por la presencia de agua, motivo por el cual se obtiene una mejor tracción con neumáticos de gran histéresis en superficies húmedas.

El sistema de fuerzas que un neumático recibe desde la superficie de rodadura se supone que está aplicado en el centro del parche de contacto y puede ser descompuesto a lo largo de las tres direcciones x-y-z generando un sistema formado por tres fuerzas y tres momentos tal como muestra la Figura 5.5.



**Figura 5.7**  
Mecanismo de adherencia neumático-carretera (extraído Ref. [3]).

### Fuerza longitudinal $F_x$

Cuando un vehículo se encuentra acelerando o frenando se desarrollan fuerzas longitudinales entre el neumático y la carretera, más precisamente en el parche de contacto. De acuerdo al sistema de referencia adoptado,  $F_x$  es mayor a cero cuando el coche acelera y menor a cero en condiciones de frenado.

La Figura 5.8 muestra una vista lateral de un neumático, cuyo eje de giro se encuentra fijo, apoyado sobre una plataforma que se desplaza a una velocidad de magnitud  $V$ . La situación representa a un neumático real de radio  $R$  rodando con una velocidad angular  $\Omega$  hacia adelante como consecuencia de la acción de un momento torsor  $M_t$ . Este torque genera una fuerza tractiva  $F_t$  en el parche de contacto que produce una compresión de los elementos de caucho de la región delantera  $C_1$  del neumático; asimismo hay tensión longitudinal por el simple hecho de que la rueda gire libremente como consecuencia de que el radio de la misma cambia a medida que los elementos de caucho entran en contacto con la plataforma. En conclusión se desarrolla un perfil de tensiones longitudinales en el parche de contacto; la curva 1 muestra la distribución generada por el giro libre del neumático, la curva 2 la generada por el torque  $M_t$  y la curva 3 es una combinación de ambas. En la región trasera del parche de contacto la tensión disminuye bruscamente, originando un deslizamiento entre el neumático y la carretera. Debido a este deslizamiento la velocidad angular de

una rueda tractora es menor que la de una rueda girando libremente. En la región  $C_2$  los elementos de caucho se encuentran descomprimidos. Una explicación análoga se puede efectuar para una situación de frenado, en dicho caso se produce un estiramiento de los elementos de caucho situados en la región delantera.

### Fuerza lateral $F_y$

Una de las funciones más importantes de un neumático es desarrollar fuerzas laterales  $F_y$  capaces de controlar o cambiar la dirección del coche y resistir fuerzas externas como ser ráfagas de vientos o las creadas por una carretera inclinada. Estas fuerzas se originan por un deslizamiento lateral (ángulo de deriva  $\alpha$ ), una inclinación lateral de la rueda (ángulo de comba  $\gamma$ ) o una combinación de ambas. La fuerza  $F_y$  actúa en el área de contacto entre la rueda y la carretera, está contenida en el plano horizontal de rodadura y es perpendicular a la dirección de la rueda sólo cuando la deriva y la comba son nulas.

Cuando la rueda gira, los elementos de la banda de rodadura entran en contacto con la carretera. Si la dirección de avance es diferente a la dirección de la rueda las partículas del neumático se alejan y se deforman respecto de la rueda. Debido a este proceso, la fuerza lateral aumenta a medida que los elementos pasan de la región delantera del parche de contacto hacia la trasera. La Figura 5.9 muestra la distribución de las fuerzas laterales en el parche de contacto (contact patch) como así también la región de patinamiento (slip región). Debido a la asimetría de esta distribución la resultante se ubica en la región trasera de la zona de contacto a una cierta distancia del eje de la rueda denominada avance neumático (pneumatic trail).

### Fuerza normal $F_z$

La fuerza normal, conocida como carga normal, es muy importante en un vehículo, fundamentalmente en los coches de competición que operan en condiciones límites. La fuerza lateral  $F_y$  y la longitudinal  $F_x$  que desarrollan los neumáticos de un automóvil son función, entre otras variables, de la carga normal actuante sobre la rueda. Es posible distinguir:

- ✓ Fuerza normal estática: esfuerzo normal que actúa en cada neumático debido al peso propio del vehículo (ver punto 5.5.2).

- ✓ Fuerza normal dinámica: estado de carga de cada neumático en condiciones de operación del automóvil (ver punto 5.5.3 y 5.5.4).

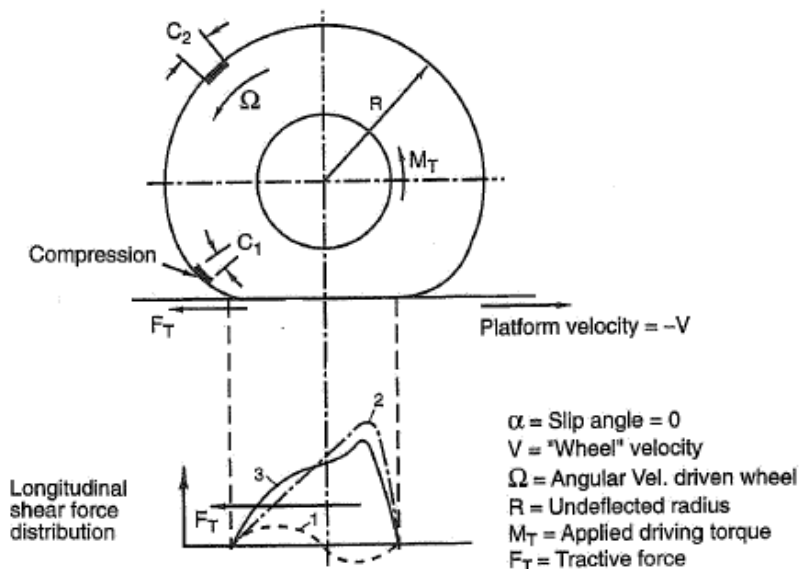


Figura 5.8  
 Comportamiento elástico de un neumático (extraído Ref. [1]).

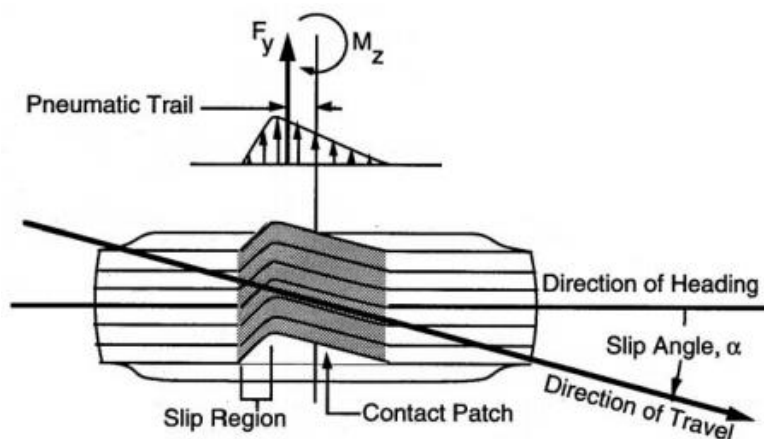


Figura 5.9  
 Distribución de fuerzas laterales desarrolladas por un neumático (extraído Ref. [3]).

### Momento autoalineante $M_z$

En el presente capítulo se ha visto que la fuerza lateral  $F_y$  desarrollada por un neumático se distribuye sobre el parche de contacto según un perfil triangular mostrado en la Figura 5.9. Es posible concentrar dicha distribución de esfuerzos en una fuerza resultante ubicada a una cierta distancia  $t_r$  del eje vertical de rotación de la rueda. Esta fuerza multiplicada por la distancia  $t_r$ , conocida como avance neumático,

origina un momento que tiende a alinear la rueda con la dirección de movimiento y por ello se conoce como par autoalineante. En la Figura 5.9 se muestra la fuerza resultante  $F_y$  ubicada en el centro de presión. A bajos y medios ángulos de deriva el neumático trata de alinear su eje con la dirección de movimiento; este es un efecto estabilizador.

### Momento de vuelco $M_x$

El momento de vuelco respecto del eje  $x$  está presente siempre que la fuerza de reacción de la carretera  $F_{zR}$  no se encuentre en el plano de carga de la rueda. Esto sucede cuando existe una fuerza lateral que genera una distorsión del neumático en tal dirección. La fuerza reactiva está fuera del plano  $x-z$  pero el equilibrio vertical debe ser igual a  $F_z$ . El momento de vuelco resulta del producto de la fuerza  $F_z$  por la distancia  $\varepsilon$  al eje vertical, siempre que el ángulo de comba sea nulo. Cuando el ángulo de deriva y la comba son no nulos se desarrollan fuerzas laterales originando una distorsión en el parche de contacto y el desplazamiento lateral de  $F_{zR}$ . El cálculo del mencionado par generalmente se obtiene de ensayos reales en laboratorios. La Figura 5.10 muestra una vista del neumático desde el plano  $x-z$  donde se observan los componentes del momento de vuelco.

### Momento resistente a rolido $M_y$

El término momento resistente a rolido es utilizado para definir la resistencia al movimiento de avance de una rueda rodando libremente. La rodadura libre de la rueda se define como una que se remolca en posición vertical con todos los momentos aplicados sobre los ejes de giro de la rueda aproximadamente iguales a cero.

En la Figura 5.11, la fuerza  $F_T$  es la requerida para hacer rodar el neumático a velocidad constante  $V$ ;  $F_R$  es la fuerza resistente a rolido y es igual y opuesta a  $F_T$ . La carga normal  $F_z$  es igual pero opuesta a la reacción vertical  $F_{zR}$ . Asumiendo un torque  $T$  nulo, la reacción resultante de sumar vectorialmente  $F_R$  y  $F_{zR}$  debe pasar a través del eje de giro de la rueda; la distancia  $d$  es donde  $F_{zR}$  intercepta al plano de la carretera. Si  $F_R$  fuera nulo  $F_z$  y  $F_{zR}$  serían colineales, pero debido a la expansión y compresión del caucho que provoca un consumo de energía  $F_R$  no es cero. Tomando momento respecto del eje de giro es posible el cálculo de  $d$ .



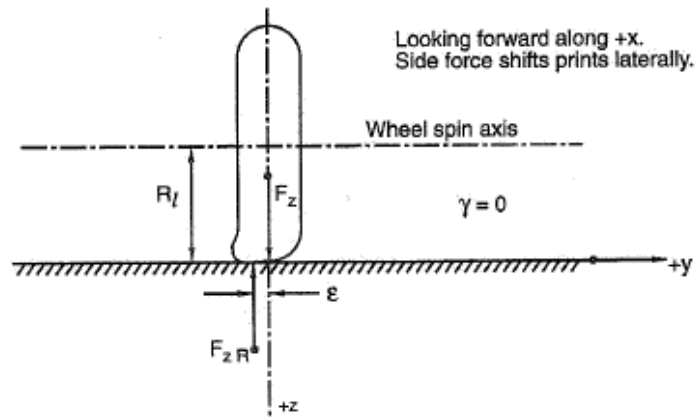


Figura 5.10 Momento de vuelco desarrollado por un neumático (extraído Ref. [1]).

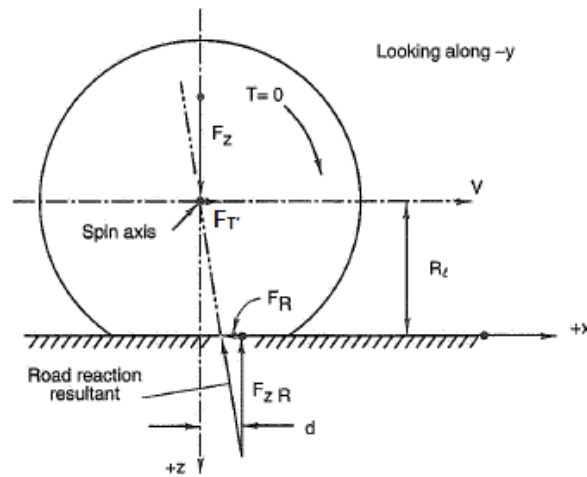


Figura 5.11 Rueda girando libremente (extraído Ref. [1]).

$$F_z d = F_R R_l \quad (5.2)$$

$$d = \frac{F_R R_l}{F_z} \quad (5.3)$$

Según los autores W.F. Milliken y D.L. Milliken la fuerza resistente  $F_R$  está dada por la siguiente expresión.

$$F_R = \left[ (SR + 1) \left( \frac{M_t}{R_l} \right) - F_x \right] \cos \alpha - F_y \sin \alpha \quad (5.4)$$

$$SR = \frac{\Omega R_l}{V} - 1 \quad (5.5)$$

Dónde:

- ✓  $SR$  es la relación de patinamiento (adimensional),
- ✓  $F_x$  es la fuerza tractiva o de frenado,
- ✓  $\Omega$  la velocidad angular del neumático,
- ✓  $V$  la velocidad lineal,
- ✓  $R_l$  radio de carga,
- ✓  $M_t$  torque aplicado al neumático,
- ✓  $\alpha$  ángulo de deriva.

Finalmente el momento resistente  $M_y$  está dado por medio la ecuación (5.6).

$$M_y = F_R R_l \quad (5.6)$$

### 5.3.4 Propiedades mecánicas y curvas características

El comportamiento de deformación de un neumático debido a la aplicación de fuerzas en cualquiera de las tres direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$  constituye una característica importante en el análisis dinámico.

Como una primera aproximación la fuerza vertical  $F_z$  puede ser calculada como una función lineal de la deflexión normal  $\Delta_z$  del neumático, medida en el centro de la rueda. La ecuación (5.7) permite el cálculo de la fuerza normal.

$$F_z = k_z \Delta_z \quad (5.7)$$

El coeficiente  $k_z$  se denomina rigidez del neumático en la dirección  $z$ . Para las restantes direcciones es posible plantear ecuaciones similares; las fuerzas  $F_x$  y  $F_y$  pueden aproximarse mediante las ecuaciones (5.8) y (5.9) donde  $k_x$  y  $k_y$  representan la rigidez longitudinal y lateral respectivamente.

$$F_x = k_x \Delta_x \quad (5.8)$$

$$F_y = k_y \Delta_y \quad (5.9)$$

El cálculo de las magnitudes de rigidez se basa en mediciones experimentales, son dependientes de los materiales constituyentes del neumático como así también de las características medio ambientales.

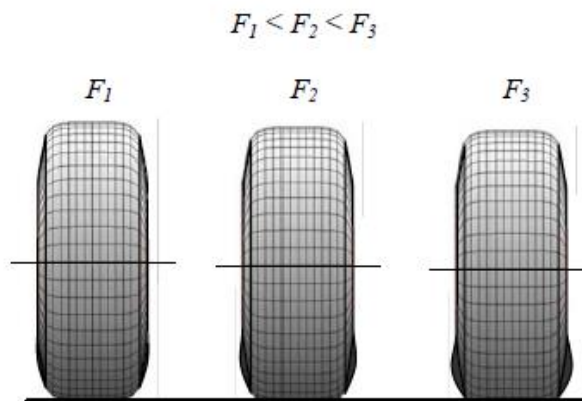
Si se considera una rueda cargada verticalmente sobre una superficie plana y dura como muestra la Figura 5.12 el neumático experimentará una deflexión. Debido a la carga normal se desarrolla una distribución de presiones en el área de contacto para equilibrar la mencionada carga. La curva experimental de la Figura 5.13 representa la relación entre  $F_z$  y  $\Delta_z$ . Matemáticamente dicha relación se expresa por medio de la ecuación (5.10).

$$F_z = f(\Delta_z) \quad (5.10)$$

Para el rango usual de aplicación  $F_z$  se puede aproximar mediante una función lineal tal como muestra la ecuación (5.11).

$$F_z = \frac{\partial f}{\partial \Delta_z} \Delta_z \quad (5.11)$$

El coeficiente  $\frac{\partial f}{\partial \Delta_z}$  es la pendiente de la curva experimental de la Figura 5.13 para una deflexión nula y representa el coeficiente de rigidez  $k_z$  como muestra la ecuación (5.12). El ángulo  $\kappa$  es el comprendido entre la curva de carga normal versus deflexión y el eje horizontal.



**Figura 5.12**  
Neumático cargado verticalmente con comba nula (extraído Ref. [2]).

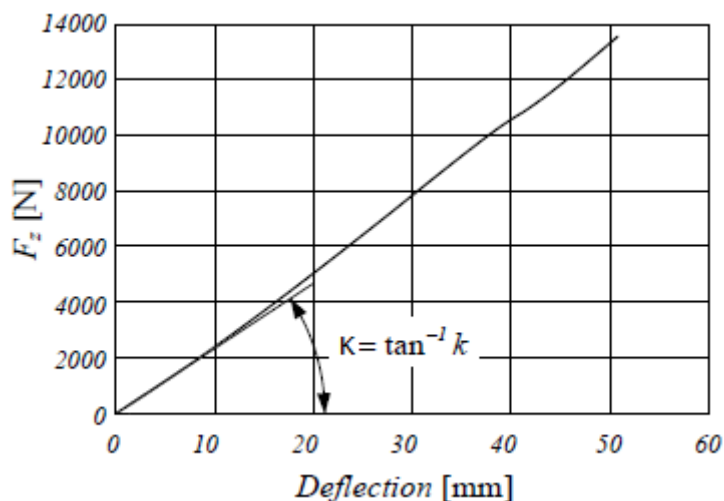


Figura 5.13  
 Curva de  $F_z$  vs  $\Delta_z$  (extraído Ref. [2]).

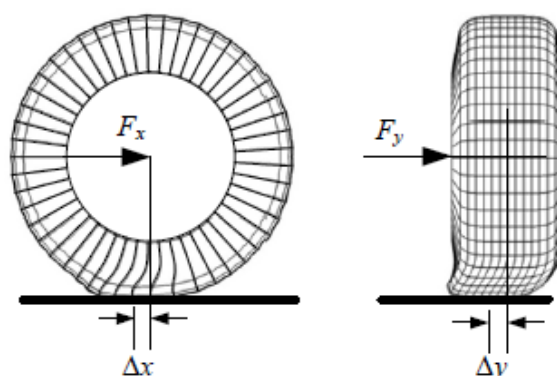
$$k_z = \tan \kappa = \lim_{\Delta_z \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \Delta_z} \quad (5.12)$$

El neumático ejerce solamente fuerzas de presión sobre la carretera, por lo tanto siempre  $F_z$  es mayor a cero. La rigidez vertical está influenciada por muchos parámetro pero la presión de inflado es el más significativo.

El comportamiento lateral y longitudinal del neumático se determina experimentalmente mediante la aplicación de fuerzas en la dirección apropiada. Las fuerzas lateral y longitudinal están limitadas por el patinamiento del neumático, el cual depende de la carga vertical actuante. La Figura 5.14 muestra dos neumáticos cargados longitudinalmente y lateralmente; estas fuerzas se determinan mediante las ecuaciones (5.8) y (5.9) de manera similar a la fuerza vertical. Del mismo modo ocurre con los coeficientes de rigidez, definidos por las ecuaciones (5.13) y (5.14).

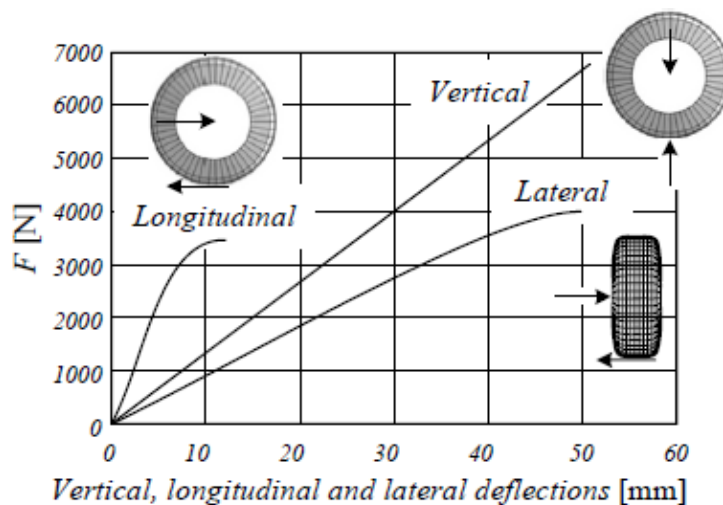
$$k_x = \lim_{\Delta_x \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \Delta_x} \quad (5.13)$$

$$k_y = \lim_{\Delta_y \rightarrow 0} \frac{\partial f}{\partial \Delta_y} \quad (5.14)$$



**Figura 5.14**  
 Deformación longitudinal y lateral (extraído Ref. [2]).

La Figura 5.15 permite comparar las tres curvas de fuerza versus deflexión; a través del análisis de las pendientes de las gráficas en el origen del sistema de referencia se deduce que la rigidez longitudinal del neumático es mayor que la lateral y esta menor que la vertical. Este efecto predomina en la mayoría de los neumáticos.



**Figura 5.15**  
 Comparación de las curvas de fuerzas versus deformación para las direcciones x, y, z (extraído Ref. [2]).

El comportamiento dinámico de un neumático puede ser estudiado a partir de las curvas características del mismo. Uno de los mayores inconvenientes es obtener información segura sobre estas curvas, fundamentalmente en el área de competición. Muchos fabricantes ejecutan ensayos en laboratorios, midiendo fuerzas y momentos desarrollados por sus productos y de esta manera generar datos a fin de brindarle al usuario información adecuada. Por otro lado, los grandes equipos de competición invierten sumas considerables de dinero para realizar estudios de los diferentes

neumáticos empleados. Específicamente las curvas características de uso corriente son:

- ✓ Fuerza lateral versus ángulo de deriva ( $F_y$  vs  $\alpha$ ),
- ✓ coeficiente de fricción lateral versus ángulo de deriva ( $\mu_y$  vs  $\alpha$ ),
- ✓ momento autoalineante versus ángulo de deriva ( $M_z$  vs  $\alpha$ ),
- ✓ fuerza lateral versus fuerza normal ( $F_y$  vs  $F_z$ ),
- ✓ fuerza longitudinal (tracción o frenado) versus ángulo de deriva ( $F_x$  vs  $\alpha$ ),
- ✓ círculo de fricción.

Estas curvas generalmente se grafican tomando como parámetro alguna variable como ser el ángulo de deriva, ángulo de comba, fuerza normal, entre otras.

### Fuerza lateral Vs Ángulo de deriva ( $F_y$ vs $\alpha$ )

La Figura 5.16 representa la relación existente entre la fuerza lateral  $F_y$  y el ángulo de deriva  $\alpha$  para un cierto valor de carga normal. En la curva se distinguen tres regiones: elástica o lineal, de transición y de fricción. El valor máximo de fuerza lateral se alcanza para un ángulo de deriva comprendido entre los  $6^\circ$  y  $7^\circ$  para una carretera seca, mientras que para una superficie húmeda el valor máximo se obtiene para magnitudes inferiores de  $\alpha$ . La zona de trabajo del neumático corresponde a la situada a la izquierda del pico de la curva, ya que hacia la derecha de dicho valor se produce una brusca disminución de la fuerza lateral  $F_y$  originando una pérdida de adherencia. Para la zona lineal es posible aproximar el valor de fuerza lateral mediante la ecuación (5.15).

$$F_y = C_\alpha \alpha \quad (5.15)$$

$$C_\alpha = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial F_y}{\partial \Delta\alpha} \quad (5.16)$$

Donde  $C_\alpha$  es la rigidez de deriva del neumático determinada para un ángulo de deriva nulo. En este caso, la comba se considera nula, pero sin embargo en la práctica su valor no es nulo e influye en la fuerza lateral. Por lo tanto, a la expresión anterior hay que sumarle un término adicional tal como muestra la ecuación (5.17) en la cual  $C_\gamma$  es la rigidez de comba.

$$F_y = C_\alpha \alpha + C_\gamma \gamma \quad (5.17)$$

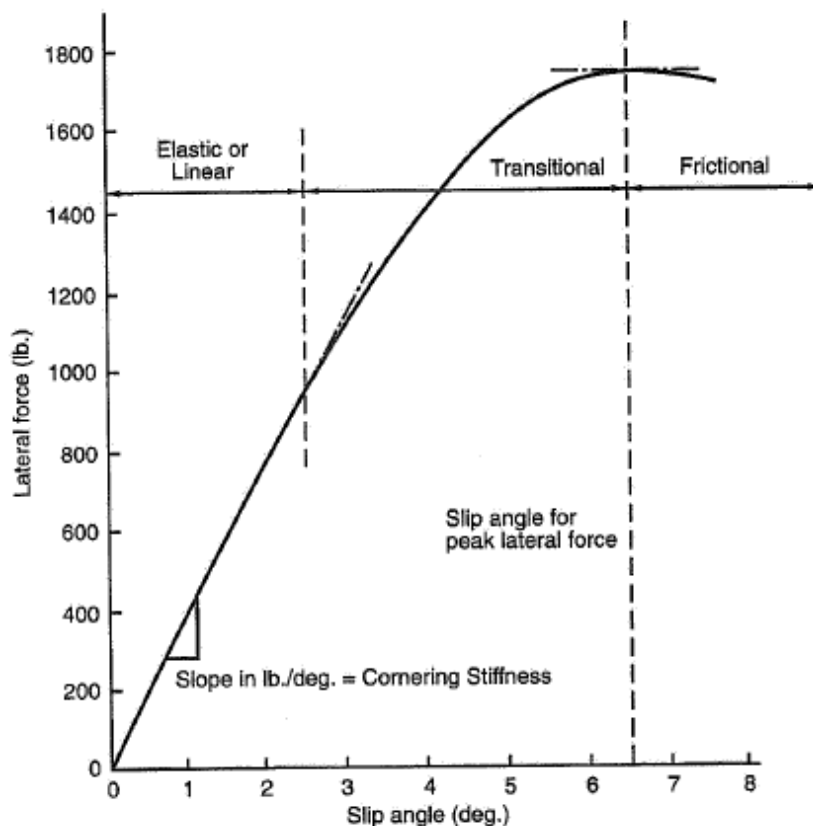


Figura 5.16

Fuerza lateral versus ángulo de deriva para un neumático de competición (extraído Ref. [1]).

Es particularmente útil analizar el comportamiento de esta curva para diferentes valores de carga normal  $F_z$ . En la Figura 5.17 se toma a  $F_z$  como parámetro; a medida que se incrementa  $F_z$  los máximos de fuerza lateral  $F_y$  se desplazan hacia ángulos de deriva  $\alpha$  mayores. Asimismo las magnitudes de  $F_y$  se incrementan y la pendiente en la zona elástica es mayor. Cuando los ángulos de deriva son mayores al que origina la fuerza lateral máxima se dice que el neumático entra en crisis comenzando a deslizar sobre la carretera. Esto se debe a la caída brusca de la magnitud de  $F_y$ , la cual no puede contrarrestar las fuerzas inerciales desarrolladas por el coche al tomar una trayectoria curva o producirse un cambio de dirección. Las curvas de la Figura 5.16 y Figura 5.17 corresponden a ángulos de comba y nulos. Posteriormente se tratará la influencia de esta variable en la fuerza lateral  $F_y$ .

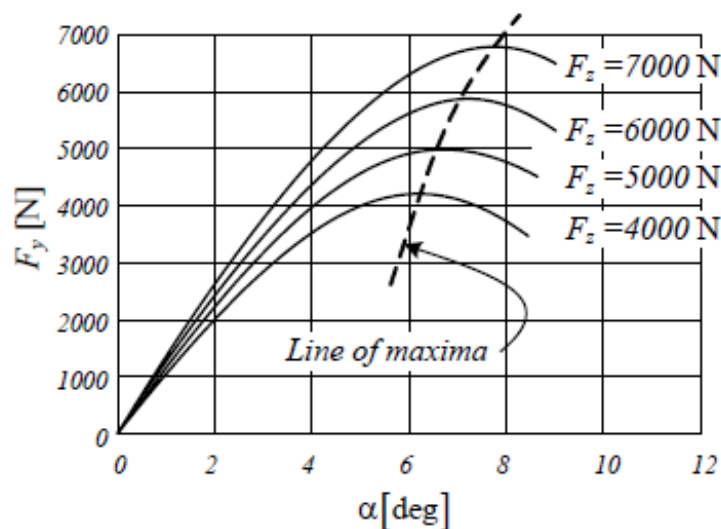


Figura 5.17  
Fuerza lateral versus ángulo de deriva para diferentes valores de carga normal (extraído Ref. [2]).

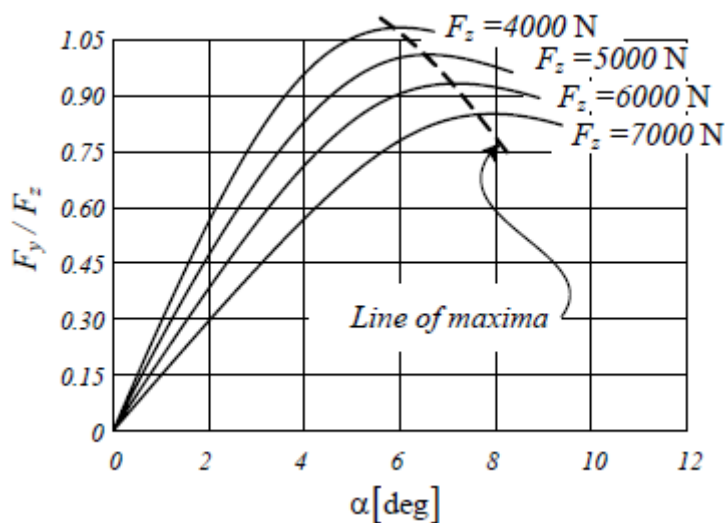
### Coeficiente de fricción lateral Vs ángulo de deriva ( $\mu_y$ vs $\alpha$ )

Una vez superado el pico de la curva  $F_y$  vs  $\alpha$  se ingresa la zona de fricción donde el neumático desliza lateralmente sobre la superficie de rodadura. La fuerza lateral máxima se alcanza en el instante antes que comience el deslizamiento. Se define mediante la ecuación (5.18) el coeficiente de fricción lateral  $\mu_y$ . Esta variable es adimensional y representa el cociente entre la fuerza lateral y la carga normal.

$$\mu_y = \frac{F_y}{F_z} \quad (5.18)$$

En la Figura 5.18 se grafica el coeficiente de fricción lateral de un neumático  $\mu_y$  en función del ángulo de deriva  $\alpha$  tomando como parámetro la carga normal  $F_z$ . Los valores máximos de  $\mu_y$  adquieren magnitudes mayores a medida que se reduce la carga normal, efecto conocido como sensibilidad de carga del neumático. Esta sensibilidad adquiere importancia en un coche de competición debido a que opera cerca del límite de fricción; como la carga normal varía continuamente debido a la aceleración, frenado, estado de curva, la performance del neumático está cambiando constantemente.





**Figura 5.18**  
Coeficiente de fricción lateral versus ángulo de deriva para diferentes valores de carga normal (extraído Ref. [2]).

### Fuerza lateral Vs carga normal ( $F_y$ vs $F_z$ )

Otra manera de representar el comportamiento de un neumático consiste en graficar la fuerza lateral  $F_y$  desarrollada en función de la carga normal  $F_z$ . En este caso se toma como parámetro de curva el ángulo de deriva  $\alpha$  y el ángulo de comba  $\gamma$ . La Figura 5.19 muestra cómo varía la fuerza lateral con la carga normal empleando como parámetro el ángulo de deriva; todas las curvas son no lineales, la fuerza  $F_y$  cae para cargas elevadas. Se nota que la pendiente de las curvas se incrementa a medida que aumenta el ángulo de deriva. Por otra parte, en la Figura 5.20 el parámetro adoptado es el ángulo de comba  $\gamma$ ; presenta un comportamiento similar al de la figura anterior. Para una misma carga normal la fuerza lateral desarrollada se incrementa con el ángulo de comba; asimismo la pendiente de las diferentes curvas son mayores al aumentar  $\gamma$ .

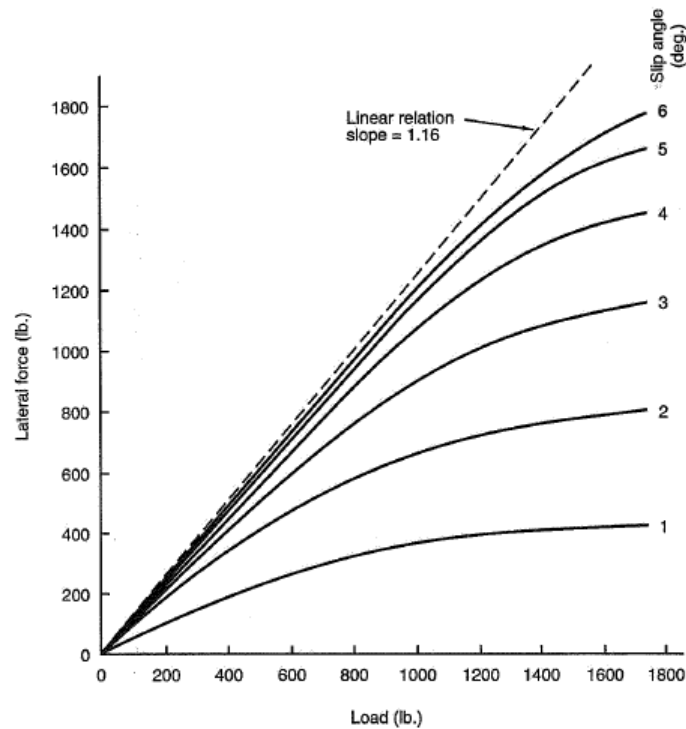


Figura 5.19 Fuerza lateral versus fuerza normal tomando como parámetro el ángulo de deriva (extraído Ref. [1]).

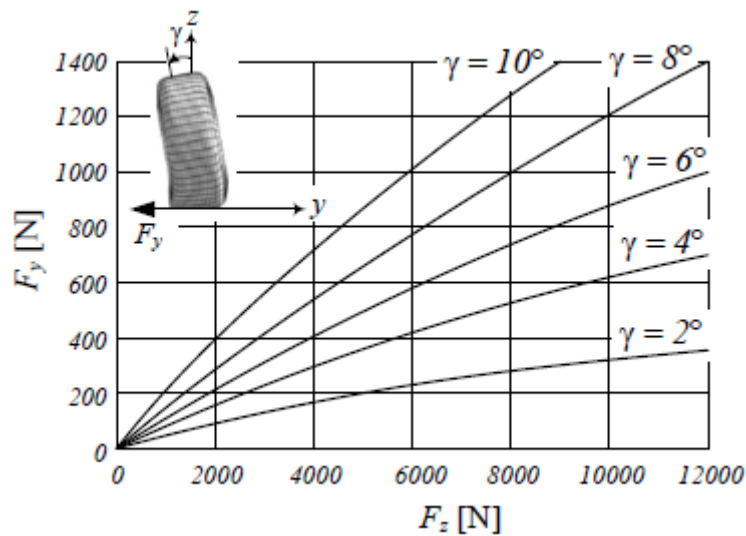


Figura 5.20 Fuerza lateral versus fuerza normal tomando como parámetro el ángulo de comba (extraído Ref. [2]).

### Momento autoalineante Vs ángulo de deriva ( $M_z$ vs $\alpha$ )

El momento autoalineante, como ya se ha mencionado, tiende a alinear el neumático con la dirección de movimiento. Para un valor constante de carga normal  $F_z$  el momento autoalineante se incrementa con el ángulo de deriva  $\alpha$  hasta alcanzar

su valor máximo. Los valores picos de cada curva mostrada en la Figura 5.21 se desplazan hacia la derecha con el incremento de la carga normal  $F_z$ . En el límite de fricción se produce una brusca disminución del torque autoalineante tomando valores cercanos a cero e incluso alcanzando en muchos casos una magnitud negativa.

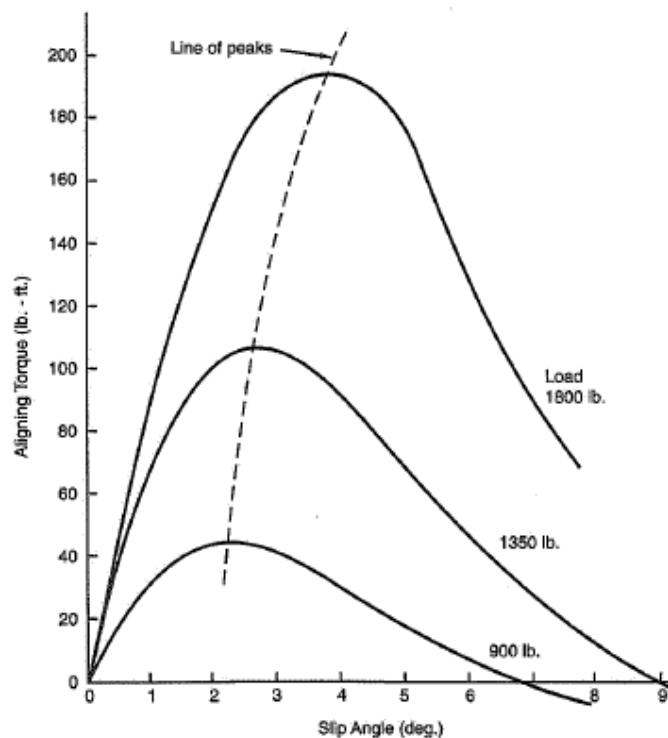


Figura 5.21  
Torque autoalineante versus ángulo de deriva para varias cargas normales (extraído Ref. [1]).

### Fuerza longitudinal Vs ángulo de deriva ( $F_x$ vs $\alpha$ )

Hasta el momento se ha presentado curvas que permiten extraer información sobre la fuerza lateral  $F_y$  desarrollada por el neumático para determinadas condiciones. Sin embargo, el neumático debe ser capaz de resistir fuerzas longitudinales  $F_x$  de frenado o de tracción sin producirse un patinamiento respecto de la superficie de rodadura. En las Figura 5.22 se grafica la fuerza longitudinal de tracción y de frenado en función del ángulo de deriva  $\alpha$  para una carga normal  $F_z$  fija; se toma para su construcción la relación de patinamiento  $SR$  como parámetro, en ambos casos la fuerza longitudinal  $F_x$  se reduce con el incremento del ángulo de deriva  $\alpha$ .

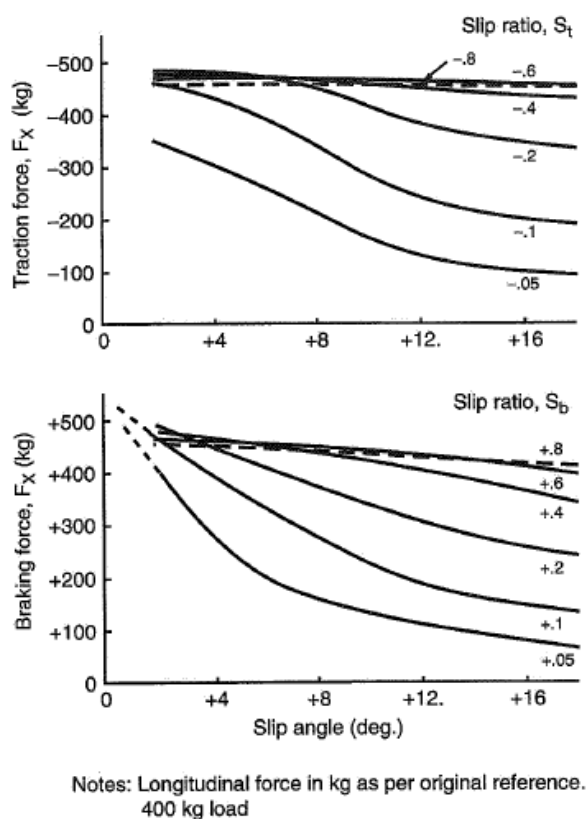


Figura 5.22

Fuerza longitudinal versus ángulo de deriva para diferentes relaciones de desplazamiento (extraído Ref. [1]).

### Círculo de fricción

El círculo de fricción es un diagrama que combina fuerzas laterales y longitudinales, comprime toda la información mencionada en las curvas definidas con anterioridad; representa la fuerza límite producida por el neumático para ciertas condiciones de operación. La Figura 5.23 muestra la parte derecha del círculo de fricción, en el eje horizontal se grafica la fuerza lateral  $F_y$  y en el vertical la longitudinal  $F_x$  para una serie de ángulos de deriva  $\alpha$  y relaciones de deslizamiento  $SR$ . Constituye un diagrama sumamente interesante en el desarrollo de automóviles de competición, sin embargo los ensayos de neumáticos no son ejecutados comúnmente por los fabricantes y no existe información disponible.

El origen del diagrama representa un neumático rodando libremente donde las fuerzas desarrolladas, el ángulo de deriva y la relación de patinamiento adquieren valores nulos. Moviéndose hacia la derecha, a lo largo del eje horizontal, se incrementa la fuerza lateral a medida que se cortan las diferentes curvas

representativas de los distintos ángulos de deriva. Un desplazamiento desde el origen a través del eje vertical produce un aumento de la fuerza longitudinal atravesando curvas vinculadas a diferentes valores de relación de deslizamiento. La parte interesante de este diagrama se sitúa fuera de los ejes, donde se representa un estado de aceleración o frenado y el desarrollo de una fuerza lateral. Por ejemplo, el punto A sobre el diagrama muestra una situación de frenado en curva generando una fuerza longitudinal de 500 [lbf], una fuerza lateral de 800 [lbf] para un ángulo de deriva de 4 [°] y una relación de patinamiento de +0,036 aproximadamente.

En competición, el neumático opera cerca los límites del círculo de fricción. El punto C se ubica sobre el límite y reproduce una situación de aceleración en curva. Mediante la aplicación del teorema de Pitágoras se obtiene la fuerza resultante tal como muestra la ecuación (5.19).

$$F_{resultante} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (5.19)$$

Es posible observar en la Figura 5.23 que la fuerza longitudinal máxima posee la misma magnitud que la fuerza lateral máxima. Sin embargo en la mayoría de los casos no existe una coincidencia de estas magnitudes y el círculo de fricción se convierte en una elipse de fricción. Cada gráfico se construye para una carga normal única sobre el neumático. En ciertas ocasiones en vez de graficar fuerzas longitudinales y laterales se representa el coeficiente de rozamiento longitudinal  $\mu_x$  en el eje vertical y el coeficiente de rozamiento lateral  $\mu_y$  en el eje horizontal. A partir de ello se determina  $F_x$  y  $F_y$  mediante las ecuaciones (5.20) y (5.21). La ecuación (5.22) define el coeficiente de rozamiento longitudinal  $\mu_x$ .

$$F_x = \mu_x F_z \quad (5.20)$$

$$F_y = \mu_y F_z \quad (5.21)$$

$$\mu_x = \frac{F_x}{F_z} \quad (5.22)$$

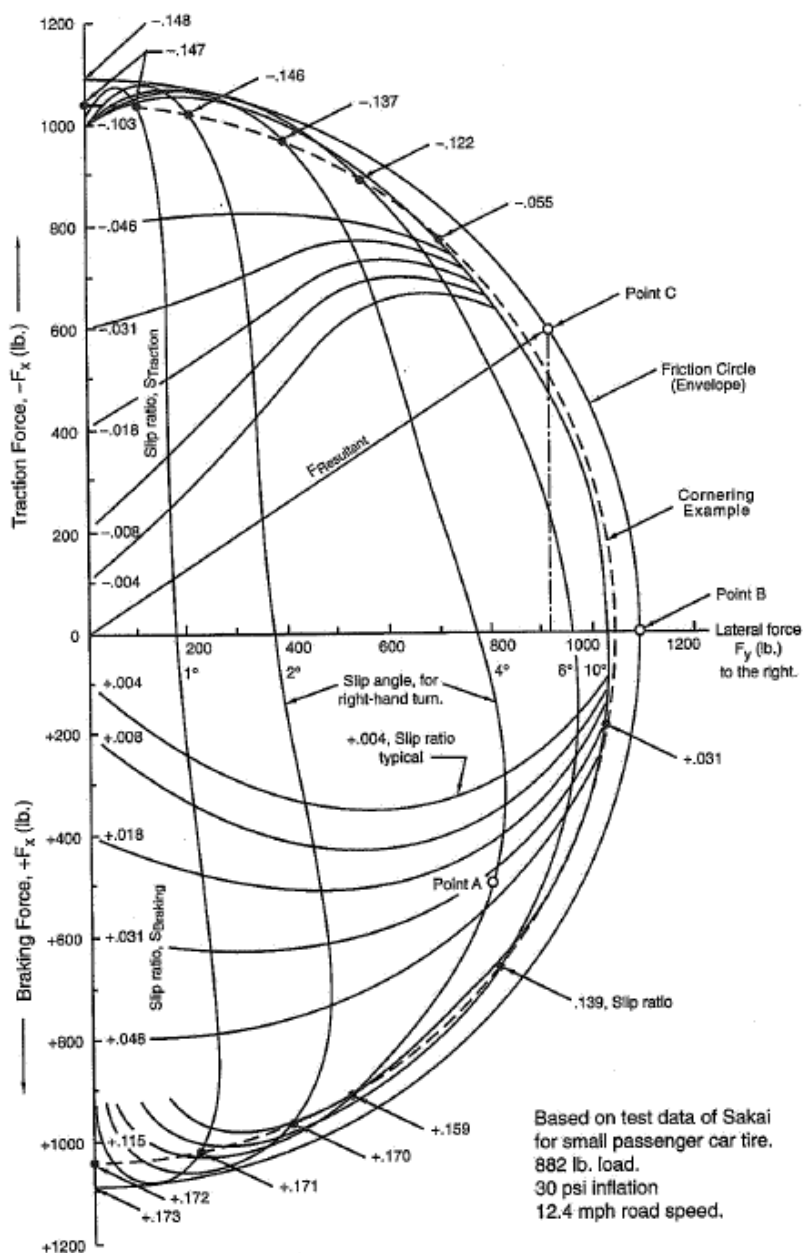


Figura 5.23

Parte derecha de un círculo de fricción extraído de ensayos de neumáticos de automóviles de pasajeros (extraído Ref. [1]).

Cada neumático del coche posee su propia elipse de fricción; en condición de curva la carga normal varía constantemente como consecuencia de la transferencia lateral de carga, lo cual produce alteraciones constantes de la elipse de fricción. Reuniendo la información de las cuatro elipses de fricción se construye el círculo o elipse de fricción del vehículo entero.

## 5.3.5 Otros factores influyentes en el comportamiento de los neumáticos

A continuación se citan diferentes factores que influyen en el comportamiento de los neumáticos.

### 5.3.5.1 Presión de inflado de los neumáticos

La presión de los neumáticos es uno de los factores más comunes y fáciles de modificar en un vehículo de competición. El fabricante es quien establece el rango de presiones de operación de los neumáticos; presiones bajas originan que los laterales del neumático entren en contacto con la carretera y no así la región central, produciendo un desgaste excesivo y una respuesta lenta a los cambios de dirección; presiones elevadas producen una elevación de la región central del neumático disminuyendo la superficie de contacto, lo cual reduce el coeficiente de fricción lateral y longitudinal.

### 5.3.5.2 Temperatura de los neumáticos

La temperatura del neumático afecta tanto su capacidad de producir fuerzas laterales como su durabilidad. Los neumáticos de competición tienen un rango estrecho de temperaturas óptimas de trabajo; si la temperatura es demasiado fría los neumáticos patinarán fácilmente, si es demasiado elevada se fundirán. Los valores óptimos se encuentran entre los 90 [°C] y los 100 [°C]. La temperatura adquirida por un neumático depende de muchos factores: temperatura ambiente, flujo de aire que lo refrigera, carga normal, presión de inflado, carga transferida en curva, calor proveniente de los frenos, espesor de la banda de rodadura, forma constructiva.

### 5.3.5.3 Velocidad de los neumáticos

El rendimiento de los neumáticos varía con su velocidad. Generalmente disminuye su capacidad de generar fuerzas a medida que se incrementa la velocidad. Este bajón puede ser repentino o proporcional al aumento de velocidad. En algunos casos, pasado cierto límite, la capacidad de generar fuerzas laterales vuelve a aumentar. La

Figura 5.24 muestra como varía el coeficiente de fricción para diferentes superficies en función de la velocidad. En superficies húmedas la disminución es mayor debido a que el neumático tiene dificultades de desplazar el agua situada bajo el parche de contacto a medida que incrementa su velocidad.

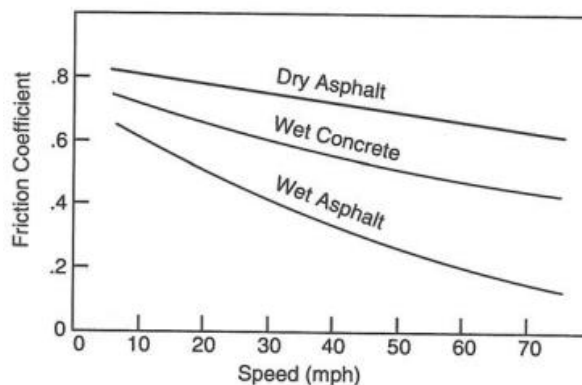


Figura 5.24  
Coeficiente de fricción versus velocidad del neumático (extraído Ref. [3]).

## 5.4 Estabilidad del vehículo

### 5.4.1 Introducción

En la vida real el comportamiento del vehículo y las capacidades del conductor están íntimamente relacionados. El conductor actúa para dar origen a un cambio de dirección o un estado de aceleración o bien como consecuencia de la respuesta recibida del mismo automóvil, como ser aceleración lateral, velocidad de guiñada, entre otras. Debido a un procesamiento de la información obtenida el conductor responde aplicando fuerzas a través del sistema de dirección, pedal de freno o acelerador; su meta es modificar el comportamiento del automóvil. Consecuentemente el coche experimentará un cambio que será transmitido nuevamente al conductor y éste decidirá posteriores acciones a seguir para el control del vehículo. El comportamiento del sistema "conductor-vehículo" técnicamente se denomina '*handling*'. Es un vocablo derivado del inglés que se refiere a la estabilidad direccional y al control del automóvil.



## 5.4.2 Modelo vehicular adoptado

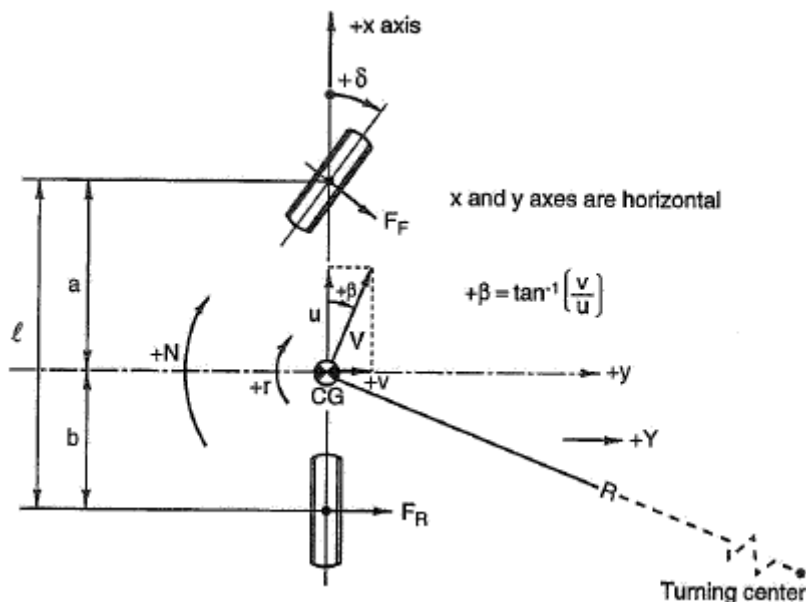
Ejecutar un análisis de estabilidad requiere la adopción previa de un modelo vehicular de estudio. Se emplea el conocido modelo de bicicleta que presenta las siguientes hipótesis simplificativas:

- ✓ no existe transferencia lateral de carga (el vehículo se comprime lateralmente a un eje longitudinal),
- ✓ no se considera transferencia de carga longitudinal,
- ✓ no hay movimientos de rolido y de cabeceo,
- ✓ los neumáticos trabajan dentro del rango lineal,
- ✓ velocidad constante del vehículo,
- ✓ se desprecian efectos aerodinámicos.

La Figura 5.25 muestra una vista superior del modelo adoptado; se observa que el vehículo posee dos grados de libertad: la velocidad lateral  $v$  y la velocidad de guiñada  $r$ . La variable de entrada es el ángulo de dirección  $\delta$  de la rueda delantera, el cual está bajo el control del conductor. Por otro lado,  $a$  y  $b$  representan la distancia desde el centro de gravedad hasta el eje delantero y trasero respectivamente,  $l$  es la distancia entre ejes,  $F_F$  y  $F_R$  constituyen la fuerza lateral desarrollada por el neumático delantero y trasero respectivamente,  $R$  es el radio de curvatura y  $\beta'$  el ángulo conformado entre el eje  $x$  del coche y el vector velocidad  $V$ .

Cuando un coche toma una curva es posible distinguir tres fases o etapas. La primera fase corresponde con la entrada a la curva, por ejemplo desde una recta. En ella la velocidad de guiñada  $r$  y la velocidad lateral  $v$  incrementan su magnitud desde cero, correspondiente al tramo recto previo, hasta alcanzar los valores vinculados al estado de curva. En la segunda etapa, conocida como tránsito de curva en estado estable, la velocidad de guiñada, la velocidad lateral y el ángulo de deriva del neumático mantienen sus valores constantes; el automóvil se mueve a lo largo de una trayectoria invariable de radio  $R$ . Finalmente en la tercer fase, denominada salida de curva, ambas velocidades varían con el tiempo disminuyendo su magnitud hasta retornar a cero cuando el vehículo nuevamente transita una trayectoria recta. Estas fases constituyen una idealización útil de un estado de curva típico. La realidad dista

de lo mencionado ya que es muy difícil mantener una velocidad constante en estado de curva, sin embargo empleando estas suposiciones se obtienen resultados adecuados.



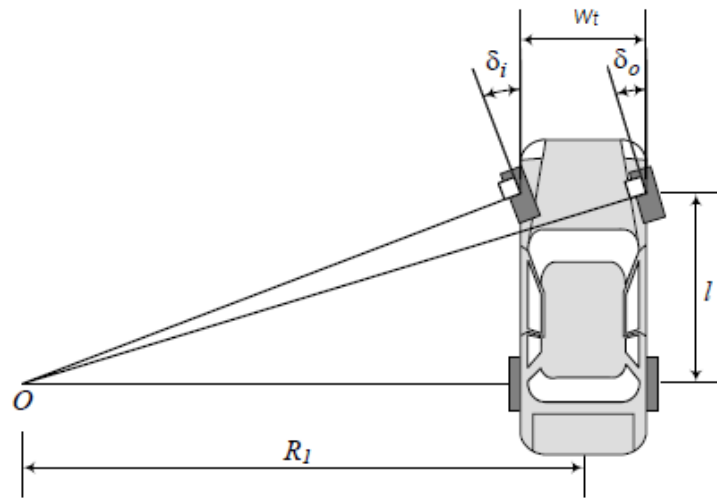
**Figura 5.25**  
 Modelo vehicular de dos grados de libertad (extraído Ref. [1]).

### 5.4.3 Cinemática de dirección

Para maniobrar un vehículo se requiere de un sistema de dirección que permita el giro de los neumáticos. La Figura 5.26 muestra un vehículo doblando hacia la izquierda. Cuando el automóvil se desplaza a velocidades muy bajas, hay una condición cinemática entre las ruedas internas y externas que les permite doblar y girar sin patinamiento. Dicha condición se denomina condición de Ackerman y se expresa mediante la ecuación (5.23),

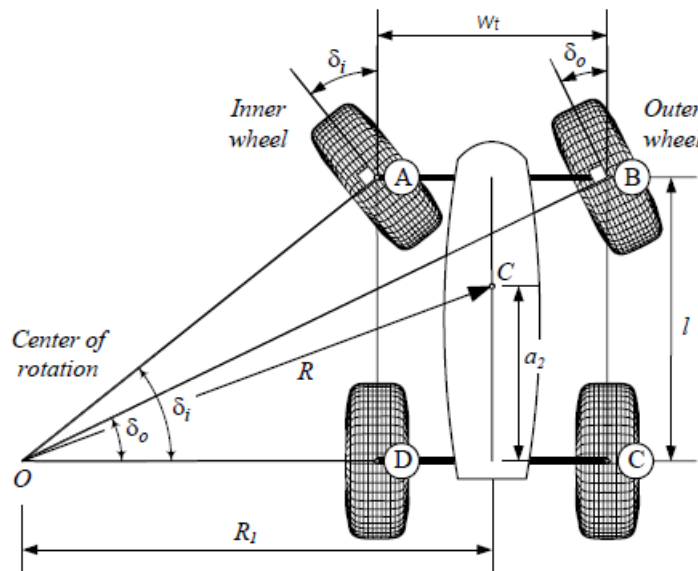
$$\cot \delta_o - \cot \delta_i = \frac{w_t}{l} \quad (5.23)$$

donde  $\delta_o$  es el ángulo de dirección de la rueda externa y  $\delta_i$  el ángulo de dirección de la rueda interna. Tanto la rueda interna como la externa se definen basándose en el centro de giro  $O$ . La distancia entre los ejes de dirección de las ruedas orientables se denota por  $w_t$ , mientras que  $l$  representa la longitud entre ejes.



**Figura 5.26**  
 Vehículo con ruedas delanteras directrices y condición de Ackerman (extraído Ref. [2]).

La Figura 5.27 muestra un vehículo girando hacia la izquierda. Por lo tanto, el centro de rotación  $O$  se ubica sobre la izquierda, las ruedas internas son las ruedas izquierdas las cuales están más cerca del centro de giro del automóvil. Los ángulos de dirección  $\delta_i$  y  $\delta_o$  pueden determinarse mediante un análisis de los triángulos conformados por  $OADO$  y  $OBCO$ .



**Figura 5.27**  
 Vehículo girando hacia la izquierda, neumáticos delanteros directrices (extraído Ref. [2]).

Es posible escribir que:

$$\tan \delta_i = \frac{l}{R_1 - \frac{w_t}{2}} \quad (5.24)$$

$$\tan \delta_o = \frac{l}{R_1 + \frac{w_t}{2}} \quad (5.25)$$

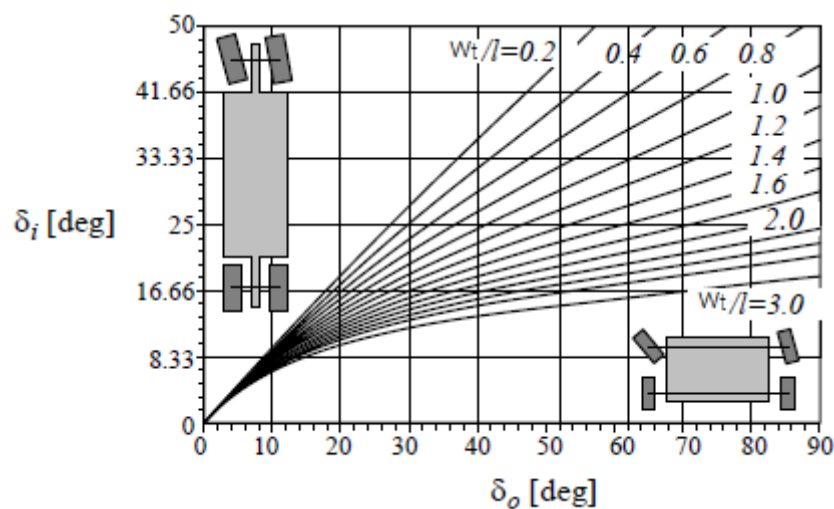
Despejando  $R_1$  de las ecuaciones (5.24) y (5.25) se obtiene:

$$R_1 = \frac{w_t}{2} + \frac{l}{\tan \delta_i} \quad (5.26)$$

$$R_1 = -\frac{w_t}{2} + \frac{l}{\tan \delta_o} \quad (5.27)$$

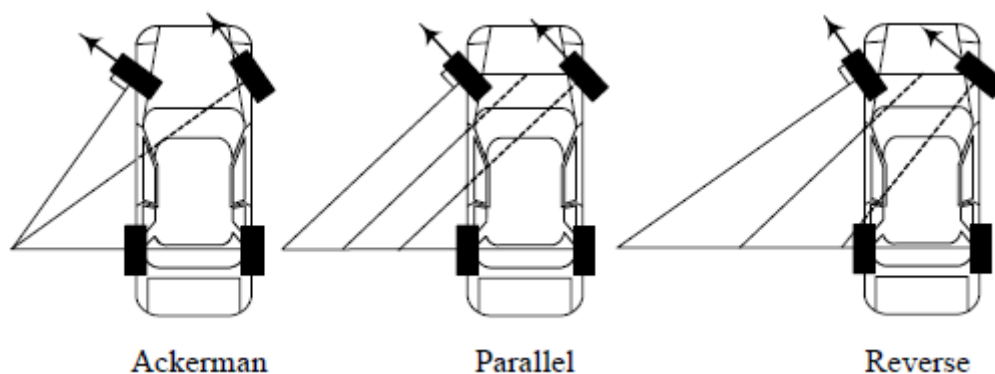
Igualando el término de la derecha de la ecuación (5.26) con el de la (5.27) se llega a la condición de Ackerman definida por la expresión (5.23).

En la Figura 5.28 se grafica la condición de Ackerman; en el eje horizontal se representa el ángulo de dirección de la rueda externa mientras que en el eje vertical el ángulo de dirección de la interna tomando como parámetro la relación  $w_t/l$ . Para un cierto valor de  $\delta_o$  el ángulo de la rueda interna  $\delta_i$  se incrementa a medida que disminuye la relación  $w_t/l$ , lo cual puede originarse por una disminución de la longitud entre los ejes de dirección de los neumáticos delanteros  $w_t$  o bien un incremento de la distancia entre ejes  $l$ .



**Figura 5.28**  
 Efecto de  $w_t/l$  en la condición de Ackerman (extraído Ref. [2]).

Como se sabe, la condición de Ackerman es correcta cuando la velocidad del coche es baja. Cuando el vehículo atraviesa una trayectoria curva a una velocidad elevada se desarrolla una aceleración lateral significativa, por lo tanto los neumáticos operan con elevados ángulos de deriva. Además, las cargas normales sobre los neumáticos internos a la trayectoria reducen su valor y los externos incrementan su carga. Las curvas de rendimiento de los neumáticos muestran que cuanto mayor es la carga normal se requieren ángulos de deriva mayores para alcanzar la fuerza lateral máxima. Bajo estas condiciones la rueda interna tendría un ángulo de deriva mayor que el requerido para alcanzar la fuerza lateral máxima. En consecuencia la rueda interna de un automóvil que dobla con una velocidad elevada debe operar con un ángulo de dirección menor que el que establece la condición de Ackerman. Por lo establecido, es muy común en los coches de competición utilizar un sistema de dirección paralelo o de Ackerman inverso tal como muestra la Figura 5.29. El ángulo de dirección correcto es una función de la carga instantánea sobre los neumáticos, de las condiciones de la carretera, de la velocidad y de las características del neumático.



**Figura 5.29**  
Dirección bajo condición de Ackerman, dirección paralela, dirección con Ackerman inverso (extraído Ref. [2]).

#### 5.4.4 Estabilidad en estado de curva

Las definiciones de automóvil neutral, subvirador y sobrevirador pueden desarrollarse mediante el empleo del modelo vehicular de bicicleta. Estas definiciones se aplican para regiones de operación situadas por debajo del límite de fricción del neumático, generalmente en el rango lineal, y no debe ser confundido con los términos similares para representar el comportamiento en el límite de adhesión. A

continuación se estudia el comportamiento del coche para la fase dos correspondiente a un estado de curva, es decir cuando el automóvil transita una curva en estado estacionario con velocidad lateral y de guiñada constantes.

#### 5.4.4.1 Vehículo de actitud neutra

Cuando un automóvil describe una trayectoria curva se origina una aceleración centrípeta la cual es proporcional al cuadrado de la velocidad e inversamente proporcional al radio de curvatura. El producto de la masa del vehículo, concentrada en el centro de gravedad, por la aceleración centrípeta produce una fuerza inercial actuante en el centro de gravedad en dirección radial. Esta fuerza inercial se muestra en la Figura 5.30 y se denota mediante  $CF$ . En esta figura se asume que el centro de gravedad del coche se ubica en el punto medio de la distancia entre ejes, por lo tanto  $a$  toma el mismo valor que  $b$ . La rigidez de deriva delantera y trasera se representa mediante  $C_F$  y  $C_R$  respectivamente. Las fuerzas laterales desarrolladas por ambos neumáticos deben ser capaz de resistir la fuerza inercial que actúa en el centro de gravedad y permitir que el vehículo doble. Es posible escribir las ecuaciones de equilibrio como sigue:

$$CF = Y_F + Y_R = C_F \alpha_F + C_R \alpha_R \quad (5.28)$$

$$C_F \alpha_F a = C_R \alpha_R b \quad (5.29)$$

La ecuación (5.28) representa el equilibrio en dirección radial. Generalmente se considera al vehículo como una viga horizontal en equilibrio de fuerzas laterales y momentos, motivo por el cual la expresión mencionada es válida para ángulos pequeños. La ecuación (5.29) representa el equilibrio entorno al centro de gravedad. Como  $a = b$  y  $C_F = C_R$  (mismos neumáticos) entonces se deduce que  $\alpha_F = \alpha_R$ .

Un análisis minucioso permite extraer las siguientes conclusiones:

- ✓ El ángulo de deriva del coche  $\beta'$  se obtiene por la rotación del vehículo entero una magnitud  $\alpha_R$ . Esta rotación establece la actitud del coche en su trayectoria. El ángulo  $\beta'$  es normalmente medido entre la línea central del chasis en el centro de gravedad y la tangente a la trayectoria en dicho punto.

- ✓ La rueda trasera está viajando sobre un radio más pequeño que la delantera.

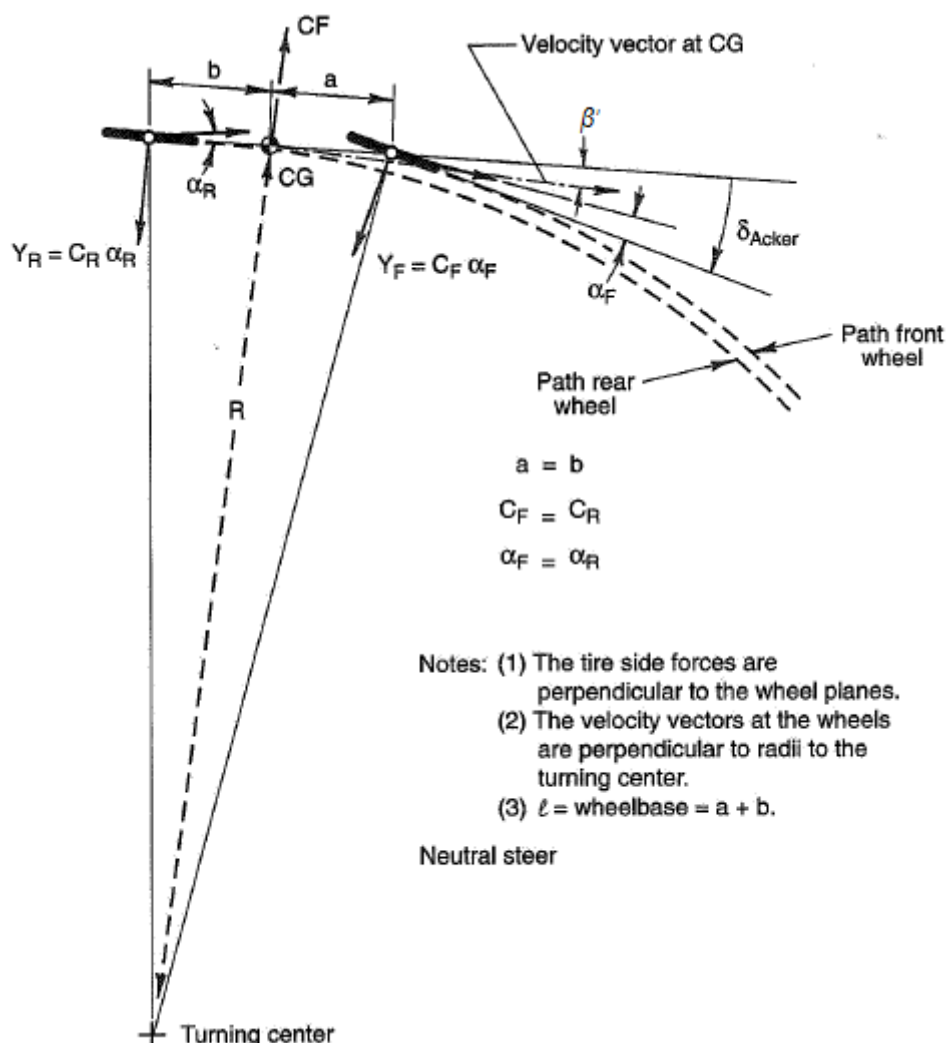
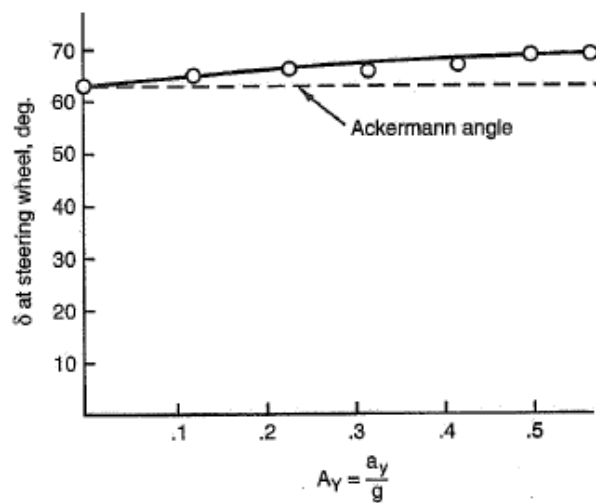


Figura 5.30  
 Vehículo de comportamiento neutral (extraído Ref. [1]).

- ✓ Para la configuración elegida del vehículo (centro de gravedad en el punto medio de la distancia entre ejes), el ángulo de deriva requerido por la región delantera para producir la fuerza y el momento de equilibrio es obtenido por la rotación del vehículo durante el establecimiento del ángulo de deriva trasero  $\alpha_R$ . Con esta configuración el ángulo de dirección  $\delta$  está completamente determinado por la curvatura, independientemente de la velocidad o la aceleración lateral desarrollada. Por lo tanto, es posible calcular  $\delta$  mediante la expresión (5.30).

$$\delta = \delta_{ack} = \frac{l}{R} \quad (5.30)$$

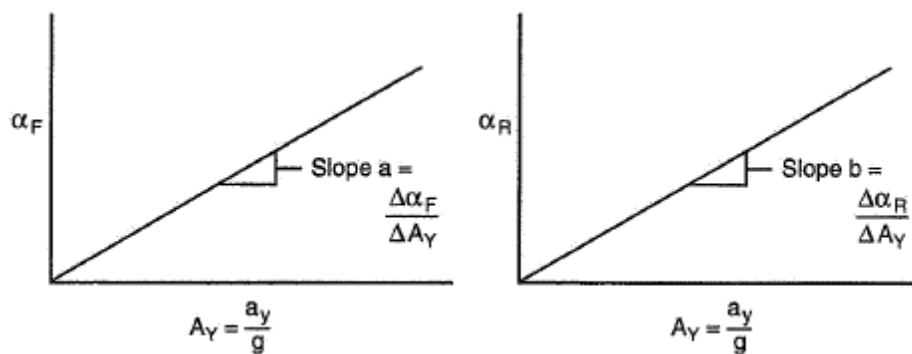
La Figura 5.31 muestra los resultados obtenidos en un test desarrollado sobre un vehículo. En tal circunstancia el coche se desplaza describiendo una trayectoria circular de radio constante mientras se incrementa su velocidad y por ende la aceleración centrípeta. En la gráfica se observa que el ángulo de dirección (eje vertical) es prácticamente independiente de la aceleración centrípeta (eje horizontal) y de la velocidad, tal como ocurre en un coche de actitud neutra. Como la fuerza o aceleración lateral se incrementa en un ensayo de radio constante, el ángulo de deriva también debe aumentar. Esto puede deducirse de la ecuación de equilibrio (5.28) y (5.29). Si las rigideces de deriva son constantes en el rango de comportamiento lineal del neumático, el ángulo de deriva debe aumentar sumagnitud linealmente con la aceleración lateral.



**Figura 5.31**  
 Vehículo de comportamiento neutral (extraído Ref. [1]).

Por otro lado, la Figura 5.32 muestra la variación del ángulo de deriva delantero y trasero en función de la aceleración lateral normalizada con la aceleración gravitatoria. La característica observable es que ambas gráficas poseen la misma pendiente y por ende  $a_F$  y  $a_R$  incrementan en igual proporción.





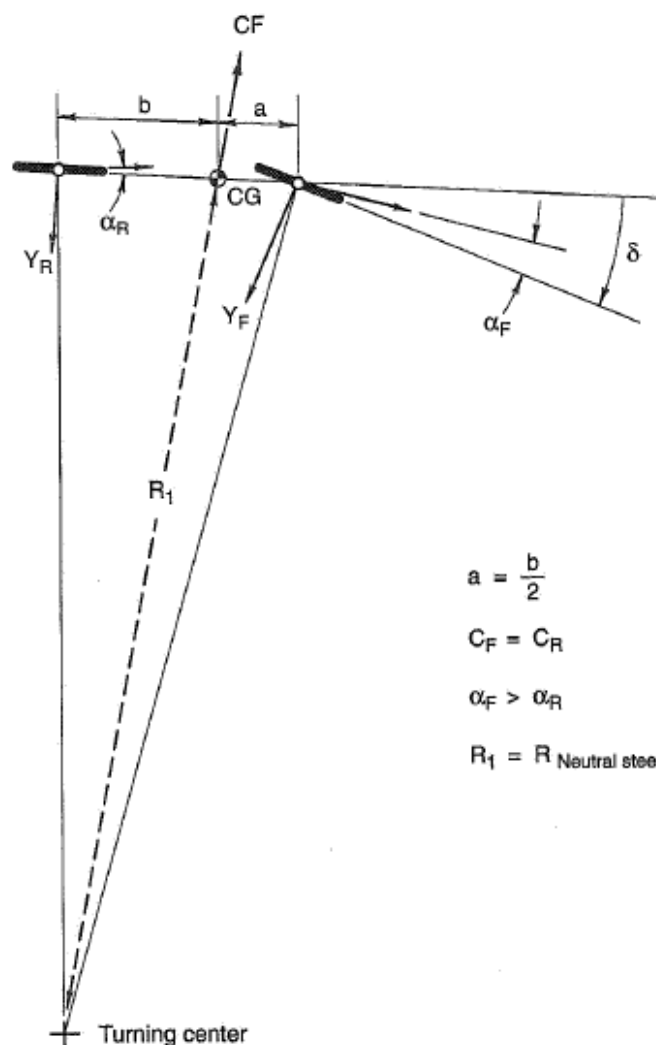
**Figura 5.32**  
 Variación de los ángulos de deriva con la aceleración lateral (extraído Ref. [1]).

#### 5.4.4.2 Vehículo de actitud subviradora

En este caso se considera el modelo vehicular de bicicleta con el centro de gravedad situado a una distancia igual a 1/3 de la longitud entre ejes medido desde el eje delantero. Por lo tanto, la carga sobre el neumático delantero es de 2/3  $W$  y sobre el trasero 1/3  $W$ , siendo  $W$  el peso del vehículo; la rueda delantera presenta el doble de carga que la trasera. Se asume que ambos neumáticos, delanteros y traseros, poseen las mismas características mecánicas y son exactamente iguales a los empleados en el vehículo de actitud neutral.

En la Figura 5.33 se muestra el modelo utilizado para el presente análisis. Considerando que la distancia entre ejes  $l$  es igual al caso del coche neutral como así también el radio de curvatura  $R$ , entonces el ángulo de Ackerman  $\delta_{ack}$  se mantiene. Se asume nuevamente que el vehículo se comporta como una viga horizontal. La fuerza lateral que debe desarrollar cada neumático para compensar la fuerza centrífuga  $CF$  es en proporción inversa a su distancia al centro de gravedad. Por lo tanto, el neumático delantero debe desarrollar 2/3 de la totalidad de la fuerza lateral, mientras que el trasero el 1/3 restante. Si se compara el balance de fuerzas para la presente configuración con el correspondiente al coche de comportamiento neutral se obtiene que:

$$\alpha_F = \frac{4}{3} \alpha_1 \quad \alpha_R = \frac{2}{3} \alpha_1 \quad (5.31)$$



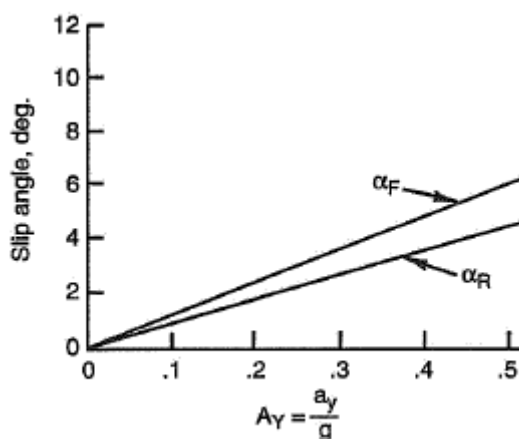
**Figura 5.33**  
 Vehículo con actitud subviradora (extraído Ref. [1]).

donde  $\alpha_1$  es el ángulo de deriva para el neumático delantero y trasero en el automóvil de comportamiento neutral. En consecuencia, de acuerdo la expresión (5.31) el ángulo de deriva del neumático delantero es el doble del trasero. En esta circunstancia, el ángulo de deriva del vehículo  $\beta'$  es más pequeño por la reducción del ángulo de deriva trasero  $\alpha_R$ ; el ángulo de deriva delantero  $\alpha_F$  que surge de esta rotación ha sufrido dicha reducción de magnitud, la cual es igual a  $\alpha_1/3$ . Por lo tanto esto debe ser compensado con un incremento del ángulo de dirección para alcanzar un ángulo de deriva delantero de  $4\alpha_1/3$ . La compensación que debe ser realizada es de  $2\alpha_1/3$ . Finalmente, el ángulo de dirección requerido para que el coche pueda transitar la curva a velocidad constante y mantener el radio de curvatura está dado por la ecuación (5.32).

$$\delta = \delta_{ack} + (-\alpha_F + \alpha_R) = \frac{l}{R} - \frac{2}{3}\alpha_1 \quad (5.32)$$

Es importante notar que en un vehículo subvirador se requiere un ángulo de dirección mayor que en un coche neutro para transitar una curva con el mismo radio de curvatura y con la misma aceleración lateral.

La Figura 5.34 muestra la variación del ángulo de deriva delantero y trasero para un coche subvirador sometido a un test de radio constante. A medida que incrementa la aceleración lateral aumenta el ángulo de deriva delantero y trasero. Sin embargo, las curvas asociadas a estos ángulos poseen diferentes pendientes, lo cual origina que el ángulo de dirección varíe con la aceleración lateral.



**Figura 5.34**

Variación del ángulo de deriva con la aceleración lateral para un coche subvirador (extraído Ref. [1]).

#### 5.4.4.3 Vehículo de actitud sobreviradora

En los capítulos 5.4.4.1 y 5.4.4.2 se ha estudiado el comportamiento de un coche neutral y subvirador. En un vehículo de actitud neutra las razones de cambio del ángulo de deriva delantero  $\alpha_F$  y trasero  $\alpha_R$  con la aceleración lateral  $A_Y$  son idénticos, motivo por el cual el ángulo de dirección  $\delta$  requerido para transitar una curva de radio  $R$  a diferentes velocidades es exactamente el mismo y es igual al ángulo de Ackerman  $\delta_{ack}$ . Por otro lado, en un automóvil con tendencia subviradora la razón de cambio del ángulo de deriva delantero  $\alpha_F$  con la aceleración lateral  $A_Y$  excede la del ángulo de deriva trasero  $\alpha_R$ . En tal circunstancia, transitar una curva de radio  $R$  con sucesivos aumentos de aceleración lateral requiere de incrementos del ángulo de dirección  $\delta$ . En

base a lo expuesto es posible predecir el comportamiento de un vehículo sobrevirador, en el cual la razón de cambio del ángulo de deriva trasero  $\alpha_R$  con la aceleración lateral  $A_Y$  es mayor que la del delantero.

En la Figura 5.35 se presenta a un coche sobrevirador describiendo una trayectoria curva. El centro de gravedad se ubica a  $2/3$  de la longitud entre ejes medido desde el eje delantero; se asume que la rigidez de deriva de los neumáticos delanteros y traseros posee la misma magnitud. El ángulo  $\beta'$  que representa la actitud del vehículo es mayor que el correspondiente a un coche neutral y subvirador. El ángulo de deriva delantero  $\alpha_F$ , el cual surge de la rotación del chasis, es considerablemente más grande que el requerido para mantener el radio de curvatura  $R_1$ . Como el centro de gravedad se sitúa en cercanías del eje trasero, la fuerza lateral generada por los neumáticos de tal eje debe ser mayor que la correspondiente a los neumáticos delanteros. Empleando el ángulo de deriva  $\alpha_1$  de un automóvil neutral como referencia y planteando equilibrio se obtiene el ángulo de deriva delantero y trasero tal como muestra la ecuación (5.33).

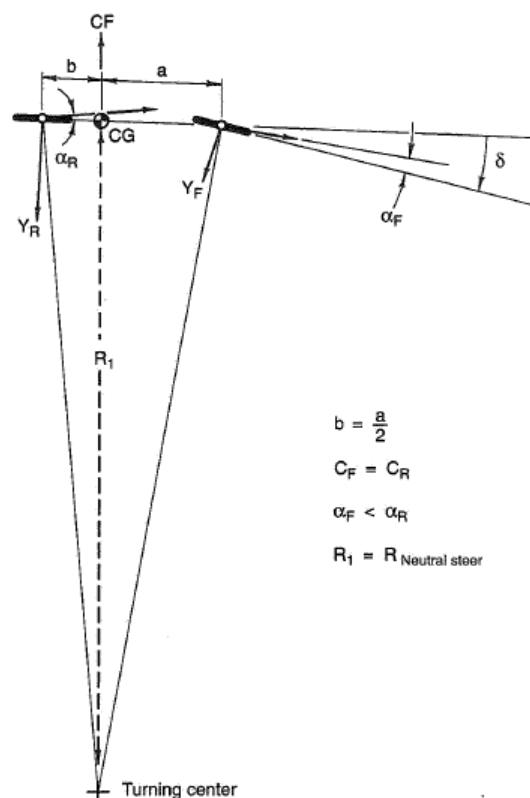


Figura 5.35  
 Vehículo con actitud sobreviradora (extraído Ref. [1]).

$$\alpha_F = \frac{2}{3} \alpha_1 \quad \alpha_R = \frac{4}{3} \alpha_1 \quad (5.33)$$

El efecto de rotación del chasis agrega un plus de  $\alpha_1/3$  en el neumático delantero respecto al coche neutral, lo cual debe ser compensado con una reducción del ángulo de dirección para conseguir que el ángulo de deriva delantero  $\alpha_F$  sea el adecuado. Por lo tanto el ángulo de dirección  $\delta$  requerido está dado por la ecuación (5.34). Cabe notar que de acuerdo a la convención elegida el ángulo de deriva  $\alpha_1$  posee una magnitud negativa.

$$\delta = \delta_{ack} + (-\alpha_F + \alpha_R) = \frac{l}{R} + \frac{2}{3} \alpha_1 \quad (5.34)$$

### 5.4.5 Ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones de movimiento pueden desarrollarse mediante la utilización del modelo elemental de bicicleta que se muestra en la Figura 5.25. Es un modelo de dos grados de libertad que permite el cálculo de las variables de movimiento como una función de las fuerzas y momentos actuantes sobre el vehículo. Las variables de movimiento de interés son la velocidad lineal  $u$ , velocidad lateral  $v$ , velocidad de guiñada  $r$ . La suma de  $u$  y  $v$  origina el vector velocidad  $V$ , el cual es perpendicular al radio de curvatura  $R$ . Para una trayectoria recta, el ángulo de deriva del coche  $\beta'$  es nulo. La fuerza lateral total se representa por  $Y$ , mientras que el momento de guiñada total respecto al centro de gravedad se denota por  $N$ . En la dinámica vehicular,  $V$  se adopta como la variable independiente; así es posible asignarle valores y calcular las restantes variables. Asimismo  $V \approx u$  y las dos restantes variables dependientes son  $r$  y  $v$ . La segunda ley de Newton para movimiento lineal y angular se expresa mediante las ecuaciones (5.35) y (5.36):

$$T = I\alpha \quad (5.35)$$

$$F = ma \quad (5.36)$$

donde  $T$  es el momento angular,  $\alpha$  la aceleración angular,  $F$  la fuerza,  $m$  masa y  $a$  la aceleración lineal. En nuestra aplicación, las ecuaciones anteriores adquieren la forma representada por las expresiones (5.37) y (5.38).

$$N = I_z \frac{dr}{dt} = I_z \dot{r} \quad (5.37)$$

$$Y = m_v a_y \quad (5.38)$$

La aceleración lateral  $a_y$  consta de dos términos. El primero es la aceleración centrífuga y el segundo resulta de la variación en el tiempo de la velocidad lateral  $v$ . La ecuación (5.39) permite el cálculo de la aceleración lateral.

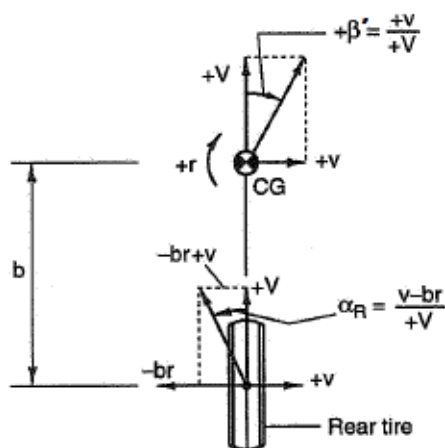
$$\begin{aligned} a_y &= Vr + \dot{v} \\ &= Vr + V\dot{\beta}' \\ &= V(r + \dot{\beta}') \end{aligned} \quad (5.39)$$

Si un automóvil transita una curva de radio  $R$  a velocidad constante, la aceleración centrípeta está dada por  $\frac{V^2}{R}$ . Como la velocidad de guiñada  $r$  se define como  $r = V/R$ , entonces la aceleración centrífuga puede ser escrita como  $a_c = Vr$ . Por otro lado, para mantener constante la aceleración lateral el ángulo de deriva del vehículo  $\beta'$  debe ser constante. La componente de velocidad lateral  $v$  es constante siempre que  $V$  y  $\beta'$  lo sean. En una maniobra transitoria, la velocidad lateral  $v$  y por lo tanto  $\beta'$  no son constantes y existe una componente de aceleración lateral  $\dot{v}$ .

### Fuerzas y momentos

En el planteo de las ecuaciones de fuerzas y momentos sólo se considera los efectos del ángulo de deriva; la transferencia de carga, los efectos de la comba y los aerodinámicos son omitidos. El ángulo de deriva es una función de las dos variables de movimiento:  $v$  (o  $\beta'$ ) y  $r$ . En la Figura 5.36 se muestran las velocidades en el eje trasero. Si el coche experimenta una velocidad de guiñada  $r$  positiva entorno al eje vertical  $z$ , la componente de velocidad lateral sobre el neumático trasero es igual a  $-br$ , donde  $b$  es la distancia entre el eje trasero y el centro de gravedad. Un análisis de las velocidades sobre dicho neumático posibilita el cálculo del ángulo de deriva trasero  $\alpha_R$  tal como muestra la ecuación (5.40).

$$\alpha_R = \frac{v - br}{V} = \frac{v}{V} - \frac{br}{V} = \beta' - \frac{br}{V} \quad (5.40)$$

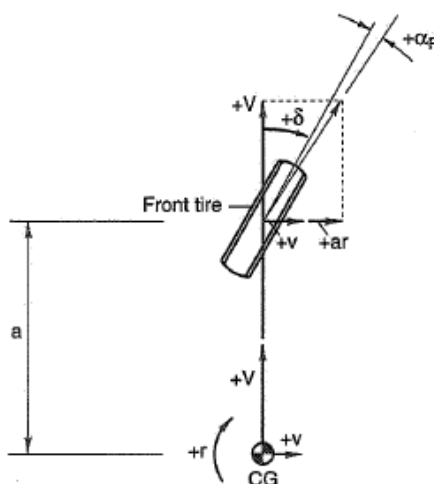


**Figura 5.36**  
 Velocidades en el eje trasero (extraído Ref. [1]).

Para el tren delantero, el ángulo de deriva  $\alpha_F$  se define por tres componentes: el ángulo de deriva del vehículo  $\beta'$ , la velocidad de guiñada  $r$  y el ángulo de dirección  $\delta$ . Un análisis de la Figura 5.37 permite establecer el ángulo de deriva delantero, pudiendo ser calculado mediante la expresión (5.41):

$$\alpha_F = \frac{v + ar}{V} - \delta = \frac{v}{V} + \frac{ar}{V} - \delta = \beta' + \frac{ar}{V} - \delta \quad (5.41)$$

donde  $a$  es la distancia comprendida entre el centro de gravedad del coche y el tren delantero. Las ecuaciones (5.40) y (5.41) fueron deducidas considerando pequeños ángulos y siguiendo la convención de signos definida en el capítulo correspondiente.



**Figura 5.37**  
 Velocidades en el eje delantero (extraído Ref. [1]).

De acuerdo a las suposiciones adoptadas, las fuerzas laterales sobre los neumáticos presentan una variación lineal con el ángulo de deriva; se pueden determinar tal como se expresa mediante las ecuaciones (5.42) y (5.43).

$$Y_F = C_F \left( \beta' + \frac{ar}{V} - \delta \right) = C_F \beta' + C_F \left( \frac{ar}{V} \right) - C_F \delta \quad (5.42)$$

$$Y_R = C_R \left( \beta' - \frac{br}{V} \right) = C_R \beta' - C_R \left( \frac{br}{V} \right) \quad (5.43)$$

La fuerza lateral total está dada por (5.44):

$$Y = Y_F + Y_R = C_F \beta' + C_F \left( \frac{ar}{V} \right) - C_F \delta + C_R \beta' - C_R \left( \frac{br}{V} \right)$$

$$Y = (C_R + C_F) \beta' + \frac{1}{V} (aC_F - bC_R) r - C_F \delta \quad (5.44)$$

El momento total de guiñada respecto del eje z que atraviesa el centro de gravedad se obtiene aplicando la expresión (5.45).

$$N = N_F + N_R = Y_F a - Y_R b$$

$$N = C_F a \beta' + C_F \left( \frac{a^2 r}{V} \right) - C_F a \delta - C_R b \beta' + C_R \left( \frac{b^2 r}{V} \right)$$

$$N = (aC_F - bC_R) \beta' + \frac{1}{V} (a^2 C_F + b^2 C_R) r - aC_F \delta \quad (5.45)$$

Un análisis de las ecuaciones (5.44) y (5.45) permite establecer que el momento de guiñada  $N$  y la fuerza lateral  $Y$  son funciones lineales de  $\beta'$ ,  $r$  y  $\delta$ ; matemáticamente esto puede ser expresado como sigue:

$$Y = f(\beta', r, \delta) \quad (5.46)$$

$$N = f(\beta', r, \delta) \quad (5.47)$$

En una situación lineal como la presentada, se puede aplicar el principio de superposición y las componentes debido a  $\beta'$ ,  $r$  y  $\delta$  son aditivas. En consecuencia se pueden reescribir las ecuaciones (5.44) y (5.45) como sigue:



$$Y = \frac{\partial Y}{\partial \beta'} \beta' + \frac{\partial Y}{\partial r} r + \frac{\partial Y}{\partial \delta} \delta$$

$$Y = Y_{\beta'} \beta' + Y_r r + Y_{\delta} \delta \quad (5.48)$$

$$N = \frac{\partial N}{\partial \beta'} \beta' + \frac{\partial N}{\partial r} r + \frac{\partial N}{\partial \delta} \delta$$

$$N = N_{\beta'} \beta' + N_r r + N_{\delta} \delta \quad (5.49)$$

Las derivadas parciales  $\frac{\partial Y}{\partial \beta'}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial \delta}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \beta'}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial \delta}$  se denominan derivadas de estabilidad y control, usualmente se expresan mediante en notación abreviada  $Y_{\beta'}$ ,  $Y_r$ ,  $Y_{\delta}$ ,  $N_{\beta'}$ ,  $N_r$ ,  $N_{\delta}$ . Comparando las ecuaciones (5.44) y (5.45) con (5.48) y (5.49), las derivadas de estabilidad pueden determinarse para el modelo vehicular de bicicleta en términos de la rigidez de deriva delantera y trasera, de la localización del centro de gravedad ( $a$  y  $b$ ) y de la velocidad  $V$ .

$$Y_{\beta'} = C_F + C_R \quad (5.50)$$

$$Y_r = \left(\frac{1}{V}\right) (aC_F - bC_R) \quad (5.51)$$

$$Y_{\delta} = -C_F \quad (5.52)$$

$$N_{\beta'} = aC_F - bC_R \quad (5.53)$$

$$N_r = \left(\frac{1}{V}\right) (a^2 C_F + b^2 C_R) \quad (5.54)$$

$$N_{\delta} = -aC_F \quad (5.55)$$

Finalmente es posible reescribir las ecuaciones de movimiento en notación derivada combinando las ecuaciones (5.37), (5.38), (5.39) y (5.48), (5.49) de la siguiente manera:

$$I_z \dot{r} = N_{\beta'} \beta' + N_r r + N_{\delta} \delta \quad (5.56)$$

$$m_v V(r + \dot{\beta}') = N_{\beta'} \beta' + N_r r + N_\delta \delta \quad (5.57)$$

### 5.4.6 Factor de estabilidad K

Los autores W.F. Milliken y D.L. Milliken en su obra "Race Car Vehicle Dynamics" han desarrollado una expresión que permite relacionar el ángulo de dirección  $\delta$  con el radio de curvatura R, la distancia entre ejes  $l$ , la velocidad de avance  $V$  y un factor  $K$  denominado factor de estabilidad.

$$\frac{1/R}{\delta} = \frac{1/l}{1 + KV^2} \quad (5.58)$$

$$K = \frac{m_v}{l} \left( \frac{N_{\beta'} / -Y_{\beta'}}{N_\delta - \left( \frac{N_{\beta'}}{Y_{\beta'}} \right) Y_\delta} \right) \quad (5.59)$$

Si se multiplica toda la ecuación (5.58) por la velocidad de avance  $V$  aparece la velocidad de guiñada  $r$ .

$$\frac{r}{\delta} = \frac{V/l}{1 + KV^2} \quad (5.60)$$

Se observa en (5.59) que el factor de estabilidad depende de las derivadas de estabilidad y control, las cuales en el modelo vehicular adoptado son independientes de la velocidad  $V$ . Asimismo  $K$  es función de la masa vehicular y la distancia entre ejes  $l$ . Las ecuaciones (5.58) y (5.60) indican que la curvatura  $1/R$  y la velocidad de guiñada  $r$  varían con la velocidad de avance. Si  $K$  es igual a cero, la ecuación (5.58) se reduce a:

$$\frac{1/R}{\delta} = \frac{1}{l} \text{ y } \frac{r}{\delta} = \frac{V}{l} \quad (5.61)$$

lo cual corresponde a un coche de actitud neutral. Si  $K$  no es cero la respuesta estará determinada por el signo algebraico del factor de estabilidad. Analizando el denominador de la ecuación (5.59) y reemplazando las derivadas por sus expresiones definidas en las ecuaciones (5.50) a (5.55) se obtiene:

$$N_{\delta} - \left( \frac{N_{\beta'}}{Y_{\beta'}} \right) Y_{\delta} = \left[ -aC_F - \left( \frac{aC_F - bC_R}{C_F + C_R} \right) (-C_F) \right] = -\frac{C_F C_R l}{C_F + C_R} \quad (5.62)$$

El denominador de la expresión (5.62) siempre posee signo positivo debido a que  $C_F$  y  $C_R$  siempre son negativos. De esta manera, el signo de  $K$  queda definido por el numerador:

$$m_V \left( \frac{N_{\beta'}}{-Y_{\beta'}} \right) = m_V \left[ \frac{(aC_F - bC_R)}{(-C_F - C_R)} \right] \quad (5.63)$$

El denominador de la expresión (5.63) es siempre positivo, por lo tanto el signo de  $K$  queda definido exclusivamente por el del numerador  $aC_F - bC_R$ . Si  $K$  adquiere una magnitud positiva tanto la curvatura  $1/R$  como la velocidad de guiñada  $r$  tienden a disminuir con el incremento de la velocidad de avance  $V$ ; con  $K$  igual a cero la curvatura se mantiene constante mientras que la velocidad de guiñada incrementa linealmente. Finalmente si  $K$  adopta valores negativos la curvatura como la velocidad de guiñada incrementan con la velocidad de avance; la rapidez con que aumentan o disminuyen estas variables dependen del valor de  $K$ , a mayor valor absoluto de  $K$  mayor rapidez. Estos comportamientos se pueden observar en la Figura 5.38.

Es posible reacomodar la expresión (5.58) de la siguiente manera:

$$\delta = \frac{l}{R} + K \frac{lV^2}{R} \quad (5.64)$$

la cual permite determinar el ángulo de dirección requerido para transitar una curva a velocidad y radio de curva constantes. El primer término representa el ángulo de Ackerman, mientras que el segundo término en función del valor de  $K$  incrementa o disminuye el ángulo de dirección, por lo tanto se puede concluir que:

- ✓ si  $K=0$  el coche tiene comportamiento neutral,
- ✓ si  $K < 0$  el coche posee actitud sobreviradora,
- ✓ si  $K > 0$  el coche es subvirador.

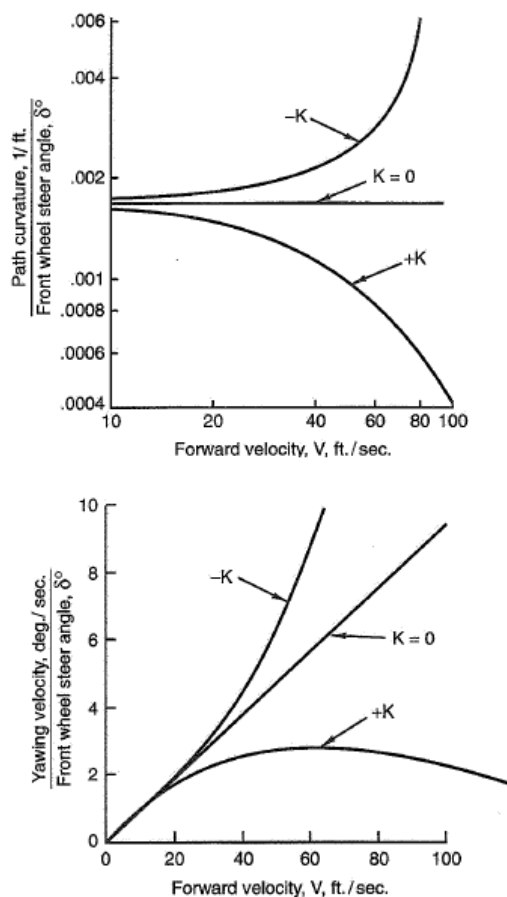


Figura 5.38

Curvatura y velocidad de guiñada en función del factor de estabilidad  $K$  y la velocidad de avance  $V$  (extraído Ref. [1]).

## 5.5 Carga sobre los neumáticos

### 5.5.1 Introducción

En el presente capítulo se desarrollan las ecuaciones que permiten calcular las fuerzas que actúan sobre los neumáticos en diferentes condiciones: en estado de reposo, en estado de aceleración o frenado y en estado de curva. Dichas fuerzas son extremadamente importantes para determinar la capacidad máxima del coche en condición de curva, por lo tanto una idea de cómo se originan puede resultar muy valioso para elevar la performance del vehículo. En un automóvil real, estas cargas están continuamente variando. Con la finalidad de mostrar cómo se determinan es necesario establecer hipótesis simplificadoras:

- ✓ el vehículo opera en condiciones de estado estacionario,
- ✓ velocidad de curva constante,
- ✓ aceleración longitudinal y lateral constante,
- ✓ chasis con una rigidez torsional de magnitud suficientemente elevada.

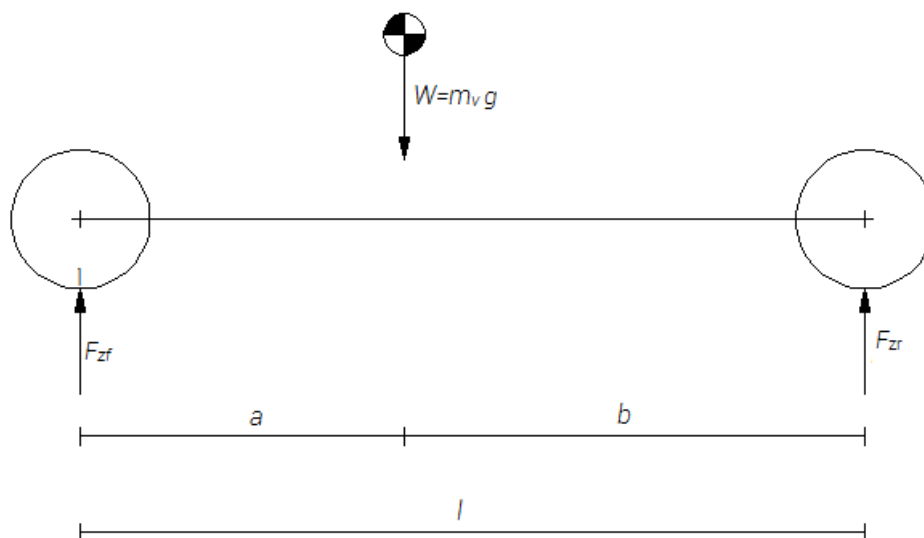
## 5.5.2 Carga estática

La carga estática es la fuerza que ejerce cada neumático contra la superficie de rodadura. Se origina por la acción de la aceleración gravitacional  $g$  sobre la masa vehicular  $m_v$ . Mediante un análisis de la Figura 5.39 es posible desarrollar las expresiones que permiten el cálculo de la carga que actúa sobre cada neumático. Se asume que el automóvil posee simetría másica respecto al eje  $x$  vehicular, por lo tanto las ruedas situadas en un mismo eje se distribuyen la carga de dicho eje en igual proporción. En la Figura 5.39 se presenta una vista lateral del coche, el peso aplicado en el CG y las reacciones en los neumáticos delanteros y traseros.

Planteando equilibrio respecto al eje vertical  $z$  y tomando momento respecto al punto 1 se tiene:

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \\ -W + F_{zf} - F_{zr} &= 0 \\ \sum M_1 &= 0 \\ -Wa + F_{zr}l &= 0 \\ F_{zr} &= \frac{Wa}{l} = \frac{Wa}{a+b} \quad (5.65)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_{zf} &= W - \frac{Wa}{a+b} \\ F_{zf} &= W \left(1 - \frac{a}{a+b}\right) \quad (5.66)\end{aligned}$$



**Figura 5.39**  
 Carga estática sobre las ruedas (extraído Ref. [1]).

donde  $F_{zf}$  y  $F_{zr}$  representan la carga sobre el eje delantero y trasero respectivamente. Como es posible observar estas fuerzas son función de la posición longitudinal del centro de gravedad determinada por  $a$  y  $b$ . De acuerdo a la simetría másica la fuerza sobre cada neumático delantero está dada por:

$$F_{zf1} = F_{zf2} = \frac{F_{zf}}{2} \tag{5.67}$$

y sobre cada neumático trasero por:

$$F_{zr1} = F_{zr2} = \frac{F_{zr}}{2} \tag{5.68}$$

### 5.5.3 Transferencia lateral de carga

La transferencia lateral de carga o carga lateral transferida es un fenómeno que aparece cuando un automóvil describe una trayectoria curva o bien cuando se produce un cambio de dirección. En tales circunstancias se desarrolla una aceleración centrípeta que da origen a una fuerza de inercia que actúa sobre el centro de gravedad (CG) del vehículo. El producto de la mencionada fuerza por la altura del centro de gravedad genera un momento, denominado momento a rolido  $M_x$  y definido en (5.69), que tiende a rotar la masa suspendida del vehículo en torno al eje de rolido; este eje resulta de vincular los centros de rolido del sistema de suspensión delantero y trasero,

siendo el centro de roldo función de la orientación geométrica de los componentes de suspensión. El momento a roldo debe ser equilibrado por los elementos elásticos que constituyen el sistema de suspensión delantero y trasero, es decir una porción del momento es equilibrado por el tren delantero y la restante por el trasero. En virtud de lo mencionado, los elementos elásticos sufren un acortamiento y/o alargamiento (espirales de suspensión) y una torsión (barra estabilizadora), lo cual produce una pérdida de carga de los neumáticos delanteros y traseros internos a la trayectoria descrita y un incremento por parte de los neumáticos externos. Básicamente el momento a roldo produce una pérdida de carga de los neumáticos internos y un incremento en igual magnitud de los externos. Este efecto se conoce como transferencia lateral de carga.

$$M_x = m_v a_y h_{cg} \quad (5.69)$$

En la Figura 5.40 se muestra un modelo vehicular comprimido en un solo eje,  $t$  denota la trocha del automóvil,  $F_{y1}$  y  $F_{y2}$  las fuerzas laterales desarrolladas por los neumáticos para compensar la fuerza inercial y permitir que el coche describa la trayectoria curva,  $h_{cg}$  la altura del centro de gravedad, y finalmente  $F_{z1}$  y  $F_{z2}$  la fuerza normal que ejerce cada neumático contra el terreno.

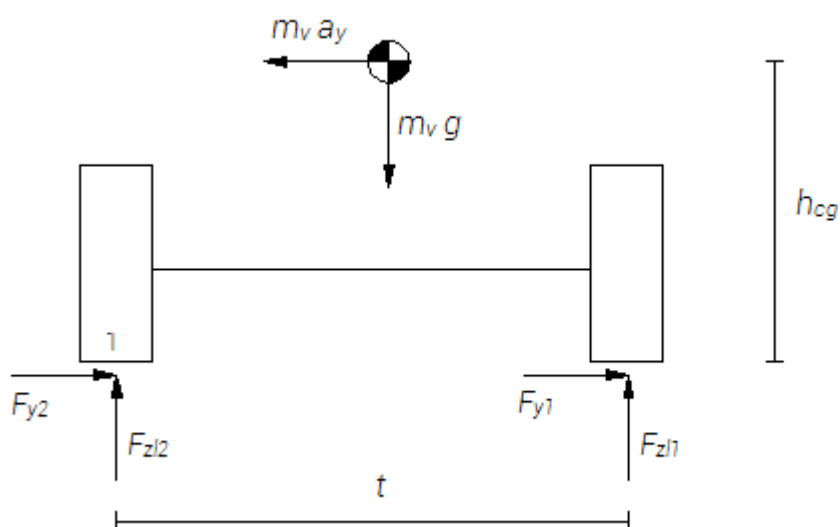


Figura 5.40  
 Transferencia lateral de carga (extraído Ref. [1]).

Tomando momento respecto al punto 1 de la Figura 5.40 y mediante sumatoria de fuerzas verticales se obtiene:

$$\begin{aligned} \sum M_1 &= 0 \\ m_v a_y h_{cg} + F_{z11} t - m_v g \frac{t}{2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.70)$$

De (5.70)

$$F_{z11} = \frac{m_v g}{2} - \frac{m_v a_y h_{cg}}{t} \quad (5.71)$$

$$\begin{aligned} \sum F_z &= 0 \\ m_v g - F_{z11} - F_{z12} &= 0 \end{aligned} \quad (5.72)$$

De (5.72)

$$F_{z12} = m_v g - \frac{m_v g}{2} + \frac{m_v a_y h_{cg}}{t}$$

$$F_{z12} = \frac{m_v g}{2} + \frac{m_v a_y h_{cg}}{t} \quad (5.73)$$

De (5.71) y (5.73)

$$TCLT = \frac{F_{z12} - F_{z11}}{2} = m_v \frac{a_y h_{cg}}{t} = \frac{M_x}{t} \quad (5.74)$$

La ecuación (5.74) permite el cálculo de la transferencia lateral de carga total; se observa que es directamente proporcional al momento a rolido e inversamente proporcional a la trocha del vehículo. Cabe aclarar que la expresión (5.74) permite determinar la carga lateral transferida por el tren delantero y trasero del vehículo, es decir la total. En el capítulo 5.5.5 se analiza cómo se distribuye la transferencia lateral entre el tren delantero y trasero. De aquí en adelante se simboliza a la transferencia lateral total como *TLCT* y por medio de *TTD* y *TTT* a la carga transferida por el tren delantero y trasero respectivamente.

### 5.5.4 Transferencia longitudinal de carga

El fenómeno de transferencia longitudinal de carga o carga longitudinal transferida surge cuando el automóvil se encuentra en estado de aceleración o frenado, es decir cuando se desarrolla una aceleración en sentido longitudinal (eje x vehicular). La presencia de esta aceleración origina una fuerza de inercia que puede concentrarse en el centro de gravedad (CG) del coche; asimismo el producto de esta fuerza por la



altura del centro de gravedad (CG) causa un momento, denominado momento de cabeceo, que tiende a rotar la masa suspendida en torno a un eje transversal al coche. El momento de cabeceo debe ser equilibrado por los elementos elásticos que integran el sistema de suspensión delantero y trasero, por lo tanto existe un acortamiento y/o alargamiento de los resortes de suspensión. Este efecto provoca una pérdida de carga de los neumáticos traseros y un incremento en igual proporción por parte de los delanteros cuando el automóvil desarrolla un estado de frenado; en estado de aceleración el efecto es inverso.

A los fines del cálculo de la transferencia longitudinal se hace uso de la Figura 5.41 donde  $F_{zlf}$  y  $F_{zlr}$  representan las fuerzas que actúa sobre el tren delantero y trasero respectivamente. Si se asume simetría másica respecto al eje longitudinal del coche la carga sobre cada neumático delantero posee la misma magnitud, del mismo modo ocurre con los traseros. Tomando momento respecto al punto 1 y aplicando sumatoria vertical de fuerzas es posible averiguar la magnitud de  $F_{zlf}$  y  $F_{zlr}$ .

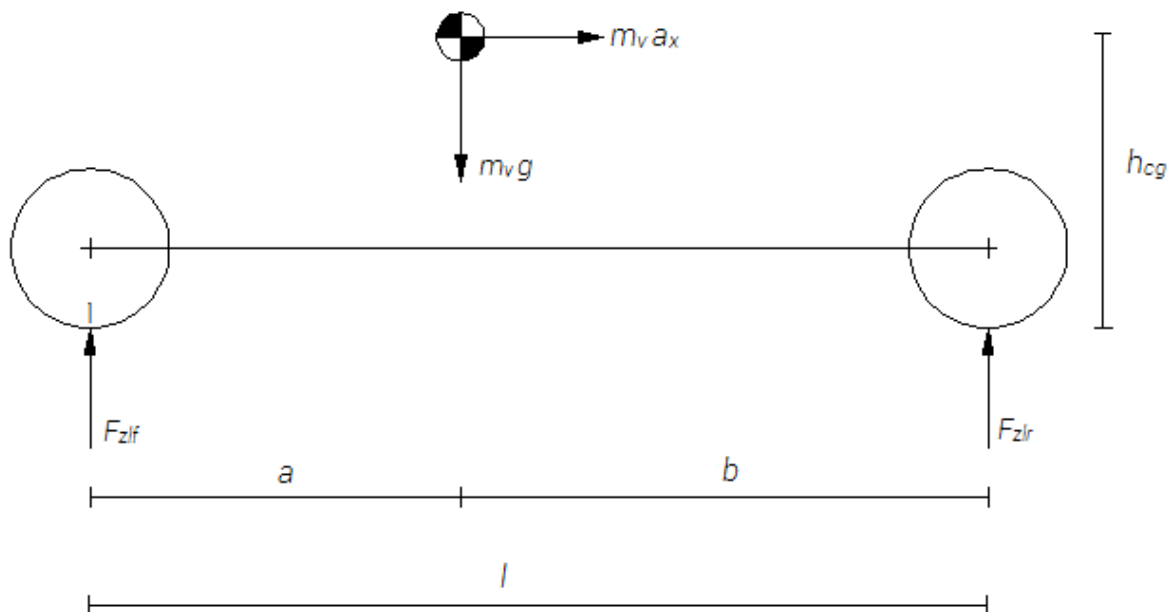
$$\begin{aligned}\sum M_1 &= 0 \\ F_{zlr}l - m_v a_x h_{cg} - m_v g a &= 0 \\ F_{zlr} &= m_v g \frac{a}{a+b} + \frac{m_v a_x h_{cg}}{a+b}\end{aligned}\quad (5.75)$$

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0 \\ m_v g - F_{zlr} - F_{zlf} &= 0\end{aligned}\quad (5.76)$$

De (5.77) 
$$F_{zlf} = m_v g - F_{zlr}$$

$$\begin{aligned}F_{zlf} &= m_v g - m_v g \frac{a}{a+b} - \frac{m_v a_x h_{cg}}{a+b} \\ F_{zlf} &= m_v g \frac{b}{a+b} - \frac{m_v a_x h_{cg}}{a+b}\end{aligned}\quad (5.78)$$

De (5.75) y (5.78) 
$$TCL_oT = \frac{m_v a_x h_{cg}}{a+b}\quad (5.79)$$



**Figura 5.41**  
Transferencia longitudinal de carga (extraído Ref. [1]).

La ecuación (5.79) muestra que la transferencia longitudinal de carga es directamente proporcional a la masa del vehículo, a la aceleración longitudinal y a la altura del centro de gravedad e inversamente proporcional a la distancia entre ejes. Las expresiones (5.75) y (5.78) permiten el cálculo de la carga normal sobre cada eje; están compuestas por dos términos donde el primero de ellos representa la carga estática y el segundo el incremento o disminución de carga debido a la transferencia longitudinal.

En condiciones reales de operación un vehículo está sujeto a transferencias laterales y longitudinales al mismo tiempo, por ejemplo, cuando se transita una curva y se acelera en el mismo momento. Por lo tanto para determinar la carga instantánea sobre cada neumático se debe considerar los dos efectos de manera simultánea.

### 5.5.5 Distribución de la transferencia lateral de carga

La transferencia lateral de carga total ha sido definida en el punto 5.5.3 y puede calcularse mediante la ecuación (5.74). La distribución de transferencia hace referencia a la proporción de la carga lateral transferida total que transfiere el tren delantero y el trasero. Esta distribución depende de dos parámetros:

- ✓ posición longitudinal del centro de gravedad,
- ✓ rigidez a rolido relativa entre el tren delantero y el trasero.

Cuanto menor sea la distancia del centro de gravedad al eje delantero o al trasero mayor será la carga transferida por el eje, es decir que la carga transferida por un eje es inversamente proporcional a la distancia desde el mencionado eje al centro de gravedad del automóvil.

La rigidez del sistema de suspensión delantero y trasero queda definida por la rigidez de los elementos elásticos que la constituyen, es decir por la rigidez de los resortes de suspensión y de la barra estabilizadora utilizada. A modo de ejemplo considérese la Figura 5.42 que muestra esquemáticamente el sistema delantero de suspensión de un Súper TC 2000 con una fuerza de magnitud conocida aplicada en el extremo inferior del portamasas. A y B constituyen la parrilla inferior y superior respectivamente, C el portamasas, D el resorte de suspensión y E la barra estabilizadora. La fuerza aplicada genera un momento respecto del punto 1 originando una rotación de la parrilla inferior igual a un ángulo  $\eta$ . La rigidez del tren delantero puede ser definida como el momento requerido para producir un desplazamiento angular unitario de la parrilla inferior. Si bien este sistema de suspensión es independiente, la barra estabilizadora vincula ambas ruedas delanteras, por lo tanto la definición anterior es válida siempre que uno de los portamasas permanezca inmóvil y al restante se le aplique la fuerza. Un análisis similar es válido en la definición de la rigidez del tren trasero, el cual está equipado en un Súper TC 2000 por un sistema de suspensión de eje rígido o eje arrastrado. La distribución de transferencia lateral de carga es directamente proporcional a la rigidez a rolido relativa entre ambos ejes; el eje con mayor rigidez transfiere más carga que el de menor rigidez.

En la realidad la posición del centro de gravedad de un coche queda definida durante la etapa de diseño; su modificación en condiciones de operación resulta difícil ya que requiere de una redistribución de los componentes del vehículo. Por lo tanto, el control de la distribución de transferencia lateral de carga se efectúa mediante un

manejo adecuado de los elementos elásticos constituyentes del sistema de suspensión delantero y trasero.

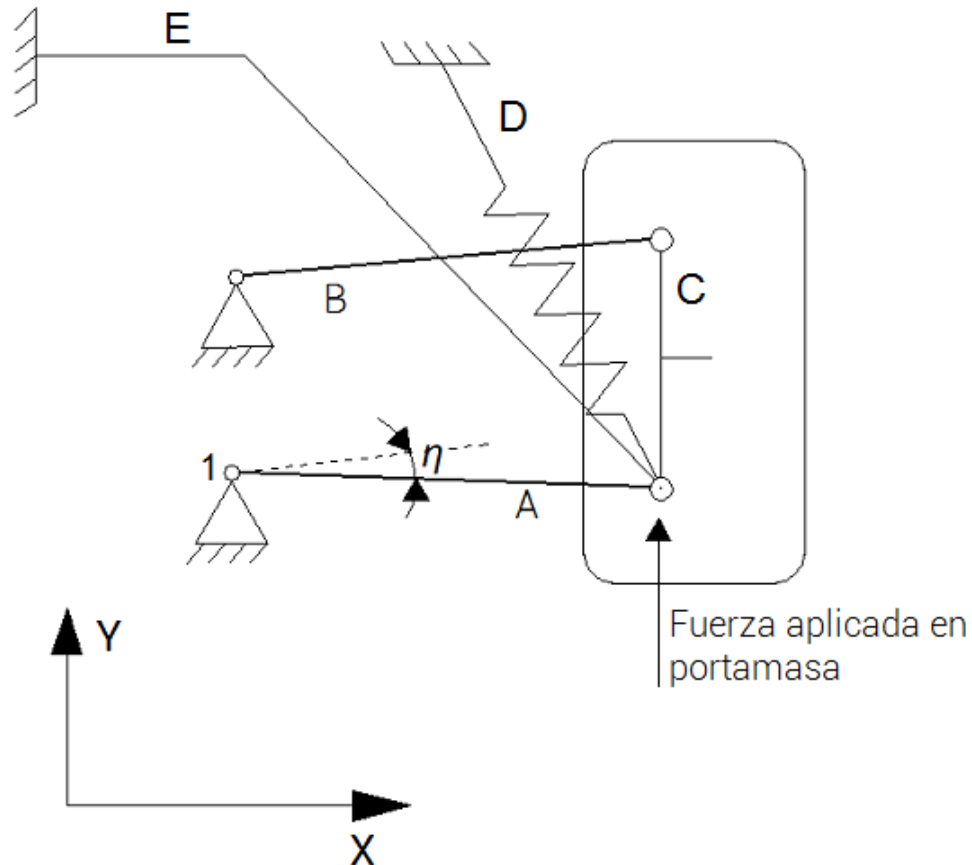


Figura 5.42  
Modelo esquemático sistema de suspensión delantera de un Súper TC 2000.

## 5.6 Rigidez del chasis

### 5.6.1 Introducción

El chasis de un vehículo se puede definir como una estructura cuyo propósito es conectar rígidamente el tren delantero y trasero y al mismo tiempo ofrecer puntos de vinculación para los diferentes sistemas del vehículo, así como proteger al conductor de una posible colisión. La propiedad fundamental de un chasis es su resistencia a la deformación, lo cual está caracterizado por su rigidez.

En los vehículos de competición los dos grandes tipos de chasis son los monocascos y los tubulares. En los primeros la diferencia entre el chasis y la

carrocería suele ser muy difusa ya que ambos constituyen un mismo elemento; en los segundos la diferencia es apreciable ya que la carrocería se vincula al chasis a través de puntos de conexión conocidos como nodos estructurales. Un vehículo de Súper TC 2000 posee un chasis tubular y una carrocería que se conecta a través de diferentes puntos. En esta categoría se puede afirmar que el chasis constituye un pórtico tridimensional denominado estructura de seguridad o jaula de seguridad. Las diversas ecuaciones que se utilizan para estudiar el comportamiento de un automóvil asumen que el chasis del mismo es infinitamente rígido, esto significa que no se flexiona ni se torsiona en condiciones de operación. La resistencia que ofrece el chasis a flexionar y a torsionar está determinado por dos propiedades muy importantes del mismo:

- ✓ rigidez a flexión,
- ✓ rigidez a torsión.

### 5.6.2 Rigidez a flexión del chasis

La rigidez flexional de un chasis generalmente es menos importante que la torsional. Hay dos razones para esto. Primero, la flexión del chasis no afecta significativamente la distribución de cargas. Segundo, un chasis con una buena rigidez torsional presenta una rigidez a flexión adecuada. Si se determina correctamente la rigidez torsional, la flexional no debería causar inconvenientes.

### 5.6.3 Rigidez torsional del chasis

La magnitud de rigidez a torsión del chasis es fundamental para obtener un vehículo con un rendimiento dinámico elevado. La razón de disponer un chasis con una rigidez a torsión adecuada es que éste debe servir como una plataforma rígida para el sistema de suspensión delantero y trasero, y así permitir que la transferencia lateral de carga pueda ser distribuida entre el tren delantero y trasero en función a la rigidez a rolido relativa del sistema de suspensión delantero y trasero. Una rigidez a torsión adecuada permite corregir las actitudes de sobreviraje y subviraje de un automóvil. Esto es así ya que una modificación de la rigidez a rolido del tren delantero y/o trasero permite alterar la distribución de transferencia de carga lateral entre ambos trenes, en consecuencia cambia la carga normal sobre los neumáticos y por

ende la fuerza lateral desarrollada por los mismos. Un chasis con una rigidez a torsión insuficiente produce que la distribución de la transferencia lateral de carga sea insensible a las modificaciones de rigidez a rolido de ambos trenes, por lo tanto dicha distribución queda determinada exclusivamente por la posición longitudinal del centro de gravedad del coche. En consecuencia no es posible compensar actitudes de sobreviraje o subviraje como así tampoco aprovechar los neumáticos al 100%. Efectos secundarios de una baja rigidez son las excesivas deformaciones que pueden originarse producto de impactos o colisiones pudiendo dañar la integridad física del conductor, fenómenos de resonancia debido a que la frecuencia natural adopta valores más bajos al disminuir la rigidez.

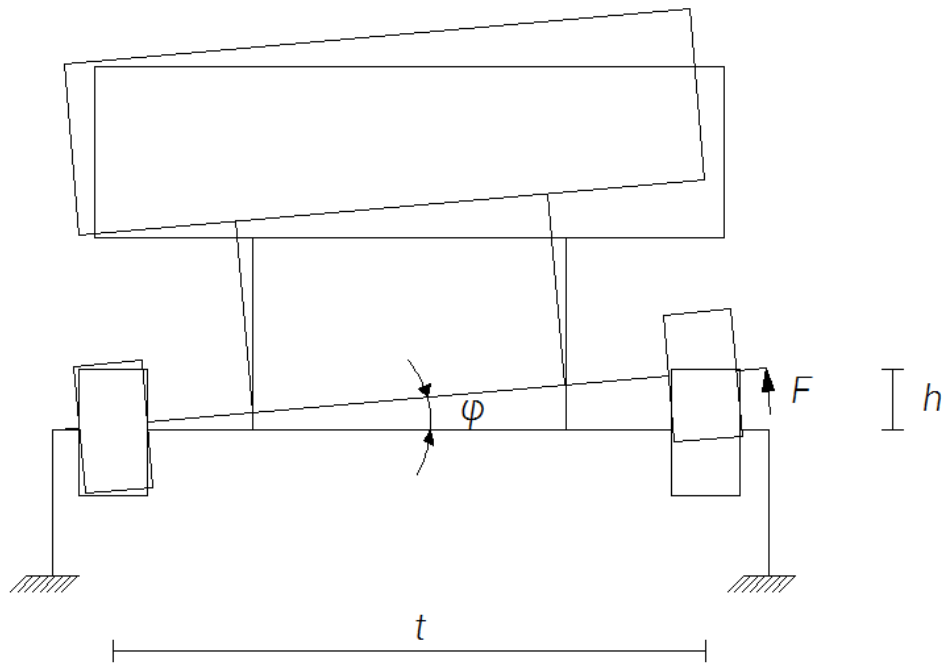
La rigidez de un chasis depende de varios factores entre los cuales se tiene:

- ✓ geometría de los tubos estructurales empleados, diámetro y espesor,
- ✓ orientación de tubos constituyentes,
- ✓ material empleado, caracterizado por su módulo de elasticidad.

#### 5.6.4 Método práctico para el cálculo de la rigidez torsional

A continuación se describe el método empleado por la mayoría de los equipos de competición de categorías nacionales para determinar experimentalmente un parámetro, que es referenciado como rigidez torsional del chasis.

El método empleado consiste en empotrar tres de los cuatro puntos de vinculación del vehículo con la superficie de rodadura y aplicar un esfuerzo conocido en el restante. Para ello, se requiere quitar los neumáticos y conectar rígidamente tres de los cuatro portamasas a una estructura que presente una rigidez superior a la que se desea medir. En este caso, se empotra los dos portamasas traseros y uno de los delanteros. Por otra parte, es necesario reemplazar los cuatro amortiguadores y los correspondientes resortes de suspensión por cuerpos rígidos con la finalidad de restringir el movimiento de la suspensión delantera y trasera. En el portamasa libre se aplica una fuerza  $F$  cuya magnitud debe ser conocida; se mide el ángulo  $\varphi$  rotado por el tren delantero o bien la altura  $h$  y se calcula la rigidez torsional tal como expresa la ecuación (5.80). La Figura 5.43 representa esquemáticamente el método descripto.



**Figura 5.43**  
Esquema correspondiente a un ensayo a torsión.

$$K_t = \frac{M_{torsor}}{\varphi} \quad (5.80)$$

donde

$$M_{torsor} = Ft \quad y \quad \varphi = \tan^{-1}\left(\frac{h}{t}\right)$$

Es necesario aclarar que se desprecia el peso propio del vehículo.

En ciertos casos, hay componentes del vehículo que son diseñados para aportar rigidez, en consecuencia no deben ser quitados del vehículo. En el Súper TC 2000 el motor no contribuye significativamente a la rigidez torsional ya que está conectado a la estructura de seguridad mediante elementos elásticos y disipativos como ser tacos de goma; sin embargo en el caso de una motocicleta el motor aporta rigidez flexional.

Desde el punto de vista estructural, la determinación de un valor más aproximado a lo que se entiende como rigidez torsional requeriría mínimamente la aplicación de un par de fuerzas iguales y de sentido contrario en el tren delantero. Este procedimiento es explicado en detalle en el libro de W.F. Milliken y D.L. Milliken, referencia [1]. Recuérdese que sólo se logra un esfuerzo torsional puro en el chasis, si se aplica un

momento en el Centro de Corte de la viga longitudinal que lo representa, ver referencia [9]. Un análisis estructural del método presentado permite observar que el automóvil es sometido a un estado de flexo-torsión y no a un estado de torsión pura. En consecuencia, mediante este método se mide una rigidez combinada que no corresponde exactamente con lo que, en Cálculo Estructural se entiende como rigidez torsional. Sin embargo, debido a la sencillez operativa, este valor es el valor de referencia utilizado por la mayoría de los equipos de competición.

## 5.7 Sistemas de suspensión

### 5.7.1 Introducción

El sistema de suspensión de un vehículo es el mecanismo que vincula las ruedas directamente con el chasis; desde otro punto de vista conecta las masas no suspendidas del coche con las masas suspendidas.

Debido a que un automóvil rígido constituido con más de tres neumáticos es un sistema hiperestático, es necesario que las ruedas estén conectadas al chasis del automóvil mediante un sistema lo suficientemente flexible para garantizar el contacto permanente de estas con la superficie de la tierra. Este sistema deformable se denomina suspensión. Aun así, un vehículo de tres ruedas necesita del sistema de suspensión: este disminuye la transmisibilidad de vibraciones al habitáculo y asegura, desde el punto de vista dinámico, que el contacto de las ruedas con el suelo sea el mejor posible, lo que mejora la "adherencia" del neumático y contribuye a la mejor respuesta y maniobrabilidad del vehículo. Para ejecutar su tarea un sistema de suspensión debe:

- ✓ permitir un intercambio de fuerzas entre el neumático y la superficie de rodadura,
- ✓ absorber y suavizar los impactos que se reciben debido a las irregularidades de la carretera y se transmiten al chasis,
- ✓ garantizar el contacto permanente del neumático con la superficie de la tierra.



La rueda debe ser libre de moverse en dirección casi perpendicular al plano de la tierra, sumado a su rotación que permite el avance del coche y al movimiento de giro generado por el sistema de dirección. El movimiento vertical depende de los vínculos del sistema de suspensión.

El comportamiento dinámico de un automóvil no sólo depende de las propiedades másicas del coche, de las propiedades geométricas, de las cargas sobre los neumáticos, de los neumáticos empleados sino también de la geometría del sistema de suspensión. Las suspensiones pueden ser divididas en tres clases:

- ✓ suspensión independiente: no existe conexión mecánica entre los neumáticos de un mismo eje, las fuerzas que actúan en una de las ruedas no afectan a la otra,
- ✓ suspensión dependiente o de eje rígido: proporciona una conexión rígida entre las ruedas de un mismo eje, el movimiento de una rueda cuyo origen obedece a irregularidades del terreno afecta a la rueda acoplada,
- ✓ suspensión semi-independiente o semi-rígida: presentan características intermedias a las dos categorías anteriores. En la práctica esta categoría incluye las barras de torsión.

## 5.7.2 Componentes del sistema de suspensión

Un sistema de suspensión se encuentra compuesto por una serie de elementos entre los que se pueden mencionar:

- ✓ tensores o elementos de vinculación: estos elementos son los responsables de conectar la rueda con el chasis del automóvil, determinan el movimiento relativo de la rueda respecto al chasis. Asimismo son los encargados de transferir a la estructura del vehículo los esfuerzos que ingresan por medio de los neumáticos. Están conectados al chasis mediante elementos que restringen tres grados de libertad, denominados rótulas esféricas;
- ✓ miembros elásticos: incluyen los resortes lineales y barras estabilizadoras, de torsión o anti-rolido. Vinculan elásticamente la rueda al chasis, son capaces de almacenar energía elástica de deformación que luego restituyen;

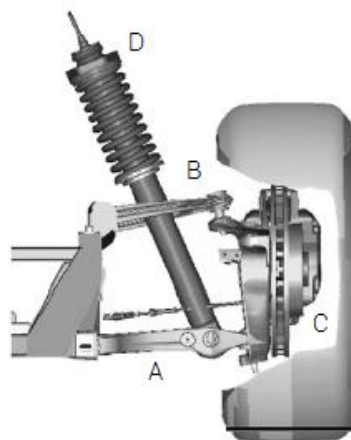
- ✓ amortiguadores: estos elementos tienen como finalidad disipar la energía elástica almacenada por los miembros elásticos con la finalidad de reducir las amplitudes de movimiento de la rueda y evitar fenómenos de resonancia.

### 5.7.3 Suspensión independiente

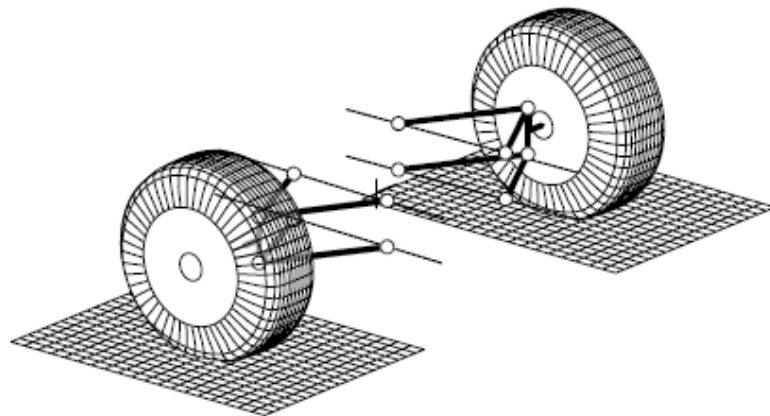
Las suspensiones independientes de mayor difusión son la McPherson y la de paralelogramo deformable o también conocida como suspensión de doble brazo. La mayoría de los vehículos de calle poseen un sistema de suspensión delantera McPherson, mientras que los coches de competición están equipados fundamentalmente por un sistema de paralelogramo deformable como es el caso del Súper TC 2000. En el presente texto se considera únicamente la suspensión que equipa a un coche de Súper TC 2000.

#### 5.7.3.1 Suspensión de doble brazo o de paralelogramo deformable

En la Figura 5.44 se observa una suspensión de doble brazo. Está constituida por un brazo o parrilla inferior (A) vinculada al chasis mediante dos rótulas esféricas, un brazo superior (B) vinculado del mismo modo que el inferior, el portamasas (C) que se conecta mediante rótulas a los extremos de ambos brazos y el sistema resorte-amortiguador (D) que puede vincularse entre la parrilla inferior y el chasis, o bien entre el brazo superior y el chasis. La Figura 5.45 muestra una vista en perspectiva del sistema de suspensión en el tren delantero.

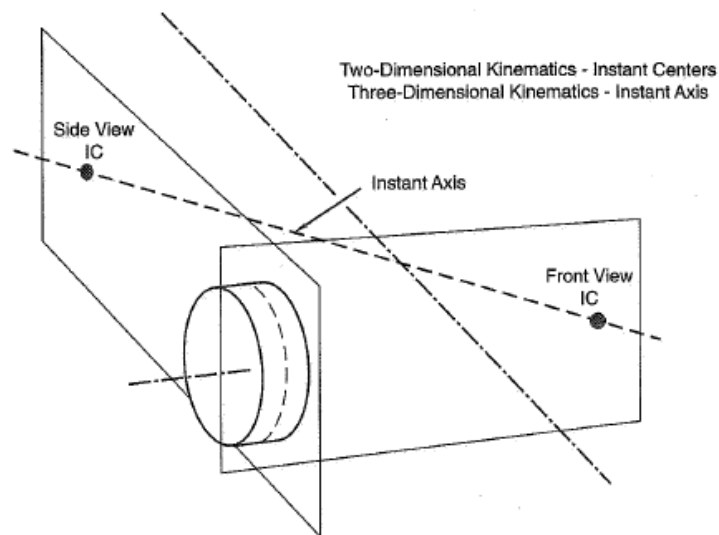


**Figura 5.44**  
Sistema de suspensión de doble brazo (extraído Ref. [3]).



**Figura 5.45**  
Sistema de suspensión de doble brazo (extraído Ref. [3]).

En el diseño de la suspensión es conveniente separar el problema tridimensional en dos problemas bidimensionales considerando una vista frontal y una lateral. Para esto se intercepta dos planos verticales y perpendiculares entre sí a través del centro de la rueda, siendo uno de ellos paralelo al eje longitudinal del coche y el otro perpendicular a dicha línea. La Figura 5.46 muestra lo descrito con anterioridad.



**Figura 5.46**  
Estudio bidimensional sistema de suspensión (extraído Ref. [1]).

### Vista frontal

La vista frontal del sistema de suspensión permite analizar el centro instantáneo de rotación, el centro de rolido, la variación de la comba y el "scrub" del neumático.

El centro instantáneo de rotación es un punto que resulta de la intersección del eje de rotación del sistema de suspensión con el plano frontal. Se obtiene mediante la intersección de dos líneas, una de ellas contenida en el plano del brazo de suspensión superior y la otra contenida en el plano del brazo inferior. La Figura 5.47 muestra el centro instantáneo de rotación  $IC$ . Por otro lado los dos brazos pueden ser reemplazados por un único cumpliendo el mismo efecto, tal como se muestra en el dibujo inferior de la Figura 5.47.

Se define como centro de rolido  $RC$  al punto que se obtiene de interceptar la línea que vincula el centro de parche de contacto del neumático delantero izquierdo con el centro instantáneo de rotación  $IC$  del neumático derecho y la línea análoga al neumático delantero derecho. La altura de dicho punto respecto al plano de la tierra se denomina altura del centro de rolido  $RCH$ . La Figura 5.48 muestra cómo se obtiene el centro de rolido.

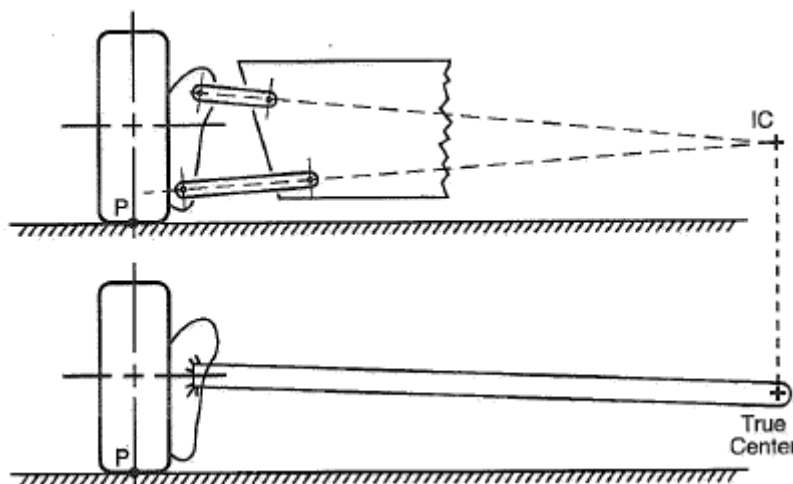


Figura 5.47  
Centro instantáneo de rotación (extraído Ref. [1]).

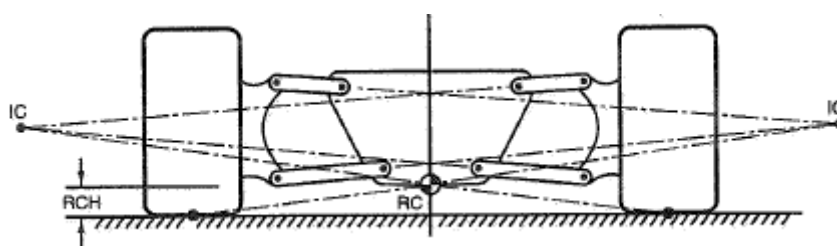
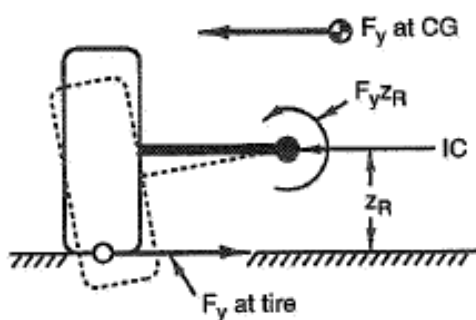


Figura 5.48  
Altura del centro de rolido (extraído Ref. [1]).

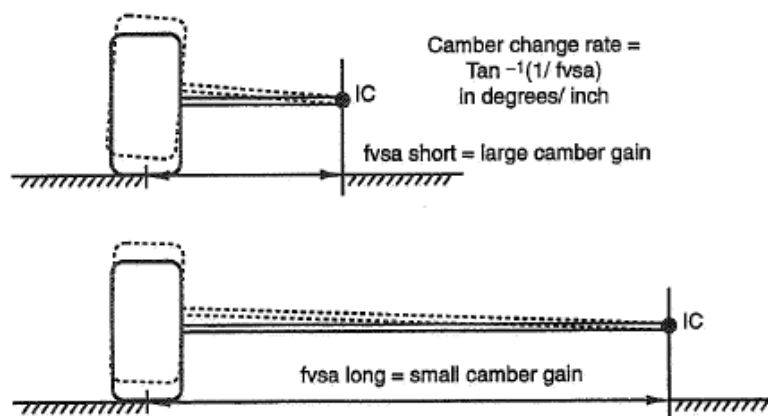
Cuando un automóvil toma una curva, la fuerza centrífuga que actúa en el centro de gravedad debe ser resistida por las fuerzas laterales que desarrollan los neumáticos. Esta fuerza inercial que actúa en el centro gravitacional puede trasladarse al centro de rolido con el momento correspondiente; cuanto más alto es el centro de rolido menor será este momento, del mismo modo para centros de rolido más bajos mayor será el momento que debe colocarse al trasladar la fuerza centrífuga. En conclusión cuanto mayor es la altura del centro de rolido menor será el ángulo de rolido  $\phi$  de la masa suspendida, o bien cuanto menor sea la altura del centro de rolido el ángulo de rolido  $\phi$  será mayor.

Por otro lado, si el centro de rolido se ubica por encima de la superficie de la tierra, la fuerza lateral que desarrolla el neumático produce un momento respecto al centro instantáneo de rotación que empuja las ruedas hacia abajo y tiende a elevar a la masa suspendida. Este efecto se conoce como "jacking". Si el centro de rolido se ubica por debajo de la superficie terrestre, el momento desarrollado tiende a empujar la masa suspendida hacia abajo. Estos efectos se muestran en la Figura 5.49.

Mientras el centro de rolido es una función de la altura y de la longitud del centro instantáneo de rotación, la variación de comba del neumático es solamente una función de la longitud del centro instantáneo de rotación. Cuando mayor sea la distancia entre el centro instantáneo de rotación y el neumático menor será la variación de comba. Esto se observa en la Figura 5.50.

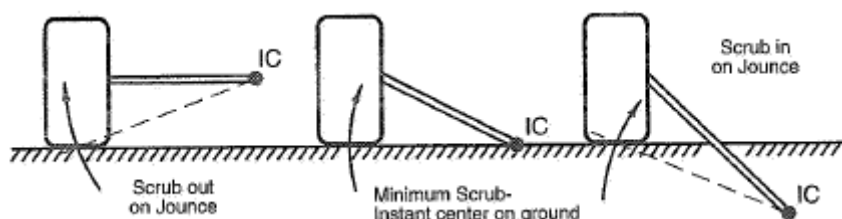


**Figura 5.49**  
Efecto Jacking (extraído Ref. [1]).



**Figura 5.50**  
 Variación de la comba con la posición del centro instantáneo de rotación (extraído Ref. [1]).

Otra variable de análisis resultante de la vista frontal es el "scrub", el cual es el movimiento lateral del neumático relativo a la tierra; se encuentra presente en todos los sistemas de suspensión. La cantidad de scrub es una función de la longitud del centro instantáneo de rotación y de su posición respecto a la tierra. Cuando el centro instantáneo de rotación está por encima del nivel de superficie de rodadura y en el interior del coche, el neumático se desplazará hacia afuera cuando este se eleve; si el centro instantáneo se encuentra debajo de la tierra y en el interior del coche el neumático se desplazará hacia adentro cuando este se eleve; el scrub será mínimo cuando el centro instantáneo se encuentre sobre la superficie de la tierra. La Figura 5.51 muestra los tres casos mencionados, siendo el caso del medio correspondiente a scrub mínimo.



**Figura 5.51**  
 El scrub es una función de la altura el centro instantáneo de rotación (extraído Ref. [1]).

### Vista lateral

La vista lateral de los brazos de suspensión permite controlar los movimientos y fuerzas en dirección de avance y retroceso del coche. Los parámetros típicos son

anti-dive, anti-squad y anti-lift. El centro instantáneo de rotación puede ubicarse por delante o por detrás y por debajo o por encima del centro de la rueda. Típicamente el centro instantáneo de rotación se encuentra por encima y por detrás del centro de la rueda en las suspensiones delanteras, y está por delante y por encima en las traseras. El efecto "anti" en las suspensiones es un término que describe el acoplamiento longitudinal de fuerza vertical entre la masa suspendida y la no suspendida. Los resultados dependen exclusivamente del ángulo o pendiente de los brazos de suspensión observados lateralmente.

La transferencia longitudinal de carga producto de un estado de aceleración o frenado es función de la distancia entre ejes, la masa vehicular, la altura del centro de gravedad y la aceleración longitudinal. La cantidad "anti" de suspensión no modifica la carga transferida sino la actitud de cabeceo del automóvil. La Figura 5.52 representa un coche sometido a un estado de frenado; el balance de frenos representa la fuerza de frenado en el tren delantero o trasero como una fracción de la fuerza de frenado total. El anti-dive representa el hundimiento de la región delantera del coche, mientras que el anti-lift mide la elevación de la región trasera. El anti-dive delantero está dado por la expresión la (5.81) cual puede derivarse mediante un análisis de la figura anterior.

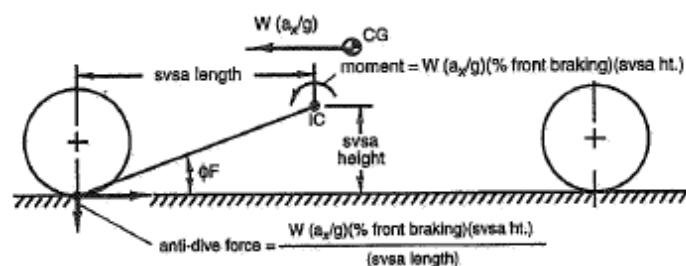


Figura 5.52  
 Cálculo del anti-dive (extraído Ref. [1]).

$$\% \text{ anti - dive} = \frac{m_v a_x (\% \text{ freno delantero})(\text{altura IC} / \text{longitud IC})}{m_v a_x (h_{cg} / l)}$$

$$\% \text{ anti - dive} = (\% \text{ freno delantero})(\tan \Phi_F)(l / h_{cg}) \quad (5.81)$$

Si la suspensión es 100% "anti", toda la transferencia longitudinal es soportada por los brazos de suspensión y nada por los resortes, por lo tanto no se produce ninguna deflexión cuando el coche acelera o frena. Por otro lado, en una suspensión 0% "anti" toda la transferencia longitudinal es reaccionada por los resortes de suspensión y esta última se deflejará, nada de la transferencia va a ser soportada por los brazos de suspensión. El anti-lift trasero se determina mediante la ecuación (5.82).

$$\% \text{ anti - dive} = (\% \text{ freno trasero})(\tan \Phi_R)(l/h_{cg}) \quad (5.82)$$

Es posible determinar el anti-squad, que representa el anti hundimiento de la región trasera del coche, para un automóvil de tracción trasera y el anti-lift que representa la anti elevación frontal para un vehículo de tracción delantera. En ambos casos se considera que el coche se encuentra en estado de aceleración. Mediante las expresiones (5.83) y (5.84) se puede determinar estas variables.

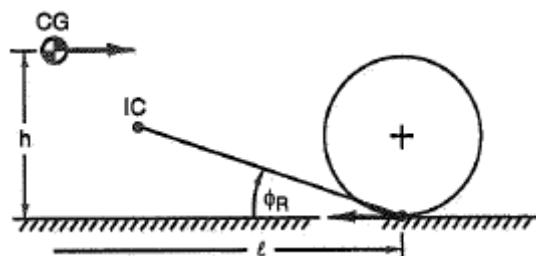


Figura 5.53  
 Anti-squad para vehículo de tracción trasera (extraído Ref. [1]).

$$\% \text{ anti - squad} = (\tan \Phi_R)(l/h_{cg}) 100 \quad (5.83)$$

$$\% \text{ anti - lift} = (\tan \Phi_F)(l/h_{cg}) 100 \quad (5.84)$$

Para una explicación más detallada y minuciosa de estos conceptos geométricos puede recurrirse a la obra de los autores W.F. Milliken y D.L. Milliken, W.F. Milliken y D.L. Milliken, "Race Car Vehicle Dynamics", referencia [1].

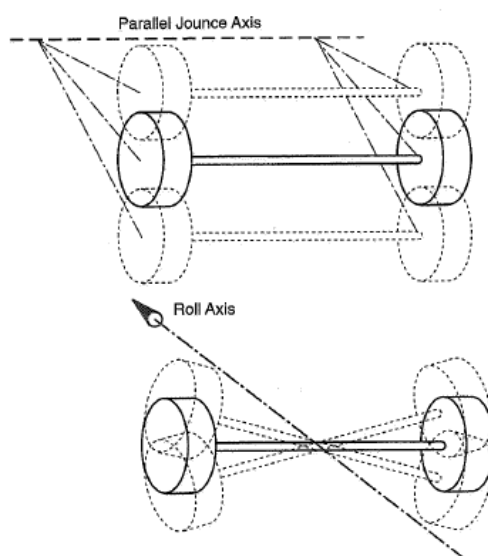
### 5.7.4 Suspensión dependiente

Las suspensiones dependientes son aquellas donde ambos neumáticos se encuentran conectados entre sí mediante un tubo, una viga o alguna estructura rígida. Presentan dos movimientos relativos al chasis del coche: paralelo y de rolo tal como



muestra la Figura 5.54. El eje de movimiento paralelo se ve como una línea en la vista trasera y como un centro instantáneo de rotación en la vista lateral; el eje de rolido se ve como una línea en la vista lateral y como un centro instantáneo de rotación en la vista trasera. Estos dos ejes son los que controlan las características de este tipo de suspensión. La posición del centro instantáneo de rotación en la vista lateral permite controlar las fuerzas y movimientos entre el eje y el chasis del automóvil. Los parámetros típicos de control son el anti-lift y el anti-squad, los cuales son calculados del mismo modo que para un sistema de suspensión independiente.

El concepto de eje de rolido es un poco diferente que el centro instantáneo utilizado en la determinación de la geometría de un sistema de suspensión independiente. En un sistema de eje rígido hay que concentrarse en el movimiento a rolido del eje como un conjunto y no sólo de un neumático. Para explicar la determinación del eje de rolido como asimismo la altura del centro de rolido se considera el eje rígido de la Figura 5.55. La determinación del eje de rolido se efectúa mediante una doble proyección y el empleo de una vista en planta y una vista lateral. En la vista superior se proyectan los brazos inferiores y superiores interceptándose en los puntos A y B respectivamente. Ambos puntos se proyectan en la vista lateral sobre la línea que resulta de extender el brazo inferior y superior, luego estos puntos se conectan mediante una recta denominada eje instantáneo de rolido.



**Figura 5.54**  
Movimientos suspensión dependiente (extraído Ref. [1]).

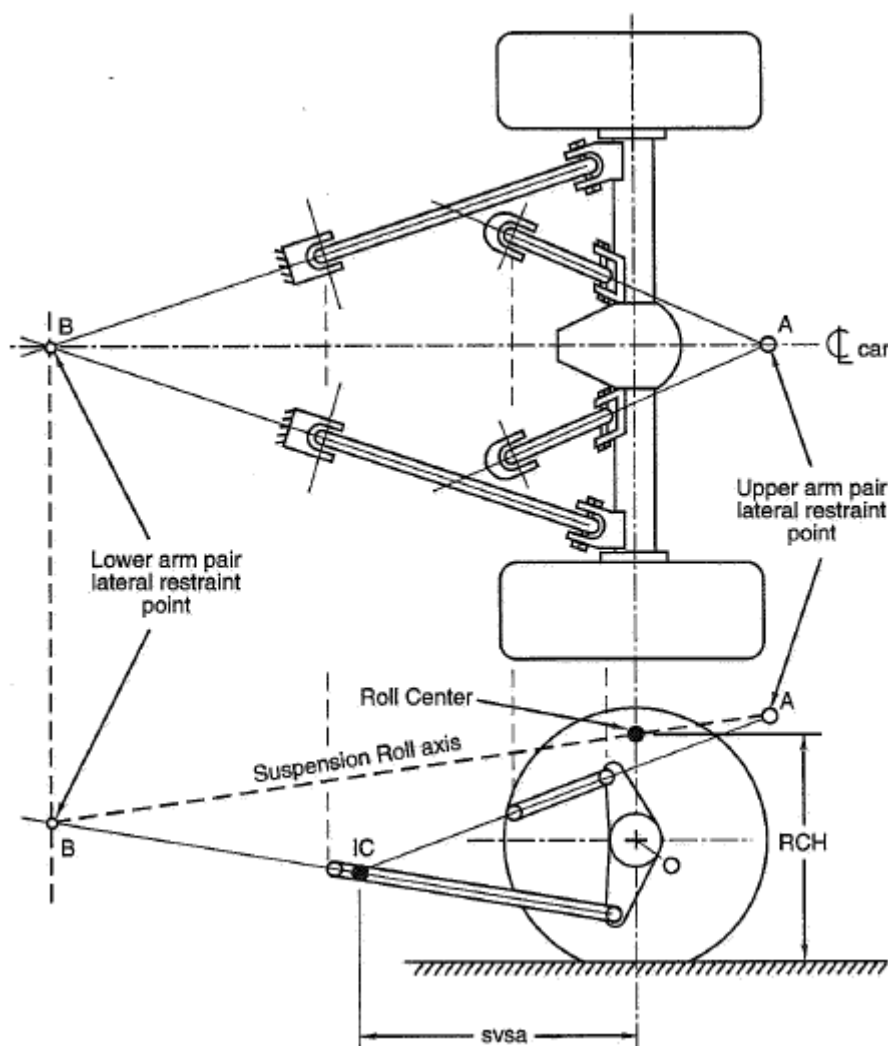


Figura 5.55

Eje de rolido y centro de rolido para un sistema de suspensión dependiente (extraído Ref. [1]).

El punto resultante de la intersección del eje instantáneo de rolido y el plano vertical que atraviesa los centros de ambas ruedas se denomina centro de rolido, lo cual puede observarse en la Figura 5.55. Del mismo modo que en las suspensiones independientes, el centro de rolido es un punto teórico donde una fuerza lateral puede ser aplicada sin que role la masa suspendida. En las suspensiones independientes la altura del centro de rolido es una medida directa de las fuerzas de acople entre la masa suspendida y la no suspendida, en un sistema de eje rígido esto no es siempre así ya que la fuerza de acople depende del tipo y del diseño de los elementos de restricción lateral. Para una explicación más detallada y minuciosa de estos conceptos geométricos puede recurrirse a la obra de los autores W.F. Milliken y D.L. Milliken, "Race Car Vehicle Dynamics", referencia [1].

## 5.8 Amortiguadores

### 5.8.1 Introducción

El amortiguador es un componente del sistema de suspensión que tiene como finalidad neutralizar las oscilaciones de la masa suspendida originadas por el elemento elástico al adaptarse a las irregularidades del terreno transformando la energía que almacena el resorte en calor.

### 5.8.2 Amortiguadores hidráulicos telescópicos

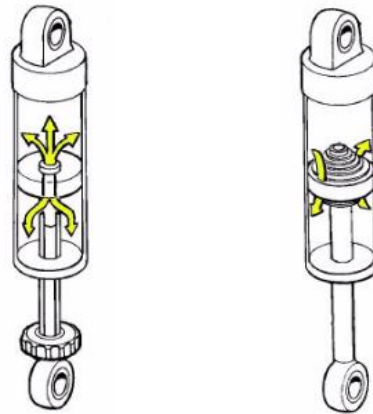
En los amortiguadores hidráulicos telescópicos la fuerza desarrollada por los amortiguadores es función creciente de la velocidad. Básicamente, este tipo de amortiguadores consisten en un pistón que trabaja dentro de un cilindro en el que hay aceite. Sobre el pistón existen una serie de orificios y unas válvulas pre-comprimidas que permiten el paso de aceite desde un lado del pistón hacia el otro lado cuando la presión supera un cierto valor. Los orificios representan el paso permanente mientras que las válvulas el paso de apertura por presión. La Figura 5.56 representa un amortiguador telescópico actual mientras que la Figura 5.57 permite observar los orificios calibrados y las válvulas de apertura por presión. Cuando la velocidad de ambos extremos del amortiguador es baja, las válvulas de apertura por presión permanecen cerradas y el aceite pasa a través de los orificios de paso permanente. Una vez que la presión del aceite alcanza las de tarado de las válvulas de presión, éstas empiezan a abrirse y dejan pasar el aceite. Cuanto más aumenta la presión, las válvulas se abren más hasta que su apertura es completa y la ley de fuerza en el amortiguador queda controlada por los nuevamente por el paso de aceite a través de los orificios de paso permanente. Normalmente las válvulas de compresión y de extensión son diferentes, lo que posibilita que el esfuerzo en compresión sea mayor o menor que en extensión para una misma velocidad.

La Figura 5.58 muestra curvas características de un amortiguador telescópico. En esta figura se puede ver que el comportamiento del amortiguador telescópico es no lineal; la fuerza desarrollada es directamente proporcional a la velocidad hasta un

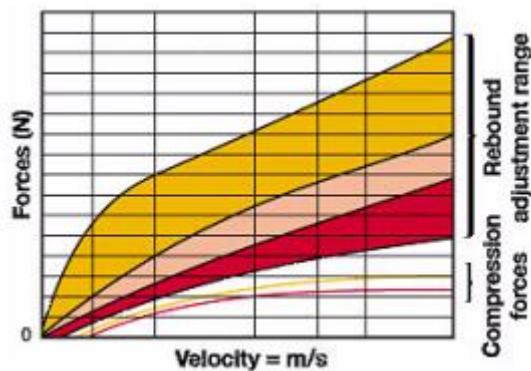
cierto valor de velocidad donde se produce un cambio de pendiente. Esta conducta se debe a que a partir de dicha velocidad se produce la apertura de la válvula, por lo tanto la resistencia al paso de fluido disminuye.



**Figura 5.56**  
Amortiguador telescópico actual (extraído Ref. [5]).



**Figura 5.57**  
Orificios calibrados y válvulas de apertura por presión (extraído Ref. [5]).



**Figura 5.58**  
Curva característica de un amortiguador hidráulico telescópico (extraído Ref. [5]).

## 6. Método matricial de la rigidez

### 6.1 Generalidades

Los métodos de cálculo matricial de estructuras son un conjunto de métodos que tienen en común organizar la información en forma de matrices. En estos métodos, todas las relaciones entre las distintas partes de una estructura dan lugar a un sistema de ecuaciones con un alto número de variables pero donde no se han realizado suposiciones o simplificaciones en las que se pierda información relevante. Esta generalidad, junto a la estructura de información en matrices, permite que su planteamiento y resolución pueda ser ejecutada de manera automática por medio de programas computacionales, lo que ha hecho que en la actualidad sean práctica habitual en ingeniería.

El método de la rigidez o método de los desplazamientos es un método de cálculo matricial aplicable a estructuras hiperestáticas de barras que presentan un comportamiento elástico lineal, por lo que se supone que el material que constituye a la estructura obedece la Ley de Hooke. Esta ley establece que las tensiones actuantes son directamente proporcionales a las deformaciones siendo el módulo de elasticidad longitudinal la constante de proporcionalidad. Un comportamiento lineal significa que el material trabaja dentro de la zona elástica, es decir no existen deformaciones plásticas una vez retiradas las cargas actuantes.

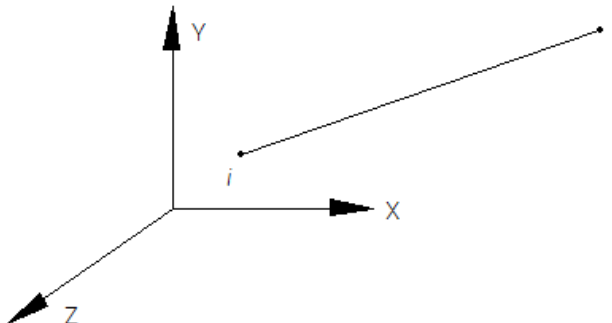
Una estructura en general puede considerarse formada por elementos conectados que poseen una, dos o tres dimensiones. En realidad todo elemento tiene largo, ancho y espesor, pero si el ancho y el espesor son pequeños respecto a la longitud -se puede considerar al elemento como unidimensional-. Una barra es un elemento

unidimensional. Muchos problemas reales pueden ser aproximados eficientemente mediante estructuras de barras, logrando simplicidad de cálculo.

El método de la rigidez, utilizado en este trabajo, permite determinar la distribución de fuerzas dentro de la estructura y el estado de deformada en forma eficiente y precisa.

## 6.2 Tipos de estructuras

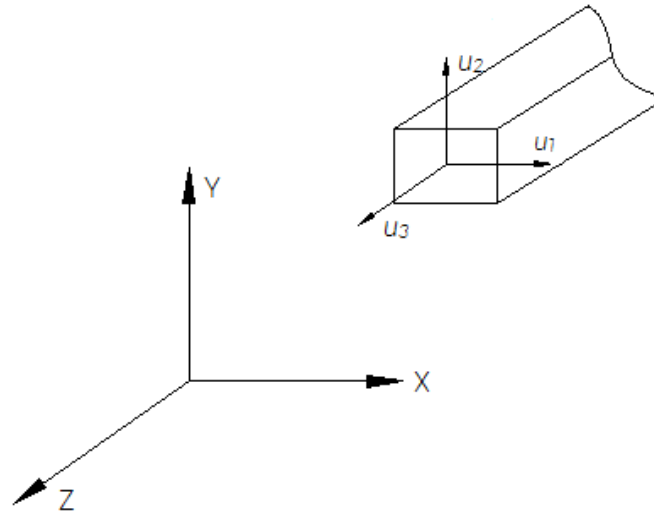
La Figura 6.1 muestra un elemento de barra orientado arbitrariamente en el espacio respecto a un sistema de referencia X-Y-Z. Cada barra está caracterizada por un nodo inicial  $i$  y un nodo final  $j$ , un largo  $l$ , una sección  $A$ , un módulo de elasticidad longitudinal  $E$ , un módulo de elasticidad transversal  $G$ . Los nodos son los elementos mediante los cuales se produce la conexión entre las diferentes barras de la estructura. En el espacio tridimensional cada nodo tiene asociado seis grados de libertad, tres desplazamientos y tres giros.



**Figura 6.1**  
Barra orientada arbitrariamente en el espacio.

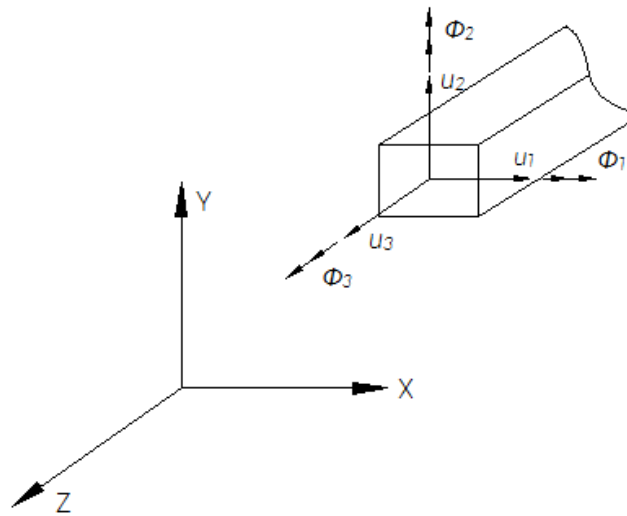
Entre los tipos de estructuras que existen, son interés dos de ellas: los reticulados y los pórticos. Los reticulados son estructuras conformadas por barras prismáticas conectadas entre sí mediante nudos articulados a los que convergen los ejes baricéntricos de las piezas concurrentes. Las cargas exteriores se suponen aplicadas en los nodos, asimismo se considera que estos no tienen capacidad de transmitir momentos flectores entre las barras, por lo tanto las cargas son equilibradas mediante esfuerzos axiales. Los nodos de un elemento de barra de reticulado

tridimensional poseen tres grados de libertad, caracterizados por los desplazamientos  $u_1$   $u_2$   $u_3$  tal como muestra la Figura 6.2.



**Figura 6.2**  
Grados de libertad de un nodo de reticulado.

Los p´rticos tridimensionales son estructuras constituidas por barras prismáticas interconectadas mediante nodos rígidos a los que convergen los ejes baricéntricos de las piezas concurrentes. A diferencia del reticulado, las cargas exteriores pueden estar aplicadas en los nodos y en el tramo comprendido entre ellos. Al estar conformada por nodos rígidos, estos son capaces de transmitir momentos flectores y torsores entre barras como así también pueden existir esfuerzos axiales. Los nodos de un elemento de barra de p´rtico poseen seis grados de libertad en el espacio, corresponden a los tres desplazamientos  $u_1$   $u_2$   $u_3$  y los tres giros asociados  $\phi_1$   $\phi_2$   $\phi_3$ . La Figura 6.3 muestra los grados de libertad de los nodos de un elemento de barra de p´rtico. Si se trabaja con estructuras planas se reduce el número de grados de libertad por nodo; en el caso de un reticulado existen dos grados de libertad por nodo correspondiente a dos desplazamientos, mientras que en un p´rtico son dos desplazamientos y una rotaci3n.



**Figura 6.3**  
Grados de libertad de un nodo de pórtico.

## 6.3 Solución completa de problemas de mecánica estructural

La solución completa de problemas de mecánica estructural consiste en determinar:

- ✓ *esfuerzos y*
- ✓ *desplazamientos.*

Para lograr estos objetivos deben necesariamente utilizarse en alguna etapa de cálculo las siguientes relaciones:

- ✓ *ecuaciones de equilibrio,*
- ✓ *condiciones de compatibilidad y las*
- ✓ *relaciones constitutivas, siendo además necesario establecer las*
- ✓ *condiciones de vínculo.*

La resolución de un problema estructural aplicando el método de la rigidez requiere el planteo y resolución de ecuaciones de equilibrio cuyas incógnitas son los desplazamientos. El número de ecuaciones está asociado al grado de indeterminación geométrica. Una vez conocido los desplazamientos se determinan los esfuerzos en



los nodos estructurales y por ende es posible conocer los esfuerzos en diversos puntos de la estructura.

Modelar cada elemento de una estructura consiste en establecer qué relación existe entre los desplazamientos y giros que sufren los nodos extremos y las solicitaciones (fuerzas y momentos) asociadas también en los extremos. Si se denomina  $\{U_i\}$  al vector desplazamientos y  $\{P_i\}$  al vector de solicitaciones es posible demostrar que, para pequeños desplazamientos, existe una relación lineal entre ellos de modo tal que:

$$[K_i]\{U_i\} = \{P_i\} \quad (6.1)$$

siendo  $[K]$  es la matriz de rigidez del elemento de barra que se está modelando. Para todas las barras de la estructura se debe determinar la matriz de rigidez y así poder ensamblar una matriz de rigidez global representativa de toda la estructura. Las matrices de rigidez adoptan diferentes formas según el tipo de estructura que se analice. Por lo tanto, el planteo general del método de la rigidez adopta la forma establecida por la ecuación (6.2).

$$[K]\{U\} = \{P\} \quad (6.2)$$

$\{U\}$  es el vector desplazamiento generalizado (desplazamientos y giros),  $\{P\}$  es el vector de carga generalizado (fuerzas y momentos) y  $[K]$  es la matriz de rigidez global de la estructura que depende de las propiedades elásticas y geométricas de cada barra y además de la forma en que se vinculan.

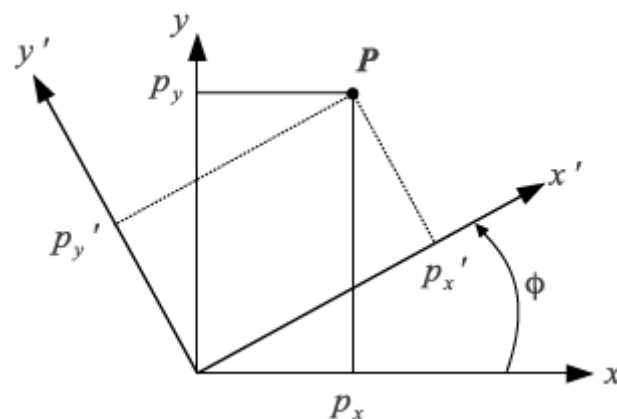
## 6.4 Sistemas de coordenadas

Se denomina sistema de referencia a un sistema de coordenadas cartesiano que permite la definición geométrica de la estructura. En el cálculo matricial de estructuras y fundamentalmente en el método de la rigidez se utilizan dos grandes sistemas de coordenadas:

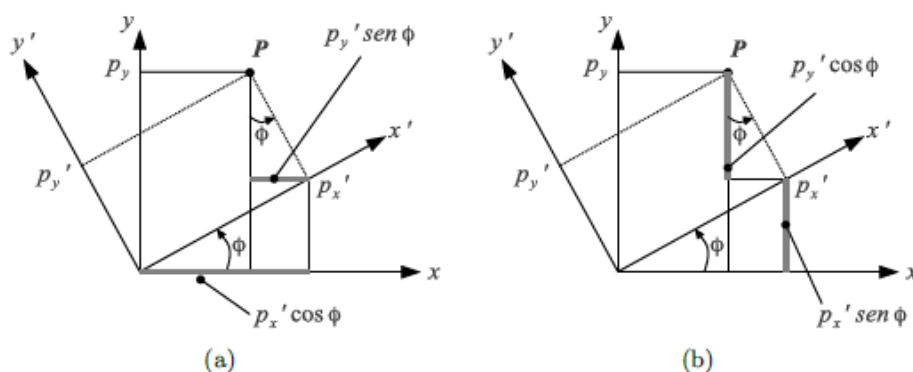
- ✓ sistema de coordenadas locales,
- ✓ sistema de coordenadas globales.

Cada elemento de barra posee un sistema de referencia local, de forma que su eje  $x$  positivo va desde el nodo inicial al final y por lo tanto su orientación depende de la conectividad que se decida para cada barra. Debido a que una estructura está conformada por un conjunto de elementos vinculados, resulta necesario definir un sistema de referencia global y común para toda la estructura, de tal manera de poder especificar las fuerzas y los desplazamientos en los nodos de la estructura respecto a un único sistema.

Las propiedades de las barras pueden ser expresadas en el sistema local y/o global, en consecuencia, debe existir una relación que permita convertir dichas propiedades de un sistema a otro. Para abordar el problema de cambio de coordenadas se considera un punto  $P$  o bien un vector desde el origen hacia dicho punto tal como muestra la Figura 6.4. Las coordenadas del punto  $P$  respecto de un sistema global  $X$ - $Y$  son:  $P = [p_x \ p_y]^T$ . Si dichas coordenadas estuviesen referidas a un sistema, definido por los ejes  $X'$ - $Y'$ , que esté girado un ángulo  $\phi$  con respecto al sistema global, el mismo punto (o vector) tendría coordenadas locales referenciadas a este nuevo sistema, las cuales se denotan como:  $P' = [p'_x \ p'_y]^T$ . La relación entre ambos pares de coordenadas se puede establecer mediante relaciones trigonométricas y conociendo solamente el ángulo  $\phi$ . Respecto a la coordenada  $x$  en el sistema global, se puede ver a partir de la Figura 6.5.a como ésta se obtiene a partir de la resta de los dos segmentos señalados; la coordenada  $y$  está compuesta por la suma de los segmentos remarcados en la Figura 6.5.b.



**Figura 6.4**  
El punto P posee coordenadas respecto a dos sistemas de referencia (extraído Ref. [6]).



**Figura 6.5**  
 Las coordenadas globales de un punto se pueden obtener mediante relaciones trigonométricas (extraído Ref. [6]).

Por consiguiente, las coordenadas globales son:

$$p_x = p_x' \cos \phi - p_y' \sin \phi$$

$$p_y = p_x' \sin \phi + p_y' \cos \phi$$

lo cual no es más que una combinación lineal de las coordenadas locales. Una forma compacta de expresar el cambio de coordenadas es en forma matricial tal como expresa la ecuación (6.3).

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix}}_{\text{Global}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{Bmatrix} p_x' \\ p_y' \end{Bmatrix}}_{\text{Locales}} \quad (6.3)$$

En ocasiones no será suficiente trabajar con un vector de desplazamiento en  $x$  e  $y$ , sino que se precisará además un giro  $\theta$ . En el contexto del cálculo matricial de estructuras esto puede corresponderse al ángulo que una barra flexa en uno de sus extremos. Para problemas en el plano, el ángulo  $\theta$  no se verá afectado al producirse una rotación del sistema de referencia, de modo que el giro  $\theta'$  coincide con  $\theta$ . En dicho caso, la matriz de rotación o de transformación adopta la forma mostrada en la ecuación (6.41).

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ \theta \end{Bmatrix}}_{\text{Globales}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{Bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ \theta' \end{Bmatrix}}_{\text{Locales}} \quad (6.4)$$

La matriz de rotación tal como fue hallada permite conseguir el pasaje de coordenadas locales a globales. Es importante notar que la misma expresión posibilita la conversión de coordenadas globales a locales; para ello se debe calcular la inversa de la matriz de rotación y así poder expresar las coordenadas locales en función de las globales. Sin embargo, se verifica que la inversa de la matriz de rotación es igual a su traspuesta, es decir, la matriz de rotación es ortonormal. La ortonormalidad es una propiedad fundamental de cualquier matriz de rotación y se puede emplear para simplificar los cálculos, evitando así la inversión de matrices. La ecuación (6.5) permite el pasaje de coordenadas globales a locales.

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} p'_x \\ p'_y \\ \theta' \end{Bmatrix}}_{\text{Locales}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz de rotación}} \underbrace{\begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ \theta \end{Bmatrix}}_{\text{Globales}} \quad (6.5)$$

## 6.5 Matrices de rigidez

### 6.6.1 Introducción

En el presente capítulo se presentan las matrices de rigidez para los diversos tipos de barras. Se desarrolla el procedimiento para obtener la matriz correspondiente a una barra de reticulado plano, y se presentan las matrices para barras de reticulado en el espacio y pórticos planos y en el espacio. El procedimiento utilizado para generar las matrices de rigidez es análogo para los diversos tipos de barras.

### 6.6.2 Matriz de rigidez para una barra de reticulado plano

A los fines de desarrollar el proceso de obtención de la matriz de rigidez resulta indispensable relacionar los desplazamientos entre los extremos de una barra de reticulado con el alargamiento de la misma. Esto se denomina relaciones cinemáticas.

Considérese una barra de longitud  $l$  caracterizada por un nodo inicial  $i$  y uno final  $j$  tal como se observa en la Figura 6.6. Se supone que el origen experimenta un desplazamiento  $\bar{U}_i$  pasando al punto  $l$ , mientras que el extremo  $j$  se desplaza  $\bar{U}_j$ ,

alcanzando el punto  $J$ . Se establece un sistema de referencia cartesiano  $X_1$ - $X_2$ - $X_3$ . La posición inicial queda definida por los vectores posición  $\bar{r}_i$  y  $\bar{r}_j$ . Los vectores posición luego de producirse la deformación de la barra se pueden obtener a partir de los desplazamientos de cada nodo. La elongación de la barra  $e$  se define como la diferencia entre la longitud final y la inicial. Matemáticamente esto se expresa a través de la ecuación (6.6).

$$e = L - l = |\Delta\bar{R}| - l \quad \text{donde } |\Delta\bar{R}| = \sqrt{\Delta\bar{R} \cdot \Delta\bar{R}} \quad (6.6)$$

Dividiendo por  $l$  se tiene:

$$\frac{e}{l} = \sqrt{\frac{\Delta\bar{R} \cdot \Delta\bar{R}}{l^2}} - 1 \therefore \left(1 + \frac{e}{l}\right)^2 = \frac{\Delta\bar{R} \cdot \Delta\bar{R}}{l^2} \quad (6.7)$$

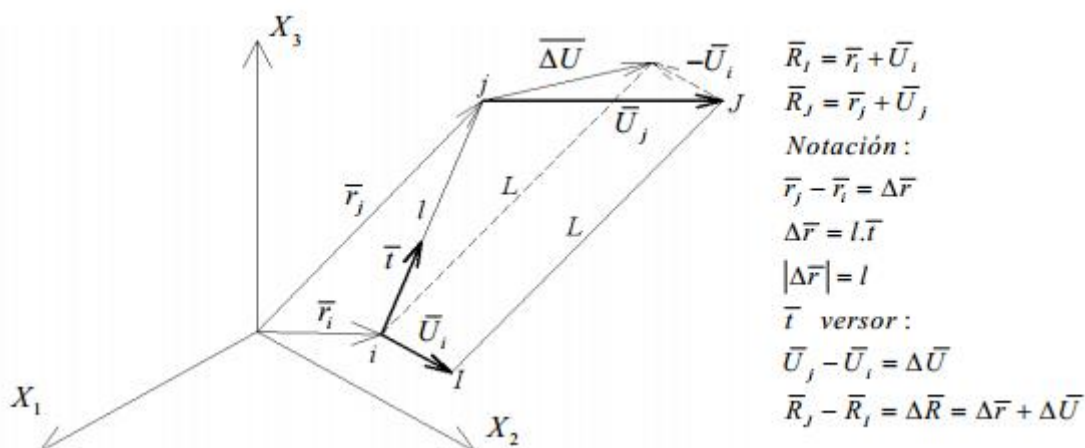


Figura 6.6 Relaciones cinemáticas de una barra de reticulado (extraído Ref. [7]).

Los materiales utilizados en la construcción de estructuras permiten asumir que  $\frac{e}{l} \ll 1$ , por lo tanto:

$$\left(1 + \frac{e}{l}\right)^2 \cong 1 + 2\frac{e}{l} \quad (6.8)$$

Llevando la expresión (6.8) a la (6.7) y operando se llega a:

$$e = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta\bar{R} \cdot \Delta\bar{R} - l^2}{l} \right] \quad (6.9)$$

Sabiendo que  $\Delta\bar{R} = \Delta\bar{r} + \Delta\bar{U}$  y reemplazando en la expresión (6.9) se obtiene:

$$e = \frac{1}{2} \left[ \frac{\Delta \bar{r} \cdot \Delta \bar{r} + 2\Delta \bar{r} \cdot \Delta \bar{U} + \Delta \bar{U} \cdot \Delta \bar{U} - l^2}{l} \right] \quad (6.10)$$

Simplificando y reordenando se llega a la ecuación (6.11) que permite obtener la elongación de una barra de reticulado para pequeñas deformaciones.

$$e \cong \Delta \bar{U} \cdot \bar{t} + \frac{\Delta \bar{U} \cdot \Delta \bar{U}}{2l} \quad (6.11)$$

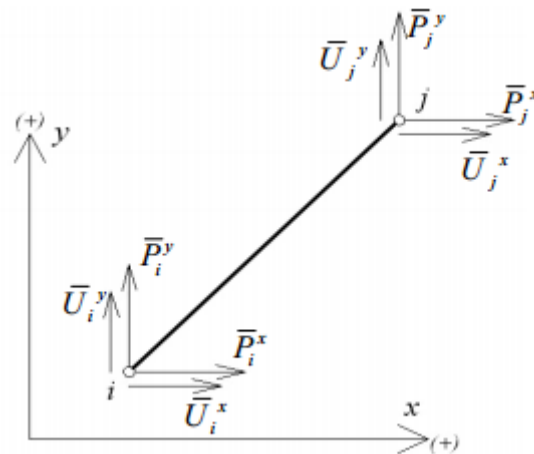
La ecuación (6.11) es una expresión no lineal de los desplazamientos extremos de la barra. Si  $\Delta \bar{U}$  es pequeño, como ocurre comúnmente en los casos prácticos, puede desprejarse el segundo término del segundo miembro de (6.11). Finalmente para pequeñas deformaciones y giros la expresión toma la forma definida en (6.12).

$$e \cong \Delta \bar{U} \cdot \bar{t} \quad (6.12)$$

La ecuación (6.12) expresa que la elongación de la barra es proporcional a la proyección del desplazamiento relativo de los extremos sobre la dirección de la barra indeformada.

La matriz de rigidez de una barra permite relacionar los desplazamientos nodales con las cargas exteriores aplicadas sobre la misma. Sea una barra de reticulado plano caracterizada por un nodo inicial  $i$  y un nodo final  $j$ , y orientada arbitrariamente respecto de un sistema de referencia global tal como muestra la Figura 6.7. Cada nodo posee dos grados de libertad, por lo tanto hay dos componentes de desplazamiento incógnita por nudo y se puede plantear dos ecuaciones de equilibrio por nudo, originando una matriz de rigidez de barra de orden 4. La relación entre cargas y desplazamientos se enuncia mediante la ecuación (6.13).

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \\ P_j^x \\ P_j^y \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

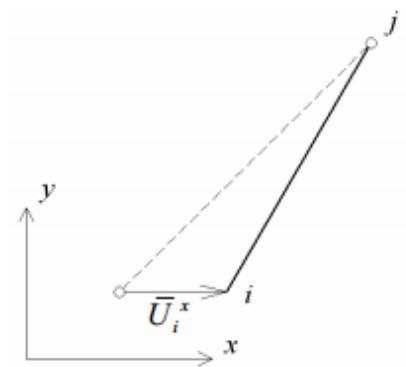


**Figura 6.7**  
 Viga de reticulado plano orientada arbitrariamente (extraído Ref. [7]).

Para deducir cada uno de los términos de la matriz de rigidez se aplica un desplazamiento unitario en uno de los grados de libertad y se restringe el desplazamiento en los restantes. Se comienza fijando dicho desplazamiento unitario al nodo  $i$  en dirección  $X$ :

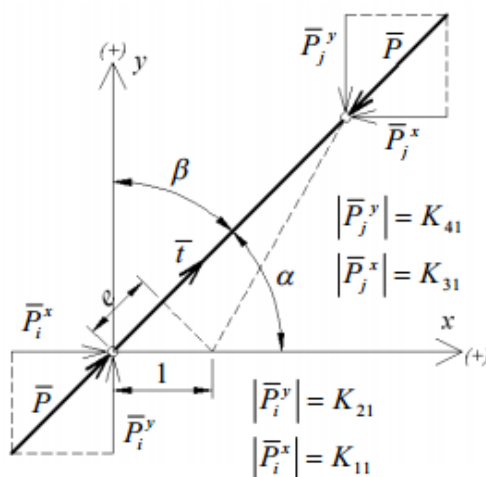
$$\begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

La Figura 6.8 muestra la aplicación del corrimiento unitario en el nodo  $i$  en la dirección  $x$  mientras los restantes desplazamientos toman un valor nulo, lo cual se expresa matemáticamente en (6.14) .



**Figura 6.8**  
 Desplazamiento unitario en la dirección  $x$  del nodo  $i$  (extraído Ref. [7]).

En la Figura 6.9 es posible observar las cargas que mantienen el estado de deformación prefijado. Los ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  orientan la barra respecto del sistema de referencia global X-Y. El vector  $t$  posee magnitud unitaria y se dirige desde el nodo inicial al final. El estado de deformación prefijado origina una compresión de la barra cuya magnitud se determina a través del empleo de la ecuación (6.12). La barra se comprime una magnitud igual a  $e = 1 \cos \alpha$ .



**Figura 6.9**

Viga sometida a un desplazamiento unitario en la dirección x del nodo i (extraído Ref. [7]).

La fuerza que comprime la barra está dada por la Ley de Hooke y es igual a:

$$P = Ke = K 1 \cos \alpha \quad (6.15)$$

Se debe tener en cuenta que las condiciones de equilibrio se plantean en el sistema indeformado. Llevando la ecuación (6.14) a la (6.13) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \\ P_j^x \\ P_j^y \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

La ecuación (6.16) muestra que la primera columna de la matriz de rigidez es numéricamente igual al valor de las fuerzas que mantienen el estado de deformación prefijado definido por la expresión (6.14) A partir de la Figura 6.9 se estipula la magnitud de cada una de las fuerzas que mantienen el estado de deformación.



$$\begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \\ P_j^x \\ P_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \cos \alpha \\ P \cos \beta \\ -P \cos \alpha \\ -P \cos \beta \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

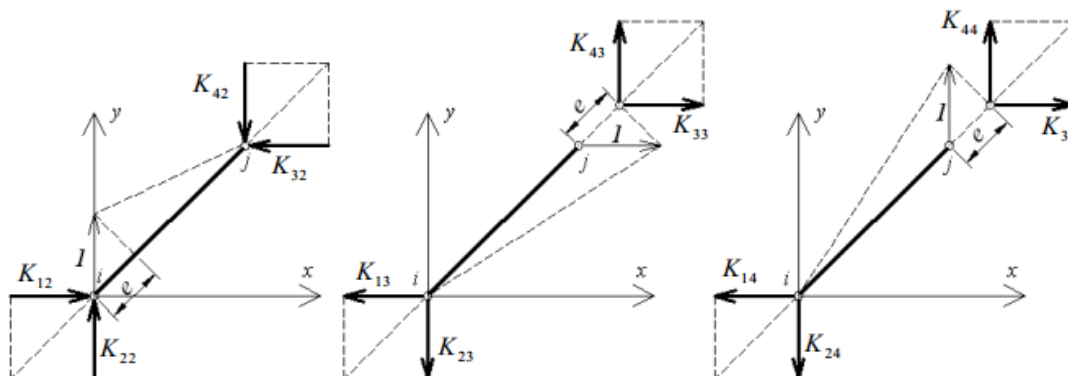
Sustituyendo la expresión (6.17) en (6.16) y luego (6.15) en (6.16) se obtiene la magnitud de los términos de la primera columna de la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} K_{11} \\ K_{21} \\ K_{31} \\ K_{41} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \gamma_1^2 \\ K \gamma_1 \gamma_2 \\ -K \gamma_1^2 \\ -K \gamma_1 \gamma_2 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

dónde  $\gamma_1 = \cos \alpha$  y  $\gamma_2 = \cos \beta$ . Los términos  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  reciben el nombre de cosenos directores ya que definen la orientación de la barra respecto del sistema de referencia global.  $K$  simboliza la rigidez axial de la viga, la cual se define de la siguiente manera:  $K = AE/L$  siendo  $A$  la sección transversal de la barra,  $E$  el módulo de elasticidad transversal y  $L$  su longitud indeformada. A través de un razonamiento análogo es posible obtener las demás columnas de la matriz de rigidez. Para ello se debe considerar los restantes estados de deformación. La ecuación (6.19) y la Figura 6.10 muestran los estados de deformación a emplear para completar las columnas de la matriz de rigidez.

$$\begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

2<sup>da</sup> columna
3<sup>ra</sup> columna
4<sup>ta</sup> columna



**Figura 6.10**  
 Desplazamientos unitarios en los diferentes grados de libertad (extraído Ref. [7]).

Luego de completar el procedimiento descrito se obtiene la matriz de rigidez para una barra de reticulado plano en coordenadas globales quedando definida por medio de la ecuación (6.20).

$$[K_g] = \begin{array}{cc|cc}
 K\gamma_1^2 & K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_1^2 & -K\gamma_1\gamma_2 \\
 K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_2^2 & -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_2^2 \\
 \hline
 -K\gamma_1^2 & -K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_1^2 & K\gamma_1\gamma_2 \\
 -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_2^2 & K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_2^2
 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Nodo } i \\ \text{Nodo } j \end{array} \quad (6.20)$$

Nodo *i*
Nodo *j*

La expresión (6.20) permite notar que la tercera fila de la matriz es igual a la primera cambiada de signo, la cuarta es igual a la segunda cambiada de signo y la segunda columna es igual a la primera multiplicada por  $\gamma_2/\gamma_1$ . El sistema contiene solo una ecuación linealmente independiente. La matriz  $[K_g]$  es singular y el sistema no tiene solución única ya que no se han fijado las condiciones de apoyo de la barra. La simetría de la matriz respecto de la diagonal principal es consecuencia del Teorema de Reciprocidad. Otras características importantes son:

- ✓ la matriz de rigidez es una propiedad del sistema estructural, no cambia con el estado de cargas o condiciones de apoyo a que se someta la estructura. Sólo será afectada con la introducción de algún elemento adicional;
- ✓ constituye una descripción completa de las características elásticas de cada barra que permite plantear las ecuaciones de equilibrio global y de compatibilidad de desplazamientos para un conjunto de barras;

- ✓ una fila es un conjunto de multiplicadores que operados sobre el vector desplazamiento completo proporcionan la magnitud de la fuerza correspondiente al grado de libertad definido por el índice de la fila;
- ✓ cada término  $K_{ij}$  se puede considerar una "función de peso" que representa la proporción de contribución a la fuerza del grado de libertad  $i$  debido al desplazamiento del grado de libertad  $j$ . Si su valor es nulo significa que los grados de libertad no están relacionados.

La matriz de rigidez definida mediante (6.20) esta expresada en coordenadas globales, sin embargo suele ser de utilidad formularla en coordenadas locales. Para ello, se hace uso de la matriz de rotación. La Figura 6.11 representa una barra con disposición arbitraria. El sistema de referencia X-Y corresponde al global, mientras que  $X_l$ - $Y_l$  al local.

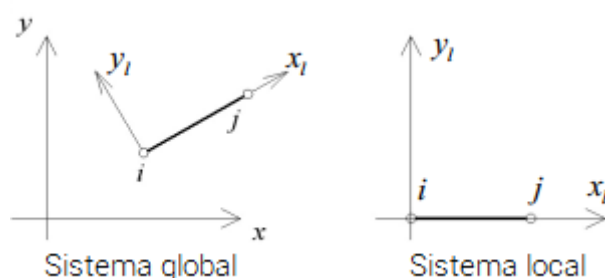


Figura 6.11 Sistema de referencia local y global (extraído Ref. [7]).

Una barra de reticulado equilibra las cargas exteriores mediante esfuerzos axiales, por lo tanto los nodos  $i$  y  $j$  admiten desplazamientos a lo largo del eje  $X_l$ . Si denotamos como  $U_i$  y  $U_j$  al desplazamiento del nodo  $i$  y  $j$  en coordenadas locales, es lícito expresar tales desplazamientos en coordenadas globales mediante una transformación de coordenadas tal como expresa la ecuación (6.21) .

$$\begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & 0 \\ \gamma_2 & 0 \\ 0 & \gamma_1 \\ 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

$$[U_g] = [T^T][U_l]$$

El subíndice  $g$  hace referencia al sistema global mientras que  $l$  al local. La matriz  $[T]$  se denomina matriz de transformación y  $[T^T]$  es su transpuesta; los términos de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  que integran estas matrices han sido definidos con anterioridad y corresponden a los cosenos directores. La matriz  $[T^T]$  permite convertir los desplazamientos desde coordenadas locales a globales. Igualmente, si se disponen los desplazamientos en coordenadas globales pueden ser expresados en el sistema local como muestra la ecuación (6.22):

$$\begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ U_j^x \\ U_j^y \end{bmatrix} \quad (6.22)$$

$$[U_l] = [T][U_g]$$

El vector de cargas puede formularse en coordenadas locales y globales aprovechando la matriz de transformación y su transpuesta, ambas definidas con anterioridad. La ecuación (6.23) define el vector de cargas en coordenadas locales y globales.

$$\begin{aligned} [P_g] &= [T^T][P_l] \\ [P_l] &= [T][P_g] \end{aligned} \quad (6.23)$$

Operando algebraicamente y utilizando la matriz de transformación es posible deducir la matriz de rigidez en coordenadas locales tal como formula la ecuación (6.24).

$$[K_l][U_l] = [P_l]$$

La ecuación (6.11) permite escribir los desplazamientos locales en función de los globales a través de la matriz de transformación.

$$[K_l][T][U_g] = [P_l]$$

Pre-multiplicando ambos miembros por  $[T^T]$  se obtiene:

$$[T^T][K_l][T][U_g] = [T^T][P_l]$$

donde el producto  $[T^T][P]$  define el vector de cargas en coordenadas globales. En consecuencia se deduce que la matriz de rigidez en coordenadas globales es:

$$[K_g] = [T^T][K_l][T]$$

Despejando  $[K_l]$  en función de  $[K_g]$  se tiene:

$$[K_l] = [T][K_g][T^T] \tag{6.24}$$

Finalmente la matriz de rigidez en forma explícita y en coordenadas locales se formula tal como muestra la ecuación (6.25).

$$[K_l] = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{Nodo } i \\ \text{Nodo } j \end{array} \right\} \tag{6.25}$$

Nodo *i*
Nodo *j*

Las ecuaciones de equilibrio (6.13) se denominan ecuaciones de fuerza-movimiento, y pueden representarse en forma simplificada tal como se expone en (6.26).

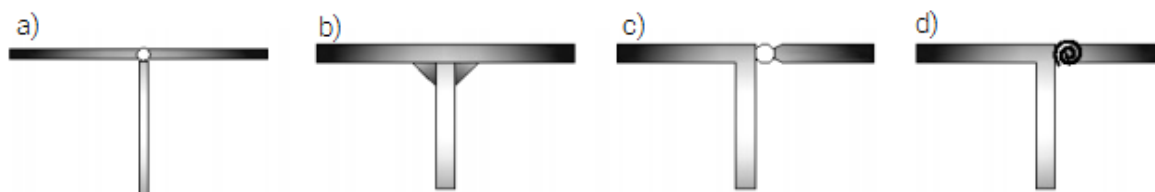
$$\left[ \begin{array}{cc|cc} K_{ii} & K_{ij} & U_i & \\ \hline K_{ji} & K_{jj} & U_j & \\ \hline \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} P_i \\ P_j \end{array} \right] \tag{6.26}$$

Debe notarse que  $K_{ij}$  es una submatriz de 2x2, y los vectores  $P_i$  y  $U_i$  son vectores de dos componentes. La ecuación (6.26) es un sistema de dos ecuaciones matriciales; cada vector tiene dos componentes escalares, y por lo tanto se trata de cuatro ecuaciones algebraicas lineales.

### 6.6.3 Matriz de rigidez para una barra de pórtico plano

En este apartado se presenta la matriz de rigidez para una barra de pórtico plano. A diferencia del reticulado, presenta continuidad de giro en sus nodos, motivo por el cual es necesario considerar al giro como un grado de libertad adicional, en consecuencia

poseen tres grados de libertad por nodo. La Figura 6.12 presenta cuatro nodos diferentes. La 6.12a ilustra un nodo articulado correspondiente a un reticulado ideal; la 6.12b es un nodo rígido, de modo tal que el giro de los extremos de las barras que concurren a dicho nodo es el mismo; la imagen 6.12c representa un nodo combinado y finalmente la 6.12d un nodo semirrígido en el que la articulación involucrada que vincula ambas partes posee cierta rigidez. Aquí se centrará atención a pórticos planos constituidos por barras prismáticas de eje recto y nodos rígidos sometidos a cargas nodales contenidas en el plano. Una barra prismática es aquella que posee una sección transversal constante.



**Figura 6.12**  
 Diversos nodos estructurales (extraído Ref. [7]).

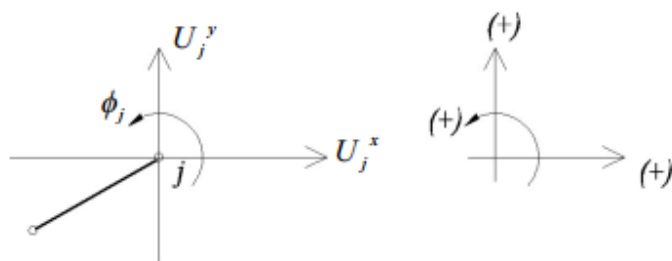
El procedimiento para obtener la matriz de rigidez es análogo al desarrollado en el apartado anterior. El número de grados de libertad por nodo es tres: dos desplazamientos y un giro, por lo tanto la ecuación fuerza-desplazamiento para una barra de pórtico plano adquiere la forma definida por la ecuación (6.27).

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
 K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
 K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\
 K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_i^x \\
 U_i^y \\
 \Phi_i \\
 U_j^x \\
 U_j^y \\
 \Phi_j
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 P_i^x \\
 P_i^y \\
 M_i \\
 P_j^x \\
 P_j^y \\
 M_j
 \end{bmatrix}
 \quad (6.27)$$

Los estados de deformación prefijados utilizados para la deducción de cada una de las columnas de la matriz de rigidez se presentan a continuación.

$$\begin{array}{c}
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad
 \begin{bmatrix} U_i^x \\ U_i^y \\ \Phi_i \\ U_j^x \\ U_j^y \\ \Phi_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 1^{ra} \text{ columna} \quad 2^{da} \text{ columna} \quad 3^{ra} \text{ columna} \quad 4^{ta} \text{ columna} \quad 5^{ta} \text{ columna} \quad 6^{ta} \text{ columna}
 \end{array}$$

Es importante aclarar la convención de signos utilizada en la deducción de la matriz de rigidez, la cual por simplicidad se presenta en coordenadas locales. Posteriormente aplicando el proceso de rotación de coordenadas se obtiene la matriz expresada en el sistema global. La Figura 6.13 muestra la convención de signos, donde los giros y los momentos son positivos en sentido anti horario.



**Figura 6.13**  
 Convención de signos empleada para la deducción de la matriz de rigidez para una barra de pórtico plano (extraído Ref. [7]).

La matriz de rigidez es ahora función del módulo de elasticidad  $E$ , sección transversal  $A$ , longitud  $L$  y momento de inercia  $I$ . En coordenadas locales adopta la forma definida en la expresión (6.28). La ecuación (6.28) corresponde a la matriz de rigidez de una barra cuyo eje  $x$  local es coincidente con el eje baricéntrico de la barra tal como se observa en la Figura 6.11. Según muestra (6.28) la cuarta fila de la matriz es igual a la primera cambiada de signo, y la sexta es igual a la segunda multiplicada por la longitud  $L$  y restándole la tercera, es decir, la sexta fila es combinación lineal de la segunda y de la tercera. Esto significa que la matriz de rigidez es singular y que el sistema definido en (6.27) sólo podrá resolverse imponiendo al menos tres condiciones de vínculo para evitar desplazamiento de cuerpo rígido.

$$[K_l] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (6.28)$$

De acuerdo a lo mencionado en capítulos previos, resolver un problema de mecánica estructural requiere expresar previamente las propiedades de todos los elementos de constituyen a la estructura en un mismo sistema de referencia. Por ende, es necesario poder expresar la matriz de rigidez para una barra de pórtico plano en coordenadas globales, esto se consigue a través del empleo de la matriz de rotación de coordenadas. La matriz de transformación para barra de pórtico plano está dada por la ecuación (6.29).

$$R = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.29)$$

Donde  $\gamma_1 = \cos \alpha$  y  $\gamma_2 = \sin \alpha$  son los cosenos directores, siendo  $\alpha$  el ángulo que forma el eje  $x$  local con el  $x$  global. Se recuerda que la matriz de rotación es ortonormal, es decir la transpuesta es igual a su inversa. En coordenadas locales, el sistema de ecuaciones de equilibrio puede particionarse tal como expresa (6.30).

$$\begin{cases} K_{ii}^l U_i^l + K_{ij}^l U_j^l = P_i^l \\ K_{ji}^l U_i^l + K_{jj}^l U_j^l = P_j^l \end{cases} \quad (6.30)$$

$K_{ii}^l, K_{ij}^l, K_{jj}^l, K_{ji}^l$  son submatrices de orden 3. La transformación a coordenadas globales se efectúa de la siguiente forma:



$$\begin{cases} K_{ii}^l R U_i + K_{ij}^l R U_j = R P_i \\ K_{ji}^l R U_i + K_{jj}^l R U_j = R P_j \end{cases} \quad (6.31)$$

Pre multiplicando ambos miembros por  $R^T$  y recordando que  $R \cdot R^T$  es igual a la matriz identidad se obtiene:

$$\begin{cases} (R^T K_{ii}^l R) U_i + (R^T K_{ij}^l R) U_j = R^T R P_i \\ (R^T K_{ji}^l R) U_i + (R^T K_{jj}^l R) U_j = R^T R P_j \end{cases} \quad (6.32)$$

Matricialmente:

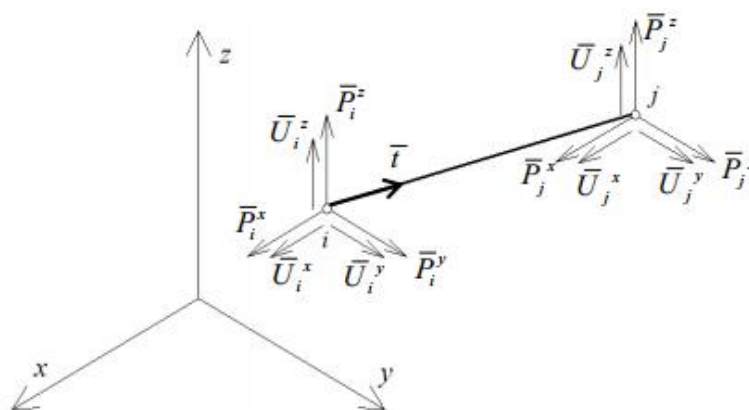
$$\begin{bmatrix} R^T K_{ii}^l R & R^T K_{ij}^l R \\ R^T K_{ji}^l R & R^T K_{jj}^l R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_i \\ U_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i \\ P_j \end{bmatrix} \quad (6.33)$$

La ecuación (6.33) provee la expresión para determinar la matriz de rigidez en el sistema global: se debe pre multiplicar cada submatriz por  $R^T$  y al resultado pos multiplicarlo por  $R$ . Si se aplica lo descrito a la ecuación (6.28) se obtiene la matriz de rigidez en coordenadas globales tal como muestra la ecuación (6.34).

$$[K_g] = \frac{E}{L} \left[ \begin{array}{ccc|ccc}
 A\gamma_1^2 + \frac{12I\gamma_2^2}{L^2} & A\gamma_1\gamma_2 - \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & -\frac{6I\gamma_2}{L} & -A\gamma_1^2 - \frac{12I\gamma_2^2}{L^2} & -A\gamma_1\gamma_2 + \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & -\frac{6I\gamma_2}{L} \\
 A\gamma_1\gamma_2 - \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & A\gamma_2^2 + \frac{12I\gamma_1^2}{L^2} & \frac{6I\gamma_1}{L} & -A\gamma_1\gamma_2 + \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & -A\gamma_2^2 - \frac{12I\gamma_1^2}{L^2} & \frac{6I\gamma_1}{L} \\
 -\frac{6I\gamma_2}{L} & \frac{6I\gamma_1}{L} & 4I & \frac{6I\gamma_2}{L} & -\frac{6I\gamma_1}{L} & 2I \\
 \hline
 -A\gamma_1^2 - \frac{12I\gamma_2^2}{L^2} & -A\gamma_1\gamma_2 + \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & \frac{6I\gamma_2}{L} & A\gamma_1^2 + \frac{12I\gamma_2^2}{L^2} & A\gamma_1\gamma_2 - \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & \frac{6I\gamma_2}{L} \\
 -A\gamma_1\gamma_2 + \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & -A\gamma_2^2 - \frac{12I\gamma_1^2}{L^2} & -\frac{6I\gamma_1}{L} & A\gamma_1\gamma_2 - \frac{12I\gamma_1\gamma_2}{L^2} & A\gamma_2^2 + \frac{12I\gamma_1^2}{L^2} & -\frac{6I\gamma_1}{L} \\
 \frac{6I\gamma_2}{L} & \frac{6I\gamma_1}{L} & 2I & \frac{6I\gamma_2}{L} & -\frac{6I\gamma_1}{L} & 4I
 \end{array} \right] \quad (6.34)$$

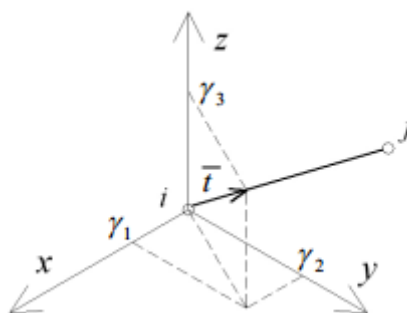
### 6.6.4 Matriz de rigidez para una barra de reticulado tridimensional

Los conceptos desarrollados para reticulados planos pueden generalizarse para un reticulado espacial. En este caso, las fuerzas y desplazamientos tienen tres componentes según los ejes X, Y, Z. La Figura 6.14 muestra una barra de reticulado tridimensional con orientación arbitraria y nodo inicial  $i$  y final  $j$ ; además se muestran las fuerzas y desplazamientos en sus nodos extremos.



**Figura 6.14**  
 Barra de reticulado espacial (extraído Ref. [7]).

El procedimiento para la determinación de la matriz de rigidez es análogo al del reticulado plano. En la Figura 6.15 se observa un versor  $t$  que se dirige desde el nodo inicial al final; los componentes de dicho vector son los cosenos directores los cuales se estipulan a través de la ecuación (6.35).



**Figura 6.15**  
 Barra de reticulado espacial con orientación arbitraria (extraído Ref. [7]).

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{(r_j^x - r_i^x)}{\sqrt{(r_j^x - r_i^x)^2 + (r_j^y - r_i^y)^2 + (r_j^z - r_i^z)^2}} \\ \gamma_2 &= \frac{(r_j^y - r_i^y)}{\sqrt{(r_j^x - r_i^x)^2 + (r_j^y - r_i^y)^2 + (r_j^z - r_i^z)^2}} \\ \gamma_3 &= \frac{(r_j^z - r_i^z)}{\sqrt{(r_j^x - r_i^x)^2 + (r_j^y - r_i^y)^2 + (r_j^z - r_i^z)^2}}\end{aligned}\quad (6.35)$$

La matriz de rigidez en coordenadas globales adquiere la forma referida por la ecuación (6.36).

$$[K_g] = \begin{bmatrix} K\gamma_1^2 & K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_1\gamma_3 & -K\gamma_1^2 & -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_1\gamma_3 \\ K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_2^2 & K\gamma_2\gamma_3 & -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_2^2 & -K\gamma_2\gamma_3 \\ K\gamma_1\gamma_3 & K\gamma_2\gamma_3 & K\gamma_3^2 & -K\gamma_1\gamma_3 & -K\gamma_2\gamma_3 & -K\gamma_3^2 \\ \hline -K\gamma_1^2 & -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_1\gamma_3 & K\gamma_1^2 & K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_1\gamma_3 \\ -K\gamma_1\gamma_2 & -K\gamma_2^2 & -K\gamma_2\gamma_3 & K\gamma_1\gamma_2 & K\gamma_2^2 & K\gamma_2\gamma_3 \\ -K\gamma_1\gamma_3 & -K\gamma_2\gamma_3 & -K\gamma_3^2 & K\gamma_1\gamma_3 & K\gamma_2\gamma_3 & K\gamma_3^2 \end{bmatrix}\quad (6.36)$$

A través del empleo de la matriz de rotación, la cual se define por la ecuación (6.37), es posible obtener la matriz de rigidez en coordenadas locales.

$$[T] = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix}\quad (6.37)$$

Luego la matriz en el sistema local estada dada por (6.38).

$$[K_l] = [T][K_g][T^T]\quad (6.38)$$

### 6.6.5 Matriz de rigidez para una barra de pórtico tridimensional

Para estructuras tridimensionales con nudos rígidos se debe considerar seis grados de libertad por nodo, por lo tanto la matriz de rigidez para cada barra es de orden 12. La matriz de rigidez para una barra prismática se obtiene haciendo coincidir el eje X del sistema local con el eje de la barra, y los ejes principales de inercia de la

sección con los ejes Y y Z. La ecuación (6.39) presenta las ecuaciones de fuerza-movimiento. Los términos de la matriz de rigidez se obtiene al aplicar el mismo proceso que fue utilizado para deducir las matrices de reticulados y pórtico plano. En coordenadas locales la matriz de rigidez toma la forma definida por (6.40).

$$[K_l] = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Cada submatriz  $K_{ij}$  es de orden 6, y se definen a continuación.

$$[K_{ii}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6E I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6E I_y}{L^2} & 0 & \frac{4E I_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6E I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E I_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{jj}] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6E I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12E I_y}{L^3} & 0 & \frac{6E I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E I_y}{L^2} & 0 & \frac{4E I_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6E I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4E I_z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{110} & K_{111} & K_{112} & U_i^x \\
 K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{210} & K_{211} & K_{212} & U_i^y \\
 K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{310} & K_{311} & K_{312} & U_i^z \\
 K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{410} & K_{411} & K_{412} & \Phi_i^x \\
 K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{510} & K_{511} & K_{512} & \Phi_i^y \\
 K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} & K_{610} & K_{611} & K_{612} & \Phi_i^z \\
 \hline
 K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{79} & K_{710} & K_{711} & K_{712} & U_j^x \\
 K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} & K_{810} & K_{811} & K_{812} & U_j^y \\
 K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{99} & K_{910} & K_{911} & K_{912} & U_j^z \\
 K_{101} & K_{102} & K_{103} & K_{104} & K_{105} & K_{106} & K_{107} & K_{108} & K_{109} & K_{1010} & K_{1011} & K_{1012} & \Phi_j^x \\
 K_{111} & K_{112} & K_{113} & K_{114} & K_{115} & K_{116} & K_{117} & K_{118} & K_{119} & K_{1110} & K_{1111} & K_{1112} & \Phi_j^y \\
 K_{121} & K_{122} & K_{123} & K_{124} & K_{125} & K_{126} & K_{127} & K_{128} & K_{129} & K_{1210} & K_{1211} & K_{1212} & \Phi_j^z
 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_i^x \\ P_i^y \\ P_i^z \\ M_i^x \\ M_i^y \\ M_i^z \\ \hline P_j^x \\ P_j^y \\ P_j^z \\ M_j^x \\ M_j^y \\ M_j^z \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

Se debe notar que  $I_y$  e  $I_z$  corresponden a los momentos de inercia respecto de los ejes Y y Z respectivamente, mientras que  $J$  es la inercia polar. Por otra parte  $G$  es el módulo de elasticidad transversal.

$$[K_{ij}] = [K_{ji}] = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E I_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6E I_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12E I_y}{L^3} & 0 & -\frac{6E I_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6E I_y}{L^2} & 0 & \frac{2E I_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6E I_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2E I_z}{L} \end{bmatrix}$$

Las matrices de rotación son una generalización de las vistas para estructuras planas; una forma extendida de representar esta matriz es en función de la matriz de cosenos directores.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \theta_{xx} & \cos \theta_{xy} & \cos \theta_{xz} \\ \cos \theta_{yx} & \cos \theta_{yy} & \cos \theta_{yz} \\ \cos \theta_{zx} & \cos \theta_{zy} & \cos \theta_{zz} \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación queda definida mediante la ecuación (6.41).

$$[T] = \begin{bmatrix} R & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & R & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & R & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} & R \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Y finalmente la matriz de rigidez en coordenadas globales se obtiene aplicando (6.42).

$$[K_g] = [T^T][K_l][T] \quad (6.42)$$

### 6.6.6 Condensación estática de la matriz de rigidez

El método de condensación estática de la matriz de rigidez persigue obtener la matriz correspondiente de haber “eliminado” uno o más grados de libertad. Eliminar 'n' grados de libertad implica que ciertos desplazamientos o giros dejan de aparecer en el vector desplazamientos generalizados  $U$ , y sus correspondientes sollicitaciones desaparecerán del vector  $P$ .

Sea un sistema de  $N$  grados de libertad caracterizado mediante su matriz de rigidez  $K$  de dimensión  $N \times N$  que relaciona linealmente los desplazamientos  $U$  con las sollicitaciones  $P$  tal que:

$$[P_{Nx1}] = [K_{NxN}][U_{Nx1}] \quad (6.43)$$

Si se desea eliminar  $n$  grados de libertad el modelo queda:

$$[P'_{(N-n)x1}] = [K'_{(N-n)x(N-n)}][U'_{(N-n)x1}] \quad (6.44)$$

Evidentemente la matriz  $K'$  debe ser obtenida de forma que este modelo se comporte igual que el original. Es importante no perder de vista que el sistema condensado sigue correspondiendo al mismo sistema físico, donde sólo se ha impuesto alguna condición extra. Se impondrá que las fuerzas y momentos de los grados de libertad a condensar son nulos. De esta forma, si se denota como  $P^c$  y  $U^c$  los subconjuntos de  $P$  y  $U$  que serán condensados es posible reescribir la ecuación (6.43) como:

$$\begin{bmatrix} P' \\ P^c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K^n & K^{nc} \\ K^{cn} & K^c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U' \\ U^c \end{bmatrix} \quad (6.45)$$

donde los superíndices  $c$  y  $n$  usados para las submatrices indican los términos relativos a los grados de libertad que han sido y que no han sido condensados respectivamente. Despejando ahora la ecuación correspondiente a  $P^c$  se tiene:

$$P^c = K^{cn}U' + K^cU^c \quad (6.46)$$

Como se dijo, se impone la condición de fuerzas y momentos nulos (los desplazamientos o giros asociados a dichos grados de libertad son libres) y se puede despejar el valor de los desplazamientos y giros.



$$0 = K^{cn}U' + K^cU^c$$

premultiplicando ambos miembros por  $K^{c^{-1}}$

$$0 = K^{c^{-1}}K^{cn}U' + K^{c^{-1}}K^cU^c \quad (6.47)$$

pero  $K^{c^{-1}}K^c = I$  entonces

$$U^c = -K^{c^{-1}}K^{cn}U'$$

El resultado alcanzado en (6.47) puede sustituirse en la ecuación correspondiente a  $P'$  llegando a:

$$\begin{aligned} P' &= K^nU' + K^{nc}U^c \\ P' &= K^nU' - K^{nc}K^{c^{-1}}K^{cn}U' \\ P' &= (K^n - K^{nc}K^{c^{-1}}K^{cn})U' \\ P' &= K'U' \text{ siendo} \\ K' &= K^n - K^{nc}K^{c^{-1}}K^{cn} \end{aligned} \quad (6.48)$$

Como puede observarse, la matriz de rigidez correspondiente al sistema condensado no se obtiene extrayendo las filas y columnas asociadas a los grados de libertad a condensar (ya que esto correspondería a anular los desplazamientos asociados a los grados de libertad), sino que hay que agregarle a la matriz original un término más que modela el efecto que tienen los grados de libertad condensados en los demás.

## 6.6 Ensamble y resolución

### 6.6.1 Introducción

El objetivo de esta sección es describir como las matrices de los elementos individuales se ensamblan para formar la matriz de rigidez global  $K$  de una estructura, de forma que se puede plantear el sistema de ecuaciones correspondiente a la estructura completa:

$$[P] = [K][U] \quad (6.49)$$

y posteriormente despejar el valor de las variables desconocidas, ya sean giros y desplazamientos en nudos o reacciones de apoyo.

## 6.6.2 Compatibilidad y equilibrio

Al definir las matrices elementales de cada barra ya se contemplaron las ecuaciones de comportamiento del material, pero al igual que cuando se resuelve un problema estructural por otros medios, en el método matricial también se deben contemplar las condiciones de compatibilidad y equilibrio. A diferencia de otros mecanismos de resolución en el método de la rigidez no es necesario conocer el grado de hiperestaticidad de la estructura.

### Ecuaciones de compatibilidad

La condición de compatibilidad en los desplazamientos de cada nodo simplemente obliga a que dichos desplazamientos, considerados en coordenadas globales, deben ser únicos para cada nodo. Esto se traduce en que para cada nodo  $i$  donde converjan las barras  $a, b, c, d$ , etc. se tiene:

$$\vec{u}_i^a = \vec{u}_i^b = \vec{u}_i^c = \vec{u}_i^d = \dots = U_i = \begin{bmatrix} u_i^x \\ u_i^y \\ u_i^z \\ \phi_i^x \\ \phi_i^y \\ \phi_i^z \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

para el caso de un pórtico tridimensional con nodos rígidos. Es decir, en el planteamiento global no deben utilizarse las variables individuales de cada barra, sino tan solo los desplazamientos globales  $U_i$  para cada nodo.

### Ecuaciones de equilibrio

Para cada nodo de la estructura se debe cumplir que el efecto conjunto de las sollicitaciones producidas por todas las barras que converjan en dicho nodo debe coincidir con la fuerza externa que se aplique desde el exterior. Esto considera el caso común de sollicitaciones de distintas barras que se anulan entre sí en un nodo que no tiene cargas externas, como demandan las ecuaciones de equilibrio estático. La ecuación de equilibrio del nodo  $i$  está dada por la siguiente expresión:

$$\vec{P}_i = \sum_{\forall \alpha} K_{ii}^{\alpha} \vec{U}_i + \sum_{\forall j} K_{ij}^{\alpha} \vec{U}_j \quad (6.51)$$

con  $\alpha$  todas las barras incidentes en el nodo  $i$

### 6.6.3 Ensamblaje de la matriz de rigidez global

La ecuación global de la estructura tiene la forma definida en (6.49).  $P$  y  $U$  son los vectores de solicitaciones y desplazamientos respectivamente. La matriz  $K$  es la matriz global de la estructura. Si se numeran cada uno de los  $N$  nodos de la estructura como  $i=1, 2, 3, \dots, N$ , se puede demostrar que dicha matriz  $K$  se forma a partir de las submatrices descritas en las secciones anteriores como sigue:

$$[K] = \begin{matrix} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{i} & \dots & \mathbf{j} & \dots & \mathbf{N} \\ \mathbf{1} & \begin{bmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \sum_{\alpha} K_{ii}^{\alpha} & & K_{ij}^{\beta} & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & K_{ji}^{\beta} & & \sum_{\alpha} K_{jj}^{\alpha} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots \end{bmatrix} & & & & & & \end{matrix} \quad (6.51)$$

- ✓ La  $i$ -ésima submatriz de la diagonal se compone sumando todas las matrices  $K_{ii}^{\alpha}$  para todas las barras  $\alpha$  que inciden en el nodo  $i$ .
- ✓ Por cada barra  $\beta$  entre dos nodos  $i$  y  $j$  existe un par de entradas simétricas con  $K_{ij}^{\beta} = K_{ji}^{\beta}$  en las entradas  $(i, j)$  y  $(j, i)$ , respectivamente. Siempre se cumplirá que  $K_{ji}^{\beta} = K_{ij}^{\beta T}$ .
- ✓ El resto de entradas son ceros.

## 7. Modelo vehicular

### 7.1 Introducción

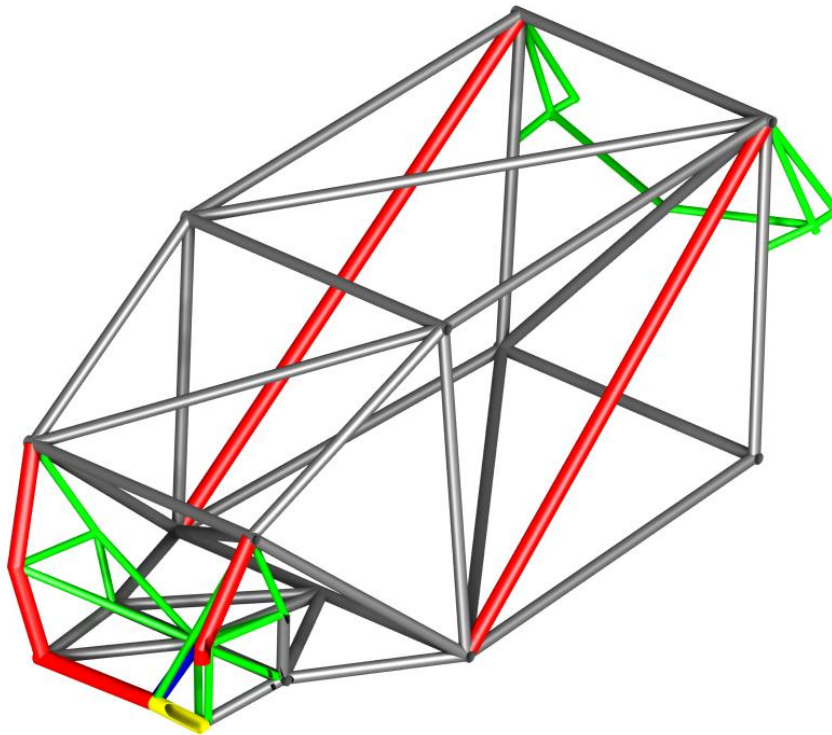
El chasis de un coche de Súper TC 2000 puede representarse en forma precisa a través de un modelo de barras aplicando el método matricial de la rigidez. El chasis puede imaginarse como una gran estructura compuesta por una serie de subestructuras tales como:

- ✓ estructura de seguridad,
- ✓ sistema de suspensión delantero,
- ✓ sistema de suspensión trasero y
- ✓ neumáticos.

A continuación se analiza en detalle el modelo adoptado para cada una de las subestructuras.

### 7.2 Estructura de seguridad

La estructura de seguridad, vulgarmente denominada jaula de seguridad, se compone de  $n$  elementos de barras de sección tubular vinculadas entre sí por medio de uniones soldadas. En virtud de lo mencionado, se modela este componente a través de barras de pórtico tridimensional con nudos rígidos. La Figura 7.1 muestra una vista en perspectiva de la jaula que equipó al Renault Fluence de Súper TC 2000 durante la temporada 2013, donde los diferentes colores están asociados a elementos tubulares de distintos diámetros.

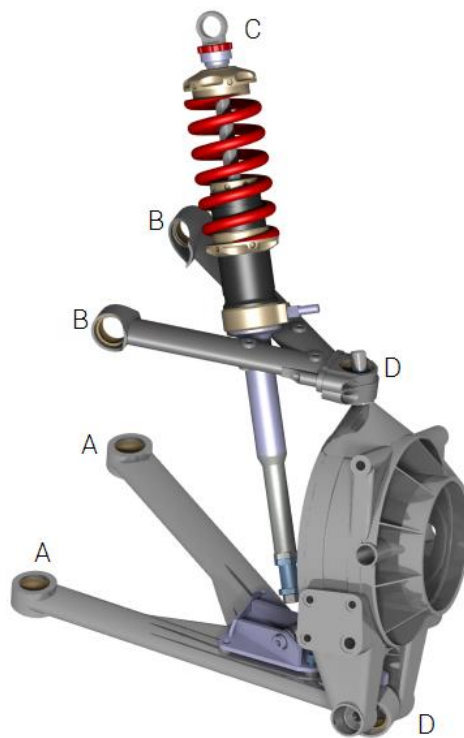


**Figura 7.1**  
Estructura de seguridad utilizada por el equipo Renault de Súper TC 2000.

## 7.3 Sistema de suspensión delantero

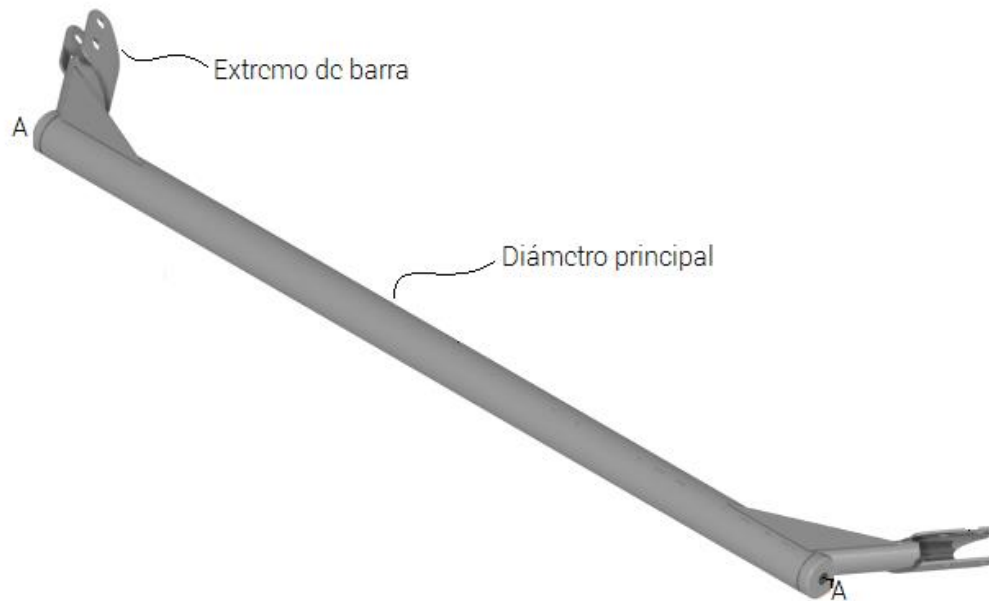
El sistema de suspensión delantero de un coche de Súper TC 2000 es un sistema independiente de paralelogramo deformable; cada brazo de suspensión posee dos puntos de conexión a la estructura de seguridad mediante rótulas esféricas, asimismo la vinculación entre ambas parrillas se produce por medio del portamasas también a través rótulas esféricas. Los puntos A y B de la Figura 7.2 simbolizan el vínculo del brazo inferior y superior con la jaula. Cada parrilla se modela por medio de dos barras de pórtico con un nodo en común; aquí resulta necesario aplicar el proceso de condensación de la matriz de rigidez, ya que los nodos de las barras que integran a cada parrilla y que permiten la conexión con la jaula poseen tres grados de libertad restringidos (desplazamientos) y tres libres (giros) debido a la existencia de la rótula, mientras que el nodo restante es rígido. Por otro lado, el portamasas se ajusta como una barra de reticulado tridimensional ya que sus nodos extremos poseen libertad de giro; los puntos D de la Figura 7.2 simbolizan dicha conectividad.

El resorte de suspensión se representa por medio de una barra de reticulado tridimensional; este elemento conecta a través de rótulas esféricas un extremo de la parrilla inferior con la estructura de seguridad (punto C). Resulta importante aclarar que en el presente trabajo se desprecia el efecto del amortiguador.



**Figura 7.2**  
Sistema de suspensión delantero vehículo de Súper TC 2000.

La barra estabilizadora es otro elemento a modelar, está compuesto por el diámetro principal de sección circular, maciza o hueca, el extremo de barra y los puntos A de la Figura 7.3 que permiten anclar la barra a la estructura de seguridad. Este elemento se modela mediante tres barras de pórtico tridimensional con nudos rígidos; asimismo se emplea una barra de reticulado tridimensional para ligar el extremo de barra con la parrilla inferior, usualmente esta última se denomina tensor de barra estabilizadora. El anclaje de la barra de torsión con la jaula garantiza el giro libre de la misma sobre su propio eje; este efecto se consigue uniendo la barra de torsión con la estructura de seguridad mediante barras que dispongan un nudo rígido y otro articulado, para ello debe aplicarse el proceso de condensación de la matriz de rigidez.



**Figura 7.3**  
Barra estabilizadora delantera

## 7.4 Sistema de suspensión trasero

En un coche de Súper TC 2000 el sistema de suspensión trasero se constituye de un eje rígido o eje arrastrado, resortes de suspensión y barra de torsión. El eje se conforma por una serie de elementos tubulares de diferentes diámetros; existe un tubo principal que garantiza la conectividad entre el portamasas derecho e izquierdo y ciertos elementos de sección tubular que vinculan el eje a la estructura de seguridad, más precisamente esta conexión se efectúa por medio de dos nodos. En la modelización de este componente se aplica nuevamente la condensación de la matriz de rigidez, ya que los tubos de conexión a jaula poseen nodos de comportamiento desigual, es decir los encargados de enlazar el eje a la estructura de seguridad poseen los giros libres mientras que los nodos restantes son rígidos. En definitiva este componente se ajusta mediante barras de pórtico tridimensional con nudos rígidos y con nudos articulados. La Figura 7.4 presenta una vista del eje trasero, B representa al tubo principal, C las barras de vinculación a jaula, D los puntos de conexión a jaula.

Los resortes de suspensión, al igual que en el sistema delantero, se modelan por medio de barras de reticulado tridimensional. Los puntos A de la Figura 7.4 simbolizan los puntos de anclaje de los resortes al eje, el otro extremo se enlaza a la jaula. Por

otro lado, la barra estabilizadora trasera se conecta al eje a través de los puntos E y presenta una modelización análoga a la barra delantera; en este caso el extremo de barra se vincula mediante los tensores a la estructura de seguridad.



**Figura 7.4**  
Eje trasero de un Súper TC 2000.

## 7.5 Neumáticos

De acuerdo a lo expuesto en el punto 5.3 el comportamiento de los neumáticos está influenciado por una gran cantidad de variables. En el presente trabajo se representa tal componente por medio de tres resortes donde cada uno de ellos se asocia a las direcciones  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ; es decir un resorte longitudinal, uno vertical y uno lateral cuyas magnitudes de rigidez corresponden con las definidas en el apartado



5.3.4. En virtud de lo mencionado se modela a estos tres resortes por medio de barras de reticulado tridimensional.

## 8. Desarrollo del programa: SimuDinamic - Simulador Dinámico Estructural-

### 8.1 Introducción

En primera instancia, al abordar el tema del presente Proyecto Integrador se realizó una revisión de la bibliografía existente referida a la dinámica automotriz, fundamentalmente respecto a la temática vinculada con la transferencia de carga lateral y rigidez torsional del chasis. En los diversos libros consultados y citados en las referencias se enfoca el tema de la transferencia de carga lateral de modo simplificado, se hace uso excesivo de conceptos geométricos relacionados con el sistema de suspensión y se trabaja un problema hiperestático empleando las ecuaciones de la estática. La mayoría de estos libros consideran al chasis del vehículo como un cuerpo rígido, lo cual es válido si la magnitud de rigidez a torsión del chasis es suficientemente elevada de modo que la distribución de transferencia de carga lateral sea independiente de tal magnitud; sin embargo resulta ideal tener en consideración la rigidez torsional para obtener resultados con mayor precisión. Las expresiones que presenta la bibliografía para el cálculo de la carga normal sobre cada neumático debido a la transferencia lateral de carga involucran los centros de rolidos, delantero y trasero, y el eje de rolido, fundamentalmente la distancia vertical desde el centro de gravedad al eje de rolido. Estos conceptos geométricos son importantes para estudiar las actitudes del automóvil, es decir el anti-dive, anti-lift, anti-squat y en el movimiento vertical del neumático, pero su influencia en la carga lateral transferida es baja; además estas expresiones se obtienen planteando un equilibrio de momentos respecto al eje de rolido sin tener presente la hiperestaticidad del problema.

Para estudiar el comportamiento dinámico del vehículo sería correcto el empleo de algún método de resolución de estructuras hiperestáticas, en consecuencia se desarrolla en el presente trabajo un código computacional interactivo, sencillo y versátil, denominado "*SimuDinamic*", que trabaje con el método matricial de la rigidez y sea capaz de determinar la carga normal que ejerce cada neumático del coche contra la superficie de rodadura.

En los capítulos subsiguientes se explica detalladamente las posibilidades que ofrece el programa, su funcionamiento interno y los resultados que puede brindar.

## 8.2 Desarrollo del programa. Algoritmos

El software "*SimuDinamic*" ha sido desarrollado sobre el entorno de Matlab 2012b. Este programa es capaz de calcular, para diferentes condiciones, la carga normal que ejerce cada neumático de un vehículo contra la superficie de rodadura; además determina la fuerza lateral máxima que puede desarrollar cada neumático antes de deslizar. Fundamentalmente está enfocado para un automóvil de Súper TC 2000.

Para facilitar el manejo, incrementar la versatilidad y reducir los errores en el ingreso de datos se desarrolló una interfaz gráfica con Matlab GUIDE. En consecuencia, el usuario no precisa disponer de conocimientos de programación para la utilización del programa. Puede utilizarse durante la etapa de diseño de un vehículo y/o en la puesta a punto del automóvil en un circuito de carreras. En la etapa de diseño y desarrollo, presenta utilidad para estudiar la rigidez torsional de la estructura de seguridad, mientras que en un circuito constituye una herramienta para evaluar el funcionamiento dinámico del vehículo y servir de base para alcanzar la performance deseada. Solicita el ingreso de datos relacionados con características del chasis del automóvil: propiedades de la estructura de seguridad, propiedades de los componentes elásticos que integran el sistema de suspensión delantero y trasero, características de los neumáticos, entre otros; pero también requiere datos cinemáticos extraídos del sistema de adquisición de datos del coche: aceleración lateral, aceleración longitudinal y velocidad lineal. Los resultados obtenidos se presentan en gráficos, y pueden ser almacenados en un archivo de extensión .xlsx

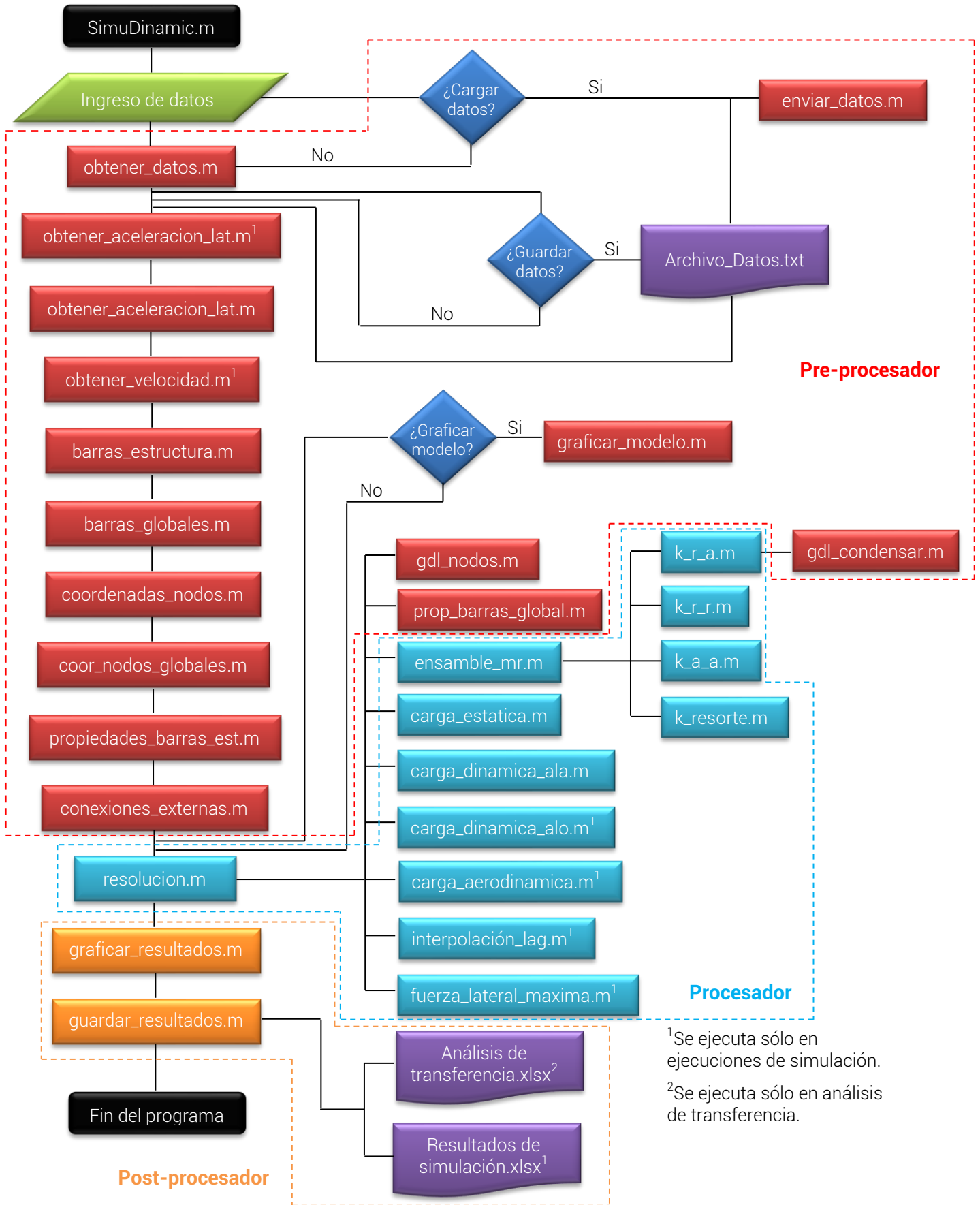
para ser trabajados con posterioridad o bien servir como datos de entrada en otro programa. Concretamente SimuDinamic ofrece la posibilidad de efectuar un análisis de transferencia lateral de carga o bien simular el comportamiento real del automóvil.

La Figura 8.1 muestra la pantalla inicial que se despliega al ejecutar el programa antes de acceder al menú principal. Se observa el nombre del software e información vinculada al autor.



**Figura 8.1**  
Presentación de SimuDinamic.

Para comprender el funcionamiento del programa se presenta, a través de la Figura 8.2, un diagrama de flujo que muestra su estructura interna, constituida por diversas funciones que comandan el software. Para mejorar la comprensión, resulta beneficioso agrupar a estas funciones en tres grupos que se corresponden a las etapas de pre-procesador, procesador y post-procesador; todas estas funciones son invocadas por otras que se asocian a los componentes gráficos y que se sitúan dentro de la función principal del programa denominada SimuDinamic.m.



**Figura 8.2**  
 Diagrama de flujo de SimuDinamic.

<sup>1</sup>Se ejecuta sólo en ejecuciones de simulación.  
<sup>2</sup>Se ejecuta sólo en análisis de transferencia.

### Pre-procesador:

- ✓ obtener\_datos.m
- ✓ obtener\_aceleración\_ala.m
- ✓ obtener\_aceleración\_alo.m
- ✓ obtener\_velocidad.m
- ✓ enviar\_datos.m
- ✓ barras\_estructura.m
- ✓ barras\_globales.m
- ✓ coordenadas\_nodos.m
- ✓ coor\_nodos\_globales.m
- ✓ gdl\_nodos.m
- ✓ gdl\_condensar.m
- ✓ conexiones\_externas.m
- ✓ propiedades\_barras\_est.m
- ✓ prop\_barras\_global.m
- ✓ graficar\_modelo.m

### Procesador:

- ✓ k\_a\_a.m
- ✓ k\_r\_r.m
- ✓ k\_r\_a.m
- ✓ k\_resorte.m
- ✓ ensamble\_mr.m
- ✓ resolución.m
- ✓ carga\_estática.m
- ✓ carga\_dinámica\_ala.m
- ✓ carga\_dinámica\_alo.m
- ✓ carga\_aerodinámica.m
- ✓ fuerza\_lateral\_máxima.m
- ✓ interpolación\_lag.m

### Post-procesador:

- ✓ graficar\_resultados.m
- ✓ guardar\_resultados.m

Las funciones situadas en la etapa de pre-procesador se asocian con el ingreso y manipulación de información; son aquellas que interactúan con el usuario permitiendo la entrada de datos, ya sea mediante teclado o por archivos. Contienen una parte del código destinado a evaluar la validez de los datos ingresados; además envían la información recopilada a matrices de datos que posteriormente serán utilizadas por las funciones que pertenecen a la etapa de procesador. Estas últimas constituyen el núcleo principal del programa, ya que poseen como finalidad implementar el método matricial de la rigidez al chasis vehicular; se encargan de crear las matrices de rigidez de cada barra, ensamblar la matriz global, generar el vector de cargas y obtener la solución. Los resultados obtenidos en esta etapa se envían a matrices de datos, las cuales serán invocadas por las funciones pertenecientes a la etapa de post-procesador. Las funciones que integran la última etapa poseen como meta exhibir los resultados conseguidos de acuerdo a lo solicitado por el usuario, ya sea en forma de gráficos y/o en forma numérica mediante archivos de salida.

A continuación se detalla cada una de las funciones mencionadas, comenzado por las que integran el pre-procesador, seguido de las del procesador y por último las del post-procesador.

#### 8.2.1 Función principal SimuDinamic.m

Constituye la función principal del programa, es generada automáticamente por Matlab GUIDE al utilizar el entorno de programación visual. Dentro de ella es posible distinguir dos grupos de funciones, las creadas por la interfaz gráfica de Matlab y las incorporadas por el usuario. El entorno gráfico reúne una serie de funciones destinadas a la inicialización del programa y a su funcionamiento interno. Asimismo, los diversos componentes gráficos como ser botones, casilleros de ingreso de datos, menús desplegables, entre otros poseen funciones asociadas para su control. Las

funciones creadas por el usuario se ubican dentro de las asociadas a los componentes gráficos. De este modo se ejecutan cuando el usuario:

- ✓ proceda a la carga de datos mediante archivos de datos: propiedades generales de la estructura de seguridad, aceleración lateral, aceleración longitudinal y velocidad lineal por medio de los botones 'Cargar Datos';
- ✓ abra el archivo de datos que contiene información tipeada en ejecuciones previas, esto se consigue a través del botón 'Abrir archivo de datos';
- ✓ guarde en un archivo de datos la información ingresada mediante teclado, esto se consigue mediante el botón 'Guardar archivo de datos';
- ✓ visualice el modelo vehicular a resolver mediante el botón 'Visualizar Modelo';
- ✓ presione sobre el botón 'RESOLVER MODELO' para ejecutar los cálculos vinculados al tipo de solución elegida;
- ✓ grafique los resultados obtenidos: cargas normales sobre el terreno, fuerzas laterales máximas o bien datos de entrada como la aceleración lateral, aceleración longitudinal o velocidad lineal al presionar el botón 'GRAFICAR RESULTADOS';
- ✓ presione el botón 'GUARDAR RESULTADOS' para enviar los resultados obtenidos a un archivo de resultados, el cual varía según la solución elegida.

### 8.2.2 Función obtener\_datos.m

La función obtener\_datos.m posee como finalidad almacenar en una matriz de datos la información que ingresa el usuario por medio del teclado; es la primera función llamada por SimuDinamic.m cuando se presiona el botón 'RESOLVER MODELO' excepto que el usuario introduzca la información vinculada a los diferentes casilleros mediante un archivo de datos, en tal circunstancia no se ejecuta. Esta función también es invocada cuando el usuario desea visualizar el modelo previo a la resolución del problema.

Por otro lado, una porción del código se destina a comprobar que los datos ingresados sean válidos, caso contrario se despliega una ventana de aviso que especifica la información que debe tipearse.



### 8.2.3 Función obtener\_aceleración\_ala.m

Esta función se ejecuta al presionar el botón 'Cargar Datos' correspondiente al título 'ACELERACIÓN LATERAL' situado en el panel "Datos Cinemáticos"; despliega una ventana a través de la cual se selecciona el archivo de datos que contiene la aceleración lateral, posteriormente se almacena esta información en una matriz de datos. El usuario será advertido si cierra la ventana sin escoger el correspondiente archivo o bien si el mismo no posee el formato adecuado.

### 8.2.4 Función obtener\_aceleración\_alo.m

Esta función se ejecuta al presionar el botón 'Cargar Datos' del título 'ACELERACIÓN LONGITUDINAL' situado en el panel "Datos Cinemáticos"; presenta un comportamiento análogo a la función presentada en el punto anterior, su diferencia radica en el tipo de información que el usuario debe seleccionar, en este caso se introduce la aceleración longitudinal.

### 8.2.5 Función obtener\_velocidad.m

La función obtener\_velocidad.m posee características similares a la exhibida en el punto anterior; presenta el mismo funcionamiento interno pero la diferencia radica en el tipo de información que el usuario debe proporcionar. En este caso se introduce la velocidad lineal del coche. Esta función se ejecuta al presionar el botón 'Cargar Datos' del título 'VELOCIDAD LINEAL' ubicado en el panel "Datos Cinemáticos".

### 8.2.6 Función enviar\_datos.m

La función enviar\_datos.m se ejecuta cuando el usuario ingresa la información asociada a los diversos casilleros mediante un archivo de datos; su finalidad consiste en mostrar la información existente en el fichero en los correspondientes casilleros.

### 8.2.7 Función barras\_estructura.m

Esta función se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'Cargar Datos' correspondiente al título 'CONNECTIVIDADES' del panel "Estructura de Seguridad".

Despliega una ventana a través de la cual se selecciona un archivo de texto que contiene información sobre la conectividad de barras de la estructura de seguridad, es decir el nodo inicial y final de cada una de las barras que constituyen la jaula. Presenta un comportamiento análogo al de la función `obtener_aceleración_ala.m`.

### 8.2.8 Función `barras_globales.m`

La función `barras_globales.m` es invocada por `SimuDinamic.m`; crea una matriz de datos que contiene información nodal de todas las barras que integran el modelo vehicular.

### 8.2.9 Función `coordenadas_nodos.m`

Esta función se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'Cargar Datos' correspondiente al título 'COORDENADAS NODALES' del panel "Estructura de Seguridad". Es análoga a la función presentada en 8.2.7 pero con la diferencia que el archivo a seleccionar contiene las coordenadas de los nodos que constituyen la estructura de seguridad. Dentro de la función, la información es procesada y almacenada en una matriz de datos.

### 8.2.10 Función `coor_nodos_globales.m`

Esta función es llamada dentro de la función principal `SimuDinamic.m`; se encarga de crear una matriz de datos que contiene las coordenadas de todos los nodos del modelo.

### 8.2.11 Función `gdl_nodos.m`

La función `gdl_nodos.m` devuelve una matriz de datos que contiene el número de grados de libertad de cada uno de los nodos del modelo; posee tantas filas como nodos estructurales existan y una única columna. Esta matriz es de gran importancia para el proceso de ensamble de la matriz de rigidez global, ya que permite ubicar las matrices de cada barra en la posición adecuada dentro de la matriz global. Esta función es llamada por `ensamble_mr.m`.

## 8.2.12 Función `gdl_condensar.m`

En el marco teórico se definió el proceso de condensación de grados de libertad; este procedimiento permite eliminar filas y columnas de la matriz de rigidez asociadas a grados de libertad cuyo desplazamiento o giro son libres. Un cierto número de barras que integran el modelo vehicular poseen nodos de comportamiento desigual, es decir, asumen un número diferente de grados de libertad (ver capítulo 7).

La función `gdl_condensar.m` devuelve una matriz de datos, cada fila está asociada a una barra en particular y cada columna corresponde a un grado de libertad. Existen doce columnas, las primeras seis se asocian al nodo inicial y las seis restantes al final de cada barra. Cada posición  $ij$  especifica si el grado de libertad que representa debe ser condensado. Esta función es llamada por `k_r_a.m` que se ejecuta dentro del proceso de ensamble de la matriz de rigidez global.

## 8.2.13 Función `conexiones_externas.m`

La función `conexiones_externas.m` se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'Cargar Datos' correspondiente al título 'CONEXIÓN DE SUB-ESTRUCTURAS' ubicado en el panel "Estructura de Seguridad". Presenta un funcionamiento análogo a las demás funciones referidas al ingreso de datos mediante archivo de texto. Esta función almacena en una matriz de datos información sobre los puntos de vinculación de diversos componentes del automóvil a la estructura de seguridad.

## 8.2.14 Función `propiedades_barras_est.m`

Esta función se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'Cargar Datos' correspondiente al título 'PROPIEDADES MECÁNICAS' ubicado en el panel "Estructura de Seguridad". Despliega una ventana que permite seleccionar y cargar el archivo de datos; internamente la función procesa los datos y los almacena en una matriz.

## 8.2.15 Función `prop_barras_global.m`

La función `prop_barras_global.m` es llamada por la función principal de cálculo `resolución.m`; almacena en una matriz de datos información relacionada con las

propiedades mecánicas de todas las barras del modelo; cada fila está asociada a una barra y existen siete columnas por fila. Las diversas columnas de cada fila contienen la siguiente información:

- ✓ rigidez conocida o desconocida, si se desconoce debe calcularse a partir de propiedades geométricas;
- ✓ diámetro de la barra;
- ✓ espesor de la barra;
- ✓ magnitud de la rigidez, valido para barras representadas por resortes con rigidez conocida;
- ✓ módulo de elasticidad longitudinal;
- ✓ módulo de elasticidad transversal;
- ✓ barra hueca o maciza.

### 8.2.16 Función graficar\_modelo.m

La función graficar\_modelo.m se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'Visualizar Modelo' ubicado en la región inferior derecha del panel de ingreso de datos. Esta función despliega una nueva ventana que contiene un gráfico tridimensional del modelo vehicular que se resuelve; se visualiza los componentes que integran el automóvil en diferentes colores.

### 8.2.17 Funciones k\_a\_a.m, k\_r\_r.m, k\_r\_a.m y k\_resorte.m

Todas estas funciones presentan la misma finalidad: crear la matriz de rigidez local de cada barra, rotarla al sistema global y especificar la ubicación de cada uno de sus elementos en la matriz de rigidez global; se ejecutan individualmente dentro de ensamble\_mr.m según el tipo de barra. La utilidad de cada una de estas funciones se presenta a continuación:

- ✓ k\_a\_a.m: es la encargada de crear la matriz de rigidez para una barra de reticulado tridimensional.
- ✓ k\_resorte.m: muy similar a la anterior, su finalidad consiste en armar la matriz de rigidez para resortes espaciales.

- ✓ `k_r_r.m`: se ocupa de crear la matriz de rigidez para barras de pórticos espaciales con seis grados de libertad por nodo.
- ✓ `k_r_a.m`: esta función se encarga de armar la matriz de rigidez para barras que presenten grados de libertad condensados. Su funcionamiento interno resulta más complejo que las anteriores debido al proceso de condensación.

### 8.2.18 Función `ensamble_mr.m`

Esta función es una de las que constituye el núcleo de cálculo principal del programa; su finalidad es comandar, mediante un ciclo iterativo, el proceso de armado de la matriz de rigidez de cada una de las barras y ejecutar el ensamble de la matriz global. Es llamada por la función `resolución.m`.

### 8.2.19 Función `resolución.m`

La función `resolución.m` es la encargada de comandar el proceso de cálculo; se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'RESOLVER MODELO', cuya función asociada se sitúa dentro de `SimuDinamic.m`. La secuencia presentada por el diagrama de flujo de la Figura 8.3 ayuda a comprender el funcionamiento interno de esta función. La primera etapa consiste en crear la matriz de rigidez de cada barra y ensamblar la matriz global de la estructura, lo cual está a cargo de la función `ensamble_mr.m`; esta última requiere la ejecución previa de las funciones: `barras_globales.m`, `coor_nodos_globales.m`, `prop_barras_global.m`, `gdl_nodos.m` y `gdl_condensar.m`. En la segunda etapa, con la finalidad de eliminar la singularidad de la matriz global, se aplican las condiciones de apoyo; en consecuencia, se quita de la matriz global las filas y columnas asociadas a los grados de libertad que restringen los apoyos. La tercera etapa posee como meta la construcción del vector de cargas considerando las condiciones de apoyo. Las funciones `carga_estatica.m`, `carga_dinamica_ala.m`, `carga_dinamica_alo.m` y `carga_aerodinamica.m` se encargan de establecer el esfuerzo que debe aplicarse en los diversos nodos estructurales para simular condiciones reales. El objetivo de la cuarta etapa es determinar los desplazamientos de los nodos estructurales, lo cual requiere invertir la matriz de rigidez global.



**Figura 8.3**  
 Estructura interna de resolución.m

En la quinta etapa se calculan las reacciones de apoyo, estas se vinculan directamente con la carga normal que ejerce cada neumático contra la superficie de rodadura y la que desarrolla lateralmente cada uno de ellos. En la sexta etapa se

computa la fuerza lateral máxima que es capaz de desarrollar cada neumático. Esta fuerza es función de una serie de parámetros geométricos y mecánicos, en este trabajo se la considera únicamente dependiente de la carga normal y del coeficiente de rozamiento lateral del neumático. Asimismo, este coeficiente presenta variabilidad con el esfuerzo normal. Finalmente la séptima y última etapa se encarga de almacenar, en las correspondientes matrices, la magnitud de los diferentes esfuerzos calculados: carga normal y la fuerza lateral máxima sin deslizamiento.

Internamente existe un ciclo iterativo que permite reiterar los cálculos para distintos instantes de tiempo asociados a diferentes magnitudes de aceleración lateral, aceleración longitudinal y velocidad lineal; en consecuencia las etapas cuatro, cinco, seis y siete se repiten una gran cantidad de veces. Asimismo según el tipo de solución adoptada hay funciones que pueden no ejecutarse.

## 8.2.20 Función carga\_estática.m

El centro de gravedad del automóvil se sitúa en una posición en la que, generalmente, no existe ningún nodo estructural, es decir es un punto aislado; en consecuencia el peso vehicular no puede aplicarse en dicho punto, sino que debe establecerse un procedimiento que permita colocar, en determinados nodos estructurales, fuerzas verticales cuya resultante se ubique en el centro de gravedad y disponga una magnitud igual al peso del automóvil.

La función carga\_estática.m posee como finalidad hallar un sistema de fuerzas paralelas que actúen en nodos estructurales y que presente un efecto equivalente al peso del vehículo. Esta función crea una estructura isostática plana auxiliar conformada por tres nodos, dos de ellos pertenecientes al paralelepípedo que caracteriza a cada jaula y el restante al centro de gravedad; esta estructura, representada por la Figura 8.5, resulta de proyectar a estos nodos en un plano horizontal conformado por los ejes x-y y vincularlos por medio de barras. En el nodo que representa al centro de gravedad se aplica una fuerza igual al peso de coche y se determinan las reacciones de apoyo en los restantes. La función carga\_estática.m trabaja con los nodos derechos inferiores del paralelepípedo que se denotan con los

números 1 y 2 en la Figura 8.4. Como el centro de gravedad se asume ubicado en el plano medio del vehículo y los nodos 3 y 4 son los simétricos de los nodos 1 y 2 respecto al mismo plano, entonces la magnitud de las reacciones de apoyo calculadas se reparten en partes iguales entre los nodos simétricos. En conclusión, los nodos 1 y 3 tienen aplicada una misma carga al igual que los nodos 2 y 4, cumpliendo un efecto análogo a una única carga aplicada en el centro de gravedad. Estas fuerzas se ubican en el vector de cargas generado por resolución.m.

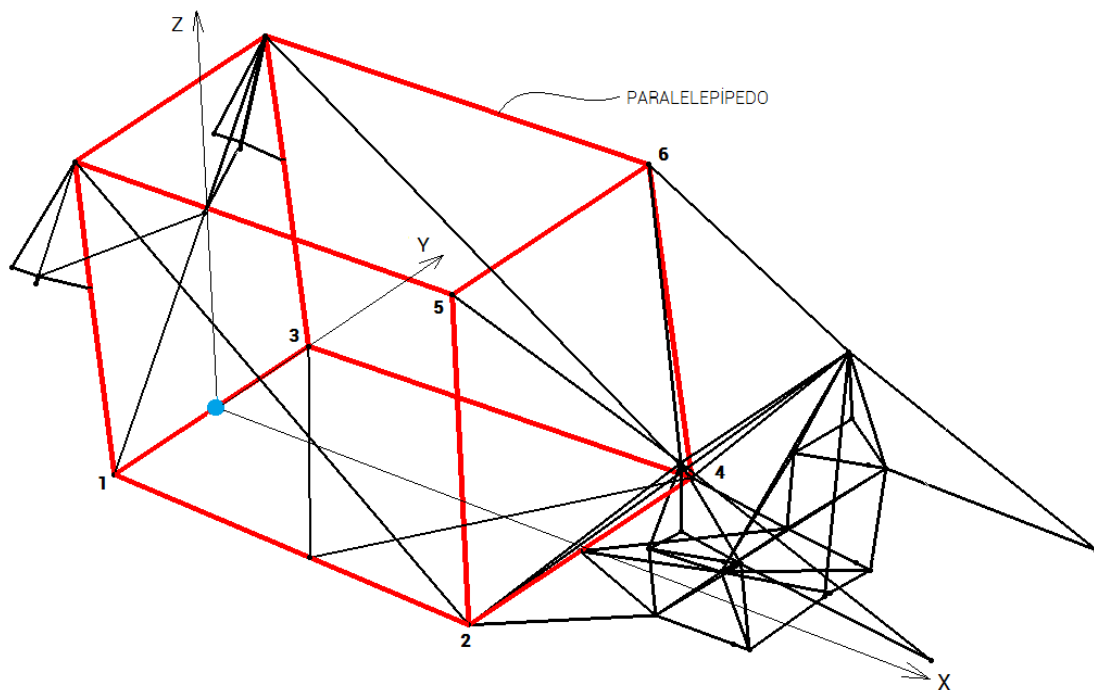


Figura 8.4  
Paralelepípedo deformable utilizado en la definición de la carga estática.

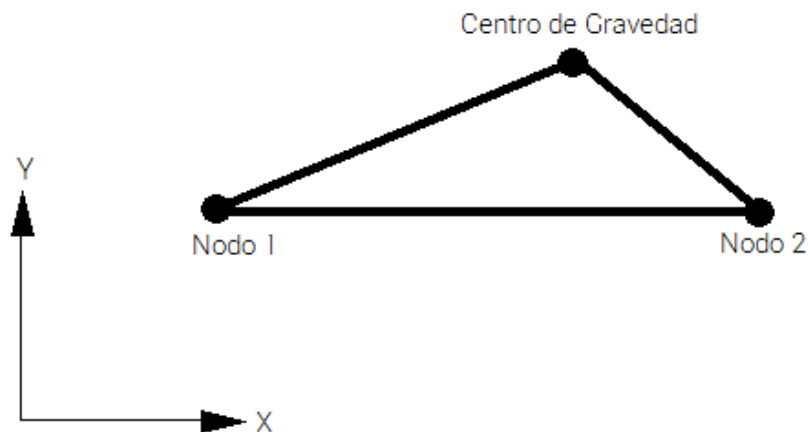


Figura 8.5  
Estructura auxiliar para determinación de carga estática.



## 8.2.21 Función carga\_dinámica\_ala.m

Se sabe que un estado de aceleración lateral provoca una fuerza inercial que actúa en el centro de gravedad del automóvil en la dirección  $z$  de la Figura 8.4. Tal como se definió en el punto 8.2.20 no es posible aplicar una carga en el centro de gravedad ya que su posición generalmente no es coincidente con nodos estructurales.

La función carga\_dinámica\_ala.m presenta un funcionamiento análogo a la función carga\_estática.m; en este caso se genera una estructura isostática auxiliar plana con cuatro nodos; tres que pertenecen a la región derecha del paralelepípedo que caracteriza a la jaula (nodos 1, 2 y 5 de la Figura 8.4) y el restante coincidente con el centro de gravedad. En este caso, la estructura auxiliar resulta de proyectar a los nodos en un plano vertical, conformado por los ejes  $x$ - $z$ , y ligarlos mediante barras. En el nodo que representa al centro de gravedad se aplica una fuerza en dirección  $z$  cuya magnitud es igual a la fuerza inercial y se determinan las reacciones de apoyo en los restantes. Los nodos 3, 4 y 6 son simétricos, respecto al plano medio vehicular, de los nodos 1, 2 y 5, por lo tanto las reacciones calculadas se reparten en partes iguales entre los nodos simétricos. Estas seis cargas se sitúan dentro del vector de cargas generado por resolución.m.

## 8.2.22 Función carga\_dinámica\_alo.m

La función carga\_dinámica\_alo.m tiene como finalidad representar el efecto producido por un estado de aceleración longitudinal. Presenta un funcionamiento interno similar a carga\_estática.m y carga\_dinámica\_ala.m; aquí la fuerza de inercia actúa en el centro de gravedad en dirección  $x$ . Se constituye una estructura isostática auxiliar plana con tres nodos; los nodos (inferior y superior) de la región delantera derecha del paralelepípedo de la Figura 8.4 y el centro de gravedad; en este caso la estructura auxiliar resulta de proyectar los nodos en un plano conformado por los ejes  $y$ - $z$  y vincularlos mediante barras. Posteriormente se aplica la fuerza de inercia en el nodo representativo del centro de gravedad y se resuelve el sistema; se reparten las reacciones de apoyo en partes igual con los nodos simétricos 4 y 6. Finalmente estas cargas se ubican en el vector de cargas generado por resolución.m.

### 8.2.23 Función carga\_aerodinamica.m

Cuando un automóvil desarrolla altas velocidades aparece una fuerza que "presiona" al automóvil contra la carretera incrementando la carga normal sobre los neumáticos; esta fuerza es conocida como "down force". La función carga\_aerodinamica.m tiene como finalidad considerar los efectos de esta fuerza. La ecuación que permite determinar la variabilidad de la down force con la velocidad, ya sea para el tren delantero como para el trasero, utilizada en este programa corresponde a un vehículo Renault Fluence de Súper TC 2000. Esta función al igual que las tres anteriores es invocada por resolución.m.

### 8.2.24 Función fuerza\_lateral\_máxima.m e interpolación\_lag.m

La función fuerza\_lateral\_maxima.m es una de las más sencillas del programa. Calcula, para un estado de carga normal sobre los neumáticos, la fuerza lateral máxima que pueden resistir antes de comenzar a deslizar lateralmente. Para ello requiere de información proveniente de la función interpolación\_lag.m; ésta proporciona el coeficiente de rozamiento lateral de cada neumático según la carga normal que actué sobre él. La información vinculada al coeficiente de rozamiento lateral pertenece a un neumático de marca Pirelli que equipo a los coches de TC 2000 años atrás. La función interpolación\_lag.m es llamada por fuerza\_lateral\_maxima.m, y esta última por resolución.m.

### 8.2.25 Función graficar\_resultados.m

Esta función se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'GRAFICAR RESULTADOS' situado en el panel 'Visualización de Resultados'. Se encarga de mostrar en las ventanas de visualización la información exigida por el usuario de acuerdo a la selección realizada desde el menú desplegable inferior y superior.

### 8.2.26 Función guardar\_resultados.m

La función guardar\_resultados.m se ejecuta cuando el usuario presiona el botón 'GUARDAR RESULTADOS' situado en el panel 'Guardar Resultados'. Su misión

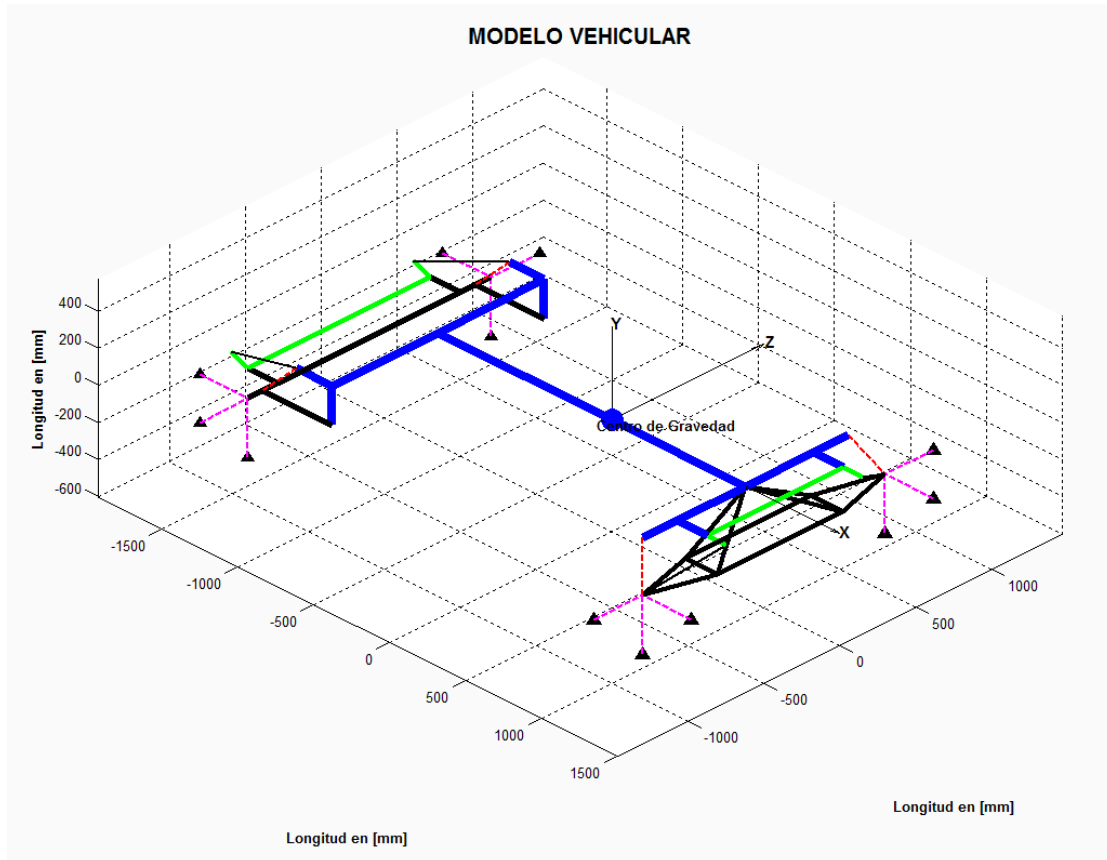
consiste en escribir un archivo, con formato .xlsx, con los resultados obtenidos. Según el tipo de solución elegido el archivo de resultados es diferente; para un análisis de transferencia el archivo se compone de 8 columnas con la siguiente información: tiempo, la fuerza normal sobre cada neumático, la transferencia lateral delantera, la transferencia lateral trasera y la transferencia lateral total. En una simulación el archivo se compone de 9 columnas con la siguiente información: tiempo, fuerza normal sobre cada neumático y fuerza lateral máxima soportada por cada neumático.

## 8.3 Utilidades de SimuDinamic

El software SimuDinamic fue desarrollado originalmente con la finalidad de generar una herramienta que permita evaluar una propiedad mecánica del chasis vehicular, la rigidez torsional. En la etapa inicial de desarrollo del software se empleó un modelo simplificado del chasis vehicular; se representaba a la estructura de seguridad por medio de una barra con propiedades análogas a la jaula, es decir la matriz de rigidez de esta viga presentaba un comportamiento equivalente al de la estructura de seguridad. Este modelo exhibía total validez pero resultaba dificultoso el cálculo de la matriz de rigidez de la barra, fundamentalmente si se pretendía evaluar una serie de jaulas donde el número de cálculos a realizar era mayor. La Figura 8.6 presenta el primer modelo vehicular desarrollado; las barras azules simbolizan a la jaula, las de color negro al sistema de suspensión delantero y trasero, las líneas de trazos de color rojo los resortes de suspensión, las verdes las barras estabilizadoras y las barras fucsias representan a los resortes que modelan las rigideces de los neumáticos. Las posibilidades que ofrecía esta primera versión eran limitadas; proporcionaba la carga normal sobre cada neumático para una aceleración lateral constante introducida por el usuario. No se encontraba dentro de las posibilidades:

- ✓ simular el estado de carga normal sobre los neumáticos a lo largo de una vuelta en un circuito;
- ✓ determinar las fuerzas laterales máximas que son capaces de desarrollar los neumáticos;
- ✓ no se consideraban efectos aerodinámicos;
- ✓ no permitía la introducción de la aceleración longitudinal;

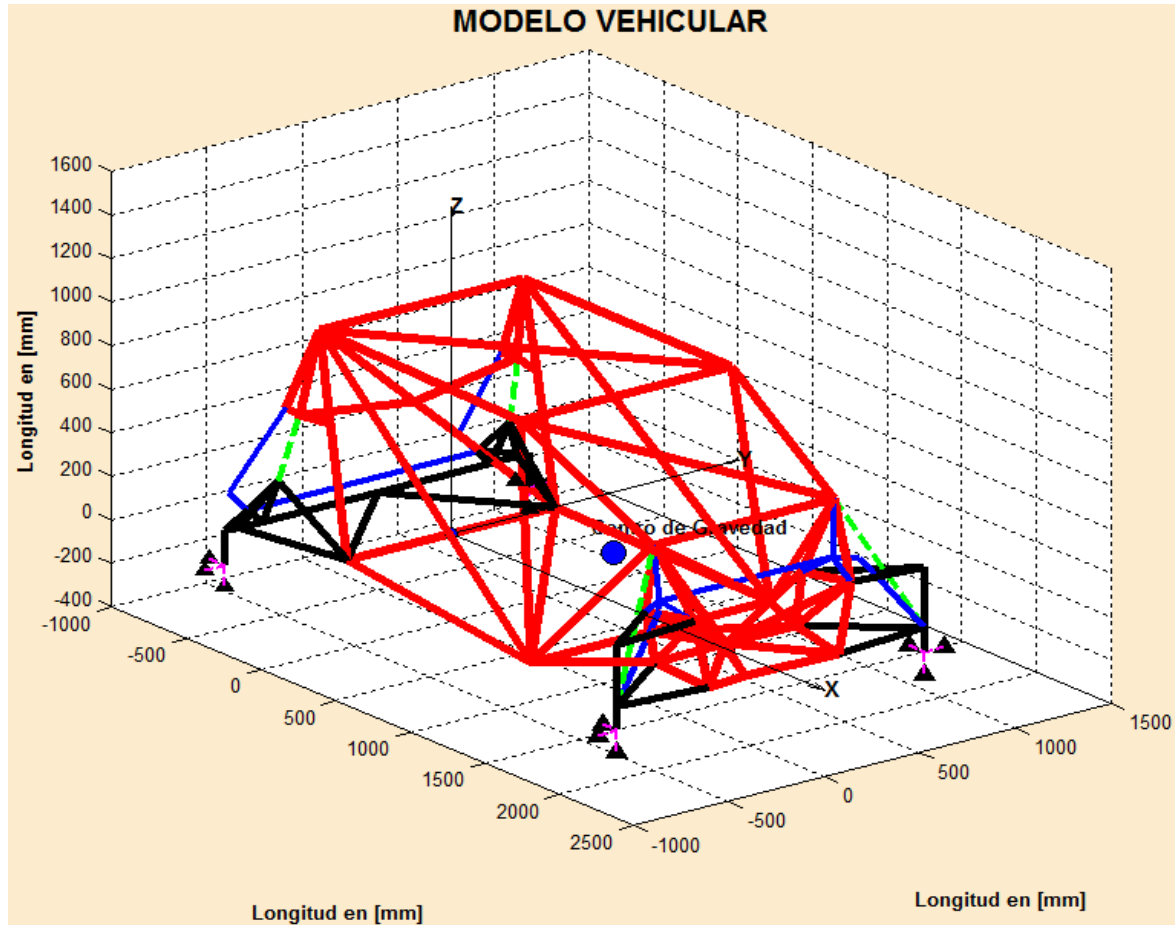
- ✓ la orientación espacial de los resortes de suspensión no era la real;
- ✓ no existía la posibilidad de guardar los resultados;



**Figura 8.6**  
Modelo vehicular con chasis representado con una viga.

La segunda versión, la cual es la versión actual, sufrió grandes cambios respecto a la primera; se optó por considerar a la estructura de seguridad en su totalidad, generando un modelo idéntico a la realidad. Mediante tres archivos de datos de extensión .txt se ingresa las características de la jaula: coordenadas nodales, conectividades de barras, propiedades mecánicas y geométricas de las barras. Este nuevo modelo admite el ingreso de tres archivos adicionales: aceleración lateral, aceleración longitudinal y velocidad lineal del coche. La posibilidad de introducir esta información trajo grandes ventajas, a partir de entonces se consideran efectos aerodinámicos y transferencias de cargas laterales y longitudinales reales, pudiendo utilizar al programa como un simulador. La Figura 8.7 presenta el modelo vehicular final; la estructura de seguridad se modela por medio de barras de color rojo, el sistema de suspensión delantero y el eje trasero presentan color negro, las barras

estabilizadoras de color azul, los resortes de suspensión de color verde y los que representan la rigidez de los neumáticos de color fucsia.



**Figura 8.7**  
Modelo vehicular actual.

En conclusión, SimuDinamic es un programa computacional que permite ejecutar:

- ✓ Análisis de transferencia lateral de carga y
- ✓ simulación del estado real de carga sobre los neumáticos.

Las utilidades del software se sintetizan en los siguientes puntos:

- ✓ constituye una herramienta de utilidad para la etapa de diseño de un vehículo de competición permitiendo la evaluación de la rigidez torsional del chasis;
- ✓ simula el estado de carga normal sobre cada neumático a partir de datos de aceleración lateral, aceleración longitudinal y velocidad lineal del automóvil, contribuyendo al logro de la performance deseada;

- ✓ estipula la fuerza lateral máxima que puede desarrollar cada neumático en todo instante de tiempo;
- ✓ permite modificar una gran cantidad de parámetros del chasis vehicular: rigideces de componentes elásticos del sistema de suspensión delantero y trasero, geometría de elementos del sistema de suspensión, geometría y propiedades de la estructura de seguridad, masa del coche, posición del centro de gravedad, rigideces de los neumáticos, entre otras;
- ✓ capacidad de escritura de los resultados en un archivo de extensión .xlsx;
- ✓ posibilidad de visualizar el modelo vehicular en estudio;
- ✓ posee una interfaz gráfica agradable, sencilla, intuitiva y práctica.

## 8.4 Manual de usuario –SimuDinamic–

### 8.4.1 Introducción

El presente capítulo posee como finalidad exhibir toda la información necesaria para que el usuario de SimuDinamic pueda utilizar correctamente el programa y obtener resultados válidos. Por medio de este software es posible ejecutar:

- ✓ un análisis de transferencia lateral de carga o bien
- ✓ simular el estado de carga normal sobre los neumáticos del automóvil.

La Figura 8.8 presenta una vista del menú principal del programa, se observan tres grandes paneles vinculados con el ingreso de datos, resolución y resultados. Dentro de ellos existen sub-paneles que contienen casilleros para el ingreso de información, botones para la carga de archivos, botones que ejecutan acciones específicas, menús desplegables, entre otros. Para una explicación detallada resulta conveniente dividir el menú principal en tres secciones vinculadas con los tres grandes paneles; estas secciones son:

- ✓ ingreso de datos,
- ✓ resolución y
- ✓ resultados.

La primera sección se relaciona con la entrada de datos, ya sea mediante teclado o por archivos de datos; la segunda sección permite seleccionar el tipo de solución y resolver el modelo; y la tercera sección permite manipular los resultados obtenidos. A continuación se presentan una serie de consideraciones a tener en cuenta y posteriormente se analiza en detalle las tres secciones.

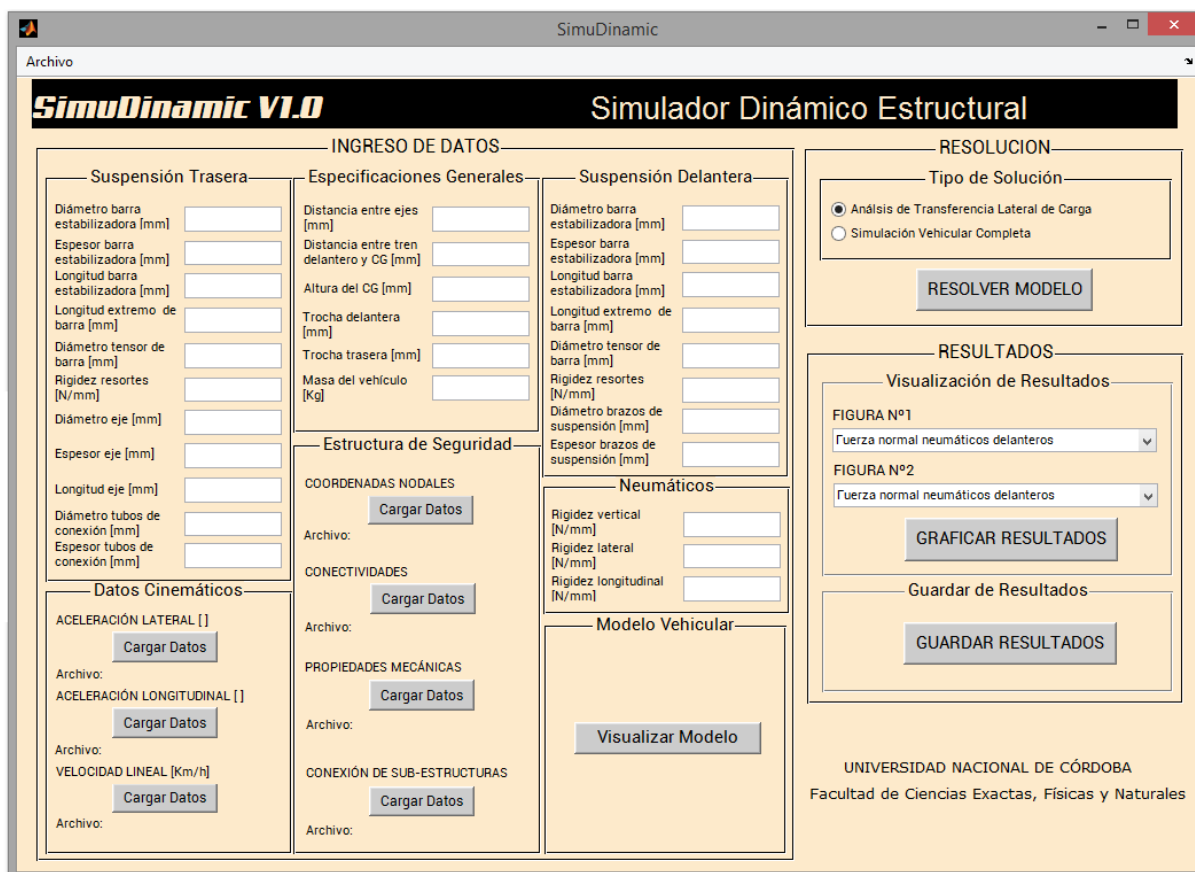


Figura 8.8  
 Menú principal de SimuDinamic.

### 8.4.2 Consideraciones generales

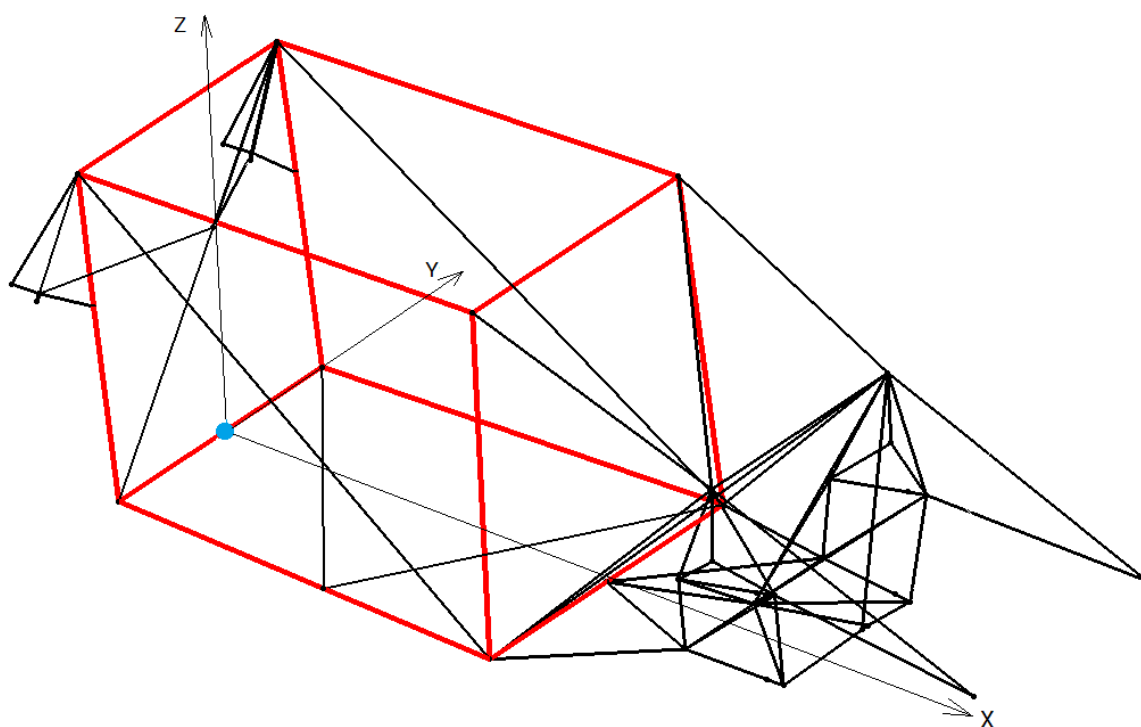
De acuerdo a lo presentado en el capítulo 7, el chasis del automóvil está constituido por una serie de sub-estructuras: jaula de seguridad, suspensión delantera, suspensión trasera y neumáticos. Como SimuDinamic es un programa cuya aplicación está enfocada a vehículos de Súper TC 2000 las sub-estructuras correspondientes al sistema delantero y trasero de suspensión están predeterminadas en su tipo, la suspensión delantera es independiente de paralelogramo deformable y la trasera es un eje rígido. El usuario tiene únicamente

control sobre su geometría: diámetro y espesor y sobre los nodos de la jaula a los cuales se conectan estas sub-estructuras. Cada una de las parrillas que constituye al sistema de paralelogramo deformable se conecta a la jaula mediante dos nodos; la posición de la barra estabilizadora delantera la determina internamente el programa en función de los nodos de conexión de las parrillas y de los resortes delanteros de suspensión que son establecidos por el usuario, mientras que los tensores de barra se vinculan por defecto a la parrilla inferior. El eje trasero se enlaza a la jaula por medio de dos nodos, la conexión de los tensores de la barra estabilizadora trasera a la jaula son fijados por el usuario como asimismo los nodos donde se conectan los resortes de suspensión.

Por otro lado, la estructura de seguridad obligatoriamente debe contener barras que definan las aristas de un paralelepípedo, que constituye el volumen principal del habitáculo. El resto de los nudos y barras con sus conectividades son elegidos libremente por el usuario. La Figura 8.9 muestra el paralelepípedo que define el habitáculo. Resulta fundamental destacar que el programa trabaja con elementos estructurales de sección circular, ya sean huecos o macizos.

Resulta de suma importancia definir un sistema de referencia que será utilizado en la escritura de las coordenadas nodales de la jaula. Su origen debe situarse obligatoriamente en el punto medio de los nodos de conexión del eje trasero; debido a la simetría vehicular el origen está contenido en el plano de simetría del coche. Este sistema de coordenadas debe tener sus ejes orientados en la misma dirección que el sistema de referencia vehicular definido en el punto 5.2.2, los ejes  $y$ - $z$  poseen sentido opuesto al definido en el punto 5.2.2 y el eje  $x$  el mismo sentido. En la Figura 8.9 se exhibe el sistema de coordenadas definido con anterioridad.





**Figura 8.9**  
Paralelepípedo del habitáculo y sistema de referencia.

## 8.4.3 Ingreso de datos

### 8.4.3.1 Introducción

El panel 'Ingreso de Datos', situado en la región izquierda del menú principal de SimuDinamic, está constituido por siete sub-paneles:

- ✓ suspensión trasera,
- ✓ especificaciones generales,
- ✓ suspensión delantera,
- ✓ neumáticos,
- ✓ datos cinemáticos,
- ✓ estructura de seguridad y
- ✓ modelo vehicular;

los primeros seis sub-paneles permiten la entrada de información, mientras que el restante visualizar el modelo vehicular a resolver. El ingreso de datos puede efectuarse de dos modos:

- ✓ entrada de datos mediante teclado y archivos de datos o
- ✓ entrada de datos mediante archivos de datos.

#### 8.4.3.2 Entrada de datos mediante teclado y archivos de datos

En este caso, una parte de la información se introduce mediante teclado y la otra, por medio de archivos de datos. Cuatro de los siete sub-paneles presentados poseen un casillero de escritura asociado a cada propiedad donde el usuario debe tipear la información correspondiente; dos sub-paneles poseen botones para la carga de archivos y el restante permite visualizar el modelo vehicular que se resuelve. A continuación se analiza cada uno de los sub-paneles.

#### SUSPENSIÓN TRASERA

En este sub-panel el usuario debe ingresar, en los correspondientes casilleros, información vinculada a la suspensión trasera del automóvil. Se solicita la entrada de:

- ✓ diámetro barra estabilizadora trasera,
- ✓ espesor barra estabilizadora,
- ✓ longitud barra estabilizadora,
- ✓ longitud extremo de barra estabilizadora,
- ✓ diámetro tensor de barra estabilizadora,
- ✓ rigidez resortes traseros de suspensión,
- ✓ diámetro eje,
- ✓ espesor eje,
- ✓ longitud eje,
- ✓ diámetro tubos longitudinales de conexión del eje trasero a jaula,
- ✓ espesor tubos de conexión.

Todas estas propiedades deben ingresarse en [mm] con excepción de la rigidez de los resortes que debe expresarse en [N/mm].

#### ESPECIFICACIONES GENERALES

El presente sub-panel contiene información relacionada con propiedades generales del coche; el usuario debe tipear en los diversos casilleros la magnitud asociada a cada una de ellas. Se solicita la entrada de:

- ✓ distancia entre ejes,
- ✓ distancia entre tren delantero y centro de gravedad,
- ✓ altura del centro de gravedad,
- ✓ trocha delantera,
- ✓ trocha trasera,
- ✓ masa del automóvil.

Con excepción de la masa del coche que debe expresarse en [kg], el resto de las propiedades posee dimensiones de [mm].

### SUSPENSIÓN DELANTERA

Este sub-panel agrupa información asociada al sistema delantero de suspensión; el usuario debe ingresar en cada casillero los datos requeridos. Se solicita la entrada de:

- ✓ diámetro barra estabilizadora delantera,
- ✓ espesor barra estabilizadora,
- ✓ longitud barra estabilizadora,
- ✓ longitud extremo de barra estabilizadora,
- ✓ diámetro tensor de barra estabilizadora,
- ✓ rigidez resortes delanteros de suspensión,
- ✓ diámetro brazos de suspensión,
- ✓ espesor brazos de suspensión.

Todas estas propiedades deben ingresarse en [mm] con excepción de la rigidez de los resortes que debe expresarse en [N/mm].

### NEUMÁTICOS

Este constituye el último sub-panel donde el usuario debe tipear información, contiene datos relacionados con los neumáticos que equipan al vehículo. Se solicita el ingreso de:

- ✓ rigidez vertical de neumáticos,
- ✓ rigidez lateral,
- ✓ rigidez longitudinal.

Todas estas propiedades deben ser expresadas en [N/mm].

## DATOS CINEMÁTICOS

Mediante este sub-panel el usuario de SimuDinamic carga tres archivos de datos de extensión .txt, estos son:

- ✓ aceleración lateral,
- ✓ aceleración longitudinal,
- ✓ velocidad lineal.

Cada uno de estos archivos se compone de dos columnas, la primera de ellas contiene el tiempo expresado en [s] y la segunda la magnitud de aceleración lateral, aceleración longitudinal o velocidad lineal asociada a cada instante de tiempo. Las magnitudes de aceleración lateral y longitudinal deben obligatoriamente adimensionalizarse respecto a la aceleración gravitatoria, mientras que la velocidad lineal debe expresarse en [Km/h]. Las aceleraciones y la velocidad deben corresponder a un mismo momento, el incremento de tiempo para los tres archivos debe ser coincidente y deben referirse al sistema de coordenadas vehicular definido en el punto 5.2.2.

Según el tipo de solución adoptada puede requerirse el ingreso de la totalidad de los archivos o bien sólo uno de ellos. En un análisis de transferencia lateral de carga sólo se precisa la aceleración lateral, mientras que para ejecutar una simulación es necesario ingresar la totalidad de los archivos.

## ESTRUCTURA DE SEGURIDAD

El sub-panel estructura de seguridad permite que el usuario del programa ingrese información relacionada con la jaula del automóvil, lo cual se efectúa a través de archivos de texto de extensión .txt. Independientemente del tipo de solución adoptada se requiere cargar los cuatro archivos que se presentan a continuación.

### Coordenadas nodales

Este archivo de datos contiene las coordenadas de todos los nodos que integran la estructura de seguridad; está formado por tantas filas como nodos estructurales existan en orden creciente con el número de nodos y por tres columnas asociadas a

las coordenadas x-y-z separadas por espacios en blanco; estas se definen respecto al sistema de referencia establecido en la Figura 8.9 y deben estar expresadas en [mm].

### **Conectividades entre barras**

Este archivo de datos contiene información sobre los nodos que integran a cada una de las barras de la estructura de seguridad. Posee tantas filas como barras disponga la estructura y dos columnas asociadas al nodo inicial y final respectivamente; las filas se ubican de modo sucesivo con el número de barras.

### **Propiedades de barras**

Este archivo de datos contiene información sobre la geometría de las barras y sus propiedades mecánicas. Se compone de tantas filas como barras integren la estructura de seguridad refiriéndose al orden secuencial de barras comenzando con el número uno y de cuatro columnas que contienen:

- ✓ 1° columna: diámetro de la barra,
- ✓ 2° columna: espesor de la barra,
- ✓ 3° columna: módulo de elasticidad longitudinal,
- ✓ 4° columna: módulo de elasticidad transversal.

Cada columna debe estar separada por un espacio en blanco. Los diámetros y espesores deben expresarse en [mm] mientras que los módulos de elasticidad en [N/mm<sup>2</sup>].

### **Conexiones de los sistemas de suspensión a jaula**

Este archivo de datos contiene información sobre los nodos de la estructura de seguridad a los cuales se vincula el sistema de suspensión delantero y trasero, asimismo solicita una serie de nodos necesarios para el funcionamiento del programa. Se compone de dieciséis filas y dos columnas tal como muestra la Tabla 8.1. De acuerdo a la convención utilizada en dicha tabla, el usuario debe situarse en el origen del sistema de referencia definido en la Figura 8.9 y con la mirada puesta hacia la dirección de avance del vehículo.

|                                | 1º COLUMNA                                  | 2º COLUMNA                                 |
|--------------------------------|---|--|
| <b>SUSPENSIÓN DELANTERA</b>    |   |  |
| Delantera derecha              |   |  |
| 1º FILA                        | Nodo trasero inferior parrilla inferior.    | Nodo delantero inferior parrilla inferior. |
| 2º FILA                        | Nodo trasero superior parrilla superior.    | Nodo delantero superior parrilla superior. |
| Delantera izquierda            |   |  |
| 3º FILA                        | Nodo trasero inferior parrilla inferior.    | Nodo delantero inferior parrilla inferior. |
| 4º FILA                        | Nodo trasero superior parrilla superior.    | Nodo delantero superior parrilla superior. |
| Resortes de suspensión         |   |  |
| 5º FILA                        | Nodo de conexión a jaula resorte izquierdo. | 0  |
| 6º FILA                        | Nodo de conexión a jaula resorte derecho.   | 0  |
| <b>SUSPENSIÓN TRASERA</b>      |   |  |
| Eje trasero                    |   |  |
| 7º FILA                        | Nodo derecho de conexión a jaula.           | 0  |
| 8º FILA                        | Nodo izquierdo de conexión a jaula.         | 0  |
| Resortes de suspensión         |   |  |
| 9º FILA                        | Nodo de conexión a jaula resorte izquierdo. | 0  |
| 10º FILA                       | Nodo de conexión a jaula resorte derecho.   | 0  |
| Barra estabilizadora trasera   |   |  |
| 11º FILA                       | Nodo izquierdo de conexión a jaula.         | 0  |
| 12º FILA                       | Nodo derecho de conexión a jaula.           | 0  |
| <b>CUBO PRINCIPAL DE JAULA</b> |   |  |
| 13º FILA                       | Nodo trasero derecho inferior.              | Nodo trasero derecho superior.             |
| 14º FILA                       | Nodo trasero izquierdo inferior.            | Nodo trasero izquierdo superior.           |
| 15º FILA                       | Nodo delantero derecho inferior.            | Nodo delantero derecho superior            |
| 16º FILA                       | Nodo delantero izquierdo inferior.          | Nodo delantero izquierdo superior.         |

Tabla 8.1 Contenido archivo de conexiones a jaula.

## MODELO VEHICULAR

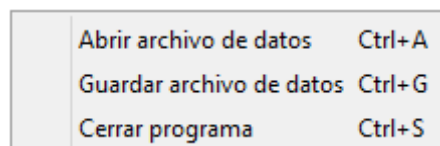
Este sub-panel no se relaciona con el ingreso de datos, sino con la visualización del modelo vehicular. Una vez introducidos todos los datos, presionando sobre el botón 'Visualizar Modelo' se despliega una nueva ventana con un modelo tridimensional de barras representativo del coche. En diversos colores se exhiben los componentes del chasis; a saber;

- ✓ rojo: la estructura de seguridad,
- ✓ negro: sistema de suspensión delantero y trasero,
- ✓ azul: barras estabilizadoras,
- ✓ verde: los resortes de suspensión y en
- ✓ fucsia: los resortes representativos de las rigideces de los neumáticos.

#### 8.4.3.3 Entrada de datos mediante archivos de datos

En este caso, la información se introduce exclusivamente mediante archivos de datos. Esto es posible gracias a la existencia del botón 'Guardar Archivo de Datos', situado dentro del menú 'Archivo' en el extremo superior izquierdo del programa, que permite almacenar en un archivo de texto los datos tipeados por el usuario. Por lo tanto, si se dispone del archivo, el usuario debe acceder a tal menú y proceder a la carga del mismo mediante el botón 'Abrir Archivo de Datos'. Concretamente, este modo de ingresar la información sólo es posible si se dispone del mencionado archivo de datos. La Figura 8.10 muestra el menú que contiene los botones de almacenar y abrir archivo de datos, y un tercer botón para cerrar el programa.

La información asociada a los sub-paneles estructura de seguridad y datos cinemáticos se ingresa del modo explicado en el punto anterior.



**Figura 8.10**  
Menú para guardar o abrir archivo de datos.

#### 8.4.4 Resolución

El segundo panel de SimuDinamic, denominado 'Resolución', es relativamente sencillo. Permite que el usuario seleccione el tipo de solución y resuelva el modelo vehicular a través del botón 'RESOLVER MODELO'. Como se mencionó en el inicio del presente capítulo, SimuDinamic permite:

- ✓ efectuar un análisis de transferencia lateral de carga: este análisis precisa el ingreso de todos los datos numerados en el punto 8.4.3 a excepción de la aceleración longitudinal y velocidad lineal;
- ✓ simular el estado de carga normal sobre cada uno de los neumáticos: este análisis precisa el ingreso de todos los datos numerados en el punto 8.4.3.

### 8.4.5 Resultados

El tercer y último panel de SimuDinamic se encarga de la visualización y almacenamiento de los resultados obtenidos. Respecto a la visualización, el programa presenta dos menús desplegables que permiten seleccionar la información que se desea graficar:

- ✓ fuerza normal neumáticos delanteros,
- ✓ fuerza normal neumáticos traseros,
- ✓ fuerza lateral máxima neumáticos delanteros<sup>1</sup>,
- ✓ fuerza lateral máxima neumáticos traseros<sup>1</sup>,
- ✓ aceleración lateral,
- ✓ aceleración longitudinal<sup>1</sup> y
- ✓ velocidad lineal<sup>1</sup>.

Los ítems que poseen el superíndice<sup>1</sup> sólo están disponible en la simulación vehicular. Para generar los gráficos correspondientes, el usuario debe seleccionar el tipo de información y posteriormente presionar sobre el botón 'GRAFICAR RESULTADOS'.

Por otro lado, SimuDinamic posee dos archivos de resultados de extensión .xlsx, asociados a los tipos de solución disponible. En un análisis de transferencia lateral de carga, el archivo de resultados se compone de ocho columnas que contienen: tiempo, carga sobre cada neumático, transferencia lateral de carga delantera, transferencia lateral de carga trasera y transferencia de carga lateral total. Mientras que en una simulación el archivo de resultados posee nueve columnas y se compone de: tiempo, carga sobre cada neumático y fuerza lateral máxima soportada por cada neumático. En ambos archivos las fuerzas se expresan en [kgf] y el tiempo en [s]. Para guardar los



resultados el usuario debe presionar sobre el botón 'GUARDAR RESULTADOS'. La Figura 8.11 y Figura 8.12 exhiben los dos tipos de archivos de resultados.

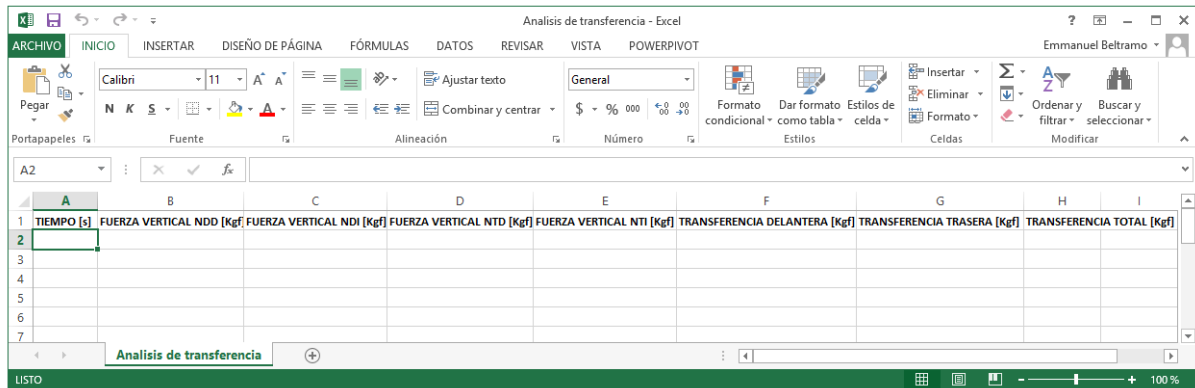


Figura 8.11  
Archivo de resultados para un análisis de transferencia lateral de carga.

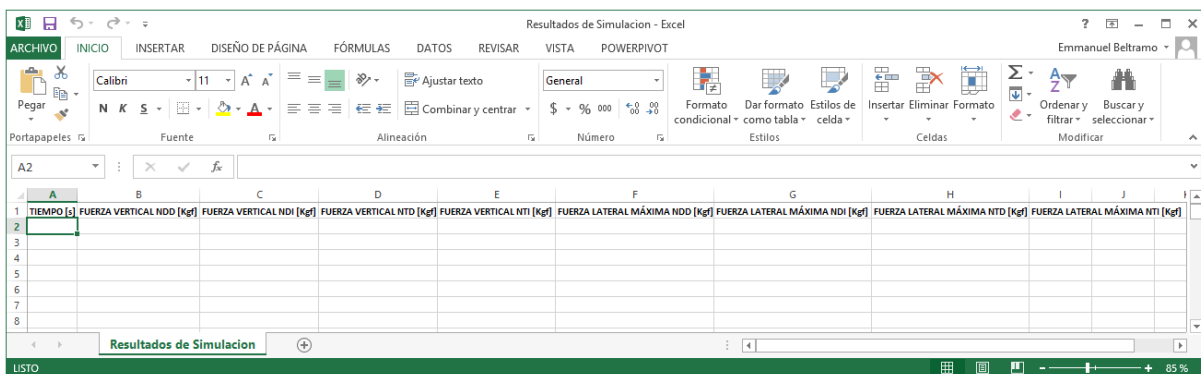


Figura 8.12  
Archivo de resultados para una simulación vehicular.

## 8.5 Validación de SimuDinamic

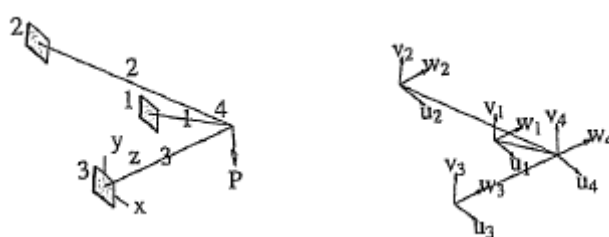
### 9.2.1 Introducción

Este capítulo tiene como finalidad verificar el correcto funcionamiento de las funciones que conforman el núcleo principal del programa, es decir, las encargadas de crear las matrices de rigidez de cada barra, ensamblar la matriz global y resolver el sistema hiperestático. Para ello se procede a resolver tres ejercicios utilizando las funciones de SimuDinamic; los resultados de estos ejercicios son conocidos, por lo tanto es posible contrastar tales valores con los obtenidos mediante las funciones del programa. El CD que se adjunta con el presente trabajo contiene una carpeta, ubicada

en el directorio SimuDinamic/Validación con los tres ejercicios presentados; asimismo en el punto 13.1 del anexo se presenta el procedimiento que debe seguir el lector para ejecutar estos archivos y leer los resultados.

### 8.5.2 Primer ejercicio

La estructura a resolver es un reticulado tridimensional conformado por tres barras. La barra 1 y 2 poseen una sección transversal de  $200 \text{ [mm}^2\text{]}$ , la barra 3 un área transversal de  $600 \text{ [mm}^2\text{]}$  y todas ellas un módulo de elasticidad transversal de  $210 \text{ [Gpa]}$ . En la Figura 8.13 se presenta el reticulado tridimensional y en la Tabla 8.2 las coordenadas espaciales de cada nodo. La carga se aplica en el nodo 4 y adopta un valor de  $20000 \text{ [N]}$ . Los nodos 1, 2 y 3 poseen sus grados de libertad totalmente restringidos.



**Figura 8.13**  
 Reticulado tridimensional conformado por tres barras (extraído Ref. [8]).

| NODO | COORDENADA X [mm] | COORDENADA Y [mm] | COORDENADA Z [mm] |
|------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1    | 960               | 1920              | 0                 |
| 2    | -1440             | 1440              | 0                 |
| 3    | 0                 | 0                 | 0                 |
| 4    | 0                 | 0                 | 2000              |

**Tabla 8.2** Coordenadas de nodos estructurales.

Los resultados obtenidos aplicando las funciones que integran el núcleo de cálculo principal de SimuDinamic se muestran en la Tabla 8.3, mientras que la Figura 8.14 y Figura 8.15 exhiben los resultados presentados por la bibliografía para tal ejercicio.

| NODO | DESPL. X<br>[mm] | DESPL. Y<br>[mm] | DESPL. Z<br>[mm] | FUERZA X<br>[N] | FUERZA Y<br>[N] | FUERZA Z<br>[N] |
|------|------------------|------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1    | 0                | 0                | 0                | 6666,67         | 13333,33        | -13888,889      |
| 2    | 0                | 0                | 0                | -6666,67        | 6666,67         | -9259,259       |
| 3    | 0                | 0                | 0                | 0               | 0               | 23148           |
| 4    | -0,178143        | -2,46857         | -0,367431        | 0               | -20000          | 0               |

Tabla 8.3 Resultados obtenidos mediante las funciones de SimuDinamic.

|   | u         | v        | w         |
|---|-----------|----------|-----------|
| 1 | 0         | 0        | 0         |
| 2 | 0         | 0        | 0         |
| 3 | 0         | 0        | 0         |
| 4 | -0.178143 | -2.46857 | -0.367431 |

Figura 8.14

Desplazamientos nodales expresados en [mm] (extraído Ref. [8]).

| Label          | dof            | Reaction | Sum of Reactions |
|----------------|----------------|----------|------------------|
| R <sub>1</sub> | u <sub>1</sub> | 6666.67  | dof: u 0         |
| R <sub>2</sub> | v <sub>1</sub> | 13333.3  | dof: v 20000.    |
| R <sub>3</sub> | w <sub>1</sub> | -13888.9 | dof: w 0         |
| R <sub>4</sub> | u <sub>2</sub> | -6666.67 |                  |
| R <sub>5</sub> | v <sub>2</sub> | 6666.67  |                  |
| R <sub>6</sub> | w <sub>2</sub> | -9259.26 |                  |
| R <sub>7</sub> | u <sub>3</sub> | 0        |                  |
| R <sub>8</sub> | v <sub>3</sub> | 0        |                  |
| R <sub>9</sub> | w <sub>3</sub> | 23148.1  |                  |

Figura 8.15

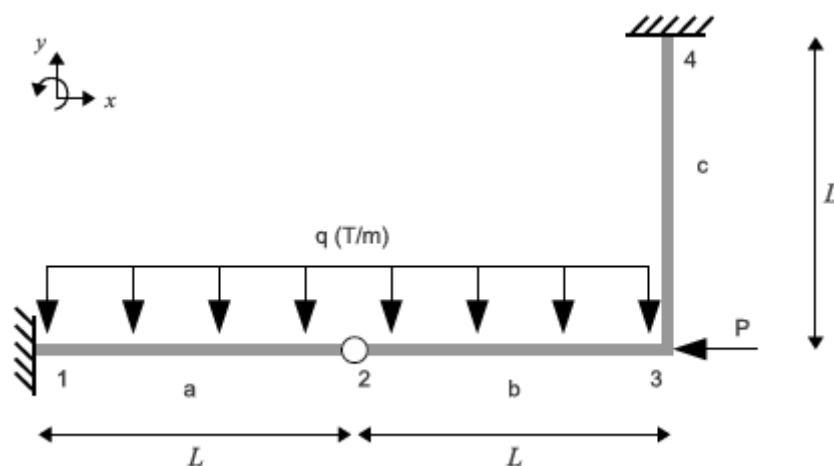
Reacciones de apoyo expresadas en [N] (extraído Ref. [8]).

Comparando los desplazamientos nodales obtenidos mediante las funciones de SimuDinamic con los extraídos de la bibliografía se puede concluir que los resultados alcanzados son totalmente correctos y satisfactorios, con errores prácticamente nulos; exactamente lo mismo se puede concluir con las magnitudes de las reacciones de apoyo. Resulta difícil determinar el error ya que los resultados son coincidentes en su totalidad.

A través del presente ejercicio se ha verificado el correcto funcionamiento de las matrices asociadas a barras de reticulado tridimensional, el ensamble de la matriz global y la resolución del problema.

### 8.5.3 Segundo ejercicio

El segundo ejemplo es utilizado para verificar el proceso de condensación estático de la matriz de rigidez. Se trata de una estructura plana con nodos rígidos y articulados tal como muestra la Figura 8.16. Las tres barras presentan una sección transversal de  $28,5 \text{ [cm}^2\text{]}$  y un momento de inercia de  $1940 \text{ [cm}^4\text{]}$ ; la longitud  $L$  posee una magnitud de  $1 \text{ [m]}$ , la carga  $P$  es de  $1 \text{ [Tn]}$  y la carga distribuida  $q$  de  $2 \text{ [Tn/m]}$ . El módulo de elasticidad longitudinal es de  $21000 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ .



**Figura 8.16**  
Estructura plana con nodos rígidos y articulados (extraído Ref. [7]).

En la Tabla 8.4 y Tabla 8.5 se presentan los valores para los desplazamientos y reacciones de apoyo calculadas mediante las funciones de SimuDinamic, mientras que en la Figura 8.17 se exhiben los resultados presentados por la bibliografía para tal ejercicio.

| NODO | Despl. X [m]             | Despl. Y [m]             | Despl. Z [m] | Giro X [rad] | Giro Y [rad]            | Giro Z [rad] |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------|--------------|-------------------------|--------------|
| 1    | 0                        | 0                        | 0            | 0            | 0                       | 0            |
| 2    | 0,00109x10 <sup>-3</sup> | -0,8322x10 <sup>-3</sup> | 0            | -            | -                       | -            |
| 3    | 0,00219x10 <sup>-3</sup> | -0.0280x10 <sup>-3</sup> | 0            | 0            | 0,4325x10 <sup>-3</sup> | 0            |
| 4    | 0                        | 0                        | 0            | 0            | 0                       | 0            |

Tabla 8.4 Desplazamientos nodales obtenidos mediante las funciones de SimuDinamic.

| NODO | Fuerza X [N] | Fuerza Y [N] | Fuerza Z [N] | Momento X [Nm] | Momento Y [Nm] | Momento Z [Nm] |
|------|--------------|--------------|--------------|----------------|----------------|----------------|
| 1    | -655,516     | 10172,3679   | 0            | 0              | 0              | 10172,3679     |
| 2    | 0            | -14715       | 0            | -              | -              | -              |
| 3    | -9810        | -12262       | 0            | 0              | 0              | 2452           |
| 4    | 10465,51     | 16804,6      | 0            | 0              | 0              | 3470,6569      |

Tabla 8.5 Esfuerzos nodales obtenidos mediante las funciones de SimuDinamic.

$$\begin{pmatrix} u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,095 \cdot 10^{-6} \\ -8,314506 \cdot 10^{-4} \\ 2,19 \cdot 10^{-6} \\ -2,805 \cdot 10^{-5} \\ 4,32102 \cdot 10^{-4} \end{pmatrix} \begin{matrix} (m) \\ (m) \\ (m) \\ (m) \\ (rad) \end{matrix} \quad \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \\ M_1 \\ f_{2x} \\ f_{2y} \\ f_{3x} \\ f_{3y} \\ M_3 \\ f_{4x} \\ f_{4y} \\ M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -655,25 \\ 10161,99 \\ 10161,99 \\ 0 \\ -14700 \\ -9800 \\ -12250 \\ 2450 \\ 10455,25 \\ 16788,01 \\ 3467,24 \end{pmatrix} \begin{matrix} (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \\ (N) \\ (N) \\ (N \cdot m) \end{matrix}$$

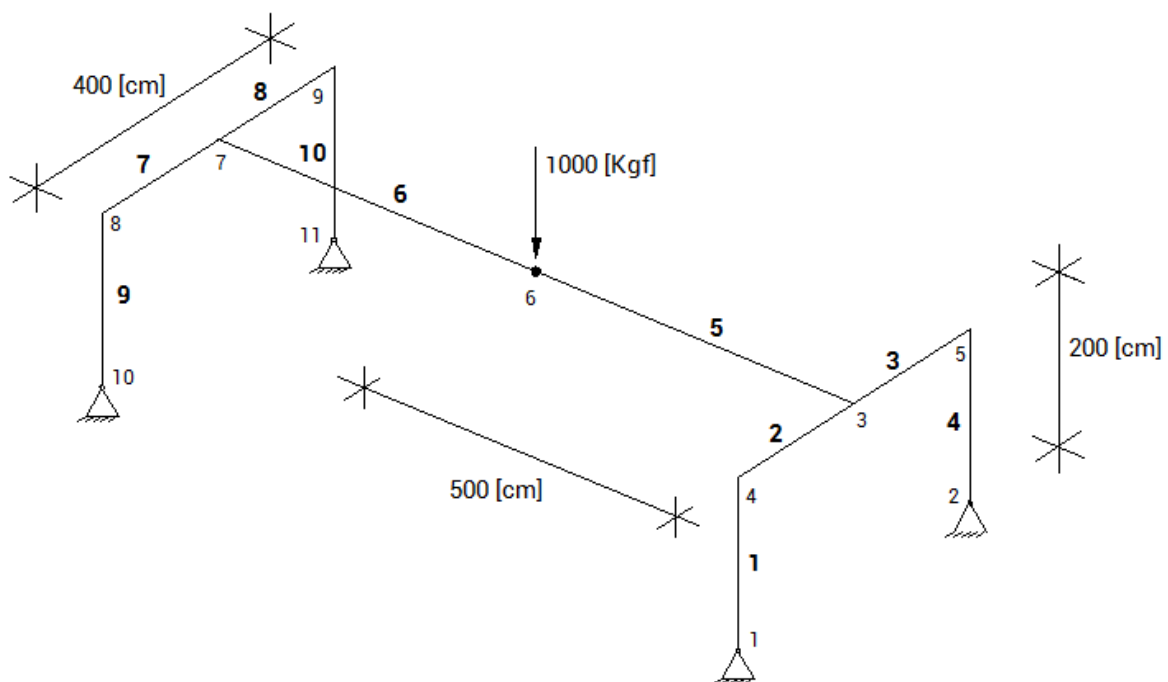
Figura 8.17 Desplazamientos nodales (izq) y esfuerzos nodales (der) (extraído Ref. [7]).

Si se contrasta los valores de desplazamientos que se obtienen con las funciones de SimuDinamic con los presentados por la bibliografía se determina que el error máximo en ellos es de 0,09% en el desplazamiento del nodo 2 en dirección y, es decir

el error es prácticamente nulo. Por otro lado, al contrastar las magnitudes de las reacciones de apoyo, el error máximo exhibido es de 0,1% en la reacción correspondiente a la dirección y del nodo 1. Nuevamente se puede decir que los resultados logrados son totalmente correctos y satisfactorios.

### 8.5.4 Tercer ejercicio

El tercer ejercicio a resolver consiste en una estructura tridimensional simétrica constituida por barras de pórtico. Todas las barras poseen una sección de  $80 \text{ [cm}^2\text{]}$ , inercia de  $490 \text{ [cm}^4\text{]}$ , inercia polar de  $980 \text{ [cm}^4\text{]}$ , módulo de elasticidad longitudinal de  $2100000 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}$  y módulo transversal de  $81000 \text{ [kgf/cm}^2\text{]}$ . Tal como se observa en la Figura 8.18 la carga se encuentra aplicada en el centro de la estructura y toma una magnitud de  $1000 \text{ [kgf]}$ . El propósito de este ejemplo es verificar que la reacción vertical de cada uno de los apoyos presenta la misma magnitud y es igual a  $250 \text{ [kgf]}$ . Esto se produce como consecuencia de la simetría estructural y que la carga está aplicada en el centro de la estructura. Este ejercicio no se encuentra en la bibliografía sino que fue propuesto por el autor.



**Figura 8.18**  
Estructura simétrica con carga aplicada en el centro de la misma.

Los resultados obtenidos se presentan en la Tabla 8.6.

| NODO | Fuerza X<br>[kgf] | Fuerza Y<br>[kgf] | Fuerza Z<br>[kgf] | Momento X<br>[kgfm] | Momento Y<br>[kgfm] | Momento Z<br>[kgfm] |
|------|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1    | 225,22            | 250,0000          | -93,73            | 0                   | 0                   | 0                   |
| 2    | 225,22            | 250               | -93,73            | 0                   | 0                   | 0                   |
| 10   | 225,22            | 250               | -93,73            | 0                   | 0                   | 0                   |
| 11   | 225,22            | 250               | -93,73            | 0                   | 0                   | 0                   |

**Tabla 8.6** Esfuerzos nodales obtenidos mediante las funciones de SimuDinamic para la estructura simétrica.

La columna correspondiente a la fuerza en dirección Y representa las reacciones verticales que se pretendía verificar, obteniendo los resultados esperados con errores prácticamente nulos. Asimismo se puede ver que las reacciones en dirección X-Y-Z son coincidentes para los tres apoyos, lo cual responde a la simetría estructural y de que la carga se aplica en el centro del pórtico tridimensional.

## 9. Aplicación de SimuDinamic

### 9.1 Introducción

El actual capítulo posee como finalidad presentar una aplicación práctica del programa desarrollado, la cual está destinada a evaluar la rigidez torsional de la estructura de seguridad que integra a un automóvil de Súper TC 2000.

### 9.2 Determinación de la rigidez torsional mínima suficiente

#### 9.2.1 Objetivos

La presente aplicación tiene como objetivo determinar la *magnitud mínima suficiente de rigidez torsional* que debe disponer la estructura de seguridad que equipa al Renault Fluence de Súper TC 2000 para poder lograr, mediante la modificación de los elementos elásticos del sistema delantero y trasero de suspensión, la transferencia de carga lateral delantera y trasera deseada y así compensar actitudes de sobre-viraje o sub-viraje del vehículo.

#### 9.2.2 Condiciones de análisis

El análisis consiste en calcular la transferencia de carga lateral mediante SimuDinamic para un vehículo equipado con diferentes estructuras de seguridad y barras estabilizadoras. Por medio de este análisis es posible determinar la magnitud de la carga lateral transferida por el tren delantero y trasero, y posteriormente emplear estos resultados para analizar la variación de ciertos parámetros que permiten



evaluar la rigidez torsional. Concretamente, cada jaula se somete a un análisis de transferencia lateral para diferentes combinaciones de barras estabilizadoras delanteras y traseras. Resulta necesario establecer qué propiedades del chasis permanecerán constantes y cuáles serán variables. La Tabla 9.2 resume las características del chasis vehicular que serán constantes en todos los ensayos a realizar. Este análisis solicita el ingreso de un estado de aceleración lateral que será constante para todos los casos; se adopta una magnitud de aceleración lateral igual a  $1g$ .

Por otro lado, se emplea un 'kit' de barras estabilizadoras constituido por ocho barras, cuatro delanteras e igual cantidad para el tren trasero. Sus dimensiones se especifican en la Tabla 9.1.

| BARRAS ESTABILIZADORAS DELANTERAS |          |           |
|-----------------------------------|----------|-----------|
| Diámetro                          | Espesor  | Longitud  |
| 28 [mm]                           | 1.2 [mm] | 900 [mm]  |
| 38 [mm]                           | 1.6 [mm] | 900 [mm]  |
| 44 [mm]                           | 1.6 [mm] | 900 [mm]  |
| 50 [mm]                           | 2.1 [mm] | 900 [mm]  |
| BARRAS ESTABILIZADORAS TRASERAS   |          |           |
| Diámetro                          | Espesor  | Longitud  |
| 28 [mm]                           | 1.2 [mm] | 1200 [mm] |
| 38 [mm]                           | 1.6 [mm] | 1200 [mm] |
| 44 [mm]                           | 1.6 [mm] | 1200 [mm] |
| 50 [mm]                           | 2.1 [mm] | 1200 [mm] |

Tabla 9.1 Kit de barras estabilizadoras utilizadas.

| VEHÍCULO: Renault Fluence Súper TC 2000             |            |
|---|------------|
| CARACTERÍSTICAS DEL CHASIS                          |            |
| PROPIEDAD   | MAGNITUD   |
| Distancia entre ejes                                | 2640 [mm]  |
| Distancia entre tren delantero y centro de gravedad | 1056 [mm]  |
| Altura de centro de gravedad                        | 430 [mm]   |
| Trocha delantera                                    | 1610 [mm]  |
| Trocha trasera                                      | 1600 [mm]  |
| Longitud barra estabilizadora delantera             | 900 [mm]   |
| Longitud barra estabilizadora trasera               | 1200 [mm]  |
| Longitud extremo barra delantera                    | 90 [mm]    |
| Longitud extremo barra trasera                      | 120 [mm]   |
| Longitud eje trasero                                | 1460 [mm]  |
| Diámetro eje trasero                                | 100 [mm]   |
| Espesor eje trasero                                 | 1.6 [mm]   |
| Diámetro barras longitudinales eje trasero          | 32 [mm]    |
| Espesor barras longitudinales eje trasero           | 1.2 [mm]   |
| Diámetro brazos de suspensión                       | 44 [mm]    |
| Espesor brazos de suspensión                        | 2.5 [mm]   |
| Diámetro tensor barra estabilizadora                | 25 [mm]    |
| Rigidez resortes delanteros de suspensión           | 145 [N/mm] |
| Rigidez resortes traseros de suspensión             | 105 [N/mm] |
| Rigidez vertical neumático                          | 280 [N/mm] |
| Rigidez lateral neumático                           | 150 [N/mm] |
| Rigidez longitudinal neumático                      | 380 [N/mm] |
| Masa vehicular                                      | 1100 [Kg]  |

Tabla 9.2 Características generales del vehículo.

El número de estructuras de seguridad a ensayar es de catorce, cada una de ellas se caracteriza por una rigidez torsional diferente. Resulta necesario determinar la magnitud de esta propiedad mecánica para cada una de las jaulas, ya que los resultados obtenidos se presentan en función de ésta, para ello se emplea un software de elementos finitos<sup>4</sup>. Cabe aclarar que SimuDinamic no ofrece la posibilidad de determinar esta magnitud, en consecuencia debe recurrirse a un software auxiliar.

### 9.2.3 Parámetros de evaluación

En este apartado se presentan y se definen los parámetros que permiten evaluar la magnitud de rigidez torsional de la estructura de seguridad. Se recurre a dos parámetros: relación de transferencia y sensibilidad.

#### Relación de transferencia

La relación de transferencia  $R_t$  es un parámetro adimensional que se aplica tanto al tren delantero como al trasero. Para el primero de ellos la relación de transferencia se define como el cociente entre la carga lateral transferida delantera ( $TTD$ ) y la carga lateral transferida total ( $TCLT$ ); mientras que para el tren trasero se define como el cociente entre la carga lateral transferida trasera ( $TTT$ ) y la carga lateral transferida total ( $TCLT$ ). Esta definición se expresa matemáticamente mediante la ecuación (9.1).

$$R_t = \frac{\text{Carga lateral transferida (delantera ó trasera)}}{\text{Carga lateral transferida total}}$$
$$R_{td} = \frac{TTD}{TCLT} \qquad R_{tt} = \frac{TTT}{TCLT} \qquad (9.1)$$

a) b)

Un análisis de la ecuación (9.1) permite deducir que los valores límites que puede adoptar son cero y uno. El valor mínimo teórico se consigue cuando el centro de gravedad del automóvil se sitúa sobre el tren trasero y la estructura de seguridad posee flexibilidad infinita o bien rigidez nula, de modo que la totalidad de la carga sea transferida por el tren trasero; si la flexibilidad es infinita, lo cual físicamente es imposible, no existe un vínculo entre tren delantero y trasero. Por otro lado, el valor máximo se alcanza cuando el centro de gravedad se ubica sobre el tren delantero y la

<sup>4</sup> Abaqus CAE V6.13

flexibilidad de la jaula es infinita, en tal circunstancia la carga es transferida en su totalidad por el tren delantero. Una explicación análoga puede efectuarse para la ecuación (9.1).

Si se analiza el comportamiento de la relación de transferencia, delantera y/o trasera, en función de la rigidez torsional es posible determinar la magnitud mínima que debe adquirir esta propiedad mecánica de la jaula para que la carga lateral transferida delantera y/o trasera tome un valor constante válido, según el criterio que se establezca, para cualquier combinación de barras estabilizadoras.

### Sensibilidad

La sensibilidad es otro parámetro que contribuye a la evaluación de la rigidez torsional. Se refiere a la influencia que produce la modificación de la rigidez de la barra estabilizadora en la carga lateral transferida. Al igual que la relación de transferencia su aplicación es válida tanto al tren delantero como al trasero; para el primero de ellos se define como la diferencia entre la carga lateral transferida por el tren delantero al emplear la barra de mayor rigidez ( $TTD_{max}$ ) y una barra de rigidez nula ( $TTD_{min}$ ); para el segundo se define como la diferencia entre la carga lateral transferida por el tren trasero al emplear la barra de mayor rigidez ( $TTT_{max}$ ) y una barra de rigidez nula ( $TTT_{min}$ ). Dimensionalmente la sensibilidad posee unidades de fuerza. La ecuación (9.2) presenta matemáticamente esta definición, la primera de ellas corresponde a la sensibilidad delantera y la segunda a la trasera.

$$\begin{aligned} S_{ed} &= TTD_{max} - TTD_{min} \\ S_{et} &= TTT_{max} - TTT_{min} \end{aligned} \quad (9.2)$$

La sensibilidad es un parámetro que se evalúa en función de la rigidez a torsión de la jaula; normalmente se estabiliza a partir de cierto valor que adopta la propiedad mecánica en estudio, esto significa que es posible obtener, a partir del mencionado valor de rigidez torsional, la magnitud mínima o máxima de carga lateral transferida delantera o trasera al emplear la barra de menor o mayor rigidez.

## 9.2.4 Procedimiento de evaluación

El proceso de evaluación se compone de tres etapas:

1. Determinación de la rigidez torsional de las estructuras de seguridad,
2. Análisis de transferencia de carga lateral mediante SimuDinamic y
3. Análisis de resultados por medio de los parámetros de evaluación.

A continuación se explica detalladamente cada una de estas fases.

### 1. Determinación de la rigidez torsional de las estructuras de seguridad a ensayar.

La finalidad de esta etapa radica en determinar la magnitud de rigidez a torsión de las diferentes estructuras de seguridad a ensayar; esto se efectúa mediante el empleo de un programa auxiliar de elementos finitos<sup>5</sup>. El procedimiento de medición es el siguiente:

- ✓ Se restringen los grados de libertad de los puntos de vinculación del eje trasero a la jaula.
- ✓ Se aplica un momento torsor en el tren delantero, más precisamente dos fuerzas  $F$  de igual magnitud y dirección pero diferente sentido en los puntos de conexión de los extremos delanteros de las parrillas inferiores de suspensión a la estructura de seguridad.
- ✓ Se mide el ángulo rotado por el tren delantero y se aplica la ecuación (9.3) para determinar la rigidez.

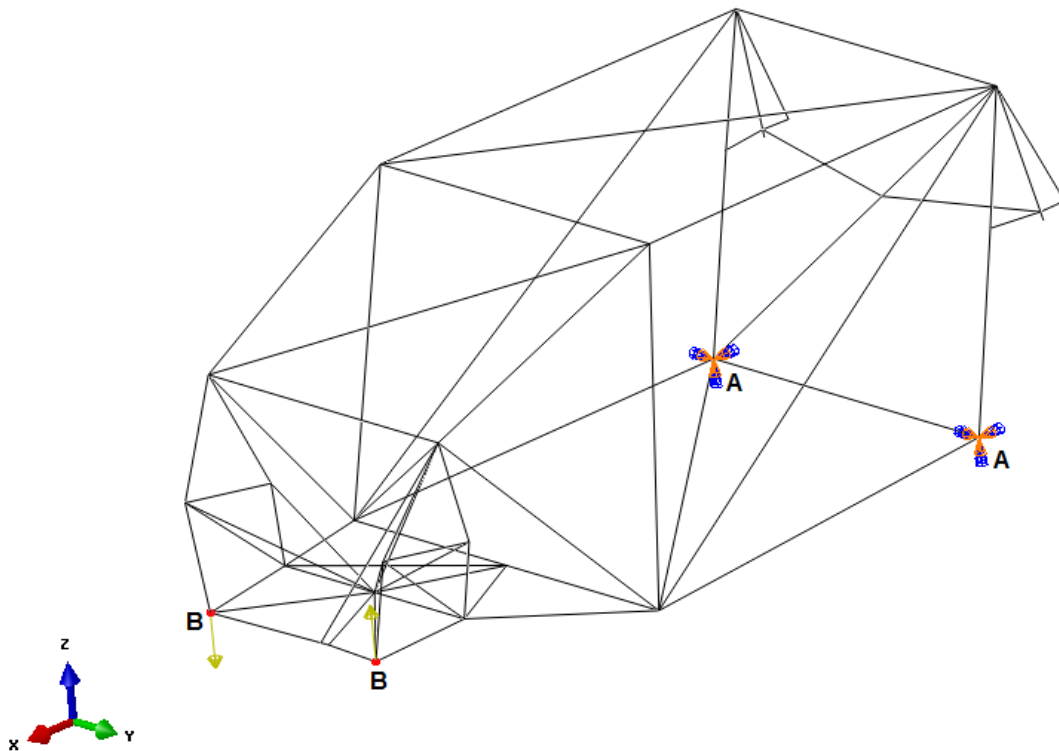
$$K_t = \frac{F d_p}{\varphi} \quad (9.3)$$

$K_t$  es la rigidez a torsión de la jaula,  $F$  es la fuerza aplicada,  $d_p$  la distancia entre el punto de conexión delantero de la parrilla inferior derecha e izquierda y  $\varphi$  el ángulo rotado por el tren delantero. Este ángulo se determina en función de los desplazamientos verticales de los puntos de aplicación de las fuerzas  $F$  que conforman el par torsor. Si la estructura de seguridad presenta simetría respecto al

---

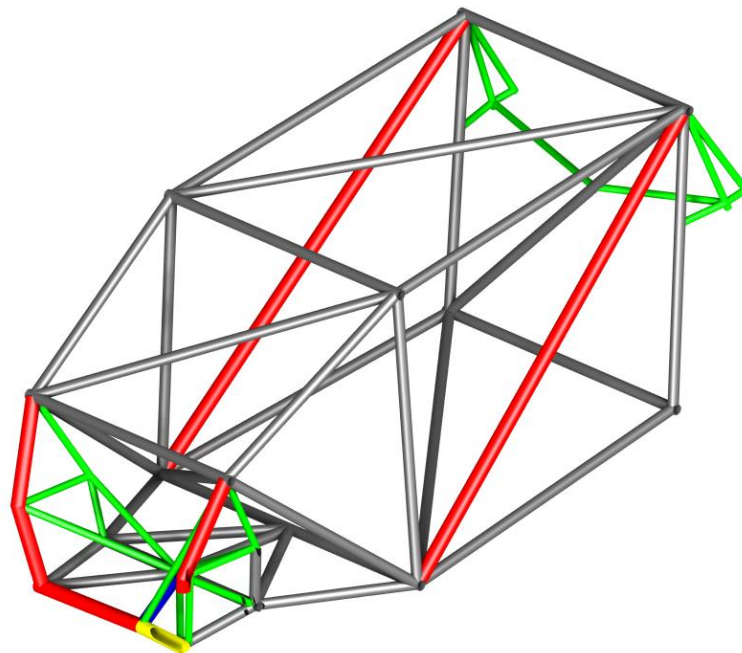
<sup>5</sup> Abaqus CAE V6.13

eje longitudinal, el desplazamiento vertical de cada punto es idéntico. Sin embargo como no existe una simetría absoluta se obtiene un promedio entre ambos desplazamientos. La Figura 9.1 muestra una de las estructuras sometida al ensayo de rigidez; en los puntos A se aplica las condiciones de apoyo, restringiendo los seis grados de libertad de cada nudo; en los puntos B se acopla el extremo delantero de las parrillas inferiores derecha e izquierda y corresponde al punto de aplicación de las fuerzas  $F$  que conforman el momento torsor sobre el tren delantero.



**Figura 9.1**  
Condiciones de apoyo y estado de carga sobre una estructura de seguridad sometida a ensayo de rigidez.

Las diversas jaulas a ensayar se obtienen partiendo de la estructura de seguridad que utilizó el equipo Renault durante la temporada 2013 mostrada en la Figura 9.2. Para una explicación detallada de cómo se han obtenido las diferentes jaulas ver el punto 13.2 del anexo.



**Figura 9.2**  
Estructura de seguridad utilizada por el equipo Renault Sport durante la temporada 2013.

## 2. Análisis de transferencia de carga lateral mediante SimuDinamic.

A los fines de estudiar la influencia que presenta la rigidez torsional de la estructura de seguridad en la carga lateral que transfiere el coche se efectúa, a través de SimuDinamic, un análisis de transferencia lateral de carga, el cual permite determinar la carga lateral que transfiere el tren delantero y el trasero para diferentes condiciones. Este análisis se aplica a un automóvil equipado con diferentes jaulas, y se toma como parámetro la rigidez de la barra estabilizadora delantera y trasera; en este caso las rigideces de las barras se modifican en función del diámetro y/o espesor que adoptan. En esta etapa del proceso de evaluación se aplican las condiciones de análisis definidas en el punto 9.2.2.

Según lo presentado en el marco teórico del presente Proyecto, la carga lateral que transfiere cada tren es función de la rigidez a rolido relativa entre el sistema de suspensión delantero y trasero, en consecuencia cuando la rigidez relativa es máxima se produce la mayor diferencia entre la carga lateral que transfiere cada tren. En virtud de lo mencionado, para cada estructura de seguridad se adopta el mecanismo de evaluación que se exhibe a continuación.

- ✓ Se determina la carga lateral transferida por el tren delantero y trasero de un vehículo equipado con barra delantera variable y sin barra estabilizadora trasera. La Tabla 9.1 muestra las cuatro barras delanteras a utilizar, comenzando la primera corrida del programa sin barra delantera;
- ✓ se determina la carga lateral transferida delantera y trasera para un coche que presenta barra trasera variable y no posee barra delantera. La Tabla 9.1 muestra las cuatro barras traseras a emplear;
- ✓ los resultados obtenidos de cada ejecución del programa se almacenan en un archivo Excel con la finalidad de presentarlos gráficamente y ser tratados en la tercera fase de evaluación.

De acuerdo a lo expuesto, para cada jaula de seguridad se efectúan nueve corridas de SimuDinamic correspondiente a las cuatro barras delanteras, a las cuatro traseras y al vehículo equipado sin barras estabilizadoras.

### 3. Análisis de resultados por medio de los parámetros de evaluación.

La última etapa del proceso de evaluación posee como finalidad alcanzar el objetivo planteado inicialmente: determinar la magnitud mínima de rigidez a torsión que debe disponer la estructura de seguridad del coche en estudio. Para ello, se analizan los resultados obtenidos en la segunda fase mediante los parámetros de evaluación definidos en 9.2.3. El comportamiento de la relación de transferencia y de la sensibilidad es quien permite definir la magnitud mínima de rigidez; cuando la estructura de seguridad tiene una rigidez adecuada la transferencia lateral delantera y trasera son únicamente dependientes de la rigidez que adopta cada sistema de suspensión.

En este punto resulta necesario establecer un criterio que permita, a los fines prácticos, determinar cuando la rigidez torsional de la estructura de seguridad posee una magnitud suficiente. El criterio adoptado es el siguiente: *"si al pasar de una estructura de seguridad de menor a mayor rigidez torsional la relación de incrementos porcentuales de la relación de transferencia y/o sensibilidad respecto del incremento de rigidez torsional presenta una variación menor al 2% para la relación de transferencia y menor al 8% para la sensibilidad, la rigidez torsional posee una*



magnitud mínima suficiente". Este criterio se presenta matemáticamente por medio de la ecuación (9.4).

$$\frac{\Delta R_t}{\Delta K_t} < 2\% \quad y \quad \frac{\Delta S_e}{\Delta K_t} < 8\% \quad (9.4)$$

$$\Delta R_t = \frac{R_{t \text{ final}} - R_{t \text{ inicial}}}{R_{t \text{ inicial}}} * 100$$

$$\Delta K_t = \frac{K_{t \text{ final}} - K_{t \text{ inicial}}}{K_{t \text{ inicial}}}$$

$$\Delta S_e = \frac{S_{e \text{ final}} - S_{e \text{ inicial}}}{S_{e \text{ inicial}}} * 100$$

El criterio presentado puede aplicarse a la relación de transferencia delantera y/o trasera y a la sensibilidad delantera y/o trasera. Apunta a lograr una independencia de ambos parámetros de evaluación respecto de la rigidez a torsión de la jaula, de esta manera también sería independiente de la rigidez torsional la carga lateral transferida delantera y trasera, y sólo dependería de la rigidez que adopta el sistema delantero y trasero de suspensión.

## 9.2.5 Resultados

La presentación de los resultados se efectúa siguiendo las etapas presentadas en el punto 9.2.4.

### 1. Determinación de la rigidez torsional de las estructuras de seguridad a ensayar.

Cada una de las catorce estructuras a evaluar se somete al procedimiento descrito en la primera fase del punto 9.2.4. A continuación se especifican las condiciones de ensayo.

- ✓ Magnitud de las fuerzas aplicadas en el tren delantero y que constituyen el momento torsor:

$$F = 2452.5 [N]$$

- ✓ Distancia entre puntos de aplicación de las fuerzas:

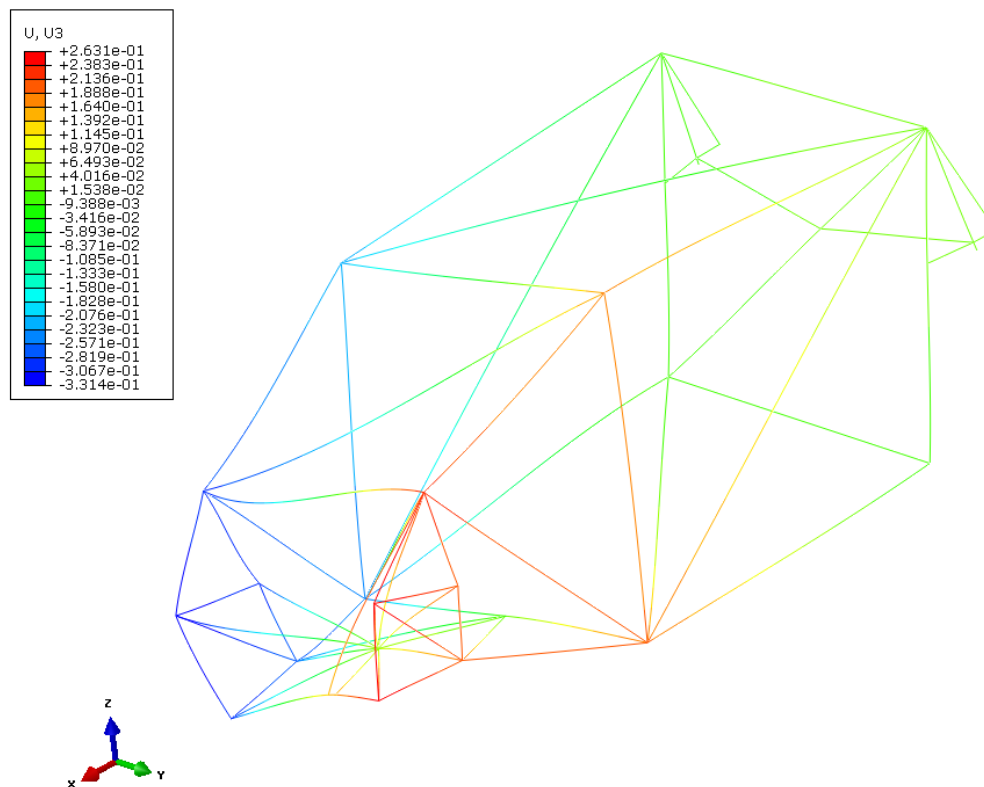
$$d_p = 680.5 [mm]$$

En la Tabla 9.3 se resumen los resultados obtenidos para las diferentes estructuras de seguridad; la información se dispone en orden creciente con la magnitud de rigidez torsional, la cual se ubica en la última columna de la tabla. En las restantes columnas se presenta datos requeridos para determinar la magnitud de rigidez. La información situada en la posición número trece y destacado en negrita corresponde a la jaula utilizada por el equipo Renault durante la temporada 2013.

| JAULA N° | MOMENTO TORSOR $Fd_p$ [Nm] | DESPL. $H_D$ [mm] | DESPL. $H_I$ [mm] | $(H_D+H_I)/2$ [mm] | ÁNGULO $\varphi$ [°] | RIGIDEZ TORSIONAL $Fd_p/\varphi$ [Nm/°] |
|----------|----------------------------|-------------------|-------------------|--------------------|----------------------|---|
| 1        | 1669,1                     | 17,64             | 7,04              | 12,34              | 2,0770               | 803,6                                   |
| 2        | 1669,1                     | 5,77              | 2,21              | 3,985              | 0,67154              | 2485,5                                  |
| 3        | 1669,1                     | 2,54              | 1,56              | 2,053              | 0,34571              | 4828,1                                  |
| 4        | 1669,1                     | 1,85              | 1,23              | 1,543              | 0,25983              | 6423,7                                  |
| 5        | 1669,1                     | 1,18              | 0,85              | 1,016              | 0,17107              | 9756,9                                  |
| 6        | 1669,1                     | 0,99              | 0,73              | 0,8606             | 0,14494              | 11515,2                                 |
| 7        | 1669,1                     | 0,85              | 0,64              | 0,7434             | 0,12518              | 13333,5                                 |
| 8        | 1669,1                     | 0,74              | 0,56              | 0,6514             | 0,10968              | 15217,8                                 |
| 9        | 1669,1                     | 0,58              | 0,45              | 0,5169             | 0,08704              | 19174,8                                 |
| 10       | 1669,1                     | 0,47              | 0,38              | 0,4242             | 0,07142              | 23370,9                                 |
| 11       | 1669,1                     | 0,42              | 0,35              | 0,3871             | 0,06517              | 25610,9                                 |
| 12       | 1669,1                     | 0,34              | 0,29              | 0,3167             | 0,05332              | 31301,4                                 |
| 13       | <b>1669,1</b>              | <b>0,30</b>       | <b>0,26</b>       | <b>0,2764</b>      | <b>0,04654</b>       | <b>35863,4</b>                          |
| 14       | 1669,1                     | 0,21              | 0,19              | 0,1959             | 0,03299              | 50595,8                                 |

Tabla 9.3 Rigidez torsional de las diferentes estructuras de seguridad.

La Figura 9.3 muestra una de las estructuras de seguridad sometida al ensayo de rigidez; las deformaciones observadas han sido exageradas para que pueda notarse la presencia del momento torsor en el tren delantero. La escala situada en la región superior izquierda corresponde a los desplazamientos en dirección z según el sistema de referencia x-y-z de la misma figura.



**Figura 9.3**  
Estructura de seguridad sometida a ensayo de rigidez torsional.

## 2. Análisis de transferencia de carga lateral mediante SimuDinamic.

En esta etapa se exhiben los resultados obtenidos del análisis de transferencia lateral de carga realizado a través de SimuDinamic. Concretamente se presenta la variación de la carga lateral transferida, delantera y trasera, en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetros la rigidez de la barra estabilizadora delantera y trasera.

Para cada una de las jaulas que equipan a un mismo vehículo, se efectuaron nueve ejecuciones del programa, que se asocian a las cuatro barras estabilizadoras delanteras, las cuatro traseras y al coche equipado sin barras. Nuevamente se destaca que el ensayo se realiza variando la rigidez de la barra delantera o trasera y, manteniendo la restante con rigidez nula; esto se efectúa así para lograr la máxima rigidez relativa. Los resultados se presentan en una serie de gráficos; en ellos el eje horizontal exhibe la rigidez torsional de la jaula, expresada en  $[Nm/^\circ]$ , y el eje vertical la carga lateral transferida expresada en  $[kgf]$ . Cada gráfico toma como parámetro una combinación de barra delantera y trasera.

## RESULTADOS PARA: BARRA ESTABILIZADORA DELANTERA VARIABLE – SIN BARRA ESTABILIZADORA TRASERA.

Barra delantera: nula - Barra trasera: nula

La Figura 9.4 presenta el comportamiento de la carga lateral transferida en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetro barras estabilizadoras de rigidez nula. Se observa que, para magnitudes bajas de rigidez torsional el tren delantero transfiere una carga mayor que el trasero; luego a medida que aumenta la magnitud de la propiedad mecánica en estudio disminuye la carga transferida por el tren delantero y aumenta la transferencia trasera, estabilizándose a partir de cierto valor de rigidez torsional. La mayor transferencia delantera para rigideces muy bajas se debe a la falta de existencia de un vínculo rígido entre tren delantero y trasero, sumado a que el centro de gravedad se sitúa a una distancia menor del tren delantero que del trasero; incrementos sucesivos del valor de rigidez torsional da origen a un vínculo más rígido entre ambos trenes y de este modo la carga lateral transferida comienza a independizarse de la magnitud adoptada por esta propiedad mecánica de la jaula.

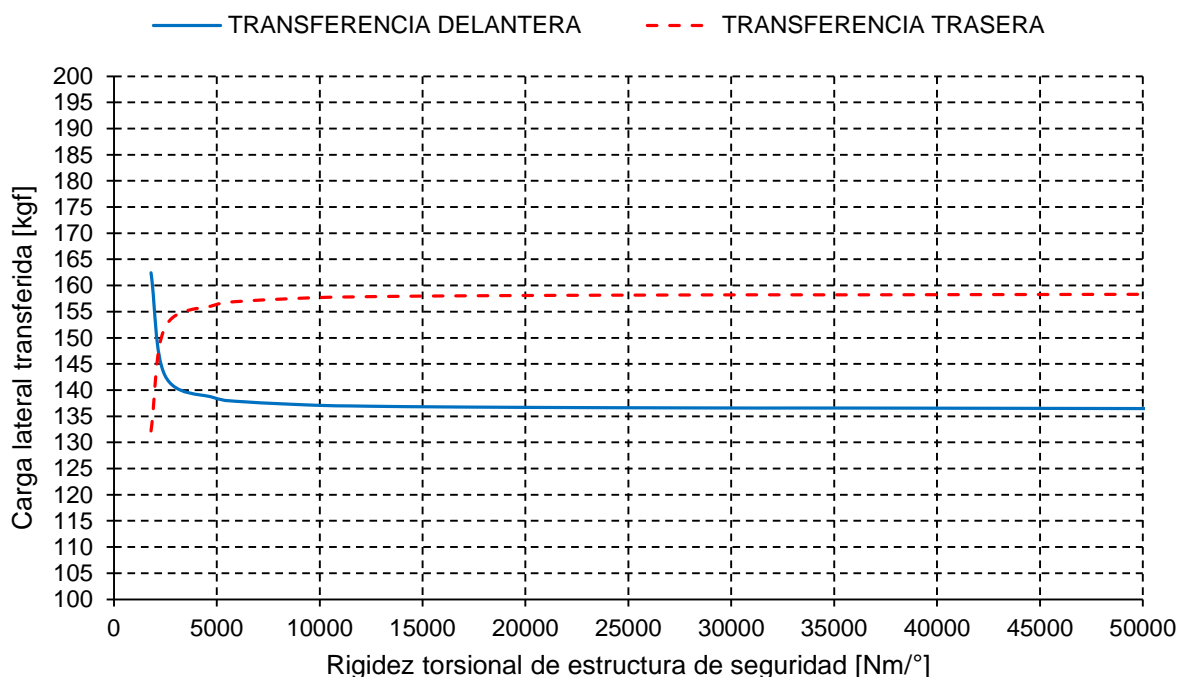
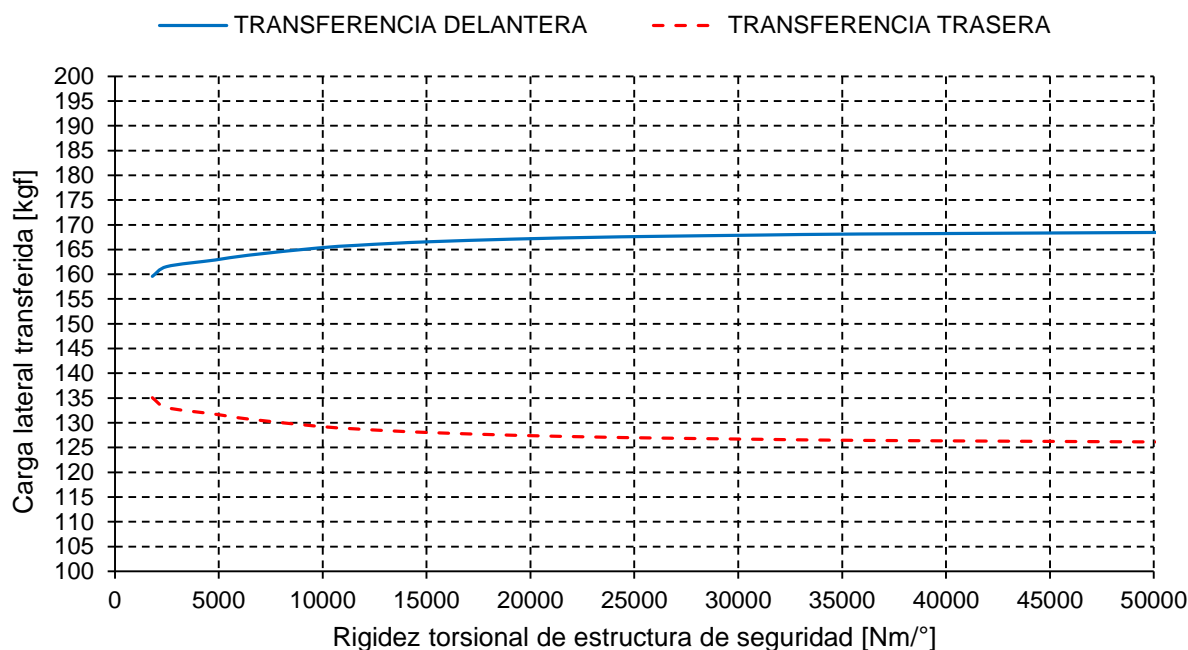


Figura 9.4  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para vehículo sin barras estabilizadoras.

### Barra delantera: 28 [mm] de diámetro y 1,2 [mm] de espesor – Barra trasera: nula

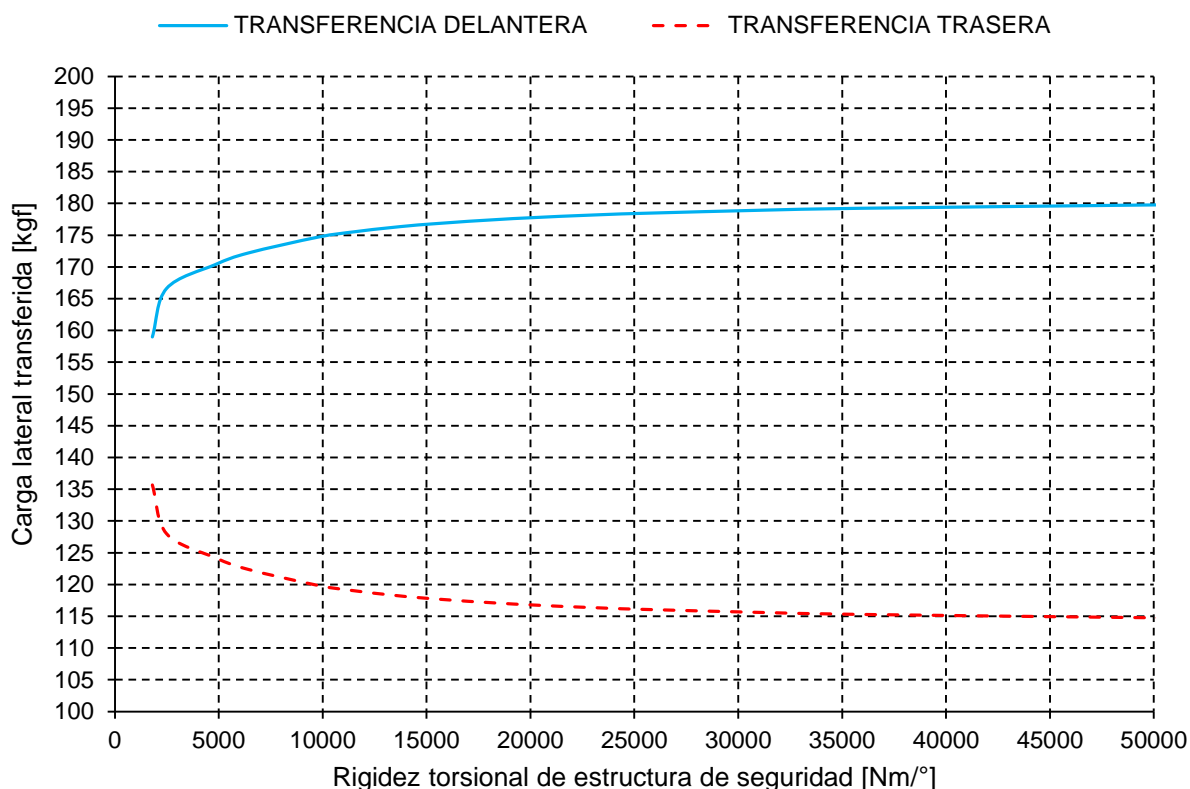
La Figura 9.5 exhibe la variación de la carga lateral transferida en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetro una barra delantera de 28 [mm] de diámetro y espesor 1,2 [mm], y sin barra trasera. Para magnitudes bajas de rigidez torsional, la transferencia delantera es mayor que la trasera, su magnitud continúa creciendo con sucesivos aumentos de rigidez torsional y se estabiliza a partir de determinado valor de esta propiedad. Por otro lado, la carga transferida por el tren trasero presenta un comportamiento opuesto, es decir disminuye en igual proporción que el incremento de la carga transferida por el tren delantero. Debe notarse que para valores muy bajos de rigidez torsional la carga lateral transferida delantera y trasera toma valores similares al caso anterior, esto significa que la presencia de la barra estabilizadora no tiene efectos en la transferencia lateral de carga debido a la gran flexibilidad de la estructura de seguridad. Sin embargo, a medida que aumenta la magnitud de la propiedad en estudio comienza a existir un vínculo más rígido entre tren delantero y trasero, en consecuencia la barra estabilizadora empieza a ejercer influencia.



**Figura 9.5**  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra delantera de 28 [mm] de diámetro y espesor 1,2 [mm], y sin barra trasera.

### Barra delantera: 38 [mm] de diámetro y 1,6 [mm] de espesor – Barra trasera: nula

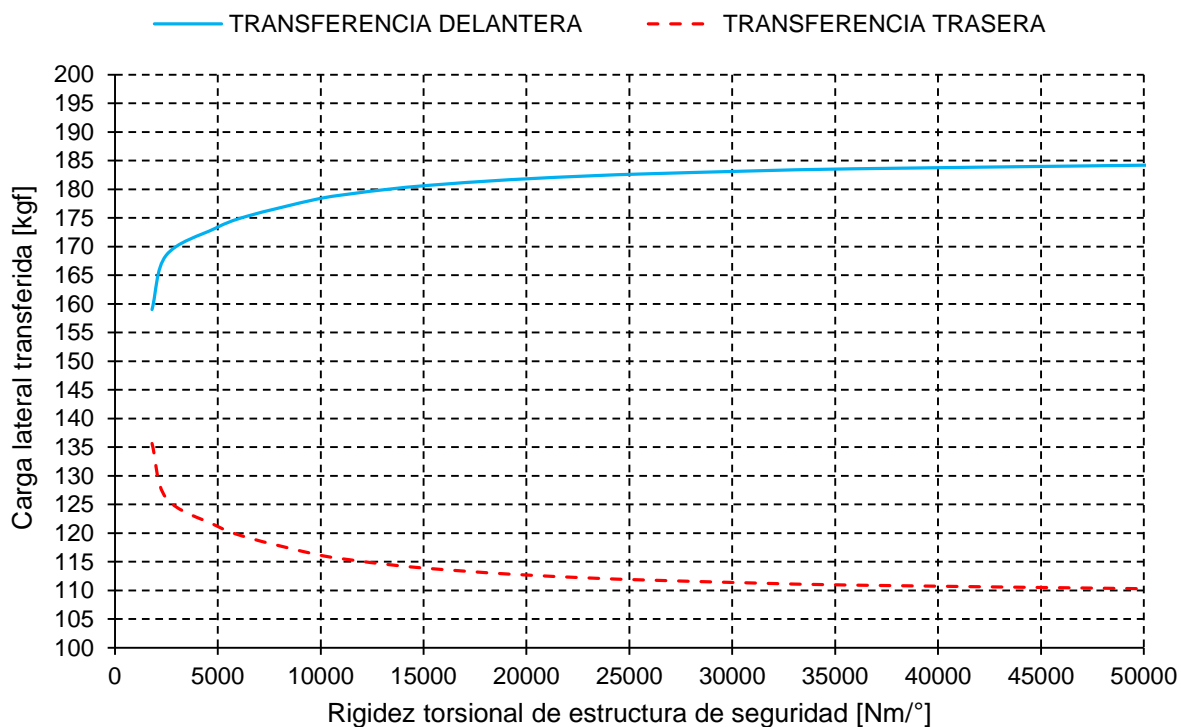
La Figura 9.6 muestra la conducta de la carga lateral transferida en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetro una barra delantera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra trasera. Para rigideces torsionales bajas, las curvas toman valores cercanos a las que poseen las análogas de la Figura 9.5. Sin embargo, en la Figura 9.6, a medida que aumenta la rigidez torsional la carga lateral transferida delantera es mayor, esto obedece a la mayor rigidez que posee la barra estabilizadora delantera; por ende, la carga lateral transferida por el tren trasero es menor para este caso. También se cumple lo mencionado con anterioridad, para rigideces muy bajas la barra estabilizadora no presenta influencia en la carga transferida como consecuencia de la gran flexibilidad de la jaula. Asimismo, puede notarse en la Figura 9.6 que las curvas requieren de un vínculo más rígido entre tren delantero y trasero para alcanzar estabilidad.



**Figura 9.6**  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra delantera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra trasera.

### Barra delantera: 44 [mm] de diámetro y 1,6 [mm] de espesor – Barra trasera: nula

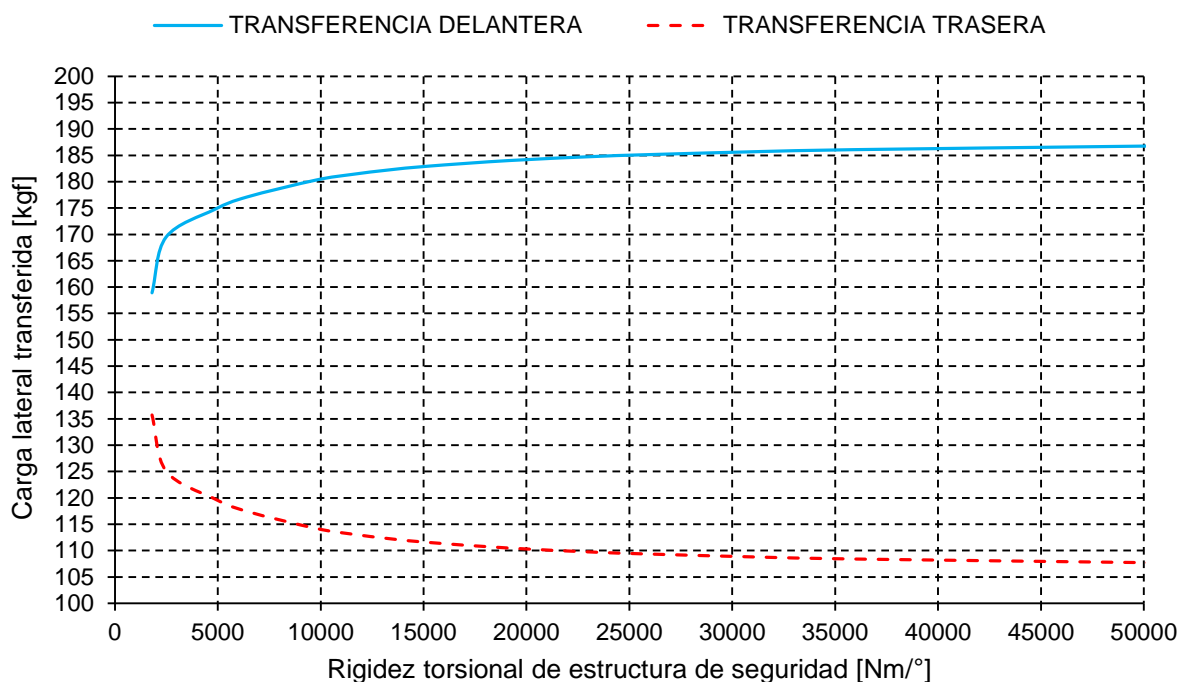
La Figura 9.7 exhibe la carga lateral transferida por el coche de Súper TC 2000 en función de la rigidez torsional de la jaula, tomando como parámetro una barra delantera de 44 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra estabilizadora trasera. Para rigideces torsionales bajas, la transferencia delantera y trasera toman valores próximos a los que poseen las curvas análogas de las dos figuras anteriores. Sucesivos incrementos de la rigidez a torsión origina un aumento en la carga lateral transferida por el tren delantero, alcanzando una magnitud máxima un 2,46% mayor a la que se obtiene con una barra estabilizadora delantera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm]. En consecuencia, se estima que la magnitud de la carga lateral transferida por el tren delantero tiende asintóticamente hacia un valor máximo, que se obtiene a partir de un cierto diámetro de barra delantera; asimismo la carga lateral que transfiere el tren trasero tiende asintóticamente hacia un valor mínimo. En este caso, también debe notarse que, cuanto mayor es la magnitud de la propiedad en estudio, mayor es la influencia que posee la barra estabilizadora en la carga lateral transferida.



**Figura 9.7**  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra delantera de 44 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra trasera.

### Barra delantera: 50,6 [mm] de diámetro y 2,1 [mm] de espesor – Barra trasera: nula

En la Figura 9.8 se presentan los resultados obtenidos para la barra delantera de mayor diámetro y con barra trasera de rigidez nula. A través de este gráfico se puede confirmar la tendencia asintótica que posee la magnitud de la carga lateral transferida por el tren delantero, es decir, se concluye que esta magnitud se incrementa a medida que aumenta el diámetro de la barra delantera hasta alcanzar un valor máximo, a partir del cual sucesivos incrementos en la rigidez de la barra no traen consigo aumentos en la carga transferida. El valor máximo que adopta la carga lateral transferida por el tren delantero es un 1,38% mayor que el correspondiente a una barra delantera de 44 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm]. Por otro lado, el tren trasero también tiene limitada la carga lateral mínima que puede transferir. Nuevamente se cumple que, para rigideces torsionales bajas, ambas curvas toman valores cercanos a las análogas de las figuras predecesoras, lo cual obedece a la gran flexibilidad de la jaula. A medida que se rigidiza el vínculo entre ambos trenes, aumenta la carga lateral transferida delantera y disminuye en igual proporción la carga trasera, es decir, la barra estabilizadora comienza a cumplir su propósito.



**Figura 9.8**  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra delantera de 50,6 [mm] de diámetro y espesor 2,1 [mm], y sin barra trasera.



## RESULTADOS PARA: BARRA ESTABILIZADORA TRASERA VARIABLE – SIN BARRA ESTABILIZADORA DELANTERA.

**Barra delantera: nula – Barra trasera: 28 [mm] de diámetro y 1,2 [mm] de espesor**

En la Figura 9.9 se presenta el comportamiento de la carga lateral transferida delantera y trasera en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad. Corresponde a un automóvil de Súper TC 2000 equipado con una barra trasera de 28 [mm] de diámetro y espesor 1,2 [mm], y sin barra delantera. En este caso, para rigideces torsionales muy bajas, la carga lateral transferida delantera y trasera toman valores muy próximos entre sí y diferentes al caso correspondiente a barras estabilizadoras nulas. En virtud de lo mencionado, se puede decir que la barra trasera presenta una mínima influencia para flexibilidades altas de la jaula, hecho que puede atribuirse a que la misma se encuentra montada sobre el eje trasero del vehículo y no sobre la estructura de seguridad como ocurre con la barra delantera. Sucesivos incrementos en la rigidez torsional provoca un vínculo más rígido entre ambos trenes, como así también un aumento gradual en la carga lateral transferida por el tren trasero y una disminución en idéntica proporción de la carga transferida por el tren delantero, alcanzando posteriormente valores constantes.

**Barra delantera: nula – Barra trasera: 38 [mm] de diámetro y 1,6 [mm] de espesor**

Mediante la Figura 9.10 se exhibe la respuesta obtenida del análisis de transferencia lateral de carga aplicado a un coche equipado con una barra trasera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra estabilizadora delantera. Para rigideces muy bajas, la carga lateral transferida por el tren delantero y el trasero toman valores cercanos a los que poseen las curvas análogas de la Figura 9.9. Sin embargo, la carga transferida por el tren trasero tiende a incrementarse a medida que se rigidiza la conexión entre ambos trenes, mientras que la carga transferida por el tren delantero disminuye en idéntica proporción. La diferencia más notable entre estas curvas y las de la Figura 9.9 radica en la magnitud de rigidez torsional a partir de la cual se estabilizan.

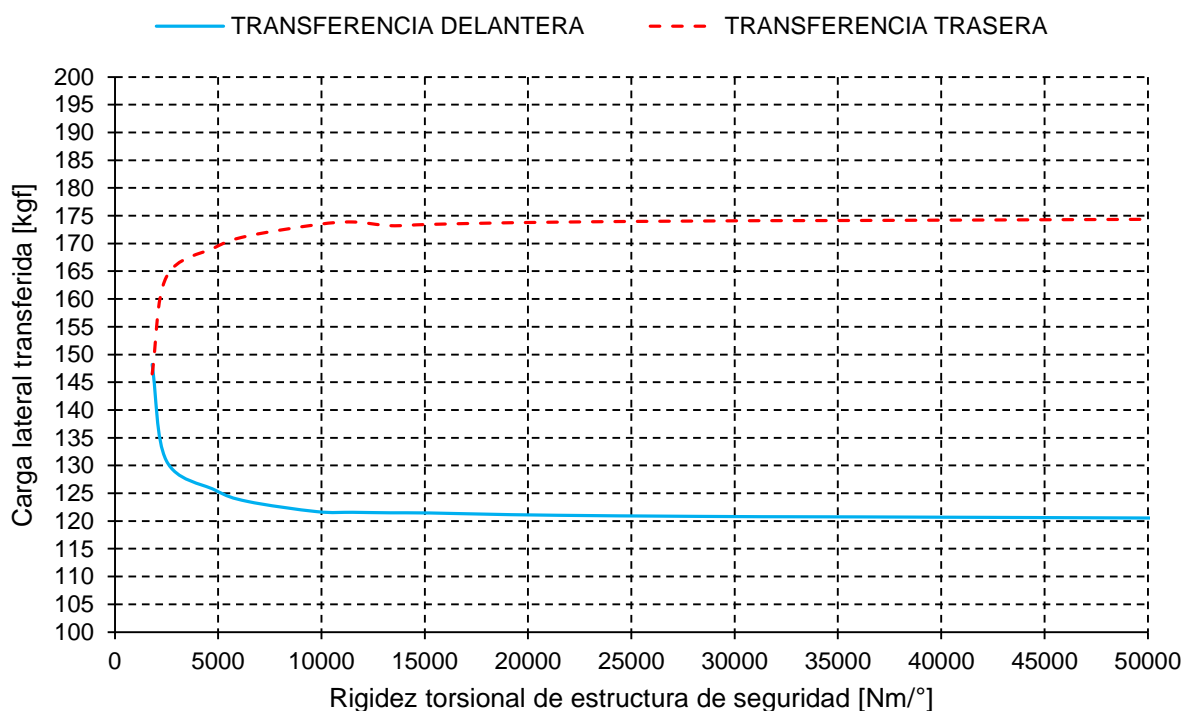


Figura 9.9  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra trasera de 28 [mm] de diámetro y espesor 1,2 [mm], y sin barra delantera.

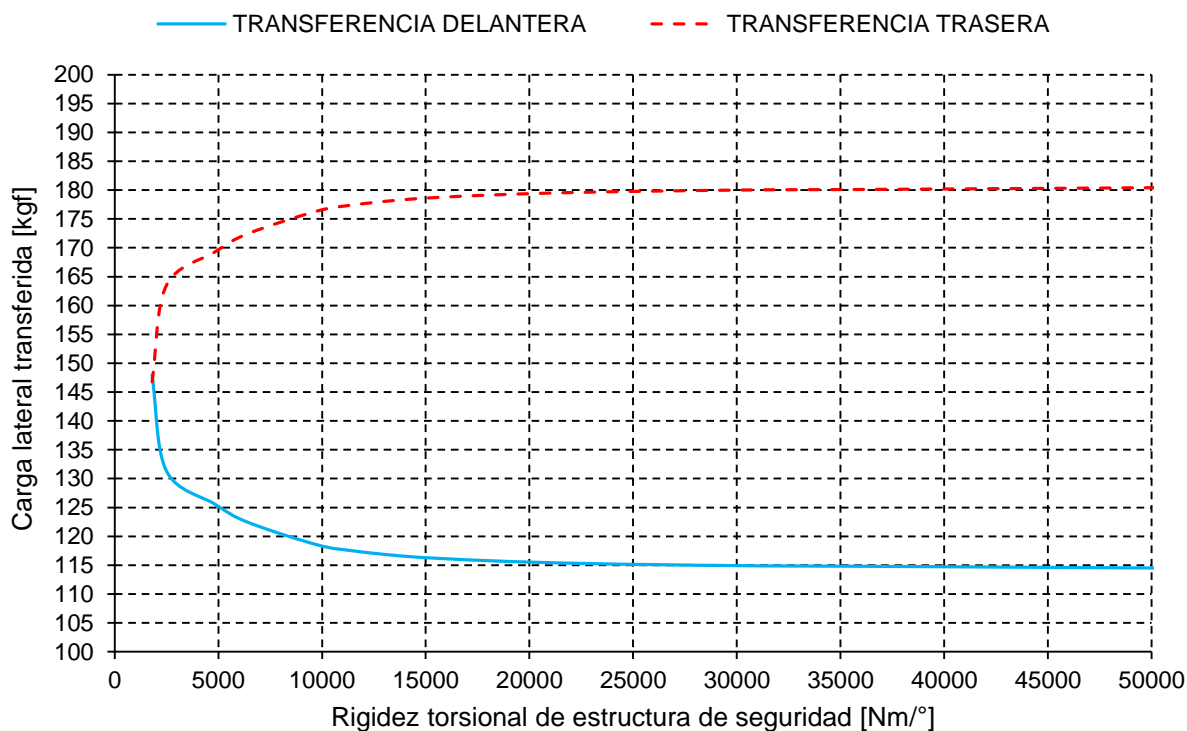
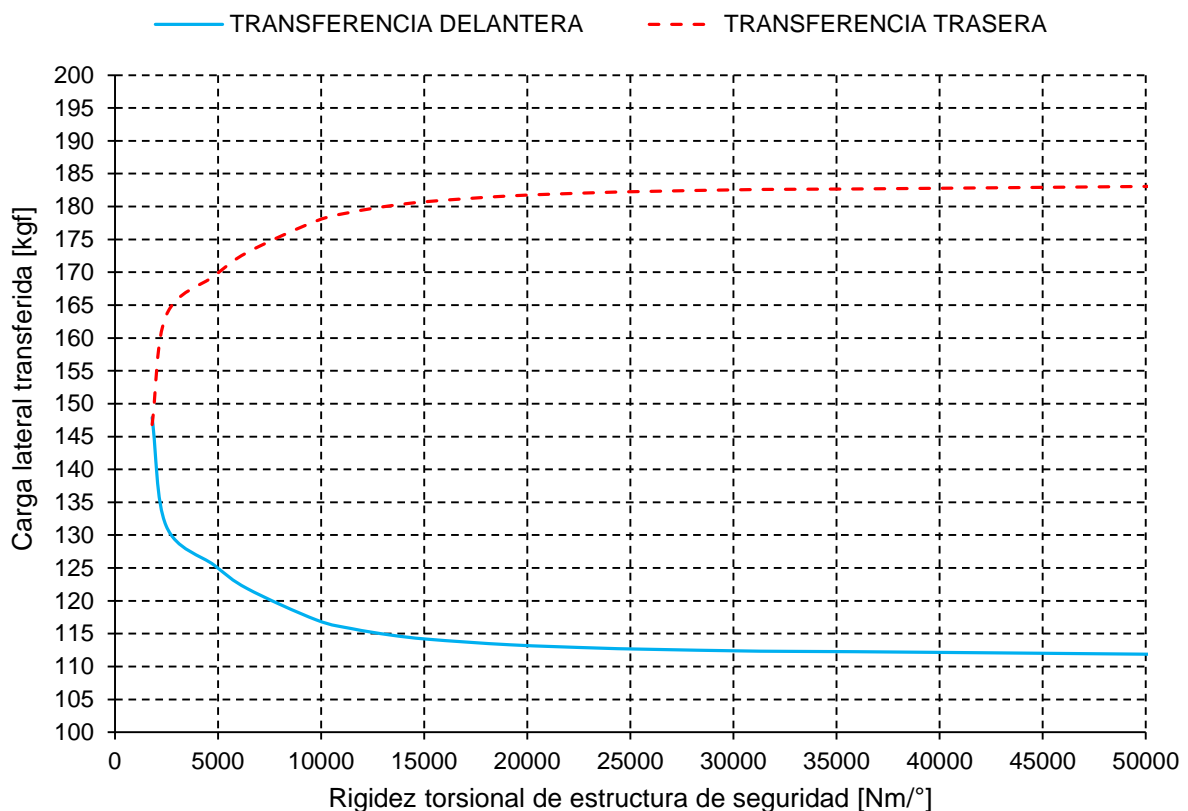


Figura 9.10  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra trasera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra delantera.

### Barra delantera: nula – Barra trasera: 44 [mm] de diámetro y 1,6 [mm] de espesor

La Figura 9.11 presenta la carga lateral transferida por el vehículo de Súper TC 2000 en función de la rigidez torsional de la jaula de seguridad, tomando como parámetro una barra trasera de 44 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra delantera. La magnitud máxima de la carga transferida por el tren trasero es un 1,47% mayor a la que se obtiene con una barra trasera de 38 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm]. En consecuencia, se estima que la magnitud de la carga lateral transferida por el tren trasero tiende asintóticamente hacia un valor máximo, que se obtiene a partir de un cierto diámetro de barra trasera; asimismo la carga lateral que transfiere el tren delantero tiende asintóticamente hacia un valor mínimo. Aquí son válidos los comentarios efectuados para las curvas de la Figura 9.9 y Figura 9.10.



**Figura 9.11**  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra trasera de 44 [mm] de diámetro y espesor 1,6 [mm], y sin barra delantera.

### Barra delantera: nula – Barra trasera: 50,6 [mm] de diámetro y 2,1 [mm] de espesor

En la Figura 9.12 se representa el comportamiento de la carga lateral transferida en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetro la barra estabilizadora trasera de mayor diámetro y sin barra delantera. A través de este gráfico se puede confirmar la tendencia asintótica que posee la magnitud de la carga lateral transferida por el tren trasero, es decir, se concluye que esta magnitud se incrementa a medida que aumenta el diámetro de la barra trasera hasta alcanzar un valor máximo, a partir del cual posteriores incrementos en la rigidez de la barra no traen consigo aumentos de carga transferida. Se obtuvo un aumento del 2,79% en el valor de la carga transferida trasera al pasar de una barra trasera de 44 [mm] de diámetro a una de 50,6 [mm] y espesor 2,1 [mm]. Para valores bajos de rigidez torsional, la carga que transfiere el tren delantero y el trasero toman valores próximos a los que poseen las curvas de las tres figuras predecesoras. A medida que se rigidiza la estructura de seguridad, aumenta la carga transferida por el tren trasero y disminuye en idéntica proporción la carga transferida por el tren delantero.

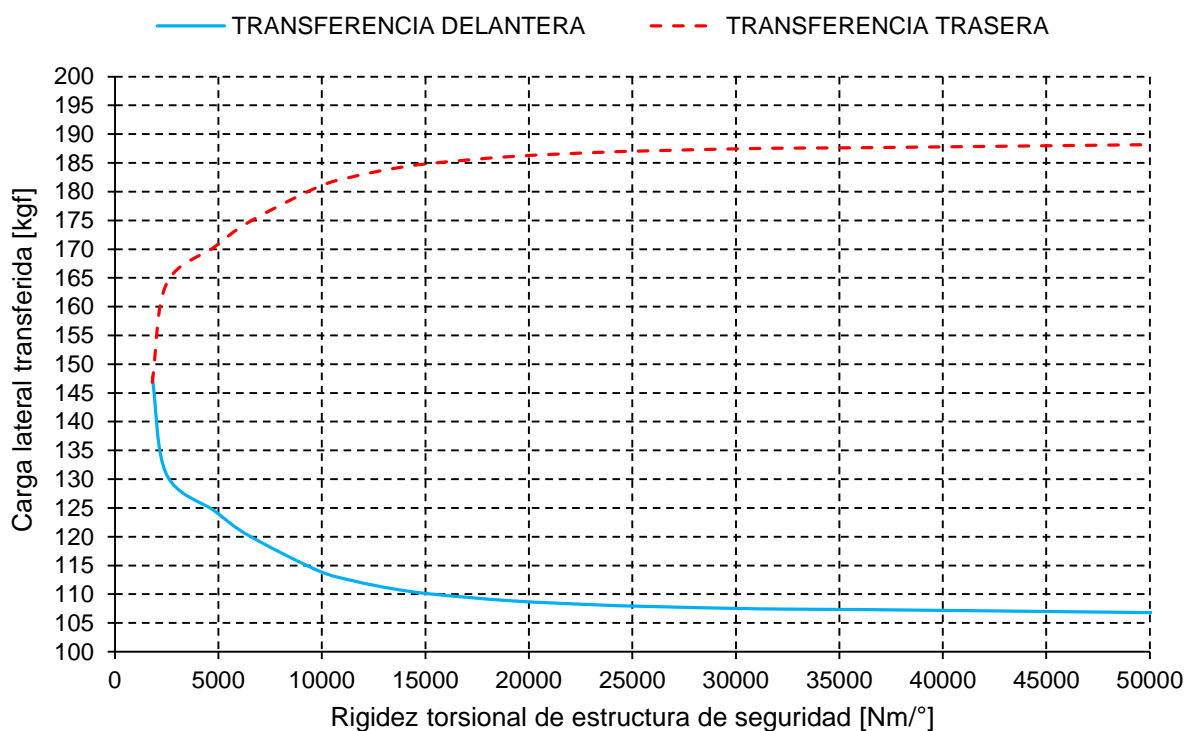


Figura 9.12  
Carga lateral transferida vs rigidez torsional para un vehículo con barra trasera de 50,6 [mm] de diámetro y espesor 2,1 [mm], y sin barra delantera.

## TRANSFERENCIA DE CARGA LATERAL TOTAL

Antes de concluir esta etapa de presentación de resultados, es de interés verificar la magnitud de la carga lateral transferida total, que se obtiene sumando la carga transferida por el tren delantero y trasero. Este valor es prácticamente idéntico para todas las estructuras y barras ensayadas; si se recurre a la ecuación (5.74) se muestra que esta variable es proporcional a la aceleración lateral, a la masa vehicular, a la altura del centro de gravedad e inversamente proporcional a la trocha del coche. En consecuencia, como todas estas propiedades son constantes durante el ensayo es correcto que también lo sea la transferencia de carga lateral total. Mediante la ecuación (5.74) se obtiene la magnitud teórica de la carga lateral transferida total.

$$TCLT = 1100[kg] \frac{9.81 \left[ \frac{m}{s^2} \right] 0,43[m]}{1,605 [m]} = 294,704 [kgf] \quad (9.5)$$

Comparando esta magnitud con el valor que resulta de promediar la transferencia de carga lateral total correspondiente a los datos numéricos de los gráficos presentados en las Figura 9.4 a Figura 9.12, se tiene el error exhibido en la Tabla 9.4.

| ERROR EN LA CARGA LATERAL TRANSFERIDA TOTAL (SIMUDINAMIC)                |   |
|--|---|
| TCLT <sub>teórica</sub> = 294,704 [kgf]                                  | TCLT <sub>SimuDinamic</sub> = 294,891 [kgf] |
| $\% Error = \frac{294,712 - 294,891}{294,712} * 100 = \mathbf{0,061 \%}$ |   |

Tabla 9.4 Error arrastrado por SimuDinamic en la transferencia de carga.

Según se puede ver existe un error del 0,061% entre el valor teórico y el suministrado por SimuDinamic, lo cual es aceptable.

### 3. Análisis de resultados por medio de los parámetros de evaluación.

En esta última etapa se analizan, por medio de los parámetros de evaluación, los datos numéricos de los gráficos presentados en la fase anterior. La finalidad de esta fase consiste alcanzar el objetivo planteado: determinar la magnitud mínima suficiente de rigidez torsional que debe disponer la estructura de seguridad. La relación de transferencia y la sensibilidad son los parámetros a utilizar para ejecutar la

evaluación. En primer lugar se trabaja con la relación de transferencia, delantera y trasera, y posteriormente con la sensibilidad delantera y trasera. El criterio que permite determinar la magnitud de rigidez torsional mínima suficiente y que fue definido en el punto 9.2.4 establece que: *"si al pasar de una estructura de seguridad de menor a mayor rigidez torsional la relación de incrementos porcentuales de la relación de transferencia y/o sensibilidad respecto del incremento de rigidez torsional presenta una variación menor al 2% para la relación de transferencia y menor al 8% para la sensibilidad, la rigidez torsional posee una magnitud mínima suficiente"*. Se presenta mediante tablas cómo varía la relación de incrementos porcentuales con la rigidez torsional y con las diferentes barras estabilizadoras.

#### **RELACIÓN DE TRANSFERENCIA. Barra estabilizadora delantera variable y sin barra trasera.**

La Tabla 9.5 está constituida por seis columnas; la primera de ellas contiene la numeración de las diferentes estructuras de seguridad; la segunda la magnitud de rigidez a torsión de las diferentes jaulas, ubicadas en orden creciente con la numeración; la tercera columna el valor de la relación de transferencia delantera; la cuarta columna el incremento porcentual de la relación de transferencia entre dos jaulas sucesivas; la quinta columna la variación relativa de la rigidez torsional entre dos jaulas sucesivas y finalmente la sexta columna la relación de incrementos porcentuales de la relación de transferencia respecto a la variación relativa de rigidez torsional. Debe notarse que el incremento porcentual de relación de transferencia se calcula a partir de la relación de transferencia aplicada al tren delantero, es decir, se utiliza la ecuación (9.1). En la Tabla 9.5 se presentan todos los términos intermedios utilizados en la determinación de la relación de incrementos porcentuales; se resalta en negrita la magnitud mínima suficiente de rigidez torsional.

| SIN BARRA DELANTERA |                             |                       |                              |              |                                    |
|---------------------|-----------------------------|-----------------------|------------------------------|--------------|------------------------------------|
| JAULA<br>Nº         | RIGIDEZ<br>TORSIONAL [Nm/°] | $R_{td}$<br>DELANTERA | $\Delta R_{td}$<br>DELANTERA | $\Delta K_t$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ |
| 1                   | 803,6                       | 0,55133               | 100                          | 1            | 100                                |
| 2                   | 2485,5                      | 0,48434               | 12,154                       | 0,3781       | 32,132                             |
| 3                   | 4828,1                      | 0,47017               | 2,927                        | 0,9425       | 3,115                              |
| 4                   | <b>6423,7</b>               | 0,46728               | 0,6137                       | 0,3305       | <b>1,854</b>                       |
| 5                   | 9756,9                      | 0,46513               | 0,4607                       | 0,5189       | 0,8884                             |
| 6                   | 11515,2                     | 0,46465               | 0,1027                       | 0,1802       | 0,5712                             |
| 7                   | 13333,5                     | 0,46433               | 0,0698                       | 0,1579       | 0,4424                             |
| 8                   | 15217,8                     | 0,46409               | 0,0507                       | 0,1413       | 0,3586                             |
| 9                   | 19174,8                     | 0,46377               | 0,0698                       | 0,2601       | 0,2681                             |
| 10                  | 23370,9                     | 0,46355               | 0,0474                       | 0,2188       | 0,2161                             |
| 11                  | 25610,9                     | 0,46346               | 0,0189                       | 0,0956       | 0,1972                             |
| 12                  | 31301,4                     | 0,46328               | 0,0387                       | 0,2222       | 0,1743                             |
| 13                  | 35863,4                     | 0,46329               | 1,1E-03                      | 0,1457       | 0,0086                             |
| 14                  | 50595,8                     | 0,46294               | 0,0741                       | 0,4108       | 0,1801                             |

**Tabla 9.5** Variación de la relación de incrementos porcentuales para un vehículo sin barras estabilizadoras.

Para reducir el número de datos y evitar información redundante, la Tabla 9.6 exhibe la magnitud de la relación de incrementos porcentuales para las diferentes barras delanteras utilizadas sin presentar la magnitud que adoptan los diferentes términos intermedios. Se resalta en negrita la magnitud de la relación de incrementos porcentuales a partir de la cual se cumple el criterio establecido, también la rigidez torsional asociada. En la Figura 9.13 se presenta la relación de transferencia delantera y trasera en función de la rigidez torsional, tomando como parámetro las diversas barras delanteras utilizadas, y manteniendo para todas las curvas una barra trasera nula.

| BARRA DELANTERA |                                | D28 [mm]<br>e1,2 [mm]              | D38 [mm]<br>e1,6 [mm]              | D44 [mm]<br>e1,6 [mm]              | D50.6 [mm]<br>e2,1 [mm]            |
|-----------------|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| JAULA<br>Nº     | RIGIDEZ<br>TORSIONAL<br>[Nm/º] | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ |
| 1               | 803,6                          | 100                                | 100                                | 100                                | 100                                |
| 2               | 2485,5                         | 3,271                              | 12,747                             | 15,751                             | 17,632                             |
| 3               | 4828,1                         | <b>0,886</b>                       | 2,402                              | 2,945                              | 3,282                              |
| 4               | 6423,7                         | 1,81                               | 3,271                              | 3,847                              | 4,183                              |
| 5               | 9756,9                         | 1,71                               | 2,793                              | 3,234                              | 3,485                              |
| 6               | 11515,2                        | 1,74                               | 2,718                              | 3,115                              | 3,339                              |
| 7               | 13333,5                        | 1,60                               | 2,466                              | 2,831                              | 3,031                              |
| 8               | 15217,8                        | 1,47                               | 2,237                              | 2,569                              | 2,748                              |
| 9               | 19174,8                        | 1,22                               | <b>1,848</b>                       | 2,121                              | 2,267                              |
| 10              | <b>23370,9</b>                 | 1,04                               | 1,572                              | <b>1,804</b>                       | <b>1,928</b>                       |
| 11              | 25610,9                        | 0,9454                             | 1,425                              | 1,636                              | 1,748                              |
| 12              | 31301,4                        | 0,8031                             | 1,214                              | 1,394                              | 1,489                              |
| 13              | 35863,4                        | 0,8163                             | 1,129                              | 1,282                              | 1,349                              |
| 14              | 50595,8                        | 0,4675                             | 0,7456                             | 0,8651                             | 0,9305                             |

Tabla 9.6 Relación de incrementos porcentuales para las diferentes barras delanteras.

Un análisis de los datos presentados en las Tabla 9.5 y Tabla 9.6 permiten concluir que a medida que aumenta la magnitud de rigidez torsional la relación de incrementos porcentuales disminuye su magnitud, tendiendo a cero para valores elevados de la propiedad mecánica en estudio; matemáticamente esto significa que la función que se analiza está por alcanzar un valor máximo o mínimo, tomando valores muy próximos entre sí. Este efecto se cumple para todas las barras estabilizadoras delanteras, incluyendo el caso de barra delantera nula. Sin embargo, cuanto mayor es la rigidez que posee la barra estabilizadora, mayor es la magnitud de rigidez torsional requerida para satisfacer el criterio de evaluación, es decir, la estabilidad de la curva de relación de transferencia se consigue para valores más elevados de rigidez a



torsión. En las Tabla 9.5 y Tabla 9.6 se resaltan en negrita los valores de la relación de incrementos porcentuales a partir de los cuales se cumple el criterio de rigidez torsional mínima suficiente.

Por otro lado, en la Figura 9.13 se exhibe la relación de transferencia en función de la rigidez torsional de jaula para diferentes barras estabilizadoras delanteras. Las líneas continuas representan la relación de transferencia delantera, mientras que las líneas a trazo la relación de transferencia trasera. La curva continua de color rojo corresponde a la barra delantera de mayor rigidez, mientras que la curva continua marrón representa a un automóvil sin barra delantera; estas dos curvas constituyen los límites superior e inferior de relación de transferencia delantera para el caso en análisis. Asimismo, se puede observar cómo la curva de color rojo precisa una rigidez torsional más elevada para conseguir estabilidad, a diferencia de la curva marrón que la consigue para valores bajos de rigidez torsional. También se observa que las líneas a trazo son las simétricas de las líneas continuas, el eje de simetría es la línea a trazos de color negra que representa una magnitud de 0,5 en el eje de las ordenadas y pertenece a la grilla.

A los fines de la transferencia lateral de carga, se puede decir, como conclusión, que la magnitud de rigidez torsional mínima suficiente que debe disponer la estructura de seguridad del vehículo es de **23370,9 [Nm/°]**.

#### **RELACIÓN DE TRANSFERENCIA. Barra estabilizadora trasera variable y sin barra delantera.**

En este caso se toma como parámetro la barra estabilizadora trasera, y se mantiene el tren delantero sin barra. A diferencia del caso presentado con anterioridad, para el cálculo de la relación de incrementos porcentuales se utiliza la relación de transferencia trasera. En la Tabla 9.7 se presenta el comportamiento de la relación de incrementos porcentuales para las diversas rigideces torsionales de jaula; nuevamente se omiten los términos intermedios empleados en el cálculo de este parámetro.

| BARRA TRASERA |                                | D28 [mm]<br>e1,2 [mm]              | D38 [mm]<br>e1,6 [mm]              | D44 [mm]<br>e1,6 [mm]              | D50.6 [mm]<br>e2,1 [mm]            |
|---------------|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| JAULA<br>Nº   | RIGIDEZ<br>TORSIONAL<br>[Nm/º] | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ | $\frac{\Delta R_{td}}{\Delta K_t}$ |
| 1             | 803,6                          | 100                                | 100                                | 100                                | 100                                |
| 2             | 2485,5                         | 31,316                             | 29,862                             | 29,778                             | 30,631                             |
| 3             | 4828,1                         | 3,445                              | 3,788                              | 3,911                              | 4,192                              |
| 4             | 6423,7                         | 3,729                              | 5,658                              | 6,346                              | 7,389                              |
| 5             | 9756,9                         | 2,288                              | 4,364                              | 5,296                              | 6,737                              |
| 6             | 11515,2                        | <b>1,566</b>                       | 3,333                              | 4,251                              | 5,748                              |
| 7             | 13333,5                        | 2,448                              | 2,574                              | 3,332                              | 4,602                              |
| 8             | 15217,8                        | 0,9445                             | <b>2,006</b>                       | 2,615                              | 3,659                              |
| 9             | 19174,8                        | 0,6794                             | 1,372                              | <b>1,792</b>                       | 2,529                              |
| 10            | <b>23370,9</b>                 | 0,4624                             | 0,9521                             | 1,236                              | <b>1,747</b>                       |
| 11            | 25610,9                        | 0,3935                             | 0,7707                             | 0,9919                             | 1,396                              |
| 12            | 31301,4                        | 0,3247                             | 0,6039                             | 0,7689                             | 1,074                              |
| 13            | 35863,4                        | 0,1276                             | 0,2164                             | 0,2689                             | 0,3749                             |
| 14            | 50595,8                        | 0,2989                             | 0,4307                             | 0,5344                             | 0,7291                             |

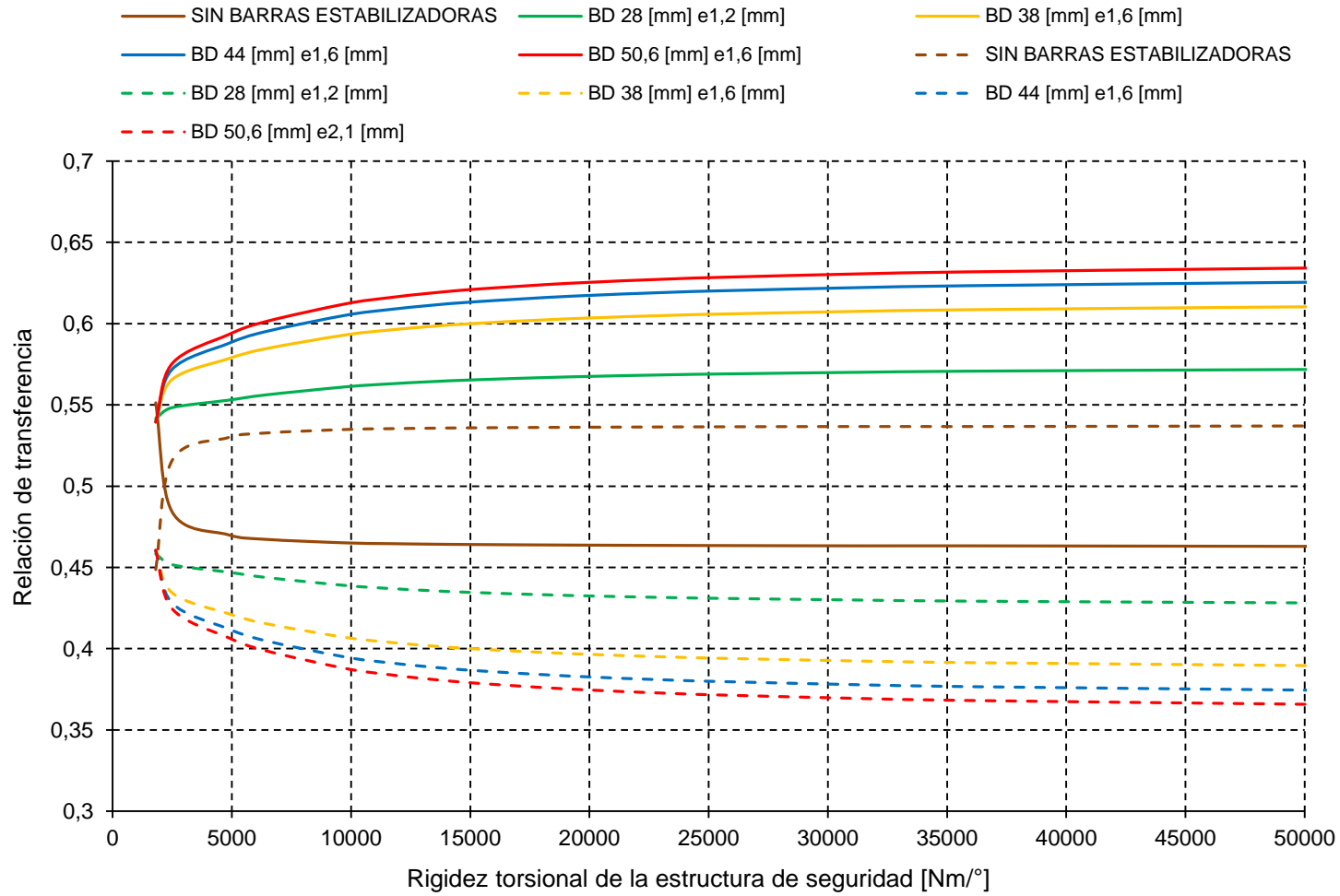
Tabla 9.7 Relación de incrementos porcentuales para las diferentes barras traseras.

Los datos exhibidos en la Tabla 9.7 permiten concluir que a medida que aumenta la magnitud de rigidez torsional, la relación de incrementos porcentuales disminuye su magnitud tendiendo a cero para valores elevados de la propiedad mecánica en estudio. Este comportamiento se presenta para todas las barras traseras ensayadas, incluyendo al automóvil sin barras estabilizadoras. Sin embargo, cuanto mayor es la rigidez que posee la barra anti-rolido trasera, mayor es la magnitud de rigidez torsional requerida para satisfacer el criterio de evaluación, es decir, la estabilidad de la curva de relación de transferencia se consigue para valores más elevados de rigidez a torsión. En la Tabla 9.7 se resalta en negrita los valores de la relación de

incrementos porcentuales a partir de los cuales se cumple el criterio de rigidez torsional mínima suficiente.

Por otro lado, en la Figura 9.14 se grafica la relación de transferencia delantera y trasera en función de la rigidez torsional, tomando como parámetro las diversas barras traseras utilizadas, y conservando una barra anti-rolido delantera nula. Aquí se mantuvo la convención utilizada en la Figura 9.13, las curvas continuas representan la relación de transferencia delantera, mientras que las curvas a trazo la trasera. Las curvas de color rojo representan a la barra estabilizadora de mayor rigidez, mediante la cual se obtiene la mayor transferencia de carga trasera; esta curva requiere una rigidez torsional elevada para conseguir la estabilidad. Al igual que las curvas de la Figura 9.13, las líneas a trazo son las simétricas de las líneas continuas, el eje de simetría es la línea a trazos de color negra que representa una magnitud de 0,5 en el eje de las ordenadas y pertenece a la grilla. Además se puede notar que, si se considera al automóvil sin barras estabilizadoras, la carga lateral transferida por el tren trasero es mayor que la transferida por el delantero; esto está representado por los valores que adopta la relación de transferencia delantera y trasera, los cuales son 0,46 y 0,53 respectivamente; es decir, sin barras anti-rolido el tren delantero transfiere un 46% de la transferencia total y el trasero un 53%.

A los fines de la transferencia lateral de carga, se puede decir, como conclusión, que la magnitud de rigidez torsional mínima suficiente que debe disponer la estructura de seguridad del vehículo es de **23370,9 [Nm/°]**.



**Figura 9.13**  
 Relación de transferencia delantera y trasera vs rigidez torsional para diferente rigideces de barras delanteras.

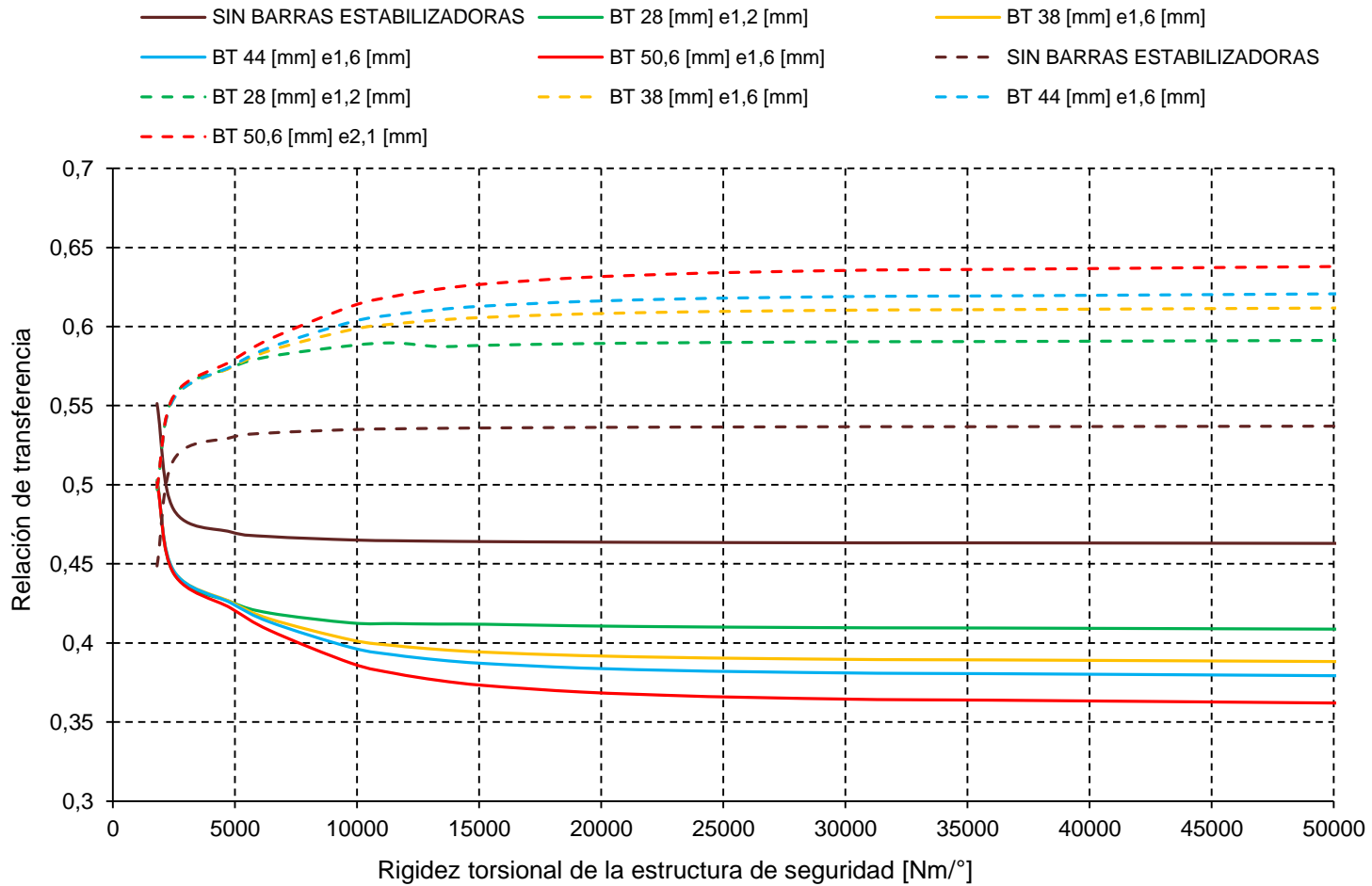


Figura 9.14  
 Relación de transferencia delantera y trasera vs rigidez torsional para diferente rigideces de barras delanteras.

### SENSIBILIDAD DELANTERA. Barra delantera variable y barra trasera con rigidez nula.

Por medio de la Figura 9.15 se exhibe el comportamiento de la sensibilidad delantera en función de la rigidez torsional de la estructura de seguridad, tomando como parámetro la barra delantera y manteniendo la trasera con rigidez nula. Esta gráfica permite observar la influencia que tiene la presencia de la barra estabilizadora delantera en la carga lateral transferida delantera, se presenta en función de la magnitud adoptada por la rigidez torsional de la jaula. Para este caso, de acuerdo al criterio definido en 9.2.4, la relación de incrementos porcentuales de la sensibilidad respecto a la rigidez torsional debe ser menor al 8%, en tales circunstancias se considera aceptable la magnitud de rigidez torsional. Para este parámetro de evaluación no se presenta tabulada la variación de la relación de incrementos porcentuales, sino directamente la magnitud de rigidez a partir de la cual se cumple el criterio definido. Se determinó que si la rigidez torsional de la estructura de seguridad es mayor a **25610,9 [Nm/°]**, la relación de incrementos porcentuales de la sensibilidad respecto a la rigidez torsional presenta una magnitud inferior al 8%.

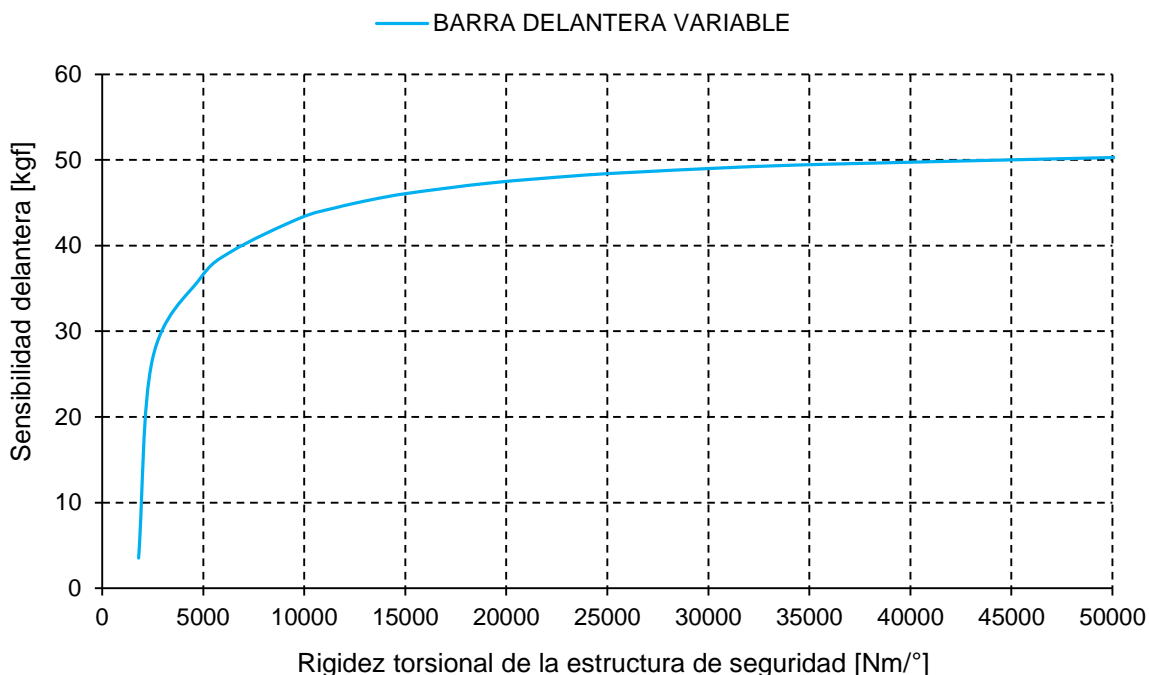


Figura 9.15  
Sensibilidad delantera vs rigidez torsional para barra delantera variable.

### SENSIBILIDAD TRASERA. Barra trasera variable y barra delantera con rigidez nula.

En la Figura 9.16 se presenta la sensibilidad trasera en función de la rigidez torsional, se escoge a la barra trasera como variable y a la delantera con rigidez nula. Esta gráfica permite observar la influencia que tiene la presencia de la barra estabilizadora trasera en la carga lateral transferida trasera; se presenta en función de la magnitud adoptada por la rigidez torsional de la jaula. Si se aplica nuevamente el criterio definido, se obtiene que la estructura de seguridad debe adoptar una magnitud mínima de **15217,8 [Nm/°]**.

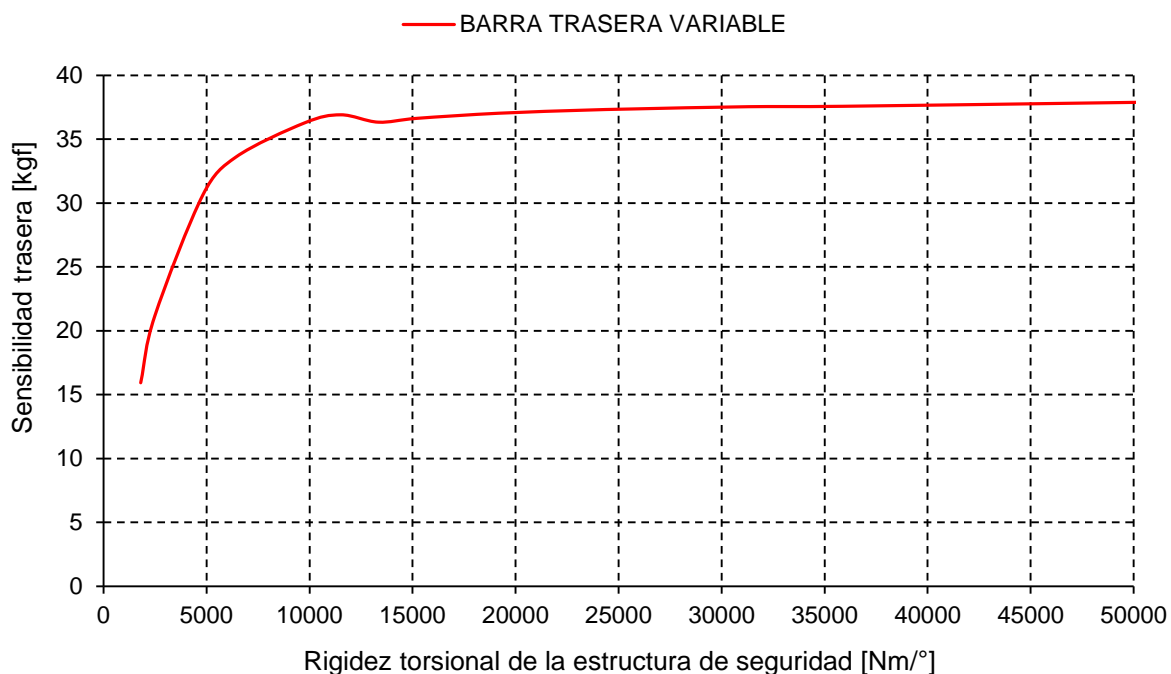


Figura 9.16  
Sensibilidad trasera vs rigidez torsional para barra trasera variable.

### 9.2.6 Comentarios finales

Luego de analizar el fenómeno de transferencia lateral de carga a través de SimuDinamic, y empleando a la relación de transferencia y a la sensibilidad como parámetros de evaluación, se puede decir que la magnitud mínima suficiente que debe disponer la rigidez torsional de la estructura de seguridad es de **25610,9 [Nm/°]**. De esta manera, es posible compensar las actitudes de sobre-viraje o sub-viraje del automóvil seleccionando la barra estabilizadora delantera y trasera que proporcione la transferencia lateral de carga pretendida.

## 10. Conclusiones

Para la concreción del presente Proyecto Integrador ha sido necesario la implementación del método matricial de la rigidez en la modelización del chasis de un automóvil de Súper TC 2000, consiguiendo la creación de un software computacional interactivo denominado SimuDinamic, que fue validado mediante la resolución de ejercicios prácticos de resultados conocidos. Asimismo el presente trabajo ha requerido la revisión y ampliación de contenido vinculado al método matricial de la rigidez como así también a la dinámica automotriz, con la finalidad de incrementar los conocimientos disponibles respecto a esas temáticas.

A pesar de la relativamente poca experiencia en el uso del programa, éste ha demostrado ser una herramienta confiable y segura, que por un lado cumple con los objetivos académicos inicialmente propuestos, pero además mejora notablemente la capacidad y exactitud de las estimaciones que el personal técnico de un equipo de competición puede hacer. Por esta razón, y por su interfaz gráfica sencilla constituye una herramienta de importancia para el automovilismo de competición, posibilitando ser usado por personal que no dispone conocimientos de programación.

La implementación del software desarrollado para estudiar la influencia que presenta la rigidez torsional de la estructura de seguridad de un coche de Súper TC 2000 en la transferencia lateral de carga mostró que esta propiedad mecánica requiere una magnitud mínima suficiente de 25600 [Nm/°] para las condiciones especificadas dentro de este trabajo. Asimismo, se concluyó que la jaula de seguridad utilizada por el equipo Renault posee una rigidez a torsión de 35863,4 [Nm/°], magnitud que es un 40% mayor que la rigidez mínima suficiente calculada. Esto permite establecer que, exclusivamente desde el punto de vista de la transferencia lateral de carga y aceptando como válidas las hipótesis utilizadas, podría utilizarse



una estructura de seguridad de menor rigidez, reduciendo la cantidad de material a emplear y el peso del coche.

Al mismo tiempo, resultó necesario introducirse en la utilización de un software auxiliar de elementos finitos, con la finalidad de emplearlo en el cálculo de la magnitud de rigidez torsional asociada a cada estructura. Se determinó que existen diferencias notorias al calcular la "rigidez torsional" por medio del procedimiento práctico experimental descrito en 5.6.4 respecto al proceso definido en 9.2.4, que es el parámetro que utilizan la mayoría de los equipos de competición lo que puede sin duda dar origen a falsas interpretaciones. Estas diferencias pueden atribuirse a dos factores; por un lado el método experimental determina una rigidez flexo-torsora debido a las condiciones de apoyos impuestas y al tipo de solicitación; y por otro lado considera al chasis vehicular en su totalidad, es decir, incluye al sistema delantero y trasero de suspensión; esto conduce a resultados distorsionados y amplificadas respecto al valor real. Para la estructura de seguridad que posee la rigidez mínima suficiente, existe una diferencia cercana al 90% al calcular la rigidez torsional por el método práctico experimental y por el método propuesto en el punto 9.2.4.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo y a partir de la experiencia ganada ha servido de motivación para una futura vinculación de SimuDinamic con un software de optimización de trayectoria para un circuito de competición, con la finalidad de desarrollar un programa de simulación profesional que sirva de herramienta para los equipos de competición.

Finalmente, el autor del presente trabajo considera que los objetivos han sido alcanzados en forma ampliamente satisfactoria, ya sea por el programa computacional desarrollado como la aplicación práctica asociada.

## 11. Trabajos futuros

### 11.1 Introducción

El presente capítulo se encuentra destinado a presentar futuras mejoras a realizar sobre el programa desarrollado y posible vinculación con otro software.

### 11.2 Futuras mejoras en el código de SimuDinamic

Como se mencionó oportunamente, el desarrollo de SimuDinamic se enfocó a un automóvil de Súper TC 2000, razón por la cual el sistema delantero y trasero de suspensión se encuentran predeterminados en su tipo, se emplean las propiedades de los neumáticos utilizados por el TC 2000 años atrás (ver punto 8.2.24) y el comportamiento aerodinámico del Renault Fluence (ver punto 8.2.23). Asimismo no tiene en cuenta otras propiedades que adquieren importancia en la capacidad del neumático para el desarrollo de fuerzas laterales. En virtud de lo mencionado se propone modificar, como trabajo futuro, el código del programa de manera que el usuario pueda:

- ✓ seleccionar el tipo de sistema de suspensión delantero y trasero que equipa al automóvil;
- ✓ introducir las propiedades del neumático que equipa al coche en estudio;
- ✓ cargar el comportamiento aerodinámico del vehículo;
- ✓ introducir el ángulo de comba y que el mismo software determine el ángulo de deriva  $\alpha$ .

Estas mejoras permiten el desarrollo de un programa más versátil y con un campo de aplicación más amplio; asimismo tiene como finalidad conseguir una mayor precisión en la determinación de las fuerzas laterales que desarrollan los neumáticos.

## 11.3 Vinculación con otro software

Un trabajo futuro de gran utilidad práctica es poder vincular a SimuDinamic con un programa existente de optimización, el cual se encuentra destinado a determinar la trayectoria óptima que debe describir un automóvil de carreras en un circuito de competición, para poder recorrerlo en el menor tiempo. Este programa de optimización ha sido desarrollado por alumnos de la carrera de Ingeniería Mecánica dentro del Centro de Investigación de la Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Córdoba. El software de optimización modela al vehículo mediante una masa puntual, en consecuencia no considera los efectos de la transferencia lateral y longitudinal de carga; además las fuerzas laterales y longitudinales desarrolladas resultan de multiplicar la magnitud de la masa puntual por el coeficiente de rozamiento lateral y longitudinal, que se introducen como datos de entrada en el programa junto con la calzada interna y externa del circuito en análisis, sumado a las condiciones iniciales.

En virtud de lo mencionado, un posible trabajo futuro sería vincular a SimuDinamic con el programa de optimización de trayectoria, de modo que a través de SimuDinamic se determinen las fuerzas laterales máximas que cada neumático desarrolla en cada instante de tiempo. Estas fuerzas se utilizarían como datos de entrada en el optimizador; sin embargo, la aplicación de lo mencionado también requiere un cambio en la modelización del automóvil en el programa de optimización de trayectoria; quizás sería conveniente modelar al coche mediante cuatro masas puntuales asociadas a cada neumático del mismo. Asociar estos dos programas permite crear un verdadero simulador de gran utilidad práctica, fundamentalmente constituye una herramienta para trabajar con los pilotos en un circuito de carreras, analizando los diferentes sectores del mismo donde se originan pérdidas de tiempo.

La Figura 11.1 muestra la trayectoria óptima en color azul para determinados valores de rozamiento lateral y longitudinal, y ciertas condiciones iniciales solicitadas por el programa. Corresponde al circuito Oscar Cabalén de la ciudad de Alta Gracia, provincia de Córdoba. Las curvas de color rojo definen la calzada interna y externa del circuito.

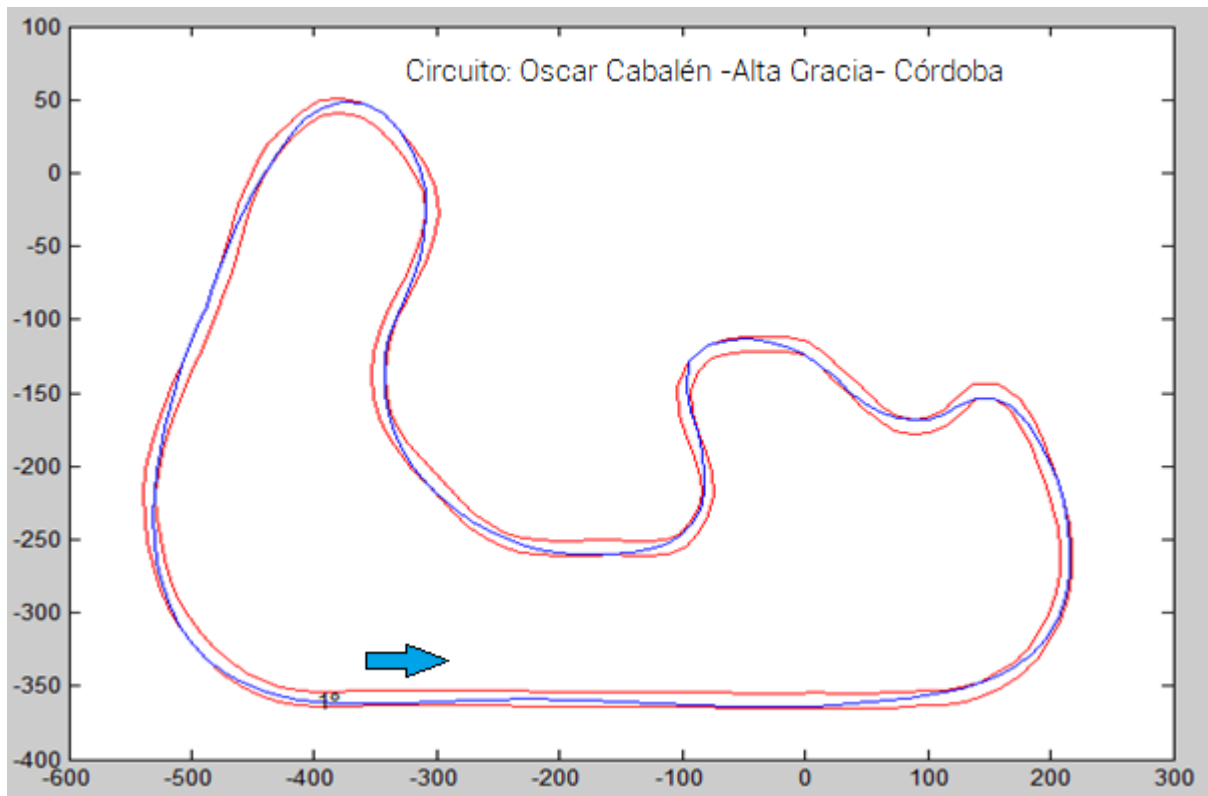


Figura 11.1  
Trayectoria optimizada para el circuito Oscar Cabalén de la ciudad de Alta Gracia (extraído Ref. [10]).

## 12. Referencias

1. W.F. Milliken y D.L. Milliken, "Race Car Vehicle Dynamics", Vol. 1, Society of Automotive Engineers, 1995.
2. Reza N. Jazar, "*Vehicle Dynamics: Theory and application*", Ed. Springer, Nueva York, 2008.
3. Iñaki Dorronsoro Etxeberria, "*Estudio y elección de un modelo matemático de neumático*", Tesis, Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de Navarra, España, 2004.
4. Giancarlo Genta y Lorenzo Morello, "*The Automotive Chassis*", Vol. 1, Ed. Springer, 2009.
5. Juan Alberdi Urbieta, "*Amortiguadores y Suspensión*", Tesis, Depto. de Ingeniería Mecánica, Universidad de Navarra, España, 2003.
6. José Luis Blanco Claraco, Antonio González Herrera, José Manuel Martínez Manrique; "*Análisis Estático de Estructura por el Método Matricial*", Depto. De Ingeniería Civil, Materiales y Fabricación; Universidad de Málaga.
7. Julio César Massa y Carlos Prato, "*Cálculo Estructural I*", Depto. De Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba.
8. M. Asghar Bhatti, "*Fundamental Finite Element Analysis and Applications*", John Wiley & Sons, 2005.
9. Gérald Pirard, "*Mecánica de las Estructuras*", 10ma edición, Depto. De Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba.
10. Franco Bottaro, Jonathan David Brunetti, Nicolás López, Augusto Alejandro Romero Onco, "*Optimización de trayectoria en circuitos de competición*

*automovilística*", Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, 2013.

11. Young W. Kwon y Hyochoong Bang, *"The Finite Element Method using Matlab"*, CRC Press, University of Minnesota, 1997.
12. Hans Pacejka, *"Tire and Vehicle Dynamics"*, Elsevier Ltd., 2012.
13. Thomas Gillespie, *"Fundamentals of Vehicle Dynamics"*, Society of Automotive Engineers, 1992.
14. A.H. Wickens, *"Fundamentals of Rails Vehicle Dynamics"*, Swet & Zeitlinger, Loughborough University, 2005.
15. Lane Thomas Borg, "An approach to using Finite Element Models to Predict Suspension Members load in a Formula SAE Vehicle", Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, 2009.
16. Abaqus CAE 6.13, Documentation, <http://50.16.176.52/v6.13/>.
17. Matlab 2012b, Documentation, <http://www.mathworks.com/help/>.
18. Microsoft Excel, Ayuda y Procedimientos, <http://office.microsoft.com/es-ar/excel-help/>.

## 13. Anexo

### 13.1 Procedimiento para ejecutar validaciones

#### 13.1.1 Primer ejercicio

A continuación se presenta el procedimiento para leer las magnitudes de desplazamientos y reacciones de apoyo asociadas al primer ejercicio de validación presentado en el punto 8.5.2. Para ello se debe:

1. Abrir Matlab 2012b o versiones superiores.
2. Abrir el archivo Primer\_ejercicio\_validación.m situado dentro del directorio SimuDinamic/Validaciones/Primer ejercicio contenidos dentro del CD provisto con el trabajo.
3. Ejecutar el archivo Primer\_ejercicio\_validación.m.
4. En la consola de Matlab escribir 'format long' y presionar la tecla 'enter', estos permite extender la cantidad de decimales en los resultados. A continuación escribir la palabra 'desplazamiento' seguido de la tecla 'enter' para leer los desplazamientos nodales y/o 'fuerzas' seguido de la tecla 'enter' para leer las reacciones de apoyo respectivamente.

#### 13.1.2 Segundo ejercicio

A continuación se presenta el procedimiento para leer las magnitudes de desplazamientos y reacciones de apoyo asociadas al primer ejercicio de validación presentado en el punto 8.5.3. Para ello se debe:

5. Abrir Matlab 2012b o versiones superiores.

6. Abrir el archivo Segundo\_ejercicio\_validación.m situado dentro del directorio SimuDinamic/Validaciones/Segundo ejercicio contenidos dentro del CD provisto con el trabajo.
7. Ejecutar el archivo Segundo\_ejercicio\_validación.m.
8. En la consola de Matlab escribir 'format long' y presionar la tecla 'enter', estos permite extender la cantidad de decimales en los resultados. A continuación escribir la palabra 'desplazamiento' seguido de la tecla 'enter' para leer los desplazamientos nodales y/o 'fuerzas' seguido de la tecla 'enter' para leer las reacciones de apoyo respectivamente.

### 13.1.3 Tercer ejercicio

A continuación se presenta el procedimiento para leer las magnitudes de desplazamientos y reacciones de apoyo asociadas al primer ejercicio de validación presentado en el punto 8.5.4. Para ello se debe:

9. Abrir Matlab 2012b o versiones superiores.
10. Abrir el archivo Tercer\_ejercicio\_validación.m situado dentro del directorio SimuDinamic/Validaciones/Tercer ejercicio contenidos dentro del CD provisto con el trabajo.
11. Ejecutar el archivo Tercer\_ejercicio\_validación.m.
12. En la consola de Matlab escribir 'format long' y presionar la tecla 'enter', estos permite extender la cantidad de decimales en los resultados. A continuación escribir la palabra 'desplazamiento' seguido de la tecla 'enter' para leer los desplazamientos nodales y/o 'fuerzas' seguido de la tecla 'enter' para leer las reacciones de apoyo respectivamente.

## 13.2 Estructuras de seguridad

### 13.2.1 Introducción

El presente capítulo está destinado a presentar las diversas estructuras de seguridad utilizadas en la aplicación de SimuDinamic.



### 13.2.2 Parámetros que influyen en la rigidez

En términos generales la rigidez puede definirse como la propiedad que posee un cuerpo, un elemento o una estructura de oponerse a las deformaciones. También podría definirse como la capacidad de soportar cargas sin deformarse o desplazarse excesivamente. Con la finalidad de analizar y estudiar los parámetros que influyen en la rigidez de una estructura se recurre a la matriz de rigidez de una barra de pórtico espacial. Los elementos de esta matriz están conformados por los siguientes términos:

$$\checkmark \frac{EA}{L};$$

$$\checkmark \frac{12EI}{L^3};$$

$$\checkmark \frac{6EI}{L^2};$$

$$\checkmark \frac{4EI}{L};$$

$$\checkmark \frac{GJ}{L}.$$

Donde  $E$  es el módulo de elasticidad longitudinal,  $G$  el módulo de elasticidad transversal,  $L$  la longitud de la barra,  $A$  el área transversal,  $I$  la inercia y  $J$  la inercia polar. Si se considera un elemento de barra de sección circular hueca, los tres últimos términos se definen del siguiente modo:

$$A = \frac{\pi(D_{ext}^2 - D_{int}^2)}{4} \quad I = \frac{\pi(D_{ext}^4 - D_{int}^4)}{64} \quad J = \frac{\pi(D_{ext}^4 - D_{int}^4)}{32}$$

Donde  $D_{ext}$  es el diámetro exterior del tubo y  $D_{int}$  el diámetro interior. En todos ellos se observa que cuanto mayor es el diámetro exterior  $D_{ext}$  y menor el diámetro interior  $D_{int}$  cada uno de estos términos adquieren una magnitud mayor, en consecuencia los términos que constituyen a la matriz también incrementan su magnitud, lo cual da origen a una barra de una gran rigidez. Por lo tanto, se deduce que para una estructura conformada por un material de propiedades mecánicas constantes, es

posible modificar su rigidez variando la geometría de las barras que la integran, más específicamente el diámetro de las mismas.

Por otro lado, en la vida cotidiana existen gran cantidad de estructuras que están formadas a base de triángulos unidos entre sí. El triángulo es el único polígono que no se deforma cuando actúa sobre él una fuerza. Al aplicar un esfuerzo de compresión sobre uno cualquiera de los vértices de un triángulo formado por tres vigas, automáticamente las dos vigas que parten de dicho vértice quedan sometidas a dicha fuerza de compresión, mientras que la tercera quedará sometida a un esfuerzo de tracción. Cualquier otra forma geométrica que adopten los elementos de una estructura no será rígida o estable hasta que no se triangularice.

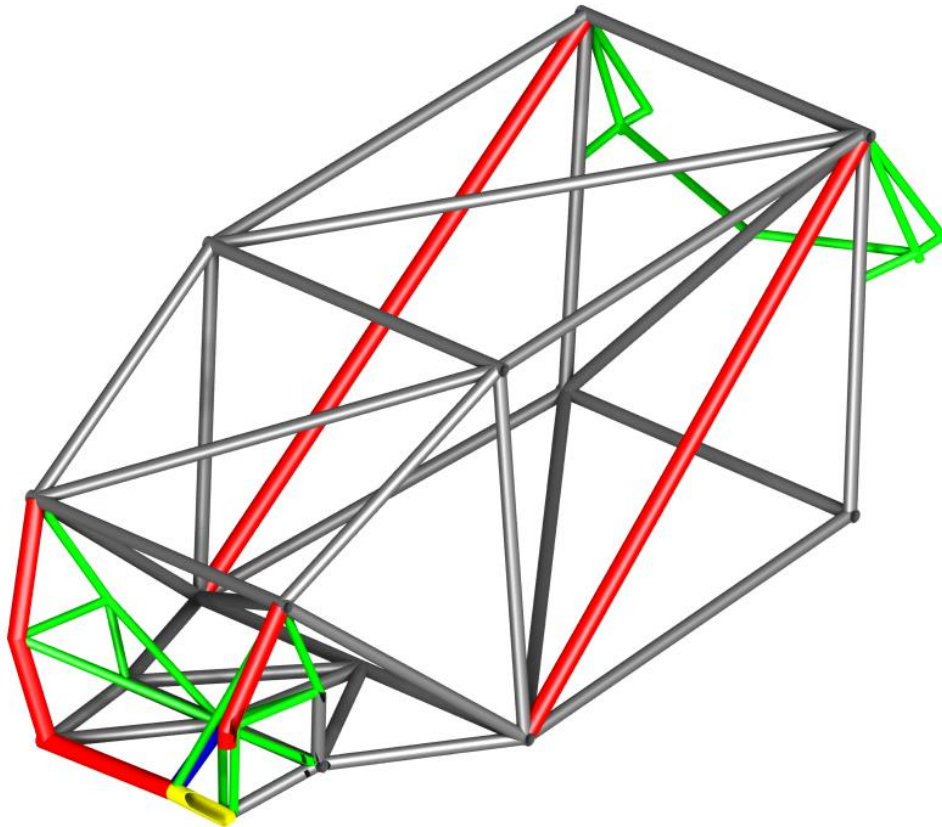
En base a lo expuesto, se puede modificar la rigidez de la estructura de seguridad, ya sea incrementando o reduciendo su magnitud, mediante:

- ✓ modificaciones del diámetro exterior e interior de las barras que la constituyen o bien,
- ✓ eliminando o agregando regiones triangulares dentro de la estructura.

### 13.2.3 Estructuras utilizadas en el estudio de rigidez torsional

Para evaluar la influencia que presenta la rigidez torsional en la transferencia lateral de carga, resulta necesario contar con estructuras de seguridad de diferentes rigideces torsionales. Para ello, se adopta como punto de partida la jaula que equipó al Renault Fluence de Súper TC 2000 durante la temporada 2013, y se genera una serie de estructuras de idéntica geometría exterior pero modificando la sección transversal de los elementos tubulares que la integran; es decir, las jaulas de diferentes rigideces torsionales se obtienen modificando el diámetro de los tubos de la estructura original. Se optó por este mecanismo ya que permite incrementar o reducir gradualmente la magnitud de rigidez en la totalidad de la estructura. Eliminar o agregar regiones triangulares a la estructura puede dar origen a un cambio brusco de la propiedad en estudio.

La Figura 13.1 muestra la jaula adoptada como punto de partida. Está constituida por elementos de sección tubular de diferentes diámetros y espesores que le proporcionan una rigidez torsional de 35863,35 [Nm/°].



**Figura 13.1**  
Estructura de seguridad utilizada por el equipo Renault de Súper TC 2000 durante el calendario 2013.

En la Tabla 13.1 se presentan las dimensiones de los elementos tubulares que integran las diferentes estructuras planteadas.

| Jaula N° | Tubo GRIS                        | Tubo ROJO                          | Tubo VERDE                         | Tubo AZUL                        | Tubo AMARILLO                      |
|----------|----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 1        | Diám.: 3 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm]  | Diám.: 3 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm]    | Diám.: 3 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm]    | Diám.: 3 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm]  | Diám.: 3 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm]    |
| 2        | Diám.: 5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]  | Diám.: 5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    | Diám.: 5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    | Diám.: 5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]  | Diám.: 5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    |
| 3        | Diám.: 8 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]  | Diám.: 8 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    | Diám.: 8 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    | Diám.: 8 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]  | Diám.: 8 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]    |
| 4        | Diám.: 10 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 10 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 10 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 10 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 10 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 5        | Diám.: 14 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 14 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 14 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 14 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 14 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 6        | Diám.: 16 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 16 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 16 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 16 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 16 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 7        | Diám.: 18 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 18 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 18 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 18 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 18 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 8        | Diám.: 20 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 20 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 20 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 20 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 20 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 9        | Diám.: 24 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 24 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 24 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 24 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 24 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 10       | Diám.: 28 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 28 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 28 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 28 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 28 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 11       | Diám.: 30 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 30 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 30 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 30 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 30 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 12       | Diám.: 35 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 35 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 35 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 35 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 35 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |
| 13       | Diám.: 38 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 50,6 [mm]<br>Esp.: 0,5 [mm] | Diám.: 25,5 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 44 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 50,6 [mm]<br>Esp.: 2,2 [mm] |
| 14       | Diám.: 50 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 50 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 50 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   | Diám.: 50 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm] | Diám.: 50 [mm]<br>Esp.: 1,6 [mm]   |

Tabla 13.1 Propiedades geométricas de las diferentes estructuras de seguridad utilizadas en el ensayo.

En la Tabla 9.3 del punto 9.2.5 se presenta la magnitud de rigidez torsional de las diferentes estructuras.

## 13.3 Procedimiento para ejecutar una simulación con SimuDinamic

En este apartado se presenta el procedimiento que debe seguir el lector para ejecutar una simulación mediante SimuDinamic. Dentro del CD provisto con el trabajo se encuentran los archivos de entrada junto con el programa. El usuario debe seguir el siguiente proceso.

1. Ingresar al directorio SimuDinamic/Simulación, ejecutar la aplicación MCRInstaller e instalarla. Esta permite abrir el programa sin necesidad de tener instalado Matlab en el ordenador. Este paso puede ser obviado si se dispone Matlab; en tal caso se debe abrir y ejecutar la función principal 'SimuDinamic.m' y saltar directamente al paso n°3.
2. Abrir SimuDinamic haciendo doble clic en el ícono denominado SimuDinamic.
3. Cargar el archivo de datos; para ello clic en 'Archivo' seguido de 'Abrir archivo de datos' o directamente mediante el atajo 'Ctrl+A', posteriormente seleccionar el archivo de datos denominado 'Datos del vehículo'.
4. Marcar el casillero correspondiente 'Simulación' que se ubica dentro del panel 'Tipo de Solución'.
5. Cargar los tres archivos que contienen información cinemática. Para ello clic en cada uno de los botones 'Cargar Datos' situados dentro del panel 'Datos Cinemáticos'. Los archivos poseen la siguiente denominación: 'Aceleración-lateral', 'Aceleración-longitudinal' y 'Velocidad-lineal'.
6. Proceder con la carga de los archivos asociados a la estructura de seguridad. Esto se efectúa mediante los botones situados dentro del panel 'Estructura de Seguridad'. Los archivos a utilizar poseen la siguiente denominación: 'COORDENADAS', 'CONECTIVIDAD', 'PROPIEDADES' y 'CONEXIONES'.
7. Haciendo clic en 'Visualizar Modelo' se despliega una ventana con el modelo a resolver. Este paso es optativo.

8. Resolver el modelo haciendo clic sobre el botón 'RESOLVER MODELO' situado dentro del panel 'RESOLUCIÓN'. El software despliega una ventana de aviso si la ejecución ha sido satisfactoria.
9. Finalmente es posible observar los resultados seleccionando desde cada menú desplegable la información a graficar y posteriormente cliqueando sobre el botón 'GRAFICAR RESULTADOS'.
10. Los resultados pueden ser almacenado en un archivo de extensión .xlsx presionando sobre el botón 'GUARDAR RESULTADOS'.
11. Cerrar el programa mediante 'Archivo' seguido de 'Cerrar programa' o directamente 'Ctrl+S'.

Las Figura 13.2 muestra el modelo a resolver, mientras que la Figura 13.3 y Figura 13.4 la carga normal sobre los neumáticos delanteros y traseros, y las fuerzas laterales máximas que pueden ser desarrolladas por estos. Todas las figuras se obtuvieron de la ejecución de SimuDinamic.

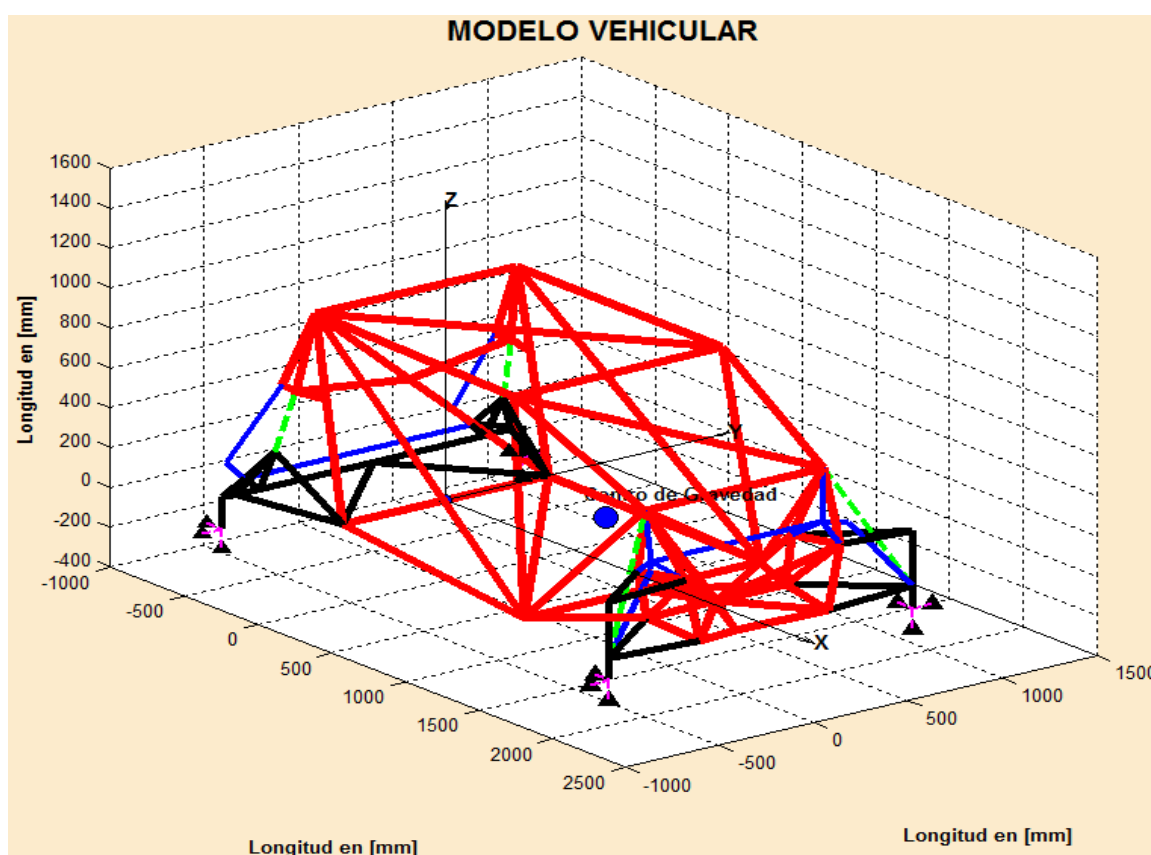


Figura 13.2  
Modelo vehicular utilizado en la simulación.

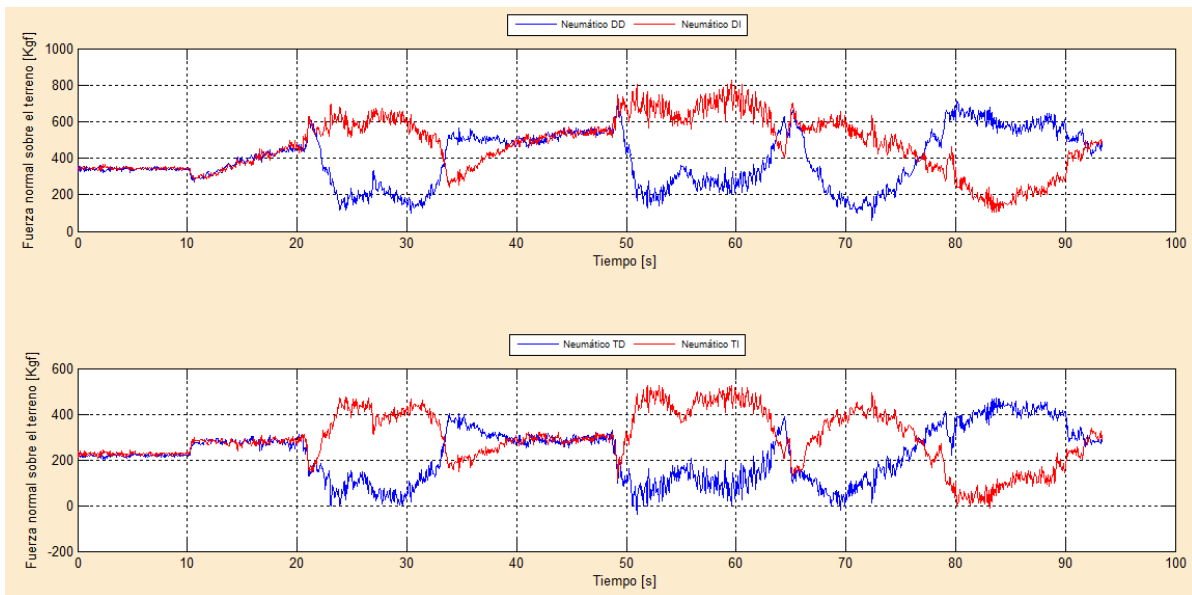


Figura 13.3  
Carga normal sobre los neumáticos.

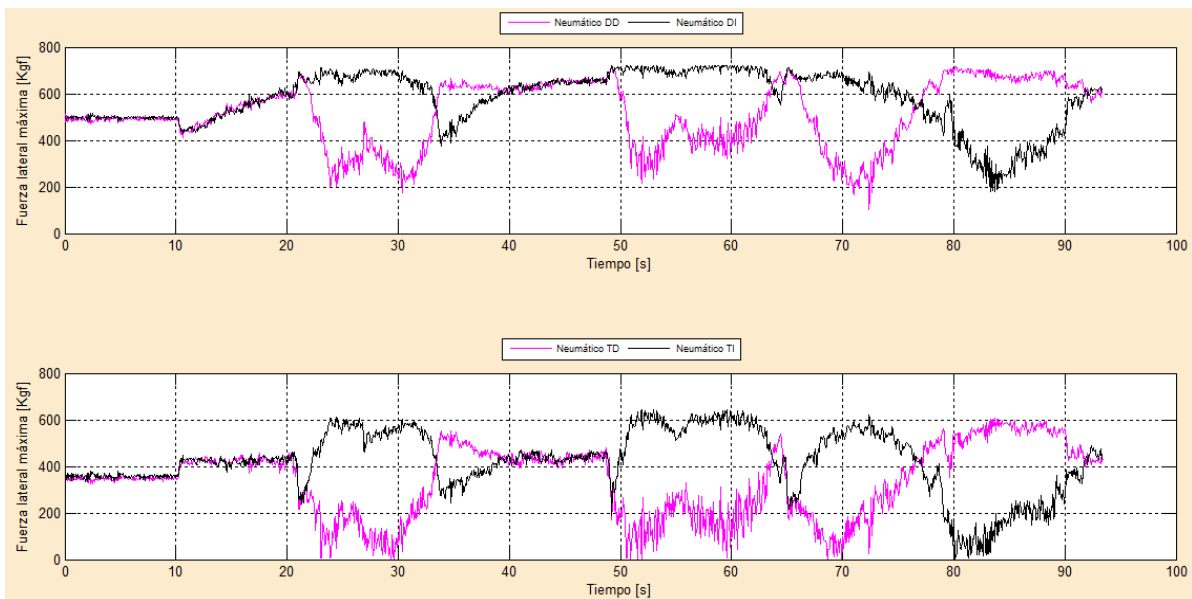
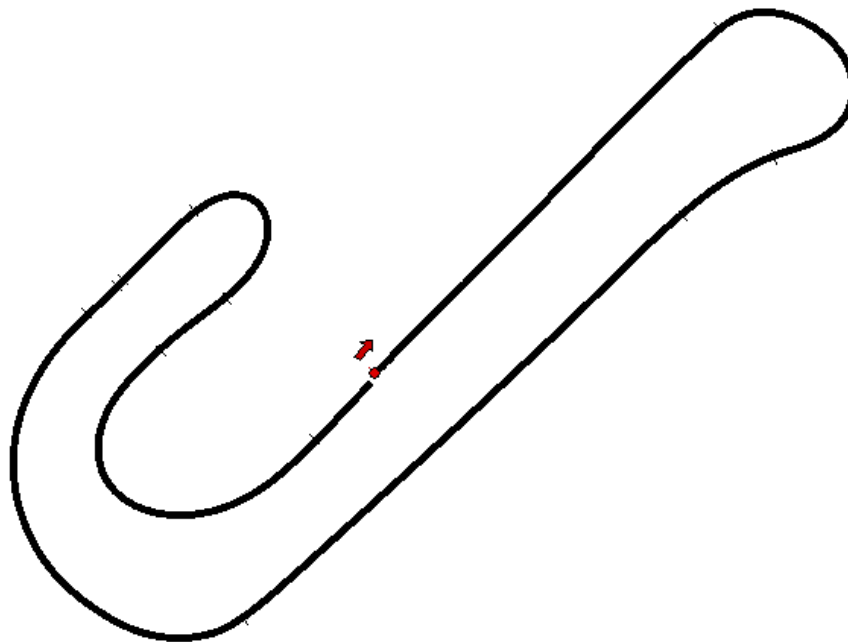


Figura 13.4  
Fuerza lateral máxima desarrollada por los neumáticos.

La Figura 13.5 muestra una vista del circuito al cual pertenecen los datos cinemáticos utilizados en la simulación. El tiempo  $t=0$  [s] corresponde al punto rojo de la figura, y el tiempo  $t=93,4$  [s] corresponde al mismo punto luego de haber recorrido la vuelta completa.

JUNIN



**Figura 13.5**  
Circuito de la ciudad de Junín.

## 13.4 Contenido del CD adjunto al trabajo

Junto con el texto del Proyecto se adjunta un CD que contiene la siguiente información:

- ✓ archivos para ejecutar los tres ejercicios utilizados en la validación del programa;
- ✓ las diversas funciones de Matlab que integran al programa, asimismo una aplicación denominada 'MCRInstaller' que debe ser instalada por el usuario para ejecutar el programa sin necesidad de tener instalado Matlab en el ordenador. Luego de ser instalada debe presionarse el botón 'SimuDinamic' para abrir el programa;
- ✓ los archivos necesarios para ejecutar la simulación presentada en el punto 13.3;
- ✓ el informe del Proyecto en formato digital.

La Figura 13.6 muestra la estructura interna del CD.



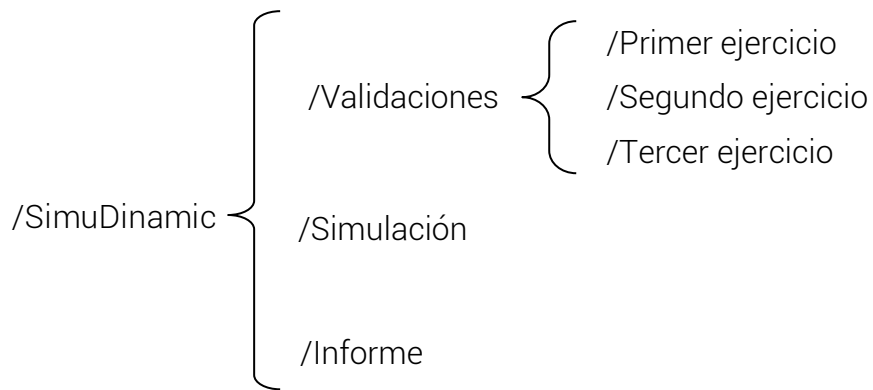


Figura 13.6  
Estructura interna del CD.